

Серия 26, проективные преобразования

17 июля

Теорема. Существует ровно одно проективное преобразование, переводящее четверку точек A, B, C, D общего положения в четверку A_1, B_1, C_1, D_1 также общего положения.

Пример 1. Докажите, что в трапеции середины оснований, точка пересечения боковых сторон и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой.

Пример 2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в P , AB и CD – в R , BC и DA – в Q . Через точку P проведена прямая, параллельная RQ , пересекающая противоположные стороны четырехугольника в точках X и Y . Докажите, что $PX = PY$.

1. Чевяны AA', BB', CC' пересекаются в точке Q . Пусть $A'B'$ пересекается с AB в точке C_1 (далее аналогично). Докажите, что A_1, B_1, C_1 коллинеарны.

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Пусть $Q = AD \cap BC$, $P = AB \cap CD$, и $R = AC \cap BD$. Обозначим через X_1, X_2, Y_1, Y_2 точки $PR \cap AD, PR \cap BC, QR \cap AB, QR \cap CD$. Докажите, что X_1Y_1, X_2Y_2, PQ конкурентны.

3. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника проведены четыре прямые, пересекающие его противоположные стороны в точках K и K', L и L', M и M', N и N' (возможно много конфигураций). Прямые KM и $LN, K'M'$ и $L'N'$ пересекаются в точках P и P' . Докажите, что точки P, O, P' лежат на одной прямой.

4. **Теорема Паппа.** На прямых ℓ_1 и ℓ_2 отмечены точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в точке K , прямые A_1C_2 и A_2C_1 – в точке L , прямые B_1C_2 и B_2C_1 – в точке M . Докажите, что точки K, L, M лежат на одной прямой.

5. **Теорема Дезарга.** Пусть два треугольника ABC и $A_0B_0C_0$ расположены таким образом, что прямые, соединяющие соответственные вершины, конкурентны, то три точки, в которых пересекаются, будучи продолжены, три соответственные стороны, коллинеарны.

6. Есть точки A, B, C, D , прямые AB и CD пересекаются в точке E , прямые BC и DA пересекаются в точке F . На плоскости взята произвольная точка X , точки A, B, C, D спроецированы на EF с центром в X , в результате чего получились точки A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 пересекаются в одной точке.