Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 4 июля

Идея линейного отображения.

Эзотерическое знание. Посвященные знают, что $C_{p^n}^k \vdots p$, p – простое $(0 < k < p^n)$.

1. По кругу стоят 128 целых чисел. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 128.

а) Сначала рассмотрите случай единицы и 127 нулей. Что получится через 7 ходов? Докажите, что через несколько ходов все числа станут четными.

б) Определим понятие *суммы(суперпозиции)* двух расстановок чисел по кругу. Докажите, что операция замены от суммы=сумме операций замены.

2. (Интерполяционный многочлен Лагранжа.) Докажите что для любого набора из $n+1$ точки с разными абсциссами найдется единственный многочлен степени не выше n, который в этих точках принимает заданные значения.

Указание. Сравним с предыдущей задачей. Что здесь является аналогами 1) начальной расстановки, 2) операции, 3) суммы расстановок, 4) умножения расстановки на число?

3. По окружности расставлены p целых чисел (p – простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2011}.

4. (Китайская теорема об остатках.) а) Даны попарно взаимно простые числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и произвольные $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что существует такое число A, что $A \equiv a_i \pmod{m_i}$.

б) Число A определено однозначно по модулю $m_1 \ldots m_n$.

Для многочлена $P(x)$ рассмотрим последовательность сумм

$$S_n = S_n(P) = P(1) + \cdots + P(n).$$

Нахождение явной формулы для $P(x) = x^k$ представляет особенный интерес.

5. Найдите явную формулу для S_n *хоть для какого-нибудь* многочлена степени k.

а) **Определение.** *Икс в убывающей степени* $m \geqslant 0$: $x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$.

б) Докажите, что $(x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$;

в) Найдите $0^{\underline{m}} + 1^{\underline{m}} + 2^{\underline{m}} + 3^{\underline{m}} + \cdots + (n-1)^{\underline{m}}$.

6. Докажите, что если $\deg P(x) = k$, то $S_n(P)$ есть многочлен степени $k+1$ (то есть $S_n = g(n)$ для некоторого многочлена $g(x)$ степени $k+1$). Для примера вычислите $1^3 + \cdots + n^3$ и $1^4 + \cdots + n^4$.

Для самостоятельного решения

1. По окружности расставлены p^n целых чисел (p – простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2011}, если за ход из каждого числа вычитается его

а) l-ый сосед слева, l фиксировано;

б) l-ый сосед слева, l может меняться от хода к ходу!

2. Есть числа $a_1, \ldots, a_n$, среди них ровно два одинаковых. Напишите выражение от $a_1, \ldots, a_n$, значение которого равно этим одинаковым числам.

3. На планете каждая страна граничит не более, чем с семью другими. Страны хотят перераспределить свой золотой запас так, чтобы у любых двух граничащих стран количество золота различалось бы не более, чем в 13 раз. Докажите, что это перераспределение можно провести так, чтобы каждая страна лишилась не более, чем половины своего золота.