Кировская ЛМШ-2015

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Смысл оценок, выставлявшихся за решения конкурсных задач:

+ (*плюс*): задача решена правильно;

∔, +/. (*плюс с точкой*): решение верно, но содержит небольшие погрешности;

±, +/–, +- (*плюс-минус*): решение в целом верно, но содержит недочеты;

⩲, +/=, += (*плюс с двумя минусами*): решение в целом верно, но содержит значительные погрешности;

+/2 (*плюс пополам*): задача решена примерно наполовину;

∓, –/+, -+ (*минус-плюс*): решения нет, но есть заметное продвижение в правильном направлении;

⩱, =/+, =+ (*минус-минус-плюс*): есть менее значительное продвижение;

∸, –/. (*минус с точкой*): есть отдельные разумные соображения;

– (*минус*): решение полностью неверно.

После условий задач указаны их авторы или источники. Задачи, где таких указаний нет — математический фольклор.

1 (6). *Расшифруйте ребус: БРА + БАР = РАБ (здесь одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные – разными). Объясните, как был получен ответ.*

Ответ: 495 + 459 = 954. **Решение.** В разряде десятков суммы стоит та же буква А, что и в разряде десятков второго слагаемого. Такое бывает в двух случаях: при Р = 0 (и переноса из разряда единиц при сложении не было) и при Р = 9 (и перенос был). Но первое невозможно, ибо сумма не может начинаться с нуля. Значит, Р = 9. Поэтому был перенос из разряда десятков в разряд сотен, откуда 2Б+1 = 9, т.е., Б = 4. Рассматривая теперь сложение в разряде единиц, получаем А+9 = 14, откуда А = 5.

Комментарии. Плюсом оценивалось объяснение, из которого было понятно, почему ребус можно расшифровать только одним способом. За ответ без объяснения ставился -/+. Если в решении без обоснования использовалось равенство А = Б+1, оно оценивалось не выше, чем в +/-.

2 (6-7). *Деревянный куб окрасили снаружи, истратив 6 граммов краски, а затем распилили на 27 одинаковых кубиков. Сколько потребуется краски, чтобы окрасить неокрашенную часть поверхности получившихся кубиков?*

Ответ: 12 г. **Решение.** Чтобы распилить куб на 27 кубиков, нужно сделать по два распила параллельно каждой из пар параллельных граней куба — всего 6 распилов. Каждый такой распил даёт неокрашенную поверхность размером в две грани исходного куба. Так как на окраску одной его грани требуется 6:6 = 1 г краски, на окраску всей неокрашенной поверхности её потребуется 6·2 = 12 г.

Комментарии. Мы привели «идейное» решение, не требующее особых подсчётов. Конкурсные решения в большинстве своём были более вычислительными. Если при верном ходе решения в нём была допущена арифметическая ошибка, повлиявшая на результат, оно оценивалось в +/=.

Самыми громоздкими были решения, основанные на отдельном подсчёте числа неокрашенных кубиков и кубиков с тремя, двумя и одной окрашенными гранями. Если один из видов при этом был забыт или количество кубиков с ним было подсчитано неверно, решение оценивалось не выше, чем в +/2.

3 (6-7). *Несколько шестиклассников и семиклассников собирали яблоки. Каждый семиклассник сорвал по 15 яблок, каждый шестиклассник — по 11 яблок. Затем некоторые дети передали часть сорванных ими яблок другим участникам сбора. После этого у всех семиклассников оказалось по 7 яблок, а у всех шестиклассников — по 21 яблоку. Кого среди сборщиков было больше: шестиклассников или семиклассников?* (16 Олимпиада школьников Литвы для 7-8 классов, 2014 год; формулировка изменена)

Решение. Пусть среди сборщиков было a шестиклассников и b семиклассников. По условию $15b+11a = 7b+21a$, откуда $8b = 10a$, то есть $b = 1{,}25a$. Таким образом, семиклассников было больше.

