Многочлены 1. Теорема Безу

5 июля • необычная группа

Определение. *Разделить* многочлен $P(x)$ на ненулевой многочлен $Q(x)$ с остатком — это значит найти такие многочлены $H(x)$ (*неполное частное*) и $R(x)$ (*остаток*), что выполнено равенство $P(x) = Q(x)\cdot H(x)+R(x)$, причем $\deg R(x) < \deg Q(x)$ или $R(x) = 0$.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ равен $P(a)$, т.е. $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$, притом $\deg Q(x) = \deg P(x) - 1$.

1. (a) Многочлен $P(x)$ делится на $(x-a)$ тогда и только тогда, когда $P(a) = 0$.
(b) Докажите, что число корней многочлена не превосходит его степени.
(c) Докажите, что если значения двух многочленов, степень каждого из которых не превосходит n, совпадают в $n+1$ различных точках, то эти многочлены равны.
(d) Если многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$, то корни многочлена $Q(x)$ являются корнями многочлена $P(x)$.

2. При каких a и b многочлен $P(x) = (a+b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?

3. Многочлен $P(x)$ дает остаток 2 при делении на $x-1$ и остаток 1 при делении на $x-2$. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на многочлен $(x-1)(x-2)$?

4. Найдите все целые x, при которых число $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ делится на $x^2 + 1$.

5. Про многочлен $P(x)$ степени 10 с действительными коэффициентами известно, что $P(1) = P(-1), \ldots, P(5) = P(-5)$. Докажите, что $P(x) = P(-x)$ для любого x.

6. Найдите все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$xP(x-1) = (x-20)P(x).$$

7. Докажите, что при нечетном m выражение $(x+y+z)^m - x^m - y^m - z^m$ делится на $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

8. Многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет на интервале $(0, 2)$ три различных действительных корня. Докажите, что $-2 < p + q + r < 0$.

9. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2019$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2019) > 1/64$.