Двадцать вторая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 2–26 июля 2006 года.

10 КЛАСС, ГРУППА ПРОФИ

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Самойлов Л. М.
Смирнов А.В.

Вишкиль, 2006

В настоящей брошюре представлены листки занятий группы профи10 Кировской ЛМШ2006 – почти так, как они выдавались школьникам, с исправлением замеченных опечаток.

Данные тексты не являются полными материалами занятий, но лишь наборами задач к ним. Иногда листки выдавались перед занятиями, иногда в середине, иногда после.

В брошюре содержатся листки примерно 3/4 занятий. Отсутствуют материалы занятий А.Б. Скопенкова, которые главным образом были посвящены топологической теории графов. Кроме этого, в брошюре нет вступительной и заключительной олимпиад, а также двух матбоев.

3 июля

Функция Эйлера

1. Если $(a, m) = 1$, то a – *обратим* по модулю m, то есть $ab \equiv 1 \pmod m$ для некоторого b. Элемент b определен однозначно по модулю m.

Опр. Функция Эйлера $\varphi(m)$ равна количеству натуральных чисел, не превосходящих m, и взаимно простых с m.

Теорема Эйлера. Если $(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

2. Рассмотрим ряд $1/m, 2/m, \ldots, m-1/m, m/m$.

а) Докажите, что при $m > 2$ $\varphi(m)$ – четно.

б) Докажите, что $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \cdots + \varphi(d_s) = m$, где суммирование ведется по всем делителям числа m.

3. Дано число 2^{2006}. Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

Опр. При $(a, m) = 1$ существует положительное δ с условием $a^\delta \equiv 1 \pmod m$. Наименьшее из таких чисел называется *показатель, которому a принадлежит по модулю m.*

4. а) Числа $1 = a^0, a^1, \ldots, a^{\delta-1}$ по модулю m несравнимы.

б) $a^s \equiv a^t \pmod m$ $(s > t \geq 0)$ тогда и только тогда, когда $s \equiv t \pmod \delta$. В частности, $a^s \equiv 1 \pmod m$ тогда и только тогда, когда s делится на δ.

в) δ являтся делителем $\varphi(m)$.

5. Найдите все пары простых чисел p, q, что $2^p - 1 \,\vdots\, q$, а среди простых делителей числа $q - 1$ имеются только числа $2, 3, 5, 7$.

6. Если p – простое, $n > 1$ – нечетно и $3^p - 1 \,\vdots\, n$, то $n > 2p$.

3 июля

Инверсия

Опр. Рассмотрим на плоскости окружность S радиуса r с центром в точке O. *Инверсией* относительно окружности S называется преобразование плоскости без точки O, переводящее каждую точку X в такую точку X' на луче OX, что выполняется соотношение $OX \cdot OX' = r^2$. Окружность S называется окружностью инверсии. Точка O называется центром инверсии. Число r называется радиусом инверсии.

Замечание. Обратное к инверсии преобразование совпадает с ней.

Утв1. Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя.

Утв2. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.

Утв3. Окружность, проходящая через центр инверсии переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии.

Утв4. Окружность, не проходящая через центр инверсии переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии.

1. Пусть окружность S касается одновременно двух пересекающихся окружностей S_1 и S_2 разных радиусов. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания проходит через центр гомотетии окружностей S_1 и S_2.

2. Докажите, что если из четырех окружностей S_1, S_2, S_3, S_4 каждая касается двух соседних, то точки касания лежат на одной окружности.

3. На отрезках AM, MB и AB одной прямой построены полуокружности S_1, S_2 и S (в одной полуплоскости). В точке M к прямой AB восставлен перпендикуляр MD (D на S), и в криволинейные треугольники ADM и BDM вписанны окружности Σ_1 и Σ_2. Докажите, что:
а) окружности Σ_1 и Σ_2 равны;
б) общая касательная к Σ_1 и S_1 в их точке касания проходит через B.

4 июля
Инверсия

Определение. *Углом* между двумя окружностями называется угол между касательными, проведенными к ним в точке пересечения.

Замечание. Ясно, что в какой из точек пересечения рассматривать касательные не важно.

Теорема. При инверсии углы между окружностями сохраняются.

1. Докажите, что существует инверсия переводящая любые две непересекающиеся окружности в концентрические.

2. Дана окружность S и две точки A и B на ней. Проводятся всевозможные пары окружностей S_1, S_2 касающихся S в точках A и B и
а) касающихся между собой;
б) перепндикулярных друг к другу.
Найдите ГМТ точек касания (соответственно пересечения) S_1 и S_2.

3. Пусть A, B, C, D— четыре произвольные точки плоскости, не лежащие на одной прямой или на одной окружности. Докажите, что угол между окружностями, описанными вокруг треугольников ABC и ABD, равен углу между окружностями, описанными вокруг треугольников CDA и CDB.

4. Продолжим через одну стороны произвольного пятиугольника до пересечения и опишем окружности вокруг пяти образовавшихся треугольников, тогда пять точек пересечения соседних окружностей лежат на одной окружности.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в некоторую окружность и одновременно описан вокруг другой окружности. Докажите, что прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон со вписанной окружностью перепендикулярны.

4 июля
Линейные системы: теория

Опр1. Две СЛУ (от одинакового набора переменных) называются *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Опр2. Рассмотрим элементарные преобразования СЛУ трех типов:
ЭП1) к строке прибавляем другую строку, умноженную на число;
ЭП2) строку умножаем на ненулевое число;
ЭП3) меняем местами две строки.

Упр1. Если одна СЛУ получается из другой путем применения ЭП1-ЭП3, то эти СЛУ эквивалентны.

Теорема (метод Гаусса). При помощи ЭП1-ЭП3 каждую СЛУ можно привести к ступенчатому виду, т.е. к виду

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + b_{1n}x_n &= d_1 \\ \quad b_{2k}x_k + \cdots\cdots\cdots + b_{2n}x_n &= d_2 \\ \qquad b_{3l}x_l + \cdots\cdots + b_{3n}x_n &= d_3 \\ \qquad\quad \ddots \qquad\qquad \vdots &\vdots\ \vdots \\ \qquad\qquad b_{rs}x_s + \cdots + b_{rn}x_n &= d_r \\ 0 &= d_{r+1} \\ \vdots &\vdots\ \vdots \\ 0 &= d_m \end{cases},$$

где $b_{11}b_{2k}b_{3l}\dots b_{rs} \neq 0$, $1 < k < l < \dots < s$.

Упр2. а) Сколько решений может быть у СЛУ?

б) Как найти все решения произвольной СЛУ?

в) За сколько действий можно решить СЛУ размера 100×100?

Теорема 2. Если СЛУ с целыми коэффициентами и свободными членами имеет единственное решение, то это — решение в рациональных числах.

Теорема 3. Однородная система, в которой переменных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение.

Теорема 4. Если СЛУ с целыми коэффициентами и свободными членами имеет какое-то решение, то она имеет решение в рациональных числах.

Теорема 5. Если система из n уравнений с n неизвестными имеет единственное решение при *каком-то* наборе свободных членов, то она имеет единственное решение при *любом* наборе свободных членов.

Для самостоятельного решения

Зад1. На отрезке $[0,1]$ отмечены концы, а также конечное число различных точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны. (Указание: комбинация теорем 2-5)

4 июля

Показатели

Опр. При $(a,m) = 1$ существует положительное δ с условием $a^\delta \equiv 1 \pmod m$. Наименьшее из таких чисел называется *показатель, которому а принадлежит по модулю m.*

1. а) Числа $1 = a^0, a^1, \dots, a^{\delta-1}$ по модулю m несравнимы.

б) $a^s \equiv a^t \pmod m$ $(s > t \geq 0)$ тогда и только тогда, когда $s \equiv t \pmod \delta$. В частности, $a^s \equiv 1 \pmod m$ тогда и только тогда, когда s делится на δ.

в) δ являтся делителем $\varphi(m)$.

