

Серия 32, Квадратичный закон взаимности–2

21 июля

1. Найдите все простые числа, для которых 5 является квадратичным вычетом.
2. Докажите, что простых чисел вида $10k - 1$ бесконечно много.
3. Докажите, что число $2^n + 1$ не имеет простых делителей вида $8k + 7$.
4. Последовательность $\{x_n\}$ определена рекурсивно: $x_1 = a$ при некотором натуральном a , а также $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Пусть $y_n = 2^{x_n} - 1$. Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может быть в последовательности $\{y_n\}$?
5. Дано $k = 2^{2^n} + 1$. Докажите, что k простое тогда и только тогда, когда k является делителем числа $3^{\frac{k-1}{2}} + 1$.
6. Даны натуральные числа n и k . Оказалось, что $\varphi(5^n - 1) = 5^k - 1$. Докажите, что $(n, k) > 1$.