Серия 23, ад. комби

15 июля

1. Докажите, что в множестве из n чисел найдется подмножество с суммой, делящейся на n.

2. Опишите все множества из $n-1$ чисел, для которых не найдется подмножества с суммой, делящейся на n.

3. Пусть S — множество из n чисел, взаимно простых с n. Докажите, что любой остаток по модулю n равен сумме некоторых элементов S.

4. Пусть S — множество из $2n-1$ чисел. Предположим, что некоторый вычет a по модулю n встречается в множестве не менее $[n/2]$ раз. Докажите, что в S можно найти ровно n чисел с суммой, делящейся на n.

Подсказка. Можно считать, что этот вычет a нулевой.

Теорема. *(Коши-Дэвенпорт).* Пусть A и B — два множества вычетов по простому модулю p. Определим сумму $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$. Тогда выполнено $|A+B|\geqslant \min(p,|A|+|B|-1)$.

Упражнение. Разберите случай $|A|+|B|>p$ отдельно.

Предложение 1. При сдвиге множества A на c мощность суммы не меняется.

Предложение 2. Если $A\cap B\neq\varnothing$, то $A\cap B + A\cup B\subseteq A+B$.

Предложение 3. Завершите доказательство теоремы, используя принцип минимального контрпримера.

Пример использования. Сравнение $x^2+y^2\equiv k$ по простому модулю p имеет решение для любого k.

Теорема. *(Эрдеш-Гинзбург-Зив)* Из любых $2n-1$ чисел можно выбрать ровно n с суммой, делящейся на n.

5. Докажите, что если ЭГЗ верна для a и для b, то она верна и для ab.

6. Докажите ЭГЗ для простого p.

7. Опишите все множества из $n-2$ элементов, для которых не найдется подмножества с суммой, делящейся на n.

8. Пусть p — простое число. Дано множество S из $2p-1$ чисел, причем остатки чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ попарно различны. Докажите, что в S существует подмножество из p элементов с суммой, делящейся на p, содержащее не более одного числа из $a_1,a_2\ldots,a_n$.

9. Пусть S — множество из 502 чисел, причем оно содержит ровно 10 различных по модулю 541. Докажите, что в S найдется подмножество с суммой, делящейся на 541.