2. Найдите все пары простых чисел p, q, что $2^p - 1 \,\vdots\, q$, а среди простых делителей числа $q-1$ имеются только числа $2, 3, 5, 7$.

3. Если p – простое, $n > 1$ – нечетно и $3^p - 1 \,\vdots\, n$, то $n > 2p$.

4. $2^n - 1$ не делится на n при $n > 1$.

5. p, q – простые числа, $q > 5$. Докажите, что если $q | 2^p + 3^p$, то $q > p$.

6. $a > 1$, $p > 2$, p – простое. Тогда простые нечетные делители числа $a^p - 1$ или делят $a - 1$, или имеют вид $2px + 1$.

7. $a > 1$, $p > 2$, p – простое. Тогда простые нечетные делители числа $a^p + 1$ или делят $a + 1$, или имеют вид $2px + 1$.

8. а) Докажите, что существует простое число вида $2px + 1$.

б) Докажите бесконечность множества простых чисел вида $2px + 1$.

Для самостоятельного решения

1. а) $a > 1$. Тогда $\varphi(a^n - 1)$ кратно n.

б) Докажите, что число правильных несократимых дробей со знаменателем $a^n - 1$ кратно n.

2. Докажите, что простые делители числа $2^{2^n} + 1$ имеют вид $2^{n+1}x + 1$.

3. Найдите все n, при которых $n | 3^n - 2^n$.

5 июля

Поляра. Полярное соответствие.

Опр. *Полярой* точки P относительно окружности S называется прямая p, проходящая через точку P', инверсный оборaз точки P при инверсии относительно S, и перепендикулярная прямой OP. Точка P называется *полюсом* прямой p относительно окружности S

1. Пусть A и B— две точки, a и b— их поляры относительно окружности S с центром O, AP и BQ— расстояния от A до b и от B до a. Докажите, что $\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$.

2. Пусть P— точка вне окружности S с центром O. Точка P' — образ точки P при инверсии относительно S. Касательная из точки P к S касается окружности в точке M. Докажите, что $PP' \cdot PO = PM^2$

3. (*Лемма о Поляре*). Пусть a — поляра A, b — поляра B. Оказалось, что $A \in b$. Докажите, что $B \in a$.

4. Пусть P— точка вне окружности S. Касательные из точки P к S касаются окружности в точках X и Y. Докажите, что XY— поляра точки P относительно окружности S.

Опр. *Полярным преобразованием* относительно окружности S называется сопоставление каждой точке P, отличной от центра этой окружности, ее поляры относительно этой окружности.

5. Пусть A, B, C — точки плоскости, a, b, c — соответственно их поляры относительно окружности S. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда прямые a, b, c проходят через одну точку.

6. В какую теорему при полярном преобразовании перейдет теорема "медианы треугольника пересекаются в одной точке", если за окружность полярного преобразования взять окружность описанную вокруг треугольника?

7. Куда перейдут биссектрисы внешних углов треугольника при полярном преобразовании относительно его вписанной окружности?

8. В какую теорему при полярном преобразовании перейдет теорема "высоты треугольника пересекаются в одной точке"?

5 июля

Многочлены: разнобой–1

1. а) $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. $f(x)$ принимает значение 1 в четырех целых точках. Докажите, что уравнение $f(x) = 8$ не имеет целочисленных решений. б) Найдите все числа, на которые можно заменить число 8.

2. $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Решите уравнение $f(f(f(f(f(f(x)))))) = 0$ (над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$).

3. Докажите, что неприводимые над $\mathbb{Q}$ многочлены второй и третьей степени не могут иметь общего (комплексного) корня.

4. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Докажите, что существует $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, такой что $f(g(x))$ приводим над $\mathbb{Z}$.

5. $f(x)$ – целочисленный многочлен. Докажите, что при некотором целом a число $f(a)$ – составное.

6. Дан многочлен а) с натуральными; б) с целыми коэффициентами. Докажите, что среди значений многочлена в натуральных точках есть бесконечно много имеющих одну и ту же сумму цифр.

Для самостоятельного решения

1. Если многочлен седьмой степени принимает значения ± 1 в семи целых точках, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

2. $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ – целочисленные многочлены. Докажите, что при некотором целом a числа $f_1(a), \ldots, f_n(a)$ – составные, и таких a бесконечно много.

3. Докажите, что существует многочлен $f(x)$ с отрицательным коэффициентом, такой что при $n > 1$ все коэффициенты у $f(x)^n$ положительны.

6 июля

Язык СЛУ

Дискретное уравнение теплопроводности. а) В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно расставить (причем единственным образом!) числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому своих соседей (у клетки максимум 4 соседа).

б) Каков физический смысл задачи?

в) А если у клетки 8 соседей?

г) Обобщите задачу на непрямоугольные таблицы с "дырами" внутри и пространственные таблицы.

д) Как выглядит задача для произвольного связного графа?

е) Решите задачу для комплексных чисел.

10 бананов. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково.

101 корова. Есть 101 корова. Если убрать любую буренку, то оставшихся можно разделить на два равных по весу и численности стада. Докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса а) целые; б) рациональные; в) действительные; г) комплексные.

Для самостоятельного решения

Числа по кругу. По кругу стоят 123 числа а) целые; б) рациональные; в) действительные; г) комплексные, не все нулевые. Докажите, что можно выкинуть два соседних числа так, что оставшиеся числа нельзя разбить на две равные по сумме группы.

6 июля

Геометрическая интерпретация

1. Если $a, b, c, A, B, C > 0$ и $a + A = b + B = c + C = k$, то $aB + bC + cA < k^2$.

2. Если $a, b, c > 0$, то $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$. Когда достигается равенство?

3. а) Среди любых четырех чисел найдутся два числа x, y, такие что $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1$.

б) Среди любых шести чисел найдутся два числа x, y, такие что $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + \cdots + b_n)^2}$. Когда равно?

5. $|x_1|, |x_2| \leq 1$. Тогда $\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} \leq 2\sqrt{1 - (\frac{x_1+x_2}{2})^2}$. Когда равно?

Для самостоятельного решения

1. Найдите минимум $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 2} + \sqrt{z^2 + 3} + \sqrt{t^2 + 4}$ при условии $x + y + z + t = 10$.

2. $\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2} + \sqrt{1 - x_3^2 - y_3^2} \leq 3\sqrt{1 - (\frac{x_1+x_2+x_3}{3})^2 - (\frac{y_1+y_2+y_3}{3})^2}$. Когда достигается равенство?

3. Если $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$, то $0 \leq x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + x_3(1 - x_4) + x_4(1 - x_1) \leq 2$.

4. * Среди любых трех положительных чисел найдутся два числа x, y, такие что

$$0 \leq \frac{x - y}{1 + x + y + 2xy} \leq \frac{1}{2}.$$

8 июля

Линейные(векторные) пространства

Опр. Пусть даны множество V ("векторы") и поле K ("числа"), векторы можно складывать и умножать на числа, причем сложение в V коммутативно, ассоциативно, обладает нейтральным элементом ("нулем") и обратными элементами. Пусть также выполнены четыре свойства: 1) $(k_1+k_2)v = k_1v+k_2v$; 2) $k(v_1+v_2) = kv_1+kv_2$ (дистрибутивности), 3) $1\cdot v = v$; 4) $(k_1k_2)v = k_1(k_2v)$ (здесь $k, k_1, k_2 \in K$; $v, v_1, v_2 \in V$). Тогда V называется *векторным пространством* над K.

Упр1. Задайте структуру линейного пространства над соответствующим полем на следующих множествах: а) линейные уравнения вида $a_1x_1+\dots+a_nx_n = b_n$ с коэффициентами из K; б) K^n: строки из n чисел; в) все многочлены над полем K; г) многочлены степени не выше n над полем K; д) векторы на плоскости и в пространстве; е) последовательности комплексных чисел; ж) множество функций $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; з) множество непрерывных функций $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; и) множество функций $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Упр2. Образуют ли линейные пространства следующие множества (относительно естественных операций): а) многочлены степени n; б) монотонные последовательности (над $\mathbb{R}$); в) многочлены с фиксированным корнем α; г) числа вида $a+b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}$; д) строки длины n с нулевой суммой элементов; е) строки длины n с ненулевой суммой элементов; ж) множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$; з) множество функций $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$; и) последовательности, которые с некоторого места нулевые.