Комментарии. Некоторые авторы, заметив, что у каждого шестиклассника стало на 8 яблок больше, а у каждого семиклассника — на 10 яблок меньше, сразу делали вывод, что семиклассников больше, считая, осознанно или неосознанно, что шестиклассники отдавали яблоки только семиклассникам, а семиклассники — только шестиклассникам. Такое рассуждение не учитывает, что одноклассники могли отдавать яблоки и друг другу. Поэтому оно оценивалось в +/2. Если был приведён только какой-то числовой пример, ставился –/+.

4 (6-7). *В каждой клетке таблицы 7×7 записано по числу таким образом, что сумма любых трёх чисел, идущих в строке или столбце подряд, равна 2015. В левом верхнем углу записано число 100. Какое число может быть записано в правом нижнем углу (перечислите все возможности и объясните, почему других возможностей нет)?*

Ответ: 100. **Решение**. Легко видеть, что числа, стоящие в одной строке или одном столбце через два, равны. Цепочкой таких чисел можно соединить два числа, стоящие в любых двух углах нашей таблицы. Поэтому числа во всех углах равны.

Комментарии. Если решение состояло в приведении одного числового примера, оно оценивалось в –/+. Если нужная закономерность была обоснована, но найдено не то число (например, в правом верхнем углу вместо нижнего), ставился +/=. Ответ без всякого обоснования не засчитывался.

5 (6-8). *Имеется неограниченное количество квадратных плиток размерами 1×1, 2×2, 3×3 и т.д. Как сложить (без пропусков и наложений) из 11 таких плиток квадрат наименьших возможных размеров? Нарисуйте (по клеточкам) чертёж и постарайтесь объяснить, почему квадрат меньших размеров из этих плиток сложить нельзя.* (16 Олимпиада школьников Литвы для 7-8 классов, 2014; формулировка изменена)

Решение. Возьмём клетчатый квадрат 5×5, клетки в правом нижнем углу объединим в плитку 3×3, а клетки в правом и левом верхних углах — в плитки 2×2. Получится квадрат 5×5, сложенный из одной плитки 3×3, двух плиток 2×2 и восьми плиток 1×1. Квадрат 4×4 из квадратов меньших размеров сложить нельзя: если среди них будет квадрат 3×3, то всего квадратов будет не больше, чем 1+(16–9) = 8, а если все квадраты будут размеров 2×2 и 1×1, то если квадратов 2×2 будет хотя бы два, то всего квадратов будет не больше 10, а если один, то плиток получится 12. Квадрат со стороной меньше 4 сложить не удастся, так как его площадь меньше 11.

Комментарии. Как видим, решение складывается из двух частей: примера разрезания квадрата 5×5 и объяснения, почему квадрат меньшего размера требуемым образом разрезать нельзя. За пример без последующего объяснения ставился +/2, пример с неполным объяснением (когда разбирались не все возможные случаи) оценивался в +/– или +/=. Только объяснение без примера разрезания оценивалось в –/+.

6 (6-8). *Страшила и Железный Дровосек отправились утром в Изумрудный город в один день, по одной дороге и в одном направлении, причем вначале Дровосек находился на 28 миль позади Страшилы и на расстоянии 100 миль от цели. Оба идут с 8 утра до 8 вечера, и скорость каждого в течение дня постоянна. В первый день Дровосек прошел 20 миль, во второй — 18, в третий — 16, и так далее, а Страшила в первый день прошел 4 мили, во второй — 8, в третий — 12, и так далее. Где и когда они окажутся одновременно?* (А. Шаповалов)

