Серия 22, ваши любимые графы

14 июля

1. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.

2. Дана таблица $n \times n$. Её первые $k < n$ строчек заполнены натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Докажите, что можно расставить натуральные числа от 1 до n в оставшиеся клетки таблицы так, чтобы по-прежнему выполнялось это условие.

3. Имеются 27 карточек с числами от 1 до 27. Двое показывают следующий фокус. Первый получает k карточек, выбранные случайным образом. Одну из них он убирает, а $k-1$ оставшихся выкладывает в ряд. Второй должен назвать спрятанную карточку. Могут ли участники договориться так, чтобы по выложенным карточкам можно было определить спрятанную, если **(a)** $k = 4$? **(b)** $k = 14$?

4. Пусть G — двудольный граф, в каждой доле по n вершин, и в нём больше чем $(k-1)n$ рёбер. Докажите, что в нём найдётся паросочетание, в котором хотя бы k рёбер.

5. Докажите равносильность следующих условий:

(a) граф двусвязен;

(b) для любых двух вершин существует простой цикл, проходящий по ним;

(c) для любой вершины и любого ребра существует простой цикл, проходящий по ним.

Определение 1. *Окружением* множества вершин A называется множество вершин графа, смежных хотя бы с одной вершиной множества A (возможно, включая вершины множества A).

6. Пусть G — граф с множеством вершин V. Известно, что для любого множества $A \in V$ мощность его окружения не меньше мощности A. Докажите, что в графе G найдется паросочетание, в котором не меньше $V/3$ ребер.

7. В стране 100 городов, соединенных друг с другом дорогами так, что даже если любой город A закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города A). Докажите, что страну можно разбить на два суверенных государства, по 50 городов в каждом, так, что в обоих государствах из любого города можно проехать в любой другой.

8. Среди 250 сотрудников международной фирмы в любой паре сотрудников каждый знает язык, который не знает другой сотрудник из этой пары. Какое наименьшее возможное число языков знают (в совокупности) сотрудники фирмы?