Упр3. Докажите, что множество решений произвольной ОСЛУ образует векторное пространство относительно естественных операций. А множество решений СЛУ?

Упр4. Дайте определение *подпространства.* Когда произвольное подмножество данного пространства является подпространством?

Упр5. В упражнениях 1-2 укажите пары "пространство–его подпространство".

Упр6. Опишите все подпространства векторов на плоскости.

Упр7. Дайте определение *изоморфных* (как бы одинаковых) пространств.

Упр8. а) Пространство векторов в стереометрии изоморфно $\mathbb{R}^3$. б) $K_n[x]$ изоморфно K^{n+1}.

Упр9. Найдите пары изоморфных пространств в упражнениях 1-2.

Опр. Подмножество S векторного пространства называется *системой образующих(=базой)* этого пространства, если всякий его вектор можно представить в виде $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$, где $v_1,\dots,v_n \in S$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$. Выражение $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение) называется *линейной комбинацией* векторов $v_1,\dots,v_n$.

Опр. Пусть S – произвольное подмножество векторного пространства V. *Линейной оболочкой* множества S в пространстве V называется совокупность $L(S)$ всех линейных комбинаций векторов из S.

Упр10. Линейная оболочка $L(S)$ является подпространством пространства V, содержащим множество S. При этом всякое подпространство пространства V, содержащее S, содержит и $L(S)$ (по этой причине $L(S)$ называют ещё подпространством, натянутым на множество S).

Упр11. Докажите, что пространство $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ не имеет конечной (и даже счетной) системы образующих.

Для самостоятельного решения

1. В каких пространствах из упражнений 1-2 существуют конечные системы образующих?

2. V_1 и V_2 – подпространства векторного пространства V. Найдите: а) наибольшее подпространство, содержащееся в V_1 и V_2; б) наименьшее подпространство, содержащее V_1 и V_2.

8 июля

Поляра. Полярное соответствие.

Теорема. Из точки P вне окружности S провели две секущие AB и CD. Тогда точка пересечения прямых AC и BD лежит на поляре точки P.

1. Из точки P внутри окружности S провели две секущие AB и CD. Докажите, что точка пересечения прямых AC и BD лежит на поляре точки P.

2. Пусть дан четырехугольник $ABCD$
а) вписанный в окружность S;
б) описанный вокруг окружности S.

Докажите, что перпендикуляр, опущенный из центра S на прямую, соединяющую точки пересечения противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей.

3. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Его вписанная окружность касается сторон AB и CD в точках M и N. Докажите, что прямые AC, BD и MN пересекаются в одной точке.

4. Пусть l — произвольная касательная к вписанной окружности S треугольника ABC; M, N и P — точки пересечения l со сторонами треугольника. Восставим из центра I окружности S перпендикуляры к прямым IM, IN и IP; пусть M_1, N_1 и P_1 — точки пересечения этих перпендикуляров с соответствующими сторонами треугольника. Докажите, что точки M_1, N_1 и P_1 лежат на одной прямой l_1 касающейся окружности S.

5. Треугольник называется автополярным относительно данной окружности, если каждая сторона треугольника является полярой противоположной вершины. Докажите, что для каждого тупоугольного треугольника ABC существует единственная окружность, относительно которой он автополярен; центром этой окружности является ортоцентр ABC. Остроугольный или прямоугольный треугольники не являются автополярными относительно никакой окружности.

9 июля

Размерность

Линейная зависимость и независимость

Предложение 1. Пусть $S = \{v_i, i \in I\}$ – семейство векторов векторного пространства V. Тогда следующие условия равносильны:

а) никакой вектор из V нельзя выразить через векторы из S двумя разными способами;

б) никакой вектор из S нельзя выразить через остальные;

в) если линейная комбинация векторов из S равна нулевому вектору, то все ее коэффициенты равны 0.

Опр. Семейство векторов, обладающее свойствами, описанными в предыдущем предложении, называется *линейно независимым*, а не обладающее – *линейно зависимым*.

Упр1. Докажите следующие свойства линейной зависимости и независимости:

а) система, содержащая нулевой вектор, является ЛЗ;

б) система, содержащая пропорциональные векторы, является ЛЗ;

в) если семейство векторов ЛНЗ, то и любая его часть ЛНЗ;

г) если семейство ЛЗ, то и любое содержащее его семейство ЛЗ;

д) если ЛНЗ семейство векторов не является базой векторного пространства, то к этому семейству можно добавить вектор так, чтобы оно осталось ЛНЗ.

Опр. Система образующих S векторного пространства называется его *базисом*, если всякий вектор пространства представляется в виде линейной комбинации векторов из S причем единственным образом.

Предложение 2. Следующие условия равносильны:

а) S – базис пространства V;

б) S – линейно независимая система образующих пространства V;

в) S линейно независимо, но теряет это свойство при добавлении любого вектора из V;

г) S – система образующих пространства V, но теряет это свойство при удалении любого вектора.

Таким образом, базис векторного пространства можно описать, с одной стороны, как *минимальную систему образующих*, а с другой – как *максимальную линейно независимую систему*. Возникая на узком стыке двух почти не сочетаемых качеств, базисы не могут не приобрести ценные свойства.

Размерность

Предложение. Если в пространстве есть базис из n векторов, то любые $n+1$ векторов линейно зависимы.

Следствие. Если в пространстве есть базис из n векторов, то любой другой базис тоже содержит n векторов

Опр. Векторное пространство, имеющее конечный базис, называется *конечномерным*, а число векторов в каждом из его базисов – его *размерностью.* Если в векторном пространстве нет конечного базиса, оно называется *бесконечномерным.*

Упр2. В бесконечномерном векторном пространстве есть бесконечная ЛНЗ система векторов.

Упр3. а) Из любой системы образующих конечномерного векторного пространства можно удалить часть векторов так, чтобы оставшиеся образовывали базис.

б) К любой линейно независимой системе векторов конечномерного векторного пространства можно добавить векторы так, чтобы получился базис.

Предложение 3. Размерность собственного (не совпадающего со всем пространством) подпространства конечномерного пространства меньше размерности пространства.

Упр4. Любой многочлен степени не выше n можно представить как линейную комбинацию многочленов $f_0(x) = 1, f_i(x) = (x-1)\dots(x-i)$, $i = 1, \dots, n$, причем единственным образом.

Что мы не доказали?

а) в любом пространстве есть базис (нелегко); б) любые два базиса равномощны (легко)

9 июля

Аффинные преобразования.

1. На плоскости даны 2 параллельные прямые l и l_1. Через данную точку M проведите при помощи одной линейки прямую, параллельную l и l_1.

2. Пусть M, N, и P — точки, расположенные на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC и делящие эти стороны в одинаковых отношениях $\left(\text{т. е. } \frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}\right)$. Докажите, что:
а) точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC;
б) точка пересечения медиан треугольника, образованного прямыми AN, BP и CM, совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

3. Через каждую вершину треугольника ABC проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные стороны шестиугольника, образованного этими шестью прямыми, пересекаются в одной точке.

4. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC даны точки M, N и P. Докажите, что если точки M_1, N_1 и P_1 симметричны точкам M, N и P относительно середин соответствующих сторон треугольника ABC, то треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ имеют одинаковую площадь.

5. На сторонах треугольника ABC, как на диагоналях, построено три параллелограмма с одинаковыми направлениями сторон. Докажите, что вторые диагонали этих параллелограммов пересекаются в одной точке.

6. Докажите, что прямая, соединяющая середины диагоналей произвольного четырехугольника $ABCD$, делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечения противоположных сторон.

7. Пусть A_1, B_1 и C_1 — такие точки сторон BC, CA и AB треугольника ABC, что $BA_1 : BC = CB_1 : CA = AC_1 : AB = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1 и CC_1, при условии, что площадь треугольника ABC равна 1.

