

Серия 20, подпор касательной

14 июля

Определение 1. Пусть функция f дифференцируемая в точке a . Тогда прямая $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ называется *касательной* к графику f в точке a .

Упражнение. Пусть $a, b, c, d > 0, a + b + c + d = 4$. Докажите, что

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leq \frac{4}{9}.$$

1. Пусть $a, b, c, d > 0, a + b + c + d = 4$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} + \frac{1}{d^2 + 1} \geq 2.$$

2. Пусть a, b, c — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

3. Пусть даны положительные числа a_1, a_2, \dots, a_n такие, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$. Докажите, что для любого натурального k верно

$$a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \dots + a_n^{k+1} \geq a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k.$$

4. Пусть a, b, c, d — положительные. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{a+c+d}{b} + \frac{a+b+d}{c} + \frac{a+b+c}{d}.$$

5. Сумма положительных a, b, c равна $\frac{\pi}{2}$. Докажите, что

$$\cos a + \cos b + \cos c > \sin a + \sin b + \sin c.$$

6. Для положительных a_2, a_3, \dots, a_n верно, что $a_2 a_3 \dots a_n = 1$. Докажите, что

$$(a_2 + 1)^2 (a_3 + 1)^3 \dots (a_n + 1)^n > n^n.$$

7. Для положительных a, b, c верно, что $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) > 1.$$