

Теорема Хелли и ее приложения. 19 июля.

Задача 1. Теорема Хелли. а) Выпуклые подмножества A_0, A_2, \dots, A_{n+1} в n -мерном пространстве таковы, что любые $n+1$ из них имеют общую точку. Докажите, что все эти множества имеют общую точку. б) Несколько (конечное число) выпуклых подмножеств n -мерного пространства таковы, что любые $n+1$ из них имеют общую точку. Докажите, что все эти множества имеют общую точку. в) Счетный; г) произвольный набор замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств n -мерного пространства таков, что любые $n+1$ из них имеют общую точку. Докажите, что все эти множества имеют общую точку. д) Можно ли в предыдущих двух пунктах отказаться от замкнутости? Ограниченности?

Задача 2. На плоскости даны несколько выпуклых фигур, каждые две из которых имеют общую точку. Докажите, что найдётся прямая данного направления, пересекающая все эти фигуры.

Задача 3. На координатной плоскости даны несколько прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. Докажите, что если любые два прямоугольника имеют общую точку, то и все прямоугольники имеют общую точку.

Задача 4. Несколько полуплоскостей целиком покрывают плоскость. Докажите, что из них можно выбрать три, целиком покрывающие плоскость.

Задача 5. а) Несколько дуг окружности таковы, что любые две из них пересекаются. Докажите, найдется диаметр этой окружности, пересекающий все эти дуги. б) На плоскости даны несколько выпуклых фигур, каждые две из которых имеют общую точку. Докажите, что найдётся прямая, проходящая через данную точку и пересекающая все эти фигуры.

Задача 6. а) На плоскости даны несколько точек, любые три из которых можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса 1. б) **Теорема Юнга.** На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя из которых не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Определение. *Шириной* плоской выпуклой фигуры направления называется длина ее наименьшей проекции на прямую.

Задача 7. Теорема Бляшке. Докажите, что а) в выпуклый многоугольник; б) в выпуклую фигуру ширины 1 можно поместить круг радиуса $1/3$.