

Инварианты

15 июля

1. В трёх кучках 5, 8 и 18 камней. За одну операцию можно в одну кучку добавить один камень, а в другую — 5 камней. (а) Можно ли добиться, чтобы каждые две кучки отличались не больше чем на один камень? (б) Можно ли добиться, чтобы все кучки были равны?

2. На столе лежит куча камней. За ход требуется убрать со стола одну из куч и заменить её на любое количество куч, в каждой из которых будет меньше камней, чем в убранной. Докажите, что можно произвести лишь конечное число таких замен.

3. По кругу лежат 40 монет: две орлом, две решкой, две орлом, две решкой и т. д. Разрешается перевернуть монету, если одна из её соседок лежит орлом, а другая — решкой. Какого наибольшего числа монет, одновременно лежащих орлом, можно добиться с помощью таких операций

4. В таблице 8×8 все четыре угловые клетки закрашены чёрным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

5. (а) Дана таблица $n \times m$, заполненная целыми числами. За один ход разрешается изменить все знаки чисел в одной из строк или в одном из столбцов. Докажите, что такими операциями можно добиться того, что в каждой строке и каждом столбце сумма чисел будет неотрицательной.

(б) Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовём точку «особой», если более половины из соединённых с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбираем любую особую точку и перекрашиваем в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

6. В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. Все вершины и точки пересечения диагоналей окрашены в синий цвет. Вася хочет перекрасить эти синие точки в красный цвет. За одну операцию ему разрешается поменять цвет всех окрашенных точек, принадлежащих либо одной из сторон, либо одной из диагоналей на противоположный (красные в синий и наоборот). Сможет ли он добиться желаемого с помощью таких операций?

7. Барон Франкенштейн собрал монстра, а затем каждый день его пересобирает: если у того было n рук и m ног, то станет $2m - n$ рук и $2n - m$ ног. Как только монстр окажется без рук или без ног, он пойдёт в утиль.

(а) Докажите, что монстр, у которого изначально было 999 рук и 1000 ног, рано или поздно отправится в утиль.

(б) Докажите, что монстр имеет шансы не быть утилизированным только если у него рук столько же, сколько ног.

Инварианты

15 июля

1. В трёх кучках 5, 8 и 18 камней. За одну операцию можно в одну кучку добавить один камень, а в другую — 5 камней. (а) Можно ли добиться, чтобы каждые две кучки отличались не больше чем на один камень? (б) Можно ли добиться, чтобы все кучки были равны?

2. На столе лежит куча камней. За ход требуется убрать со стола одну из куч и заменить её на любое количество куч, в каждой из которых будет меньше камней, чем в убранной. Докажите, что можно произвести лишь конечное число таких замен.

3. По кругу лежат 40 монет: две орлом, две решкой, две орлом, две решкой и т. д. Разрешается перевернуть монету, если одна из её соседок лежит орлом, а другая — решкой. Какого наибольшего числа монет, одновременно лежащих орлом, можно добиться с помощью таких операций

4. В таблице 8×8 все четыре угловые клетки закрашены чёрным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

5. (а) Дана таблица $n \times m$, заполненная целыми числами. За один ход разрешается изменить все знаки чисел в одной из строк или в одном из столбцов. Докажите, что такими операциями можно добиться того, что в каждой строке и каждом столбце сумма чисел будет неотрицательной.

(б) Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовём точку «особой», если более половины из соединённых с ней точек имеют цвет, отличный от её цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбираем любую особую точку и перекрашиваем в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

6. В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. Все вершины и точки пересечения диагоналей окрашены в синий цвет. Вася хочет перекрасить эти синие точки в красный цвет. За одну операцию ему разрешается поменять цвет всех окрашенных точек, принадлежащих либо одной из сторон, либо одной из диагоналей на противоположный (красные в синий и наоборот). Сможет ли он добиться желаемого с помощью таких операций?

7. Барон Франкенштейн собрал монстра, а затем каждый день его пересобирает: если у того было n рук и m ног, то станет $2m - n$ рук и $2n - m$ ног. Как только монстр окажется без рук или без ног, он пойдёт в утиль.

(а) Докажите, что монстр, у которого изначально было 999 рук и 1000 ног, рано или поздно отправится в утиль.

(б) Докажите, что монстр имеет шансы не быть утилизированным только если у него рук столько же, сколько ног.