XXXV Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 3–28 июля 2019 г.

8 КЛАСС. ГРУППА ПРОФИ

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Антропов А.В.
Крачун Д.Н.
Чепасов А.П.

0 Приветственное занятие. 4 июля

По мотивам «Четыре задачи», журнал «Квантик», сентябрь 2016

Напомним, что по правилам «Морского боя» на поле 10×10 нужно расставить комплект из десяти кораблей: один 1×4, два 1×3, три 1×2, четыре 1×1 так, чтобы они не соприкасались даже уголками.

1. Докажите, что если сначала ставить однопалубные, затем двухпалубные и т.д., то возможна такая ситуация, что для последнего четырёхпалубного корабля не найдётся места.

2. На поле 10×10 стоит корабль 1×4. Какое наименьшее количество выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка его ранить?

3. Легко разместить комплект кораблей на доске 10×10. А на какой наименьшей квадратной доске можно разместить этот комплект?

4. Петя и Вася сыграли несколько партий в игру «Морской бой». Хитрый Петя расставлял корабли в разных партиях по-разному так, что если бы Вася попал в одной из партий, он промахнулся бы в любой другой, сделав аналогичный выстрел. Какое наибольшее число партий они могли при этом сыграть?

5. Верно ли, что если сначала ставить четырёхпалубный корабль, потом ставить трёхпалубные, и т.д., то всегда можно поставить полный комплект?

1 Вступительная олимпиада. 4 июля

1. Вдоль реки Вятка расположены пристани Мамадыш, Вишкиль, Котельнич и Киров (именно в таком порядке). От Котельнича до Мамадыша теплоход плывет 1 час, от Котельнича до Кирова — тоже 1 час, а от Вишкиля до Кирова — 2 часа. В какую сторону течет река — от Мамадыша к Кирову или наоборот? Все совпадения случайны.

2. У Игоря есть клетчатый квадратный лист 18×18. Вначале все его клетки покрашены в белый цвет. Игорь может произвольным образом выделить клетчатый квадрат 10×10 на своем листе и перекрасить все клетки этого квадрата: белые — в черный цвет, а черные — в белый цвет. Сможет ли Игорь с помощью нескольких таких операций получить шахматную раскраску клеток листа 18×18?

3. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC, AD — его высота. На отрезке BD отмечена такая точка E, что $AM = DE$. На отрезке EM отмечена такая точка F, что $EF = FC$. Докажите, что CF — биссектриса угла C треугольника ABC.

4. Докажите для чисел a, b, c, больших 1, неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right| + \left|\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| + \left|\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right| \leq a + b + c.$$

5. Вдоль аллеи, идущей к бане, растут, чередуясь, 36 берёз и 35 сосен. Расстояния от каждого некрайнего дерева до двух его соседей отличаются ровно в 8 раз. Докажите, что точно посередине аллеи не может расти сосна.

6. В стране 100 городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами. Оказалось, что если два города не связаны прямым авиарейсом, то между ними есть хотя бы два различных пути с одной пересадкой. Какое наименьшее количество авиарейсов может быть в этой стране?

2 Индукция: ослабление условий. 5 июля

1. В 100 коробках, стоящих в ряд, лежит суммарно 10000 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 99 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.
Указание. Докажите более сильный факт: «В n коробках, стоящих в ряд, лежали орехи, на каждой коробке число орехов было написано. Орехи переложили по этим коробкам как попало. Операция та же. Тогда за $n-1$ операцию можно разложить орехи согласно надписям.»

2. Докажите, что правильный $2n$-угольник можно разбить на ромбы.

3. На двух параллельных прямых отмечено по 40 точек. Их разбивают на 40 пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. (В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.) Докажите, что число способов это сделать меньше 3^{39}.

4. Дано множество S из последовательностей длины 100, состоящих из нулей и единиц. Оказалось, что для каждого элемента S есть ровно 20 других элементов в S, отличающихся от него ровно в одном разряде. Какое наименьшее количество элементов может быть в множестве S?

5. На координатной плоскости отмечены все точки (x, y), что x, $y \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Кроме того, на плоскости проведены несколько прямых, на которых лежат все отмеченные точки, кроме точки $(0, 0)$. Докажите, что проведено как минимум $2n$ прямых.

6. Дано натуральное число $n \geqslant 3$. Найдите количество способов расставить по кругу в некотором порядке натуральные числа 1, 2, ..., n так, чтобы каждое число являлось делителем суммы двух соседних с ним чисел.

7. Дана квадратная доска 100×100, изначально полностью белая. Петя проделывает с ней следующие операции: он выбирает строчку или столбец, и красит в ней какие-то 75 клеток в чёрный цвет, а остальные 25 — в белый. Докажите, что на доске всегда будет хотя бы 25^2 белых клеток.

3 Разнобой–1. 5 июля

1. В некоторые клетки квадрата 4×4 поставлены звездочки. Для каждого вертикального, горизонтального, а также диагонального ряда (диагональный ряд может состоять из четырех, трех, двух и одной клетки) известно количество звездочек, стоящих на нем. Можно ли по этим данным гарантированно восстановить расстановку звёздочек в квадрате?

2. Докажите, что в любом треугольнике основание высоты, середины двух других высот и ортоцентр лежат на одной окружности.

3. Пусть p — простое число, a и b — некоторые целые числа. Сравнения $x^2 \equiv a \pmod p$ и $x^2 \equiv b \pmod p$ не имеют решений. Докажите, что сравнение $x^2 \equiv ab \pmod p$ имеет хотя бы одно решение.

4. Найдите все целые b такие, что при любом натуральном a число $(a^2+1)^{100}+b-a$ делится на a^2+a+1.

5. На краю пустыни имеется бесконечный запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Докажите, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

6. Вписанная окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках K и L соответственно, вневписанная окружность касается стороны AC этого треугольника в точке P. Прямая KL пересекается с прямой, проходящей через A параллельно BC, в точке M. Докажите, что $PL = PM$.

7. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$(ab+bc+ca+1)(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 2abc(a+b+c+1)^2.$$

4 Перекидывание уголков. 6 июля

Упражнение. Прямая ℓ касается описанной окружности треугольника ABC в точке A. На прямых AB и AC выбраны точки P и Q соотвественно. Докажите, что точки B, C, P, Q лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $PQ \parallel \ell$.

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Прямая A_1B_1 пересекает описанную окружность Ω треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что $CP = CQ$.

2. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая KA касается описанной окружности треугольника ABC, причём $\angle KCB = 90°$. Точка D на стороне BC такова, что $KD \parallel AB$. Докажите, что прямая DO проходит через точку A.

3. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD — точку N так, что $DN = DB$. Докажите, что $MN \parallel AD$.

4. AN — биссектриса угла $\angle BAC$, P и O — такие точки на прямых AB и AN соотвественно, что $\angle ANP = \angle APO = 90^\circ$, Q — произвольная точка на отрезке NP. Через точку Q проходит некоторая прямая, пересекающая AB и AC в точках E и F соотвественно. Докажите, что $\angle OQE = 90^\circ$ тогда и только тогда, когда $QE = QF$.

5. В остроугольном треугольнике ABC точки D, E, F — основания высот из точек A, B, C соответственно. Прямая EF пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Прямые BP и DF пересекаются в точке Q. Докажите, что $AP = AQ$.

6. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B < \angle C$. Касательная в точке A к описанной окружности ω треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D, E — точка, симметричная точке A относительно прямой BC, X — основание перпендикуляра из A на BE, Y — середина AX. Прямая BY вторично пересекает ω в точке Z. Докажите, что прямая BD касается описанной окружности треугольника ADZ.

7. Прямая ℓ не пересекает окружность ω с центром в точке O. E — основание перпендикуляра из O на ℓ, M — точка на ℓ, A и B — такие точки на окружности ω, что MA и MB касаются ω, C и D — основания перпендикуляров из точки E на MA и MB соответственно, AB пересекает OE в точке F. Докажите, что прямая CD делит отрезок FE пополам.

5 Разнобой–2. 6 июля

1. Докажите, что уравнение

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 60$$

не имеет решений в действительных числах.

