Матбой

12 *июля* • *обычная, необычная*

1. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку BH пересекает стороны BA, BC в точках A_0, C_0 соответственно. Докажите, что периметр треугольника A_0C_0O (где O — центр описанной окружности ABC) равен AC.

2. Решите систему уравнений $a^3 + b = c, b^3 + c = d, c^3 + d = a, d^3 + a = b$.

3. На плоскости проведено несколько прямых общего положения. Наоко начинает движение в некоторой точке на одной из прямых. Как только она доходит до точки пересечения прямых, она сворачивает на другую прямую и продолжает движение вдоль неё. Докажите, что Наоко не сможет пройти один и тот же отрезок в разных направлениях.

4. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Точка M лежит на дуге BC, прямая AM пересекает BD в точке P, прямая DM пересекает AC в точке Q. Докажите, что площадь четырёхугольника $APQD$ равна половине площади квадрата.

5. Вася записал числа $1, 2, \ldots, 40$ на двадцати карточках, на каждой стороне каждой карточки — по числу. Затем он выложил карточки на стол. Петя видит лишь верхние числа; он может выбрать любой набор карточек и перевернуть их. Он выиграет, если после этого сумма чисел на верхних сторонах карточек будет не меньше k. При каком наибольшем k Петя гарантированно может выиграть?

6. Дан ориентированный граф. В каждой вершине число входящих в неё и исходящих из неё рёбер одинаково и не меньше двух (степени разных вершин при этом могут быть различными). Известно, что из любой вершины существует ориентированный путь до любой другой. Докажите, что из этого графа можно удалить все рёбра некоторого ориентированного цикла так, чтобы по–прежнему из любой вершины существовал ориентированный путь до любой другой.

7. Для каждого натурального n положим $E(n) = n(n+1)(2n+1)\ldots(10n+1)$. Найдите наибольший общий делитель чисел $E(1), E(2), \ldots, E(2019)$.

8. Два многочлена четвертой степени $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ и $g(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ отличаются друг от друга перестановкой коэффициентов. Известно, что $a_i \neq b_i$ при всех $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Может ли оказаться, что $f(x) \geqslant g(x)$ при всех вещественных x?