Ответ: В 2 часа дня на третий день на расстоянии 54 км от Изумрудного города и с 8 часов вечера четвёртого дня до 8 часов утра пятого дня на расстоянии 32 км от Изумрудного города. **Решение**. К концу второго дня Страшила будет в 100–28–4–8 = 60, а Дровосек — в 100–20–18 = 62 милях от цели. На третий день Дровосек догонял Страшилу со скоростью 16–12 = 4 мили в день, и потому отыграл оставшиеся ему до Страшилы 2 мили в середине времени движения, т.е., в 2 часа дня. До Изумрудного города в этот момент им оставалось 60–12/2 = 54 мили. К концу третьего дня Дровосек обогнал Страшилу ещё на 2 мили. Но на четвёртый день Страшила прошёл уже на 2 мили больше Дровосека и, стало быть, в конце дня догнал его. Таким образом, с 8 вечера четвёртого дня до 8 утра пятого дня Страшила и Дровосек находились в одной точке в 100–28–4–8–12–16 = 32 милях от Изумрудного города. После этого Страшила всё время шёл быстрее Дровосека, и потому новых встреч не случилось.

Комментарии. Основным недостатком решений этой задачи была потеря одного из двух ответов. Оценка в таких случаях была не выше –/+. Второе решение теряли те, кто, узнав, когда Страшила впервые обгонит Дровосека, не задумывались, что могло быть несколько встреч. Первое решение пропадало у смотревших только на ситуации в конце дня. Если были найдены оба ответа, н не объяснялось, почему больше встреч не было, ставился +/–.

7 (6-9). *В футбольном турнире участвовали 5 команд. Каждая сыграла с каждой по одному разу. За победу давали 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. По окончанию турнира оказалось, что четыре из пяти команд-участниц набрали 1, 2, 5 и 7 очков соответственно. Сколько очков могла набрать оставшаяся команда? Перечислите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.* (16 Олимпиада школьников Литвы для 7-8 классов, 2014; формулировка изменена)

Решение. Очевидно, команды, набравшие 1 и 2 очка, сделали одну и две ничьих соответственно, а остальные матчи проиграли. Команда, набравшая 5 очков, сделала две ничьих (пять не могла, так как сыграла всего четыре матча), один матч выиграла и один проиграла. Наконец, команда, набравшая 7 очков, сделала одну ничью, выиграла два матча и один матч проиграла. Таким образом, четыре перечисленных команды в совокупности проиграли 7 матчей. Так как побед эти четыре команды одержали только три, не менее четырёх поражений они потерпели от оставшейся команды. Тем самым, оставшаяся команда победила во всех своих четырёх матчах и набрала 12 очков.

Комментарии. Как видим, для решения совсем не обязательно полностью восстанавливать турнирную таблицу. Тем не менее, по условию задачи она восстанавливается однозначно, и тот, кто это показывал, получал свой заслуженный плюс. Но те, кто просто приводил эту таблицу, не объясняя, почему других вариантов нет, получали –/+.

Продвинутая, но не доведённая до конца попытка такого объяснения повышала оценку до +/2.

8 а) (6-10). *Некоторые из 2015 проводов подключены к положительному полюсу батареи, остальные — к отрицательному. Имеется прибор, который можно присоединить к любым двум проводам. При этом загорается синяя или белая лампочка. Одна из лампочек означает, что ток идёт, другая — что нет (ток идет между разными полюсами), но неизвестно, какая лампочка что означает. Можно ли за 2015 измерений установить все пары проводов, между которыми идёт ток?* (Омская городская олимпиада им. Кукина, 2005; формулировка изменена)

