1. (3) Есть 5 серебряных и 4 золотых монеты;, но если фальшивая золотая, то она тяжелее настоящих золотых, а если серебряная, то она легче настоящих серебряных. За сколько взвешиваний можно найти фальшивую монету?

2. (3+) Дан мешок сахарного песка, чашечные весы и гирька в 1 г. Можно ли за 10 взвешиваний отмерить 1 кг сахара?

3. (4−) Имеются чашечные весы со стрелками и десять мешков с монетами. Все монеты во всех мешках одинаковы по внешнему виду, но в одном из мешков все монеты фальшивые и каждая весит по 2 грамма, а в остальных девяти мешках все монеты настоящие и каждая весит по 1 грамму. Как при помощи одного взвешивания определить, в каком мешке фальшивые монеты?

4. (4−) Имеются чашечные весы и 100 монет, среди которых несколько (больше 0, но меньше 99) фальшивых. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие тоже весят одинаково, при этом фальшивая монета легче настоящей. Можно делать взвешивание на весах, заплатив перед взвешиванием одну из монет (неважно, фальшивую или настоящую). Докажите, что можно с гарантией обнаружить настоящую монету.

5. (4−) Среди пяти внешне одинаковых монет 3 настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?

6. (3+) Есть 27 золотых и серебряных монет; но если фальшивая золотая, то она тяжелее настоящих золотых, а если серебряная, то она легче настоящих серебряных. За сколько взвешиваний можно найти фальшивую монету?

7. (3) Есть три кучки: 17, 21 и 27 монет. В одной из кучек одна монета является фальшивой. Как за одно взвешивание найти кучку со всеми настоящими монетами?

8. (3+) Среди 2019 одинаковых по виду монет одна фальшивая, отличающаяся по весу. Как с помощью чашечных весов без гирь за два взвешивания определить, легче или тяжелее фальшивая монета? Находить фальшивую монету не требуется.

9. (4) Имеются неправильные чашечные весы, мешок крупы и правильная гиря в 1 кг. Как отвесить на этих весах 1 кг крупы?

10. (4) Имеется 11 монет, среди которых, возможно, есть одна фальшивая, неизвестно, легче или тяжелее. Как определить 8 настоящих монет за два взвешивания?

11. (4+) На каждой клетке доски 8×8 лежит камень. Камни убывают по весу в каждой строке (слева направо) и каждом столбце (снизу вверх). Разрешается взвесить на весах (показывающих вес груза) любой камень (несколько камней сразу взвешивать нельзя). Покажите, как за 15 таких взвешиваний определить, есть ли на доске камень, весящий 100 грамм.

12. (4+) Есть шесть монет, из которых две фальшивые, весящие поровну, но меньше настоящих. За три взвешивания на чашечных весах определите обе фальшивые монеты.

13. (4+) Эксперт представляет суду 45 гирь. Он знает вес каждой, а судья знает только то, что среди них есть 9 гирь весом 1 г, 8 гирь весом 2 г, $\ldots$, 1 гиря весом 9 г. Как эксперт должен проделать два взвешивания, чтобы судья смог по их результатам восстановить вес каждой гири?

14. (4+) Антиквар приобрел 99 одинаковых по виду старинных монет. Ему сообщили, что ровно одна из монет - фальшивая - легче настоящих (а настоящие весят одинаково). Как, используя чашечные весы без гирь, за 7 взвешиваний выявить фальшивую монету, если антиквар не разрешает никакую монету взвешивать более двух раз?

15. (3+) В корзине лежат 13 яблок. Имеются весы, с помощью которых можно узнать суммарный вес любых двух яблок. Как выяснить за 8 взвешиваний суммарный вес всех яблок?

16. (5−) Эксперт предъявил суду 10 гирь. Он знает вес каждой гири, а судья знает только то, что две из них весят по 1 г, две по 2 г, две по 3 г, две по 4 г и две по 5 г. Как эксперт должен проделать два взвешивания, чтобы судья смог по их результатам восстановить вес каждой гири?

17. (5−) Есть 13 монет, среди которых одна фальшивая, но не известно, легче ли она или тяжелее настоящих. Какое наименьшее число взвешиваний на двухчашечных весах потребуется, чтобы её найти, да ещё и понять, легче ли она или тяжелее?

18. (5−) У Васи есть 11 одинаковых по внешнему виду монет, среди которых 5 фальшивых и 6 настоящих, причем фальшивые монеты весят одинаково и легче настоящих, которые тоже весят одинаково. Еще у Васи есть прибор, который по двум положенным в него монетам определяет, равны монеты по весу, или нет. Вася выбрал одну монету из 11. Как он может установить, является ли выбранная монета настоящей, если прибор после пятого использования выходит из строя?