2. $n > 6$ — совершенное число (т.е. сумма всех его натуральных делителей равна $2n$), $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$ — его разложение на простые множители, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Докажите, что e_1 чётно.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно, I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $BK + CL = BC$ тогда и только тогда, когда четырёхугольник $ALIK$ вписанный.

4. В прямоугольном треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон треугольника в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на описанной окружности треугольника ABC.

5. Натуральные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a + b = b(a - c),$$

причем число $c+1$ — квадрат простого числа. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a+b$ или ab является квадратом натурального числа.

6. Последовательности x_n и y_n определены соотношениями: $x_1 = y_1 = 1$, $x_{n+1} = nx_n + y_{n+1}$, $y_{n+1} = x_n + ny_n$.
a) Докажите, что y_n равняется количеству всевозможных расстановок не бьющих друг друга ладей на доске $(n-1)\times(n-1)$.
b) Докажите, что для каждого натурального n числа x_n и y_n взаимно просты.

7. Все 100-буквенные слова, состоящие из букв А и Б, разбиты на 100 групп. Докажите, что можно найти два слова, лежащие в одной группе и отличающиеся *ровно* в двух местах.

6 Теорема Холла. 7 июля

1. Пусть дан двудольный граф, состоящий из n синих вершин и скольких-то красных вершин. Каждой синей вершине можно сопоставить смежную с ней красную уникальную вершину (каждая красная не больше, чем в одной паре) тогда и только тогда, когда для любого числа k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ из любых k синих вершин выходят ребра в по крайней мере k красных вершин.

2. Докажите, что в регулярном двудольном графе есть полное паросочетание.

3. В прямоугольной таблице $m\times n$ записаны неотрицательные числа. В каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одно положительное число. Более того — если ряд и столбец пересекаются по положительному элементу, тогда суммы чисел в ряде и столбце совпадают. Докажите, что $m = n$.

4. Полную колоду из 52 карт разбили на 13 стопок по 4 карты в каждой. Докажите, что всегда можно выбрать по одной карте из каждой стопки, чтобы было выбрано по одной карте каждого достоинства.

5. На планете Нибиру живут пришельцы трёх различных гендеров — всего $3M$ особей по M каждого гендера. Каждый пришелец испытывает симпатию как минимум к $\frac{3}{4}M$ пришельцам каждого из двух других гендеров. Брак на планете Нибиру заключается только между тремя пришельцами разных гендеров, испытывающих симпатию друг к другу. Докажите, что всех пришельцев можно разбить на M взаимно симпатизирующих троек и переженить.

6. Какое наибольшее количество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно выбрать, чтобы никакое подмножество не лежало ни в каком другом?

7. Правильный треугольник со стороной n разбит на правильные треугольнички со стороной 1. Назовём треугольник *красивым*, если он ориентирован так же, как и большой треугольник. Петя вырезал из треугольника n красивых треугольничков со стороной 1. Докажите, что оставшуюся доску можно разбить на пары соседних по стороне треугольничков тогда и только тогда, когда для каждого k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и каждого красивого треугольника со стороной k в нём содержится не более k закрашенных треугольников.

7 Если не простое, то составное. 7 июля

«If it is not prime, it must be composite», Gerhard J. Woeginger, журнал Crux Mathematicorum, т. 39, вв. 9–10

Собственные делители

Мысль. Если у числа есть собственный делитель, то оно составное.

1. Докажите, что существует бесконечно много составных чисел вида
a) $10^n + 3$; b) $(4^n + 1)^2 + 4$; c) $n! - 1$.

2. Докажите, что для бесконечно многих n число $n^n + (n+1)^{n+1}$ составное.

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n для которых каждое из чисел $2^n + 3^n - 4$ и $2^n + 3^n - 6$ составное.

4. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ следующие числа составные:
a) $11 \cdot 14^n + 1$; b) $19 \cdot 8^n + 17$; c) $\frac{1}{3} \cdot (2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1)$.

5. Докажите, что для натуральных x и y, больших 1 и не превосходящих 100, существует натуральное число n такое, что $x^{2^n} + y^{2^n}$ составное.

Разложение на множители

Мысль. Если число можно представить в виде произведения нескольких сомножителей, то оно составное.

6. Найдите все натуральные числа n для которых следующие числа составные:
a) $n^4 + n^2 + 1$; b) $n^{10} + n^5 + 1$; c) $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$.

7. Найдите все натуральные числа n для которых число $n^4 + 4^n$ — простое.

8. Пусть a, b, c — натуральные числа такие, что $3ab = 2c^2$. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ — составное.

9. Найдите все натуральные числа n, для которых число $\frac{1}{5} \cdot (2^{4n+2} + 1)$ простое.

10. Пусть a, b, c, d — натуральные числа. Докажите, что
a) если $ab = cd$, то $a + b + c + d$ — составное;
b) если $ad = b^2 + bc + c^2$, то $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ — составное.

Произведение маленьких чисел

Мысль. Если число p делит произведение ab такое, что $a < p$ и $b < p$, то p — составное.

11. a, b, c, d — натуральные числа такие, что $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. Докажите, что $a + b + c + d$ — составное. *Указание: работайте по модулю $a + b + c + d$.*

12. a, b, c — натуральные числа такие, что $a^2 - bc$ есть точный квадрат. Докажите, что $2a + b + c$ — составное.

13. Пусть $a > b > c > d$ — натуральные числа, причём $a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$. Докажите, что число $ab + cd$ — составное.

14. a, b, c, d, e, f — натуральные числа такие, что $S = a+b+c+d+e+f$ делит оба числа $ab+bc+ca-de-ef-fd$ и $abc+def$. Докажите, что S составное.

15. Пусть F_n — последовательность Фибоначчи. Докажите, что число F_n+1 составное для всех натуральных чисел $n \geqslant 4$.

Опираясь на существующее

Мысль. Если вы не можете доказать, что некоторое число составное, то вы можете попробовать использовать, что оно простое, чтобы доказать, что какое-то другое число составное.

16. Докажите, что для любых натуральных чисел r и s в последовательности $r2^n+s3^n$ бесконечно много составных чисел.

17. Пусть $P(x)$ — непостоянный многочлен с целыми положительными коэффициентами. Докажите, что существует натуральное n, для которого $P(n)$ — составное.

18. Докажите, что среди чисел вида $(n!)^2 - n! + 1$ бесконечно много составных.

19. Докажите, что существует бесконечно много нечётных натуральных n, для которых $n!+1$ — составное.

20. Пусть $P(x)$ — непостоянный многочлен с целыми положительными коэффициентами. Докажите, что существует натуральное n, для которого $P(n!)$ — составное.

8 Разнобой–3. 7 июля

1. Про действительные числа a, b и c известно, что $a+b+c=0$. Докажите, что $a^3+b^3+c^3>0$ тогда и только тогда, когда $a^5+b^5+c^5>0$.

2. Докажите, что из любого связного графа с четным числом вершин можно выкинуть несколько ребер (возможно, 0) таким образом, чтобы в полученном графе степени всех вершин оказались нечетны.

3. Внутри вписанного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ нашлась такая точка P, что

$$\angle PA_1A_2 = \angle PA_2A_3 = \ldots = \angle PA_nA_1.$$

Докажите, что внутри этого многоугольника найдется точка Q, такая что

$$\angle QA_2A_1 = \angle QA_3A_2 = \ldots = \angle QA_1A_n.$$

9 Степень точки. 9 июля

1. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ проведены биссектрисы углов ACB, ADB, CBD и CAD. Они пересекают стороны четырёхугольника в точках X, Y, Z и T. Докажите, что точки X, Y, Z и T лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Обозначим через P точку пересечения CC_1 и A_1B_1, а через M — середину A_1B_1. Докажите, что точки A, B, P и M лежат на одной окружности.

3. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, P и Q — точки внутри него такие, что $PQDA$ и $QPBC$ — вписанные четырёхугольники. На отрезке PQ нашлась такая точка E, что $\angle PAE = \angle QDE$ и $\angle PBE = \angle QCE$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

4. O — центр описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC, AD — его биссектриса, E — точка, симметричная точке D относительно середины BC. Прямые, проходящие через D и E перпендикулярно BC, пересекают прямые AO и AD в точках X и Y соответственно. Докажите, что четырёхугольник $BXCY$ вписанный.

