Кировская ЛМШ-2017

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Смысл оценок, выставлявшихся за решения конкурсных задач:

+ (*плюс*): задача решена правильно;

+̣, +/. (*плюс с точкой*): решение верно, но содержит небольшие погрешности;

±, +/–, +- (*плюс-минус*): решение в целом верно, но содержит недочеты;

$\underline{\pm}$, +/=, += (*плюс с двумя минусами*): решение в целом верно, но содержит значительные погрешности;

+/2 (*плюс пополам*): задача решена примерно наполовину;

∓, –/+, -+ (*минус-плюс*): решения нет, но есть заметное продвижение в правильном направлении;

$\overset{=}{+}$, =/+, =+ (*минус-минус-плюс*): есть менее значительное продвижение;

–̣, –/. (*минус с точкой*): есть отдельные разумные соображения;

– (*минус*): решение полностью неверно.

После условий задач указаны их авторы или источники. Задачи, где таких указаний нет, — математический фольклор.

1 (6). *Материал для изготовления деревянного кубика со стороной 8 см стоит 5 рублей: 1 рубль стоит дерево и 4 рубля — краска для окраски поверхности. Сколько стоит материал для изготовления кубика со стороной 16 см? Кубики делаются из сплошных кусков дерева. (О. Крижановский)*

Ответ. 24 рубля. **Решение**. Объём кубика со стороной в 16 см в 8 раз больше объёма кубика со стороной 8 см, а площадь поверхности – в 4 раза больше. Поэтому для его изготовления потребуется $1\cdot 8+4\cdot 4 = 24$ рубля.

2 (6-7). *Найдите все такие натуральные числа, при делении которых на 5 в частном получается то же число, что и в остатке.*

Ответ. 6, 12, 18, 24. **Решение**. Остаток не может равняться 0, так как тогда делимое равно $5\cdot 0+5 = 0$, а число 0 – не натуральное. Если остаток равен 1, число равно $5\cdot 1+1 =6$, остатки 2, 3 и 4 дают, соответственно, числа $5\cdot 2+2 =12$, $5\cdot 3+3 =18$, $5\cdot 4+4 =24$.

Комментарии. Эта задача, как и предыдущая, как и предполагалась, оказалась несложной, с ней справилось подавляющее большинство участников конкурса. Основным недочётом было отсутствие объяснения, почему других ответов, кроме найденных, нет. За это, если были найдены все ответы, ставился +/−. Если были найдены только два ответа, ставился −/+, если только один, задача не засчитывалась. Если был получен хотя бы один посторонний ответ, решение оценивалось не выше, чем в –/+. Если к верному ответу добавлялся 0, оценка не снижалась.

3 (6-7). *На острове Рики-мики живет 10 туземцев. Любые четверо из них образуют тайное общество. Туземцы любят путешествовать. Какое наименьшее число туземцев может отправиться в путешествие так, чтобы среди путешественников были представители всех тайных обществ? (Р. Женодаров)*

Ответ. 7 туземцев. **Решение**. Если в путешествие отправились 6 или менее туземцев, то по крайней мере четверо остались на острове, и любые четверо из оставшихся образуют тайное общество, не представленное среди путешествующих. Если же путешествуют не менее семи туземцев, то на острове их осталось не больше трёх, и ни одно из тайных обществ не могло остаться на острове в полном составе.

Комментарии. Для полного решения этой задачи нужно было обосновать два утверждения: то, что шести путешественников недостаточно, и то что семи — достаточно. Основным недостатком почти четверти решений было пояснение только одного из двух этих утверждений. Такие решения оценивались в +/2. Ответ без объяснения оценивался не выше, чем в −/+. Некоторые авторы неверно поняли условие задачи и брали только некоторые четвёрки туземцев. Такие решения не засчитывались.

4 (6-7). *Можно ли разрезать без остатка прямоугольник со сторонами 2002 и 2017 на равные прямоугольники со сторонами 13 и 77?*

Ответ. Можно. **Решение**. Заметим, что $77 \cdot 13 = 1001$, так что 2002 делится как на 77, так и на 13. Разрежем прямоугольник $2002 \cdot 2017$ на прямоугольник со сторонами 2002 и $77 \cdot 11 = 847$ и прямоугольник со сторонами 2002 и $2017 – 847 = 1170 = 13 \cdot 90$. Очевидно, оба их можно без остатка разрезать на прямоугольники со сторонами 13 и 77.

Комментарии. В некоторых работах возможность разрезания выводилась из того, что 2002×2017 делится на 13×77. Но так рассуждать нельзя: например, прямоугольник 8×1 нельзя разрезать на квадраты 2×2, хотя 8 делится на 4.

С задачей, как и с двумя следующими, справилось около половины шестиклассников и более 2/3 семиклассников.

5 (6-8). *В комнате находится 20 человек с острова рыцарей и лжецов, каждый житель которого либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Каждый из них сказал: «Среди остальных 19 человек (всех, кроме меня) ровно пятеро — лысые». Сколько лжецов может быть в комнате? Перечислите все варианты и объясните, почему других вариантов нет. (Ю. Лифшиц, условие изменено)*

Ответ. 5, 14 или 20. **Решение**. Очевидно, возможна ситуация, когда все находящиеся в комнате − лжецы (например, если все они − лысые). Допустим теперь, что в комнате есть рыцарь. Из его высказывания следует, что лысых в комнате пятеро (если он волосатый) или шестеро (если он тоже лысый). Первое возможно, если в комнате пятеро лысых лжецов и 15 волосатых рыцарей, второе − если в комнате шестеро лысых рыцарей и 14 волосатых лжецов.

Комментарии. Если были найдены все ответы, но не показано, что других ответов нет, ставился +/2. Такая же оценка ставилась, если задача была решена только для случая, когда в комнате есть хотя бы один рыцарь (что приводит к потере ответа 20). В остальных случаях за потерю одного из ответов оценка снижалась до −/+. Если был найден только один из трёх ответов, ставился –/.

6 (6-8) *У Пети с Васей есть 20 неокрашенных кубиков. Каждую минуту Петя красит в красный цвет две любые их неокрашенные грани (хочет — на одном кубике, хочет — на разных), а затем Вася красит в синий цвет какую-то одну неокрашенную грань. (Перекрашивать уже окрашенную грань нельзя.) Петя стремится целиком окрасить в красный цвет какой-нибудь кубик, Вася старается ему помешать. Кто из них при правильной игре может добиться своего независимо от игры соперника?*

Ответ. Петя. **Решение**. Покажем, что Петя победит, даже если кубиков только 16. Назовём кубик *хорошим*, если у него нет синей грани. Сначала Петя каждым ходом закрашивает по одной грани на двух хороших кубиках, пока после очередного хода Васи хороших кубиков с одной красной гранью не останется хотя бы 8. Так как Вася каждым ходом портит не более одного кубика, Петя сможет сделать это не более чем за 8 ходов. Далее Петя каждым ходом красит по второй грани на двух хороших кубиках с одной красной гранью, пока после очередного хода Васи не останется хотя бы 4 хороших кубика с двумя красными гранями. Это Петя сможет сделать не более чем за 4 хода. Затем он аналогичным образом добивается, чтобы после очередного хода Васи осталось хотя бы два хороших кубика с тремя красными гранями. Следующим ходом Петя красит у этих кубиков по четвёртой грани, а затем закрашивает две оставшиеся грани у того из них, который Вася своим следующим ходом не испортил, и побеждает.

Комментарии. Верный алгоритм действий Пети без объяснения, почему Вася не сможет ему помешать, оценивался в –/+. Если алгоритм действий Пети был описан лишь частично, а его завершение не описано, решение обычно не засчитывалось.

7 (6-9). *Коля задумал четыре числа и выписал на доске пять из шести их попарных сумм. Это оказались числа 17, 19, 20, 24, 26. Найдите шестую сумму (перечислите все возможности и объясните, почему других вариантов нет).*

Ответ. 23. **Решение**. Обозначим задуманные числа буквами a, b. c и d так, чтобы неизвестная сумма равнялась $c+d$. Заметим, что $(a+b)+(c+d) = (a+c)+(b+d) = (a+d)+(b+c)$. Суммы $a+c$, $b+d$, $a+d$ и $b+c$ находятся среди чисел 17, 19, 20, 24 и 26. «Непарная» сумма $a+b$ не может равняться 17 или 19, так как тогда при любом разбиении четырёх оставшихся чисел на пары одна из сумм в парах будет чётной, а другая — нечётной. Ещё заметим, что при удалении «непарной» суммы наименьшее и наибольшее из оставшихся чисел должны входить в одну пару. С учётом сказанного нам осталось перебрать только три возможных случая. Если непарным является число 26, то $17+24 \neq 19+20$, если 24, то $17+26 \neq 19+20$ — оба не подходят. А если непарное число — 20, то $17+26 = 19+24 = 43$ — подходит. Шестая сумма при этом равна $43–20 = 23$. **Замечание**. Неизвестная сумма действительно может равняться 23. Соответствующих наборов чисел a, b, c и d существует два: $a = 8$, $b = 9$, $c = 11$, $d = 15$ и $a = 6{,}5$, $b = 10{,}5$, $c = 12{,}5$, $d = 13{,}5$.

Комментарии. Если в решении был описан принцип, по которому надо перебирать получающиеся в нём случаи, но сам перебор проведён не был, или были упущены некоторые случаи, решение оценивалось в диапазоне от –/+ до +/–, в зависимости от длины и сложности незаписанной части решения. Если перебор был неполон и вопрос о его полноте в решении даже не ставился, оно оценивалось в –/+. Ответ, найденный подбором, оценивался в –/. При наличии посторонних ответов решение обычно не засчитывалось.

Как видно из сделанного выше замечания, числа a, b, c и d могут не быть целыми. Поэтому все решения, существенно опирающиеся на предположение, что эти числа — целые, оценивались не выше, чем в –/+.

8 (6-10). *Каково наименьшее возможное число участников математического кружка, если:* ***а)*** *(6) в нём чётное число участников, и девочки составляют среди них больше 48%, но меньше 49%;* ***б)*** *(7) задача а) без требования чётности числа участников;* ***в)*** *(8-10) девочки составляют среди них больше 48,6%, но меньше 48,7%? Решения с использованием вычислительной техники и/или длинного перебора не засчитываются.*

Ответ. **а)** 52. **б)** 27. **в)** 37. **Решение**. **а)** Пусть девочек в кружке на s человек меньше половины общего числа кружковцев. Тогда s девочек должны составлять меньше 50–48 = 2% численности кружковцев. Если в кружке не больше 50 человек, то даже один человек составляет не меньше 2% от его численности. Значит, там не меньше 52 человек. Кружок, в котором 52 участника и 25 девочек, подходит, так как $0{,}48 < 25/52 < 0{,}49$.

б) Так как п. а) уже решён, достаточно рассмотреть случай, когда число n участников кружка нечётно. Пусть $n = 2k+1$. Наибольшая дробь со знаменателем n, меньшая 1/2, в этом случае равна $k/(2k+1)$. Нам необходимо, чтобы она была больше 0,48, откуда $100k > 48(2k+1) \Leftrightarrow 4k > 48 \Leftrightarrow k > 12$, то есть $n \geq 2\cdot 13+1 = 27$. Кружок, в котором 27 участников и 13 девочек, подходит, так как $0{,}49 > 13/27$. **в)** Рассуждая так же, как в двух предыдущих пунктах, находим, что если n чётно, то оно не меньше 72, а если нечётно, то не меньше 37. Легко проверить, что кружок, в котором 19 мальчиков и 18 девочек, подходит.

Комментарии. В каждом из пунктов верный ответ без доказательства минимальности оценивался в –/+, с неполным доказательством — в диапазоне от +/2 до +/–. Если в решении без обоснования использовалось, что разность между количествами мальчиков и девочек должна быть минимально возможной (2 при чётном числе участников и 1 при нечётном), оно оценивалось не выше, чем в +/2.

9 (6-10) *Имеется полоска из 100 клеток. На ней стоит 50 фишек: по одной на второй, четвёртой, и т. д., сотой слева клетках. За один ход Петя выбирает две фишки, между которыми нет других фишек, и сдвигает обе эти фишки на одну клетку влево (но только если никакие две фишки при этом не попадут в одну клетку). Какое наибольшее количество ходов может сделать Петя? (С. Волчёнков, С. Берлов, Д. Ширяев)*

Ответ. 625. **Решение**. Пусть клетка слева от какой-то из первых 49 фишек пуста. Тогда мы можем сдвинуть влево эту фишку вместе с её соседкой справа. Значит, в позиции, где нет ходов, первые 49 фишек идут подряд. Покрасим фишки на второй, шестой, десятой, …, 98-й клетках в синий цвет. При каждом ходе ровно одна синяя фишка сдвигается на 1 влево. При этом в конце игры первая синяя фишка стоит на одну клетку левее своей исходной клетки, вторая – на три, третья – на 5, …, k-ая – на $2k$–1 клеток, так как сдвигается с ($4k$–2)-ой клетки на ($2k$–1)-ую. Поэтому, если ходов не осталось, в течение игры было сделано 1+3+...+49 = 625 ходов.

Комментарии. Задача оказалась достаточно сложной. Было немало решений с неверными ответами (самый популярный — 637, не учитывающий, что последнюю фишку нельзя сдвинуть вплотную к остальным). Они обычно не засчитывались. При верном ответе в качестве обоснования нередко приводится алгоритм сдвига фишек без доказательства максимальности числа ходов. За это ставился –/+, а если, кроме того, в решении обоснованно утверждалось, что после выполнения максимального числа ходов между первыми 49 фишками нет пустот, ставился +/2.

10 (7-10). *Для каждой точки M, лежащей внутри данного квадрата $ABCD$, найдём расстояния d_1, d_2, d_3, d_4 от неё до прямых AB, BC, CD и DA соответственно. Найдите множество всех таких точек M, для которых все расстояния d_1, d_2, d_3, d_4 различны и число d_1 является вторым по величине среди чисел d_1, d_2, d_3, d_4. (И. Рубанов)*

План решения. Примем сторону квадрата за единицу. Тогда $d_1+d_3 = d_2+d_4 = 1$. Пусть O — центр квадрата, а A_1, B_1, C_1, D_1 — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Равенство $d_1 = d_2$ (равносильное равенству $d_3 = d_4$) задаёт отрезок BD, равенство $d_2 = d_3$ (равносильное равенству $d_4 = d_1$) задаёт отрезок AC, равенство $d_1 = d_3$ (равносильное равенству $d_2 = d_4$) — отрезок B_1D_1, равенство $d_2 = d_4$ — отрезок A_1C_1. Четыре этих отрезка разбивают квадрат на 8 треугольников, для всех точек каждого из которых расстояния до сторон располагаются по величине в одном и том же порядке. Нетрудно проверить, что d_1 будет вторым по величине в точности внутри треугольников OB_1C и OD_1D.

Комментарии. Верный ответ без всякого обоснования (примерно как в нашем плане решения) оценивался в −/+. Если для каждой из областей был верно, но без обоснования, указан порядок, в котором идут расстояния, ставился +/−. В части работ вместо ГМТ, где расстояние d_1 — второе по величине, ищется ГМТ, где d_1 — третье (то есть, второе с конца) по величине. В таких случаях оценивалась фактически решаемая задача (тут верный ответ — все внутренние точки треугольников OB_1B и OD_1A).

11 (7-10). *Может ли произведение 2017 натуральных чисел (не обязательно различных) быть ровно на 2017 больше их суммы? (Модификация задачи А. Шаповалова)*

Ответ. Может. **Решение**. Примером могут служить числа 4034, 2 и 2015 единиц: их сумма равна 2017·3, а произведение — 2017·4. Есть и другие примеры.

Комментарий. Покажем, как можно было придумать этот пример. Будем искать такие x и y, чтобы они вместе с 2015 единицами давали искомый набор. Тогда $x+y+2015 = xy-2017$, что равносильно равенству $(x-1)(y-1) = 4033$. Теперь, чтобы получить искомые x и y, достаточно взять любое разложение числа 4033 на два множителя и увеличить каждый из них на единицу. Мы взяли множители 4033 и 1. Множители 37 и 109 дают ещё один пример: 38, 110 и 2015 единиц. Есть и другие примеры.

12 (8-10). *Можно ли разрезать квадрат на несколько (больше одного) выпуклых многоугольников так, чтобы никакой из них нельзя было покрыть остальными вместе взятыми? (А. Шаповалов)*

Ответ. Нельзя. **Первое решение**. Возьмем многоугольник M разбиения, внутри которого не лежит центр O квадрата, и симметричный M относительно O многоугольник N. Допустим, у M и N есть общая внутренняя точка K. Поскольку симметричная ей относительно O точка K' также принадлежит как M, так и N, отрезок KK' в силу выпуклости многоугольников целиком содержится внутри каждого из них. Но тогда его середина O оказывается, вопреки нашему предположению, внутри многоугольника M. Итак, многоугольники M и N не имеют общих внутренних точек, и потому многоугольник N, равный M, покрывается частями разбиения, отличными от M. Отразив картинку симметрично относительно O, покроем ими и сам многоугольник M. **Второе решение**. В силу выпуклости многоугольника M он и точка O лежат по разные стороны от продолжения l одной из сторон многоугольника, либо точка O лежит на M. Прямая l', проходящая через O параллельно l, делит квадрат на две равные части U и V, в одной из которых (пусть U) целиком лежит многоугольник M. Значит, V целиком покрывается другими многоугольниками разбиения. Повернув все их на 180 градусов, мы, очевидно, целиком покроем U, в вместе с U – и многоугольник M.

