8 КЛАСС

Материалы занятий

28 июля 2019 г.

Тридцать пятая Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль

Оглавление

4 июля. Вступительная олимпиада

1. Вдоль реки Вятка расположены пристани Мамадыш, Вишкиль, Котельнич и Киров (именно в таком порядке). От Котельнича до Мамадыша теплоход плывёт 1 час, от Котельнича до Кирова — тоже 1 час, а от Вишкиля до Кирова — 2 часа. В какую сторону течёт река — от Мамадыша к Кирову или наоборот? Все совпадения случайны.

2. У Димы есть клетчатый квадратный лист 18×18. Вначале все его клетки покрашены в белый цвет. Дима может произвольным образом выделить клетчатый квадрат 10×10 на своем листе и перекрасить все клетки этого квадрата: белые — в чёрный цвет, а чёрные — в белый цвет. Сможет ли Дима с помощью нескольких таких операций получить шахматную раскраску клеток листа 18×18?

3. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC, AD — его высота. На отрезке BD отмечена такая точка E, что $AM = DE$. На отрезке EM отмечена такая точка F, что $EF = FC$. Докажите, что CF — биссектриса угла C треугольника ABC.

4. Докажите для чисел a, b, c, больших 1, неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right|+\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|+\left|\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right| \leq a+b+c.$$

5. Вдоль аллеи, идущей к бане, растут, чередуясь, 36 берёз и 35 сосен. Расстояния от каждого не крайнего дерева до двух его соседей отличаются ровно в 8 раз. Докажите, что точно посередине аллеи не может расти сосна.

6. В стране 100 городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами. Оказалось, что если два города не связаны прямым авиарейсом, то между ними есть хотя бы два различных пути с одной пересадкой. Какое наименьшее количество авиарейсов может быть в этой стране?

Материалы занятий

4 июля. Приветственное занятие

По мотивам «Четыре задачи», журнал «Квантик», сентябрь 2016

1. Докажите, что на поле 10×10 не всегда можно расставить корабли требуемым образом, если сначала ставить однопалубные, затем двухпалубные и т.д.

2. Сколько выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка ранить четырёхпалубный корабль?

3. Легко разместить комплект кораблей для игры в «Морской бой» на доске 10×10. А на какой наименьшей квадратной доске можно разместить этот комплект?

4. Петя и Вася сыграли несколько партий в игру «Морской бой». Хитрый Петя расставлял корабли в разных партиях по-разному так, что, если бы Вася попал в одной из партий, он промахнулся бы в любой другой, сделав аналогичный выстрел. Какое наибольшее число партий они могли при этом сыграть?

5. Верно ли, что если сначала ставить четырёхпалубный корабль, потом ставить трёхпалубные, и т.д., то всегда можно поставить полный комплект требуемым образом?

5 июля. Соответствия. Биекция. Конечное и бесконечное

Множество — это одно из основных неопределяемых понятий математики. Говоря неформально, множество — это произвольный набор объектов (называемых *элементами* множества; набор может быть как конечным, так и бесконечным). Все элементы в любом множестве различны. Если объект x является элементом множества X, пишут $x \in X$.

Определение. *Отображение* $f: X \to Y$ множества X в множество Y — это правило, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ ровно один элемент $f(x) \in Y$. Элемент $f(x)$ называется *образом* элемента x. Множество X называется *областью определения* отображения. Множество Y называется *областью значений* отображения.

Определение. Соответствие называется *взаимно однозначным соответствием* (*биекцией*), если каждому элементу множества X соответствует ровно один элемент множества Y, и наоборот — каждому элементу множества Y соответствует ровно один элемент множества X.

Определение. Множество A бесконечно, если существует биекция множества A на его собственное подмножество.

1. На окружности отметили 2019 синих точек и 1 красную. Чего больше: **(а)** треугольников с вершинами в синих точках или четырёхугольников, у которых одна вершина красная? **(б)** многоугольников с вершиной в красной точке или остальных?

2. Последовательность из пяти цифр a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 называется «горой», если $a_1 \le a_2 \le a_3 \ge a_4 \ge a_5$ и «долиной», если $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \le a_4 \le a_5$. Чего больше: «гор» или «долин»?

3. Каких графов с шестью вершинами больше: тех, в которых ровно семь рёбер, или тех, в которых ровно восемь рёбер?

4. Установите биекции между следующими множествами:

(а) Множество подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, содержащих 1 и множество подмножеств, не содержащих 1.

(б) Множество подмножеств конечного множества X и множество отображений из X в $\{0,1\}$.

(в) Множество подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, состоящих из чётного числа элементов, и множество подмножеств, состоящих из нечётного числа элементов.

5. На плоскости нарисованы три пересекающихся круга. Пусть A — множество точек первого круга, B — множество точек второго круга, C — множество точек третьего круга. Сколько различных множеств можно получить из A, B, C при помощи операций $\cup$, $\cap$, $\setminus$ и скобок?

6. Построить биекцию $A \to B$, где: **(а)** $A = [0,1]$, $B = [1,2]$; **(б)** $A = [0,1]$, $B = [0,2]$; **(в)** $A = [0, +\infty)$, $B = (0, +\infty)$; **(г)** $A = [0,1]$, $B = (0,1]$; **(д)** $A = [0,1]$, $B = (0,1)$.

7. Семьдесят три грустных восьмиклассника нашли в лесу большую шишку и стали кидать её друг в друга. Грустный восьмиклассник, попавший шишкой в другого грустного восьмиклассника, становится весёлым и больше уже не грустнеет. Восьмиклассник, в которого попали, выбывает из игры. В конце концов в игре остался единственный восьмиклассник. Каких восьмиклассников к этому моменту больше выбыло из игры — весёлых или грустных?

8. Докажите, что при любом натуральном n уравнения $x^2+y^2=n$ и $x^2+y^2=2n$ имеют одинаковое количество решений в целых числах.

9. Две шайки гангстеров охотятся друг за другом. Каждый гангстер охотится ровно за одним противником, и за каждым гангстером охотится не более одного противника. Главарь одной из шаек обнаружил, что не за всеми противниками охотятся. Докажите, что обе шайки бесконечны.

10. Разбиением натурального числа называется его разложение на неупорядоченные натуральные слагаемые. Докажите, что: **(а)** количество разбиений числа не более чем на девять слагаемых равно количеству его же разбиений на слагаемые, не превосходящие девяти; **(б)** количество разбиений числа ровно на девять слагаемых равно количеству его же разбиений на слагаемые, не превосходящие девяти, среди которых обязательно есть по крайней мере одна девятка.

11. Дан набор из 2019 чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных чисел, то получится тот же набор. Найдите произведение всех чисел набора.

5 июля. Векторы

Теория: определения направленного отрезка, равенства направленных отрезков, вектора, операций над векторами, коллинеарности векторов.

Упражнения

1. (а) Может ли длина суммы двух векторов быть меньше длины каждого из них? **(б)** Может ли длина разности двух векторов быть меньше разности их длин?

2. Нарисуйте два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Изобразите векторы $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{d}=3\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}$, $\vec{e}=-\frac{4}{3}\vec{a}$.

3. Даны векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и точка O. Известно, что $\overrightarrow{OA}=3\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=5\vec{a}$. Докажите, что точка C лежит на прямой AB. Верно ли, что точка C лежит на отрезке AB?

4. Упростите выражение **(а)** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EA}$; **(б)** $\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{DB}$.

Задачи

1. (а) Пусть M — середина отрезка AB, O — произвольная точка. Докажите, что $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. **(б)** Пусть M и N — середины отрезков AB и CD. Докажите, что $MN\le\frac{1}{2}(AC+BD)$. Когда достигается равенство? **(в)** Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что для любой точки O имеет место равенство $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

2. (*Лемма о перестановке.*) Докажите, что $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BY}=\overrightarrow{AY}+\overrightarrow{BX}$.

3. Точки M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL. Докажите, что отрезок $PQ=\frac{1}{4}AE$ и $PQ\parallel AE$.

4. (*Параметрическое уравнение прямой.*) Докажите, что точка Z лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OZ}=t\,\overrightarrow{OA}+(1-t)\,\overrightarrow{OB}$ для некоторого t и любой точки O. Какому условию должно удовлетворять t, чтобы **(а)** точка Z оказалась на отрезке AB; **(б)** делила отрезок AB в отношении $x:y$; **(в)** что произойдёт, если одно из чисел взять отрицательным в предыдущем пункте?

5. Пусть E и F — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$, точки K, L, M и N — середины отрезков AF, CE, BF и DE. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

6. (а) Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник. **(б)** Из медиан треугольника ABC составлен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан треугольника $A_1B_1C_1$ составлен треугольник $A_2B_2C_2$. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, и найдите коэффициент подобия.

7. Сумма n векторов равна $\vec{0}$ ($n \geq 3$), и среди них нет сонаправленных. Докажите, что из этих векторов можно составить выпуклый n-угольник.

8. На прямой лежат 2019 точек M_1, ..., M_{2019}. Вне прямой дана точка A. Может ли так случиться, что можно расставить на отрезках AM_1,..., AM_{2019} стрелки так, чтобы сумма полученных векторов была равна $\vec{0}$?

9. Даны параллелограммы $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$. Обозначим через S_i точку пересечения медиан треугольника $A_iB_iC_i$. Докажите, что $S_1S_2S_3S_4$ — параллелограмм.

10. Из точки O на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Докажите, что можно выбрать несколько векторов (или, может быть, один вектор), длина суммы которых больше 1.

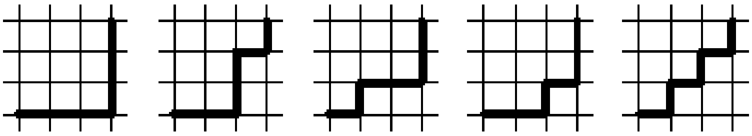
6 июля. Числа Каталана I

Определение. Обозначим через K_n количество способов расставить в ряд n открывающихся и n закрывающихся скобок так, чтобы запись была корректна. Числа K_n называются *числами Каталана*.

