

Точки и выпуклая оболочка

5 июля • обычная группа

Определение. Множество точек X на плоскости называется *выпуклым*, если для любых точек $A, B \in X$ все точки отрезка AB тоже принадлежат X . Примеры выпуклых множеств: точка, отрезок, луч, полуплоскость, круг, внутренность треугольника.

1. Докажите, что если три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой, принадлежат выпуклому множеству X , то и все точки внутри треугольника ABC принадлежат X .

2. Всегда ли является выпуклым а) объединение; б) пересечение двух выпуклых множеств?

Определение. *Выпуклой оболочкой* множества X называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих X .

3. а) Чем является выпуклая оболочка множества, состоящего из двух различных точек? б) А из трех?

4. Дано множество точек A_1, \dots, A_n, A_{n+1} . Пусть G — выпуклая оболочка множества точек A_1, \dots, A_n . Пусть H — фигура, являющаяся объединением всех отрезков, соединяющих A_{n+1} со всеми точками G .

а) Докажите, что H — выпуклая фигура.

б) Докажите, что H — выпуклая оболочка множества всех точек.

с) Докажите, что H — многоугольник.

Теорема. Выпуклая оболочка конечного множества точек является точкой, отрезком либо выпуклым многоугольником.

5. Докажите, что любые 4 точки плоскости можно разбить на две группы (необязательно по 2 точки в группе) так, что выпуклые оболочки этих групп пересекаются.

6. Докажите, что среди любых 5 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать 4, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.

7. На плоскости даны n точек, причем любые 4 из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что все точки являются вершинами выпуклого n -угольника.

8. На плоскости расположены несколько правильных n -угольников. Докажите, что выпуклая оболочка их вершин имеет не менее n углов.

9. На плоскости отмечено конечное количество точек, не все на одной прямой. В каждой точке записано число, причем сумма чисел во всех точках, лежащих на одной прямой, равна 0. Докажите, что все числа равны 0.

10. На плоскости дано 22 точки, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары так, чтобы отрезки, заданные парами, пересекались по крайней мере в пяти различных точках.