Серия 10. Пределы

8 июля

Загадка 1. Почему площадь квадрата со стороной a равна a^2?

Загадка 2. (a) Как определяется число 2^{100}? Как его вычислить?

(b) Как определяется число $2^{3/2}$? Как его вычислить?

(c) Как определяется число $2^{\sqrt{2}}$? Как его вычислить?

1. Найдите хотя бы одно такое N, чтобы для любого $n > N$ выполнялось $a_n > 10^9$, если a_n равно

(a) $1,02^n$; **(b)** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$; **(c)** $\frac{n^3 + 2n^2 + 3n + 4}{5n^2 + 6n + 7}$.

2. Найдите хотя бы одну такую пару $a \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < 10^{-8}$ при всех $n > N$, где a_n равно

(a) $\frac{n^2 - n + 28}{n - 2n^2}$; **(b)** $n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$; **(c)** $0,99^n$; **(d)** $\sqrt[n]{2}$; **(e)** $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

Определение 1. Число, которое данная последовательность может уточнить с любой наперед заданной точностью назовём *пределом* этой последовательности. Более формально:

Определение 2. Число a назовём *пределом* последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (или просто $\{a_n\}$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ |a_n - a| < \varepsilon$. В этом случае говорят, что последовательность стремится или сходится к a, пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$.

3. Докажите, что у последовательности не может быть более одного предела. Приведите пример последовательности, у которой нет предела.

4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Докажите, что:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$, где c — константа;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n / b_n = a/b$, если b_n, $b \neq 0$.

5. Найдите пределы последовательностей при $n \to \infty$ **(a)** $\frac{1}{n}$; **(b)** $\frac{(n+1)^2}{3n^2}$; **(c)** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Определение 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если для некоторого M выполнено $\forall n : |a_n| < M$.

6. Аксиома полноты. Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

7. Теорема о двух милиционерах. Последовательности a_n, b_n и c_n таковы, что $\forall n\ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Оказалось, что a_n и c_n стремятся к одному и тому же числу d. Докажите, что b_n стремится к d.

8. Докажите, что существует предел последовательности при $n \to \infty$ **(a)** $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; **(b)** $\sqrt[n]{n}$.

9. Определим последовательность a_n рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Найдите предел a_n.