Комментарии. В некоторых работах без обоснования использовалось утверждение, что если выпуклая фигура пересекается с центрально симметричной ей, то она содержит центр симметрии. Оценка в таких случаях была не выше +/2. В нескольких работах использовалось неверное утверждение, что фигуру можно покрыть любой фигурой большей площади.

13 (8-10). *Существует ли такой квадратный трёхчлен ax^2+bx+c, что его значение при любом целом x равно целому числу и при любых двух различных целых значениях x его значения различны?*

Ответ. Существует. **Решение**. В задаче два условия: (1) при любом целом n число an^2+bn+c — целое и (2) если m и n − различные целые числа, то числа an^2+bn+c и am^2+bm+c тоже различны. Условие (1) выполнено при целых A, B и C. Теперь заметим, что если $m \neq n$, то $an^2+bn+c = am^2+bm+c \Leftrightarrow A(m^2-n^2)+b(m-n) = 0 \Leftrightarrow m+n = -b/a$. Поэтому если для двух различных целых чисел m и n выполнено равенство $an^2+bn+c = am^2+bm+c$, то число $-b/a$ *обязано быть целым*. Стало быть, чтобы выполнялось условие (2), достаточно выбрать коэффициенты A и B так, чтобы b не делилось на a. Из сказанного следует, что квадратным трехчленом, удовлетворяющим обоим условиям задачи, может служить, например, $3x^2+2x+1$.

14 (8-10). *Внутри квадрата расположены пять попарно непересекающихся прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Всегда ли из них можно выбрать три таких, что их проекции на одну из сторон квадрата (параллельно другой стороне) попарно не пересекаются? (И. Рубанов)*

Ответ. Всегда. **Решение**. Покрасим две смежных стороны квадрата: одну в красный, другую — в синий цвет. Проекции любых двух данных прямоугольников хотя бы на одну из этих сторон не пересекаются — иначе пересекались бы и сами прямоугольники.

Рассмотрим полный граф, вершинами которого являются наши прямоугольники, а каждое ребро покрашено в цвет той стороны, проекции на которую прямоугольников, являющихся его концами, не пересекаются. Если таких цветов два, будем считать ребро двухцветным. Три прямоугольника, проекции которых на одну из сторон попарно не пересекаются — это одноцветный треугольник в этом графе.

Допустим, есть двухцветное ребро AB. Тогда из вершины A выходит хотя бы три ребра AB, AC и AD одного из двух цветов (пусть красного). Если в треугольнике BCD есть красное ребро, получаем красный треугольник, иначе ABC — синий треугольник. В обоих случаях всё доказано.

Пусть двухцветных рёбер нет. Тогда при отсутствии одноцветных треугольников как красная, так и синяя степени каждой из вершин должны равняться 2. Это означает, что все красные рёбра образуют цикл длины 5 и все синие — тоже. Пусть красный цикл — это $ABCDE$. Тогда синий цикл — это $ACEBD$. Пусть A_1, …, E_1 — проекции соответствующих прямоугольников на синюю сторону. Тогда A_1 пересекается с E_1 и B_1, причём E_1 и B_1 не пересекаются между собой. Далее, E_1 пересекается с D_1, а B_1 — с C_1, причём D_1 и C_1 не пересекаются с A_1. Но из всего сказанного следует, что отрезки D_1 и C_1 находятся по разные стороны от отрезка A_1. Между тем, ребро DC в построенном выше графе — красное, и потому отрезки D_1 и C_1 должны пересекаться. Противоречие.

Комментарии. Задача оказалась одной из самых сложных: с ней справилась лишь пятая часть восьмиклассников и четверть девятиклассников. Верный план доказательства при отсутствии самого доказательства оценивался в –/+.

15 (9-10). *В пространстве даны несколько векторов. Известно, что длина суммы любых двух из них не больше 2. Докажите, что длина суммы любых трех из них не больше 3.*

Решение. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ выполнено неравенство $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}| \geq |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}| = 2|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$, так как длина суммы векторов не превосходит суммы их длин. Поэтому если $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}| \leq 2+2+2 = 6$, то $2|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}| \leq 6$. Значит, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}| \leq 3$.

