Серия 28, проективные преобразования и окружность

19 июля

Теорема. Дана окружность и точка M **внутри нее**. Тогда существует проективное преобразование, при котором данная окружность переходит в окружность, а точка M — в ее центр.

Теорема. Дана окружность и **не пересекающая ее** прямая ℓ. Тогда существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а ℓ — в бесконечно удаленную прямую.

Пример. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке (*точке Жергона*).

1. (a) Теорема о бабочке. Через середину C хорды AB проведены две хорды KM и LN. Прямые KL и MN пересекают прямую AB в точках D и E. Докажите, что $CD = CE$.

(b) Теорема о двойной бабочке. На окружности S отмечены точки A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4. Прямая ℓ пересекает прямые A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно и прямые B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 в точках X_1, X_2, X_3 соответственно. Докажите, что прямая B_4B_1 проходит через точку X_4.

2. Частный случай т.Паскаля. Дан вписанный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Докажите, что точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой.

3. Частный случай т.Брианшона. Докажите, что главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что точку вне окружности нельзя проективным преобразование перевести в ее центр (переведя при этом окружность в окружность).

5. (a) Даны окружность и точка C внутри(вне) ее. Через точку C проведены четыре хорды A_iB_i. Пусть D – точка пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, E – точка пересечения прямых B_1B_2 и B_3B_4. Докажите, что точки C, D, E лежат на одной прямой.

(b) Если четырехугольник вписан и описан, то прямая, соединяющая центры вписанной и описанной окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.

6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а диагонали AC и BD в точке F. Описанные окружности AFD и BFC пересекаются второй раз в точке H. Докажите, что $\angle EHF = 90°$.

7. Пусть ω описанная окружность прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) с центром в точке O. P произвольная точка на касательной к ω в точке A, D вторая точка пересечения ω и PB. Точка E на CD такова, что $AE \parallel BC$. Докажите, что P, O, E коллинеарны.

8. Пусть D, E, F — точки касания вписанной окружности ω треугольника ABC со сторонами BC, AB, AC соответственно. Точки P и Q на сторонах AB и AC соответственно таковы, что $PQ \parallel BC$ и PQ является касательной к ω. Пусть M середина отрезка PQ, T точка пересечения прямых EF и BC. Докажите, что MT касается ω.