Первый разнобой

1. Клетки квадрата 100×100 раскрашены в шахматном порядке. Квадрат разрезали на квадраты с нечетными сторонами и в каждом квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что белых и черных клеток отмечено поровну.

2. Петя разрезал квадрат 10×10 по клеточкам на несколько частей и сложил из них два квадрата меньшего размера без наложений, причем «лишних» частей не осталось. Каким наименьшим количеством частей мог обойтись Петя?

3. В клетках квадрата 4×4 стоят полицейский и вор. Полицейский пытается догнать вора. Они по очереди двигаются в соседние клетки. Полицейский начинает первым. Каких изначальных позиций больше, в которых полицейский поймает вора или в которых полицейский не сможет его поймать?

4. Пусть d_1, d_2, d_3, d_4 — четыре наименьших натуральных делителя натурального же числа n, при этом оказалось, что $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$. Чему могло равняться n? (Найдите все варианты и докажите, что других нет)

5. p и q — последовательные простые числа. Докажите, что число $p + q$ можно разложить в произведение трех натуральных чисел, ни одно из которых не является единицей.

6. Незнайка написал на одной карточке единицу, на двух — двойку, на трёх — тройку, на четырёх — четвёрку, на пяти — пятёрку, на шести — шестёрку и на семи карточках — семёрку. Из полученных 28 карточек он составил 14 двузначных чисел, которые перемножил. Результат он забыл, но потом рассказывал всем, что этот результат оканчивался то ли на 2010, то ли на 2012, то ли на 2016. На какие же четыре цифры оканчивался Незнайкин результат, если он не ошибся в подсчётах? (Все шестёрки Незнайка использовал как шестёрки, а не как девятки.)

7. В компании из 52 человек у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за 100 разговоров все они могут узнать все новости.

8. Круг разбит на 100 секторов. Мирза и Егор по очереди заполняют сектора (в произвольном порядке) натуральными числами (первым ходит Мирза). Когда все сектора заполнены, Мирза пишет на доску ещё одно натуральное число, после чего Егор режет круг на две половинки (по 50 секторов). Если сумма чисел в одной из них оканчивается на те же две цифры, что и число на доске, то побеждает Егор, иначе побеждает Мирза. Кто победит при правильной игре?

9. Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Из любого ли натурального числа n при помощи таких операций можно получить число $n + 1$?