10 июля

Проективные преобразования.

Опр. *Проективной плоскостью* называется плоскость, пополненная бесконечно удаленной прямой.

Опр. *Проективным преобразованием* Называется преобразование проективной плоскости, переводящее прямые в прямые.

Опр. Проективное преобразование, оставляющее на месте бесконечно удаленную прямую, называется *аффинным.*

Теорема. Существует проективное преобразование, переводящее данную прямую в бесконечно-удаленную.

Опр. *Особой (выделенной)* прямой называется прямая, переходящая в бесконечно удаленную.

Теорема. Отношение векторов коллинеарных особой прямой сохраняется.

Теорема. Существует единственное проективное преобразование, переводящее данные четыре точки не лежащие на одной прямой в данные четыре точки не лежащие на одной прямой.

Теорема. Существует проективное преобразование, переводящее три данные точки, лежащие на одной прямой, в три данные точки, лежащие на одной прямой. Будет ли оно единственно?

10 июля

Первообразные корни

Напоминание. а) При $(a, m) = 1$ существует положительное δ с условием $a^\delta \equiv 1 \pmod m$. Наименьшее из таких чисел называется *показатель, которому a принадлежит по модулю m.*

б) Числа $1 = a^0, a^1, \ldots, a^{\delta-1}$ по модулю m несравнимы.

в) $a^s \equiv a^t \pmod m$ $(s > t \geq 0)$ тогда и только тогда, когда $s \equiv t \pmod \delta$. В частности, $a^s \equiv 1 \pmod m$ тогда и только тогда, когда s делится на δ.

г) δ являтся делителем $\varphi(m)$.

д) $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \cdots + \varphi(d_s) = m$, где суммирование ведется по всем делителям числа m.

Опр. Если $(a, m) = 1$ и показатель a равен $\varphi(m)$, то a называется *первообразным корнем по модулю m.*

Упр1. Существует ли первообразный корень по модулю 8?

Упр2. Пусть по модулю m существует первообразный корень. Сколько тогда имеется первообразных корней? Как их все найти?

Зад1. а) Над $\mathbb{Z}_p$ (p – простое) многочлен степени d имеет не более d корней;

б) при $p - 1 \,\vdots\, d$ уравнение $x^d = 1$ имеет ровно d корней;

в) если $p - 1 \,\vdots\, d$, то обозначим через $f(d)$ количество вычетов показателя ровно d. Докажите, что $f(d) = d - f(d_1) - \cdots - f(d_s)$, где d_i – все делители числа d, отличные от d.

Теорема. По модулю простого p существует первообразный корень.

Упр3. Найдите первообразный корень по модулю 29.

Упр4. Сколько корней над $\mathbb{Z}_p$ имеет уравнение $x^d = 1$? Как решать это уравнение, если известен первообразный корень?

Зад2. Решите уравнение $1 + x + ... + x^6 \equiv 0 \pmod{29}$.

Зад3. Найдите сумму (для отрицательных d тоже)

$$\sum_{n=0}^{p-1} n^d \pmod p.$$

Зад4. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ будем называть перестановочным, если значения $f(0), \ldots, f(p-1)$ попарно различны.

а) по модулю 101 не существует перестановочного многочлена 100 степени;

б) по модулю p не существует перестановочного многочлена степени d, $d | p - 1$;

Зад5. Докажите, что числа $1, 2, ..., p - 1$ можно расставить по кругу так, что для любых трех последовательных a, b, c разность $b^2 - ac$ будет делиться на простое p.

Зад6. 2 является первообразным корнем по модулю 3^n.

11 июля

Матбой между профи–10

1. Профессор Солодов изготовил кружку со 100 ручками, и утверждает, что он может изобразить любой граф на поверхности этой кружки без самопересечений. Не врет ли профессор?

2. В окружность радиуса R вписан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = CD = EF = R$. Докажите, что треугольник с вершинами в серединах сторон BC, DE и FA равносторонний.

3. Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

4. Две окружности G_1 и G_2 вписаны в сегмент окружности G и касаются друг друга внешним образом в точке W. Пусть A – точка пересечения общей внутренней касательной окружностей G_1 и G_2 с дугой сегмента, B и C – концы хорды сегмента. Докажите, что W – центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. Докажите, что если число $p = 8k + 1$ простое, то $2^{4k} \equiv 1 \pmod{p}$.

6. Каждому из трех мудрых преподавателей школьники на день Эратосфена написали на лбу число, причем одно из этих чисел являлось сумой двух других, и сообщили им об этом. Преподаватель не видит, что у него написано на лбу, но видит, что написано у других. Аркадий Борисович сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал Леонид Михайлович, а затем и Александр Викторович. После этого Аркадий Борисович сказал: "Я знаю, что у меня на лбу написано число 50". Какие числа написаны на лбу у Леонида Михайловича и Александра Викторовича?

7. Назовем многочлен P с вещественными коэффициентами *любопытным*, если $P(x)$ рационально тогда и только тогда, когда рационально x. При каких n существует любопытный многочлен n-й степени?

8. Найдите $xy + 2yz + 3xz$ при условиях $x, y, z > 0$ и

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2/3 = 25, \\ y^2/3 + z^2 = 9, \\ z^2 + xz + x^2 = 16. \end{cases}$$

13 июля

Проективные преобразования-2.

1. а) На плоскости даны две прямые l_1 и l_2 и точка P не лежащая не на одной из них. Через P проводятся пары прямых, пересекающие l_1 и l_2 в точках A и C, соответственно B и D. Докажите, что точки пересечения прямых AD и BC для всевозможных пар прямых l_1 и l_2 лежат на одной прямой p. Если l_1 и l_2 пересекаются в точке Q, то и p проходит через точку Q.

б) На плоскости даны прямая q и две точки A и B не лежащие на этой прямой. Пусть U и V — пара точек на q. M — точка пересечения прямых UA и VB, N — точка пересечения прямых VA и UB. Докажите, что прямые MN пересекаются в одной и той же точке Q лежащей на прямой AB.

2. Дан треугольник ABC и три точки P, Q и R, лежащие на одной прямой. Впишите в треугольник ABC треугольник XYZ, такой что стороны его проходят через точки P, Q и R.

3. а) Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что если прямая DM отсекает от стороны AB отрезок $AM = \frac{1}{n}AB$, то она отсекает от диагонали AC отрезок $AN = \frac{1}{n+1}AC$

б) На плоскости даны две параллельные прямые l_1 и l_2 и отрезок AB на l_1. С помощью одной линейки разделите отрезок AB на n равных частей.

4. Окружности S_1, S_2 и S_3 касаются соответственно пар AB и AC, BA и BC, CA и CB сторон треугольника ABC. Вторая общая внешняя касательная к S_1 и S_2 пересекает вторую общую внешнюю касательную к S_1 и S_2 в точке A_0. Аналогично определяются точки B_0 и C_0. Докажите, что прямые AA_0, BB_0 и CC_0 пересекаются в одной точке.

5. В четырехугольнике $ABCD$ расположены две окружности радиусов R_1 и R_2, касающиеся внешним образом. Первая окружность касается сторон DA, AB и BC, причем стороны AB в точке E. Вторая окружность касается сторон BC, CD и DA, причем стороны CD в точке F. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O. Докажите, что $OE + OF \le 2(R_1 + R_2)$.

6. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке и прямые AB_1, BC_1 и CA_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые AC_1, BA_1 и CB_1 пересекаются в одной точке.

7. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведены четыре прямые, пересекающие его стороны в точках K и K', L и L', M и M', N и N', и прямые KM и LN пересекаются в точке P, $K'M'$ и $L'N'$ — в точке P'. Докажите, что точки P, P' и O лежат на одной прямой.

13 июля

Линейные рекурренты–теория

Рассмотрим линейное рекуррентное уравнение

$$x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 x_n, \qquad \alpha_0 \neq 0.$$

Упр1. а) Решения этого уравнения образуют линейное пространство относительно естественных операций.

