

Серия 29, ещё немного неравенств

19 июля

1. Пусть a, b, c — неотрицательные числа. Докажите, что

$$\frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{(2b + a + c)^2}{2b^2 + (a + c)^2} + \frac{(2c + a + b)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \leq 8.$$

2. Докажите, что для любых a_i, b_i ($1 \leq i \leq n$), что

$$\sqrt{\left(\sum a_i\right)^2 + \left(\sum b_i\right)^2} \leq \left(\sum \sqrt{a_i^2 + b_i^2}\right).$$

3. Докажите, что для любых положительных p_1, \dots, p_n верно, что

$$\frac{p_1}{p_2 + p_3} + \frac{p_2}{p_3 + p_4} + \frac{p_3}{p_4 + p_5} + \frac{p_4}{p_5 + p_1} + \frac{p_5}{p_1 + p_2} \geq \frac{5}{2}.$$

4. Пусть a, b, c — неотрицательные числа. Докажите, что

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \geq \sqrt{6(a + b + c)}.$$