Серия 18, производная

12 июля

Упражнение. У функции $f(x) = x^3 - 6x + 2$. Найдите **(a)** промежутки монотонности; **(b)** минимум и максимум на $[0;3]$. *Указание.* Рассмотрите выражение $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

Определение 1. *Производной* функции f в точке a называется значение предела $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Если такой предел существует, то функция f называется *дифференцируемой* в точке a.

Определение 2. По индукции определим n-ю производную: $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$.

Лемма 1. Функция f имеет производную $f'(a)$ в точке a тогда и только тогда, когда $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$, где остаточный член $r(x)$ “мал” по сравнению с линейной частью, то есть $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$.

Следствие. Если функция f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в a.

Лемма 2. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке a. Тогда функции $f+g$ и fg тоже дифференцируемы в a, причём $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$ и $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.

Лемма 3. Пусть функции g и f дифференцируемы в точках a и $g(a)$ соответственно. Тогда функция $f(g(x))$ дифференцируема в a, причём $(f(g(a)))' = f'(g(a))g'(a)$.

Следствие. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке a и $f'(a)$ не равно 0. Тогда $\left(\frac{f}{g}\right)$ дифференцируема в точке a и $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Упражнение. Найдите производную

(a) $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$; **(b)** $\frac{1}{x}$; **(c)** $\sin x$; **(d)** $\sqrt{x}$.

Теорема. (Ролля, или о корне производной.) Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), причём $f(a) = f(b)$. Тогда найдётся точка $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема. (Лагранжа.) Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда найдётся точка $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема. Пусть функция f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Функция f монотонно возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a,b)$. Аналогично функция монотонно убывает тогда и только тогда, когда $f'(x) < 0$ при всех $x \in (a,b)$.

1. На доске написан многочлен $x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$. Двое по очереди ставят коэффициенты на пропущенные места. Первый хочет добиться того, чтобы многочлен имел единственный вещественный корень. Сможет ли второй ему помешать?

2. Исходно на доске написаны многочлены $x^2 - 4x$ и $x^3 - 3x^2 + 5$. Если на доске написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на неё многочлены $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться многочлен вида $x^n - 1$ (при натуральном n)?