10 класс • 23 июля

Заключительная олимпиада.

Довывод.

1. В каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости записано одно из чисел 1, 2, 3, 4 так, что каждое число встречается хотя бы один раз. Назовем клетку *правильной*, если количество различных чисел, записанных в четыре соседние (по стороне) с ней клетки, равно числу, записанному в эту клетку. Могут ли все клетки плоскости оказаться правильными?

2. Дан выпуклый 2011-угольник со длинами сторон a_1, a_2, $\ldots$, a_{2011}. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + a_3 + \ldots + a_{2011})$. Докажите, что $f(a_{2011}) = f(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2010})$.

3. На окружности с диаметром AB выбраны точки C и D. XY — диаметр, проходящий через середину K хорды CD. M — проекция точки X на прямую AC, N — проекция точки Y на прямую BD. Докажите, что точки M, N и K лежат на одной прямой.

4. Дано натуральное число n, не являющееся точным квадратом. Докажите, что найдутся такие целые неотрицательные числа a и b, что числа $n - a^2$ и $b^2 - n$ — натуральные, причем первое из них делится на второе.

5. Ребра полного графа на N вершинах покрашены в красный и черный цвет. При каком наименьшем N в этом графе обязательно найдется n одноцветных ребер без общих концов?

Фамилия									
Довывод					Вывод				
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Σ**

10 класс • 23 июля

Заключительная олимпиада.

Довывод.

1. В каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости записано одно из чисел 1, 2, 3, 4 так, что каждое число встречается хотя бы один раз. Назовем клетку *правильной*, если количество различных чисел, записанных в четыре соседние (по стороне) с ней клетки, равно числу, записанному в эту клетку. Могут ли все клетки плоскости оказаться правильными?

2. Дан выпуклый 2011-угольник со длинами сторон $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + a_3 + \ldots + a_{2011})$. Докажите, что $f(a_{2011}) = f(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2010})$.

3. На окружности с диаметром AB выбраны точки C и D. XY — диаметр, проходящий через середину K хорды CD. M — проекция точки X на прямую AC, N — проекция точки Y на прямую BD. Докажите, что точки M, N и K лежат на одной прямой.

4. Дано натуральное число n, не являющееся точным квадратом. Докажите, что найдутся такие целые неотрицательные числа a и b, что числа $n - a^2$ и $b^2 - n$ — натуральные, причем первое из них делится на второе.

5. Ребра полного графа на N вершинах покрашены в красный и черный цвет. При каком наименьшем N в этом графе обязательно найдется n одноцветных ребер без общих концов?

Фамилия									
Довывод					Вывод				
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**Σ**