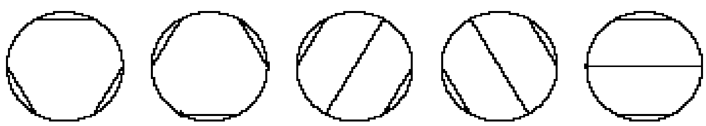
1. Сколько имеется последовательностей $a_1, \dots, a_{2n}$ длины $2n$, в которых n раз встречается 1, n раз встречается (-1), и все частичные суммы неотрицательны (k-ой частичной суммой последовательности называется сумма первых k её членов)? Например, для $n = 3$ получаем 5 последовательностей:

1) $+1+1+1-1-1-1$; 2) $+1+1-1-1+1-1$; 3) $+1-1+1+1-1-1$;
4) $+1+1-1+1-1-1$; 5) $+1-1+1-1+1-1$.

2. Сколько имеется путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вправо и вверх, не поднимающихся выше прямой $y = x$? Например, для $n = 3$ получаем 5 путей.



3. На окружности расставлены $2n$ точек. Сколькими способами можно разбить их на пары и соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались? Например, для $n = 3$ получаем 5 способов.



4. Супер-мороженое. В очереди в буфете стоят $2n$ лмшат. Каждому, естественно, хочется купить ровно одно супер-мороженое, у половины из них полтинники, у половины стольники. Супер-мороженое стоит полтинник. В кассе буфета денег нет, и сдачу давать нечем. Сколько имеется очередей, которые смогут купить супер-мороженое?

5. Плоское корневое строго бинарное дерево — это дерево с фиксированной вершиной (корнем), и у каждой вершины либо два потомка, либо ни одного, а всего в дереве $n + 1$ пронумерованный лист. Сколько таких деревьев?

6. Задача Эйлера о триангуляции. Сколькими способами можно разбить выпуклый $(n + 2)$-угольник непересекающимися диагоналями на треугольники?

7. Каким количеством способов можно расставить $2n$ человек разного роста в две шеренги так, чтобы в каждой шеренге люди стояли по убыванию роста и каждый человек первой шеренги был выше человека стоящего за ним человека второй шеренги.

8. Мама на кухне печёт n блинов. Время от времени на кухню забегает сын и берёт самый горячий блин. Найдите количество способов съесть все n блинов.

6 июля. Антипараллельность и прямая Симсона

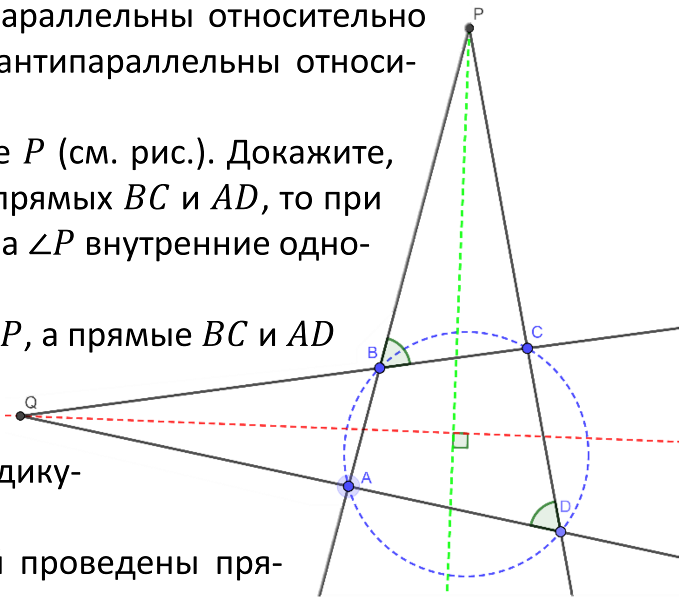
Определение. Прямые AB и CD называются *антипараллельными относительно пары прямых* BC и AD, если $\measuredangle(AB, BC) = \measuredangle(AD, DC)$.

Замечание. Может так оказаться, что какие-то две точки из A, B, C и D совпали. В таком случае под прямой, соединяющей эти две точки, подразумевается касательная к описанной окружности полученного треугольника, и свойства сохраняются.

1. Докажите, что AB и CD антипараллельны относительно BC и AD, тогда и только тогда, когда точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

2. В непрямоугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что прямые B_1C_1 и BC антипараллельны относительно сторон AB и AC.

3. Докажите, что если прямые AB и CD антипараллельны относительно пары прямых BC и AD, то прямые BC и AD антипараллельны относительно пары прямых CD и AB.



4. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P (см. рис.). Докажите, если AB и CD антипараллельны относительно прямых BC и AD, то при пересечении прямых AD и BC биссектрисой угла $\angle P$ внутренние односторонние углы равны.

5. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые BC и AD в точке Q (см. рис.). Докажите, если AB и CD антипараллельны относительно прямых BC и AD, то биссектрисы углов $\angle P$ и $\angle Q$ перпендикулярны.

6. Через точки пересечения двух окружностей проведены прямые, которые вторично пересекают первую окружность в точках A и B, а вторую в точках C и D. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

7. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Докажите, что описанная окружность треугольника ABD касается прямой CD тогда и только тогда, когда описанная окружность треугольника BCD касается прямой AB.

8. Прямая Симсона. Точка P принадлежит описанной окружности треугольника ABC, точки A', B' и C' на прямых BC, CA и AB соответственно являются основаниями перпендикуляров из точки P. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

9. Докажите, что точки, симметричные точке, принадлежащей описанной около треугольника окружности, относительно сторон этого треугольника, коллинеарны (лежат на одной прямой).

7 июля. Числа Каталана II

Упражнение. Найдите K_n при $n = 1, 2, 3, 4$.

1. Докажите, что K_n удовлетворяют рекуррентному соотношению $K_0 = 1$, $K_n = K_0K_{n-1} + K_1K_{n-2} + \dots + K_{n-1}K_0$.

2. Первое доказательство формулы для чисел Каталана (метод траекторий). Будем рассматривать пути из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по линиям клетчатой бумаги, идущие вправо и вверх. Пути, не поднимающиеся выше прямой $y=x$, назовем хорошими, а остальные — плохими. **(а)** Сколько всего путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n)? **(б)** Число плохих путей можно посчитать так: найти точку, где плохой путь пересекает последний раз прямую $y=x+1$ и отразить хвост пути относительно этой прямой. В какой точке окажется конец пути? Почему таких путей столько же, сколько и плохих? **(в)** Докажите, что число хороших путей равно $K_n=\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{n}$.

3. Рассмотрим *треугольник Каталана*:

1										
	1									
1		1								
	2		1							
2		3		1						
	5		4		1					
5		9		5		1				
	14		14		6		1			
14		28		20		7		1		
	42		48		27		8		1	
42		90		75		35		9		1

На крайней диагонали стоят единицы. Каждое число является суммой стоящих над ним сверху слева и сверху справа, за исключением чисел на левой вертикали, которые равны стоящим над ними сверху справа. Докажите, что на левой вертикали стоят числа Каталана.

4. Докажите, что числа Каталана удовлетворяют рекуррентному соотношению:
$$K_{n+1}=\frac{2(2n+1)}{n+2}K_n,\qquad K_0=1.$$

5. Второе доказательство формулы для чисел Каталана (лемма Рени). Посчитаем число последовательностей $a_0, a_1,\ldots, a_{2n}$ с $n+1$ числом $+1$ и n числами (-1), у которых все частичные суммы положительны. **(а)** Сколько таких последовательностей? **(б) Лемма Рени.** Если имеется последовательность из m целых чисел с суммой 1, то ровно у одного ее циклического сдвига все частичные суммы положительны. **(в)** Выведите из леммы Рени явную формулу для чисел Каталана: $K_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$. **(г)** Проверьте, что числа $\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{n}$ и $\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$ равны.

7 июля. Геометрия масс

Определение. Пусть M — некоторая точка плоскости и m — ненулевое число. *Материальной точкой* (м.т.) mM называется точка M с числом m, и под этим числом будем подразумевать массу точки M (считая, что она может быть и отрицательной). *Центром масс* системы м.т. $m_1M_1, m_2M_2,\ldots, m_nM_n$ называется такая точка Z, для которой имеет место равенство $m_1\overrightarrow{ZM_1}+m_2\overrightarrow{ZM_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZM_n}=\vec{0}$ при условии, что $m_1+m_2+\ldots+m_n\neq 0$.

Теорема 1. (а) Если точка Z служит центром масс системы м.т. $m_1M_1, m_2M_2,\ldots, m_nM_n$, то при любом выборе в пространстве точки O справедливо равенство

$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1}+m_2\overrightarrow{OM_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$. **(б)** Обратно, если хотя бы при одном выборе на плоскости точки O выполняется это равенство, то точка Z — центр масс данной системы материальных точек.

Следствие. Для конечной системы материальных точек центр масс определяется однозначно.

Теорема 2. Центр масс двух м.т. расположен на прямой, соединяющей эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага: $m_1d_1 = m_2d_2$.

Теорема 3. Пусть в системе $m_1M_1, m_2M_2, \ldots, m_nM_n$, отмечены k м.т. m_1M_1, $m_2M_2, \ldots$, m_kM_k. Пусть Z — центр масс отмеченных м.т. Если всю массу отмеченных м.т. сосредоточить в их центре масс Z, то от этого положение центра масс всей системы не изменится, то есть центр масс системы м.т. $(m_1 + m_2+\ldots+m_k)Z, m_{k+1}M_{k+1}, \ldots, m_nM_n$ совпадает с центром масс первоначальной системы.

1. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

2. Пусть $A_1, B_1, \ldots, F_1$ — середины сторон $AB, BC, \ldots, FA$ произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.

3. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно, причём $AK{:}KB = DM{:}MC = a$ и $BL{:}LC = AN{:}ND = b$. Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN. Докажите, что $NP{:}PL = a$ и $KP{:}PM = b$.

4. Старый пират зарыл клад на острове среди 20 деревьев. После этого он написал завещание, в котором указал, как искать клад: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, и т. д., наконец, повернуть к двадцатому и пройти двадцатую часть расстояния до него. К сожалению, пират забыл указать, как занумерованы деревья! Сколько разных ям придётся выкопать потомкам пирата, чтобы всё-таки найти клад?

5. На стороне AC треугольника ABC взята точка M такая, что $AM{:}MC = 1{:}2$, а на продолжении стороны CB — точка N такая, что $NB = CB$. Прямая NM пересекает сторону AB в точке P. В каком отношении эта точка делит сторону AB и отрезок MN?

