

# Серия 35, подпор касательной функцией

22 июля

**Упражнение.** Даны положительные  $a, b, c$  такие, что  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Докажите, что

$$\frac{1}{a^3 + 2} + \frac{1}{b^3 + 2} + \frac{1}{c^3 + 2} \geq 1.$$

1. Даны положительные  $a, b, c$  такие, что  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Докажите, что

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

2. Даны положительные  $a, b, c, d$  такие, что  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Докажите, что

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} + \sqrt{1-d} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}.$$

3. Даны положительные  $a, b, c, d, e$  такие, что  $\frac{1}{4+a} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{4+c} + \frac{1}{4+d} + \frac{1}{4+e} = 1$ . Докажите, что

$$\frac{a}{4+a^2} + \frac{b}{4+b^2} + \frac{c}{4+c^2} + \frac{d}{4+d^2} + \frac{e}{4+e^2} \leq 1.$$

4. Пусть  $a, b, c$  — стороны треугольника. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c} - \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}} \geq \frac{3(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})}{a + b + c}.$$

5. Даны положительные  $a, b, c$ . Докажите, что

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3.$$

6. Даны положительные  $a, b, c$  такие, что  $abc \geq 1$ . Докажите, что

$$\left(a + \frac{1}{a+1}\right) \left(b + \frac{1}{b+1}\right) \left(c + \frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8}.$$