Два велосипедиста

9 *июля* • *обычная группа*

1. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q, одновременно начали движение из точки P по часовой стрелке с равными угловыми скоростями два велосипедиста A и B.

(a) Докажите, что прямая AB все время проходит через точку Q.

(b) Докажите, что треугольники PAB подобны друг другу и подобны треугольнику PO_1O_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей.

(c) Найдите ГМТ середин отрезков AB.

(d) Докажите, что точки A и B постоянно равноудалены от некоторой фиксированной точки X.

(e) Докажите, что угол QPX — прямой.

2. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO — прямой.

Указание. Рассмотрите велосипедистов, движущихся из точки F.

3. Дан треугольник ABC и окружность с центром в точке O, проходящая через вершины B и C и повторно пересекающая прямые AB и AC в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников APQ и ABC имеют ровно две общие точки A и M. Тогда угол OMA — прямой.

4. (О бабочке). Через точку A, не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна — в точках P_1, P_2, другая — в точках Q_1, Q_2. Произвольная прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках M_1, M_2, а описанные окружности треугольников AP_1Q_1 и AP_2Q_2 — в точках N_1 и N_2 соответственно. Тогда $N_1M_1 = N_2M_2$.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть его диагонали пересекаются в точке E, точки M и N — их середины. Вокруг треугольников ABE, BEC, CED, DEA описаны окружности, причем первая и третья пересекаются вторично в точке L, вторая и четвертая — в точке K. Доказать, что точки M, K, N, L лежат на одной окружности.