Серия 11, LTE–2

9 июля

1. Для всех простых p решите уравнение $a^p - 1 = p^k$.

2. Решите в натуральных числах уравнение

$$x^{2009} + y^{2009} = 7^z.$$

3. Пусть p — простое число, а $m > 1, x > 1, y > 1$ — натуральные числа. Оказалось, что $\dfrac{x^p + y^p}{2} = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^m$. Докажите, что $m = p$.

4. Пусть a и b — вещественные числа. Оказалось, что $a - b, a^2 - b^2, a^3 - b^3, \ldots$ — целые числа. Докажите, что a и b целые.

5. Пусть p — простое число, a и n — натуральные числа такие, что $\frac{p^a-1}{p-1} = 2^n$. Каким может быть количество натуральных делителей числа na?

6. Найдите все такие натуральные n, что $\frac{2^n+1}{n^2}$ целое.

7. Решите в натуральных числах уравнение $(n-1)! + 1 = n^k$.

8. На доске написаны n цифр в ряд. Докажите, что к ним можно приписать несколько цифр слева и не более n цифр справа так, чтобы получилась степень двойки.