6. Какие массы нужно поставить в вершины, чтобы центр масс оказался в **(а)** инцентре, **(б)** ортоцентре?

7. В треугольнике ABC отметили точку X. Докажите, что X является центром масс набора $(S_{AXB})C, (S_{BXC})A, (S_{CXA})B$.

8. В треугольнике ABC точка F делит сторону BC в отношении $3{:}1$, считая от вершины B. Точки M и P отсекают от сторон AB и AC по $1/6$, считая соответственно от вершины A и от вершины C. В каком отношении делится каждый из отрезков MP и AF точкой их пересечения?

9. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1. В каком отношении делит эта прямая медиану CC_1?

10. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$; M — точка пересечения его диагоналей, Q — середина стороны CD. Вычислите, в каком отношении делит прямая MQ сторону AB, если известно, что $AD = a$, $BC = b$.

9 июля. Неравенства о средних

Неравенством о средних называется цепочка неравенств для $x_i > 0$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}.$$

Для краткости пишут $H_n \le G_n \le A_n \le Q_n$. Равенство достигается, когда все x_i равны.

Упражнения

1. $(2+x)(2+y)(2+z) \ge 27$, где $x, y, z > 0, xyz = 1$.

2. $x^5 + y^5 \ge x^3y^2 + x^2y^3$, где $x, y > 0$.

3. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

Задачи

Все числа в неравенствах считать положительными

1. $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$.

2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3$.

3. $\sqrt[n]{(n!)} \le \frac{n+1}{2}$, где $n = 2, 3, 4, \ldots$.

4. $x^5 + y^5 + z^5 \ge x^3yz + y^3xz + z^3xy$.

5. $\frac{2x^2}{yz} + \frac{2y^2}{xz} + \frac{2z^2}{xy} \ge \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$.

6. $a^4 + b^4 + c^4 \ge a^3b + b^3c + c^3a \ge abc(a+b+c)$.

7. $3x^3 - 6x^2 + 4 \ge 0$.

8. $2x + \frac{3}{8} \ge \sqrt[4]{x}$.

9. $6a + 4b + 5c \ge 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}$.

10. $a^8 + b^8 \ge \frac{1}{128}$, где $a + b = 1$.

11. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \cdots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}}, \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}. \end{cases}$$

12. Произведение чисел x и y равно 1. Для какой наибольшей константы c заведомо верно неравенство $x^2 + y^2 \ge c(x-y)$?

13. $a^4b + b^4c + c^4a \ge a^2b^2c + a^2c^2b + b^2c^2a$.

14. $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

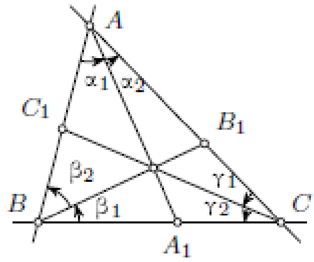
15. $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} + \frac{a^3+c^3}{a^2+c^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+c^2} \ge a + b + c$.

16. $\frac{a}{b^3c}+\frac{b}{c^3a}+\frac{c}{a^3b}\geq\frac{2}{b^2+c^4}+\frac{2}{c^2+a^4}+\frac{2}{a^2+b^4}$.

9 июля. Теоремы о коллинеарности и конкуррентности

Теорема Чевы. Пусть на прямых AB, BC, CA, определяющих треугольник ABC, даны точки C_1, A_1, B_1. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке или были параллельными, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$ (равенство понимается как равенство с направленными отрезками).

Теорема Чевы в тригонометрической форме. Пусть на прямых AB, BC, CA, определяющих треугольник ABC, даны соответственно три точки C_1, A_1, B_1. Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекались в одной точке или были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$ (равенство понимается как равенство с направленными углами).



1. Докажите теорему Чевы с помощью геометрии масс.
2. Сформулируйте теорему Менелая в терминах направленных отрезков и направленных углов.
3. Пусть на прямых AB, BC, CA, определяющих треугольник ABC, даны точки C_1, A_1, B_1, точки C_2, A_2, B_2 симметричны им относительно середин соответствующих сторон. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке P (параллельны), то прямые AA_2, BB_2, CC_2 также пересекаются в одной точке Q (параллельны). Точки P и Q называются изотомически сопряжёнными относительно треугольника ABC.
4. Пусть на прямых AB, BC, CA, определяющих треугольник ABC, даны точки C_1, A_1, B_1, точки C_2, A_2, B_2 выбраны на этих же прямых так, что лучи AA_1 и AA_2, BB_1 и BB_2, CC_1 и CC_2 симметричны относительно биссектрис соответствующих углов. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке P (параллельны), то прямые AA_2, BB_2, CC_2 также пересекаются в одной точке Q (параллельны). Точки P и Q называются изогонально сопряжёнными относительно треугольника ABC.
5. Докажите, что ортоцентр треугольника и центр описанной около него окружности изогонально сопряжены относительно этого треугольника.
6. Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Какой замечательной точке треугольника она изотомически сопряжена?
7. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон с серединами соответствующих высот, пересекаются в одной точке.
8. Докажите, что биссектрисы внешних углов неравнобедренного треугольника пересекают прямые, содержащие противоположные стороны, в трёх коллинеарных точках.
9. Теорема Гаусса. Если прямая, не проходящая через вершины треугольника ABC, пересекает прямые AB, BC, CA соответственно в точках C_1, A_1, B_1, то середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 коллинеарны.

10 июля. Варьирование

1. Пять деревень расположены друг за другом на прямой дороге. Где надо выкопать колодец, чтобы сумма расстояний от него до деревень была минимальной?

2. Школьники одного класса в июле ходили в два туристических похода. В первом походе мальчиков было меньше $2/5$ общего числа участников этого похода, во втором — тоже меньше $2/5$. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше $4/7$ общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников участвовал по крайней мере в одном походе.

3. Треугольник целиком содержится внутри параллелограмма. Докажите, что площадь треугольника не превосходит половины площади параллелограмма.

4. В парламенте у каждого не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в его палате будет не более одного врага.

5. Выпуклый многоугольник содержится полностью внутри другого выпуклого многоугольника. Докажите, что периметр внешнего больше, чем периметр внутреннего.

6. **(а)** Известно, что $x_1 > x_2$ и $y_1 > y_2$. Что больше: $x_1y_1 + x_2y_2$ или $x_1y_2 + x_2y_1$?

(б) Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — некоторая перестановка b_i. Докажите **транс-неравенство**:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

7. Семь членов жюри оценивают выступление команды на ШАМе. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все члены жюри выставили различные оценки. Сначала они планировали учитывать результат команды как среднее арифметическое всех оценок. А потом приняли решение оценивать так: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок. **(а)** Может ли разность итоговых оценок команды, вычисленных первым и вторым способом, равняться $1/30$? $1/35$? **(б)** Найдите наибольшее возможное значение разности двух итоговых оценок, вычисленных первым и вторым способом.

8. На полке в беспорядке стоит собрание сочинений в 20 томах. Библиотекарь может вынуть любую группу стоящих подряд томов и поставить их на то же место в обратном порядке. Разрешено переворачивать только группы из трёх или более томов. Как ему поставить тома в правильном порядке?

9. **(а)** Докажите, что среди всех четырёхугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат. **(б)** Докажите, что среди всех n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

10. Пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{30})$ — упорядоченный набор натуральных чисел. Найдите наибольшее возможное количество троек (a_i, a_j, a_k), таких, что $i < j < k$ и $a_j = a_i + 1$, $a_k = a_j + 1$.

10 июля. Симедиана

Определение. *Симедианой* данного треугольника называется прямая, симметричная медиане данного треугольника относительно биссектрисы, выходящей из той же вершины.

1. На сторонах AC и AB треугольника ABC выбраны точки B_1 и C_1 так, что прямые B_1C_1 и BC антипараллельны относительно сторон AC и AB. Докажите, что прямая AS содержит симедиану треугольника ABC из вершины A тогда и только тогда, когда она делит отрезок B_1C_1 пополам.

2. Докажите, что расстояния от любой точки симедианы до боковых сторон треугольника пропорциональны этим сторонам. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

3. Докажите, что симедиана делит сторону треугольника в отношении квадратов прилежащих сторон. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

4. Доказать, что в неравнобедренном треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой тогда и только тогда, когда треугольник прямоугольный.

5. Дан остроугольный треугольник ABC и точка X внутри него так, что $\angle BAX = \angle ACX$, $\angle CAX = \angle ABX$. **(а)** Докажите, что точка X лежит на симедиане угла A. **(б)** Пусть симедиана угла A пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Докажите, что X — середина AD.

6. Построение симедианы. Через вершины B и C треугольника ABC проведены касательные к описанной окружности, которые пересекаются в точке T. Докажите, что AT — симедиана треугольника ABC.

7. Точка Лемуана. Докажите, что три симедианы пересекаются в одной точке.

8. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в точке Лемуана.

11 июля. Триангуляция Делоне

0. «Уши Чебурашки». На плоскости даны точки A, B и некоторый угол α. Постройте геометрическое место точек плоскости, из которых отрезок AB виден **(а)** под углом α, **(б)** под углом, меньшим α, **(в)** под углом, большим α.

Пусть $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ — конечное множество точек плоскости, причём никакие три точки не лежат на одной прямой и никакие 4 точки не лежат на одной окружности. ***Триангуляцией*** множества X называется разбиение выпуклой оболочки множества X на треугольники такое, что каждая точка из X является вершиной хотя бы одного из треугольников. Триангуляция множества X называется ***триангуляцией Делоне***, если описанные окружности всех треугольников триангуляции — «пустые», то есть не содержат внутри себя других точек множества X.

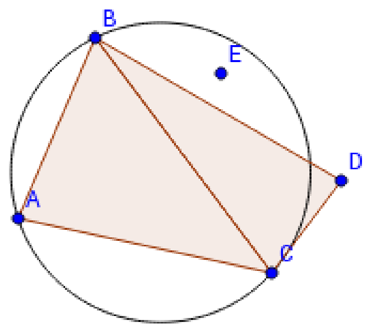
1. Докажите, что если вершины выпуклого четырёхугольника не лежат на одной окружности, то множество его вершин допускает единственную триангуляцию Делоне.

2. Постройте триангуляцию Делоне множества точек $(0;0), (0;2), (4;0), (4;4), (6;4)$.

