Серия 7, теорема Хелли–1

7 июля

Теорема Хелли для прямой. На прямой дано конечное множество отрезков. Известно, что любые два имеют общую точку. Тогда все отрезки имеют общую точку.

1. Пусть дано множество A точек на прямой, являющееся объединением нескольких отрезков. Докажите, что из этих отрезков можно выбрать несколько так, чтобы выполнялось два условия:

• множество A покрыто этими отрезками;

• никакие три отрезка не имеют общую точку.

2. На прямой дано $2n+1$ отрезков. Известно, что каждый пересекает не менее n других. Докажите, что существует отрезок, пересекающий все остальные.

3. На прямой дано $2n-1$ черных и $2n-1$ белых отрезков. Каждый пересекает хотя бы n отрезков другого цвета. Докажите, что найдется отрезок одного из двух цветов, пересекающий все отрезки другого цвета.

4. Даны несколько прямоугольников с параллельными сторонами. Известно, что любые два имеют общую точку. Докажите, что все прямоугольники имеют общую точку.

5. Дано $[4n/3]$ прямоугольников с параллельными сторонами. Каждый пересекает хотя бы n других. Докажите, что существует прямоугольник, пересекающий все остальные.

6. Пусть на прямой даны $nk+1$ отрезок. Докажите, что из этих отрезков можно выделить или $n+1$ попарно непересекающихся, или $k+1$, имеющих общую точку.

7. На плоскости дано конечное множество квадратов A с параллельными сторонами. Докажите, что можно выделить подмножество B множества A так, чтобы квадраты из B не пересекались, а также квадраты B, раздутые в 3 раза, покрывали A.

8. На плоскости дано конечное множество A квадратов с параллельными сторонами. Докажите, что можно выкинуть часть квадратов так, чтобы оставшиеся покрывали все центры квадратов из множества A, а также никакая точка плоскости не была покрыта более 4-х раз.

9. На плоскости дано несколько единичных квадратов с параллельными сторонами. Пусть площадь, которую они покрывают, равна S. Докажите, что можно выкинуть часть квадратов так, чтобы оставшиеся не пересекались и покрывали площадь, не меньшую $S/4$.