Серия 16, теорема Геринга и следствия из неё

11 июля

Определение 1. Пусть V_1 и V_2 — подмножества вершин графа G. Множество вершин M называется (V_1, V_2)-*разделяющим множеством*, если любой путь из V_1 в V_2 пересекается с M.

1. Теорема Геринга. Пусть V_1 и V_2 — подмножества вершин графа G, а $k \in \mathbb{N}$. Тогда верно одно из двух Утверждений:

Утверждение 1. В G найдётся (V_1, V_2)-разделяющее множество мощности $\leqslant k-1$.

Утверждение 2. В G найдётся k непересекающихся путей из V_1 в V_2 (в том числе по вершинам множеств V_1 и V_2).

(a) Докажите, что оба условия не могут выполняться одновременно.

(b) Докажите, что если Утверждение 1 неверно, то верно второе, индукцией по количеству вершин. Преобразуйте граф так, чтобы 1-е утверждение не выполнялось, и при убирании некоторого ребра xy существовало (V_1, V_2)-разделяющее множество Z, где $|Z| < k$. Исследуйте множества $Z \cup x$ и $Z \cup y$.

2. Теорема Менгера. Пусть a и b — две вершины связного графа G, не соединенные ребром. Тогда наименьшее количество вершин (a, b)-разделяющего множества равно количеству непересекающихся путей между a и b.

3. Лемма Холла. Даны m юношей и несколько девушек. Если для любого $k = 1$, $2, \ldots, m$ любые k юношей знакомы в совокупности хотя бы с k девушками, то можно одновременно поженить каждого юношу на знакомой девушке (иными словами, существует паросочетание, покрывающее всех мальчиков).

4. Обобщенная лемма Холла. Даны натуральное число s, а также m юношей и несколько девушек. Если Для любого $k \geqslant s$ любые k юношей знают не меньше, чем $k - s$ девушек, то можно одновременно поженить хотя бы $m - s$ юношей.

5. Теорема Кёнига. Наибольшее количество рёбер в паросочетании в двудольном графе равно наименьшему количеству вершин в вершинном покрытии графа G (вершинное покрытие — это такое множество вершин, что каждое ребро содержит хотя бы одну из них).

Определение 2. Граф G называется k-*связным*, если он имеет больше чем k вершин и после удаления менее чем k любых вершин граф остаётся связным.

6. Теорема Дирака. Пусть $k \geqslant 2$. В k-связном графе для любых k вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.

7. Пусть A, B — два множества вершин в ориентированном (возможно, с кратными ребрами и петлями) конечном графе G. Назовем множество $C \in A$ *хорошим*, если из A в B существует $|A|$ непересекающихся по вершинам путей. Докажите, что все максимальные по включению хорошие множества содержат одинаковое количество элементов.