3. (*Критерий Делоне для ребра.*) Докажите, что триангуляция множества X является триангуляцией Делоне тогда и только тогда, когда каждое ребро триангуляции «хорошее», то есть является хордой некоторой окружности, не содержащей внутри себя других точек множества X.

(а) Докажите, что если для треугольников ABC и BCD в триангуляции ребро BC хорошее, то точка D лежит вне описанной окружности треугольника ABC.

(б) Дана триангуляция множества X, все ребра которой хорошие. Предположим, что триангуляция не является триангуляцией Делоне: «конфликтная» точка $E \in X$ попала внутрь описанной окружности каких-то треугольников триангуляции. Выберем из пар («конфликтная» точка, треугольник) такой треугольник ABC, ближайшая к точке E сторона BC которого видна из точки E под максимальным



углом. Докажите, что к BC примыкает треугольник BCD, вершиной которого не является точка E (см. рис.).

(в) Докажите, что $\angle BDC < \angle BED$.

(г) Докажите, что точка E лежит внутри описанной окружности треугольника BCD, но $\angle BEC < \angle BED$.

Диаграммой (разбиением) Вороного $V(X)$ множества X назовем набор областей $D_i = \{P: PX_i < PX_j, j \neq i\}$, состоящих из всех точек плоскости, для которых точка X_i — ближайшая из множества X. Точку X_i назовем центром области D_i.

Замечание. Область Вороного — это пересечение $n-1$ полуплоскостей, и поэтому представляет собой (возможно, неограниченную) открытую выпуклую область с не более $n-1$ вершинами и $n-1$ рёбрами.

4. Постройте диаграмму Вороного **(а)** вершин треугольника, **(б)** вершин ромба, не являющегося квадратом, **(в)** точек $(0;\ 0), (0;\ 2), (4;\ 0), (4;\ 4), (6;\ 4)$. **(г)** Соедините отрезками центры областей, имеющих общий участок границы. Что получилось?

5. Докажите, что каждая вершина в разбиении Вороного $V(X)$ точек общего положения принадлежит границе ровно трёх областей.

6. Докажите, что области D_i и D_j имеют общий участок границы тогда и только тогда, когда отрезок с концами в центрах областей хороший, т.е. существует окружность, проходящая через центры этих областей и не содержащая внутри себя других точек множества X.

7. Рассмотрим диаграмму Вороного множества X и соединим отрезком центры областей, имеющих общий участок границы. Обозначим полученное разбиение плоскости через $TV(X)$. **(а)** Постройте биекцию между вершинами $V(X)$ и треугольниками в $TV(X)$. **(б)** Докажите, что разбиение $TV(X)$ плоскости — триангуляция Делоне множества X.

8. Докажите, что для $n > 3$ точек общего положения диаграмма Вороного содержит не больше $2n-5$ вершин и $3n-6$ рёбер.

12 июля. Однородность, симметричность, американская замена

Однородность

Упр. 1. Докажите неравенство для положительных чисел:

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \cdots + a_nb_nc_n)^3 \le$$
$$\le (a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_n^3).$$

Докажите неравенства:

1. $(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$.

2. $(a+b)^2(a^2+b^2)^2 \dots (a^n+b^n)^2 \ge (a^{n+1}+b^{n+1})^n$, числа положительны.

3. $(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha)^\beta \le \left(a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta\right)^\alpha$, если $0 < \beta < \alpha$ и все числа положительны.

4. $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$, числа положительны.

Симметричность

Упр 2. Докажите неравенство $abc \ge (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ для положительных чисел с помощью симметрии.

5. $(a-c)^2 \ge (a-b)(b-c)$.

6. $x(x-z)^2+y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z)$ для положительных чисел.

Неравенства для сторон треугольника, американская замена

Упр 3. Докажите неравенство $abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ для положительных чисел с помощью «американской замены».

7. Для сторон треугольника докажите неравенство:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geq 0.$$

8. Докажите, что для сторон треугольника периметра 1 справедливо неравенство:

$$a^2+b^2+c^2+4abc \leq \frac{1}{2}.$$

9. Пусть $abc=1$, числа положительны. Докажите неравенство

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

14 июля. Метод Штурма

Упражнение

(а) Как изменяется произведение двух чисел с постоянной суммой при их сближении?

(б) Сумма нескольких положительных чисел постоянна. Когда их произведение достигает наибольшего значения?

(в) Докажите, $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$, где $x_i>0$.

1. (а) Как изменяется сумма квадратов двух положительных чисел с постоянной суммой при сближении этих чисел?

(б) Докажите, что $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$, где $x_i>0$.

2. (а) Как изменяется сумма обратных величин двух чисел, если произведение этих чисел постоянно?

(б) Докажите, что $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$, где $x_i>0$.

3. Пусть сумма двух положительных чисел фиксирована. Как изменяются следующие выражения при сближении **(а)** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; **(б)** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; **(в)** a^n+b^n; **(г)** $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}$?

4. Докажите, что если сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1, то

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geq (n+1)^n.$$

5. Докажите, что если сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1, то

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\cdots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

6. Пусть $a+b+c+d=1$. Докажите, что

$$\sqrt{1+4a}+\sqrt{1+4b}+\sqrt{1+4c}+\sqrt{1+4d} \leq 4\sqrt{2}.$$

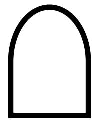
7. Докажите неравенство Гюйгенса $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq (1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n})^n$, $x_i>0$.

8. Известно, что $0 \leq x \leq 1$ и $A=x(1-x)^{2019}$. Найдите x, при котором A максимально.

9. Известно, что $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$, $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. Докажите, что

$$(1+a_1)(2+a_2)(n+a_n) \leq 2n!.$$

10. В стене требуется выпилить окно площади S, имеющее форму прямоугольника, соединённого с полуокружностью. Найдите высоту и ширину окна, при которой длина пропила (т.е. периметр окна) будет наименьшим.



11. Докажите неравенство $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+bcd+acd}{4}}$.

14 июля. Метод последовательных приближений в геометрии

Докажите, что:

(а) концы самого длинного отрезка в треугольнике лежат на его сторонах;

(б) самый длинный отрезок в треугольнике выходит из вершины;

(в) самый длинный отрезок в треугольнике совпадает с наибольшей стороной.

1. Существует ли треугольник, для которого:

(а) высота в 10 раз короче биссектрисы из той же вершины;

(б) дополнительно та же биссектриса в 10 раз короче медианы из той же вершины;

(в) дополнительно та же медиана в 10 раз короче радиуса описанной окружности.

2. Пусть V — выпуклый многоугольник. Рассмотрим выпуклый многоугольник V_1 со сторонами, параллельными V, стороны которого отстоят на расстояние a от сторон V. Пусть многоугольник V_2 составлен из заштрихованных частей. Обозначим периметры построенных многоугольников через P, P_1, P_2, а их площади через S, S_1, S_2

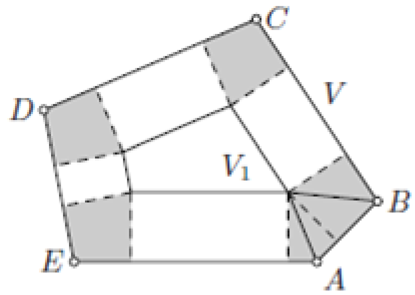
(а) Докажите, что многоугольник V_2 описан около окружности и $S_2 = \frac{aP_2}{2}$.

(б) Выразите P, S через a, P_1, P_2, S_1, S_2.

(в) Докажите, что $P^2 - 4\pi S > P_1^2 - 4\pi S_1$.

(г) Докажите, что a можно выбрать так, что многоугольник V_1 будет иметь меньше сторон, чем V.

(д) Докажите изопериметрическое неравенство для выпуклого многоугольника: $P^2 > 4\pi S$.



3. Докажите, что:

(а) Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет равносторонний.

(б) Из всех n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет равносторонний.

15 июля. Квадратный трёхчлен

1. Постройте график функции **(а)** $y = |x^2 + 6x - 5|$; **(б)** $y = x^2 - 6|x| + 5$. При каких значениях параметра а график функции $y = x + a$ имеет ровно три точки пересечения с графиком функции пункта (а), с графиком функции пункта (б)?

2. Из прямоугольной трапеции с основаниями 8 см и 24 см и высотой 12 см вырезается прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь?

3. Известно, что $a + b + c > 0$, $c < 0$. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет действительные корни.

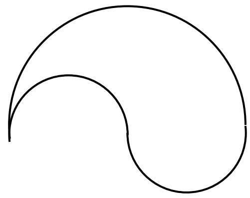
4. Доказать, что уравнение $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ при любых действительных a, b, c имеет действительные корни.

5. Числа a, b, c таковы, что для любого x имеют место неравенства: $ax^2 + bx + c \leq bx^2 + cx + a \leq cx^2 + bx + a$. Докажите, что $a = b = c$.

6. Три приведенных квадратных трёхчлена таковы, что сумма любых двух из них не имеет корней. Докажите, что сумма всех трёх трёхчленов также не имеет корней.
7. Квадратный трёхчлен $P(x)$ переставляет местами два числа: $P(a)=b$, $P(b)=a$. Докажите, что он не переставляет местами никакие два других числа.
8. Пусть коэффициенты уравнений $x^2+p_1x+q_1=0$ и $x^2+p_2x+q_2=0$ связаны соотношением $p_1p_2=2(q_1+q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из этих уравнений имеет корни.
9. Найдите наименьшее значение x^2+y^2, если $x^2-y^2+6x+4y+5=0$.
10. Может ли при нечётных a, b и c уравнение $ax^2+bx+c=0$ иметь **(а)** целые корни; **(б)** рациональные корни?
11. Существуют ли два квадратных трёхчлена x^2+bx+c и $2x^2+(b+1)x+(c+1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня?
12. Никита написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Миша стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5. Восстановите стёртое число.
13. Роме задали на дом уравнение $x^2+p_1x+q_1=0$, где p_1 и q_1 — целые числа. Он нашёл его корни p_2 и q_2 и написал новое уравнение $x^2+p_2x+q_2=0$. Повторив операцию ещё трижды, усердный Рома заметил, что он решал четыре квадратных уравнения и каждое имело два различных целых корня (если из двух возможных уравнений два различных корня имело ровно одно, то Рома всегда выбирал его, а если оба — любое). Однако, как ни старался Рома, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело два различных вещественных корня, и Рома сильно расстроился. Какое уравнение Роме задали на дом?
14. Учитель написал на доске квадратный трёхчлен $x^2+10x+20$. Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на единицу по своему выбору либо коэффициент при x, либо свободный член. В результате получился трёхчлен $x^2+20x+10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трёхчлен с целыми корнями?

