Делимость и Основная Теорема Арифметики.

Основная теорема арифметики: каждое натуральное число представляется в виде произведения простых ровно одним способом (с точностью до перестановки множителей).

Упражнения.

1. На сколько нулей заканчивается число 100! ?

2. Найдите НОК

(a) $2^3 \cdot 5$, $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ и $2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

(b) 24, 20 и 122.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Какое наименьшее составное число не является делителем 50! ?

2. На какую наибольшую степень числа 1001 делится число 1001! ?

3. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — точный куб, а треть — точный квадрат.

4. Придумайте четыре натуральных числа, что произведение любых трёх делится на оставшееся, а произведение любых двух ни на одно из оставшихся не делится.

5. Назовём чётное число несложным, если оно не является произведением двух других чётных чисел. Правда ли, что любое чётное число единственным образом раскладывается в произведение несложных чисел?

6. Разложите число 100 000 в произведение пяти различных множителей, больших 1.

7. Может ли произведение цифр натурального числа быть равным 112 233?

8. Несколько натуральных чисел перемножили, и получилось 1120. Что это были за числа, если самое большое из них вдвое больше самого маленького?

9. Натуральные числа a и b таковы, что $42a = 43b$. Докажите, что $a + b$ — составное число.

10. Васе на новый год подарили набор трехклеточных уголков, а Пете — столько же доминошек, после чего мальчики сложили из всех своих фигурок прямоугольник. Докажите, что этот прямоугольник можно разрезать на полоски из 5 клеток.

11. Можно ли из чисел от 1 до 100 выкинуть одно так, чтобы произведение оставшихся было точным квадратом?

12. Из целых чисел до 120 выбрано 5 составных. Докажите, что какие-то два имеют общий делитель, больший 1.

13. На доске написано **(a)** 2019; **(b)** 14 натуральных чисел (не обязательно различных). Если эти числа увеличить на 1, то их произведение увеличится в 2020 раз. Приведите пример чисел, которые могли быть на доске.