

## Серия 6, рождественская теорема Ферма

6 июля

**Упражнение.** Докажите, что в виде суммы двух квадратов целых чисел представляются число 2 и число  $p^2$ .

1. Два числа представляются в виде суммы двух квадратов. Докажите, что их произведение представляется в виде двух квадратов.

2. Число  $n$  представляется в виде суммы двух квадратов. Докажите, что в разложении  $n$  на простые множители все простые делители вида  $4k + 3$  входят в четной степени.

3. *Лемма Туэ.* Пусть  $n$  — натуральное число, а  $a$  — целое. Тогда найдутся такие целые  $x$  и  $y$ , что  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $ax - y : n$ , и  $|x|, |y| \leq \sqrt{n}$ .

4. С помощью леммы Туэ докажите, что простое  $p = 4k + 1$  представляется в виде суммы двух квадратов.

5. Опишите все числа, представимые в виде суммы двух квадратов.

6. Докажите, что  $p = 4k + 1$  представляется в виде суммы двух квадратов единственным способом.

7. Докажите, что уравнение  $x^2 + y^2 = z^5 + z$  имеет бесконечно много целых решений, в которых  $x$ ,  $y$  и  $z$  попарно взаимно просты.

8. Какие простые числа  $p$  представляются в виде  $p = a^2 + 2b^2$ ?

9. Сколькими способами  $n$  представляется в виде суммы двух квадратов?