Числа Каталана

6 июля • необычная группа

Определение. Обозначим через C_n количество способов расставить в ряд n открывающихся и n закрывающихся скобок так, чтобы запись была корректна (то есть, среди любого количества первых элементов ряда открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся). Число C_0 полагается равным 1. Число C_n называется *n-ым числом Каталана.*

1. Докажите что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0$$

и начальным членом $C_0 = 1$.

0. Найдите первые 5 чисел Каталана.

2. Докажите, построив явную биекцию или проверив рекурентное соотношение, что следующие числа равны C_n.
a) Количество путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо и не поднимающиеся выше прямой $y = x$.
b) Число *триангуляций* (разрезаний на n треугольников непересекающимися диагоналями) выпуклого $(n + 2)$-угольника.
c) Количество *плоских корневых строго двоичных деревьев* (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного) с $n + 1$ листьями.
d) Количество таблиц $2 \times n$, заполненных натуральными числами от 1 до $2n$, так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.

3. a) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси OX, равно C_n.
b) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, -2)$.
c) Найдите явную формулу для C_n

4. Докажите, что число наборов из n целых чисел от 0 до n, сумма которых делится на $(n + 1)$, равна n-ому числу Каталана. Например, такие наборы для $n = 3$: $(0\,0\,0)$, $(0\,1\,3)$, $(0\,2\,2)$, $(1\,1\,2)$, $(2\,3\,3)$.