

Строили, строили и наконец построили!

1. На столе стоят 32 стакана с водой. Разрешается брать любые два стакана и уравнивать количества воды в них, переливая часть воды из одного стакана в другой. Как такими операциями добиться, чтобы во всех стаканах воды стало поровну?

2. В клетках прямоугольной доски $m \times n$ стоят положительные целые числа. Денис умеет одновременно умножать все числа в строке на 2, а Андрей — вычитать из всех чисел в столбце по 1. Докажите, что объединив усилия они смогут получить доску, заполненную нулями вне зависимости от того, какие числа были расставлены изначально.

3. На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в 20 томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Как ему не более чем за 19 таких операций расставить тома строго по порядку?

4. В строку в беспорядке записаны по разу числа $1, 2, 3, \dots, 16$. За один ход разрешается поменять местами два числа, отличающиеся ровно на 1 (например, поменять местами 5 и 6, где бы они ни стояли). Докажите, что числа можно расставить по возрастанию не более чем за 120 ходов.

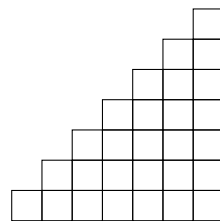
5. Среди 50 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

6. Придумайте набор из (a) 4; (b) 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

7. (a) Докажите, что равносторонний треугольник можно разрезать на 1000 равносторонних треугольников.

(b) Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов (не обязательно одинаковых), начиная с шести.

8. На какое наименьшее количество квадратов можно разбить лесенку $2^n - 1 \times 2^n - 1$? (На рисунке пример лесенки при $n = 3$.)



9. В клетках квадрата 100×100 стоят полицейский и вор. Полицейский пытается догнать вора. Они по очереди двигаются в соседние клетки. Полицейский начинает первым. Каких изначальных позиций больше, в которых полицейский поймает вора или в которых полицейский не сможет его поймать?

Строили, строили и наконец построили!

1. На столе стоят 32 стакана с водой. Разрешается брать любые два стакана и уравнивать количества воды в них, переливая часть воды из одного стакана в другой. Как такими операциями добиться, чтобы во всех стаканах воды стало поровну?

2. В клетках прямоугольной доски $m \times n$ стоят положительные целые числа. Денис умеет одновременно умножать все числа в строке на 2, а Андрей — вычитать из всех чисел в столбце по 1. Докажите, что объединив усилия они смогут получить доску, заполненную нулями вне зависимости от того, какие числа были расставлены изначально.

3. На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в 20 томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Как ему не более чем за 19 таких операций расставить тома строго по порядку?

4. В строку в беспорядке записаны по разу числа $1, 2, 3, \dots, 16$. За один ход разрешается поменять местами два числа, отличающиеся ровно на 1 (например, поменять местами 5 и 6, где бы они ни стояли). Докажите, что числа можно расставить по возрастанию не более чем за 120 ходов.

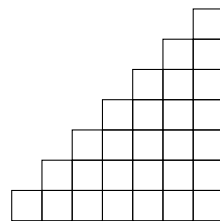
5. Среди 50 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

6. Придумайте набор из (a) 4; (b) 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

7. (a) Докажите, что равносторонний треугольник можно разрезать на 1000 равносторонних треугольников.

(b) Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов (не обязательно одинаковых), начиная с шести.

8. На какое наименьшее количество квадратов можно разбить лесенку $2^n - 1 \times 2^n - 1$? (На рисунке пример лесенки при $n = 3$.)



9. В клетках квадрата 100×100 стоят полицейский и вор. Полицейский пытается догнать вора. Они по очереди двигаются в соседние клетки.

Полицейский начинает первым. Каких изначальных позиций больше, в которых полицейский поймает вора или в которых полицейский не сможет его поймать?