б) Предъявите k последовательностей (=векторов), через которые все остальные последовательности выражаются в виде линейной комбинации;

в) причем единственным образом.

Вывод. Решения образуют k-мерное пространство (над $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \ldots$ – смотря где лежат коэффициенты рекуррентного уравнения).

Упр2. Попробуем найти решения, которые являются геометрическими прогрессиями (понятно, что разумно искать только знаменатели прогрессий λ_i). Из какого уравнения находятся эти знаменатели λ_i?

Опр. Полученное уравнение называется *характеристическим уравнением* рекуррентной последовательности.

Упр3. Докажите, что геометрические прогрессии с различными знаменателями ЛНЗ в пространстве последовательностей.

Если нет кратных корней...

Теорема 1. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – различные корни характеристического уравнения, то любое решение рекуррентного уравнения имеет вид $x_n = c_1\lambda_1^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$, где константы c_i определены однозначно.

Замечание 1. В случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, помимо геометрических прогрессий в базис *должны* входить и другие последовательности.

Замечание 2. λ_i и c_i лежат не в том поле, где коэффициенты, а в *большем* поле (если, скажем, коэффициенты рациональны, то λ_i и c_i вещественные или комплексные числа).

Задачи

1. Сколькими способами полоску $2 \times n$ можно замостить доминошками? Найдите ассимптотическую формулу.

2. а) Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $3f(n) - 2f(f(n)) = n$.

б) а если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$?

в) докажите, что ответ изменится, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Для самостоятельного решения

1. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(f(x)) + f(x) = 6x$.

14 июля

Двойное отношение. Гармоничность.

Опр. *Двойным отношением* четырех *точек* A, B, C, D на одной прямой называется $(A, B, C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$.

0. Как определить двойное отношение если одна из точек бесконечно удаленная?

1. $(A, B, C, D) = 1$. Докажите, что либо $A = B$ либо $C = D$.

2. $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$.

Опр. *Двойным отношением* четырех *прямых* a, b, c, d, проходящих через одну точку, называется $(a, b, c, d) = \pm\frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} : \frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)}$.

Опр. *Двойным отношением* четырех точек A, B, C, D на одной *окружности* называется $(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$.

Теорема. Пусть, прямая l пересекает прямые a, b, c, d в точках A, B, C, D соответственно. Тогда, (a, b, c, d)=(A, B, C, D).

Замечание. Естественно, что прямые a, b, c, d проходят через одну точку.

Теорема. Окружность S пересекает прямые a, b, c, d, которые пересекаются на S, в точках A, B, C, D. Тогда $|(a, b, c, d)| = (A, B, C, D)$.

Теорема. Двойное отношение сохраняется при проективных преобразованиях.

Теорема. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, BC и AD — в точке F диагонали AC и BD пересекают EF в точках M и N. Тогда $(E, F, M, N) = -1$.

15 июля

Линейные рекурренты–теория-2

По прежнему рассматриваем линейное рекуррентное уравнение

$$x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + \alpha_0 x_n, \qquad \alpha_0 \neq 0. \tag{$*$}$$

Опр. Рассмотрим линейное отображение J, сдвигающее последовательность влево на один элемент (действие отображения F на последовательность A будем записывать FA). Тогда условие $(*)$ перепишется в виде $P(J)A = 0$, где $P(J) = J^k - \alpha_{k-1}J^{k-1} - \alpha_{k-2}J^{k-2} - \dots - \alpha_0$ (а A – наша последовательность).

Упр1. Пусть $P(x) = P_1(x)P_2(x)$. Докажите, что если $P_1(J)A = 0$, то $P(J)A = 0$.

Упр2. Пусть $P(J)A = 0$, $P(x) = P_1(x)P_2(x)$, причем многочлены P_1 и P_2 взаимно просты. Тогда существуют последовательности A_1, A_2 такие, что $A = A_1 + A_2$ и $P_i(J)A_i = 0$.

Вывод. Достаточно описать только базис рекуррент, удовлетворяющих соотношению $(J - a)^n$.

Если есть кратные корни...

Упр3. а) Укажите рекурренту A, для которой $(J - a)^n A = 0$, но $(J - a)^{n-1}A \neq 0$ (над $\mathbb{C}$).

б) Укажите базис рекуррент, удовлетворяющих соотношению $(J - a)^n$ (над $\mathbb{C}$).

Упр4. Решите рекуррентное уравнение $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Упр5. Пусть имеется вещественная рекуррента, а корни характеристического уравнения вещественными не являются. Как тогда написать формулу для этой рекурренты, в которой нет комплексных чисел?

Задачи

1. $f : R_+ \to R_+$, $f(f(f(x))) + f(f(x)) = 2x + 5$.

2. Докажите, что пространство всех рекуррент, удовлетворяющих соотношениям $P(J)$ и $Q(J)$, есть пространство всех рекуррент, удовлетворяющих некоторому соотношению $R(J)$.

3. а) Найдите многочлен от J минимальной степени, обнуляющий рекурренту

$$a_n = P_1(n)\alpha_1^n + \dots + P_k(n)\alpha_k^n.$$

б) Докажите, что если a_n состоит из рациональных чисел, то тогда она удовлетворяет рекурреннтному уравнению с рациональными коэффициентами.

18 июля

Проективность и окружность.

Теорема. Существует проективное преобразование, переводящее данную точку внутри окружности в центр, а окружность в себя.

1. Существует проективное преобразование, переводящее данную прямую не пересекающую окружность в бесконечно удаленную, а окружность в себя.

2. (Теорема Паскаля.) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ — точки, лежащие на одной окружности. Тогда точки пересечения прямых A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 лежат на одной прямой.

3. (Теорема Брианшона.) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ — вершины описанного шестиугольника. Тогда прямые A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 пересекаются в одной точке.

4. (Теорема о бабочке.) Через середину C хорды AB проведены хорды KL и MN. Прямые ML и KNпересекают прямую AB в точках D и E. Тогда $CD = CE$.

5. Докажите, что теоремы Паскаля и Брианшона полярно эквивалентны.

6. Дана окружность и точка C внутри ее. Через точку C проведены четыре хорды A_iB_i, $i = 1, \cdots, 4$. D — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, E — точка пересечения прямых B_1B_2 и B_3B_4. Докажите, что точки C, D и E лежат на одной прямой.

7. Окружность Ω касается прямых, содеожащих стороны AB и BC треугольника ABC, в точках D и E соответственно. Вторые касательные, проведенные из A и C к Ω касаются ее в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DG, FE и AC пересекаются в одной точке.

8. Окружность Λ касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E и его описанной окружности. Докажите, что прямая DE проходит через I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

18 июля

Многомерные рекурренты

1. а) Перед каждым из трех школьников лежит куча мусора. Мусор всем выносить в ломы, зато не в ломы каждую минуту раскладавать свой мусор поровну остальным. Докажите, что количество мусора перед школьниками усредняется с экспоненциальной скоростью.

б) То же, но каждый школьник раскладывает свой мусор в фиксированной пропорции (своей для каждого школьника). Докажите, что количество мусора стремится к какому-то положению с экспоненциальной скоростью.

2. Последовательность (x_n) задана соотношениями $x_0 = 4$, $x_{n+1} = \dfrac{3 - x_n}{2x_n - 2}$. Найдите общую формулу для x_n.

3. а) Лягушка-путешественница прыгает по вершинам шестиугольника $ABCDEF$, каждый раз в соседнюю вершину. Сколькими способами она может добраться из A в C ровно за n прыжков?

б) Пусть в вершине D сидит гурман-француз. Чему равно число способов в этом случае?

Итак, мы рассматриваем зависимости вида

$$\begin{aligned}
x_1^{n+1} &= a_{11}x_1^n + a_{12}x_2^n + a_{13}x_3^n + \cdots + a_{1k}x_k^n,\\
x_2^{n+1} &= a_{21}x_1^n + a_{22}x_2^n + a_{23}x_3^n + \cdots + a_{2k}x_k^n,\\
&\vdots\\
x_k^{n+1} &= a_{k1}x_1^n + a_{k2}x_2^n + a_{k3}x_3^n + \cdots + a_{kk}x_k^n.
\end{aligned}$$

Теорема. а) Докажите, что x_i^{n+2} выражаются через x_j^n подобным же образом.

