Симедианы

14 *июля*

Во всех задачах этого листочка будут использованы одни и те же обозначения. Буквы, отличные от X, Y и Z (для этих букв обозначения вводятся каждый раз заново), которые определены в задачах, будут использованы в последующих.

В треугольнике ABC проведена медиана BM. Тогда прямая, симметричная относительно биссектрисы угла B этой медиане, называется *симедианой.* Пусть H — ортоцентр этого треугольника, а H_a, H_b, H_c — основания высот из точек A, B и C, ω — его описанная окружность с центром O, пусть K, N — середины AB и BC.

1. Симедиана из вершины B пересекает прямую AC в точке S. Докажите, что

(a) отношения расстояний от точки S до сторон AB и BC равно отношению этих сторон;

(b) $\dfrac{AS}{SC} = \dfrac{AB^2}{BC^2}$.

2. Докажите, что симедианы пересекаются в одной точке L — *точке Лемуана.*

3. Пусть X и Y — основания перпендикуляров, опущенных из точки H_b на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что BM — симедиана треугольника XYB.

4. Прямые BS и BM пересекают окружность ω в точках Q и R соответственно. Докажите, что $MR = MQ$.

5. Первая картинка. (a) Пусть точка P такова, что $\angle PAB = \angle PBC$ и $\angle ABP = \angle BCP$. Докажите, что точка P лежит на симедиане. Почему такая точка всегда существует?

(b) Докажите, что $BKPN$ — вписанный.

6. Вторая картинка. Касательные к ω в точках A и C пересекаются в точке T. Докажите, что BT — симедиана треугольника ABC. Что можно сказать в случае, когда касательные не пересеклись?

Подсказка. Проведите окружность с центром T и радиусом TA, отметьте вторые точки пересечения этой окружности с прямыми AB и BC и докажите, что они лежат на одной прямой с T.

7. Пусть I — инцентр треугольника ABC. Докажите, что симедиана из вершины I треугольника AIC пересекает ω в середин дуги ABC.

8. Оказалось, что $BC \parallel AT$. Докажите, что прямая CQ делит отрезок AT пополам.

9. Высота BH_b пересекает ω в точке B'. Докажите, что точка пересечения ω и описанной окружности треугольника $B'H_bM$, отличная от B', лежит на симедиане.