19. (5−) Имеется 100 серебряных монет разных размеров и 101 золотая монета также разных размеров. Если у одной монеты размер больше, чем у другой, то она и больше весит, но это верно только для монет, сделанных из одного и того же металла. Все монеты можно легко упорядочить по размерам на глаз. Отличить золото от серебра можно тоже. Как за 8 взвешиваний определить, какая монета из всех 201 штук занимает по весу ровно 101-е место? Все 201 монеты также различны по весу.

20. (4+) В ряд лежат 100 гирь, их веса в граммах — целые, общий вес — чётный. Левая гиря весит 1 г, следующая — не более 2 г, следующая — не более 3 г, и т. д. Докажите, что все гири можно разбить на две кучки равного веса.

21. (5) В качестве вещественного доказательства суду были предъявлены 8 монет, среди которых 4 монеты — фальшивые, весящие меньше настоящих, но не обязательно все одинаково. Адвокат обвиняемого знает, какие именно монеты настоящие, а какие фальшивые, и хочет убедить в этом суд. Как ему это сделать всего за 3 взвешивания?

22. (5) Пираты захватили 27 золотых слитков. Согласно надписям на слитках 9 из них весят по 1 унции, 9 — по 5 унций, 9 — по 10 унций. Стало известно, что ровно один из слитков — фальшивый, его вес меньше написанного. Матросы требуют немедленной выдачи своей доли, причём заведомо настоящими слитками. У капитана есть чашечные весы без гирь. Как только становится ясно, что какие-либо слитки — настоящие, их отдают матросам, и в дальнейших взвешиваниях эти слитки не участвуют. Может ли капитан наверняка выявить фальшивый слиток за 4 взвешивания?

23. (5−) Есть 68 монет, все они разные по весу. Как за 100 взвешиваний найти самую легкую и самую тяжелую?

24. (5) Имеется 9 одинаковых монет, одна из которых фальшивая и по этой причине легче остальных. Мы располагаем двумя весами без гирь, позволяющими сравнивать по весу любые группы монет. Однако одни из имеющихся весов являются грубыми, на них нельзя отличить фальшивую монету от настоящей, так как их точность не позволяет уловить разницу в весе. Зато другие весы точные. Но какие весы грубые, а какие точные - неизвестно. Как в этой ситуации с помощью трех взвешиваний определить фальшивую монету?

25. (5+) Пираты захватили 27 золотых слитков. Согласно надписям на слитках 9 из них весят по 1 унции, 9 — по 5 унций, 9 — по 10 унций. Стало известно, что ровно один из слитков — фальшивый, его вес меньше написанного. Матросы требуют немедленной выдачи своей доли, причём заведомо настоящими слитками. У капитана есть чашечные весы без гирь. Как только становится ясно, что какие-либо слитки — настоящие, их отдают матросам, и в дальнейших взвешиваниях эти слитки не участвуют. Может ли капитан наверняка выявить фальшивый слиток за 3 взвешивания?

26. **(a)** У Пети есть 11 различных (однако внешне неразличимых) гирек, веса которых равны 1, 2, …, 11 граммов. Петя попросил Васю написать на каждой гире её вес. Как с помощью трёх взвешиваний убедиться, в том, что все надписи верны?

1. (2+) Сумма двух чисел равна 13,5795. Если в большем из них перенести запятую на один знак влево, то получим меньшее число. Найдите данные числа.

2. (3−) На клумбе растут астры, георгины, тюльпаны и гвоздики — всего 82 цветка, причем астр в 1,5 раза больше, чем тюльпанов, а георгинов в 2,5 раза меньше, чем гвоздик. Федя хочет нарвать букет из 13 георгинов и 4 астр. Сможет ли он это сделать?

3. (3−) В банановой республике прошли выборы в парламент, в котором участвовали все жители. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46% жителей любят мандарины?

4. (4−) Прямоугольник, у которого одна из сторон втрое длиннее другой, разрезали на одинаковые квадратики. Оказалось, что сумма их периметров в 6 раз больше периметра исходного прямоугольника. Сколько могло получиться квадратиков?

5. (4−) В трёх клетках таблицы 3×3 стоят числа:

1		5
3		

Требуется заполнить числами остальные клетки так, чтобы во всех строках, столбцах и главных диагоналях суммы чисел оказались равными. Докажите, что это можно сделать единственным способом, и заполните таблицу.

6. (5) По окружности, чередуясь, стоят 24 черных и 24 белых ненулевых числа. Каждое черное число равно сумме своих соседей, а каждое белое число равно произведению своих соседей. Чему равна сумма всех 48 чисел?

