Двадцать третья летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28.VII.2007. 10 класс группа "Профи"

Выпуклая геометрия. 19 июля.

Определение. Подмножество n-мерного пространства называется *выпуклым*, если для любых двух точек этого множества отрезок, соединяющий эти точки, целиком принадлежит множеству.

Задача 1. Докажите, что пересечение двух выпуклых фигур выпукло.

Определение. *Выпуклой оболочкой* фигуры называется наименьшее выпуклое множество, содержащее данную фигуру.

Задача 2. Докажите, что выпуклая оболочка а) существует; б) единственна.

Определение. *Выпуклой комбинацией* точек $A_1, A_2, \dots A_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, где все a_i неотрицательны и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, называется такая точка A, что $\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA}$.

Упражнение. Докажите, что выпуклая комбинация не зависит от выбора точки O.

Задача 3. Докажите, что выпуклая оболочка фигуры состоит из всевозможных выпуклых комбинаций всевозможных конечных наборов точек этой фигуры.

Упражнение. Что является выпуклой оболочкой а) нескольких точек на плоскости; б) невыпуклого многоугольника?

Задача 4. На плоском обеденном столе лежат несколько мух и котлет. Известно, что для любых четырех предметов можно накрыть те из них, которые являются котлетами, длинной скатертью с прямым краем, не задев остальных предметов, т.е. мух. Докажите, что можно накрыть этой скатертью все котлеты, не задев мух.

Задача 5. а) На плоскости дано n точек, причем любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что эти точки являются вершинами выпуклого n-угольника. б) На плоскости дано пять точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что четыре из этих точек расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. в) Докажите, что, если отметить на плоскости достаточно много точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, то среди них найдутся четыре точки общего положения.

Задача 6. **Теорема Каратеодори.** В n-мерном пространстве выбраны $n+2$ точки $A_0, A_2, \dots A_{n+1}$. Докажите, что эти точки можно разбить на два набора, выпуклые оболочки которых пересекаются.

Задача 7. **Теорема Радона.** В n-мерном пространстве точка A принадлежит выпуклой оболочке множества Φ. Докажите, что A принадлежит выпуклой оболочке некоторого набора из $n+1$ точки этого множества.

Задача 8. Несколько школьников писали тест из 60 вопросов. Жюри затем устанавливало цену каждого вопроса (за правильный ответ ученик получает цену вопроса, возможно, отрицательную, за неправильный — 0 баллов). Оказалось, что жюри может упорядочить школьников по сумме баллов любым способом (если правильно расставит цены). Какое наибольшее число школьников могло принимать участие в тесте?