

Вступительная олимпиада

4 июля

1. Дима написал на доске выражение

$$1 \star 2 \star 3 \star \dots \star 2019,$$

где каждая звездочка — либо знак “+”, либо знак “−”. Сережа может за одно действие выбрать не крайнее число и поменять оба знака рядом с ним на противоположные (плюс на минус, минус на плюс). Докажите, что такими операциями Сережа может получить выражение, значение которого делится на 7.

2. Дана окружность и точка O на ней. Вторая окружность с центром O пересекает первую в точках P и Q . Точка C лежит на первой окружности, а прямые CP и CQ вторично пересекают вторую окружность в точках A и B . Докажите, что $AB = PQ$.

3. Отряд М9 проводит знакомство. На него явились n детей. У Павла Сергеевича они пронумерованы в списке числами от 1 до n . Дети выстроились в круг так, что между каждыми двумя детьми с последовательными номерами стоит одно и то же число других ребят. Соседками Жени оказались Аня и Оля. У Ани в списке номер 11, у Жени — номер 4, у Оли — номер 17. Сколько детей пришло на знакомство?

4. Дан клетчатый квадрат 131×131 , из которого вырезана одна угловая клетка. Четно или нечетно количество способов разбить этот квадрат на уголки из трех клеток?

5. На доске выписаны числа x_1, x_2, \dots, x_{100} , такие что $x_1 = 1/2$ и для любого n от 1 до 99 выполняется равенство

$$x_{n+1} = 1 - x_1 x_2 \dots x_n.$$

Докажите, что $x_{100} > 0,99$.

6. Дано 30 различных трехзначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать несколько и разбить на два равных и по количеству, и по сумме множества.