5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) точка C_0 — основание высоты из точки C, X — произвольная точка на отрезке CC_0, K и L — такие точки на отрезках AX и BX соответственно, что $BK = BC$ и $AL = AC$ соответственно, M — точка пересечения AL и BK. Докажите, что $MK = ML$.

6. BE и CF — высоты остроугольного треугольника ABC. Две окружности, проходящие через A и F, касаются прямой BC в точках P и Q, причём B лежит между C и Q. Докажите, что прямые PE и QF пересекаются на описанной окружности треугольника AEF.

7*. В треугольнике ABC ($AC \neq BC$) точки D, F, G — середины сторон AB, AC, BC соответственно. Окружность Γ, проходящая через точку C и касающаяся AB в точке D, пересекает отрезки AF и BG в точках H и I соответственно. Точки H_1 и I_1 симметричны точкам H и I относительно точек F и G соответственно. Прямая H_1I_1 пересекает CD и FG в точках Q и M соответственно. Прямая CM вторично пересекает Γ в точке P. Докажите, что $CQ = QP$.

10 Правильный разнобой–9. 9 июля

1. Пусть
$$a_n = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}.$$
Докажите, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{40}$ — натуральное число.

2. На некоторых клетках доски 10×10 стоят шашки. Клетка называется *красивой*, если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечётное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечётное число шашек. Может ли на доске оказаться ровно 42 красивые клетки?

3. Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа n-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У неё есть k кокосовых орехов и s бросков. При каком наибольшем n она сможет удовлетворить своё любопытство?

4. Докажите, что существует бесконечно много решений уравнения
$$x^2 + y^2 + 1 = 3xy$$
в целых числах.

11 Замена переменных в неравенствах. 10 июля

1. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

2. Про положительные числа x_1, x_2, $\ldots x_n$ $(n\geqslant 4)$ известно, что $x_1x_2\ldots x_n=1$. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k+x_kx_{k+1}+x_kx_{k+1}x_{k+2}}\geqslant 1$$

$(x_{n+1}=x_1,\ x_{n+2}=x_2)$.

3 (Несбит). Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$a+b+c+2=abc.$$

Докажите, что

$$a+b+c\geqslant\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}.$$

4′. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$ab+bc+ca+2abc=1.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 4(a+b+c).$$

5. Действительные числа a, b, c, d, по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению

$$abc+abd+acd+bcd+a+b+c+d=0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1}>0.$$

12 Без разглашения. 10 июля

1. Есть 9 карточек с цифрами 1, 2, …, 9. Их перетасовали, отдали четыре Ивану, четыре Василисе и одну Бабе-Яге. Иван сообщил вслух, что сумма цифр на его карточках оканчивается на 7.
a) Знает ли теперь Василиса карточку Бабы-Яги?
b) Знает ли теперь Баба-Яга набор карточек Василисы?

c) Может ли случится, что про какую-то карточку, кроме своей, Баба-Яга знает, у кого она находится?

2. Из колоды вынули семь карт, показали всем, перетасовали и раздали Грише и Лёше по три карты, а оставшуюся карту спрятали. Гриша и Лёша могут по очереди сообщать вслух любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом никто другой не смог вычислить местонахождение ни одной из карт? (Гриша и Лёша не договаривались о каком-либо особом способе общения; все переговоры происходят открытым текстом.)

3. Суду предъявлены 100 одинаковых с виду монет. Суд уже установил, что среди них есть 2 или 3 фальшивые, все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Может ли он убедить суд, что фальшивых монет три, а не две, не разгласив ни про какую монету, фальшивая она или настоящая? (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)

4. Два шерифа из соседних городов составили список из 8 подозреваемых в качестве серийного убийцы. Потом каждый из них, проведя оперативно-розыскные действия, сократил список до двух подозреваемых. Эти списки различны, то есть пересекаются по одному подозреваемому, поэтому шерифы, обменявшись информацией, могут совместно арестовать убийцу. Единственным способом что-то сообщить коллеге является совместное выступление по телевизору, которое услышат жители обоих городов. Но если жители из разговора шерифов поймут, кто убийца, они линчуют его, не дожидаясь ареста (список подозреваемых из 8 человек им известен). Как шерифам обменяться информацией, чтобы арестовать убийцу?

13 Усреднение. 11 июля

Упражнение 1. Обозначим через $\mathrm{AM}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ среднее арифметическое чисел x_1, x_2, …, x_n. Пусть a_1, a_2, …, a_n и b_1, b_2, …, b_n — некоторые наборы чисел, k и ℓ — некоторые числа. Осознайте, что
a) $\mathrm{AM}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) = \mathrm{AM}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \mathrm{AM}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$;
b) $\mathrm{AM}(ka_1 + \ell, ka_2 + \ell, \ldots, ka_n + \ell) = k\,\mathrm{AM}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \ell$;
c) в пункте a) наборов может быть хоть 10, хоть 100500.

Замечание. Пункт c) можно трактовать следующим образом: если имеются несколько величин, каждая из которых вносит свой вклад в суммарную величину, то среднее арифметическое суммарной величины равняется сумме средних арифметических каждой из величин. Для большего понимания см. следующие упражнение.

Упражнение 2. Рассмотрим все возможные последовательности длины 100 из букв А и Б. Для каждой из этих 2^{100} последовательностей выпишем количество букв А в ней. Наша цель понять чему равняется среднее арифметическое всех выписанных чисел.

a) Посчитайте сумму всех выписанных чисел, разбив наши последовательности на пары естественным образом.
b) Сделайте это «в лоб», посчитав сколько существует последовательностей, содержащих ровно k букв А.
c) Сделайте это «правильно», посчитав сколько вносит в среднее арифметическое буква А на первом месте, на втором месте, и так далее. *Указание: не вносить есть вносить ноль.*

Упражнение 3. Во время раздачи бейджиков Александр Владимирович упомянул, что в среднем при такой раздаче кто-то один должен получить свой бейджик. Давайте это проверим. Рассмотрим все возможные 73! способа раздать детям М8 бейджики. Для каждого из них посчитаем, сколько детей получили свой бейджик. Найдите среднее арифметическое всех полученных чисел.

Упражнение 4. 18 учеников группы Профи-8 встали по кругу. Каждый из них наугад дал леща правому или левому соседу. Сколько учеников профи-группы в среднем остались без леща?

Мысль. Если некоторая величина «в среднем» равняется k, то найдётся ситуация, в которой она хотя бы k, а также ситуация, в которой она не превосходит k.

1. У фермера имеется 100 быков, 100 баранов, 100 коров и 100 овечек, а также карусель на 200 животных. В карусели стоят коровы и овечки. Напротив каждого выхода из загона в карусели находится другой загон: как не сложно понять, их тоже 200 и в них стоят быки и бараны. Докажите, что фермер может так повернуть карусель и открыть загоны, чтобы хотя бы 200 животных встретили животное своего вида.

2. У фермера есть несколько овечек, каждая из которых откликается на одно или несколько имён, а на одно и то же имя может откликаться несколько овечек. Каждая из овечек откликается хотя бы на одно из имён; фермер знает, на какие имена какие овечки откликаются. Кроме того, у фермера есть два загона: для еды и для стрижки. Фермер может выкрикнуть некоторое имя и тогда все овечки, которые на это имя откликаются, переходят в другой загон. Докажите, что фермер может выкрикнуть несколько раз по одному имени так, что в загоне для стрижки окажется не меньше половины всех овечек.

3. Теперь овечек всего 99 и каждая овечка откликается ровно на 25 имён. Фермер составил список всех имеющихся у овечек имён, и в нём их оказалось ровно 50. Докажите, что фермер может так выкрикнуть 17 имён, чтобы хотя бы 50 овечек оказались в загоне для стрижки.

4. В стаде фермера 2019 овечек, некоторые друг друга уважают, а некоторые друг друга — нет. Докажите, что можно так выбрать пару овечек, чтобы среди оставшися нашлось хотя бы 1009 овечек, каждая из которых или уважает обеих из выбранных овечек, или обеих не уважает.

5. В стаде фермера несколько овечек и несколько баранов. Каждой овечке нравится один или два барана. Чтобы избежать споров между овечками, фермер решил выгнать несколько овечек и несколько баранов так, чтобы каждой из оставшихся овечек нравился ровно один из оставшихся баранов. Докажите, что он может сделать это так, чтобы у него осталась хотя бы половина стада.