Комментарии. Задача оказалась несложной, но нашлись решения, где вместо неравенств между *длинами* векторов и числами рассматривались не имеющие смысла неравенства между самими векторами и числами. Такие решения не засчитывались.

16 (9-10). *Найдите все функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, которые обладают следующими тремя свойствами:*

(а) $f(x) + f(y) - 1 \le f(x+y) \le f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \boldsymbol{R}$;

(б) $f(x) \ge x + f(0)$ для всех $x \in [0;1)$;

(в) $f(-1) = f(1) = 0$. (Вторая открытая олимпиада Ришельевского лицея, Одесса)

Ответ. $f(x) = \{x\}$[1], $x \in \boldsymbol{R}$. **Решение**. Из (а) и (в) следует, что $f(0) = f(1+(-1)) \le f(1)+f(-1) = 0$, т.е. $f(0) \le 0$; $f(1) = f(1+0) \le f(1)+f(0)$, т.е. $f(0) \ge 0$. Таким образом, $f(0) = 0$. Из (б) вытекает, что при всех $x \in [0;1)$ выполняется неравенство $f(x) \ge x$. Так как $f(x)+f(1-x)-1 \le f(1) = 0$, то $f(x) \le 1-f(1-x)$. При $x \in (0;1)$ $1-x \in (0;1)$ и $f(1-x) \ge 1-x$, поэтому $f(x) \le 1-f(1-x) \le 1-(1-x) \le x$. Так что при всех $x \in [0;1)$ $f(x) = x$.

Теперь докажем, что при всех $x \in \mathbf{R}$ $f(x) = f(x+1)$. В самом деле, $f(x+1) \le f(x)+f(1) = f(x)$ при всех $x \in \mathbf{R}$. С другой стороны, $f(x) = f(-1+(x+1)) \le f(-1)+f(x+1) = f(x+1)$.

Осталось проверить, что функция $f(x) = \{x\}$, $x \in \boldsymbol{R}$, удовлетворяет условию задачи. Свойства (б) и (в), очевидно, выполняются, а свойство (а) вытекает из того, что $\{x+y\} = \{x\}+\{y\}$ при $\{x\}+\{y\} < 1$ и $\{x+y\} = \{x\}+\{y\}-1$ при $\{x\}+\{y\} \ge 1$.

Комментарий. Верный ответ с проверкой без доказательства, что других искомых функций нет, оценивался в −/+. За верный ответ с проверкой и существенным продвижением в доказательстве отсутствия других искомых функций ставился +/2. За доказательстве отсутствия искомых функций, кроме $\{x\}$, при отсутствии проверки, что $\{x\}$ подходит, ставился +/−.

17 (10). *На какое наибольшее число частей могут делить пространство шесть плоскостей, проходящих через середины рёбер тетраэдра перпендикулярно этим рёбрам? (И. Рубанов)*

Ответ. На 24 части. **Решение**. Занумеруем вершины тетраэдра: 1, 2, 3, 4. Плоскость, проходящая через середину отрезка AB перпендикулярно к этому отрезку, является геометрическим местом точек пространства, равноудалённых от точек A и B, и делит пространство на две части, одна из которых образована точками, лежащими ближе к A, чем к B, а другая— точками, лежащими ближе к B, чем к A. Поэтому каждая из частей, описанных в условии задачи, характеризуется перестановкой чисел 1, 2, 3, 4, где на первом месте стоит номер вершины тетраэдра, ближайшей к точкам этой части, на втором – номер второй по удалённости от них вершины тетраэдра и т.д. При этом разным частям соответствуют разные перестановки, потому что для любых двух частей найдётся разделяющая их плоскость из числа наших шести. Значит, частей не больше, чем таких перестановок, то есть не больше 24. Осталось заметить, что для правильного тетраэдра их и не меньше 24, так как для каждой перестановки его вершин найдётся движение пространства, переставляющее вершины именно в таком порядке, и потому из произвольной точки пространства, у которой все четыре расстояния до вершин тетраэдра различны, можно такими движениями получить точки, реализующие все 24 возможных порядка, в которых могут идти эти расстояния.

Комментарий. Задача оказалась самой трудной в варианте: верно её решил только один десятиклассник.

---

[1] Величина $\{x\}$ — *дробная часть* x — равна разности между числом x и наибольшим целым числом, не превосходящим x. Например, $\{1{,}3\} = 1{,}3-1 = 0{,}3$, а $\{-1{,}6\} = -1{,}6-(-2) = 0{,}4$.