15 июля. Поворот

Упр 1. Фигура «инь-янь» получается, если из полукруга, вырезать полукруг вдвое меньшего радиуса и приставить его к получившейся фигуре, повернув на $180°$ вокруг центра круга.



(а) Разрежьте «инь-янь» на две равные части; **(б)** на 5 равных частей.
Упр 2. Отрезок AC разбит на две части точкой B, и на отрезках AB и BC как на сторонах построены равносторонние треугольник ABD и BCE (по одну сторону от AC). Точки M и P — середины отрезков AE и CD. Докажите, что:
(а) треугольник BPM — равнобедренный,
(б) треугольник BPM — равносторонний.
Определение. Поворотом вокруг точки O (называемой центром поворота) на угол α называется преобразование плоскости, при котором любая точка A переходит в точку A', для которой $OA=OA'$ и $\angle AOA'=\alpha$, причём вращение происходит против часовой стрелки. Поворот на тот же угол по часовой стрелке будет поворотом на $(-\alpha)$.
● При повороте сохраняются расстояния: если точки A, B переходят в точки A', B' то $AB=A'B'$.

- При повороте прямые переходят в прямые.
- При повороте на угол α, один из углов между прямой и ее образом равен α.

1. Приведите пример многоугольника, который переходит в себя при повороте на угол **(а)** $60°$, **(б)** $90°$, **(в)** $120°$ относительно некоторого центра.

2. Часто образ точки можно найти следующим образом: представим точку как пересечение двух линий, найдем образ каждой из них — тогда образ точки есть пересечение образов этих линий.

3. В окружность с центром в точке O вписаны два правильных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (вершины треугольников перечислены по часовой стрелке). Пусть A_2 — точка пересечения BC и B_1C_1, B_2 — точка пересечения CA и C_1A_1, C_2 – точка пересечения AB и A_1B_1. Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ — правильный.

4. Пусть M и K — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$.

(а) Найдите угол между прямыми AM и BK;

(б) P — точка пересечения отрезков AM и BK. Докажите, что площадь треугольника ABP совпадает с площадью четырёхугольника $MDKP$.

5. Внутри квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P. Через вершины A, B, C и D проведены перпендикуляры к прямым PB, PC, PD, PA соответственно. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

6. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

7. Внутри правильного треугольника ABC выбрана точка M так, что квадрат расстояния до точки A равен сумме квадратов расстояний до точек B и C. Найдите угол BMC.

8. Даны две концентрические окружности. Постройте квадрат так, чтобы две его смежные вершины лежали на одной окружности, а две другие — на другой.

9. На каждой из сторон квадрата отметили по точке. После чего сам квадрат стерли. С помощью циркуля и линейки восстановите квадрат.

16 июля. Рациональность и иррациональность

Определения. *Рациональное число* — это действительное число, которое можно представить в виде отношения целого и натурального числа. *Иррациональное число* — это действительное число, которое нельзя представить в виде отношения целого и натурального числа. Множество рациональных чисел обозначается символом $\mathbb{Q}$, вещественных — $\mathbb{R}$. Соответственно, множество иррациональных чисел — это $\mathbb{I} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Упр. 1. В пустые клетки запишите, может ли результат операции, указанной в первой строке таблицы, быть рациональным или иррациональным:

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a+b}$	$\boldsymbol{ab}$	$\boldsymbol{1/a}$
$\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}$	$\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}$			
$\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}$	$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.			
$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.	$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$			

1. Доказать, что числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{p}$ иррациональны (p — натуральное число, не являющееся точным квадратом).

2. Иррационально ли число **(а)** $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}+\sqrt{5}$;

(б) $\sqrt{5\sqrt{2}-1}+(\sqrt{2}-3)\sqrt{\sqrt{2}+1}$?

3. Докажите, что **(а)** в прямоугольном треугольнике с углом $30°$ в вершине, **(б)** в равнобедренном треугольнике с углом $30°$ в вершине все стороны не могут быть целыми.

4. Докажите, что всякое рациональное число записывается либо конечной десятичной дробью, либо бесконечной периодической десятичной дробью.

5. Докажите, что всякая конечная или периодическая десятичная дробь представляет собой рациональное число.

6. Найдите такие цифры a и b, для которых $\sqrt{0,aaaa\ldots}=0,bbbb\ldots$

7. Докажите, что дробь является иррациональным числом:

(а) $0{,}11010010001000010000010000000\ldots$; **(б)** $0{,}123456789101112131415\ldots$.

8. **(а)** Привести пример такого положительного a, что $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=1$. **(б)** Может ли такое a быть рациональным числом?

9. Существует ли такое целое число n, что число $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}$ рационально?

10. Докажите, что если два приведенных квадратных уравнения с целыми коэффициентами имеют общий нецелый корень, то эти уравнения совпадают.

16 июля. Экстремальные свойства графов

Символом K_m будем обозначать полный граф на m вершинах. Треугольником назовем тройку вершин графа, попарно соединённых ребрами.

1. Докажите, что в двудольном графе на n вершинах не более $\frac{n^2}{4}$ ребер.

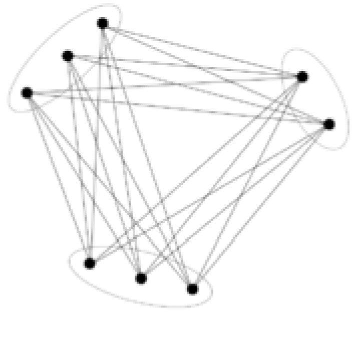
2. Максимальное возможно число рёбер в графе на n вершинах, не содержащем треугольника в качестве подграфа, равно $\left[\frac{n^2}{4}\right]$. Докажите это по индукции **(а)** для чётных n, **(б)** для нечётных n.

3. В классе 17 учеников. Известно, что среди любых трёх учеников найдутся хотя бы два друга. Докажите, что в классе есть ученик, у которого не менее 8 друзей.

4. На конгресс приехало 100 учёных, каждый из которых сделал доклад. По окончании конгресса каждый заявил, что ему понравилось ровно 75 докладов, сделанных его коллегами. Докажите, что найдутся трое, каждому из которых понравились доклады двух других.

5. За круглым столом сидит 11 человек. Разрешается поменять местами любых двух людей, сидящих рядом. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?

6. В графе на $2n$ вершинах n^2+1 ребро. Докажите, что в этом графе есть **(а)** хотя бы один треугольник, **(б)** хотя бы n треугольников.



7. **(а)** Докажите, что полном $(m-1)$-дольном графе на n вершинах с максимальным количеством ребер доли почти равны (т.е., размеры долей которого отличаются не более чем на 1);

(б) Докажите, что в графе на n вершинах без подграфа K_m $(n\geq m-1)$ с максимальным возможным числом рёбер найдётся подграф K_{m-1}.

(в) Докажите, что в графе из предыдущего пункта столько же рёбер, сколько в полном $(m-1)$-дольном графе на n вершинах с почти равными долями.

17 июля. Движения

Опр. 1. *Движением* называется биективное отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.

Опр. 2. *Осевой симметрией* S_l относительно оси l называется такое преобразование плоскости, при котором каждая точка A переходит в точку A' такую, что прямая l является серединным перпендикуляром к отрезку AA'.

Опр. 3. *Параллельным переносом* $T_{\vec{a}}$ на вектор $\vec{a}$ называется такое преобразование плоскости, при котором каждая точка A переходит в точку A' такую, что $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$.

1. Докажите, что осевая симметрия и параллельный перенос являются движениями.

2. Докажите, что при движении **(а)** прямые переходят в прямые; **(б)** сохраняются углы.

3. Какие прямые переходят в себя при **(а)** параллельном переносе, **(б)** осевой симметрии?

4. Докажите, что выпуклый четырёхугольник, имеющий ось симметрии, является либо вписанным, либо описанным.

При решении задачи бывает полезно сдвинуть, повернуть или отразить часть чертежа, чтобы в результате этого дополнительного построения возникла полезная для решения фигура.

5. Постройте ромб так, чтобы одна из его диагоналей была равна данному отрезку r и лежала бы на данной прямой a, а две другие вершины лежали на данных прямых b и c.

6. Даны две окружности и прямая. Параллельно данной прямой провести прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

7. Точка M лежит на диаметре AB окружности, хорда CD пересекает AB в точке M под углом $45°$. Докажите, что $CM^2 + DM^2 = 2R^2$.

8. Даны две окружности, каждая из которых проходит через центр другой. Через точку пересечения окружностей проведена прямая, пересекающая их вторично в точках M и N. Доказать, что угол между касательными в точках M и N равен $60°$.

9. Докажите, что среди всех треугольников, вершины которых лежат по одной на сторонах данного остроугольного треугольника ABC наименьший периметр имеет тот, который образован основаниями высот треугольника ABC.

19 июля. Ещё раз о бесконечности и о процессах

1. В последовательности цифр $1, 1, 4, 6, 1, 1, 8, 0, 9, \ldots$ каждая цифра, начиная с четвёртой, равна последней цифре суммы трёх предыдущих.

(а) Докажите, что какая-нибудь комбинация из трёх цифр в этой последовательности встретится бесконечное число раз.

(б) Докажите, что можно найти повторяющуюся комбинацию среди первых 1003 цифр этой последовательности.

(в) Встретятся ли в этой последовательности ещё раз цифры $1, 1, 4$, идущие подряд?

(г) Встретятся ли цифры $1, 8, 2$, идущие подряд?

(д) Встретятся ли цифры $2, 7, 4$, идущие подряд?

2. (а) По кругу стоит несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т.д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков. **(б)** Обязательно ли повторится начальное расположение шариков, если раскладывать шарики начиная не со следующей, а с текущей коробочки?

3. **(а)** Докажите, что есть сколь угодно длинная группа подряд идущих составных чисел. **(б)** Найдется ли бесконечная группа подряд идущих составных чисел?