14 Правильный разнобой–10. 11 июля

1. В наборе натуральных чисел с чётной суммой каждое из чисел не превосходит k, при этом каждое из чисел от 1 до k встречается. Докажите, что его можно разбить на два набора с одинаковой суммой. Числа в наборе могут повторяться.

2. Положительные действительные числа x, y и z удовлетворяют условию $x+y+z = 8$. Докажите, что

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+9} \geqslant 10.$$

3. Докажите, что уравнение

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = abc+abd+acd+bcd$$

имеет решение в целых числах, больших 10^{10}.

4. Натуральные числа x и y таковы, что x^2+y^2+1 делится на xy. Докажите, что частное равно 3.

15 Лексикографический порядок. 12 июля

Пример. Жадный барин заключил сделку с дьяволом. Изначально у него было по сколько-то купюр номиналов в 100, 50, 20, 10, 5, 2, и 1 доллар соответственно. Каждую минуту Барин отдаёт одну купюру и забирает у дьявола любой набор купюр меньших номиналов. Если у Барина закончатся деньги — дьявол заберёт у него душу. Докажите, что рано или поздно это случится.

1. В ряд выписаны нули и единицы. За один ход можно взять соседние цифры «1» и «0» (единица — слева) и заменить их на сколько-то цифр «0» и одну цифру «1» (единица — справа). Докажите, что процесс нельзя продолжать бесконечно.

2. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x(p-1)^x/p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x.
a) Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.
b) Верно ли, что существует некоторая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что начав с числа x, будет совершено не более $f(x)$ действий?

3. Вася рисует уголки — он выбирает незакрашенную точку с натуральными координатами и закрашивает все точки нестрого выше и нестрого правее неё. Докажите, что рано или поздно Вася остановится.

4. На столе лежат 16 двусторонних карточек, одна сторона которых черная, а другая — красная, изначально все карточки повернуты черной стороной вверх. За один ход можно выбрать несколько (может быть, одну) подряд идущих карт, самая левая из которых черная, а все остальные — красные и все их перевернуть. Какое наибольшее количество ходов можно сделать по таким правилам?

5. На доске в ряд выписано n натуральных чисел. С полученными числами можно сделать следующую операцию: найти два соседних числа a и b, такие, что a — число слева и $a > b$, и заменить пару (a, b) на $(b+1, a)$ или $(a-1, a)$. Докажите, что такой процесс не может продолжаться бесконечно долго.

16 Учебный МеждусоБой. 12 июля

1. Положительные целые числа $a > b > c > d$ таковы, что

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Докажите, что $ab + cd$ составное.

2. Окружность ω касается двух параллельных прямых ℓ_1 и ℓ_2. Окружность ω_1 касается ℓ_1 в точке A и внешним образом касается ω в точке C. Окружность ω_2 касается ℓ_2 в точке B, внешним образом касается ω в точке D и внешним образом касается ω_1 в точке E. AD пересекается с BC в точке Q. Докажите, что Q — центр описанной окружности треугольника CDE.

3. Точка M — середина основания AD трапеции ABCD, вписанной в окружность ω. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а луч BM пересекает ω в точке K. Описанная окружность треугольника PBK пересекает прямую BC в точке L. Докажите, что $\angle LDP = 90°$.

4. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

5. На съезд татуировщиков приехало несколько человек, у каждого из которых на обеих руках по некоторому количеству татуировок. Татуировки бывают n типов, и каждый из n типов встречается на руках хотя бы у 100 людей. При каком наибольшем n можно заведомо утверждать, что каждый участник может поднять одну из рук так, чтобы на поднятых руках присутствовали все n типов татуировок?

6. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 - 1$ делится на ab. Чему может равняться частное?

7. В клетках доски $n \times n$ расставлены нули и единицы. Во всех клетках левого столбца стоят единицы, и в каждой фигурке вида  (состоящей из клетки и ее соседей слева и снизу) сумма чисел четна. Докажите, что в таблице нет двух одинаковых строк.

8. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?

17 Классические неравенства. 14 июля

Задание. Попробуйте решить каждое из неравенств ниже, используя неравенство AM-GM (возможно, с весами), неравенство КБШ или Гёльдера, транснеравенство.

1. Для положительных a, b, c докажите, что
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

2. Для положительных a, b, c докажите, что
$$a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a.$$

3. Для положительных a, b, c, d докажите, что
$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a} \geqslant a+b+c+d.$$

4. Для положительных a, b, c докажите, что
$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geqslant a+b+c.$$

5. Для положительных a, b, c, d докажите, что
$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c} \geqslant \frac{4}{3}.$$

6. Для положительных a, b, c таких, что $abc=1$, докажите, что
$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

7. Для положительных a, b, c докажите, что
$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geqslant \sqrt{a+b+c}.$$

18 Правильный разнобой–11. 14 июля

1. Для положительных a, b, c докажите, что
$$(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2) \geqslant (a+b+c)^3.$$

2. В единичном квадрате выбрано 100 множеств, площадь каждого из которых больше, чем 0,99. Докажите, что найдется точка, которая принадлежит всем этим множествам.

3. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках P и Q. Биссектрисы углов A и C пересекают прямую PQ в точках K и L. Докажите, что точки K и L равноудалены от середины стороны AC.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных m и n таких, что число
$$\frac{m+1}{n}+\frac{n+1}{m}$$
целое.

19 Двое против всех. 15 июля

Упражнение 1. Дана кучка из 100 спичек. Сначала зритель забирает из нее сколько-то спичек (не менее одной, но не все). Потом помощник фокусника забирает из нее еще сколько-то (не менее одной, возможно, все оставшиеся). Потом приходит фокусник и, смотря на оставшиеся спички, объявляет, кто сколько забрал. Докажите, что у фокусника с помощником существует единственная возможная стратегия.

Упражнение 2. Теперь зрителей двое, и каждый из них может взять от 1 до 10 спичек. Помощник фокусника может взять любое ненулевое число спичек. Фокусник должен угадать, кто сколько спичек взял. При каком наименьшем количестве спичек в кучке фокус может гарантированно удаваться?

Упражнение 3. На доске написана строчка цифр 123456. Зритель стирает 2 цифры, после чего помощник фокусника стирает две других цифры. В этот момент появляется фокусник и отгадывает, какие две цифры стёр зритель. Как?

Упражнение 4. Зритель пишет на доске последовательность из 11 цифр. Помощник фокусника закрывает одну из них черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать закрытую цифру. Как?

Упражнение 5. Два зрителя стирают по одной цифре из строчки 12345678, потом помощник фокусника стирает еще одну цифру. Появляется фокусник, видит нестёртые цифры, и безошибочно называет, кто какую цифру стёр. Как?

1. У фокусника и помощника есть колода с картами; одна сторона («рубашка») у всех карт одинакова, а другая окрашена в один из 2019 цветов (в колоде по 1000000 карт каждого цвета). Фокусник и помощник собираются показать следующий фокус. Фокусник выходит из зала, а зрители выкладывают на стол в ряд $n > 1$ карт рубашками вниз. Помощник смотрит на эти карты, а затем переворачивает одну карточку рубашкой вверх. Затем входит фокусник, смотрит на стол и называет цвет перевёрнутой карточки. При каком наименьшем n фокусник и помощник могут договориться так, чтобы фокус удался?

2. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

3. Двое показывают следующий фокус. Один из перетасованной колоды, содержащей 52 карты, вытаскивает 5 произвольных карт и выкладывает четыре из них в ряд картинкой вверх, а пятую a) также выкладывает в ряд среди остальных четырех, но картинкой вниз; b) берет себе. Второй, глядя на лежащие перед ним карты, называет пятую карту. Как он это делает?

4. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стертая точка. Как?

5. Секретный код к любому из сейфов ФБР — это натуральное число от 1 до 1700. Двое шпионов узнали по одному коду каждый и решили обменяться информацией. Согласовав заранее свои действия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала первый шпион кинул в воду несколько камней, потом — второй, потом опять первый и так далее до тех пор, пока камни не кончились. После этого шпионы разошлись. Каким образом могла быть передана информация?