б) (8-10). *Тот же вопрос про 2014 измерений.*

Решение. **а)** *Можно*. Первое решение. Возьмём любой провод 1, присоединим его к одному контакту прибора, а ко второму будем последовательно присоединять все остальные провода. После 2014 измерений остальные провода разобьются на две группы: те, которые зажигали белую лампочку, и те, что зажигали синюю. Понятно, что провода одной группы подсоединены к одному из полюсов, а другой – к другому. Чтобы понять, куда подсоединен провод 1, подсоединим к прибору два провода из одной группы. Очевидно, ток в этом случае не пойдёт, и провод один окажется в группе той лампочки, которая при этом загорится. Второе решение. Сначала возьмем любые провода 1, 2 и 3, и рассмотрим показания прибора на каждой паре. Если все три показания совпали (скажем, загорелся синий), то все три провода подсоединены к одному полюсу. Теперь мы знаем, что синий цвет означает отсутствие тока. Если же не показания не совпали — положим, дважды загорелся синий, и один раз (между 1 и 3 контактом) — белый, — то отсутствие тока может означать только цвет, встретившийся один раз, то есть белый (потому как если между 1 и 3 проводами тока нет, и между 2 и 3 тока нет, то тогда между 1 и 3 тока нет, т.к. все они подсоединены к одному полюсу). Использовав три измерения, с тремя проводами мы разобрались. У нас осталось 2012 проводов. Присоединяем поочередно один контакт прибора к каждому из них, а другой — к проводу 1. Так мы определим для каждого контакта, подсоединен он к тому же полюсу, что и провод 1, или к другому, а, значит, установим все пары проводов, между которыми будет течь ток.

б) *Нельзя*. Заметим, что после 2014 измерений граф измерений будет либо деревом, либо несвязным. Допустим, он — дерево, и все его рёбра — одного цвета. Поскольку дерево двудольно, невозможно установить, то ли все провода подключены к одному полюсу, то ли провода одной доли подключены к одному полюсу, а другой — к другому. Допустим, он несвязен. Тогда мы можем поменять полюсность всех проводов в любой из компонент связности, и результаты измерений останутся прежними. Поэтому установить на основании проведённых измерений, идёт ли ток между двумя проводами из разных компонент, мы не сможем.

Комментарии. **а)** Стратегия, когда сначала один провод по очереди соединяется со всем остальными, в результате чего остальные провода делятся на две группы: зажегших белую и синюю лампочки, - а потом соединяются провода из разных групп, неверна. Проблема в том, что одна из групп может оказаться пустой. Решения с такой стратегией оценивались в -/+. Решение в предположении, что к каждому полюсу подсоединён хотя бы один провод, оценивалось не выше, чем в +/2. Если провода делились на две группы, потом соединялись провода обязательно из *синей* (или обязательно из *белой*) группы, ставился плюс с точкой (взятая групп может оказаться пустой, но тогда другая непуста).

б) Если в решении был описан граф измерений и без обоснования утверждается, что когда он — дерево, то разделить провода на две группы не удастся, а других содержательных продвижений нет, ставился минус с точкой. Если было доказано, что граф измерений должен быть связным, а других содержательных продвижений не было, ставился –/+.

9 (6-10). *Петя заменил в слове КОКАКОЛА буквы цифрами: одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные — разными. Могло ли у него получиться восьмизначное число, делящееся на 73?* (И. Рубанов)

Ответ: Не могло. **Решение**. КОКАКОЛА = КОКА·10001+(ЛА–КА). 10001 = 73·137 делится на 73, а разность ЛА–КА = 10·(Л–К) на 73 не делится: 73 — простое число, и на него не делятся ни число 10, ни однозначное число Л–К.

10 (7-10). *Имеется 100 жемчужин четырех цветов, причём жемчужин каждого цвета не более 50. Докажите, что из всех жемчужин можно сделать ожерелье, в котором никакие две жемчужины одного цвета не окажутся рядом.* (Журнал Középiskolai Matematikai Lapok)

Решение. Пусть имеется $a \geq b \geq c \geq d$ жемчужин первого, второго, третьего и четвёртого цвета соответственно. Пронумеруем по кругу 100 мест для жемчужин: 1, 2, …, 100. Жемчужины первого цвета положим подряд на нечётные места, начиная с 1. Так как их не больше 50, нечётных мест хватит. Если $a = 50$, остальные жемчужины положим на чётные места как угодно, и условие задачи будет выполнено, так как жемчужины каждого цвета лежат на местах одной чётности.

