Графы

15 июля

1. В селе живут 100 человек, среди них не менее 100 пар друзей. Каждое утро один из сельчан узнаёт сплетню, рассказывает её всем своим друзьям, те — своим друзьям, и так далее, пока к полудню сплетню не знает всё село. Докажите, что двух друзей можно поссорить, чтобы к следующему полудню свежую сплетню всё равно знало всё село.

2. В архипелаге несколько островов, и с каждого можно добраться до любого другого по мостам. Но если какой-нибудь мост закрыть, то путь между какими-то островами пропадёт.

(a) Докажите, что есть как минимум два острова, с которых ведёт только по одному мосту.

(b) Пусть с какого-то острова ведёт по крайней мере пять мостов. Докажите, что островов с одним мостом тоже хотя бы пять.

3. Вася поехал на метро забирать заказ из интернет-магазина. Как назло, пункт выдачи находился на самой дальней от Васиной станции. Когда Вася наконец добрался до места назначения, он обнаружил, что пункт выдачи переехал! Причём Васе снова надо поехать на самую дальнюю от его нынешнего местонахождения станцию. Докажите, что Васе придётся проехаться по самому длинному пути во всём метро. (Длину пути Вася считает в перегонах между соседними станциями. Кольцевых линий в Васином городе нет, то есть между любыми двумя станциями есть ровно один маршрут.)

4. Имеется страна из 100 городов и 99 дорог, причем из любого города можно доехать до любого. Докажите, что можно пронумеровать города числами от 0 до 99, а дороги — числами от 1 до 99 так, что номер каждой дороги равняется максимуму из номеров городов, которые она соединяет.

5. Если гном устраивает вечеринку, он зовёт туда всех своих друзей, которые после вечеринки становятся друзьями друг с другом. После того, как каждый гном устроил по одной вечеринке, гномы Грор и Трор всё ещё не были друзьями. Докажите, что только с помощью вечеринок они не подружатся никогда.

6. Каждый из учеников 7«а» класса дружит не менее, чем с половиной учеников 7«б» класса, а каждый из учеников 7«б» класса дружит не более, чем с половиной учеников 7«а» класса. Докажите, что каждый из учеников 7«а» класса дружит ровно с половиной учеников 7«б» класса, а каждый из учеников 7«б» класса дружит ровно с половиной учеников 7«а» класса.

7. В каждой из трех школ учится по 300 человек. Любой ученик имеет в сумме 301 знакомого из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы выбранные ученики были знакомы между собой.

Графы

15 июля

1. В селе живут 100 человек, среди них не менее 100 пар друзей. Каждое утро один из сельчан узнаёт сплетню, рассказывает её всем своим друзьям, те — своим друзьям, и так далее, пока к полудню сплетню не знает всё село. Докажите, что двух друзей можно поссорить, чтобы к следующему полудню свежую сплетню всё равно знало всё село.

2. В архипелаге несколько островов, и с каждого можно добраться до любого другого по мостам. Но если какой-нибудь мост закрыть, то путь между какими-то островами пропадёт.

(a) Докажите, что есть как минимум два острова, с которых ведёт только по одному мосту.

(b) Пусть с какого-то острова ведёт по крайней мере пять мостов. Докажите, что островов с одним мостом тоже хотя бы пять.

3. Вася поехал на метро забирать заказ из интернет-магазина. Как назло, пункт выдачи находился на самой дальней от Васиной станции. Когда Вася наконец добрался до места назначения, он обнаружил, что пункт выдачи переехал! Причём Васе снова надо поехать на самую дальнюю от его нынешнего местонахождения станцию. Докажите, что Васе придётся проехаться по самому длинному пути во всём метро. (Длину пути Вася считает в перегонах между соседними станциями. Кольцевых линий в Васином городе нет, то есть между любыми двумя станциями есть ровно один маршрут.)

4. Имеется страна из 100 городов и 99 дорог, причем из любого города можно доехать до любого. Докажите, что можно пронумеровать города числами от 0 до 99, а дороги — числами от 1 до 99 так, что номер каждой дороги равняется максимуму из номеров городов, которые она соединяет.

5. Если гном устраивает вечеринку, он зовёт туда всех своих друзей, которые после вечеринки становятся друзьями друг с другом. После того, как каждый гном устроил по одной вечеринке, гномы Грор и Трор всё ещё не были друзьями. Докажите, что только с помощью вечеринок они не подружатся никогда.

6. Каждый из учеников 7«а» класса дружит не менее, чем с половиной учеников 7«б» класса, а каждый из учеников 7«б» класса дружит не более, чем с половиной учеников 7«а» класса. Докажите, что каждый из учеников 7«а» класса дружит ровно с половиной учеников 7«б» класса, а каждый из учеников 7«б» класса дружит ровно с половиной учеников 7«а» класса.

7. В каждой из трех школ учится по 300 человек. Любой ученик имеет в сумме 301 знакомого из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы выбранные ученики были знакомы между собой.