

Серия 1, LTE — то, чего не хватает этой ЛМШ

5 июля

Обозначение. Будем обозначать степень, в которой простое число p входит в разложение n на простые множители, через $v_p(n)$.

Лемма об уточнении показателя, ЛоУП, lifting the exponent lemma, LTE. Пусть a и b — различные целые числа, k — натуральное число, а p — нечетное простое число, НЕ ДЕЛЯЩЕЕ a и b . ЕСЛИ $a - b : p$, то

$$v_p(a^k - b^k) = v_p(a - b) + v_p(k).$$

Доказательство.

Будем вести индукцию по $v_p(k)$.

(а) Докажите базу для $v_p(k) = 0$.

(b) Докажите, пожалуйста, базу и для $v_p(k) = 1$. Это пригодится в дальнейшем.

(с) Докажите индукционный переход.

1. На какую максимальную степень пятерки делится выражение $3^{10000} - 2^{10000}$?

2. При каких натуральных n существуют натуральное a и простое p , для которых $3^p + 4^p = a^n$?

3. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

4. **Лемма об уточнении показателя для 2.** Сформулированная выше лемма не работает в случае $p = 2$ (приведите контрпример и объясните, какой момент в доказательстве ломается). Докажите, что если дополнительно выполнено $a - b : 4$, то все-таки

$$v_2(a^k - b^k) = v_2(a - b) + v_2(k).$$

5. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

6. Известно, что при всех натуральных n число $4(a^n + 1)$ является точным кубом. Докажите, что $a = 1$.

7. Найдите степень вхождения 1991 в

$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}.$$