4. Докажите, что среди цифр в десятичной записи $\sqrt{2}$ есть две цифры, каждая из которых встречается бесконечно много раз.

5. Докажите, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет рациональным числом.

6. Полоса — это часть плоскости между двумя параллельными прямыми. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос?

7. Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей парабол?

8. **(а)** Докажите, что из любых 101 целых чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 100. **(б)** Докажите, что из любых 101 действительных чисел на отрезке $[0,1]$ можно выбрать несколько, сумма которых отличается от целого числа не более чем на $1/100$.

9. В целых точках прямой расположены ямы, шириной $0{,}01$ каждая. Длина прыжков точечного зайца, прыгающего по прямой в одном и том же направлении, постоянна и равна $\sqrt{2}$. Докажите, что заяц рано или поздно попадёт в яму.

10. Коля Васин задумал написать программу, которая дала бы возможность компьютеру печатать одну за другой цифры десятичной записи числа $\sqrt{2}$. Докажите, что даже если бы машина не ломалась, то Колина затея всё равно бы не удалась, и рано или поздно компьютер напечатал бы неверную цифру.

19 июля. Сумма Минковского

1. Вася выписал на доску 10 различных чисел белым мелом и 20 различных чисел красным мелом. После этого Петя выписал всевозможные суммы $a+b$, где a — белое число, b — красное.

(а) Докажите, что у Пети получилось не менее 29 различных чисел.

(б) Возможно ли, что у Пети получилось ровно 29 различных чисел?

(в) Какое максимальное количество различных чисел могло получиться у Пети?

Опр. Пусть A и B — два множества точек плоскости (прямой). Их *суммой Минковского* $A+B$ называют множество, состоящее из концов всех векторов вида $a+b$, отложенных от начала координат, где конец вектора a принадлежит A, а конец b принадлежит B. Обозначим через λA множество, состоящее из концов всех векторов вида λa, отложенных от начала координат, где конец а принадлежит A.

2. Нарисуйте сумму Минковского следующих множеств: **(а)** квадрата и точки; **(б)** двух параллельных отрезков; **(в)** двух непараллельных отрезков; **(г)** трёх попарно непараллельных отрезков; **(д)** двух кругов одного радиуса; **(е)** двух окружностей разных радиусов; **(ж)** круга и треугольника.

3. Докажите, что сумма Минковского фигур не изменяется при параллельном переносе слагаемых.

4. **(а)** Докажите, что $\frac{1}{2}\big(A+(-A)\big)$ центрально симметрично. **(б)** Докажите, что множество всех середин отрезков, один конец которых принадлежит A, а другой B, есть $\frac{1}{2}(A+B)$.

5. Пусть A — треугольник. Каким многоугольником может быть $\frac{1}{2}\big(A+(-A)\big)$?

6. Докажите, что сумма Минковского выпуклых фигур выпукла.

7. Назовём ε–окрестностью фигуры множество всех точек плоскости, находящихся на расстоянии, не большем ε от какой-либо точки этой фигуры ($\varepsilon > 0$). **(а)** Докажите, что ε окрестность выпуклого многоугольника A есть $A+\varepsilon B$, B — единичный круг.
(б) Найдите площадь и периметр ε-окрестности выпуклого многоугольника площади S и периметра P.

8. Докажите, что любой выпуклый четырёхугольник представляется в виде суммы Минковского двух треугольников либо треугольника и отрезка либо двух отрезков.

9. Докажите, что выпуклый многоугольник имеет центр симметрии тогда и только тогда, когда его можно представить в виде суммы Минковского нескольких отрезков.

19 июля. Разнобой по алгебре

1. Найдите значение выражения a^3+b^3+12ab, если известно, что $a+b=4$.

2. Известно, что $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=3$. Найдите значение выражения $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

3. Пусть $f(x)=x^2-2x$. Решите неравенство $f\big(f(x)\big)<48$.

4. Известно, что x, y и z — целые числа и $xy+yz+zx=1$. Докажите, что число $(1+\ x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ является квадратом натурального числа.

5. Имеются два автомата. Первый в обмен на две карточки с написанными на них числами выдает карточку с произведением этих чисел (например, в обмен на карточки с числами 2 и 3 выдает карточку с числом 6). Второй в обмен на карточку с написанным числом выдает карточку с числом, на единицу большим (например, в обмен на карточку с числом 0,5 выдает карточку с числом 1,5). У Пети есть карточки с числами x и y. Как ему с помощью этих двух автоматов получить карточку с числом $xy+x+2y+3$?

6. Пусть $x\le y\le z$ — вещественные числа такие, что $xy+yz+zx=1$. Докажите, что $xz<1/2$.

7. Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму до конца пути оставалось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому до конца пути оставалось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?

8. Какие значения может принимать выражение $(x-y)(y-z)(z-x)$, если известно, что выполняется равенство $\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$?

20 июля. Композиция движений

Упр 1. Известно, что $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+1$. Решите неравенства: **(а)** $f\big(g(x)\big)<1$; **(б)** $g\big(f(x)\big)<1$.

Композицией отображений $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ называется такое отображение $h\colon X\to Z$, что $h(x)=g\big(f(x)\big)$. Обозначение: $h=g\circ f$. (То есть композиция $g\circ f$ состоит в последовательном применении отображений f и g).

Упр 2. Укажите неподвижные точки при параллельном переносе, повороте, осевой симметрии. Каково взаимное расположение прямой и её образа при переносе, повороте, осевой симметрии?

1. Докажите, что композиция движений является движением.

2. Найдите композицию двух осевых симметрий: **(а)** с параллельными осями, **(б)** с пересекающимися осями.

3. Докажите, что всякий параллельный перенос можно представить в виде композиции двух осевых симметрий с параллельными осями, перпендикулярными направлению переноса, причём в качестве первой оси можно взять произвольную прямую, перпендикулярную вектору переноса.

4. Докажите, что всякий поворот можно представить композицией двух осевых симметрий, оси которых пересекаются в центре поворота, причём первая прямая выбирается произвольно, а вторая образует с первой угол, равный половине угла поворота.

5. Можно ли осевую симметрию разложить в композицию **(а)** двух параллельных переносов, **(б)** двух поворотов?

6. Докажите, что композиция осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии, не является ни поворотом, ни параллельным переносом, ни осевой симметрией. Коммутативна ли эта композиция?

Движение, описанное в задаче 6, называется *скользящей симметрией*.

7. Докажите, что композиция осевой симметрии и параллельного переноса на произвольный вектор, является скользящей симметрией.

8. Найдите композицию двух поворотов, если: **(а)** центры поворотов совпадают; **(б)** центры поворотов различны, а сумма углов поворота равна $0°$ или $360°$; **(в)** центры поворотов различны, а сумма углов поворота не равна $0°$ или $360°$.

9. Заполните таблицу композиций движений:

композиция	T	R	S
T			
R			
S			

20 июля. Усреднение

1. Перед походом в музей всех школьников выстроили парами: мальчик-девочка. Оказалось, что в каждой паре мальчик выше девочки. Можно ли усадить их все за парты так, чтобы за каждой партой сидела пара мальчик-девочка, но девочка была выше мальчика?

2. Во отряде 11 восьмиклассников. В течении 25-дневной смены Дмитрий Николаевич каждый день назначал пятерых дежурных из отряда. Докажите, что какие-то два восьмиклассника были вместе на дежурстве не менее 5 раз.

3. Имеется набор натуральных чисел, причём сумма любых семи из них меньше 15, а сумма всех чисел из набора равна 100. Какое наименьшее количество чисел может быть в наборе?

4. Можно ли расставить в клетках квадрата 4×4 натуральные числа от 1 до 16 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была в два раза меньше, чем в каком-нибудь столбце? (Один и тот же столбец может относиться к нескольким строкам!)

5. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Оксана хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое число совпадающих бусинок Оксана может гарантированно получить?

6. Дан граф, в котором m ребер. Докажите, что в нем существует двудольный подграф хотя бы с $\frac{m}{2}$ ребрами.

7. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые несколько из них перевести вперёд. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

8. По кругу выписаны числа $1, 2, 3, \dots, 10$ в некотором порядке. Петя вычислил 10 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшее из вычисленных чисел. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?

9. Пусть в графе с n вершинами ровно m треугольников. Докажите, что существует вершина степени не меньше, чем $\sqrt{\frac{6m}{n}}$.

20 июля. Разнобой по теории чисел

1. Пусть $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, $\tau(n)$ — количество положительных делителей, а $\sigma(n)$ их сумма.

(а) Докажите, что $\tau(n) = (a_1 + 1) \times \ \ldots \ \times (a_n + 1)$.

(б) Докажите, что $\sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{p_n^{a_n+1}-1}{p_n-1}$.

(в) Пусть $(m, n) > 1$. Сравните $\tau(mn)$ и $\tau(n) \times \tau(m)$.

2. Можно ли расставить по кругу 333 различных натуральных числа так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

3. Натуральные числа m и n таковы, что $2^m + 3^n$ делится на 5. Докажите, что $2^n + 3^m$ делится на 5.

МТФ. $a^p \equiv a \pmod p$, p — простое.

4. Дана последовательность $a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Существуют ли пять идущих подряд её членов, кратных 625?

5. Докажите, что существует бесконечно много составных чисел вида: **(а)** $10^n + 3$; **(б)** $(4^n + 1)^2 + 4$.

6. Можно ли вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 56!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

7. (а) Число $n!$ разложено в произведение простых чисел: $n! = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$. Докажите равенство

$$a_1 = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots.$$

(б) На какую максимальную степень 2 делится $1000!$ нацело?

8. В произведении $1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \ \cdot n$ разрешается приписать некоторым сомножителям восклицательный знак (при этом сомножитель k заменяется на $k!$). При каких n в результате можно получить точный квадрат?

21 июля. Лексикографический порядок

Аксиома индукции. В каждом непустом подмножестве натуральных чисел есть наименьший элемент.

Принцип минимального контрпримера. Если утверждение зависит от натурального параметра n, то либо оно верно для всех n, либо есть наименьшее n, для которого утверждение неверно.

Пример. В бесконечной последовательности каждый член равен сумме двух предыдущих, а первый член равен 2019. Докажите, что в последовательности нет двух соседних членов, кратных 5.

