

НОДы и НОКи

14 июля

Упражнение: докажите, что степень вхождения простого p в $\text{НОД}(a, b)$ равна минимуму из степеней вхождения p в a и b . Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про $\text{НОК}(a, b)$.

1. Пусть a и b — натуральные числа. Докажите, что

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}.$$

2. Пусть a , b и c — натуральные числа. Докажите, что

$$[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(b, c)(c, a)}.$$

3. Пусть a , b , c — натуральные числа. Докажите, что

$$\frac{\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОД}(b, c) \cdot \text{НОД}(c, a)}{\text{НОД}(a, b, c)^2} = \frac{\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОК}(b, c) \cdot \text{НОК}(c, a)}{\text{НОК}(a, b, c)^2}$$

4. Докажите, что если $\text{НОД}(a, b, c) = 1$, то

$$\text{НОД}(a, bc) = \text{НОД}(a, b)\text{НОД}(a, c).$$

5. Докажите, что равенство $(a, b) = (a + b, [a, b])$ выполняется для любых натуральных чисел a и b .

6. Натуральные числа m, n таковы, что $(m, n) + [m, n] = m + n$. Докажите, что одно из чисел m и n делится на другое.

7. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 5000?

8. Илья придумал три числа a , b и c , а затем посчитал $\text{НОД}(a, b)$, $\text{НОД}(a, c)$ и $\text{НОД}(b, c)$. У него получились такие результаты: 1025, 775, 915. Докажите, что Илья где-то ошибся.

НОДы и НОКи

14 июля

Упражнение: докажите, что степень вхождения простого p в $\text{НОД}(a, b)$ равна минимуму из степеней вхождения p в a и b . Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про $\text{НОК}(a, b)$.

1. Пусть a и b — натуральные числа. Докажите, что

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}.$$

2. Пусть a , b и c — натуральные числа. Докажите, что

$$[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(b, c)(c, a)}.$$

3. Пусть a , b , c — натуральные числа. Докажите, что

$$\frac{\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОД}(b, c) \cdot \text{НОД}(c, a)}{\text{НОД}(a, b, c)^2} = \frac{\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОК}(b, c) \cdot \text{НОК}(c, a)}{\text{НОК}(a, b, c)^2}$$

4. Докажите, что если $\text{НОД}(a, b, c) = 1$, то

$$\text{НОД}(a, bc) = \text{НОД}(a, b)\text{НОД}(a, c).$$

5. Докажите, что равенство $(a, b) = (a + b, [a, b])$ выполняется для любых натуральных чисел a и b .

6. Натуральные числа m, n таковы, что $(m, n) + [m, n] = m + n$. Докажите, что одно из чисел m и n делится на другое.

7. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 5000?

8. Илья придумал три числа a , b и c , а затем посчитал $\text{НОД}(a, b)$, $\text{НОД}(a, c)$ и $\text{НОД}(b, c)$. У него получились такие результаты: 1025, 775, 915. Докажите, что Илья где-то ошибся.