Теория Рамсея

21 июля

Определение. *Числом Рамсея* $R(m, n)$ (m, n — натуральные числа) называется наименьшее натуральное число такое, что полный граф на $R(m, n)$ вершинах, ребра которого покрашены в красный и синий цвета, содержит либо полный красный подграф на n вершинах, либо полный синий подграф на m вершинах.

Теорема Рамсея. $R(m, n)$ существует для любых натуральных m, n.

1. Найдите $R(1, n)$, $R(2, n)$.

2. Докажите:

(a) $R(3, 3) \leqslant 6$;
(b) $R(3, 4) \leqslant 9$;
(c) $R(3, 3) = 6$;
(d) $R(4, 4) \leqslant 18$.

3. Докажите:

(a) $R(m, n) \leqslant R(m, n-1) + R(n, m-1)$ для $m, n \geqslant 2$;
(b) $R(m, n) \leqslant C_{m+n-2}^{m-1}$;
(c) Докажите теорему Рамсея.

Определение. *Многоцветным числом Рамсея* $R(n_1, n_2, ..., n_l)$ называется наименьшее натуральное число такое, что всякая раскраска в l цветов полного графа на $R(n_1, n_2, ..., n_l)$ вершинах содержит полный подграф цвета c на n_c вершинах.

4. Найдите точное значение $R(3, 4)$.

5. Докажите, что $9 < R(3, 3, 3) \leqslant 17$.

6. Теорема Шура. Все натуральные числа покрашены в несколько цветов. Тогда можно выбрать три одноцветных числа x, y, z, для которых $x + y = z$.

7. Доказать, пользуясь Теоремой Шура, что для любого $m \in \mathbb{N}$ и для любого достаточно большого простого числа p сравнение $x^m + y^m \equiv z^m (p)$ имеет нетривиальное решение.