Гармонический четырехугольник

15 *июля*

Напоминание. *Симедианой* из вершины B треугольника ABC называется

(a) прямая, которая изогональна медиане;

(b) чевиана, которая делит сторону AC в отношении $\frac{AB^2}{BC^2}$;

(c) прямая, проходящая через точку пересечения касательных в точках A и C;

(d) прямая, содержащая такую точку X, что ABX подобен BCX.

Здесь, как и раньше, обозначения в 1–5 задачах одинаковые.

1. Симедиана из вершины B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Пусть M — середина AC. Докажите, что $\angle BMA = \angle AMD$.

2. Точка F — пересечение касательной в точке B и AC, O — центр ω.

(a) Докажите, что $BOMDF$ — вписанный.

(b) Докажите, что FD — касательная к ω.

Важное следствие. Если вписанный четырехугольник $ABCD$ таков, что касательные в точках A и C пересекаются на диагонали BD, то касательные в точках B и D пересекаются на AC. Другими словами, каждая диагональ является симедианой двух треугольников.

3. Докажите, что биссектрисы углов ABC и CDA пересекаются на диагонали AC, и $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

Определение. Вписанный четырехугольник $ABCD$ такой, что $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ называется *гармоническим.*

4. Докажите, что по трем точкам A, B, C однозначно восстанавливается четвертая вершина D гармонического четырехугольника $ABCD$.

5. Докажите равносильность следующих свойств вписанного четырехугольника $ABCD$:

(a) $AB \cdot CD = BC \cdot AD$;

(b) BD — симедиана ABC;

(c) касательные в точках A и C пересекаются на BD;

(d) $\angle BMA = \angle AMD$;

(e) биссектриссы ABC и ABD пересекаются на AC.

Теперь обозначения в условиях независимы.

6. Пусть AB, CD — параллельные хорды окружности ω, M — середина AB, E — пересечение ω и MC, K — середина ED. Докажите, что $\angle EKA = \angle EKB$.

7. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B и внутренне касаются окружности ω в точках C и D. Прямая AB пересекает окружность ω в точках E

и F. Докажите, что касательные к окружности ω в точках E и F пересекаются на прямой CD.

8. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник, а M — середина хорды, высекаемой диагональю AC. Докажите, что $\angle BMA = \angle DMA$.