Поворотная гомотетия.

7 июля • *"необычная группа"*

Определение. *Поворотной гомотетией* с центром в точке O, коэффициентом k и ориентированным углом α называется преобразование плоскости, переводящее любую точку плоскости X в такую точку X', что $kOX = OX'$ и $\angle XOX' = \alpha$.

Обычно это преобразование обозначают $H_O^{\alpha,k}$. Заметим, что $H_O^{\alpha,k} = R_O^\alpha \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\alpha$, где $= R_O^\alpha$ —поворот, а H_O^k —гомотетия.

Пример. Дан квадрат $ABCD$ с центром O. Точка K — середина отрезка AB. Постройте хотя бы один центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок BK в AO.

1. **(a)** Треугольники YAB и $YA'B'$ подобны и одинаково ориентированы. Докажите, что YAA' и YBB' тоже подобны и одинаково оринтированы.

(b) Докажите, что почти для любых (для каких?) двух отрезков AB и $A'B'$ существует единственная поворотная гомотетия, переводящая A в A' и B в B'. Кроме того, её центр — *точка Микеля* для прямых AB, $A'B'$, AA' и BB'.

(c) Какому углу на картинке из пункта (a) равен угол между прямыми AA' и BB'.

2. Середины сторон BC и $B'C'$ правильных одинаково оринтированных треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают. Найдите угол между AA' и BB' и отношение длин отрезков AA' и BB'.

3. Квадраты $ABCD$ и $AXYZ$ одинаково ориентированы. Докажите, что прямые BX, CY и DZ пересекаются в одной точке.

4. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC проведена высота BH. В треугольники ABH и CBH вписаны окружности, касающиеся AB и BC в точках X и Y. Докажите, что $\angle XBY = 90°$.

5. На диагонали BD вписанного четырехугольника $AXYZ$ выбрана такая точка K, что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' — центры врисанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X. Докажите, что точки A, X, I и D лежат на одной окружности.

6. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M. Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM, перпендикулярна биссектрисе угла AKB.

7. Две окружности пересекаются в точках A и B, а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$. Пусть P — середина отрезка BN, а Q — середина отрезка MC. Докажите, что $\angle APQ = \angle ANC$.