Серия 4, многочлены от нескольких переменных

6 июля

Определение 1. *Многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — это сумма одночленов, каждый из которых имеет вид $cx_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$, где c — некоторая константа.

Определение 2. *Степенью одночлена* $cx_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ называется сумма $n_1+n_2+\ldots+n_k$.

Определение 3. *Степенью многочлена* называется максимальная из степеней его одночленов.

Определение 4. Будем называть *высшим членом* многочлена наибольший одночлен с точки зрения лексикографического порядка.

1. Известно, что многочлен $P(a_1, a_2, ..., a_k) = 0$ при любых $a_1, a_2, ..., a_k$. Докажите, что $P \equiv 0$, то есть что P — тождественнный 0.

(a) База для $k = 2$. *Подсказка.* Представьте P как $P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + P_1(x)y + P_0(x)$, где $P_i(x)$ — многочлен от одной переменной.

(b) Сделайте переход для любого k.

Отсюда следует, что $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \iff P(a_1, a_2, \ldots, a_k) = Q(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ при любых $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

2. Пусть f и g — два многочлена от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, и при любых значениях переменных выполнено $fg = 0$. Докажите, что тогда $f = 0$ или $g = 0$.

3. Докажите, что многочлен вида $x^{200}y^{200} + 1$ нельзя представить в виде $P(x)Q(y)$.

4. Для каждого из нижеперечисленных подмножеств A точек на координатной плоскости установите, найдется ли многочлен $P(x, y)$, для которого A есть в точности множество точек, в которых он обращается в нуль.

(a) A — точка. **(b)** A — конечное множество точек.

(c) A — объединение конечного числа прямых. **(d)** A — луч.

(e) $A = \{(x, y) \mid x, y > 0; xy = 1\}$. **(f*)** $A = \{(x, y) \mid y = 2^x\}$.

5. Всегда ли можно восстановить многочлен от двух переменных степени не больше 3 по значениям в 100 точках?

6. (a) Существуют ли многочлены $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$ от переменных x, y, z, удовлетворяющие тождеству

$$(x - y + 1)^3P + (y - z - 1)^3Q + (z - 2x + 1)^3R = 1?$$

(b) Тот же вопрос для тождества

$$(x - y + 1)^3P + (y - z - 1)^3Q + (z - x + 1)^3R = 1.$$

7. Дан многочлен $P(x, y)$ степени меньше n. Докажите, что можно выбрать n^2 точек и по значениям в них узнать значение P в любой другой точке.

8. Пусть $P(\pm x_, \pm x_2, ..., \pm x_n) = P(x_1, x_2, ..., x_n)$ для любого набора знаков плюс и минус. Докажите, что существует многочлен $Q(y_1, y_2, ..., y_n)$ такой, что $P(x_1, x_2, ..., x_n) = Q(x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$.