1. (3$-$) Можно ли разрезать $4 \times 4 \times 4$ на L-тетраминошки?

2. (3) Можно ли разрезать $4 \times 4 \times 4$ на T-тетраминошки

3. (4$-$) Какое наибольшее количество блоков $2 \times 2 \times 1$ можно запихнуть в коробку $3 \times 3 \times 3$?

1. (2+) Какие остатки может давать куб натурального числа при делении на 13?

2. (2+) Может ли $m! + n!$ оканчиваться на 1990?

3. (2+) Доказать, что $43^{23} + 23^{43}$ делится на 66.

4. (2+) a, b, c – целые числа, причём $a+b+c$ делится на 6. Докажите, что $a^3+b^3+c^3$ тоже делится на 6.

5. (3−) В магазине было 6 ящиков, массы которых соответственно 15, 16, 18, 19, 20 и 31 килограммов. Две фирмы приобрели пять ящиков, причём одна из них взяла по массе яблок в два раза больше чем другая. Какой ящик остался в магазине?

6. (3−) Докажите, что $1 + 2^{57} + 3^{57} + ... + 2018^{57}$ делится на 2019.

7. (3−) Докажите, что $n^{3\breve{}}n$ делится на 24 при любом нечётном n.

8. (3−) Найдите все натуральные числа m и n такие, что $n^2 + 2 = m!$

9. (3+) $p, p + 10, p + 14$ – простые числа. Найдите p.

10. (3+) p и p^2+2 —- простые числа. Докажите, что p^3+2 —- также простое число.

11. (3) Сумма трёх натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых также делится на 9.

12. (3−) Найти последнюю цифру числа $1{\cdot}2 + 2{\cdot}3 + ... + 999{\cdot}1000$..

13. (3+) Может ли сумма квадратов двух нечётных чисел быть квадратом целого числа?

14. (3+) Может ли сумма квадратов трёх нечётных чисел быть квадратом целого числа?

15. (3+) Доказать, что $3^n + 1$ не делится на 10100 ни для какого натурального n.

16. (4+) Доказать, что n-е простое число больше $3n$ при $n > 12$

17. (5−)Докажите, что предпоследняя цифра степени тройки всегда чётна.

18. (5−) На доске написано число 0. За один ход можно увеличить число на доске на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, но так, чтобы результат не делился на 10. Какое наибольшее число может получиться на доске через 100 ходов?

1. (3−) На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Встретились три островитянина: Петя, Вася и Толя. Петя сказал: «Мы все лжецы». Вася на это ему ответил: «Нет, только ты». Кто такой Толя — рыцарь, или лжец?

2. (3−) За круглый стол сели 7 братьев-гномов. Гномы всегда говорят правду всем старшим братьям, а младшим всегда врут. Каждый гном сказал своему правому соседу: «все здесь присутствующие говорят мне только неправду». В каком порядке сидят гномы?

3. (3+) На острове живут три племени: рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут и хитрецы, которые иногда говорят правду, а иногда лгут. За круглым столом сидят представители этих племен. Каждый из сидящих за столом произнес две фразы: (1) «Слева от меня сидит лжец.» (2) «Справа от меня сидит хитрец.» Докажите, что за этим столом рыцарей сидит столько же, сколько и лжецов.

4. (3+) На острове, где обитают только рыцари, всегда говорящие правду и лжецы, которые всегда лгут, прошла финансовая реформа, в результате которой правительство отобрало часть денег у некоторых жителей и раздало их остальным, но не более, чем по 100 тугриков каждому. После реформы каждый житель сообщил, что потерял в результате реформы более 100 тугриков. Докажите, что лжецов на острове больше, чем рыцарей.

5. (3+) Среди 300 человек есть 100 Петь, 100 Коль и 100 Вась. После того, как каждому задали вопрос, как его зовут, получилось 100 ответов «Петя», 100 ответов «Коля» и 100 ответов «Вася». Известно, что ровно 80 Петь и ровно половина Коль всегда лгут, а остальные Пети и Коли всегда говорят правду. Какое наибольшее число Вась могут быть кристально честными?

6. (4) Путешественник повстречал компанию, среди которой 1 рыцарь, 1 лжец и k туристов, но путешественник не знает, кто из них кто. При каком наименьшем k путешественник не сможет, задавая вопросы, понять, кто есть кто?

7. (4−) Путешественник повстречал компанию из 5 рыцарей и n туристов. Он может спрашивать каждого из людей про любого другого, турист ли тот. При каком n путешественник может гарантированно определить, кто рыцарь?

