Серия 21, поляры

14 июля

Определение 1. Точки X и Y называются *полярными* относительно окружности w с центром O радиуса R, если $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}) = R^2$.

Упр. 1. Докажите, что полярны: **(a)** точка на окружности сама себе; **(b)** две инверсные относительно окружности точки; **(c)** точка вне окружности и основание касательной из нее к окружности.

Упр. 2. Дана точка A и окружность ω с центром O. Докажите, что все точки, полярные точке A, лежат на одной прямой a, проходящей через точку A' (A' инверсна A), и $a \perp OA$.

Определение 2. Прямая a, составленная из точек, полярных A, называется *полярой* точки A. Точка A называется *полюсом* прямой a.

Основное свойство поляры. Точка A лежит на поляре точки B. Тогда B лежит на поляре A.

Упр. 3. **(a)** Поляры точек A и B пересекаются в точке C. Чем является поляра точки C?

(b) Дана прямая a и окружность ω. Докажите, что поляры всех точек на a проходят через некоторую точку A.

1. **(a)** Точка A находится вне окружности ω. Докажите, что поляра точки A — это прямая через основания касательных из A к ω.

(b) Через точку X проводится секущая, которая пересекает окружность ω в точках A и B. Докажите, что точка пересечения касательных к ω в точках A и B лежит на поляре X. В частности, все такие точки пересечения пар касательных лежат на одной прямой.

(c) Окружность ω с центром I касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Прямая A_1B_1 пересекается с прямой AB в точке X. Докажите, что точки C, C_1 и основание второй касательной из X к окружности ω лежат на одной прямой.

(d) Докажите, что в предыдущей задаче $IX \perp CC_1$.

2. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их поляры a, b и c пересекаются в одной точке.

3. **(a)** Через точку X проведена прямая, которая пересекает окружность ω в точках A и B, а поляру X — в точке Y. Докажите, что $(X, Y, A, B) = -1$.

(b) **Полярное свойство секущих.** Через точку X провели две прямые, которые пересекли окружность ω в точках A, B и C, D соответственно. Докажите, что точка пересечения AC и BD и точка пересечения AD и BC лежат на поляре точки X.

В следующих трех задачах дан четырехугольник $ABCD$, прямые AB и CD пересекаются в точке P, BC и AD — в точке Q, прямые AC и BD — в точке R.

4. **Теорема Брокара.** Пусть $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Докажите, что поляры точек P, Q и R есть прямые QR, PR и PQ соответственно. Как следствие, точки O, P, Q и R образуют *ортоцентрическую четверку.*

5. Пусть в $ABCD$ вписана окружность ω, которая касается сторон AB, BC, CD и DA в точках K, L, M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке S, а прямые LM и NK — в точке T. Докажите, что тогда

(a) P, Q, S и T лежат на одной прямой;

(b) AC, BD, KM и LN пересекаются в одной точке.

6. Пусть $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Ω с центром O. Докажите, что точки O, I и R лежат на одной прямой.

7. В окружности ω проведены хорда MN и диаметр AB. Прямые AM и BN пересекаются в точке X. Докажите, что перпендикуляр из точки X на диаметр AB проходит через некоторую точку, не зависящую от диаметра AB.

8. Пусть высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X. Докажите, что прямая XH перпендикулярна медиане из вершины C.

9. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1. Оказалось, что прямые BC, B_1C_1 и касательная к описанной окружности ABC в точке A пересекаются в одной точке D. Докажите, что D, центр вписанной окружности I и центр описанной окружности O лежат на одной прямой.