Серия 8, гармонический четырехугольник

7 июля

Определение. Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

Определение. Прямая, симметричная медиане треугольника относительно биссектрисы проведенной из той же вершины, называется *симедианой.*

1. **(a)** Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2} = \frac{|AD|^2}{|DC|^2}.$$

(b) Докажите, что каждая диагональ гармонического четырехугольника является симедианой треугольников, на которые разбивает четырехугольник другая диагональ.

(c) Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является симедианой треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ гармонический.

Следствие. Гармонический четырехугольник однозначно задается тремя своими вершинами (порядок обхода вершин также известен).

Определение. Точки A, B, C, D лежат на окружности S. Пусть X — произвольная точка этой окружности. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D называется величина $(A, B, C, D) = (XA, XB, XC, XD)$.

Эта величина не зависит от выбора точки X. В случае, если одна из точек A, B, C, D совпадает с X, в качестве соответствующей прямой рассматривается касательная к окружности S.

2. **(a)** Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей, P — точка пересечения касательной к его описанной окружности в точке B и прямой AC. Докажите, что $(A, C, M, P) = -1$.

(b) Докажите, что вписанный четырехугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда касательные к его описанной окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC, либо параллельны этой прямой.

3. Пусть N — середина диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $ABCD$ — гармонический тогда и только тогда, когда $\angle BNC = \angle DNC$.

4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, в котором биссектрисы углов A и C пересекаются на диагонали BD. Докажите, что биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC.

5. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены касательные AB и AC к этой окружности, а также прямая, пересекающая окружность в точках X и Y. Докажите, что точки A, B, C, и середина отрезка XY лежат на одной окружности.

6. В окружности S проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведенная через C и середину AB, вторично пересекает S в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

7. В угол BAC вписана окружность ω, касающаяся сторон угла в точках B, C. Хорда CD окружности ω параллельна прямой AB. Прямая AD второй раз пересекает окружность ω в точке E. Докажите, что прямая CE делит отрезок AB пополам.

8. Из точки P к окружности ω проведены отрезки касательных PA, PB, точка C диаметрально противоположна точке B. Докажите, что прямая CP делит пополам перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую BC.

9. Две неравные окружности ω_1 и ω_2 касаются внутренним образом окружности ω в точках A и B. Пусть C и D точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Прямая CD пересекает ω в точках E и F. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках E и F, пересекаются на прямой AB.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O. Биссектриса угла ABD пересекает отрезок AD в точке K и окружность ω второй раз в точке M. Биссектриса угла CBD пересекает отрезок CD в точке L и окружность ω второй раз в точке N. Известно, что прямые KL и MN параллельны. Докажите, что описанная окружность треугольника MON проходит через середину отрезка BD.