

Серия 14, Хелли–2

10 июля

Определение 1. Множество называется *выпуклым*, если любой отрезок между его точками также принадлежит этому множеству.

Упр. 1. Докажите, что пересечение любого семейства выпуклых множеств является выпуклым множеством. Верно ли то же самое для объединения?

1. Теорема Хелли. На плоскости даны n выпуклых множеств, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все эти множества имеют общую точку

(a) для $n = 4$. *Подсказка.* Рассмотрите точки пересечения троек множеств.

(b) Для произвольного n .

2. (a) Докажите, что для любого выпуклого семиугольника все пятиугольники с вершинами в вершинах данного семиугольника имеют общую точку.

(b) Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

3. На плоскости заданы несколько полуплоскостей, которые покрывают всю плоскость. Докажите, что из этих полуплоскостей можно выбрать три, которые также покрывают всю плоскость.

4. На плоскости даны несколько точек, любые три из которых можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все эти точки можно покрыть кругом радиуса 1.

5. На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя из которых не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

6. Назовем *полосой* ширины w множество всех точек между двумя параллельными прямыми на расстоянии w , включая сами прямые. На плоскости дано конечное множество точек, любые три из которых можно покрыть полосой ширины 1. Докажите, что это множество можно покрыть полосой ширины 2.

7. Дано несколько параллельных отрезков, причем для любых трех из них найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все отрезки.

8. На плоскости дано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой. Докажите, что можно провести горизонтальную и вертикальную прямые так, чтобы любой прямоугольник пересекался хотя бы с одной из этих прямых.