6. Зритель ставит на плоскость точки, пронумерованные от 1 до n, $n > 1$. После этого помощник фокусника ставит точку с номером $n+1$, а зритель стирает все номера. Входит фокусник. Как ему восстановить нумерацию точек?

7. Перед экстрасенсом лежит колода из 36 карт рубашкой вверх (4 масти, по 9 карт каждой масти). Он называет масть верхней карты, после чего карту открывают и показывают ему. После этого экстрасенс называет масть следующей карты и т. д. Задача экстрасенса — угадать масть как можно большее число раз. Рубашки карт несимметричны, и экстрасенс видит, в каком из двух положений лежит верхняя карта. Помощник экстрасенса знает порядок карт в колоде, не может менять его, но может расположить рубашку каждой из карт тем или иным образом. Мог ли экстрасенс так договориться с помощником, когда тот ещё не знал порядок карт, чтобы обеспечить угадывание масти не менее чем a) 19 карт; b) 23 карт?

20 Правильный разнобой–12. 15 июля

1. Как известно, каракатицы умеют менять свой пол. Пусть $d > 1$. Несколько каракатиц образовали $2^{d-1}-1$ различных сообществ, в каждое из которых вошли ровно d каракатиц. Докажите, что для соблюдения современных норм некоторые каракатицы могут сменить пол так, чтобы в каждом сообществе были представители обоих полов.

2. Биссектрисы AA_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. A_0, C_0 — середины сторон BC, BA соответственно. Прямая A_0C_0 пересекает прямые AA_1, CC_1 в точках A_2, C_2. Докажите, что ортоцентр треугольника A_2IC_2 лежит на прямой AC.

3. Окружность ω проходит через вершины B, C и центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Второй раз ω пересекает прямую AB в точке B_1, а AC — в точке C_1. Докажите, что длины отрезков BB_1 и CC_1 равны.

4. Натуральные числа a и b таковы, что a^2+b^2 делится на $ab+1$. Докажите, что частное — точный квадрат.

21 Гомотетия. 16 июля

1. Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC в точке A и пересекает отрезок BC в точках K и L. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

2. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все прямые, на которых лежат его стороны, параллельно перенести на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному, причём параллельные стороны окажутся пропорциональными. Доказать, что в данный многоугольник можно вписать окружность.

3. Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке F. Прямая ℓ касается S_1 и S_2 в точках A и B соответственно. Прямая, параллельная прямой ℓ, касается S_2 в точке C и пересекает S_1 в двух точках. Докажите, что точки A, F и C лежат на одной прямой.

4. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность s_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD (s_1 вторично пересекает диагональ AC на отрезке AK). Окружность s_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD (s_2 вторично пересекает диагональ AC на отрезке KC). Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей s_1 и s_2, будут параллельны между собой.

5. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны AB за точку B, а также касается ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный.

22 Матбой Профи-7–Профи-8. 16 июля

1. В Черноморском казино Остап Бендер играет с крупье в фишки. Игра состоит в том, что игроки по очереди (крупье — первым, Остап — вторым) перекладывают фишки из банка на стол. За один ход можно переложить не меньше одной фишки и не больше, чем их уже есть на столе. Побеждает тот, кто переложил из банка на стол последнюю фишку. До начала игры на столе лежат 10 фишек, а банк непуст. У Остапа в кармане лежат 10 фишек, которые он может до начала игры незаметно подбросить: некоторые (возможно, ни одной) — на стол, а некоторые (возможно, ни одной) — в банк. Докажите, что он сможет выиграть.

2. На прямой через равные промежутки отмечены 2000 точек. Петя раскрашивает половину из них в красный цвет, а остальные — в синий. Затем Вася разбивает их на пары из красной и синей точек так, чтобы сумма расстояний между точками в парах была максимальной. Докажите, что этот максимум не зависит от Петиной раскраски.

3. В графе 1000 вершин, степень каждой равна простому числу, большему 5. Подсчитали число путей в этом графе, имеющих длину не больше 2. Могло ли получиться 100000?

4. Пусть положительные числа a, b, c, d удовлетворяют условиям $ab + cd = ac + bd = 4$ и $ad + bc = 5$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a + b + c + d$.

5. Докажите, что если сумма расстояний от точки внутри выпуклого четырехугольника до его сторон не зависит от выбора точки, то этот четырехугольник — параллелограмм.

6. Докажите, что существуют 1000 подряд идущих натуральных чисел, ни одно из которых не кратно сумме своих цифр.

7. На окружности отмечены 20 синих точек, а внутри окружности — несколько красных так, что никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Оказалось, что существует 1123 треугольника с синими вершинами, содержащих по 10 красных точек. Докажите, что остальные 17 треугольников с синими вершинами тоже содержат по 10 красных точек.

8. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка P такая, что $2AP = BC$. Точки X и Y симметричны P относительно вершин A и C. Оказалось, что $BX = BY$. Чему может быть равен угол C исходного треугольника?

22 Матбой Профи-8–Профи-9. 16 июля

1. У Белочки есть бесконечно много орехов: по одному ореху каждой из масс 1 г, 2 г, 3 г, и т. д. Она взяла 100 мешков, положила в каждый по конечному числу орехов, после чего написала на каждом мешке суммарную массу лежащих в нем орехов. Докажите, что можно было собрать мешки с такими же массами, использовав не более 500 орехов.

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка K, что $BK = BC$. Пусть P — точка на перпендикуляре, восстановленном к прямой CK в точке K, равноудаленная от точек K и B. Обозначим также через L середину отрезка CK. Докажите, что прямая AP касается описанной окружности треугольника BLP.

3. Натуральное число будем называть *хорошим*, если его можно представить в виде суммы двух взаимно простых натуральных чисел, каждое из которые раскладывается в произведение нечётного количества простых чисел (не обязательно различных). Докажите, что существует бесконечно много хороших кубов натуральных чисел.

4. Даны 10 различных нечётных простых чисел. Может ли так случиться, что разность шестнадцатых степеней любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел?

5. На окружности расположено 20 синих точек, а внутри окружности несколько красных таким образом, что никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Оказалось, что существует 1123 треугольника с синими вершинами, содержащих по 10 красных точек. Докажите, что остальные 17 треугольников с синими вершинами тоже содержат по 10 красных точек.

6. Найдите максимальное значение вещественного числа M, при котором для любых неотрицательных a, b, c верно, что

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq M(|a-b|^3 + |b-c|^3 + |a-c|^3).$$

7. В сауне есть n комнат неограниченной вместимости. Сауну собрались посетить k пар муж–жена, причем для любых двух пар мужья и жены из разных пар либо одновременно не знакомы, либо одновременно знакомы. В одной комнате не могут находиться одновременно и мужчины, и женщины. Кроме того, мужчины хотят находиться в комнате только с незнакомыми мужчинами, а женщины — только со знакомыми женщинами. При каком наибольшем k пары могут гарантированно посетить сауну, как бы ни были знакомы между собой пары?

8. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Биссектриса угла BCD не проходит через вершину A. Перпендикуляр из точки A на BD пересекает биссектрису угла BCD в точке K. Точка R на прямой BC такая, что KR перпендикулярна BC. Докажите, что $AB = BR$.

9. Докажите, что $\left[\frac{(n-1)!}{n(n+1)}\right]$ — чётно для любого натурального n.

10. Дана бесконечная последовательность положительных вещественных чисел a_1, a_2, $\ldots$, при чём для любого i верно, что $a_i \leq C$. Оказалось, что $|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j}$ для любых i, j. Докажите, что $C \geq 1$.

23 «Сколь угодно много» и «бесконечно». 17 июля

Определение. Говорят, что величина может быть *сколь угодно большой*, если для любого натурального N существует значение величины, превосходящее N.

Замечание. Словосочетание «сколь угодно большое [одно] число» или неаккуратно сформулировано, но чаще просто бессмысленно.

Упражнение 1. Осознайте, что существует сколько угодно много подряд идущих натуральных чисел, не являющихся точными квадратами, но не существует бесконечно большого количества таких чисел.

Упражнение 2. Докажите, что в ряду натуральных чисел найдётся сколь угодно много последовательных составных чисел, но не найдётся бесконечно много последовательных составных чисел.

