

Два велосипедиста

9 июля • "необычная" группа

1. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q , одновременно начали движение из точки P по часовой стрелке с равными угловыми скоростями два велосипедиста A и B . (а) Докажите, что прямая AB все время проходит через точку Q .

(б) Докажите, что треугольники PAB подобны друг другу и подобны треугольнику PO_1O_2 , где O_1 и O_2 — центры окружностей.

(с) Найдите ГМТ середин отрезков AB .

(д) Докажите, что точки A и B постоянно равноудалены от некоторой фиксированной точки X .

(е) Докажите, что угол QPX — прямой.

2. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке D . Окружность, проходящая через вершины B и C , пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F . Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O . Докажите, что угол BFO — прямой.

Указание. Рассмотрите велосипедистов, движущихся из точки F .

3. Дан треугольник ABC и окружность с центром в точке O , проходящая через вершины B и C и повторно пересекающая прямые AB и AC в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников APQ и ABC имеют ровно две общие точки A и M . Тогда угол OMA — прямой.

4. (О бабочке). Через точку A , не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна — в точках P_1, P_2 , другая — в точках Q_1, Q_2 . Произвольная прямая, проходящая через A , пересекает окружность в точках M_1, M_2 , а описанные окружности треугольников AP_1Q_1 и AP_2Q_2 — в точках N_1 и N_2 соответственно. Тогда $N_1M_1 = N_2M_2$.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть его диагонали пересекаются в точке E , точки M и N — их середины. Вокруг треугольников ABE, BEC, CED, DEA описаны окружности, причем первая и третья пересекаются вторично в точке L , вторая и четвертая — в точке K . Доказать, что точки M, K, N, L лежат на одной окружности.

6. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Касательная к окружности ω_1 в точке A пересекает ω_2 в точке C ; касательная к окружности ω_2 в точке A пересекает ω_1 в точке D . Биссектриса угла CAD пересекает ω_1 и ω_2 в точках E и F , соответственно. Внешняя биссектриса угла CAD пересекает ω_1 и ω_2 в точках X и Y , соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку XY касается описанной окружности треугольника BEF .