Интерполяционный многочлен.

10 июля • необычная группа

Определение. Построение такого многочлена $P(x)$ степени не выше n, что $P(x_i) = y_i$, где $0 \leqslant i \leqslant n$, называется *интерполяцией.*

1. (а) Постройте многочлен $\ell(x)$, который принимает значения 0 в точках x_1, x_2, …, x_k, а в остальных точках отличен от 0.

(б) Постройте многочлен $\ell_k(x)$ степени n, который в точке x_k принимает значение y_k, а в точках x_i — значение 0 ($0 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq k$).

(в) Теорема. Пусть $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — действительные числа. Докажите, что для любых $y_1, y_2, \ldots, y_n$ существует единственный многочлен $P(x)$ степени не выше n, такой, что $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \ldots, P(x_n) = y_n$. Данный многочлен называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

2. Постройте многочлен $P(x)$ второй степени такой, что $P(1) = 2$, $P(3) = 13$, $P(5) = 36$.

3. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трехчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трехчлена.

4. Докажите, что для различных чисел a, b, c, d

$$\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)} = -1.$$

5. Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что хотя бы одно из чисел $|3^{n+1} - P(n+1)|$, …, $|3^1 - P(1)|$, $|1 - P(0)|$ не меньше 1.

6. Докажите, что если $P(x)$ – многочлен, степень которого меньше n, то дробь $\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}$ ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные попарно различные числа) может быть представлена в виде суммы n простейших дробей: $\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$, где $A_1, \ldots, A_n$ — некоторые константы.

Определение. Многочлен называется целозначным, если в целых точках он принимает целые значения.

7. (а) Докажите, что многочлены вида $C_x^k = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$ — целозначны, ($C_x^0 = 1$). Такие многочлены называются биномиальными.

(б) Докажите, что всякий целозначный многочлен степени n представляется линейной комбинацией многочленов $C_x^0, C_x^1, \ldots, C_x^n$ с целыми коэффициентами.

(в) Если многочлен $P(x)$ степени n целозначен, то $n!P(x)$ имеет целые коэффициенты.

8. Интерполяционный многочлен Ньютона. Интерполяционный многочлен однозначно определяется формулой: $P(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + C_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$. Доказать.

9. Докажите, что если многочлен f имеет степень n и $|f(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in [0, n]$, то $f(-1) \leqslant 2^{n+1} - 1$.