Заключительная олимпиада

23 июля

Карточка участника

Фамилия, Имя ______________________________

1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$

Довывод

1. Существуют ли такие 6 натуральных чисел, что наибольший общий делитель каждых двух из них — простое число, меньшее 26, и при этом каждое такое простое число является наибольшим общим делителем каких-то двух из этих шести чисел?

2. Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n (n \geqslant 2)$ — вещественные числа, большие 1. Пусть $|x_i - x_{i+1}| < 1$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1.$$

3. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки B' и C' симметричны точкам B и C относительно прямых CD и AB соответственно. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников ABC' и $B'CD$, равноудалена от точек A и D.

4. Докажите, что ни при каком натуральном n произведение

$$(1^4 + 1^2 + 1)(2^4 + 2^2 + 1) \ldots (n^4 + n^2 + 1)$$

не является точным квадратом.

5. План картинной галереи — клетчатая фигура, где каждая клетка — это зал, и из любой клетки можно дойти до любой другой, переходя в соседние по сторонам клетки. Смотритель, находясь в одном из залов, следит за всеми залами, в которые можно попасть из этой клетки одним ходом ферзя (не выходя за пределы галереи). Какое наименьшее число смотрителей потребуется, чтобы в любой галерее из n залов $(n > 2)$ все залы оказались под присмотром?

Заключительная олимпиада

23 июля

Вывод

6. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n > 3$. Докажите, что среди них существуют два различных числа a_i, a_j таких, что $a_i + a_j$ не делит ни одно из чисел $3a_1, 3a_2, \ldots, 3a_n$.

7. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — выпуклый n-угольник. Внутри него выбрана точка P такая, что её проекции $P_1, P_2, \ldots, P_n$ на стороны многоугольника лежат на отрезках $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ соответственно. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — точки на отрезках A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 соответственно. Докажите, что

$$\max\left(\frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \frac{X_2X_3}{P_2P_3}, \ldots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1}\right) \geqslant 1.$$

8. В тайном обществе 2020 членов, и у каждого есть счет в банке (на счету целое число рублей, которое может быть отрицательным). Время от времени один из членов общества переводит со своего счета на счет каждого из своих друзей, состоящих в обществе, по 1 рублю. Известно, что с помощью цепочки таких переводов они могут перераспределить имеющиеся на счетах средства произвольным образом. Докажите, что в этом обществе ровно 2019 пар друзей.

Заключительная олимпиада

23 июля

Вывод

6. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n > 3$. Докажите, что среди них существуют два различных числа a_i, a_j таких, что $a_i + a_j$ не делит ни одно из чисел $3a_1, 3a_2, \ldots, 3a_n$.

7. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — выпуклый n-угольник. Внутри него выбрана точка P такая, что её проекции $P_1, P_2, \ldots, P_n$ на стороны многоугольника лежат на отрезках $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ соответственно. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — точки на отрезках A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 соответственно. Докажите, что

$$\max\left(\frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \frac{X_2X_3}{P_2P_3}, \ldots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1}\right) \geqslant 1.$$

8. В тайном обществе 2020 членов, и у каждого есть счет в банке (на счету целое число рублей, которое может быть отрицательным). Время от времени один из членов общества переводит со своего счета на счет каждого из своих друзей, состоящих в обществе, по 1 рублю. Известно, что с помощью цепочки таких переводов они могут перераспределить имеющиеся на счетах средства произвольным образом. Докажите, что в этом обществе ровно 2019 пар друзей.