Клеточки! Клеточки!

17 июля • необычная группа

1. У Алёши есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алёша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Серёжа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос — и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Серёжа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алёшей равно количеству различных чисел среди записанных Серёжей.

2. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные натуральные числа. Обозначим через b_k количество чисел из набора $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию: $a_i \geqslant k$. Доказать, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots$

3. На доске написали несколько натуральных чисел. Пусть a_n — количество тех из них, которые не меньше n. Исходные числа стерли и вместо них написали все ненулевые a_n. Затем с новыми числами проделали то же самое. Докажите, что на доске появился исходный набор.

4. Докажите, что количество разбиения числа N на не более чем m слагаемых равно числу разбиения числа $N + m$ ровно на m слагаемых.

5. Докажите, что количество разбиений числа N на не более чем m слагаемых ровно столько же, сколько способов разбить число $N + \frac{m(m+1)}{2}$ на m попарно различных слагаемых.

6. Рассматриваются всевозможные наборы из 100 неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке и не превосходящие 100, в которых сумма всех чисел делится на 10. Докажите, что ровно половина этих наборов заканчивается числом 100.

7. Пусть S — множество всех парнатуральных числел (h, k) таких что $h+k \leqslant n$. Каждый элемент S покрашен в оранжевый или синий цвет, причём, если (h, k) — оранжевый, и $h_0 \leqslant h$, $k_0 \leqslant k$, то (h_0, k_0) — тоже оранжевый. Будем называть n-элементное множество синих пар из S *забавным*, если первые числа любых пар в нём различны, *весёлым* — если вторые. Докажите, что забавных подмножеств столько же, сколько весёлых.

8. Докажите, что количество разбиений числа N на нечетные слагаемые равно количеству разбиений числа N на попарно различные слагаемые (подсказка: модифицируйте диаграмму Юнга до осесимметричной).