Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 22 июля

Линейность в геометрии.

Основное соображение. Если на плоскости задана линейная функция (то есть каждой точке (x, y) сопоставлено число $\ell(x, y) = ax + by + c$), то множество нулей этой функции есть или пустое множество, или прямая, или вся плоскость.

Пример. Дана точка X на основании равнобедренного треугольника. Через X перпендикулярно основанию проведена прямая, пересекающая боковые стороны или их продолжения в точках A и B. Докажите, что $XA + XB$ не зависит от X.

Ориентированное расстояние

Предложение. Ориентированное расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $ax + by + c = 0$ равно

$$\rho(ax + by + c = 0, (x_0, y_0)) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1. Докажите, что основания внешних биссектрис (неравнобедренного) треугольника лежат на одной прямой.

2. Грани правильного октаэдра раскрашены в черный и белый цвет (при этом любые две грани, имеющие общее ребро, раскрашены в разные цвета). Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей черных граней.

Что такое часовая стрелка?

Рассмотрим треугольник ABC. Мы часто говорим: его вершины обходятся по или же против часовой стрелки. Но в аксиомах плоскости «часовая стрелка» или что-то подобное не фигурирует!

Определение 1. *Ориентированным треугольником* $\overline{ABC}$ (о.т.) называется упорядоченная тройка точек, не принадлежащих одной прямой. При обозначении о.т. порядок его вершин определяется порядком их записи Треугольник можно превратить в о.т. шестью способами.

Определение 2. *Цепью*, соединяющей о.т. $\overline{ABC}$ и о.т. $\overline{A'B'C'}$, называется конечная последовательность о.треугольников, первым членом которой является о.т. $\overline{ABC}$, последним – о.т. $\overline{A'B'C'}$, такая, что каждые два соседних о.т. этой последовательности отличаются только одной вершиной, занимающей в обоих о.т. одно и то же место.

Предложение 1. Любые два о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$ можно соединить цепью.

Определение 3. Два о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{ABD}$ имеют *одинаковый обход*, если точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Если же точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB, то о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{ABD}$ имеют *противоположный обход*. Аналогично определяется одинаковый и противоположный обход о.т., отличающихся только вторыми или только первыми вершинами.

Определение 4. Если в цепи, соединяющей о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$, число пар соседних треугольников, имеющих противоположный обход, четное, то говорят, что о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C}$ имеют *одинаковую ориентацию*, если же это число нечетное, то *разную ориентацию*.

Предложение 2. Это определение корректно.

Предложение 2 докажем счетом в координатах, что делается в предложении 3.

Предложение 3. Пусть точки A, B, C, A', B', C' имеют в некоторой декартовой системе координат координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), (x_3', y_3')$ соответственно. Тогда о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$ имеют одинаковую(разную) ориентацию $\Rightarrow$ определители $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} x_2' - x_1' & y_2' - y_1' \\ x_3' - x_1' & y_3' - y_1' \end{vmatrix}$ одного(разных) знака.

Замечание. Получается, что эти совпадение(различие) знаков этих определителей *не зависит* от выбора декартовой системы координат!

Следствия. а) Ориентация треугольника не меняется при циклической перестановке вершин.

б) Ориентация треугольника меняется при центральной симметрии.

в) Ориентация треугольника не меняется при параллельном переносе.

г) Ориентация треугольника не меняется при осевой симметрии.

Определение 5. *Ориентированная плоскость* – это плоскость, где фиксирован о.треугольник. Если некий треугольник имеют одинаковую ориентацию с фиксированным, то говорят, что он *ориентирован положительно*, иначе – *отрицательно.*

Если на плоскости есть декартова система координат, то она индуцирует ориентацию фиксированием базисного треугольника $\overline{OE_1E_2}$, где O – начало координат, E_1, E_2 – единичные точки осей Ox, Oy соответсвенно. Тем самым все системы координат делятся на два класса.

Предложение 4. Если точки A, B, C имеют в некоторой декартовой системе координат координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ соответственно, то о.т. $\overline{ABC}$ ориентирован положительно (ориетация плоскости индуцирована системой координат) $\iff \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} > 0.$

Что такое ориентированная площадь треугольника?

Определение 1. *Ориентированная площадь о.т.* на ориентированной плоскости – это: площадь для положительно ориентированных треугольников, и минус площадь для отрицательно ориетированных треугольников.

Теорема 1. Если точки A, B, C имеют в некоторой декартовой системе координат координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ соответственно, то $S_{or}(\overline{ABC}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$

Замечание. О.площадь о.треугольника, натянутого на вектора (a, b) и (c, d), равна $1/2(ad - bc)$.

Линейность ориентированной площади

Если зафиксировать точки A, B, то функция $f(X) = S_{or}(ABX)$ является линейной функцией. В каждой из двух полуплоскостей относительно AB обычная площадь тоже является линейной функцией (но не на всей плоскости!).

3. Диагонали отрезают от выпуклого пятиугольника 5 треугольников (некоторые части отрезаются дважды). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше площади пятиугольника.

Утверждение. Точка X делит отрезок CD в отношении $p : q$ (не обязательно $p, q > 0$). Тогда

$$S_{or}(ABX) = \frac{q}{p+q} S_{or}(ABC) + \frac{p}{p+q} S_{or}(ABD).$$

4. Середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.

5. В выпуклом четырехугольнике середины диагоналей и середина отрезка с концами в точках пересечения противоположных сторон, лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*). А в невыпуклом?

Для самостоятельного решения

6. В описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой (*прямая Ньютона*).

7. Дан четырехугольник. В одной паре его противоположных углов провели внешние биссектрисы – получили точку их пересечения. Потом в другой паре – получили вторую точку. Потом противоположные стороны продлили до пересечения, получили два угла – по ним аналогично построили третью точку. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

8. На плоскости даны несколько черных и белых отрезков. Берем точку и строим треугольники с вершинами в этой точке и основаниями – данными отрезками. Рассмотрим ГМТ таких точек, что сумма черных (обычных) площадей равна сумме белых. Докажите, что это ГМТ почти всегда покрывается несколькими прямыми. Скольких прямых гарантировано хватит? Почему покрывается почти всегда, но не всегда?

9. На высотах (но не на продолжениях высот) остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1, отличные от точки пересечения высот H, такие, что сумма площадей треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1 равна площади треугольника ABC. Докажите, что это выполняется тогда и только тогда, когда окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через H.