8. (4) Король показывает четверым мудрецам 7 колпаков: четыре чёрных и три белых. Затем мудрецам завязывают глаза, один из колпаков прячут, а остальные надевают на них, после чего повязки снимаются. Затем в конце каждой минуты мудрецы могут назвать цвет своего колпака или промолчать. Неправильно назвавшим цвет или молчащим больше пяти минут отрубают головы. Шут подговорил короля спрятать три белых колпака. Справятся ли мудрецы с выживанием?

9. (5+) За круглым столом сидят 100 социологов, некоторые из которых всегда говорят правду, а остальные всегда лгут, причем количество лжецов нечетно. Социологи играют в игру Опрос общественного мнения. В первом круге каждый социолог спросил соседа слева, правда ли, что $2+2=4$. В каждом следующем круге каждый социолог спрашивает своего соседа слева, получил ли он в предыдущем круге ответ «да». Сколько ответов «нет» могло прозвучать в первых 100 кругах игры?

1. (4−) Дан кубик $2 \times 2 \times 2$, поверхность которого разделена на 24 единичных квадратика. Их красят в несколько цветов так, что соседние по стороне квадратики покрашены в разные цвета. Какое наибольшее количество квадратиков одного цвета может при этом получиться?

2. (4−) «Коброй» называется фигура, ход которой заключается в прыжке на клетку, в которую можно попасть сдвигом на одну клетку по вертикали или горизонтали, а затем на N клеток в перпендикулярном направлении (при $N = 2$ "кобра"– это шахматный конь). При каких N "кобра"может пройти с каждой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?

3. (4+) Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора 1, 2, . . . , 1000 так, чтобы сумма никаких двух чисел не делилась на их разность?

4. (4+) Дан кубик $3 \times 3 \times 3$, поверхность которого разделена на 54 единичных квадратика. Их красят в несколько цветов так, что соседние по стороне квадратики покрашены в разные цвета. Какое наибольшее количество квадратиков одного цвета может при этом получиться?

5. (5−) В суперлиге играет n футбольных команд. Чемпионат разыгрывается в один круг (каждые две команды играют между собой один раз, за победу дают 3 очка, за ничью 1, за поражение очков не дают). По итогам чемпионата составили турнирную таблицу, в которой команды упорядочены по количеству очков. (На первом месте, как это ни странно, команда с наибольшим количеством очков.) Какая наибольшая разница может быть между двумя командами, занимающими соседние строчки турнирной таблицы?

6. (5) Квадратная коробка конфет разбита на 49 равных квадратных ячеек. В каждой ячейке лежит шоколадная конфета – либо чёрная, либо белая. За один присест Саша может съесть две конфеты, если они одного цвета и лежат в соседних по стороне или по углу ячейках. Какое наибольшее количество конфет гарантированно может съесть Саша, как бы ни лежали конфеты в коробке?

7. (5) Куб с ребром n составлен из белых и чёрных кубиков с ребром 1 таким образом, что каждый белый кубик имеет общую грань ровно с тремя чёрными, а каждый чёрный – ровно с тремя белыми. При каких n это возможно?

8. (5+) В какое минимальное количество цветов надо покрасить диагонали, стороны и вершины правильного 2007-угольника, чтобы выполнялись следующие условия: 1) отрезки одного цвета не должны иметь общих вершин; 2) цвет вершины должен отличаться от цвета исходящих из нее отрезков

9. (5+) Какое наименьшее количество квадратиков 1×1 надо нарисовать, чтобы получилось изображение квадрата 25×25, разделённого на 625 квадратиков 1×1?

10. (5+) Художник-абстракционист взял деревянный куб $5\times5\times5$, разбил каждую грань на единичные квадраты и окрасил каждый из них в один из трёх цветов – чёрный, белый или красный – так, что нет соседних по стороне квадратов одного цвета. Какое наименьшее число чёрных квадратов могло при этом получиться?

1. (3) Существует ли натуральное число n такое, что число $2007n$ имеет ровно 9 различных делителей?

2. (3) Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

3. (3−) Натуральное число $n < 10000$ таково, что число $n + 100!$ — простое. Докажите, что число n тоже простое или равно 1.

4. (3−) 20 шахматистов сыграли турнир в один круг. Корреспондент «Спортивной газеты» написал в своей заметке, что каждый участник этого турнира выиграл столько же партий, сколько и свёл вничью. Докажите, что корреспондент ошибся.

5. (3) Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие – втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

6. (3+) Назовем пару натуральных чисел квадратной, если и их сумма, и их произведение являются точными квадратами. Докажите, что число 11 не входит ни в одну квадратную пару.