Пусть $a < 50$. Тогда оставшиеся нечётные места заполним жемчужинами второго цвета. Это возможно, так как $a+b \geq c+d$ и $a+b+c+d = 100$, откуда $a+b \geq 50$. Оставшиеся жемчужины второго цвета выложим подряд на чётные места, начиная со второго. Так как жемчужин второго цвета на чётных местах будет не больше, чем $b–1 \leq a–1$, все они окажутся в промежутках между жемчужинами первого цвета, и потому никакие две жемчужины второго цвета не будут лежать рядом. Жемчужины двух оставшихся цветов положим как угодно на оставшиеся чётные места.

Комментарии. Верный расклад без обоснования его правильности оценивался в +/2. Рассмотрение одного или нескольких конкретных наборов жемчужин не засчитывалось.

11 (7-10). *На плоскости нарисован выпуклый пятиугольник, никакие две стороны которого не параллельны, и проведены четыре биссектрисы его внутренних углов. При помощи одной линейки постройте биссектрису пятого угла.* (К. Кноп)

Решение. Пусть в пятиугольнике $ABCDE$ проведены биссектрисы углов A, B, C и D. Рассмотрим случай, когда пятиугольник оказался внутри треугольника EFG (случай, когда пятиугольник вне EFG, рассматривается аналогично). Продолжим стороны EA и ED до пересечения с прямой BC в точках F и G соответственно. Углы A и B пятиугольника являются внешними для треугольника ABF, и потому биссектриса l угла AFB проходит через точку их пересечения. Значит, её можно построить. Аналогично строится биссектриса m угла CGD. Осталось заметить, что искомая биссектриса угла E пятиугольника проходит через точку пересечения биссектрис l и m.

Комментарии. Для плюса достаточно было рассмотреть один из двух возможных случаев взаимного расположения пятиугольника и треугольника EFG. Если же были рассмотрены оба случая или дано решение, не требующее отдельной их разбора, ставился +! (относящийся к обычному плюсу, как пятёрка с плюсом к обычной пятёрке). Верное построение без обоснования или с неверным обоснованием оценивалось в +/2.

Довольно типичной ошибкой было использование операций, которые невозможно проделать одной линейкой: откладывания отрезка, равного данному, деления отрезка пополам и т.п. Решения с такой ошибкой не засчитывались.

12 (8-10). *Есть 100 гирь различных весов и специальные весы. На эти весы можно класть только по две гири на каждую чашку, тогда весы показывают, на какой чашке груз больше (гири таковы, что случай равенства весов исключён). Докажите, что с помощью этих весов можно выявить либо самую тяжёлую, либо самую лёгкую из данных гирь?* (С. Берлов)

Решение. Упорядочим гири по весу: $1 < 2 < \ldots < 99 < 100$. Проведём все возможные взвешивания и рассмотрим все пары гирь, которые при любом взвешивании оказывались легче (назовём их *лёгкими*). Среди них, возможно, пара (2, 3), а все остальные лёгкие пары, как легко убедиться, содержат гирю 1. Поэтому если есть хотя бы три лёгких пары, содержащих одну и ту же гирю, то это гиря 1, и задача решена. В противном случае есть ровно три лёгких пары: (1, 2), (1, 3) и (2, 3) (ровно двух лёгких пар быть не может, так как заведомо лёгкими будут пары (1, 2) и (1, 3), а также более лёгкая из пар (2, 3) и (1, 4)), и мы нашли три самых лёгких гири l_1, l_2, l_3. Аналогично мы можем найти либо самую тяжёлую гирю (и тогда задача решена), либо три самых тяжёлых гири w_1, w_2, w_3.

Пусть мы нашли гири l_1, l_2, l_3 и w_1, w_2, w_3. Положим на одну чашу весов гири w_1, l_1, а на другую — w_2, l_2. Пусть перевесила первая чаша. Поменяем местами l_1 и l_2. Если после этого перевесит вторая чаша, $l_1 > l_2$. Иначе $w_1 > w_2$, потому что если мы теперь поменяем местами w_1 и w_2, вторая чаша точно перевесит.

