Серия 25, pqr–метод

17 июля

Для трёх комплексных чисел a, b, c введём обозначения: $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$, $r = abc$.

1. Докажите, что a, b, c — корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ и других корней нет.

2. Докажите, что по вещественным p, q, r однозначно восстанавливаются a, b, c, причём либо a, b, c вещественные, либо одно вещественное, а другие два сопряжены.

3. Докажите, что число $(a - b)(b - c)(c - a)$ вещественно, когда a, b, c — вещественны, и чисто мнимо в противном случае.

4. Докажите, что

$$(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 = T(p, q, r).$$

5. Критерий вещественности. Пусть даны p, q, r. Тогда a, b, c — корни уравнения $x^3-px^2+qx-r = 0$ — вещественны тогда и только тогда, когда $T(p, q, r) \geqslant 0$.

6. Лемма о неотрицательности. Докажите, что неравенства $p, q, r, T(p, q, r) \geqslant 0$ равносильны тому, что a, b, c — неотрицательные вещественные числа.

Назовём тройку p, q, r *допустимой*, если она удовлетворяет лемме о неотрицательности.

Лемма о r. Пусть даны $p = p_0, q = q_0$. Докажите, что для минимального r такого, что тройка p_0, q_0, r допустима, в соответствующей тройке корней есть или два равных, или одно из них равно 0. Для максимального r в соответствующей тройке корней есть два равных.

Лемма о q. Пусть даны $p = p_0, r = r_0$. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что тройка p_0, q, r_0 допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных.

Лемма о p. Пусть даны $q = q_0, r = r_0$. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что тройка p, q_0, r_0 допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных.

7. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + ac + bc).$$

8. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geqslant 8.$$

9. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{1 + 2ab} + \frac{1}{1 + 2bc} + \frac{1}{1 + 2ac} \geqslant \frac{2}{1 + abc}.$$

10. Известно, что $a, b, c \geqslant 1$ и $a + b + c = 9$. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant \sqrt{ab + ac + bc}.$$

11. a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b}\right).$$

12. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$2 \geqslant ab + bc + ac - abc.$$