

Орграфы–1

9 июля

Определение. *Ориентированный граф* — граф, каждое ребро которого является стрелкой от одной вершины ребра к другой. Путь в ориентированном графе — такая последовательность вершин, что в каждую следующую вершину ведет стрелка из предыдущей.

Определение. *Полустепенью исхода* $d^+(v)$ вершины v называется число рёбер, выходящих из вершины v . *Полустепенью захода* $d^-(v)$ вершины v называется число рёбер, входящих в вершину v .

1. В ориентированном графе 101 вершина. Некоторые из вершин соединены одним ребром. У каждой вершины, кроме вершины w , $d^+(v) = 20$ и $d^-(v) = 21$. Докажите, что в вершину w не существует пути ни из какой вершины.

2. В ориентированном графе для любых двух вершин u и v существует либо путь из u в v , либо путь из v в u . Докажите, что существует путь, который проходит через все вершины графа.

3. В ориентированном графе 101 вершина. Из любой вершины выходит ровно 40 рёбер, и в любую вершину входит ровно 40 рёбер. Докажите, что из любой вершины в любую другую существует путь длины не более чем три.

Определение. Ориентированный граф называется *сильносвязным*, если существуют пути в обе стороны между любыми двумя вершинами.

4. Докажите, что в сильносвязном ориентированном графе существует цикл, проходящий через все вершины графа.

5. В ориентированном графе существует путь между любыми двумя вершинами длины не более чем два. Оказалось, что после удаления любого ребра в этом графе, граф остается сильносвязным. Докажите, что теперь существует путь между любыми двумя вершинами длины не более чем три.

6. В связном графе на 30 вершинах ввели ориентацию рёбер так, что в каждую вершину входит хотя бы одно ребро и хотя бы одно ребро выходит. Докажите, что в граф можно добавить не более 10 ориентированных рёбер, чтобы он стал сильносвязным.

7. Полустепень исхода каждой вершины ориентированного графа не превосходит единицы. Докажите, что вершины графа можно разбить на три подмножества так, что в каждом из подмножеств не будет смежных вершин.

8. Докажите, что в полном графе, в котором более четырёх вершин, можно так ввести ориентацию рёбер, что из любой вершины в любую другую будет существовать путь длины не более чем два.

9. В ориентированном графе на 1001 вершине между любыми двумя вершинами есть ровно одно ребро. Полустепени исхода и захода каждой вершины равны 500. Докажите, что любой подграф из 668 вершин данного графа является сильносвязным.