б) Докажите, что последовательность является линейной рекуррентой порядка не выше k.

в) и это рекуррентное уравнение не зависит от $x_1^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}$.

Полезная теорема, которая будет на зачете. Каждая из последовательностей $(x_i^n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет *одному и тому* же рекуррентному уравнению порядка не более k.

Задачи

4. Дан конечный ориентированный граф. Докажите, что количество путей длины n в нем есть линейная рекуррента. Оцените сверху степень этой рекурренты.

5. В задаче про лягушку-путешественницу посчитайте вероятность того, что лягушка все еще не будет съедена гурманом после n прыжков.

6. Сколько существует последовательностей из n букв д, я, т, е, л, что в них не встечаются пары символов те, тл, ел, лл?

18 июля

Поля

Опр. *Полем* K называется множество, где определены операции сложения и умножения, причем выполняются следующие свойства:

а) Сложение ассоциативно, коммутативно, обладает нейтральным элементом (он обозначается 0) и обратными элементами.

б) Умножение ассоциативно, коммутативно, обладает нейтральным элементом (он обозначается 1) и для каждого ненулевого элемента существует обратный к нему по умножению.

в) Сложение и умножение связаны законом дистрибутивности: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

г) При этом 0 не совпадает с 1.

Опр. Если K и L — поля, и $K \subset L$, то K называют *подполем* в L, а L — *расширением* K.

Упр1. а) Существует ли расширение поля $\mathbb{R}$? б) Существует ли расширение поля $\mathbb{C}$?

Упр2. а) Докажите, что если в поле $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

б)При каких n множество $\mathbb{Z}_n$ является полем?

Вывод. Существуют поля как конечные, так и бесконечные.

Упр3. Постройте поле из четырех элементов (это – не $\mathbb{Z}_4$!).

Упр4. Являются ли полями множества комплексных чисел вида а) $a+bi$, б) $a-b\sqrt{2}$, в) $a+b\sqrt{d}$ (где a, b, d — рациональные числа)?

Упр5. Являются ли полями множества комплексных чисел вида а) $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, б) $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$ (где a, b, c, d — рациональные числа)?

Упр6. Из чисел какого вида состоит наименьшее подполе в $\mathbb{C}$, содержащее $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ одновременно (укажите общий вид элементов этого поля и докажите, что других чисел в нем нет)? Это поле естественно обозначить через $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Упр7. Опишите поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$.

Опр. Два поля K и L называются *изоморфными*, если существует такая биекция φ между их элементами, при которой сумма переходит в сумму, произведение — в произведение, нулевой элемент — в нулевой, единичный — в единичный.

Упр8. Докажите, что для изоморфизма φ разность переходит в разность, а частное — в частное.

Упр9. а) Является ли изоморфизмом $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ и $\mathbb{Q}\sqrt{3}$ отображение $a+b\sqrt{2} \to a+b\sqrt{3}$?

б) Является ли изоморфизмом $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ на себя отображение $a+b\sqrt{2} \to a-b\sqrt{2}$?

в) Пусть α — вещественный корень многочлена x^3-2, а β — невещественный. Докажите, что $\mathbb{Q}(\alpha)$ и $\mathbb{Q}(\beta)$ изоморфны.

Опр. Наименьшее натуральное число n такое, что $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ раз}} = 0$, называется *характеристикой* поля. Если такого числа n не существует, то говорят, что поле имеет *характеристику 0*.

Упр10. Докажите, что а) характеристика поля есть либо 0, либо простое число; б) в каждом поле содержится либо $\mathbb{Q}$, либо $\mathbb{Z}_p$, причем ровно одно из этих полей; в) приведите пример бесконечного поля с конечной характеристикой.

Упр11. а) Докажите, что в поле характеристики p выполняется равенство: $(x+y)^p = x^p + y^p$.

б) Разложите на множители над $\mathbb{Z}_p$ многочлен $x^p - x$.

в) Докажите с помощью этого *теорему Вильсона*: $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ при простом p.

Для самостоятельного решения

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\dfrac{1}{1+2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}$ (см. упр7).

2. Изоморфны ли $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$?

19 июля

Конечные и алгебраические расширения полей

Опр1. Расширение $F\subset E$ называется *конечным*, если пространство E конечномерно над F. Размерность этого пространства называется *степенью* расширения E и обозначается $[E:F]$.

Упр1. В конечном поле p^n элементов, где p – характеристика поля. (Для сведения. Для каждого p^n существует ровно одно с точностью до изоморфизма поле из p^n элементов.)

Упр2. Являются ли расширения конечными; если да, то какова их степень: а) $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$; б) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\alpha)$, $\alpha^2=-5$.

Пусть f — неприводимый над F многочлен степени n, α— любой его корень в поле E, $F\subset E$. Как устроено $F(\alpha)$? (В основном нас будет интересовать случай $F=\mathbb{Q}$, $E=\mathbb{C}$).

Упр3. Рассмотрим множество линейных комбинаций вида $c_0\alpha^0+c_1\alpha^1+\dots+c_{n-1}\alpha^{n-1}$, где $c_i\in F$.
а) Если элемент из E представляется в таком виде, то он представляется однозначно.
б) Это множество замкнуто относительно сложения и умножения.
в) Это множество замкнуто относительно деления.

Теорема о присоединении корня. $F(\alpha)$ — n-мерное пространство над F. Его базисом являются элементы α^0, α^1, ..., α^{n-1}.

Упр4. $F=\mathbb{Q}$, $f(x)=x^5-3x+3$, α — какой-нибудь корень f. Чему равно $\frac{1}{\alpha^3+2}$?

Упр5. Пусть α_1,α_2 — два корня многочлена f. Тогда поля $F(\alpha_1)$ и $F(\alpha_2)$ изоморфны. Приведите пример, показывающий, что они могут не совпадать.

Опр2. Элемент $\alpha\in$ *алгебраичен над полем* F, $F\subset E$, если он является корнем некоторого ненулевого многочлена из $F[x]$. Иначе элемент называется *трансцендентным над полем* F.

Упр6. а) Опишите все алгебраические и трансцендентные комплексные числа над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$. б) Если элемент алгебраичен над каким-нибудь полем, то он алгебраичен и над расширением этого поля. в) Многочлен в определении алгебраичности можно считать неприводимым над F.

Теорема об алгебраичности конечного расширения. Если $F\subset E$ — конечное расширение, то каждый элемент из E алгебраичен над F. Что можно сказать про степень алгебраичности элемента?

Упр7. Опишите все конечные расширения а) $\mathbb{C}$; б) $\mathbb{R}$.

Упр8. Докажите, что число $\sqrt[5]{3}-7\sqrt[5]{9}+4$ является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Оцените степень многочлена. Как найти этот многочлен?

Вопрос для обдумывания. Будет ли сумма, разность, произведение и частное алгебраических элементов алгебраическим элементом?

19 июля

Линейность в геометрии.

Ориентированное расстояние

Предложение. Ориентированное расстояние от точки (x_0,y_0) до прямой $ax+by+c=0$ равно

$$\rho(ax+by+c=0,(x_0,y_0))=\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

1. Докажите, что основания внешних биссектрис (неравнобедренного)треугольника лежат на одной прямой.

2. Грани правильного октаэдра раскрашены в черный и белый цвет. При этом любые две грани, имеющие общее ребро, раскрашены в разные цвета. Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей черных граней.

Ориентированная площадь

Предложение. Ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на вектора (a, b) и (c, d), равна $ad - bc$.

3. На плоскости даны несколько черных и белых отрезков, берем точку и строим треугольники с вершинами в этой точке и основаниями – данными отрезками, рассмотрим ГМТ таких точек, что сумма черных площадей равна сумме белых. Докажите, что это ГМТ почти всегда покрывается несколькими прямыми. Скольких прямых гарантировано хватит (кто меньше?). Почему покрывается почти всегда, но не всегда?

4. Середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны. Обратное тоже верно.

5. Диагонали отрезают от пятиугольника 5 треугольников (некоторые части отрезаются дважды). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше площади исходного пятиугольника.

Лемма. Точка X делит отрезок CD в отношении $p : q$. Докажите, что ор. площадь треугольника ABX равна

$$S(ABX) = \frac{q}{p+q}S(ABC) + \frac{p}{p+q}S(ABD).$$

6. Докажите, что в описанном четырехугольнике прямая, проходящая через середины диагоналей, проходит и через центр вписанной окружности. Эта прямая называется *прямой Ньютона* описанного четырехугольника.

7. Докажите, что прямая, соединяющая середины диагоналей произвольного четырехугольника $ABCD$, делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечения противоположных сторон. Эта прямая называется *прямой Гаусса* четырехугольника $ABCD$.

Для самостоятельного решения

1. Дан четырехугольник. В одной паре его противоположных углов провели внешние биссектрисы – получили точку их пересечения. Потом в другой паре – получили вторую точку. Потом противоположные стороны продлили до пересечения, получили два угла – по ним аналогично построили третью точку. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

2. У треугольников $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ центры тяжести лежат на одной прямой. Докажите, что 27 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны. Обратное тоже верно.

3. Диагонали отрезают от шестиугольника 6 маленьких треугольников (некоторые части отрезаются дважды). Верно ли, что сумма площадей этих треугольников не меньше площади исходного шестиугольника?

4. В любом выпуклом шестиугольники найдется диагональ, которая отрезает от него треугольник площади, не превосходящей $1/6$ площади шестиугольника.

20 июля

Вокруг теоремы Паскаля.

0. Окружность Λ касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E и его описанной окружности. Докажите, что прямая DE проходит через I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

1. а) Пусть MN — средняя линия треугольника ABC, параллельная AC. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые MN, PQ, а также биссектриса угла A пересекаются в одной точке D, причем $\angle ADB$ прямой.
б) A_1, B_1 — основания высот опущенных из вершин A и B треугольника ABC. A_2, B_2 — основания биссектрис углов A и B. A_3, B_3 — точки касания вписанной окружности со сторнами BC и AC. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 пересекаются в одной точке.

2. $A_1B_1C_1$ — основания высот, а $A_2B_2C_2$ — соответсвующие основания медиан треугольника ABC. Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, A_1C_2 и A_2C_1, B_1C_2 и B_2C_1 лежат на одной прямой.

3. AA_1 и BB_1 высоты треугольника ABC, которые пересекаются в точке H. Прямые, соединяющие точки касания вписанных окружностей треугольников AB_1B и BA_1A со сторонами, прилегающими к прямому углу, пересекаются в точке P. Точки I и J — центры вписанных окружностей треугольников ABC и ABH. Докажите, что точки I, J, P лежат на одной прямой.

4. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Биссектрисы углов A_1AC и C_1CA пересекаются в точке B'. Аналогично определяются точки A' и C'. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой, проходящей через центр вписанной окружности треугольника.

5. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Некоторая окружность с центром в I пересекает сторону BC в точках A_1 и A_2, сторону CA в точках B_1 и B_2, сторону AB в точках C_1 и C_2. Полученные точки расположены на окружности в порядке A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Точки A_3, B_3, C_3 – середины дуг A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно. Прямые A_2A_3 и B_1B_3 пересекаются в точке C_4, прямые B_2B_3 и C_1C_3 – в точке A_4, а прямые C_2C_3 и A_1A_3 – в точке B_4. Докажите, что отрезки A_3A_4, B_3B_4, C_3C_4 пересекаются в одной точке.

20 июля

Конечные и алгебраические расширения полей-2

Теорема о размерности башни (часть 1). Пусть $k \subset E \subset L$ — поля, причем $k \subset E$ и $E \subset L$ – конечные расширения. Тогда расширение $k \subset L$ конечно и $[L:k] = [L:E] \cdot [E:k]$.

Теорема. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное алгебраических чисел является алгебраическим числом. Оцените степень алгебраичности этих чисел через степень алгебраичности исходных.

Упр1. Найдите размерность и базисы над $\mathbb{Q}$ следующих полей: а) $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt[3]{5})$; б) $\mathbb{Q}(\sqrt[p_1]{p_1}, \ldots, \sqrt[p_s]{p_s})$, $p_1, \ldots, p_s$ – различные простые числа.

Упр2. Выведите из теоремы о башне, что классические задачи на построение неразрешимы при помощи циркуля и линейки.

Упр3. Когда можно построить правильный n-угольник?

Для самостоятельного решения

Теорема о размерности башни (часть 2). Пусть $k \subset E \subset L$ — поля, причем $k \subset L$ – конечное расширение. Тогда $k \subset E$ и $E \subset L$ – конечные расширения и $[L:k] = [L:E] \cdot [E:k]$.

Теорема. Если некоторое комплесное число является корнем многочлена с алгебраическими (над $\mathbb{Q}$) коэффициентами, то это число алгебраично (над $\mathbb{Q}$). Иначе говоря, поле алгебраических чисел алгебраически замкнуто.

Упр4. а) Опишите все подполя в $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

б) Докажите, что поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ совпадает с $\mathbb{Q}(\alpha)$ для некоторого α.

20 июля

(Не)Построение циркулем и линейкой

Дано: На плоскости задана декартова система координат (с единичным отрезком), циркуль и линенйка (ЦЛ).

Требуется: Решить некую задачу на построение или доказать, что она неразрешима.

Опр. Число $x \in \mathbb{R}$ назовем *построимым*, если можно построить отрезок длины $|x|$ или можно построить точку, абсцисса или ордината которой равна x.

Опр. *Построение при помощи ЦЛ* – это любая последовательность элементарных шагов:

1) взятие произвольной точки (x_0, y_0);

2) проведение прямой через две имеющиеся точки;

3) проведение окружности с центром в имеющейся точке, радиус которой равен расстоянию между какими-то двумя имеющимися точками;

4) взятие точки пересечения двух построеных прямых, прямой и окружности, двух окружностей;

5) построенные прямые и окружности разбивают плоскость на области; шагом является взятие произвольной точки внутри одной из этих областей;

Важная идея. В пунктах 1 и 5 можно выбирать только точки с рациональными координатами (в силу всюду плотности множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.)

Упр1. Если построимы числа a, b, то построимы числа $a \pm b, ab, \frac{a}{b}, \sqrt{ab}$.

Упр2. Построимо каждое число x, которое можно получить из 1 при помощи операций сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадратного корня. Например, число $\frac{\sqrt[8]{2+\sqrt{3}}-500\sqrt{25-\sqrt{6}}}{10\sqrt[4]{5}+7/3}$ построимо. Множество чисел такого вида обозначим $\mathbb{Q}'$.

Замечание. $\mathbb{Q}'$ подполе в $\mathbb{R}$.

Теорема. Множество построимых чисел совпадает с $\mathbb{Q}'$.

Упр3. а) Если разрешима задача удвоения единичного куба, то построимо число $\sqrt[3]{2}$;

б) если разрешима задача квадратуры круга то построимо число π;

в) если разрешима задача трисекции угла 60°, то построим вещественный корень некоторого неприводимого над $\mathbb{Q}$ кубического многочлена;

г) если можно построить правильный 9-ти угольник, то разрешима задача трисекции угла в 60°.

Вывод. Для доказательства неразрешимости класических задач на построение достаточно показать, что перечисленные выше числа не лежат в поле $\mathbb{Q}'$.

Упр4. а) Если n-угольник можно построить ЦЛ, то построимо число $\cos 2\pi/n$;

б) Рассмотрим $\mathbb{Q}(\cos 2\pi/n) \subset \mathbb{Q}(\cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n)$. Это расширение, и оно имеет степень 2.

в) Осталось выяснить, какую степень имеет неприводимый многочлен для $\cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n$ над $\mathbb{Q}$. Это нелегко.

