

15 июля

Проективные преобразования

Определение 1. *Проективной плоскостью* называется плоскость, пополненная бесконечно удаленной прямой.

Определение 2. *Проективным преобразованием* называется преобразование проективной плоскости, переводящее прямые в прямые.

Определение 3. Проективное преобразование, оставляющее на месте бесконечно удаленную прямую, называется *аффинным*.

Теорема 1. Существует проективное преобразование, переводящее данную прямую в бесконечно удаленную.

Определение 4. *Особой (выделенной)* прямой называется прямая, переходящая в бесконечно удаленную.

Теорема 2. Отношение векторов коллинеарных особой прямой сохраняется.

Теорема 3. Существует единственное проективное преобразование, переводящее данные четыре точки не лежащие на одной прямой в данные четыре точки не лежащие на одной прямой.

Теорема 4. Двойное отношение сохраняется при проективных преобразованиях.

1. (Теорема Паппа) Рассмотрим на плоскости пару прямых ℓ_1 и ℓ_2 , и пусть точки $A_1, B_1, C_1 \in \ell_1$, а точки $A_2, B_2, C_2 \in \ell_2$. Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1 ; B_1C_2 и B_2C_1 ; A_1C_2 и A_2C_1 лежат на одной прямой.

2. (Теорема Дезарга) Рассмотрим два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ на плоскости. Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 ; B_1C_1 и B_2C_2 ; A_1C_1 и A_2C_2 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 проходят через одну точку.

3. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведены четыре прямые, пересекающие его стороны в точках K и K' , L и L' , M и M' , N и N' . Прямые KM и LN пересекаются в точке P , прямые $K'M'$ и $L'N'$ — в точке P' . Докажите, что точки P , P' и O лежат на одной прямой.

4. а) На плоскости даны две прямые l_1 и l_2 и точка P не лежащая на одной из них. Через P проводятся пары прямых, пересекающие l_1 и l_2 в точках A и C , соответственно B и D . Докажите, что точки пересечения прямых AD и BC для всевозможных пар прямых l_1 и l_2 лежат на одной прямой p . Если l_1 и l_2 пересекаются в точке Q , то и p проходит через точку Q .

б) На плоскости даны прямая q и две точки A и B не лежащие на этой прямой. Пусть U и V — пара точек на q . M — точка пересечения прямых UA и VB , N — точка пересечения прямых VA и UB . Докажите, что прямые MN пересекаются в одной и той же точке Q лежащей на прямой AB .

5. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке и прямые AB_1 , BC_1 и CA_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые AC_1 , BA_1 и CB_1 пересекаются в одной точке.