

Серия 5, асимптотика–1

6 июля

1. У Пети есть бесконечно много одинаковых треугольных салфеток. Докажите, что для достаточно больших R Петя сможет покрыть этими салфетками более 99% площади круглого стола радиуса R (салфетки не перекрываются, не вылезают за край стола, их можно переворачивать).
2. Существует ли квадратный трехчлен, все значения которого в натуральных точках — кубы натуральных чисел?
3. Существует ли многочлен с вещественными коэффициентами, значения которого во всех натуральных числах — степени двойки?
4. Докажите, что для подходящего N уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = N$ имеет не менее 1000 решений в натуральных числах.
5. Верно ли, что из любого числа можно получить квадрат, вставляя в его десятичную запись не более 10 цифр? Цифры можно вставлять в любые места.
6. Все значения унитарного (то есть с коэффициентом 1 при старшей степени) целочисленного многочлена в целых точках — точные квадраты. Докажите, что сам многочлен представим как квадрат некоторого многочлена.
7. Найдите все многочлены, которые в рациональных точках принимают рациональные, а в иррациональных — иррациональные значения.