Строили, строили и наконец построили!

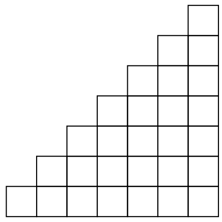
1. На столе стоят 32 стакана с водой. Разрешается брать любые два стакана и уравнивать количества воды в них, переливая часть воды из одного стакана в другой. Как такими операциями добиться, чтобы во всех стаканах воды стало поровну?

2. В клетках прямоугольной доски $m \times n$ стоят положительные целые числа. Денис умеет одновремнно умножать все числа в строке на 2, а Андрей — вычитать из всех чисел в столбце по 1. Докажите, что объединив усилия они смогут получить доску, заполненную нулями вне зависимости от того, какие числа были расставлены изначально.

3. На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в 20 томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Как ему не более чем за 19 таких операций расставить тома строго по порядку?

4. В строку в беспорядке записаны по разу числа $1, 2, 3, \ldots, 16$. За один ход разрешается поменять местами два числа, отличающиеся ровно на 1 (например, поменять местами 5 и 6, где бы они ни стояли). Докажите, что числа можно расставить по возрастанию не более чем за 120 ходов.

5. Среди 50 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

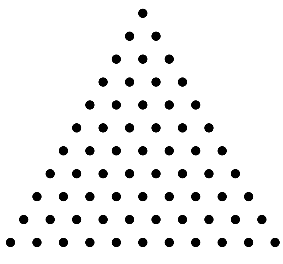


6. На какое наименьшее количество квадратов можно разбить лесенку $2^n - 1 \times 2^n - 1$? (Пример лесенки при $n = 3$ изображён на рисунке.)

7. Придумайте набор из **(a)** 4; **(b)** 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

8. **(a)** Докажите, что равносторонний треугольник можно разрезать на 1000 равносторонних треугольников.

(b) Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов (не обязательно одинаковых), начиная с шести.



9. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы ладьи одинакового цвета друг друга не били. (Ладьи бьют друг друга, если стоят на одной горизонтали или вертикали и между ними нет других ладей.)

10. На плоскости отмечены 66 точек (см. рис). Докажите, что **(a)** любые 65 из них можно зачеркнуть 10-ю прямыми; **(b)** все 66 зачеркнуть 10-ю прямыми невозможно.

11. В клетках квадрата 100×100 стоят полицейский и вор. Полицейский пытается догнать вора. Они по очереди двигаются в соседние клетки. Полицейский начинает первым. Каких изначальных позиций больше, в которых полицейский поймает вора или в которых полицейский не сможет его поймать?

Строили, строили и наконец построили!

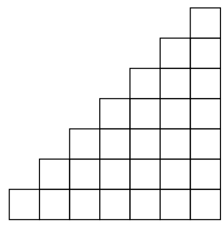
1. На столе стоят 32 стакана с водой. Разрешается брать любые два стакана и уравнивать количества воды в них, переливая часть воды из одного стакана в другой. Как такими операциями добиться, чтобы во всех стаканах воды стало поровну?

2. В клетках прямоугольной доски $m \times n$ стоят положительные целые числа. Денис умеет одновремнно умножать все числа в строке на 2, а Андрей — вычитать из всех чисел в столбце по 1. Докажите, что объединив усилия они смогут получить доску, заполненную нулями вне зависимости от того, какие числа были расставлены изначально.

3. На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в 20 томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Как ему не более чем за 19 таких операций расставить тома строго по порядку?

4. В строку в беспорядке записаны по разу числа $1, 2, 3, \ldots, 16$. За один ход разрешается поменять местами два числа, отличающиеся ровно на 1 (например, поменять местами 5 и 6, где бы они ни стояли). Докажите, что числа можно расставить по возрастанию не более чем за 120 ходов.

5. Среди 50 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

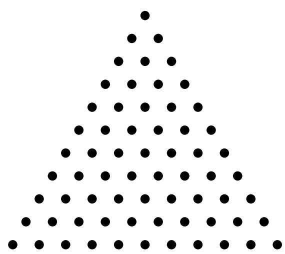


6. На какое наименьшее количество квадратов можно разбить лесенку $2^n - 1 \times 2^n - 1$? (Пример лесенки при $n = 3$ изображён на рисунке.)

7. Придумайте набор из **(a)** 4; **(b)** 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

8. **(a)** Докажите, что равносторонний треугольник можно разрезать на 1000 равносторонних треугольников.

(b) Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов (не обязательно одинаковых), начиная с шести.



9. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы ладьи одинакового цвета друг друга не били. (Ладьи бьют друг друга, если стоят на одной горизонтали или вертикали и между ними нет других ладей.)

10. На плоскости отмечены 66 точек (см. рис). Докажите, что **(a)** любые 65 из них можно зачеркнуть 10-ю прямыми; **(b)** все 66 зачеркнуть 10-ю прямыми невозможно.

11. В клетках квадрата 100×100 стоят полицейский и вор. Полицейский пытается догнать вора. Они по очереди двигаются в соседние клетки. Полицейский начинает первым. Каких изначальных позиций больше, в которых полицейский поймает вора или в которых полицейский не сможет его поймать?