Опр. (*лексикографический порядок*). Пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ и $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ — две числовые строки длины m. Скажем, что $A < B$ (A *лексикографически меньше* B, B *мажорирует* A), если $a_1 < b_1$ либо $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$ либо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 < b_3$ и т.д.

$\mathbb{N}_m$ — множество строк натуральных чисел длины m.

Теорема. Рассмотрим непустое множество строк из натуральных чисел длины m.

(a) если $A > B$, $B > C$, то $A > C$.

(b) строго убывающая последовательность строк длины m всегда конечна.

(c) в каждом непустом множестве строк из натуральных чисел длины m есть наименьший элемент.

Таким образом, мы может упорядочить непустое множество строк из натуральных чисел длины m. Такой порядок называется лексикографическим. Свое название лексикографический порядок получил по аналогии с сортировкой по алфавиту в словаре.

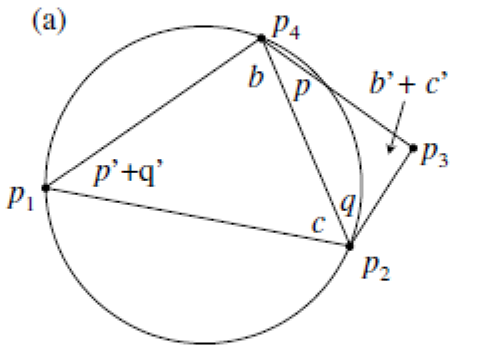
1. В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, \ldots, 2019$. Если найдутся два числа рядом, при этом правое меньше левого, компьютер меняет их местами. Докажите, что в каком бы порядке мы не меняли, числа рано или поздно станут по возрастанию.

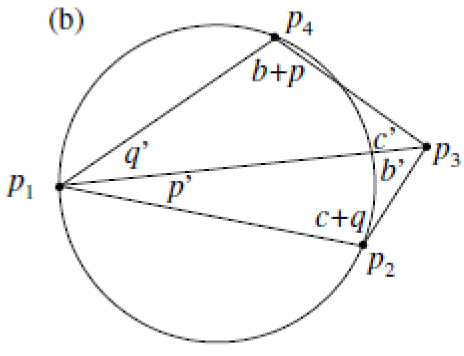
2. *Алгоритм построения триангуляции Делоне.* Дано множество точек общего положения на плоскости.

(а) Докажите, что любое конечное множество точек плоскости допускает по крайней мере одну триангуляцию.

(б) Докажите, что в любой триангуляции фиксированного множества точек общего положения одно и то же количество m треугольников.

(в) Если два треугольника триангуляции имеют общую сторону и их объединение – выпуклый четырёхугольник, то замена проведенной диагонали четырёхугольника другой называется *флипом*. Докажите, что если триангуляция точек общего положения не является триангуляцией Делоне, то в ней возможно сделать хотя бы один флип плохого ребра.





(г) Рассмотрим величины углов треугольников триангуляции и отсортируем их в порядке неубывания. Получится строка длины $3m$, назовем ее вектором углов. Докажите, что флип плохого ребра лексикографически увеличивает вектор углов.

(д) Докажите, что любую триагнуляцию точек общего положения можно конечным числом флипов ребер перестроить в триангуляцию Делоне.

(е) Докажите, что любую триангуляцию n точек общего положения на плоскости можно перестроить в любую другую, проделав не более n^2 флипов рёбер.

3. В колоде несколько карт лежат рубашкой вверх, остальные — рубашками вниз. Время от времени Петя выбирает пачку из несколько карт подряд, в которой первая и последняя карты лежат рубашкой вниз, вынимает ее, переворачивает, и вставляет в то же место (пачка может состоять и из одной карты рубашкой вниз). Докажите, что рано или поздно все карты в колоде лягут рубашкой вверх.

4. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, причём каждый оказался не на своём месте. Билетёр может менять местами любых двух соседей, сидящих не на своих местах, и так много раз (но не может пересаживать зрителя, уже попавшего на свое место). Докажите, что при любой начальной рассадке билетёр может действовать так, чтобы все расселись по своим местам.

21 июля. Функция Эйлера

Опр. Функция Эйлера $\varphi(n)$ — количество взаимно простых с n натуральных чисел, не превосходящих n.

1. Найдите: $\varphi(18)$; $\varphi(125)$; $\varphi(p)$, где p — простое; $\varphi(p^b)$, где p — простое.

2. Докажите, что $(a, mn) = 1$ тогда и только тогда, когда $(a, n) = 1$ и $(a, m) = 1$.

3. Пусть m, n — взаимно простые натуральные числа. Строки таблицы пронумерованы числами от 0 до $n-1$, а столбцы — от 0 до $m-1$. На пересечении строчки j и столбика i записывается остаток от деления числа $in + jm$ на mn.

(а) Докажите, что все числа в таблице будут различны. Как эти числа связаны с mn?

(б) Сколько взаимно простых с n и m номеров строк и столбцов соответственно?

(в) Где в этой таблице числа, взаимно простые с mn? Докажите, что $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. (мультипликативность функции Эйлера).

(г) Докажите формулу Эйлера:

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{a_1 - 1} \times \ldots \times (p_k - 1)p_k^{a_k - 1} = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

(д) Докажите, что $\varphi(n^b) = n^{b-1}\varphi(n)$.

4. Найдите все такие x, что: **(а)** $\varphi(x) = 6$; **(б)** $\varphi(x) = 20$.

5. Решите уравнения: **(а)** $x = 2\varphi(x)$; **(б)** $x = 3\varphi(x)$; **(в)** $x = 4\varphi(x)$; **(г)** $\varphi(3^x 5^y) = 600$.

6. Рассмотрим ряд дробей: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на их НОД. **(а)** Сколько будет дробей со знаменателем d, где d — делитель n? **(б)** Пусть $d_1, \ldots, d_s$ — все делители числа n. Докажите тождество Эйлера-Гаусса: $\varphi(d_1) + \cdots + \varphi(d_s) = n$.

7. Окружность разделена n точками на n равных частей. Сколько можно составить различных замкнутых ломаных из n равных звеньев с вершинами в этих точках?

21 июля. Бесконечные конструкции

1. Кузнечик стартует с точки 0 и скачет по целым точкам числовой прямой. Длина его прыжка не превышает 100.

(а) Может ли кузнечик побывать ровно по одному разу во всех точках от (-100000) до 100000?

(б) Можно ли придумать алгоритм, который позволит кузнечику побывать ровно по одному разу во всех точках числовой прямой?

2. (а) Существует ли последовательность натуральных чисел, где каждый член делится на сумму любого подмножества чисел с меньшими номерами?

(б) Существует ли строго возрастающая последовательность натуральных чисел, где каждый член не делится на сумму любого подмножества чисел с меньшими номерами?

3. (Диагональный метод Кантора.) Дана последовательность бесконечных двоичных дробей. Постройте ещё одну такую дробь, отличную от всех дробей последовательности.

4. Замостите плоскость прямоугольниками $m \times n$, использовав прямоугольник каждого размера ровно один раз.

5. Замостите плоскость полосками $1 \times n$, использовав полоску каждого размера ровно один раз.

6. Старательный Рома построил последовательность из 2019 различных натуральных чисел, где для любого $k \leq 2019$ сумма первых k чисел делилась на k. Докажите, что Леня сможет продолжить последовательность до бесконечности с сохранением условия о делимости и так, чтобы каждое натуральное число встретилось ровно один раз.

22 июля. Двоичные коды и XOR

1. Как разложить по наименьшему числу кошельков 127 рублевых монет так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков?

2. Разрежьте по клеточкам квадрат 7×7 на девять прямоугольников (не обязательно различных), из которых можно будет сложить любой прямоугольник со сторонами, не превосходящими 7.

3. В наборе имеются гири массой 1 г, 2 г, 4 г, ... (все степени числа 2), причём среди гирь могут быть одинаковые. На две чашки весов положили гири так, чтобы наступило равновесие. Известно, что на левой чашке все гири различны. Докажите, что на правой чашке не меньше гирь, чем на левой.

4. С числом разрешается производить две операции: “увеличить в два раза” и “увеличить на 1”. За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить: **(а)** число 100; **(б)** число n?

5. Сколькими способами можно расставить в клетки квадрата 2019×2019 числа 1 и 0 так, чтобы XOR чисел в каждой строке и в каждом столбце равнялся 0?

6. (а) Назовём множество последовательностей из 0 и 1 длины 4 хорошим, если любые два его элемента отличаются хотя бы в 3 позициях. Существует ли хорошее множество из трёх элементов?

(б) Назовём множество последовательностей из 0 и 1 длины n хорошим, если любые два его элемента отличаются хотя бы в k местах. Докажите, что в хорошее множество мощности 3 можно добавить элемент, чтобы оно осталось хорошим.

7. Фокусник и ассистент показывают удивительный фокус. Зрители произвольным образом раскладывают чёрно-белые фишки (с одной стороны чёрные, с другой белые) в клетки прямоугольной доски (по одной фишке в клетку) и загадывают одну из фишек, показывая на неё ассистенту. Затем ассистент переворачивает любую фишку, после чего к доске подходит фокусник (который не видел всего происходящего до этого момента) и отгадывает фишку, загаданную зрителями! Приведите алгоритм, по которому могли работать фокусник и ассистент: **(а)** для доски 2×2; **(б)** для доски 4×4. **(в)** Докажите, что не существует алгоритма при размере доски 1×3.

22 июля. Классификация движений

1. Докажите, что композицией двух поворотов, центры которых различны, а сумма углов не равна $0°$ или $360°$, является поворот. Укажите центр этого поворота.

2. Докажите, что композиция осевой симметрии и параллельного переноса на произвольный вектор является скользящей симметрией.

3. Замечание. При композиции трёх движений f, g, h выполняется равенство: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Движения первого рода	Движения второго рода
Поворот	Осевая симметрия
Параллельный перенос	Скользящая симметрия

4. Докажите, что движение задается образами трёх точек, не лежащих на одной прямой. Т.е. если для движений f и g и трёх точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, выполнено $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$, $f(C) = g(C)$, то для любой точки M плоскости $f(M) = g(M)$.

5. Докажите, что любое движение разлагается в композицию не более чем трёх осевых симметрий.

6. Докажите, что композиция трёх осевых симметрий с параллельными осями является осевой симметрией.

