

Серия 27, цепочки

19 июля

1. Докажите, что в последовательности из 10 чисел есть монотонная подпоследовательность из 4 чисел.

2. Целые точки оси OX раскрашены в два цвета. Докажите, что найдутся три точки одного цвета, одна из которых лежит посередине между двумя другими.

3. В стране две столицы — М. и П. Известно, что длина любого пути между ними не менее 11. Докажите, что все города, кроме столиц, можно разделить на 10 республик так, чтобы любой путь из М. в П. проходил по всем республикам.

4. Докажите, что в последовательности из $nk + 1$ различных чисел найдется возрастающая подпоследовательность из $n + 1$ чисел или убывающая подпоследовательность из $k + 1$ чисел.

5. Петя как-то занумеровал вершины правильного

(a) 1001-угольника числами от 1 до 1001;

(b) 2017-угольника числами от 1 до 2017.

Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины A в вершину B , если между ними не больше 9 других вершин и число в B больше числа в A . Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины?

6. Целые точки плоскости раскрашены в два цвета. Докажите, что найдется равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, параллельными линиям сетки, с вершинами одного цвета.

Подсказка. Попробуйте порешать эту задачу с конца, то есть подумать, как должна выглядеть конструкция, когда какую-то точку нельзя покрасить ни в первый, ни во второй цвета.

Упражнение. Покажите, что на самом деле достаточно раскраски не всей плоскости, а лишь некоторого достаточно большого квадрата.

7. Целые точки плоскости раскрашены в три цвета. Докажите, что найдется равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, параллельными линиям сетки, с вершинами одного цвета.