Итак, мы можем узнать либо какая из гирь l_1 и l_2 тяжелее, либо какая из гирь w_1 и w_2 тяжелее. Если мы можем про каждую пару из тройки самых лёгких гирь узнать, какая гиря в ней тяжелее, мы можем найти самую лёгкую гирю. Если же мы не можем этого узнать, например, для пары l_1 и l_2, то мы можем, как показано выше, узнать это про каждую пару из тройки самых тяжёлых гирь и найти самую тяжёлую гирю.

Комментарии. Если в решении было показано, как найти самую тяжёлую или самую лёгкую из четырёх гирь, а дальнейшего содержательного продвижения не было, оно оценивалось в –/+.

Некоторые авторы решали задачу в предположении, что можно найти самую тяжёлую или самую лёгкую пару. Но это не так, поскольку, например, пара из самой тяжёлой и третьей по тяжести гири тоже перевешивает любую другую пару.

13 (8-10). *Может ли у вписанного в окружность семиугольника быть три пары параллельных сторон?* (Р. Женодаров)

Ответ: Нет. **Решение**. Допустим, нашёлся искомый семиугольник $ABCDEFG$. Понятно, что он целиком лежит между любыми двумя парами своих параллельных сторон. Поэтому любые две пары его параллельных сторон разделяют друг друга, то есть стороны из этих пар на окружности чередуются. Следовательно, между любыми двумя параллельными сторонами в одном направлении — две стороны семиугольника, а в другом — три. Переобозначив, если надо, вершины, будем считать, что $AB \parallel DE$. Тогда BC параллельна EF или FG, а CD параллельна FG или GA. В обоих случаях найдётся такая пара параллельных сторон, в которой одна из сторон имеет общую вершину с AB, а другая — с CD. Не умаляя общности будем считать, что $BC \parallel EF$.

Вписанные углы ABC и DEF равны как углы с соответственно параллельными сторонами (давать в сумме 180° они не могут, так как в этом случае семиугольник окажется невыпуклым). Следовательно, равны и хорды AC и DF. Но тогда, как легко показать, $CD \parallel FA$, и потому прямая CD не может быть параллельна ни одной из прямых FG или GA. Противоречие.

Комментарии. Если в решении без обоснования использовалось, что между любыми двумя параллельными сторонами удовлетворяющего условию задачи семиугольника в одном направлении должно быть две стороны, а в другом — три, оно оценивалось не выше, чем в +/2.

Решений, подобных нашему, в работах практически не было: почти все авторы, писали вытекающие из параллельности сторон равенства сумм дуг, стягиваемых сторонами пятиугольника, и получали, что одна из этих дуг должна быть нулевой.

14 (8-10). *В группе переводчиков ровно 2015 знают японский, ровно 2015 знают китайский и ровно 2015 знают хинди. При каких $k \le 2015$ из этой группы наверняка можно выбрать несколько переводчиков, чтобы среди них было ровно k знающих японский, ровно k знающих китайский и ровно k знающих хинди?* (И. Богданов)

Ответ: При всех k от 1 до 2015. **Решение**. Для краткости обозначим данные языки числами 1, 2 и 3. Покажем, что если ровно по n ($n > 0$) переводчиков знают языки 1, 2 и 3, то можно выбрать несколько переводчиков так, что среди них языки 1, 2 и 3 знали либо ровно по одному человеку, либо ровно по два человека (*). Это очевидно, если есть переводчик с 1, 2 и 3, либо переводчики только с 1, только с 2 и только с 3, либо переводчики с 1 и 2, 2 и 3, 3 и 1. В противном случае у нас есть переводчик А ровно с двух языков — пусть с 1 и 2 (иначе есть переводчики только с одного языка, и их по n для всех трёх языков — противоречие). Тогда нет переводчика Б только с языка 3 — иначе берём А и Б. Значит, есть переводчик Б с языка 3 и ещё какого-то — скажем, 1. Тогда нет переводчиков В только с языка 2 и языка 3 (иначе берём А, Б и В) и переводчиков В только с языка 2 (иначе берём Б и В). Но всё это означает, что все переводчики переводят с языка 1 и не все — с языков 2 и 3, так что переводчиков с языка 1 больше, чем с языка 2 — противоречие.

