Серия 36, теорема Паскаля

22 июля

Теорема Паскаля. Если A, B, C, D, E, F — шесть произвольных точек окружности, то точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой. В случае совпадения двух точек берется касательная к окружности.

1. Хорды AB и CD параллельны, P и Q — произвольные точки на той же окружности. Пусть X — точка пересечения BP и CQ, Y — точка пересечения AQ и DP. Докажите, что XY параллельно AB и CD.

2. Точки A, B, C лежат на окружности ω, точка D — вне ее. Прямые AD, BD, CD пересекают ω второй раз в точках A', B', C' соответственно. Точка N также лежит на ω. Прямые $A'N$, $B'N$, $C'N$ пересекают BC, AC, AB в точках A_0, B_0, C_0. Докажите, что точки A_0, B_0, C_0 и D коллинеарны.

3. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

4. Дан треугольник ABC и точки B_1 и C_1 на CA и AB. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается сторон CA и AB в точках E и F соответственно. Пусть касательные в точках B_1 и C_1 (отличные от сторон треугольника ABC) касаются ω в точках Y и Z соответственно. Докажите, что прямые B_1C_1, EF и YZ конкурентны.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с центром описанной окружности O. Перпендикуляр, восстановленный к BD в точке B, пересекает перпендикуляр, восстановленный к AC в точке C, в точке E. Перпендикуляр к BD, восставленный в точке D, пересекает перпендикуляр к AC, восставленный в точке A, в точке F. Пусть X — точка пересечения прямых AB и CD. Докажите, что точки O, E, F, X коллинеарны.

6. Докажите, что прямые Паскаля для шестиугольников $ABCDEF$, $ADEBCF$, $ADCFEB$ конкурентны.

7. Дана окружность с центром O и диаметром AB. Произвольные точки C и D на одной полуокружности таковы, что C лежит между A и D. Отметим точку E на другой полуокружности. Пусть I — точка пересечения CE с AD, K — точка пересечения IO с BE. Докажите, что $\angle CDK = 90°$.

8. Прямая AB касается окружности ω в точке Y так, что Y лежит между A и B. Точка X на окружности ω такова, что XY — диаметр. Пусть XA и XB пересекают второй раз ω в точках C и D соответственно, а AD и BC — в точках E и F соответственно. Докажите, что $XE = XF$.

9. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. P — точка на прямой AC такая, что PB и PD — касательные к ω. Касательная к ω в точке C пересекает касательную PD в точке Q, а прямую AD — в точке R. Пусть E — вторая точка пересечения AQ и ω. Докажите, что B, E, R коллинеарны.