

21 июля

## Фазовое пространство

**Встреча.** Мальчик и девочка договорились встретиться после отбоя между 23-00 и 24-00. Каждый приходит на место встречи случайным образом, ждет 15 минут, и если встреча не произошла, то уходит. Какова вероятность встречи?

**Дуги на сфере.** Прямая на сфере – это пересечение сферы и плоскости, проходящей через ее центр. Аналогично определяется отрезок.

Пусть на сфере единичного радиуса имеется несколько отрезков суммарной длины меньше  $\pi$ . Докажите, что тогда существует прямая, не пересекающая ни один из отрезков.

**Флатландцы.** а) Двое флатландцев спускаются с высочайшей вершины Флатландии «Пик кипа» – один по левому склону, а второй по правому. Гора везде выше уровня моря, а ее поверхность – график кусочно-линейной непрерывной функции. Флатландцы "непрерывно" двигаются, так что зависимость координат флатландца от времени – непрерывная функция, на скорость ограничений нет.

а) Докажите, что флатландцы могут достичь моря, все время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря.

б) Пусть поверхность горы – график дифференцируемой функции. Тогда аналогичное утверждение может быть неверным.

### Для самостоятельного решения

**Возы.** Из города  $A$  в город  $B$  ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из  $A$  в  $B$  и связанные веревкой длины 20, смогли проехать, не порвав веревки. Могут ли разминуться не коснувшись два круглых воза радиуса 10, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

**Московские высотки.** В Москве 7 высоток. Турист-математик хочет найти такую точку, из которой эти высотки видны в заданном порядке (начиная с МГУ, по часовой стрелке). Всегда ли ему удастся это сделать?

**Запрет на перпендикулярность.** В пространстве имеется  $n$  прямых. Докажите, что из них можно выбрать не менее  $7n/24$  прямых, среди которых нет перпендикулярных.