

5 июля

Линейные системы: теория

Опр1. Две СЛУ (от одинакового набора переменных) называются *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Опр2. Рассмотрим *элементарные преобразования* СЛУ трех типов:

ЭП1) к строке прибавляем другую строку, умноженную на число;

ЭП2) строку умножаем на ненулевое число;

ЭП3) меняем местами две строки.

Упр1. Если одна СЛУ получается из другой путем применения ЭП1-ЭП3, то эти СЛУ эквивалентны.

Теорема 1 (метод Гаусса). При помощи ЭП1-ЭП3 каждую СЛУ можно привести к ступенчатому виду, т.е. к виду

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b_{1e}x_e + \dots + b_{1n}x_n & = & d_1 \\ b_{2k}x_k + \dots + b_{2n}x_n & = & d_2 \\ b_{3l}x_l + \dots + b_{3n}x_n & = & d_3 \\ \ddots & & \vdots \\ b_{rs}x_s + \dots + b_{rn}x_n & = & d_r \\ & 0 & = d_{r+1} \\ & \vdots & \vdots \\ & 0 & = d_m \end{array} \right. ,$$

где $b_{1e}b_{2k}b_{3l}\dots b_{rs} \neq 0$, $e < k < l < \dots < s$.

Упр2. а) Сколько решений может быть у СЛУ?

а) Сколько решений может быть у СЛУ, где переменных больше, чем уравнений?

б) Как найти все решения произвольной СЛУ?

в) За сколько действий можно решить СЛУ размера 100×100 ?

Теорема 2. Однородная система, в которой переменных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение.

Теорема 3. Если система из n уравнений с n неизвестными имеет единственное решение при *каком-то* наборе свободных членов, то она имеет единственное решение при *любом* наборе свободных членов.

Теорема 4. Если СЛУ с целыми коэффициентами и свободными членами имеет единственное решение, то это — решение в рациональных числах.

Теорема 5. Если СЛУ с целыми коэффициентами и свободными членами имеет какое-то решение, то она имеет решение в рациональных числах.

Для самостоятельного решения

Зад1. Напишите а) общее решение СЛУ (у каждого своя СЛУ); б) другое общее решение.

Зад2. (Дискретное уравнение теплопроводности) а) В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно расставить (причем единственным образом!) числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому своих соседей (у клетки максимум 4 соседа).

б) Каков физический смысл задачи (и как она "решается" по физическим соображениям)?

в) Решите задачу, если у клетки 8 соседей.

г) Обобщите задачу на непрямоугольные таблицы с "дырами" внутри и пространственные таблицы.

д) Как выглядит и решается задача для произвольного связного графа?

е) Решите задачу для комплексных чисел.