7. (3+) Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

8. (3+) Из цифр 2, 3, 4, ... 9 составили два натуральных числа. Каждая цифра использовалась один раз. Могло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого?

9. (4−) Последовательные числа 22, 23 и 24 обладают тем свойством, что в разложение каждого из них на простые множители каждый множитель входит в нечетной степени. А какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может обладать таким свойством?

10. (4) Найдите наибольшее возможное значение, которое может принимать НОД двух четырёхзначных чисел, записанных восемью разными цифрами.

11. (4) Докажите, что для любых нечетных a, b, c верно равенство

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}\right) = (a, b, c)$$

12. (4+) Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 2019, можно отметить так, чтобы произведение любых двух отмеченных чисел было бы точным квадратом?

13. (4+)Существует ли натуральное число, у которого число делителей, являющихся точными квадратами на 2011 больше, чем являющихся точными кубами?

14. (5−) Назовём положительную числовую дробь интересной, если сумма её числителя и знаменателя равна 17. Всякую ли дробь можно выразить через интересные с помощью сложения и вычитания?

15. (5−) Натуральные числа a, b и c взаимнопросты в совокупности и удовлетворяют соотношению $ab = (a-b)c$. Докажите, что $a-b$ является квадратом натурального числа.

16. (5) Дано число $n = 2^{100} \cdot 3^{100}$. Сколько существует делителей числа n^2, которые меньше n, но не являются делителями n?

17. (5−) Существуют ли 11 таких натуральных чисел, что у любых пяти есть общий делитель, а у любых шести — нет?

1. (3) Три шпиона наблюдали за движением бронепоезда, едущего с постоянной скоростью. Первый шпион отметил, что бронепоезд прошёл мимо него в 9:00, второй, располагавшийся на 100 км дальше первого, отметил прохождение бронепоезда в 12:00, а третий, располагавшийся на 100 км дальше второго, — в 17:00. Докажите, что у какого-то из шпионов часы врут не меньше, чем на полчаса.

2. (4) Ёжик и Медвежонок в сильный туман одновременно вышли из своих домов навстречу друг другу и, не увидев друг друга, разминулись на расстоянии 600 метров от дома Ёжика. Каждый продолжил идти, и, дойдя до пустого дома друга, пошёл обратно. На расстоянии 800 метров от дома Медвежонка, они, наконец, встретились. Каково расстояние между их домами?

3. (3+) Группа туристов должна была прибыть на вокзал в 17:00. К этому времени с турбазы за ними должен был приехать автобус. Однако, прибыв на вокзал в 15:15, туристы, не ожидая автобуса, пошли пешком на турбазу. Встретив по дороге автобус, они сели в него и прибыли на турбазу на 15 мин раньше предусмотренного времени. С какой скоростью шли туристы до встречи с автобусом, если скорость автобуса 60 км/ч?

4. (4+) Заведенный механический будильник звенит, когда часовая стрелка совпадет со стрелкой будильника. Петя завел будильник на некоторое время с целым числом часов и минут. Проснувшись раньше звонка, Петя обнаружил, что часовая стрелка направлена по биссектрисе угла между минутной и стрелкой будильника. Через три минуты, когда стрелка будильника оказалась биссектрисой угла между часовой и минутной стрелками, Петя встал, не дождавшись звонка. На какое время был заведен будильник?

5. (3+) Катер плыл по течению реки 2 часа, после чего сломался мотор, который команда катера ремонтировала 1 час (а катер плыл по течению). После этого катер вернулся обратно за 3 часа. Сколько времени потребовалось бы катеру на возвращение, если бы ремонт мотора продолжался 2 часа?

6. (3+) Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались по шоссе в одну сторону. Когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист был в 6 км от них. Когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. Насколько велосипедист был впереди пешехода в момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

7. (3−) На дистанции в 2 мили жираф обгоняет носорога на $1/4$ мили, а носорог гиппопотама — на $1/8$ мили. На сколько жираф обгонит гиппопотама на дистанции 2 мили?

8. (3−) В соревнованиях велогонщиков на круговом треке приняли участие Вася, Петя и Коля. Вася каждый круг проезжал на 2 секунды быстрее Пети, а Петя —

на три секунды быстрее Коли. Когда Вася закончил дистанцию, Пете осталось проехать 10 кругов. А сколько осталось Коле?

9. (5) По круглому треку ездят с постоянными, но различными скоростями пятеро велосипедистов. У одного из них есть фляжка с водой. При обгоне фляжка от одного обязательно переходит к другому (моментов, когда двое одновременно обгоняют одного, не случается). Можно ли так подобрать начальное расположение и скорости велосипедистов, что как бы долго они ни ездили, у двух из них фляжка так и не побывает?

