

1. Вдоль реки расположены пристани А, Б, В, Г (именно в таком порядке). От В до А теплоход плывет 1 час, от В до Г — тоже 1 час, а от Б до Г — 2 часа. В какую сторону течет река — от А к Г или от Г к А? Не забудьте обосновать ответ.

2. У Димы есть клетчатый квадратный лист  $20 \times 20$ . Вначале все его клетки покрашены в белый цвет. Дима может произвольным образом выделить клетчатый квадрат  $11 \times 11$  на своем листе и перекрасить все клетки этого квадрата: белые — в черный цвет, а черные — в белый цвет. Сможет ли Дима с помощью нескольких таких операций получить шахматную раскраску клеток листа  $20 \times 20$  (т. е. раскраску, в которой любые две соседние по стороне клетки покрашены в разные цвета)? Сторона клетки равна 1.

3. Точка  $M$  — середина стороны  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $AD$  — его высота. На отрезке  $BD$  отмечена такая точка  $E$ , что  $AM = DE$ . На отрезке  $EM$  отмечена такая точка  $F$ , что  $EF = FC$ . Докажите, что  $CF$  — биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ .

4. С квадратным трехчленом  $ax^2 + bx + c$  можно выполнять две операции: 1) поменять местами коэффициенты  $a$  и  $c$ ; 2) заменить  $x$  на  $x + d$ , где  $d$  — любое число, раскрыть скобки и привести к стандартному виду. Можно ли с помощью этих операций превратить  $x^2 - x - 2$  в  $x^2 - x - 1$ ?

4'. Докажите для чисел  $a, b, c$ , больших 1, неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| + \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right| + \left| \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right| \leq a + b + c.$$

5. Вдоль аллеи, идущей к бане, растут, чередуясь, 36 берёз и 35 сосен. Расстояния от каждого некрайнего дерева до двух его соседей отличаются ровно в 8 раз. Докажите, что точно посередине аллеи не может расти сосна.

6. В стране 100 городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами. Оказалось, что если два города не связаны прямым авиарейсом, то между ними есть хотя бы два различных пути с одной пересадкой. Какое наименьшее количество авиарейсов может быть в этой стране?