Упражнение 3. Приведите пример графа, в котором есть сколь угодно длинный простой путь, но нет бесконечного простого пути.

1. Продлим шахматную доску вправо и влево на миллион клеток. Король стоит на средней клетке нижней горизонтали.
a) Может ли он обойти всю полученную доску, побывав на каждой клетке ровно один раз?
b) А если доску продлили вправо и влево до бесконечности?

2. a) Докажите, что в любом конечном графе можно расставить в вершинах натуральные числа так, чтобы числа в двух вершинах были взаимно просты тогда и только тогда, когда эти вершины не смежны.
b) Верно ли то же самое утверждение для любого бесконечного графа?

3. Человечество бессмертно и начинает свою историю от Адама. Каждый человек живет не более 100 лет, у каждого лишь конечное число детей.
a) Докажите, что найдется бесконечная цепочка мужчин, начинающаяся с Адама, в который каждый следующий человек — сын предыдущего.
b) Докажите, что если у человека может быть бесконечное число детей, то утверждение пункта a) может быть неверно.

4. a) Дана таблица из 3 строк и бесконечного [вправо] числа столбцов, в которых записаны натуральные числа. Докажите, что существуют два таких столбца, что в каждой строке левое число не больше правого.
b) Верно ли это для бесконечного числа строк?

5. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$ такая, что $(a_m, a_n) = 1$ тогда и только тогда, когда $|m - n| = 1$?

6. a) Докажите, что все последовательности длины n, состоящие из 0 и 1, можно разбить на два подмножества так, что любые две последовательности, отличающиеся ровно в одном разряде, попали в разные подмножества.
b*) Докажите аналогичное утверждение для бесконечных последовательностей.

7. Каждое натуральное число покрашено в один из n цветов.
a) Обязательно ли можно выбрать из них бесконечную одноцветную арифметическую прогрессию?
b*) Докажите, что существует сколь угодно длинная одноцветная арифметическая прогрессия.

24 Правильный разнобой–13. 17 июля

1. Докажите, что среди 2^{100} человек может не найтись ни 200 попарно знакомых, ни 200 попарно незнакомых человек.

2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$ параллельная стороне B_1C_1 пересекает AB и AC в точках P и Q соотвественно. Докажите, что ортоцентр треугольника APQ лежит на прямой B_1C_1.

3. Треугольник ABC вписан в окружность Ω. Окружности ω_1 и ω_2 проходят через центр вписанной окружности I треугольника ABC и касаются стороны BC а также окружности Ω. Докажите, что ω_1 и ω_2 касаются.

4. Вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке A_1. Прямая AA_1 второй раз пересекает вписанную окружность в точке P, M — середина стороны BC. Докажите, что прямая PM касается вписанной окружности.

25 Мудрецы. 19 июля

Общий комментарий. Мудрец не видит шляпу, которая надета на него. Мудрецы могут договариться о чём-то заранее, что-то обсуждать в течение испытания запрещено.

1. Султан надевает красные или синие шляпы на головы своих мудрецов. Мудрецам нужно разделиться на две группы в зависимости от цвета шляпы. Как им это сделать?

2. Султан выстраивает 100 своих мудрецов в колонну по одному и надевает каждому шляпу белого, синего или красного цветов. Все мудрецы видят цвета всех шляп впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из трёх цветов. Что выкрикнул мудрец, слышат все остальные. После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака. Какое наибольшее количество мудрецов может гарантированно выжить?

3. Каждому из 100 мудрецов надета на голову шляпа одного из N цветов. По сигналу султана каждый должен будет написать на бумажке цвет своей шляпы. Все не угадавшие цвет будут казнены.
a) Докажите, что каким бы ни был алгоритм мудрецов, в какой-то из ситуаций выживет не более $[100/N]$ из них.
b) Докажите, что мудрецы могут договориться, что $[100/N]$ выживут.

4. 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным — другого. Все мудрецы должны одновременно написать цвет своего колпака. Если мудрец угадывает цвет своего колпака, его оставляют в живых, в противном случае — казнят.
a) Докажите, что каким бы ни был алгоритм мудрецов, в какой-то из ситуаций выживет не более 74 из них.
b) Докажите, что мудрецы могут договориться так, что 74 выживут.

5. Четыре мудреца стоят по кругу возле непрозрачного баобаба. На каждом из мудрецов красная, синяя или зеленая шляпа. Мудрец видит только двух соседних по кругу мудрецов. Мудрецы одновременно должны высказать предположение о цвете своей шляпы. Если хотя бы один из мудрецов угадал, они выиграли. Как им действовать, чтобы выиграть?

26 $a^n \pm 1$. 19 июля

Утверждение. Пусть a, n и m — натуральные числа. Тогда

$$\text{НОД}(a^n-1, a^m-1) = a^{\text{НОД}(n,m)} - 1.$$

Следствия. Пусть $a > 1$, n, m, k — натуральные числа. Тогда
a) $a^n - 1 \,\vdots\, a^m - 1$ тогда и только тогда, когда $n \,\vdots\, m$.
b) если $a^n - 1 \,\vdots\, k$ и $a^m - 1 \,\vdots\, k$, то $a^{\text{НОД}(n,m)} - 1 \,\vdots\, k$.
c) если t — наименьшее натуральное число такое, что $a^t - 1 \,\vdots\, k$ (т.е. *показатель числа a по модулю k*), то $a^n - 1 \,\vdots\, k$ тогда и только тогда, когда $n \,\vdots\, t$.
d) $\text{НОД}(a^n+1, a^m+1)$ делит $a^{2\cdot\text{НОД}(n,m)} - 1$.

1. Пусть n — чётное натуральное число. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b таких, что $a^n + b^n \vdots a + b$.

2. Пусть $n > 2$, k — натуральные числа. Докажите, что $2^k + 1 \not\vdots 2^n - 1$.

3. Пусть $a > 1$ — натуральное число. Докажите, что если $a^n + 1 \vdots a^m + 1$, то $n \vdots m$. Более того, если n/m есть нечётное число, то $a^n + 1 \vdots a^m + 1$

4. Пусть $a > 2$ — натуральное число. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $a^n - 1$ делится на n.

5. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^n + 1$ **не** делится на $n^b + 1$.

6. Докажите, что для бесконечного количества составных чисел n число $3^{n-1} - 2^{n-1}$ делится на n.

7. Докажите, что существует натуральное число n, у которого ровно 2019 различных простых делителей, и $2^n + 1$ делится на n.

27 Правильный разнобой–14. 19 июля

1. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leqslant 4a^2b^2.$$

2. I — центр вписанной окружности треугольника ABC, P — точка внутри треугольника такая, что $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Докажите, что $AP \geqslant AI$.

3. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке A_1. Прямая AA_1 второй раз пересекает вписанную окружность в точке P, M — середина стороны BC. Докажите, что прямая PM касается вписанной окружности.

4. Одна из вневписанных окружностей треугольника ABC касается стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно, другая касается стороны AC и продолжений сторон BA и BC в точках B_2, C_2 и A_2 соответственно. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и A_2C_2 — в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через вершину A.

28 Неравенство Гёльдера. 20 июля

Неравенство Гёльдера. Пусть n, m — натуральные числа. Тогда для всяких положительных a_{ij}, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ выполнено неравенство

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} a_{ij}}\right)^{m}.$$

Пример. В случае $m = 3$ неравенство Гёльдера имеет вид

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \geqslant \\ \geqslant \left(\sqrt[3]{a_1b_1c_1} + \sqrt[3]{a_2b_2c_2} + \ldots + \sqrt[3]{a_nb_nc_n}\right)^3.$$

Замечание. В случае $m = 2$ неравенство Гёльдера превращается в неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

1. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

2. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{a+b}{\sqrt{a+2c}} + \frac{b+c}{\sqrt{b+2a}} + \frac{c+a}{\sqrt{c+2b}} \geqslant 2\sqrt{a+b+c}.$$

3. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

4. Для положительных a, b, x_1, x_2, $\ldots$, x_n таких, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ докажите, что

$$\frac{x_1^3}{ax_1 + bx_2} + \frac{x_2^3}{ax_2 + bx_3} + \ldots + \frac{x_n^3}{ax_n + bx_1} \geqslant \frac{1}{n(a+b)}.$$

5. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{a+b}{a+c}} + \sqrt[3]{\frac{b+c}{b+a}} + \sqrt[3]{\frac{c+a}{c+b}} \leqslant \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

29 Бесконечные примеры. 20 июля

1. Дима занумеровал натуральными числами некоторые бесконечные [вправо] последовательности из 0 и 1 и заявил, что выписал все из них. Докажите, что какой-то последовательности у Димы в списке нет.

