Учимся считать

11 *июля* • *обычная группа*

Важная лемма. В треугольнике ABC на прямой AC выбрана точка D. Докажите, что $\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBC} = \dfrac{AD \cdot BC}{DC \cdot AB}$.

Отсюда сразу же имеем два не менее важных следствия.

Синусная теорема Чевы. В треугольнике ABC проведены чевианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что они пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\dfrac{\sin\angle ABB_1}{\sin\angle B_1BC} \cdot \dfrac{\sin\angle BCC_1}{\sin\angle C_1CA} \cdot \dfrac{\sin\angle CAA_1}{\sin\angle A_1AB} = 1$.

Замечание. Теорему можно обобщить для случая, когда точка пересечения вне треугольника.

Еще одна важная лемма. В треугольнике ABC проведена чевиана BD. Докажите, что она однозначно определяется отношением $\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBC}$.

1. Докажите, что главные диагонали вписанного шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A.$$

2. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC во внешнюю сторону построены треугольники BCD, CAE, ABF так, что $\angle BCD = \angle ECA = \varphi$, $\angle CAE = \angle BAF = \theta$, $\angle CBD = \angle ABF = \psi$. Докажите, что прямые AD, BE, CF конкурентны.

3. В треугольник ABC вписана окружность w с центром I, касающаяся сторон AB, BC, CA в точках M, N, P соответственно. T — точка пересечения CI и w. $R = AT \cap MP$, $Q = BT \cap MN$. Докажите, что $RQ \perp IC$.

4. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P таким образом, что $\angle PAD = \angle PCD$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

5. На стороне AB треугольника ABC взяты такие точки X, Y, что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V. Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку.

6. . В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_0, на отрезке AA_0 выбрана точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B_0, а прямая CX пересекает AB в точке C_0. Отрезки A_0B_0 и CC_0 пересекаются в точке P, а отрезки A_0C_0 и BB_0 пересекаются в точке Q. Докажите, что углы PBC и QAB равны.