г) Если $n = kl, (k, l) = 1, k > 1, l > 1$, то n-угольник можно построить тогда и только тогда, когда можно построить k-угольник и l-угольник. Тем самым достоточно выяснить только вопрос о построении p^n-угольника, $p > 2$– простое.

Факт. $x^{p^n} - 1 = (x^{p^{n-1}} - 1)(x^{p^{n-1}(p-1)} + x^{p^{n-1}(p-2)} + \dots + x^{p^{n-1}} + 1)$. Тогда многочлен во вторых скобках неприводим над $\mathbb{Q}$.

Упр5. а) Если p^n-угольник $(p > 2)$ можно построить ЦЛ, то $n = 1$ и $p = 2^{2^k} + 1$ – простое число Ферма.

б) Мы не будем доказывать, что если p – простое число Ферма, то p-угольник можно построить ЦЛ.

Упр6. Одной линейкой нельзя построить: а) прямой угол; б) середину заданного отрезка.

Для самостоятельного решения

1. Одной линейкой нельзя построить: б) правильный треугольник. б) центр данной окружности; в) отрезок вдвое больше данного.

2. На плоскости дана пара параллельных прямых и отрезок на одной из них. При помощи одной линейки а) поделите его пополам; б) удвойте его.

21 июля

Вписанный четырехугольник.

Обозначения. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи AD и BC — в точке F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. AC пересекает EF в точке Q. EP пересекает AD в точке X. M — *точка Микеля* четырехугольника $ABCD$. S — середина AD.

1. Докажите, что:

а) точки O, P и M лежат на одной прямой;

б) точки B, C, S, X лежат на одной окружности;

в) касательные к ω в точках B и D пересекаются на прямой EF (обозначим точку их пересечения T);

г) точки B, T, D, M лежат на одной окружности;

д) $\frac{BM}{MD}=\frac{BP}{PD}$;

е) точки B, O, D, M лежат на одной окружности;

ж) центр вписанной окружности треугольника BDM лежит на ω;

з) верно ли, что касательные к ω в серединах дуг AB и CD пересекаются на прямой EP;

и) на отрезках AC, BD и EF как на диаметрах построили окружности, тогда они пересекаются в двух точках;

к) ортоцентры треугольников AED, BCE, CDF и ABF лежат на одной прямой l;

л) прямая l перпендикулярна *прямой Гаусса* четырехугольника $ABCD$.

21 июля

Усреднение на плоскости и в пространстве

Упр1. а) Как разумно определить среднее значение функции на отрезке?

б) Если $f(x) \leq g(x)$ на $[a,b]$, то среднее значение f на $[a,b]$ не превосходит среднего значения g на $[a,b]$.

в) Если среднее значение функции $\leq d$, то значение функции в некоторой точке x_0 тоже $\leq d$.

Упр2. а) Чему равно среднее значение проекции вектора длины a на прямую?

б) Как связан периметр выпуклого многоугольника со средним значением длины его проекции на прямую?

1. Пусть на плоскости даны две системы векторов, причем для любой прямой сумма длин проекций на нее векторов первой системы не меньше, чем для второй системы. Тогда сумма длин векторов первой системы не меньше суммы длин векторов второй системы.

2. Если один выпуклый многоугольник находится внутри другого, то периметр внутреннего – меньше.

3. Пусть многоугольники с периметрами $P_1, \ldots, P_n$ расположены так, что не существует прямой, *разделяющей* эти многоугольники. Тогда данные многоугольники можно заключить в выпуклый многоугольник периметра $\leq P_1+\cdots+P_n$. Написать $\leq 0.9999(P_1+\cdots+P_n)$ нельзя.

4. Если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше 1, то его периметр меньше π. Эта оценка неулучшаема.

5. Периметр фигуры *постоянной ширины* d равен πd.

6. На плоскости даны векторы с суммой длин L. Тогда из них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше L/π. Эта оценка неулучшаема.

Теорема. Среднее значение длины проекции вектора на прямую в пространстве равно $a/2$, где a – длина этого вектора.

7. Если один выпуклый многогранник расположен внутри другого выпуклого многогранника, то площадь поверхности внутреннего меньше площади поверхности внешнего.

8. Если один тетраэдр расположен внутри другого, то отношение периметра внутреннего к периметру внешнего не превосходит 4/3, причем может быть сколь угодно близко к 4/3.

Для самостоятельного решения

1. На плоскости даны 3 вектора: a, b, c. Докажите, что $|a|+|b|+|c|+|a+b+c| \geq |a+b|+|b+c|+|c+a|$.

2. Если площадь любой проекции выпуклого многогранника не превосходит 1, то площадь его поверхности не превосходит 4. Число 4 нельзя уменьшить.

3. В пространстве даны векторы с суммой длин L. Тогда из них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше $L/4$. Эта оценка неулучшаема.

21 июля

Разнобой

1. В квадратной таблице расставлены числа так, что их сумма положительна. Докажите, что можно переставить столбцы так, что сумма чисел на главной диагонали будет положительна.

2. Квадрат разбит на квадратики так, что любая вертикальная прямая (не проходящая по границе квадратика) пересекает k квадратиков, а любая горизонтальная — ℓ квадратиков.

а) Докажите, что $k = \ell$.

б) Найдите минимальное возможное количество квадратиков.

3. В кубе со стороной 1 расположены несколько треугольников суммарной площади 2006. Докажите, что найдется прямая, пересекающая хотя бы 669 треугольников.

4. В графе на 10 вершинах 26 ребер. Докажите, что в нем имеется хотя бы 4 треугольника.

5. Докажите, что из $2n+1$ иррационального числа можно выбрать n чисел так, что сумма любых нескольких выбранных чисел будет иррациональной.

6. Докажите, что не существует функций $a(x), b(y), c(x), d(y)$, определенных при всех вещественных x, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $1 + xy + x^2y^2 = a(x)b(y) + c(x)d(y)$. Обобщите задачу для $1 + xy + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n$.

Программа зачета

Геометрия

1. Инверсия и ее свойства.

2. Аффинные преобразования плоскости и их свойства. Прямая Гаусса.

3. Поляра и ее свойства. Лемма о поляре.

4. Полярное соответствие. Полярная эквивалентность проективных теорем.

5. Проективная плоскость. Проективные преобразования и их свойства. Проктивные преобразовавния и окружность.

6. Двойное отношение точек и прямых. Гармонический четырехугольник.

7. Теоремы Паппа и Дезарга.

8. Теоремы Паскаля, Брианшона, о бабочке.

9. Линейность в геометрии. Ориентированное расстояние. Ориентированная площадь. Прямые Ньютона и Гаусса.

Алгебра

1. Функция Эйлера и ее свойства. Показатели и их свойства. Существование первообразных корней по простому модулю.

2. Лемма Бернсайда.

3. СЛУ: метод Гаусса, рациональные решения. Дискретное уравнение теплопроводности. Задачи о десяти бананах, сто одной корове, о $2n+1$ рациональном числе.

4. Линейные пространства. Свойства ЛЗ и ЛНЗ. Изоморфизм пространств. Размерность, корректность определения. Изоморфизм конечномерного пространства с K^n.

5. Линейные рекурренты. Случай различных корней в характеристическом уравнении. Случай кратных корней в характеристическом уравнении (в характеристике 0).

6. Многомерные линейные рекурренты. Алгоритм нахождения решений.

7. Критерий неприводимости Эйзентштейна. Лемма Гаусса. Эквивалентность неприводимости над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$.

8. Поля. Изоморфизм полей. Конечные и бесконечные расширения. Алгебраичность конечного расширения.

9. Присоединение к полю алгебраического элемента. Базис, размерность.

10. Теорема о размерности башни. Ее следствия.

11. Построения при помощи циркуля и линейки. Критерий построимости числа. Неразрешимость трех классических задач на построение.

12. Построение правильных $n-$угольников.

13. Усреднение. Средняя длина проекции вектора на прямую на плоскости и в пространстве.