Серия 17, двойная добавка

11 июля

1. **(a)** На окружности ω отмечены различные точки A, B, C, D. Точка P не лежит на окружности ω. Прямые PA, PB, PC, PD второй раз пересекают окружность ω в точках A', B', C', D'. Докажите, что $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$.

(b) Докажите, что при инверсии сохраняется двойное отношение четырех точек.

2. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H и пересекают его описанную окружность ω в точках A', B', C'; M — середина BC. Луч MH пересекает ω в точке X. В треугольники $A'B'X$ и $A'C'X$ вписаны окружности с центрами U и V. Докажите, что $UV \parallel BC$.

3. **Теорема о бабочке.** Хорды AC и BD окружности проходят через середину хорды MN. Отрезки AD и BC пересекают отрезок MN в точках X и Y. Докажите, что $XM = YN$.

4. Четыре окружности ω_A, ω_B, ω_C и ω_D касаются окружности ω в точках A, B, C, D соответственно и касаются друг друга по циклу. Все касания внешние. Докажите, что $ABCD$ — гармонический четырёхугольник.

5. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $BD = DE = EC$. Прямая p пересекает отрезки AB, AD, AE, AC в точках K, L, M, N, соответственно. Докажите, что $KN \geqslant 3LM$.

6. Пусть M_1 — точка на стороне AB четырехугольника $ABCD$. Пусть M_2 — проекция M_1 на прямую BC из точки D, M_3 — проекция M_2 на CD из A, M_4 — проекция M_3 на DA из B, M_5 — проекция M_4 на AB из C, и так далее. Докажите, что $M_{13} = M_1$.

7. Дан треугольник ABC и точка M; прямая, проходящая через M, пересекает AB, BC, CA в C_1, A_1, B_1 соответственно. Прямые AM, BM, CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC.

8. Окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q, а также описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке PQ.

9. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Окружность ω_A касается его сторон AB, AC и окружности Ω внутренним образом в точке T (такая окружность, кстати, называется *полувписанной*). Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

(a) Прямые BI, CI второй раз пересекают окружность Ω в точках B_0, C_0 соответственно. Докажите, что четырёхугольник AB_0TC_0 — гармонический.

(b) Докажите, что прямая TI делит дугу BAC пополам.