Серия 3, триангуляция и лемма Шпернера

5 июля

0. Сформулируйте и докажите задачу про Столицу и город Дальний.

1. Дом имеет вид клетчатого прямоугольника, в котором клетки — это комнаты, стороны клеток — двери. Дверь на стороне прямоугольника назовем наружной. Тупиком назовем комнату, в которой открыта ровно одна дверь, причем не наружная. Известно, что в каждой комнате открыто не более двух дверей. Докажите, что число тупиков и число наружных дверей имеют одинаковую четность.

Определение 1. *Триангуляцией* многоугольника называется такое разбиение его на треугольники, что любые два треугольника разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или целую сторону. Эти треугольники называются *гранями* триангуляции, их стороны — ее *ребрами*, их вершины — ее *вершинами*. Используя предыдущие задачи решите следующую.

2. *Лемма Шпернера.* Вершины триангуляции треугольника ABC помечены числами 1, 2 или 3 таким образом, что каждая вершина триангуляции, лежащая на стороне AB, имеет пометку 1 или 2; на стороне BC — пометку 2 или 3; на стороне CA — пометку 3 или 1. Докажите, что число граней триангуляции, несущих три различные пометки, нечетно.

3. Вершины клеток клетчатого прямоугольника $ABCD$ помечены числами 1, 2, 3 или 4. При этом соблюдается граничное условие: вершина, лежащая на AB, помечена числом 1 или 2; на BC — 2 или 3; на CD — 3 или 4; на DA — 4 или 1. Докажите, что найдется клетка, имеющая не менее трех различных пометок.

4. Каждую сторону треугольника поделили на n равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные его сторонам. В результате получилась триангуляция треугольника. Каждую вершину триангуляции покрасили в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что число двуцветных ребер триангуляции четно.

5. Дан куб $100 \times 100 \times 100$. Его покрыли квадратиками 1×1 без пропусков и наложений. В каждом квадрате провели обе диагонали, а стороны всех квадратиков стерли. Докажите, что из любой вершины куба есть путь в какую-то другую вершину куба, проходящий по отмеченным диагоналям.

6. Для произвольной триангуляции многоугольника докажите равносильность условий:

(a) вершины триангуляции можно отметить так, что каждая грань несет три разных отметки 0, 1 и 2;

(b) все грани триангуляции можно правильно раскрасить в два цвета так, что любые две соседние грани окрашены различно;

(c) из каждой внутренней вершины триангуляции выходит четное число ребер.

7. Квадрат $[0, 2n+1] \times [0, 2n+1]$ координатной плоскости разрезан на треугольники так, что координаты всех вершин целочисленны. Докажите, что найдется треугольник с нецелой площадью.