10. (3) Хулиганка Натка решила забежать наверх по движущемуся вниз эскалатору станции метро «Парк Победы», считая ступеньки. Через 12 минут, добежав до верху, Натка была задержана полицейским, который повёз нарушительницу вниз по эскалатору. Ровно через минуту полицейский отвлёкся, и Натке удалось вырваться. Освободившись, она с той же скоростью побежала вниз и через две минуты сбежала с эскалатора. За какое время спускается стоящий на эскалаторе человек на станции метро «Парк Победы»?

11. (5) Вдоль дороги расставлены светофоры на расстоянии 10 км. Они работают так: последние 5 минут каждого часа там горит красный свет, остальное время — зеленый. Машина ехала по этой дороге 10 часов с постоянной скоростью, при этом ни разу не остановившись на светофорах на красный свет. Какое наибольшее расстояние она могла проехать?

1. (3−) Между некоторыми городами Тридевятого и Тридесятого Царства проведены дороги. Злая колдунья покрыла туманом все дороги между городами из одного царства (по этим дорогам стало невозможно ездить). Тем не менее оказалось, что между любыми двумя городами из разных царств сообщение сохранилось. Докажите, что между любыми двумя городами из одного царства тоже сохранился путь.

2. (3+) За круглым столом сидят несколько гостей. Некоторые из них знакомы между собой; знакомство взаимно. Все знакомые каждого гостя (считая его самого) сидят вокруг стола через равные промежутки. (Для другого человека эти промежутки могут быть другими.) Известно, что каждые двое имеют хотя бы одного общего знакомого. Докажите, что все гости знакомы друг с другом.

3. (5−) В группе школьников любые двое имеют ровно одного общего знакомого из этой группы. Может ли эта группа состоять из 999 школьников?

4. (5) В стране несколько городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причем из любого города в любой другой можно добраться по этим дорогам. Оказалось, что из двух городов выходят по две дороги, а из остальных — по три или по одной. Докажите, что можно закрыть несколько дорог на ремонт таким образом, чтобы из каждого города выходило по три или по одной дороге.

5. (5−)Существует ли такая компания из 20 человек, в которой каждый человек имеет ровно 8 знакомых и любые двое людей имеют общего знакомого тогда и только тогда, когда они сами незнакомы?

6. (5+) На полуострове 200 городов-государств. Известно, что, начиная с сотворения мира, на полуострове было не более 200 войн, в каждой из которых было ровно по два участника. Докажите, что 67 городов-государств могут объединиться в федерацию, члены которой никогда не воевали друг с другом

1. (3-) Миша написал на доске в некотором порядке 2018 плюса и 2019 минусов. Время от времени Юра подходит к доске, стирает любые два знака и пишет вместо них один, причём если он стёр одинаковые знаки, то вместо них он пишет плюс, а если разные, то минус. После нескольких таких действий на доске остался только один знак. Какой?

2. (3) Круг разделён на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

3. (3) В вершинах шестиугольника записаны числа 12, 1, 10, 6, 8, 3 (в таком порядке). За один ход разрешено выбрать две соседние вершины и к числам, стоящим в данных вершинах, одновременно прибавить единицу или одновременно вычесть из них единицу. Можно ли получить в итоге шесть чисел в таком порядке: 6, 17, 14, 3, 15, 2?

4. (3) На шести ёлках сидят шесть чижей, на каждой ёлке – по чижу. Ёлки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной ёлки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной ёлке?

5. (3) В одной вершине куба написано число 1, а в остальных – нули. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться, чтобы все числа делились на 3?

6. (3) В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа 1 и –1 так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят единицы. Разрешается изменять знак в любых 6 подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число –1 сдвинулось в соседнюю с исходной вершину?

7. (3+) В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно перезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

8. (4) На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу – на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки?

9. (4-) В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город

Б, оттуда - в самый удаленный от него город С и т.д. Докажите, что если С не совпадает с А, то путешественник никогда не вернется в А.

10. (3+) По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трем подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными?

11. (4) Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

12. (4+) В каждой из 100 стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран А может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих со страной А стран правит не та партия, которая правит в стране А. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

13. (5-) В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если "пачка"состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

14. (5) В марсианском алфавите есть две буквы - У и Ы, причем если из любого слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно также смысл не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Обязательно ли слова ЫУЫУЫ и УЫУЫУ имеют одинаковый смысл?

