Окружность Аполлония и гармония

17 *июля*

1. (a) На прямой AB отмечена точка E, отличная от середины отрезка AB. Докажите, что существует единственная такая точка $F \neq E$ на прямой AB, что $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AF}{FB}$. (*Такая* четверка точек A, B, E и F называется *гармонической*.) Что происходит в случае, когда E — середина?

(b) На отрезке AB отмечена точка C. Найдите ГМТ X таких, что XC — биссектриса треугольника XAB.

(c) Для двух данных точек A и B постройте ГМТ таких точек X, что $\dfrac{AX}{XB} = k$, где k — некоторое положительное число. Что происходит, когда $k = 1$?

Определение. ГМТ из предыдущей задачи (при $k \neq 1$) называют *окружностью Аполлония*.

2. (a) Пусть AB — диаметр некоторой окружности, а точка D лежит на луче AB вне окружности. DP и DQ — касательные к этой окружности. PQ пересекает AB в точке C. Докажите, что четверка точек A, B, C и D — гармоническая.

(b) Докажите, что для любой точки X этой окружности отрезок XB является биссектрисой треугольника CXD.

3. Через вершину A треугольника ABC проведена касательная к его описанной окружности, которая пересекла прямую BC в точке K. Докажите, что K является центром окружности Аполлония точек B и C, проходящей через точку A.

4. Докажите, что точки пересечения окружности Аполлония для отрезка AB и окружности ω, проходящей через A и B, образуют с точками A и B гармонический четырехугольник.

5. Точки A и B лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды с общим концом.

6. Докажите, что три окружности Аполлония, построенные для любой пары двух вершин и проходящие через третью, пересекаются в двух точках. Такие точки называются *точками Аполлония.*

Замечание. Очевидно, что расстояния от точки Аполлония до вершин обратно пропорциональны противолежащим сторонам. Это равносильное определение.

7. Пусть Ap_1, Ap_2 — точки Аполлония для треугольника ABC. Докажите, что A — точка Аполлония для треугольника Ap_1BC.

8. Докажите, что если L точка Лемуана треугольника ABC, O — центр описанной окружности радиуса R, а Ap_1, Ap_2 — точки Аполлония, то

(a) Ap_1, Ap_2, L лежат на одной прямой;
(b) степень точки O относительно окружностей Аполлония равна R^2;

(c) точки Ap_1, Ap_2, O, L лежат на одной прямой.

9. Четыре шара лежат на плоскости и попарно касаются друг друга. Тогда каждая из точек касания является точкой Аполлония для оставшихся трех точек.