Серия 15, непрерывность

10 июля

Определение 1. *Подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$ называется любая последовательность $\{x_{n_k}\}$, где n_k — возрастающая последовательность натуральных чисел.

Теорема. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Определение 2. Функция f называется *непрерывной в точке* a, если для любой последовательности x_n, сходящейся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(a)$.

Определение 3. Функция f называется *непрерывной в точке* a, если $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0:$ при $|a-x| < \delta$ имеем $|f(a)-f(x)| < \varepsilon$.

Теорема. Определения 2 и 3 равносильны.

Определение 4. Функция называется *непрерывной*, если она непрерывна во всех точках определения.

Определение 5. Пусть функции f и g непрерывны в точке a. Тогда функции $f+g$ и $f\cdot g$ непрерывны в точке a. Если $g(a)\neq 0$, то f/g тоже непрерывна в точке a.

Определение 6. Если функция g непрерывна в точке a, а функция f непрерывна в точке $g(a)$, то функция $f(g)$ непрерывна в a.

Две теоремы выше позволяют без труда доказывать непрерывность разнообразных функций. Например, непрерывность любого многочлена или функции $\sin(x^2+3x+\ln x)$.

Теорема. (О промежуточном значении) Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция f принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Теорема. (Вейерштрасса) Множество значений, которые принимает непрерывная функция, определенная на отрезке, образует отрезок.

1. Пусть $f\colon [0,1]\to[0,1]$ — непрерывная функция. Докажите, что найдётся $x\in[0,1]$ такой, что $f(x)=x$.

2. Пусть $f\colon [0,1]\to[0,1]$ — непрерывная функция, причём $f(0)=f(1)=0$.

(a) Верно ли, что на графике f найдётся горизонтальная хорда длины $1/3$?

(b) При каких ℓ обязательно найдётся горизонтальная хорда длины ℓ?

3. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

4. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что образом любого отрезка является отрезок такой же длины.