Об одном методе

22 июля

Пусть есть два набора чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
Определение. Пусть $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3 \geqslant \ldots \geqslant y_n$. Будем говорить, что набор x *мажорирует* набор y, и писать $x \succ y$, если выполняются следующие условия:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$

2) для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ выполняется неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} y_i$

Определение$'$. Набор x *мажорирует* набор y если для любого поднабора из k игреков $y_{n_1}, \ldots, y_{n_k}$ найдутся k иксов $x_{m_1}, \ldots, x_{m_k}$ таких, что

$$x_{m_1} + x_{m_2} + \ldots + x_{m_k} \geqslant y_{n_1} + y_{n_2} + \ldots + y_{n_k}.$$

И при этом полные суммы наборов одинаковы.

1. Докажите, что определение и определение$'$ равносильны.

2. a) Докажите, что если $x \succ y$, то если добавить к каждому из них один и тот же элемент c, то $x_1 \succ y_1$, где $x_1 = x \cup \{c\}$ и $y_1 = y \cup \{c\}$.
b) Докажите, что если к набору x и набору y добавить некоторое количество элементов, (т.е. добавить одинаковый набор чисел) тогда мажорация не исчезнет.

3. Верно ли, что если $x \cup \{c\} \succ y \cup \{c\}$, то $x \succ y$?

4. a) Пусть $x \succ y$ и $x \neq y$. Докажите, что существует набор z не совпадающий ни с x ни с y такой, что $x \succ z \succ y$.
b) Пусть в наборе x есть два элемента x_k и x_l такие, что $x_k > x_l$.
Пусть ε таково, что $x_k > x_k - \varepsilon \geqslant x_l + \varepsilon > x_l$. Назовем *сближением* набора x новый набор $y = x \setminus \{x_k, x_l\} \cup \{x_k - \varepsilon, x_l + \varepsilon\}$, тогда $x \succ y$.
c) Докажите, что если $x \succ y$, то существуют промежуточные наборы $x = z_0 \succ z_1 \succ \ldots \succ z_m = y$ такие, что z_{j+1} является сближением z_j.

Определение. *Полной орбитой набора* называется

$$O(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{n_1} x_{\sigma(2)}^{n_2} \ldots x_{\sigma(k)}^{n_k}.$$

5. a) Пусть $n_1 > n_1 - \varepsilon \geqslant n_2 + \varepsilon > n_2$. Докажите, что

$$O(n_1, n_2, \ldots, n_k) \geqslant O(n_1 - \varepsilon, n_2 + \varepsilon, \ldots, n_k).$$

b) Пусть набор $(n_1, n_2, \ldots n_k) \succ (m_1, m_2, \ldots m_k)$. Докажите, что

$$O(n_1, n_2, \ldots, n_k) \geqslant O(m_1, m_2, \ldots, m_k).$$

Для натуральных чисел n_i и m_i это неравенство называется **неравенством Мюрхеда.**

6. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}}{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}.$$