Серия 13, симметрические многочлены

10 июля

Напоминание. Обозначим $\mathbb{N}^m = \{a_1, a_2, .., a_m \mid a_i \in \mathbb{N}\}$. Пусть $A, B \in \mathbb{N}^m$. Будем говорить, что строка $A = (a_1, \ldots, a_m)$ *меньше* строки $B = (b_1, \ldots, b_m)$, если первый символ, в котором A и B различаются, у строки A меньше.

(a) Убывающая последовательность строк из $\mathbb{N}^m$ конечна.

(b) В любом непустом множестве $\mathbb{N}^m$ есть наименьший элемент.

Определение 1. Многочлен от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках переменных.

Определение 2. *Элементарным симметрическим многочленом* называется

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}.$$

Также примем $\sigma_0 = 1$.

Основная теорема. Всякий симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Коэффициенты этого многочлена — целочисленные линейные комбинации коэффициентов исходного многочлена.

Лемма 1. Пусть $u = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}, a \neq 0$ — высший член (относительно лексикографического порядка) симметрического многочлена. Тогда $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n$.

Лемма 2. Для любого одночлена $u = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ с $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0$ существуют такие неотрицательные целые числа $l_1, l_2, \ldots, l_n$, что высший член многочлена $\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\ldots\sigma_n^{l_n}$ совпадает с u. Числа $l_1, l_2, \ldots, l_n$ определены этим условием однозначно.

1. Выразите $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ через элементарные симметрические многочлены.

2. Докажите, что значение любого симметрического многочлена с целыми коэффициентами от корней унитарного многочлена с целыми коэффициентами является целым числом. (Считаем, что все корни вещественные).

3. Докажите основную теорему о симметрических многочленах от нескольких наборов переменных. Если многочлен не меняется от перестановки переменных внутри наборов $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$, $\ldots$, то его можно выразить через основные симметрические многочлены от $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \ldots$(и через оставшиеся переменные). Пример: $(t - x_1 - y_1)(t - x_1 - y_2)(t - x_2 - y_1)(t - x_2 - y_2)$ выражается через t и $x_1 + x_2$, x_1x_2, $y_1 + y_2$, y_1y_2.

4. Обозначим через $p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k$. Тогда для p_k существуют рекуррентные формулы Ньютона:

(a) $p_k - p_{k-1}\sigma_1 + p_{k-2}\sigma_2 + \ldots + (-1)^{k-1}p_1\sigma_{k-1} + (-1)^k\sigma_k = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant n$;

(b) $p_k - p_{k-1}\sigma_1 + p_{k-2}\sigma_2 + \ldots + (-1)^{n-1}p_{k-n+1}\sigma_{n-1} + (-1)^n p_{k-n}\sigma_n = 0$ при $k > n$.

5. Докажите, что произведение всех чисел вида $\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \ldots \pm \sqrt{10}$ является

(a) целым числом;

(b) квадратом.

6. Докажите, что у многочлена $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_i - x_j)$ все коэффициенты равны $+1$, -1 или 0.

7. Пусть $p \geqslant 3$ — простое. Докажите, что

(a) $\sigma_k(1, 2, \ldots, p-1) \,\vdots\, p$ для $1 \leqslant k \leqslant p-2$;

(b) $\sigma_{2k+1}(1, 2, \ldots, p-1) \,\vdots\, p^2$ для $1 \leqslant k \leqslant \frac{(p-3)}{2}$.