Серия 24, неравенство Йенсена

15 июля

1. (a) Докажите, что если $f(x)$ на некотором отрезке удовлетворяет неравенству $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, то для любого $\alpha = \frac{n}{2^k}$, где $0 \leqslant n \leqslant 2^k$, выполняется

$$\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geqslant f(\alpha x + (1-\alpha)y);$$

(b) Докажите, что если функция f еще и непрерывна, то неравенство верно для произвольного $\alpha \in [0,1]$.

Определение 1. Функции, удовлетворяющие условию $\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geqslant f(\alpha x + (1-\alpha)y)$ для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ на некотором промежутке, называются *выпуклыми* (или *выпуклыми вниз*) на этом промежутке.

Определение 2. Функции, удовлетворяющие условию $\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \leqslant f(\alpha x + (1-\alpha)y)$ для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ на некотором промежутке, называются *вогнутыми* (или *выпуклыми вверх*) на этом промежутке.

2. (a) Докажите с помощью теоремы Лагранжа, что если первая производная функции монотонно возрастает, то функция выпукла.

(b) Если вторая производная неотрицательна, то функция выпукла.

3. Неравенство Йенсена. Докажите, что если функция удовлетворяет *условию выпуклости*

$$\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geqslant f(\alpha x + (1-\alpha)y),$$

то для любых неотрицательных α_j, сумма которых равна 1, и x_j из отрезка выпуклости, выполняется неравенство

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n) \geqslant f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n).$$

4. Проверьте, с помощью производной или с помощью половинного деления, что функции **(a)** e^x; **(b)** $-\ln x$; **(c)** $-\sin x$ на $[0;\pi]$; выпуклы на некоторых промежутках, и укажите, на каких.
(d) При каких p функция x^p выпукла, а при каких вогнута на $[0,+\infty)$?

5. Сумма положительных вещественных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите, что

$$\frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{d^2+d} + \frac{d}{a^2+a} \geqslant \frac{8}{(a+c)(b+d)}.$$

6. Пусть $M_p(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n}}$, $M_{+\infty} = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$, $M_{-\infty} = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$, $M_0(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$. Докажите, что $M_p \geqslant M_q$, где **(a)** $p > q > 0$; **(b)** $p > q = 0$, $0 = p > q$; **(c)** $+\infty \geqslant p > q \geqslant -\infty$.

7. Докажите неравенство о среднем взвешенном:

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} \geqslant \sqrt[\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n]{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}},$$

где все x_j и α_j неотрицательны.

8. Неравенство Минковского. Для положительных a_1, a_2, …, a_n и b_1, b_2, …, b_n

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}.$$