Другая симметрия

20 июля

Определение. Многочлен f от n переменных называется *симметрическим*, если для любой перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$, обозначенной через σ,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right).$$

Обозначим через

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\
\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\
&\vdots \\
\sigma_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1x_2\ldots x_{n-1} + x_1\ldots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2\ldots x_{n-1}x_n, \\
\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1x_2\ldots x_n.
\end{aligned}$$

Будем называть такие многочлены *элементарными симметрическими.*

0. a) Сколько одночленов в σ_k?

b) Докажите, что если f_1, f_2 — симметрические многочлены от n переменных, а c — произвольная вещественная константа, то cf_1, $f_1 + f_2$, f_1f_2 симметрические.

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены
a) $x^2 + y^2 + z^2$, **b)** $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$, **c)** $x^3 + y^3 + z^3$,
d) $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_i - x_j)^2$.

2. (Теорема Виета.) a) Пусть c_1, c_2 и c_3 — корни многочлена $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Докажите, что

$$a_2 = -(c_1 + c_2 + c_3), \quad a_1 = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1, \quad a_0 = -c_1c_2c_3.$$

b) Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — корни многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$. Тогда для любого натурального $1 \leqslant k \leqslant n$

$$a_k = (-1)^k\sigma_k(c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Определение. Будем говорить, что одночлен $x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ *лексикографически больше* одночлена $x_1^{j_1}\ldots x_n^{j_n}$ в том и только том случае, когда $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \succ (j_1, \ldots, j_n)$. Страшим членом называется наибольший в лексикографическом смысле.

Теорема. Любой симметрический многочлен $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ единственным образом представляется в виде

$$f = g(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

где $g \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ зависит только от f.

3. a) Докажите теорему для $n = 2$.

b) Пусть $x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ — старший член симметрического многочлена f. Докажите, что $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots \geqslant i_n$.

c) Выразите через элементарные симметрические какой-нибудь многочлен со старшим членом $x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$.
d) Докажите, что нужный многочлен g существует.
e) Докажите, что нужный многочлен g единственный.

Подсказка: лексикографически уменьшайте старший член...

Комментарий: при доказательстве теоремы нельзя пользоваться самой теоремой!

4. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3-2x^2+x+1=0$. Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа
a) $y_1=x_2+x_3$, $y_2=x_1+x_3$, $y_3=x_1+x_2$;
b) $y_1=x_2x_3$, $y_2=x_1x_3$, $y_3=x_1x_2$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=42, \\ x^3+y^3+z^3=60. \end{cases}$

6. Пусть

$$x+y+z=u+v+t,$$
$$x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+t^2,$$
$$x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+t^3.$$

Докажите, что при любом натуральном n выполнено $x^n+y^n+z^n=u^n+v^n+t^n$.

7. Положительные действительные числа $a_1,\dots,a_n$ и k таковы, что $a_1+\dots+a_n=3k$, $a_1^2+\dots+a_n^2=3k^2$ и $a_1^3+\dots+a_n^3>3k^3+k$. Докажите, что какие-то два из чисел $a_1,\dots,a_n$ отличаются больше чем на 1.