Серия 9, разнобой–1

7 июля

1. Дано целое число $n > 1$. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим. Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше — тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

2. Прачечная в ЛМШ работает так. В прачечной есть три одинаковых бака для одежды: для белого, для цветного и для темного белья. После каждого учебного дня дети приносят суммарно 50 кг одежды. Это все распределяется по бакам. Самый заполненный бак целиком сваливают в машину и стирают. При каком наименьшем объеме баков они никогда не переполнятся, как бы ни старались дети? Как известно, смена в ЛМШ бесконечна.

3. Существует ли многочлен $f(x, y)$ от двух вещественных переменных, который всюду отличен от нуля, но принимает значения, сколь угодно близкие к нулю?

4. **(a)** Пусть дано множество A точек на прямой, являющееся объединением счетного числа отрезков. Можно ли из этих отрезков выделить счетное подмножество так, чтобы выполнялось два условия:

- множество A покрыто этими отрезками;
- никакие три отрезка не имеют общую точку.

(b) А если каждая точка покрыта конечным количеством отрезков?

5. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон BC, CA и AB в точках X, Y и Z соответственно. На плоскости отметили точку K. Серединные перпендикуляры к отрезкам KX, KY и KZ пересекают прямые BC, CA и AB в точках X_1, Y_1 и Z_1 соответственно. Докажите, что точки X_1, Y_1 и Z_1 лежат на одной прямой.

6. Даны окружность, её хорда AB и середина W меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности, проведённая из точки C, пересекает касательные, проведённые из точек A и B, в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.