From St. Petersburg with numbers

1. Можно ли расставить по окружности числа от 1 до 100 таким образом, чтобы каждые два соседних числа отличались либо в 2 раза, либо на 2?

2. На доске написано пять последовательных двузначных чисел. Егор сложил три из них и получил сумму, делящуюся на 37. Катя тоже сложила три числа и получила сумму, делящуюся на 71. Какие числа написаны на доске?

3. Очень упорный Миша исследует, на сколько изменяется произведение цифр числа при увеличении числа на 12. С этой целью для каждого из чисел от 2013 до 20 139 999 он выписал в тетрадь это изменение (например, для числа 11 111 он выписал 5, а для числа 11 119 он выписал отрицательное изменение $-6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9$). Чему равна сумма всех Мишиных чисел?

4. Антиподом натурального числа называется число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Лёня взял пятизначное число, в записи которого нет нулей и все цифры различны, причем первая цифра больше пятой. Далее Лёня вычел из этого числа его антипод; результат оказался пятизначным числом. Этот результат Лёня сложил с его антиподом. Какие ответы могли получиться у Лёни? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

5. Натуральное число можно представить как сумму 18 его делителей (не обязательно различных) и как сумму 19 его делителей (не обязательно различных). Докажите, что это число можно представить и как сумму 20 его делителей (не обязательно различных).

6. На доске написано число 0. За один ход можно увеличить число на доске на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, но так, чтобы результат не делился на 10. Какое наибольшее число может получиться на доске через 100 ходов?

7. Лиза и Варя играют в следующую игру. У Лизы имеется 100 карточек, на которых по одному разу написаны числа от 1 до 100. Каждым ходом Лиза выкладывает на стол две карточки, после чего Варя тут же забирает одну из них. После 50 ходов у Лизы карточки закончатся, а на столе останется лежать 50 карточек. Цель Лизы — сделать так, чтобы сумма чисел на этих 50 карточках оказалась четной. Может ли Варя ей помешать?

8. Леша выписал на доску в порядке возрастания все натуральные делители натурального числа n, а Дима стер несколько первых и несколько последних чисел получившегося ряда так, что осталось 151 число. Какое наибольшее количество из этих 151 делителей могло являться кубами натуральных чисел?

From St. Petersburg with numbers

1. Можно ли расставить по окружности числа от 1 до 100 таким образом, чтобы каждые два соседних числа отличались либо в 2 раза, либо на 2?

2. На доске написано пять последовательных двузначных чисел. Егор сложил три из них и получил сумму, делящуюся на 37. Катя тоже сложила три числа и получила сумму, делящуюся на 71. Какие числа написаны на доске?

3. Очень упорный Миша исследует, на сколько изменяется произведение цифр числа при увеличении числа на 12. С этой целью для каждого из чисел от 2013 до 20 139 999 он выписал в тетрадь это изменение (например, для числа 11 111 он выписал 5, а для числа 11 119 он выписал отрицательное изменение $-6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9$). Чему равна сумма всех Мишиных чисел?

4. Антиподом натурального числа называется число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Лёня взял пятизначное число, в записи которого нет нулей и все цифры различны, причем первая цифра больше пятой. Далее Лёня вычел из этого числа его антипод; результат оказался пятизначным числом. Этот результат Лёня сложил с его антиподом. Какие ответы могли получиться у Лёни? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

5. Натуральное число можно представить как сумму 18 его делителей (не обязательно различных) и как сумму 19 его делителей (не обязательно различных). Докажите, что это число можно представить и как сумму 20 его делителей (не обязательно различных).

6. На доске написано число 0. За один ход можно увеличить число на доске на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, но так, чтобы результат не делился на 10. Какое наибольшее число может получиться на доске через 100 ходов?

7. Лиза и Варя играют в следующую игру. У Лизы имеется 100 карточек, на которых по одному разу написаны числа от 1 до 100. Каждым ходом Лиза выкладывает на стол две карточки, после чего Варя тут же забирает одну из них. После 50 ходов у Лизы карточки закончатся, а на столе останется лежать 50 карточек. Цель Лизы — сделать так, чтобы сумма чисел на этих 50 карточках оказалась четной. Может ли Варя ей помешать?

8. Леша выписал на доску в порядке возрастания все натуральные делители натурального числа n, а Дима стер несколько первых и несколько последних чисел получившегося ряда так, что осталось 151 число. Какое наибольшее количество из этих 151 делителей могло являться кубами натуральных чисел?