

# Лексикографический порядок

6 июля • обычная группа

**Определение.** Рассмотрим две строки из  $n$  натуральных чисел:  $A = (a_1, \dots, a_n)$  и  $B = (b_1, \dots, b_n)$ . Будем говорить, что  $A$  *мажорирует*  $B$  (и писать  $A \succ B$ ), если для некоторого номера  $1 \leq i \leq n$  выполнено  $a_i > b_i$  и  $a_j = b_j$  для  $j < i$ . Отношение «мажорирует» задаёт на множестве *лексикографический порядок*.

1. Докажите, что  
(a) если  $A \succ B$ ,  $B \succ C$ , то  $A \succ C$ ;  
(b) строго убывающая последовательность строк длины  $n$  всегда конечна;  
(c) в каждом непустом множестве строк длины  $n$  есть наименьший элемент.  
(d) Аналогично можно определить порядок на множестве бесконечных вправо строк натуральных чисел. Верны ли для него пункты (a), (b), (c)?

2. В стране  $N$  существуют  $n$  различных номиналов монет. В этом году вышел закон, согласно которому каждый житель страны получает ежемесячную зарплату монетами меньшего номинала, чем те, которыми он платил налог в предыдущем месяце. Докажите, что рано или поздно народ разорится.

3. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Раз в минуту Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

4. Дана последовательность из бесконечного числа нулей и конечного числа единиц. Если найдется группа вида 01, то ее можно заменить на группу вида 10...0 с произвольным числом нулей. Докажите, что можно сделать лишь конечное число таких замен.

5. Двое играют в следующую игру. Есть последовательность из  $n$  крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые  $k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) подряд идущих знака таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней — нолики (допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её (заменить крестик на нолик и нолики на крестики). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?

6. Пусть  $P(x)$  и  $Q(x)$  — два многочлена с натуральными коэффициентами. Будем говорить, что  $P$  асимптотически меньше  $Q$ , если  $P(x) < Q(x)$  для всех достаточно больших  $x$ . Существует ли бесконечная последовательность многочленов  $P_1, P_2, \dots$ , в которой каждый следующий асимптотически меньше предыдущего?