Серия 12, симедиана

9 июля

1. Дан треугольник ABC, в котором $AC = BC$, и точка P внутри такая, что $\angle PAB = \angle PBC$. Обозначим середину AB через M. Докажите, что $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

2. Три различные точки A, B, C расположены на прямой в указанном порядке. Пусть окружность ω проходит через A и C, и ее центр не лежит на AC. Обозначим через P точку пересечения касательных к ω в точках A и C. Пусть отрезок PB пересекает ω в точке Q. Докажите, что основание биссектрисы угла $\angle Q$ треугольника AQC не зависит от выбора ω.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B и касаются их общей касательной в точках P и Q. Пусть S — точка пересечения касательных в точках P и Q к описанной окружности треугольника APQ, а точка H симметрична B относительно PQ. Докажите, что A, S и H лежат на одной прямой.

4. Дан треугольник ABC. Пусть X — центр поворотной гомотетии, переводящей B в A и A в C. Докажите, что AX содержит семидиану треугольника ABC.

5. Дан треугольник ABC. На стороне BC выбирается точка P. Точки Q и R на AC и AB соответственно таковы, что $PQ \parallel AB$ и $PR \parallel AC$. Докажите, что описанная окружность треугольника AQR проходит через точку X, не зависящую от выбора точки P.

6. Пусть ABC — остроугольный треугольник, M, N, P — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Пусть серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают AM в точках D и E соответственно. Прямые BD и CE пересекаются в точке F внутри треугольника ABC. Докажите, что точки A, N, F, и P лежат на одной окружности.

7. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω в точках B и C пересекаются в T. Точка S на прямой BC такова, что $AS \perp AT$. Точки B_1 и C_1 лежат на прямой ST так, что $B_1T = BT = C_1T$. Докажите, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны.

8. Пусть A — одна из точек пересечения окружностей ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2. Общая касательная к ω_1 и ω_2 касается их в точках B и C. Пусть O_3 — центр описанной окружности треугольника ABC. Обозначим через D такую точку, что A — середина отрезка O_3D. Пусть M — середина O_1O_2. Докажите, что $\angle O_1DM = \angle O_2DA$.