

Точки и выпуклая оболочка

5 июля • необычная группа

Определение. Выпуклой оболочкой множества X называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих X .

1. Дано множество точек A_1, \dots, A_n, A_{n+1} . Пусть G — выпуклая оболочка множества точек A_1, \dots, A_n . Пусть H — фигура, являющаяся объединением всех отрезков, соединяющих A_{n+1} со всеми точками G .

а) Докажите, что H — выпуклая фигура.

б) Докажите, что H — выпуклая оболочка множества всех точек.

с) Докажите, что H — многоугольник.

Теорема. Выпуклая оболочка конечного множества точек является точкой, отрезком либо выпуклым многоугольником.

2. Докажите, что среди любых 5 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать 4, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.

3. На плоскости даны n точек, причем любые 4 из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что все точки являются вершинами выпуклого n -угольника.

4. На плоскости расположены несколько правильных n -угольников. Докажите, что выпуклая оболочка их вершин имеет не менее n углов.

5. На столе расположено n картонных и n пластмассовых квадратов, причем никакие два картонных и никакие два пластмассовых квадрата не имеют общих точек, в том числе и точек границы. Оказалось, что множество вершин картонных квадратов совпадает с множеством вершин пластмассовых квадратов. Обязательно ли каждый картонный квадрат совпадает с некоторым пластмассовым?

6. На плоскости отмечено конечное количество точек, не все на одной прямой. В каждой точке записано число, причем сумма чисел во всех точках, лежащих на одной прямой, равна 0. Докажите, что все числа равны 0.

7. На плоскости дано 22 точки, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары так, чтобы отрезки, заданные парами, пересекались по крайней мере в пяти различных точках.

8. На плоскости расположено конечное количество прямых и точек. Докажите, что на плоскости найдётся точка A , не совпадающая ни с одной из данных точек, расстояние от которой до любой из данных точек больше расстояния от неё до любой из данных прямых.