

# Многочлены 1. Теорема Безу

5 июля • обычная группа

**Определение.** Разделить многочлен  $P(x)$  на ненулевой многочлен  $Q(x)$  с остатком — это значит найти такие многочлены  $H(x)$  (*неполное частное*) и  $R(x)$  (*остаток*), что выполнено равенство  $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$ , причем  $\deg R(x) < \deg Q(x)$  или  $R(x) = 0$ .

**Теорема Безу.** Остаток от деления многочлена  $P(x)$  на двучлен  $x - a$  равен  $P(a)$ , т.е.  $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$ , притом  $\deg Q(x) = \deg P(x) - 1$ .

1. (а) Многочлен  $P(x)$  делится на  $(x - a)$  тогда и только тогда, когда  $P(a) = 0$ .

(б) Докажите, что число корней многочлена не превосходит его степени.

(с) Докажите, что если значения двух многочленов, степень каждого из которых не превосходит  $n$ , совпадают в  $n + 1$  различных точках, то эти многочлены равны.

(d) Если многочлен  $P(x)$  делится на  $Q(x)$ , то корни многочлена  $Q(x)$  являются корнями многочлена  $P(x)$ .

2. При каких  $a$  и  $b$  многочлен  $P(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$  делится на  $x^2 - 3x + 2$ ?

3. Пусть  $P(x)$  — многочлен такой, что  $P(x) = P(x + 1)$ . Докажите, что  $P(x)$  — константа.

4. Многочлен  $P(x)$  дает остаток 2 при делении на  $x - 1$  и остаток 1 при делении на  $x - 2$ . Какой остаток дает  $P(x)$  при делении на многочлен  $(x - 1)(x - 2)$ ?

5. Найдите все целые  $x$ , при которых число  $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 1$  делится на  $x^2 + 1$ .

6. Докажите, что

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \\ + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} = 1.$$

7. Про многочлен  $P(x)$  степени 10 с действительными коэффициентами известно, что  $P(1) = P(-1), \dots, P(5) = P(-5)$ . Докажите, что  $P(x) = P(-x)$  для любого  $x$ .

8. Найдите все многочлены  $P(x)$ , удовлетворяющие тождеству

$$xP(x-1) = (x-20)P(x).$$

9. Докажите, что при нечетном  $m$  выражение  $(x + y + z)^m - x^m - y^m - z^m$  делится на  $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ .