

Профи–9. Внутренний матбой

12 июля

1. Существует ли такой многочлен $P(x, y)$, что при подстановке всех пар натуральных x и y будут получаться натуральные значения, причём каждое натуральное значение получится ровно один раз?

2. Найдите все вещественные числа x такие, что $4x^5 - 7$ и $4x^{13} - 7$ — точные квадраты.

3. Граф G можно нарисовать на плоскости так, что каждое ребро — отрезок единичной длины (рёбра могут пересекаться и накладываться друг на друга, разные вершины должны соответствовать различным точкам). Может ли оказаться, что в любом таком рисунке найдутся две вершины на расстоянии $\frac{1}{2016}$?

4. Дан остроугольный треугольник ABC с $AB > AC$, пусть M — середина BC . P — точка внутри треугольника AMC такая, что $\angle MAB = \angle PAC$. Пусть O , O_1 , O_2 центры описанных окружностей треугольников ABC , ABP , ACP соответственно. Докажите, что прямая AO делит отрезок O_1O_2 пополам.

5. На плоскости отмечены 2000 точек. Оказалось, что среди любых семи из них есть четыре, лежащие на одной окружности. Докажите, что найдется хотя бы 1000 отмеченных точек, лежащих на одной окружности.

6. Какое наибольшее число шашек можно расставить в клетках таблицы $n \times n$ так, чтобы выполнялось условие: если шашка A находится ниже и правее шашки B , то они находятся в соседних по диагонали клетках.

7. Дан треугольник ABC . На лучах AB и CB выбраны точки L и N соответственно такие, что $AL = CN = p$, где p — полупериметр треугольника ABC . Пусть точка K диаметрально противоположна точке B на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что перпендикуляр из точки K на LN содержит центр вписанной окружности треугольника ABC .

8. Существует ли многочлен $P(x)$ пятой степени, который любое число вида $11 \dots 1$ переводит в число такого же вида?