Серия 2, двойные отношения

5 июля

Определение 1. *Двойным отношением* четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется отношение $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$.

Определение 2. *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых a, b, c, d, называется величина

$$(a,b,c,d) = \frac{\sin\angle(\bar{a},\bar{c})}{\sin\angle(\bar{b},\bar{c})} : \frac{\sin\angle(\bar{a},\bar{d})}{\sin\angle(\bar{b},\bar{d})},$$

где $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d.

1. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке A. На прямой ℓ_1 отмечены точки B_1, C_1, D_1, а на прямой ℓ_2 — точки B_2, C_2, D_2. Докажите, что прямые B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 *конкурентны* (то есть пересекаются в одной точке или параллельны) тогда и только тогда, когда $(A, B_1, C_1, D_1) = (A, B_2, C_2, D_2)$.

2. **(a)** Докажите, что если $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

(b) Докажите, что $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$.

(c) Пусть $(A, B, C, D) = k$. Какие значения может принимать двойное отношения той же четверки точек, взятых в другом порядке?

3. Четверка точек (прямых) называется *гармонической*, если их двойное отношение равно -1. Докажите, что следующие четверки гармонические.

(a) (B, C, M, N), где M и N — основания внутренней и внешней биссектрис треугольника ABC с основанием BC.

(b) $(A,\ B,\ M,\ P_\infty)$, где M — середина отрезка AB, а P_∞ — бесконечно удаленная точка вдоль прямой AB.

(c) (A, B, X, Y), где X и Y центры окружностей разного радиуса, A и B — точки пересечения общих внешних и внутренних касательных.

(d) На вещественной прямой отметим точки $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$. Докажите, что $(A, B, O, X) = -1$ тогда и только тогда, когда координата X равна среднему гармоническому чисел a и b. (Отсюда и взялось название *гармоническая четверка*).

4. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, продолжения BC и AD — в точке F, прямые AC и BD пересекают EF в точках M и N. Докажите, что $(E, F, M, N) = -1$.

5. Продолжения противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. Через точку O пересечения его диагоналей проводится прямая, параллельная PQ. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой О пополам.

6. Дан угол с вершиной O и внутри него точка A. Рассмотрим такие точки M, N на разных сторонах данного угла, что углы MAO и OAN равны. Докажите, что все прямые MN проходят через одну точку (или параллельны).

7. Внутренняя и внешняя биссектрисы угла A неравнобедренного треугольника ABC пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Точка M — середина стороны AB. Прямая KM пересекает прямую AC в точке N. Докажите, что $NL = NA$.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH_A и отмечены центры I, I_A вписанной и вневписанной окружностей. Докажите, что прямые H_AI, H_AI_A симметричны относительно прямой BC.

9. Постройте с помощью одной линейки четвертую гармоническую к трем данным прямым, проходящим через одну точку.

10. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE и CF пересекаются в точке H. P и Q — проекции точек A и H на EF соответственно. Пусть R — точка пересечения DP и QH. Найдите HQ/HR.

11. Пусть в треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Пусть X такая точка внутри треугольника ABC, что вписанная окружность треугольника XBC касается XB, XC и BC в Z, Y и D соответственно. Докажите, что $EFZY$ вписанный.