Серия 19, комплексные числа

13 июля

Определение 1. *Комплексным числом* называют выражение вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, а i — символ, удовлетворяющий соотношению $i^2 = -1$. Если $z = a + bi$, то числа a и b называют соответственно *вещественной* и *мнимой* частью числа z. $(Re(z) = a, Im(z) = b)$.

Определение 2. *Сопряженным* числом к $z = a + bi$ называют $\overline{z} = a - bi$

Комлексные числа можно интерпретировать геометрически как координатную плоскость с базисными векторами 1 (ось OX) и i (ось OY).

Определение 3. *Модулем* комплексного числа называется длина вектора, то есть $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\overline{z}$.

Отсюда получаем, что если $|z| = r$, а угол наклона вектора равен φ (это называется *аргументом* комплексного числа z), то

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

.

Упражнение. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ — комплексные числа. Найдите $\frac{z_1}{z_2}$, то есть представьте это отношение в виде $x + yi$.

Некоторые интересные тождества. Пусть a и b — комплексные числа. Докажите, что

1. $Re(a\overline{b}) = Re(\overline{a}b)$.

2. $|a+b|^2 - |a-b|^2 = 4Re(a\overline{b})$.

3. $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$.

4. Докажите равносильность двух утверждений:

(a) $Re((a-c)(\overline{c} - \overline{b})) \geqslant 0$.

(b) $|c - \frac{(a+b)}{2}| \leqslant \frac{1}{2}|a-b|$.

5. Докажите формулу Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

6. Описать множество точек, удовлетворяющих уравнению $z^n = 1$.

7. Выразите $\cos(n\varphi)$ и $\sin(n\varphi)$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

8. **(a)** Напишите уравнение прямой, проходящей через точки z_1 и z_2.

(b) Покажите, что уравнение любой прямой имеет вид $az + b\overline{z} + c = 0$.

9. Каждую сторону n-угольника в процессе обхода против часовой стрелки продолжили на ее длину. Оказалось, что концы построенных отрезков лежат в вершинах правильного n-угольника. Докажите, что исходный n-угольник тоже правильный.