

# НОДы и НОКи

15 июля

**Упражнение:** докажите, что степень вхождения простого  $p$  в  $\text{НОД}(a, b)$  равна минимуму из степеней вхождения  $p$  в  $a$  и  $b$ . Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про  $\text{НОК}(a, b)$ .

1. Найдите пару натуральных чисел, если известно, что

(a) их  $\text{НОД}$  равен 56, а  $\text{НОК}$  — 112;

(b)  $\text{НОД}$  равен 18, а  $\text{НОК}$  — 630.

2. (a) Про два натуральных числа  $a$  и  $b$  известно, что их  $\text{НОК}$  в 75 раз больше, чем их  $\text{НОД}$ , и  $a$  больше  $b$ . Докажите, что  $a$  больше, чем  $8b$ .

(b) Про два натуральных числа  $a$  и  $b$  известно, что их  $\text{НОК}$  в 270 раз больше, чем их  $\text{НОД}$ , и  $a$  больше  $b$ . Может ли  $5b$  быть больше, чем  $2a$ ?

3. Пусть  $a$  и  $b$  — натуральные числа. Докажите, что

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}.$$

4. Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — натуральные числа. Докажите, что

$$[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(b, c)(c, a)}.$$

5. Докажите, что если  $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ , то

$$\text{НОД}(a, bc) = \text{НОД}(a, b)\text{НОД}(a, c).$$

6. Докажите, что равенство  $(a, b) = (a + b, [a, b])$  выполняется для любых натуральных чисел  $a$  и  $b$ .

7. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 5000?

8. Илья придумал три числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а затем посчитал  $\text{НОД}(a, b)$ ,  $\text{НОД}(a, c)$  и  $\text{НОД}(b, c)$ . У него получились такие результаты: 1025, 775, 915. Докажите, что Илья где-то ошибся.

# НОДы и НОКи

15 июля

**Упражнение:** докажите, что степень вхождения простого  $p$  в  $\text{НОД}(a, b)$  равна минимуму из степеней вхождения  $p$  в  $a$  и  $b$ . Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про  $\text{НОК}(a, b)$ .

1. Найдите пару натуральных чисел, если известно, что

(a) их  $\text{НОД}$  равен 56, а  $\text{НОК}$  — 112;

(b)  $\text{НОД}$  равен 18, а  $\text{НОК}$  — 630.

2. (a) Про два натуральных числа  $a$  и  $b$  известно, что их  $\text{НОК}$  в 75 раз больше, чем их  $\text{НОД}$ , и  $a$  больше  $b$ . Докажите, что  $a$  больше, чем  $8b$ .

(b) Про два натуральных числа  $a$  и  $b$  известно, что их  $\text{НОК}$  в 270 раз больше, чем их  $\text{НОД}$ , и  $a$  больше  $b$ . Может ли  $5b$  быть больше, чем  $2a$ ?

3. Пусть  $a$  и  $b$  — натуральные числа. Докажите, что

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}.$$

4. Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — натуральные числа. Докажите, что

$$[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(b, c)(c, a)}.$$

5. Докажите, что если  $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ , то

$$\text{НОД}(a, bc) = \text{НОД}(a, b)\text{НОД}(a, c).$$

6. Докажите, что равенство  $(a, b) = (a + b, [a, b])$  выполняется для любых натуральных чисел  $a$  и  $b$ .

7. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 5000?

8. Илья придумал три числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а затем посчитал  $\text{НОД}(a, b)$ ,  $\text{НОД}(a, c)$  и  $\text{НОД}(b, c)$ . У него получились такие результаты: 1025, 775, 915. Докажите, что Илья где-то ошибся.