

# Инварианты

15 июля

1. В трёх кучках 5, 8 и 18 камней. За одну операцию можно в одну кучку добавить один камень, а в другую — 5 камней. (а) Можно ли добиться, чтобы каждые две кучки отличались не больше чем на один камень? (б) Можно ли добиться, чтобы все кучки были равны?

2. На столе лежит куча камней. За ход требуется убрать со стола одну из куч и заменить её на любое количество куч, в каждой из которых будет меньше камней, чем в убранной. Докажите, что можно произвести лишь конечное число таких замен.

3. Семеро козлят задумали по трёхзначному числу. Затем каждые двое сыграли в такую игру: они сравнили первые цифры своих чисел, и тот, у кого цифра больше, дал другому столько щелчков, на сколько больше его цифра; потом проделали то же самое со вторыми и третьими цифрами. Могло ли случиться так, что всего они пробили 217 щелчков?

4. Есть  $n$  чисел  $a_1, \dots, a_n$ , все равные 1 или  $-1$ . К тому же, выполнено равенство  $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \dots + a_na_1a_2a_3 = 0$ . Докажите, что  $n \div 4$ .

5. По кругу лежат 40 монет: две орлом, две решкой, две орлом, две решкой и т. д. Разрешается перевернуть монету, если одна из её соседок лежит орлом, а другая — решкой. Какого наибольшего числа монет, одновременно лежащих орлом, можно добиться с помощью таких операций?

6. В таблице  $8 \times 8$  все четыре угловые клетки закрашены чёрным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

7. Дана таблица  $n \times m$ , заполненная целыми числами. За один ход разрешается изменить все знаки чисел в одной из строк или в одном из столбцов. Докажите, что такими операциями можно добиться того, что в каждой строке и каждом столбце сумма чисел будет неотрицательной.

8. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «1000». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?

# Инварианты

15 июля

1. В трёх кучках 5, 8 и 18 камней. За одну операцию можно в одну кучку добавить один камень, а в другую — 5 камней. (а) Можно ли добиться, чтобы каждые две кучки отличались не больше чем на один камень? (б) Можно ли добиться, чтобы все кучки были равны?

2. На столе лежит куча камней. За ход требуется убрать со стола одну из куч и заменить её на любое количество куч, в каждой из которых будет меньше камней, чем в убранной. Докажите, что можно произвести лишь конечное число таких замен.

3. Семеро козлят задумали по трёхзначному числу. Затем каждые двое сыграли в такую игру: они сравнили первые цифры своих чисел, и тот, у кого цифра больше, дал другому столько щелчков, на сколько больше его цифра; потом проделали то же самое со вторыми и третьими цифрами. Могло ли случиться так, что всего они пробили 217 щелчков?

4. Есть  $n$  чисел  $a_1, \dots, a_n$ , все равные 1 или  $-1$ . К тому же, выполнено равенство  $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \dots + a_na_1a_2a_3 = 0$ . Докажите, что  $n \div 4$ .

5. По кругу лежат 40 монет: две орлом, две решкой, две орлом, две решкой и т. д. Разрешается перевернуть монету, если одна из её соседок лежит орлом, а другая — решкой. Какого наибольшего числа монет, одновременно лежащих орлом, можно добиться с помощью таких операций?

6. В таблице  $8 \times 8$  все четыре угловые клетки закрашены чёрным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

7. Дана таблица  $n \times m$ , заполненная целыми числами. За один ход разрешается изменить все знаки чисел в одной из строк или в одном из столбцов. Докажите, что такими операциями можно добиться того, что в каждой строке и каждом столбце сумма чисел будет неотрицательной.

8. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «1000». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?