Используя (*), мы можем разбить данную в условии группу переводчиков на подгруппы, в каждой из которых с языков 1, 2 и 3 могут переводить либо ровно по одному человеку, либо ровно по два человека. При этом, так как число 2015 нечётно, найдётся хотя бы одна подгруппа, где с языков 1, 2 и 3 могут переводить ровно по одному человеку. Имея такое разбиение, мы для любого $k \le 2015$ сможем составить из полученных подгрупп набор переводчиков, где с каждого из трёх языков могут переводить ровно по k человек.

15 (9-10). Верно ли, что если хотя бы одно из чисел x и y иррационально, то и хотя бы одно из чисел x^2-y, y^2-x, $x+y$ иррационально?

Ответ: Неверно. **Решение**. Опровергающий пример: $x = -1/2+\sqrt{2}$, $y = -1/2-\sqrt{2}$.

Комментарий. Вот рассуждение, очень похожее на правильное: «Допустим, все три числа x^2-y, y^2-x, $x+y$ рациональны. Тогда рационально и число $(x^2-y)-(y^2-x) = (x^2-y^2)+(x-y) = (x-y)(x+y+1)$. *В произведении* $(x-y)(x+y+1)$ *вторая скобка — рациональное число, значит и первая – рациональное число*. Но тогда рациональны и сами числа $x = ((x+y)+(x-y))/2$ и $y = ((x+y)-(x-y))/2$.» Ошибка тут — в утверждении, выделенном курсивом. Его можно «обосновать» так: «Обозначим произведение $(x-y)(x+y+1)$ через r.

Тогда $x–y = r/(x+y+1)$, а частное двух рациональных чисел — рациональное число». И это верно *почти* всегда — кроме случая, когда $x+y+1 = 0$. Но именно этот случай и дает опровергающий пример!

16 (9-10). *Числовая функция $f(t)$ определена и (строго) монотонно возрастает на всей числовой оси. Для любых x и y выполнено равенство $f(f(x)+y) = f(x+y)+f(0)$. Найдите все такие функции.* (О. Крижановский)

Подставим в равенство из условия задачи $x = y = 0$. Получим: $f(f(0)+0) = f(0+0)+f(0)$, откуда $f(f(0)) = 2f(0)$. Теперь подставим туда же числа x и $y = –x$. Получим $f(f(x)–x) = f(0)+ f(0) = 2f(0) = f(f(0))$. Поскольку монотонная функция каждое свое значение принимает ровно один раз, из равенства $f(f(x)–x) = f(f(0))$ вытекает, что $f(x) – x = f(0)$ при любом x. Таким образом, *все искомые функции имеют вид* $f(x) = x+a$, где $a = f(0)$. Проверка показывает, что уравнению из условия задачи удовлетворяют все такие функции.

Комментарии. За ответ с проверкой без объяснения, почему других таких функций нет, ставился –/+. Если в решении было всё, кроме проверки ответа, ставился плюс с точкой.

17 (10). Дана четырехугольная пирамида объема V, у которой в основании параллелограмм. Докажите, что из ее боковых граней можно составить тетраэдр и найдите его объем. (И. Богданов)

Пусть $SABCD$ — данная пирамида с вершиной S. Достроим треугольник SAD до параллелограмма $SADE$. Треугольники SED и SAD равны. $SECB$ — тоже параллелограмм. Поэтому треугольники SEC и SBC равны. Но тогда по трём сторонам равны и треугольники EDC и SAB. Итак, грани тетраэдра $ESCD$ попарно равны боковым граням пирамиды $SABCD$. Его объём равен объёму тетраэдра $ASCD$ (общее основание SCD и равные высоты из вершин E и A), то есть $V/2$.