Эпизод 1: Новые аксиомы

7 июля • необычная группа

Аксиома Кантора – Дедекинда. Каковы бы ни были непустые множества $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$, такие что для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leqslant b$, существует такое вещественное число ξ, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место соотношение $a \leqslant \xi \leqslant b$.

Теорема. (О вложенных отрезках.) Для всякой последовательности вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$$

существует хотя бы одна точка ξ, принадлежащая каждому из отрезков этой последовательности.

Теорема. (О стягивающихся отрезках.) Для всякой последовательности вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots,$$

такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in N$ такое, что $|b_n - a_n| < \varepsilon$, существует единственная точка ξ, принадлежащая каждому из отрезков этой последовательности.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху (снизу)*, если существует такое $C \in R$, что для любого $a \in A$ выполнено $a \leqslant C$ $(a \geqslant C)$. Множество называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение. *Супремумом (инфимумом)* множества $A \subset \mathbb{R}$ будем называть такое число $C \in \mathbb{R}$ (если оно существует), что

- $\forall a \in A \; a \leqslant C$ $(a \geqslant C)$,
- $\forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A : |a - C| < \varepsilon$.

Обозначать это число будем через $\sup A$ (соответственно $\inf A$).

Аксиома существования супремума. Пусть множество A ограничено. Тогда существует $\sup A$.

1. Докажите, что Аксиома Кантора – Дедекинда, теорема о вложенных отрезках и Аксиома существования супремума попарно равносильны.

На занятии уже были доказаны импликации А. К.–Д. $\Rightarrow$ А. $\exists \sup$ $\Rightarrow$ Т. о вложенных отрезках.

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется *сходящейся*, если существует такое $A \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N_\varepsilon$ такое, что для любого $n > N$ выполнено $|a_n - A| < \varepsilon$. Число A в таком случае называется *пределом последовательности* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и обозначается через $\lim_{n \to \infty} a_n$.

Определение. Последовательность называется *бесконечно малой*, если её предел существует и равен нулю.

На занятии мы доказали следующие свойства.

1. Если предел последовательности существует, то он единственный.
2. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, то $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.
3. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = A \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ существует и равен $\frac{1}{A}$.

Следующие два свойства были оставлены в качестве упражнений.

2. **(a)** Если $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, то $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$.
(b) Если $\lim_{n\to\infty} a_n = A \neq 0$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$ существует и равен $\frac{B}{A}$.

Задачи.

3. Найдите пределы **(a)** $x_n = \frac{1}{n}$; **(b)** $x_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}}$; **(c)** $x_n = 1 - \frac{\sin n}{n}$.

4. Пусть последовательность $x_n \to A$, тогда x_n ограничена.

5. Пусть предел последовательности равен A. Докажите, что предел любой её подпоследовательности равен A.

6. Докажите неравенства

$$\textbf{(a)}\ \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n};\ \textbf{(b)}\ \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n} \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$