

Серия 21.5, еще задачи

14 июля

1. Точка O не лежит на сторонах и их продолжениях треугольника ABC . A_1 — точка пересечения прямой BC с перпендикуляром к OA , проходящим через точку O . Аналогично определяются точки B_1, C_1 . Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

2. Две окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке M . На окружности ω_2 выбрана произвольная точка A . Точки B и C на ω_1 таковы, что AB и AC — касательные к ω_1 . Прямые BM и CM пересекают ω_2 в точках E и F . Пусть D — точка пересечения касательной из A к ω_2 с прямой EF . Докажите, что все такие точки D лежат на одной прямой.

3. A_1, B_1, C_1 — основания высот остроугольного треугольника ABC . A_1B_1 пересекает AB в точке K , CC_1 пересекает описанную окружность треугольника в точке L , M — середина AB . Докажите, что точки C, K, L, M лежат на одной окружности.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . AB пересекает CD в точке E , AD пересекает BC в точке F . Описанная окружность треугольника AEF пересекает ω в точке G , а описанная окружность треугольника CEF пересекает ω в точке H . Докажите, что AC, BD , и GH пересекаются в одной точке.

5. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Диагональ AC пересекает вписанную окружность в точках P и Q . M — середина PQ . Докажите, что $\angle BMC = \angle DMC$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD повторно пересекаются в точке K , а описанные окружности треугольников AOD и BOC — в точке L . Окружность ω_1 проходит через точку K и основания перпендикуляров из K на AB и CD . Аналогично определим ω_2 . Докажите, что середина KL лежит на радикальной оси ω_1 и ω_2 .