7. Докажите, что композиция трёх осевых симметрий с произвольными осями равна композиции трёх осевых симметрий, среди осей которых есть параллельные (или совпадающие) прямые.

8. ***Теорема Шаля.*** Всякое движение первого рода есть перенос или поворот. Всякое движение второго рода — это осевая симметрия или скользящая симметрия.

Математические соревнования

12 июля. Внутренний матбой обычных групп М8

Матбой высшая лига

1. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I. Стороны AB, BC, CD и DA касаются окружности в точках K, L, M и N, соответственно. Точки P, Q, R и S середины сторон NK, KL, LM и MN. Докажите, что если четырёхугольник $PQRS$ прямоугольник, то $ABCD$ вписанный четырёхугольник.

2. Известно, что $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что $ab + ac + bc \geq 3$. Все числа положительны.

3. В остроугольном треугольнике одна из сторон равна опущенной на нее высоте. Как такой треугольник разрезать двумя прямолинейными разрезами ровно на четыре части, из которых можно сложить квадрат?

4. На доске записано 2019 чисел. Валерий суммирует всевозможные произведения из нечётного количества этих чисел, а Евгений – из чётного. В итоге, если из результата Валерия вычесть результат Евгения, то получится единица. Докажите, что среди выписанных чисел хотя бы одно равно 1.

5. Назовём четвёрку подряд идущих натуральных чисел чудесной, если каждое из них делится на сумму своих цифр. Докажите, что найдется бесконечно много чудесных четвёрок.

6. На клетки шахматной доски 2019×2019 выставляют фишки. На свободную клетку можно поставить очередную фишку, только если рядом есть две соседние по стороне пустые клетки. Какое максимальное количество фишек можно расположить на доске?

7. На окружности отмечено 2019 точек. 1009 из них покрашены в красный цвет, а остальные 1010 — в синий. Назовем разбиение плоскости прямыми удивительным, если ни одна отмеченная точка не лежит на прямой и в каждой области находятся точки только одного цвета. Какого минимального количества прямых будет достаточно, чтобы при любом расположении точек, положив данные прямые на плоскость каким-то образом, можно получить удивительное разбиение?

8. Пафнутий и Волибор играют в игру. Пафнутий ходит первым. За каждый ход игрок кладет красную или синюю фишку на свободную клетку шахматной доски 2019×2019. Выигрывает тот, после чьего хода впервые образовался вертикальный, горизонтальный или диагональный ряд из трёх стоящих рядом одноцветных фишек. Если такой ряд не образовался, то объявляется ничья. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия?

Матбой суперлига

1. Отрезок NO — является высотой параллелограмма $MNPK$, опущенной на сторону MK. На отрезке NO отмечена точка E так, что окружность с диаметром EK проходит через середину отрезка MN. Докажите, что треугольник PEK — равнобедренный.

2. Найдите все положительные решения уравнения:

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right).$$

3. В остроугольном треугольнике одна из сторон равна опущенной на нее высоте. Как такой треугольник разрезать двумя прямолинейными разрезами ровно на четыре части, из которых можно сложить квадрат?

4. На доске записано 2019 чисел. Валерий суммирует всевозможные произведения из нечётного количества этих чисел, а Евгений — из чётного. В итоге, если из результата Валерия вычесть результат Евгения, то получится единица. Докажите, что среди выписанных чисел хотя бы одно равно 1.

5. Назовём четвёрку подряд идущих натуральных чисел чудесной, если каждое из них делится на сумму своих цифр. Докажите, что найдется бесконечно много чудесных четвёрок.

6. На клетки шахматной доски 2019×2019 выставляют фишки. На свободную клетку можно поставить очередную фишку, только если рядом есть две соседние по стороне пустые клетки. Какое максимальное количество фишек можно расположить на доске?

7. На плоскости отмечено 2019 точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой), 1009 из них покрашены в красный цвет, а остальные 1010 — в синий. Назовем разбиение плоскости прямыми удивительным, если ни одна отмеченная точка не лежит на прямой и в каждой области находятся точки только одного цвета. Какое минимального количества прямых будет достаточно, чтобы при любом расположении точек, положив данные прямые на плоскость каким-то образом, можно получить удивительное разбиение?

8. Пафнутий и Волибор играют в игру. Пафнутий ходит первым. За каждый ход игрок кладет красную или синюю фишку на свободную клетку шахматной доски 2019×2019. Выигрывает тот, после чьего хода впервые образовался вертикальный, горизонтальный или диагональный ряд из трёх стоящих рядом одноцветных фишек. Если такой ряд не образовался, то объявляется ничья. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия?

16 июля. Матбой М7–М8

1. На шахматной доске расставили поровну белых, синих и красных ладей. Известно, что никакие разноцветные ладьи друг друга не бьют. Какое наибольшее число ладей может стоять на доске?

2. На столе стоят n^2 банок, образуя квадрат $n \times n$ $(n > 1)$. Известно, что в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду и двух диагональных рядах общий объем воды в банках равен 1 литру. При каких n можно однозначно определить суммарный объем воды в четырёх угловых банках?

3. Верно ли, что из любых десяти различных двузначных натуральных чисел можно выделить две непересекающихся группы чисел с одинаковой суммой?

4. Ребра полного графа на n вершинах $(n \geq 3)$ окрашены в n цветов. Докажите, что в графе найдется треугольник с разноцветными ребрами.

5. Есть 9 карточек с цифрами $1, 2, \dots, 9$. Из них произвольным образом выбирают n карточек. При каких n из них гарантированно можно выбрать две карточки таким образом, чтобы образованное ими двузначное число делилось на 7?

6. В равностороннем треугольнике ABC на продолжении стороны AB за точку B отметили точку D, а на продолжении BC за точку B отметили точку E так, что $AD = BE$. Докажите, что $CD = DE$.

7. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали многоугольник. Всегда ли можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий его прямоугольник того же периметра?

8. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 210 становится составным.

16 июля. Матбой М8–М9

1. Число считается счастливым, если равняется частному от деления некоторого натурального числа x на количество делителей x. Является ли число 18 счастливым?

2. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Пусть D, E и F — середины AB, AC и AH, соответственно, P и Q — образы точек B и C, при центральной симметрии относительно F. Докажите, что PE и QD пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

3. Для попарно различных неотрицательных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} > 2.$$

4. В каждой клетке шахматной доски $n \times n$ записано число таким образом, что суммы чисел по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям равны одному и тому же числу S. При каких n можно определить, чему равна сумма чисел в угловых клетках.

5. Для нечётного k, натурального n и целых a, b, c известно, что $a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka$. Докажите, что $a = b = c$.

6. Несколько игроков участвует в соревновании. Каждый сыграл с каждым один раз. Ничьих не бывает. Игрок A считается отличным, если выполняется следующее условие: для любого другого игрока либо A бьёт B, либо существует другой игрок C, который бьёт B, и A бьёт C. Оказалось так, что есть только один отличный игрок. Докажите, что этот игрок победил всех других игроков.

7. Прожектор освещает угол в $90°$. Если он стоит в точке (x_0, y_0), то освещает точки (x, y) с координатами $x \leq x_0$ и $y \leq y_0$. На плоскость в разных точках уже выставили 2019 зеленых прожекторов. Всегда ли можно установить ещё 2018 желтых прожекторов так, что всякая точка плоскости, освещённая $k > 0$ зеленым прожектором, будет освещаться $k - 1$ желтым прожектором.

8. Депутаты в парламенте разделены на 10 фракций. Согласно регламенту, ни одна фракция не может состоять из менее чем пяти человек, и никакие две фракции не могут иметь одинаковое количество членов. После отпуска фракции распались, и вместо них возникло несколько новых (по тому же регламенту). Кроме того, некоторые депутаты стали независимыми. Оказалось, что нет двух депутатов, которые были в одной фракции до отпуска и вошли в ту же фракцию после отпуска. Найдите наименьшее возможное количество независимых депутатов после отпуска.

23 июля. Заключительная олимпиада

1. Старательный мальчик Вася решил исследовать, на сколько меняется сумма цифр числа при его увеличении на 2. С этой целью он для каждого из чисел от 1 до $1\,000\,000\,000$ он выписал в тетрадочку это изменение (например, для числа 15 он выписал 2, а для числа 38 отрицательное изменение (-7)). Чему равна сумма всех выписанных Васей чисел?

2. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD > BC$. Точка E такова, что $BE \perp AD$. Докажите, что $AE + BC \geq DE$.

3. Даны положительные числа $a_1 < a_2 < \cdots < a_{1000}$. Оказалось, что a_k в пять раз больше среднего арифметического всех чисел. Какое наименьшее значение может принимать k?

4. Клетчатый прямоугольник раскрашен в шахматном порядке. Некоторые его клетки отмечены крестиком, причём вместе с любой отмеченной клеткой отмечены и все клетки той же строки, расположенные левее, а также все клетки в том же столбце, расположенные ниже. Оказалось, что среди отмеченных клеток поровну чёрных и белых. Докажите, что фигуру, образованную отмеченными клетками, можно разрезать на прямоугольники 1×2.

---

5. В стране несколько городов, некоторые из которых соединены дорогами с односторонним движением так, что из столицы можно добраться до любого города, не нарушая правил дорожного движения (при этом, возможно, проезжая через другие города). Назовем два нестоличных города близкими, если до них нельзя добраться из столицы по непересекающимися путям. Президент приказал соединить каждые два близких города прямой авиалинией. Оказалось, что теперь между любыми двумя нестоличными городами можно добраться, пользуясь только открытыми авиалиниями. Докажите, что тогда между любыми двумя нестоличными городами есть прямая авиалиния.

6. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки X и Y симметричны точке O относительно середин сторон BC и AD соответственно. Известно, что

$AB = BC = CD$. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырёхугольника лежит на прямой XY.

7. В последовательности целых чисел $a_1, a_2, \ldots$ произведение $a_1 a_2$ отрицательно, а при $n > 2$ для вычисления a_n среди всех пар (i, j), $1 \leq i < j < n$, которые ранее не выбирались, выбирается одна пара (i, j), для которой $a_i + a_j$ имеет наименьшую абсолютную величину, и полагается $a_n = a_i + a_j$. Докажите, что $a_i = 0$ при некотором i.