

# С целыми коэффициентами

7 июля • обычная группа

1. Пусть  $P(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами,  $a$  и  $b$  — целые числа. Докажите, что

а)  $P(a) - P(b)$  делится на  $a - b$ .

б)  $P(a) \equiv P(a + b) \pmod{b}$

2.  $P(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что  $P(2)$  и  $P(3)$  кратны 6. Докажите, что  $P(5)$  кратно 6.

3. Дан многочлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами. Известно, что  $P(1) = 2019$ ,  $P(2019) = 1$ ,  $P(k) = k$ , где  $k$  — некоторое целое число. Найдите  $k$ .

4. У многочленов  $P(x)$  и  $Q(x)$  — один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность  $P(2019) - Q(2019)$  кратна 1009.

5. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

6. Докажите, что для любого многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами и любого натурального  $k$  существует такое натуральное  $n$ , что  $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$  делится на  $k$ .

7. Докажите, что для любого непостоянного многочлена  $P(x)$  найдется такое натуральное число  $n$ , что  $P(n)$  — составное число.

8. В равенстве  $x^5 + 2x + 3 = p^k$  числа  $x$  и  $k$  — натуральные. Может ли число  $p$  быть простым?

9. Докажите, что не существует многочлена степени не ниже двух с целыми коэффициентами, значение которого при любом простом  $p$  является простым числом.