XXXV Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2019 г.

Заключительная олимпиада. 23 июля

Довывод

1. Старательный мальчик Вася решил исследовать, на сколько меняется сумма цифр числа при его увеличении на 2. С этой целью для каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 он выписал в тетрадочку это изменение (например, для числа 15 он выписал 2, а для числа 38 — отрицательное изменение -7). Чему равна сумма всех выписанных Васей чисел?

2. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD > BC$. Точка E такова, что $BE \perp AD$. Докажите, что $AE + BC \geqslant DE$.

3. Даны положительные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{1000}$. Оказалось, что a_k в пять раз больше среднего арифметического всех чисел. Какое наименьшее значение может принимать k?

4. Клетчатый прямоугольник раскрашен в шахматном порядке. Некоторые его клетки отмечены крестиком, причем вместе с любой отмеченной клеткой отмечены и все клетки той же строки, расположенные левее, а также все клетки в том же столбце, расположенные ниже. Оказалось, что среди отмеченных клеток поровну черных и белых. Докажите, что фигуру, образованную отмеченными клетками, можно разрезать на прямоугольники 1×2.

XXXV Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2019 г.

Заключительная олимпиада. 23 июля

Довывод

1. Старательный мальчик Вася решил исследовать, на сколько меняется сумма цифр числа при его увеличении на 2. С этой целью для каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 он выписал в тетрадочку это изменение (например, для числа 15 он выписал 2, а для числа 38 — отрицательное изменение -7). Чему равна сумма всех выписанных Васей чисел?

2. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD > BC$. Точка E такова, что $BE \perp AD$. Докажите, что $AE + BC \geqslant DE$.

3. Даны положительные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{1000}$. Оказалось, что a_k в пять раз больше среднего арифметического всех чисел. Какое наименьшее значение может принимать k?

4. Клетчатый прямоугольник раскрашен в шахматном порядке. Некоторые его клетки отмечены крестиком, причем вместе с любой отмеченной клеткой отмечены и все клетки той же строки, расположенные левее, а также все клетки в том же столбце, расположенные ниже. Оказалось, что среди отмеченных клеток поровну черных и белых. Докажите, что фигуру, образованную отмеченными клетками, можно разрезать на прямоугольники 1×2.

Вывод

5. В стране несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами с односторонним движением так, что из столицы можно добраться до любого города, не нарушая правил дорожного движения (при этом, возможно, проезжая через другие города). Назовем два нестоличных города *близкими*, если до них нельзя добраться из столицы по непересекающимися путям. Президент приказал соединить каждые два близких города прямой авиалинией. Оказалось, что теперь между любыми двумя нестоличными городами можно добраться, пользуясь только открытыми авиалиниями. Докажите, что тогда между любыми двумя нестоличными городами есть прямая авиалиния.

6. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки X и Y симметричны точке O относительно середин сторон BC и AD соответственно. Известно, что $AB = BC = CD$. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника лежит на прямой XY.

7. В последовательности целых чисел a_1, a_2, $\ldots$ произведение a_1a_2 отрицательно, а при $n > 2$ для вычисления a_n среди всех пар (i,j), $1 \leqslant i < j < n$, которые ранее не выбирались, выбирается одна пара (i,j), для которой $a_i + a_j$ имеет наименьшую абсолютную величину, и полагается $a_n = a_i + a_j$. Докажите, что $a_i = 0$ при некотором i.

Вывод

5. В стране несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами с односторонним движением так, что из столицы можно добраться до любого города, не нарушая правил дорожного движения (при этом, возможно, проезжая через другие города). Назовем два нестоличных города *близкими*, если до них нельзя добраться из столицы по непересекающимися путям. Президент приказал соединить каждые два близких города прямой авиалинией. Оказалось, что теперь между любыми двумя нестоличными городами можно добраться, пользуясь только открытыми авиалиниями. Докажите, что тогда между любыми двумя нестоличными городами есть прямая авиалиния.

6. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки X и Y симметричны точке O относительно середин сторон BC и AD соответственно. Известно, что $AB = BC = CD$. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника лежит на прямой XY.

7. В последовательности целых чисел a_1, a_2, $\ldots$ произведение a_1a_2 отрицательно, а при $n > 2$ для вычисления a_n среди всех пар (i,j), $1 \leqslant i < j < n$, которые ранее не выбирались, выбирается одна пара (i,j), для которой $a_i + a_j$ имеет наименьшую абсолютную величину, и полагается $a_n = a_i + a_j$. Докажите, что $a_i = 0$ при некотором i.