Лексикографический порядок

6 июля • необычная группа

Определение. Рассмотрим две строки из n натуральных чисел: $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Будем говорить, что A *мажорирует* B (и писать $A \succ B$), если для некоторого номера $1 \leqslant i \leqslant n$ выполнено $a_i > b_i$ и $a_j = b_j$ для $j < i$. Отношение «мажорирует» задаёт на множестве *лексикографический порядок.*

1. Докажите, что

(a) если $A \succ B$, $B \succ C$, то $A \succ C$;

(b) строго убывающая последовательность строк длины n всегда конечна;

(c) в каждом непустом множестве строк длины n есть наименьший элемент.

(d) Аналогично можно определить порядок на множестве бесконечных вправо строк натуральных чисел. Верны ли для него пункты **(a)**, **(b)**, **(c)**?

2. В стране N существуют n различных номиналов монет. В этом году вышел закон, согласно которому каждый житель страны получает ежемесячную зарплату монетами меньшего номинала, чем те, которыми он платил налог в предыдущем месяце. Докажите, что рано или поздно народ разорится.

3. Дана последовательность из бесконечного числа нулей и конечного числа единиц. Если найдется группа вида 01, то ее можно заменить на группу вида $10\ldots0$ с произвольным числом нулей. Докажите, что можно сделать лишь конечное число таких замен.

4. Двое играют в следующую игру. Есть последовательность из n крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые k ($k = 1, \ldots, n$) подряд идущих знака таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней — нолики (допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её (заменить крестик на нолик и нолики на крестики). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?

5. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена с натуральными коэффициентами. Будем говорить, что P асимптотически меньше Q, если $P(x) < Q(x)$ для всех достаточно больших x. Существует ли бесконечная последовательность многочленов P_1, P_2, $\ldots$, в которой каждый следующий асимптотически меньше предыдущего?

6. Малыш и Карлсон делят варенье. Изначально перед ними стоят 239 непустых банок с вареньем. При этом всё имеющееся варенье умещается в любую из банок. Карлсон может в любой момент или съесть содержимое трёх банок и улететь, или выбрать 4 банки и разлить содержимое каждой в два стакана: левый и правый (всего 8 стаканов). После этого Малыш правые стаканы нетождественно переставляет и сливает содержимое обратно в те же банки — содержимое левого с содержимым нового правого. Докажите, что Карлсон сможет съесть не менее 99.99% всего варенья, если на стенках сосудов оно не остаётся.