2. Можно ли все натуральные числа разбить на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была бы кубом целого числа, и при этом все эти кубы должны быть разными?

3. Дана последовательность последовательностей действительных чисел. Докажите, что есть последовательность, которая обгоняет каждую из них. *Другими словами: для любого набора чисел* $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ *найдётся такая последовательность* $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$*, что* $\forall i\ \exists N_i\colon \forall k > N_i \quad b_k > a_{ik}$.

4. Можно ли расставить в клетки бесконечной клетчатой плоскости натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз, и чтобы любые два числа из одной строки или одного столбца были взаимно простыми?

5. Докажите, что можно переставить все натуральные числа в ряд так, чтобы сумма любых n первых чисел делилась на n. Каждое натуральное число должно присутствовать, причем ровно один раз.

6. Тор и Локи играют в игру. Они по очереди выписывают цифры в последовательности. Тор пишет любое число цифр, какое захочет, а Локи — только одну. Тор хочет, чтобы последовательность получилась периодической, а Локи пытается ему помешать. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Пусть дана бесконечная во все стороны шахматная доска, в клетки которой вписаны целые числа (возможно, с повторами). Рассмотрим все возможные бесконечные маршруты короля по этой доске, и для каждого маршрута выпишем соответствующую последовательность чисел. Могут ли в результате получиться все возможные последовательности целых чисел?

30 Правильный разнобой–15. 20 июля

1. Докажите, что числа 1, 2, …, 2016 можно покрасить в четыре цвета так, чтобы не было одноцветных арифметических прогрессий из 10 членов.

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина дуги AB описанной окружности, не содержащей C. Оказалось, что $\angle AIM = 90^\circ$. В каком отношении I делит отрезок CW?

3. В треугольнике ABC выполнено $AB + BC = 3AC$. Вписанная окружность с центром I касается сторон AB и BC в точках D и E соответственно. Пусть точки K и L симметричны точкам D и E относительно точки I. Докажите, что точки A, L, K и C лежат на одной окружности.

4. Найдите все целые числа, которые можно представить в виде

$$\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$$

для натуральных m и n.

31 Ортоцентр. 21 июля

Упражнение 1. В треугольнике ABC вписанном в окружность Γ, точка H — ортоцентр. Докажите, что точка симметричная H относительно середины стороны BC совпадает с точкой диаметрально противоположной точке A на окружности Γ.

Упражнение 2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BB_1 и CC_1 пересекающиеся в точке H. Описанные окружности треугольников ABC и AB_1C_1

пересекаются в точках A и P. Докажите, что прямая PH проходит через середину стороны BC.

Упражнение 3. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса острого угла между высотами BB_1 и CC_1 пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соотвественно. Докажите, что $AP = AQ$.

Упражнение 4. Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что лучи AO и AH симметричны относительно биссектрисы угла A.

1. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BL, H — ортоцентр ABC. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что $AK \perp KH$. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что $HB = HL$.

2. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, I — центр вписанной окружности, H — ортоцентр, M — середина BC. Докажите, что прямые AO и IM параллельны тогда и только тогда, когда $\angle AIH = 90°$.

3. В треугольнике ABC с $AB \neq AC$ точка O — центр описанной окружности ω, H — ортоцентр. Продолжение медианы AM пересекает ω в точке N. Окружность, построенная на AM как на диаметре, пересекает ω в точках A и P. Докажите, что прямые AP, BC и OH пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AH = HN$.

4. Точку X на описанной окружности треугольника ABC отразили относительно середин сторон BC, CA и AB и получили точки P, Q и R соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PQR проходит через ортоцентр треугольника ABC.

5. Пусть P — точка на описанной окружности треугольника ABC, H — его ортоцентр. Точки P_A, P_B, P_C симметричны точке P относительно прямых BC, CA и AB соотвественно. Докажите, что H, P_A, P_B и P_C лежат на одной прямой.

6. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, M — середина BC. Луч MH пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке P. Через точку H проведена прямая, пересекающая отрезки AB и AC соответственно в точках D и E таких, что $AD = AE$. Докажите, что точки A, P, D и E лежат на одной окружности.

7. В треугольнике ABC выбрали точку X. Прямые AX, BX и CX вторично пересекаются описанную окружность Γ треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соотвественно. Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин сторон BC, CA и AB соотвественно. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_2B_2C_2$ проходит через ортоцентр треугольника ABC.

32 Правильный разнобой–16. 21 июля

1. На доске 100×100 расставлены числа от 1 до 100, по 100 раз каждое. Докажите, что в какой-то строке или каком-то столбце стоит хотя бы 10 различных чисел.

2. Даны m различных натуральных чисел, одно из которых равно 1. Докажите, что существует набор из не более чем m натуральных чисел такой, что все суммы, которые можно составить из элементов (возможно, одного элемента) этого набора, различны, и среди этих сумм есть все m исходных чисел.

3. В треугольнике ABC точка H — ортоцентр, точка I — центр вписанной окружности, точка O — центр описанной окружности. Пусть K — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Докажите, что если $IO \parallel BC$, то $AO \parallel HK$.

4. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $\angle BAC = 60°$ и $AB > AC$. Пусть I — центр вписанной окружности, H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что $2\angle AHI = 3\angle ABC$.

33 Из сколь угодно большого бесконечное. 22 июля

1. На столе лежит бесконечная куча спичек. Первым ходом она делится на две кучки. Каждым следующим ходом все кучки, где более одной спички, делятся на две меньшие. Докажите, что из некоторых кучек, возникавших на разных ходах, можно составить бесконечную цепочку кучек, строго вложенных друг в друга: $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$.

Мысль. Если можно построить цепочку «вложенных» сколь угодно больших примеров, то можно построить и один бесконечный пример.

2. Докажите, что если вершины любого конечного подграфа графа на бесконечном чисел вершин можно покрасить в 10 цветов правильным образом, то и все вершины можно так покрасить.

3. Из клетчатой плоскости вырезали некоторое (возможно, бесконечное) количество клеток. Докажите, что если любой конечный участок плоскости U можно покрыть непересекающимися доминошками, то и всю плоскость можно разбить на непересекающиеся доминошки.

4. Вершины полного графа K_n занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$, а рёбра раскрашены в два цвета. Докажите, что при достаточно большом n найдется полный одноцветный подграф более чем на 100 вершинах, количество вершин у которого будет больше минимального номера его вершины.

34 Заключительная олимпиада. 23 июля

Довывод

1. Старательный мальчик Вася решил исследовать, на сколько меняется сумма цифр числа при его увеличении на 2. С этой целью для каждого из чисел от 1 до 1 000 000 000 он выписал в тетрадочку это изменение (например, для числа 15 он выписал 2, а для числа 38 — отрицательное изменение -7). Чему равна сумма всех выписанных Васей чисел?

2. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD > BC$. Точка E такова, что $BE \perp AD$. Докажите, что $AE + BC \geqslant DE$.

3. Даны положительные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{1000}$. Оказалось, что a_k в пять раз больше среднего арифметического всех чисел. Какое наименьшее значение может принимать k?

4. Клетчатый прямоугольник раскрашен в шахматном порядке. Некоторые его клетки отмечены крестиком, причем вместе с любой отмеченной клеткой отмечены и все клетки той же строки, расположенные левее, а также все клетки в том же столбце, расположенные ниже. Оказалось, что среди отмеченных клеток поровну черных и белых. Докажите, что фигуру, образованную отмеченными клетками, можно разрезать на прямоугольники 1×2.

Вывод

5. В стране несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами с односторонним движением так, что из столицы можно добраться до любого города, не нарушая правил дорожного движения (при этом, возможно, проезжая через другие города). Назовем два нестоличных города *близкими*, если до них нельзя добраться из столицы по непересекающимися путям. Президент приказал соединить каждые два близких города прямой авиалинией. Оказалось, что теперь между любыми двумя нестоличными городами можно добраться, пользуясь только открытыми авиалиниями. Докажите, что тогда между любыми двумя нестоличными городами есть прямая авиалиния.

6. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки X и Y симметричны точке O относительно середин сторон BC и AD соответственно. Известно, что $AB = BC = CD$. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника лежит на прямой XY.

7. В последовательности целых чисел a_1, a_2, $\ldots$ произведение a_1a_2 отрицательно, а при $n > 2$ для вычисления a_n среди всех пар (i, j), $1 \leq i < j < n$, которые ранее не выбирались, выбирается одна пара (i, j), для которой $a_i + a_j$ имеет наименьшую абсолютную величину, и полагается $a_n = a_i + a_j$. Докажите, что $a_i = 0$ при некотором i.

Послевывод

8. На доске написаны три положительных числа. Разрешается стереть одно из них (скажем, z) и заменить на $1/(zx + zy)$, где x, y — два других числа на доске. Можно ли из набора 2, 3, 6 получить набор чисел 2, 3, 4?

35 Список вопросов и избранных задач к теоретическому зачёту

1. Квадратичные вычеты: критерий Эйлера.

2. Квадратичные вычеты: «комбинаторный» взгляд.

3. Теорема Холла: доказательство по индукции.

4. Теорема Холла: доказательство через чередующиеся цепи.

5. Теорема Шпернера (задача **6.6.**): доказательство через теорему Холла.

6. Теорема Шпернера (задача **6.6.**): доказательство через усреднение.

7. Индикаторы для вычисления среднего арифметического: примеры.

8. Неравенство Шура.

9. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

10. Неравенства AM-GM и AM-GM с весами.

11. Неравенство Гёльдера.

12. Транснеравенство: два доказательства.

13. Гомотетия: примеры применения (прямая Эйлера, прямая Нагеля, окружность девяти точек, лемма Архимеда).

14. Свойства ортоцентра.

15. Перпендикулярность прямых Симсона диаметрально противоположных точек.

16. Верхняя оценка числа Рамсея $R(n, n)$.

17. Нижняя оценка числа Рамсея $R(n, n)$.

18. Бесконечная версия теоремы Рамсея.

19. Лемма Кёнига.

20. Вывод из бесконечной версии теоремы Рамсея конечной.

2.3. На двух параллельных прямых отмечено по 40 точек. Их разбивают на 40 пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. (В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.) Докажите, что число способов это сделать меньше 3^{39}.

4.1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Прямая A_1B_1 пересекает описанную окружность Ω треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что $CP = CQ$.

4.6. Дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 90°$, $\angle B < \angle C$. Касательная в точке A к описанной окружности ω треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D, E — точка, симметричная точке A относительно прямой BC, X — основание перпендикуляра из A на BE, Y — середина AX. Прямая BY вторично пересекает ω в точке Z. Докажите, что прямая BD касается описанной окружности треугольника ADZ.

6.2′. Докажите, что если в двудольном графе степени всех вершин в одной доле попарно равны, а также степени всех вершин в другой доле попарно равны, то в нём существует паросочетание, покрывающее меньшую долю.

7.2. Докажите, что для бесконечно многих n число $n^n + (n+1)^{n+1}$ составное.

7.9. Найдите все натуральные числа n, для которых число $\frac{1}{5} \cdot (2^{4n+2} + 1)$ простое.

7.13. Пусть $a > b > c > d$ — натуральные числа, причём $a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$. Докажите, что число $ab + cd$ — составное.

7.16. Докажите, что для любых натуральных чисел r и s в последовательности $r2^n + s3^n$ бесконечно много составных чисел.

7.18. Докажите, что среди чисел вида $(n!)^2 - n! + 1$ бесконечно много составных.

9.1. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ проведены биссектрисы углов ACB, ADB, CBD и CAD. Они пересекают стороны четырёхугольника в точках X, Y, Z и T. Докажите, что точки X, Y, Z и T лежат на одной окружности.

9.6. BE и CF — высоты остроугольного треугольника ABC. Две окружности, проходящие через A и F, касаются прямой BC в точках P и Q, причём B лежит между C и Q. Докажите, что прямые PE и QF пересекаются на описанной окружности треугольника AEF.

11.5. Действительные числа a, b, c, d, по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

13.5. В стаде фермера несколько овечек и несколько баранов. Каждой овечке нравится один или два барана. Чтобы избежать споров между овечками, фермер решил выгнать несколько овечек и несколько баранов так, чтобы каждой из оставшихся овечек нравился ровно один из оставшихся баранов. Докажите, что он может сделать это так, чтобы у него осталась хотя бы половина стада. *Решение через усреднение.*

14.2. Положительные действительные числа x, y и z удовлетворяют условию $x+y+z = 8$. Докажите, что

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+9} \geqslant 10.$$

15.2b). Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x(p-1)^x/p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x. Верно ли, что существует некоторая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что начав с числа x, будет совершено не более $f(x)$ действий?

17.3. Для положительных a, b, c, d докажите, что

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geqslant a + b + c + d.$$

Решения через AM-GM с весами, КБШ, транснеравенство.

18.4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных m и n таких, что число

$$\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$$

целое.

19.2. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

20.1′. Как известно, каракатицы умеют менять свой пол. Пусть $d > 1$. Несколько каракатиц образовали 2^{d-1} различных сообществ, в каждое из которых вошли ровно d каракатиц. Докажите, что для соблюдения современных норм некоторые каракатицы могут сменить пол так, чтобы в каждом сообществе были представители обоих полов.

20.2. Биссектрисы AA_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. A_0, C_0 — середины сторон BC, BA соответственно. Прямая A_0C_0 пересекает прямые AA_1, CC_1 в точках A_2, C_2. Докажите, что ортоцентр треугольника A_2IC_2 лежит на прямой AC.

21.5. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны AB за точку B, а также касается ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный.

23.1. Продлим шахматную доску вправо и влево на миллион клеток. Король стоит на средней клетке нижней горизонтали. Может ли он обойти всю полученную доску, побывав на каждой клетке ровно один раз? А если доску продлили вправо и влево до бесконечности?

25.3. Каждому из 100 мудрецов надета на голову шляпа одного из N цветов. По сигналу султана каждый должен будет написать на бумажке цвет своей шляпы. Все не угадавшие цвет будут казнены.
a) Докажите, что каким бы ни был алгоритм мудрецов, в какой-то из ситуаций выживет не более $[100/N]$ из них.
b) Докажите, что мудрецы могут договориться, что $[100/N]$ выживут. *Решения через теорему Холла и отработку гипотез.*

26.4. Пусть $a > 2$ — натуральное число. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $a^n - 1$ делится на n.

27.2. I — центр вписанной окружности треугольника ABC, P — точка внутри треугольника такая, что $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Докажите, что $AP \geqslant AI$.

27.3. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке A_1. Прямая AA_1 второй раз пересекает вписанную окружность в точке P, M — середина стороны BC. Докажите, что прямая PM касается вписанной окружности.

27.4. Одна из вневписанных окружностей треугольника ABC касается стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно, другая касается стороны AC и продолжений сторон BA и BC в точках B_2, C_2 и A_2 соответственно. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и A_2C_2 — в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через вершину A.

28.3. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$

29.5. Докажите, что можно переставить все натуральные числа в ряд так, чтобы сумма любых n первых чисел делилась на n. Каждое натуральное число должно присутствовать, причем ровно один раз.

29.6. Тор и Локи играют в игру. Они по очереди выписывают цифры в последовательности. Тор пишет любое число цифр, какое захочет, а Локи — только одну. Тор хочет, чтобы последовательность получилась периодической, а Локи пытается ему помешать. Кто выигрывает при правильной игре?

30.4. Найдите все целые числа, которые можно представить в виде

$$\frac{m+1}{n}+\frac{n+1}{m}$$

для натуральных m и n.

31.3. В треугольнике ABC с $AB\neq AC$ точка O — центр описанной окружности ω, H — ортоцентр. Продолжение медианы AM пересекает ω в точке N. Окружность, построенная на AM как на диаметре, пересекает ω в точках A и P. Докажите, что прямые AP, BC и OH пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AH = HN$.