С целыми коэффициентами

7 июля • необычная группа

1. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, a и b — целые числа. Докажите, что

а) $P(a)-P(b)$ делится на $a-b$.

б) $P(a) \equiv P(a+b) \pmod b$

2. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1)=2019$, $P(2019)=1, P(k)=k$, где k – некоторое целое число. Найдите k.

3. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ — один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность $P(2019)-Q(2019)$ кратна 1009.

4. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1)+P(2)+...+$ $+P(n)$ делится на k.

5. Докажите, что для любого непостоянного многочлена $P(x)$ найдется такое натуральное число n, что $P(n)$ – составное число.

6. В равенстве $x^5+2x+3=p^k$ числа x и k — натуральные. Может ли число p быть простым?

7. Докажите, что не существует многочлена степени не ниже двух с целыми коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом.

8. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что задумал приведенный многочлен $P(x)$ степени 2019 с целыми коэффициентами. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \ldots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?