1. (4+) Докажите, что если из квадрата размером $2^n \times 2^n$ клеток вырезать любую клетку, то получившуюся фигуру можно разрезать на уголки из трёх клеток

2. (4) В каждой клетке клетчатого квадрата 10×10 провели по диагонали. Докажите, что можно покрасить каждый из 200 получившихся треугольников в один из трёх цветов так, чтобы треугольники одинакового цвета по стороне не граничили.

3. (4−) Если на доске записано число A, к нему можно прибавить любой его собственный делитель (отличный от 1 и самого A) и заменить число на получившуюся сумму. Докажите, что из $A = 4$ можно получить любое составное число.

4. (4) Можно ли взять 10 натуральных чисел, чтобы разность любых двух была их общим делителем?

5. (4) В каждой клетке шахматной доски стоит 0. Разрешается выбрать любые две клетки, соединённые ходом коня, и увеличить на 1 стоящие в них числа. Можно ли добиться того, чтобы в клетках оказались числа $1, 2, \ldots, 64$?

6. (5) В выражении $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1001$ можно заменить все звездочки на плюсы или минусы. Докажите, что таким образом можно получить все числа от $-500\,500$ до $500\,500$.

7. (5+) Клетки бесконечной в одну сторону клетчатой полоски занумерованы по порядку слева направо, начиная с 1. В начале в первой и второй клетках лежит по монете. Если монета лежит в k-й клетке, ее можно сдвинуть на k пустых клеток вправо. Докажите, что для каждого натурального N можно поставить монету в N-ю клетку.

8. (5+) Клетки таблицы $n \times n$ раскрашены в белый и черный цвета так, что из четырёх угловых клеток таблицы три — белые и одна — черная Докажите, что в таблице есть квадрат 2×2, в котором нечетное число белых клеток.

9. (5+) В прямоугольнике 3×n стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

1. (3) Докажите, что в крестиках-ноликах на бесконечном поле до пяти одинаковых в ряд у ноликов нет выигрышной стратегии.

2. (4) В углу клетчатой доски 9×9 стоит фишка. Двое по очереди ходят ею. За один ход фишку можно переместить в соседнюю по стороне клетку. При этом нельзя ходить на клетки, где фишка уже была, а также на клетки, имеющие общую сторону с теми, на которых фишка уже была (не считая той, где она находится сейчас). Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнёр?

3. (4) На доске написаны числа 1, 2, ..., 100. Петя и Вася по очереди вычёркивают эти числа (Петя ходит 1-м). Вася хочет, чтобы после его 49-го хода на доске осталось 2 числа, отличающихся на 1. Сможет ли он добиться своей цели?

i (4+) На доске написаны числа 1, 2, ..., 100. Петя и Вася по очереди вычёркивают эти числа (Петя ходит 1-м). Вася хочет, чтобы после его 49-го хода на доске осталось 2 числа, отличающихся на 3. Сможет ли он добиться своей цели?

4. (5−) На доске написано число 1 000 000 000. Двое играют в такую игру: своим ходом можно либо разложить любое число на два больших единицы сомножителя и выписать их на доску, стерев с доски исходное, либо найти на доске два совпадающих числа и стереть с доски одно из них или оба. Кто не может сделать ход — проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

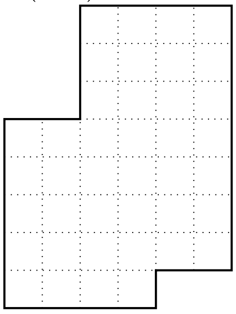
5. (5−) На доске написаны натуральные числа от 1 до 500. Вася и Петя по очереди (начинает Вася) стирают по одному числу, пока не останется два числа. Если сумма этих двух чисел делится на 3, выигрывает Вася, в противном случае — Петя. Кто выиграет при правильной игре?

6. (5) Двое играют в такую игру. Вначале есть кучка из 2019 камней. За один ход можно разделить кучку на две или три непустые кучки. Ходят по очереди, не имеющий хода проигрывает. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнёр?

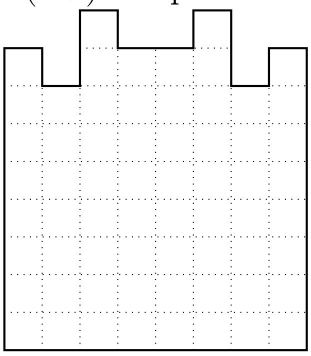
1. (3+) Докажите, что для любого целого $n > 4$ квадрат можно разрезать на n прямоугольников, у каждого из которых одна из сторон вдвое длиннее другой.

2. (3−) Из трёх шестиклеточных букв Т сложите фигуру, которую можно разрезать на три различных прямоугольника.

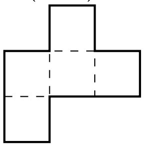
3. (4+) Разрезать на две равные части:



4. (4+) Разрезать на две части, из которых собирается квадрат:

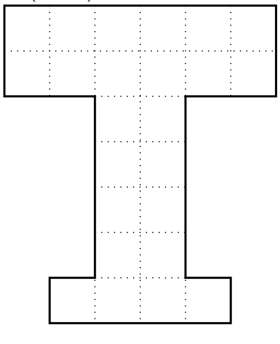


5. (3−) Разрезать на 4 части и собрать из них квадрат:



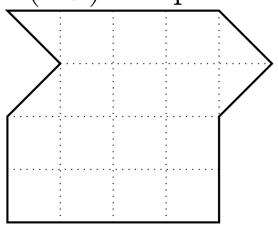
6. (3−) Разрезать квадрат по следующей схеме, чтобы у прямоугольника A была наибольшая площадь, а у прямоугольника B — наибольший периметр?

7. (3−) Разрезать на три равные части:



8. (4+) Нарисовать фигуру, которую можно разрезать на одинаковые тетраминошки каждого из видов.

9. (3+) Разрезать на 4 равные части:



10. (3+) Составить треугольник из трёх равных треугольников.

1. (3−) Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

2. (3−) Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?

3. (3) В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идёт число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?

4. (4−) У паука есть 8 одинаковых носков и 8 одинаковых ботинок. Паук каждую секунду либо надевает на одну из своих ног носок, либо натягивает ботинок на какую-нибудь из ног, на которую носок уже надет (у паука 8 ног; на каждую ногу он надевает один носок и один ботинок). Два способа обувания паука считаются различными, если паук хотя бы в одну из 16 секунд делает различные действия. Сколькими различными способами паук может обуться?

5. (3+) Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трёх юношей?

6. (3+) Каких десятизначных чисел больше: тех, которые можно представить как произведение двух пятизначных чисел, или тех, которые нельзя так представить?

7. (4) Сколько существует десятизначных чисел, сумма цифр которых равна 4?

8. (4−) Каких прямоугольников с целыми сторонами больше периметром 2016 или с периметром 2018? (прямоугольники a*b и b*a считаются одинаковыми)

9. (4+) Нарисуйте на плоскости шесть точек так, чтобы они служили вершинами ровно для 17 треугольников.

10. (5) План города имеет схему, представляющую собой прямоугольник 5×10 клеток. На улицах введено одностороннее движение: разрешается ехать только вправо и вверх. Сколько есть различных маршрутов, ведущих из левого нижнего угла в правый верхний?

11. (5+) Что больше: число способов разложить 19 гирек с весами 1 г, 2 г, . . . , 19 г на две чашки весов так, чтобы весы остались в равновесии, или число способов разложить так 20 гирек с весами 1 г, 2 г, . . . , 20 г?

1. (3+) Дно прямоугольной коробки выложено плитками размером 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и потеряли одну плитку 2×2. Вместо нее достали плитку 1×4. Докажите, что выложить дно коробки плитками теперь не удастся.

2. (4−) Фигура «сфинкс» состоит из 6 правильных треугольников со стороной 1 (см. рис Можно ли правильный треугольник со стороной 30 разрезать на сфинксов? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)

3. (4−) В спортклубе тренируются 100 толстяков весом от 1 до 100 кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить так, чтобы ни в одной команде не было двух толстяков, один из которых весит вдвое больше другого?

4. (4+) Все поля шахматной доски 8×8 покрыли 32 косточками домино (каждая косточка закрывает в точности два поля). Докажите, что число вертикально лежащих косточек чётно.

5. (4+) Назовем крокодилом шахматную фигуру, ход которой заключается в прыжке на m клеток по вертикали или по горизонтали, и потом на n клеток в перпендикулярном направлении. Докажите что для любых m и n можно так раскрасить бесконечную клетчатую доску в 2 цвета (для каждых конкретных m и n своя раскраска), что всегда 2 клетки, соединенные одним ходом крокодила, будут покрашены в разные цвета.

6. (5) Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеток вырезано 99 квадратиков размером 2×2 клетки. Докажите, что из него можно вырезать еще один такой квадратик.

1. (4−) На прямоугольном столе лежит бильярдный шар. В каком направлении надо его пустить, чтобы он стукнулся об каждый борт стола ровно по разу, а затем вернулся в исходную точку?

2. (5−) У Бэтмена в пещере стоит прямоугольный бильярдный стол. Бэтмен хочет ударить по шару A, чтобы он стукнулся об верхний борт, затем об правый борт, а затем попал в шар B. Джокер хочет поместить шар B на стол так, чтобы Бэтмену это не удалось. Куда Джокер может поместить шар?