Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 20 июля

Линейные рекурренты — 2.

По прежнему рассматриваем линейное рекуррентное уравнение (порядка k)

$$x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + \alpha_0 x_n. \qquad (*)$$

Упр. 1. Докажите, что если λ – корень кратности $\geqslant 2$ характеристического уравнения, то последовательность $x_n = n\lambda^n$ удовлетворяет уравнению $(*)$.

Упр. 2. Пусть некоторая последовательность удовлетворяет ЛРУ с характеристическим многочленом $\chi(x)$. Докажите, что тогда эта последовательность удовлетворяет ЛРУ с характеристическим многочленом $\chi(x)\cdot g(x)$, $g(x)$ – любой многочлен.

Замечание. Уже это слишком технично. Дело в том, что основной объект нашего изучения – последовательность, удовлетворяющая ЛРУ – «недостаточно алгебраизирован», поэтому с ним тяжело работать (ведется работа не с *последовательностями* целиком, а с *элементами последовательностей*). Для устранения недостатка заведем на пространстве всех последовательностей V_∞ *линейные операторы* (то есть линейные отображения $V_\infty \to V_\infty$). По сути дела нам будет важен только один такой оператор – оператор сдвига: $J(x_1, x_2, x_3\dots) = (x_2, x_3, x_4\dots)$. Несложно понять, что линейные операторы можно складывать, умножать на константы, умножать друг на друга – снова будут получаться линейные операторы. Рассмотрим, например, оператор $J^2 - J - 1$ ($1 = \mathrm{Id}$). Что за последовательности будут решениями уравнения $(J^2 - J - 1)(x_1, x_2, x_3, \dots,) = (0, 0, 0, \dots)$?

Итак, каждому ЛРУ с характеристическим многочленом $\chi(x)$ мы сопоставляем линейный оператор $\chi(J)$. Решением уравнения $(\chi(J))\{x_i\} = 0$ в точности являются последовательности, удовлетворяющие ЛРУ с характеристическим многочленом $\chi(x)$. После этого решение упр. 2. становится очевидным. Но чудес не бывает: сложность никуда не исчезла, просто она запряталась в (рутинную!) проверку «естественных свойств» линейных операторов.

Контрольный вопрос. Какие последовательности являются решениями уравнений $(J-\lambda)\{x_i\} = 0$? $(J^2 - \lambda J)\{x_i\} = 0$? $(J^3 - \lambda J^2)\{x_i\} = 0$?

Упр. 3. Пусть $\chi(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$, где многочлены $\chi_1(x), \chi_2(x)$ взаимно просты, и последовательность $\{x_i\}$ удовлетворяет ЛРУ с характеристическим многочленом $\chi(x)$. Тогда $\{x_i\} = \{y_i\} + \{z_i\}$, где последовательности $\{y_i\}$ и $\{z_i\}$ удовлетворяют ЛРУ с характеристическими многочленами $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$.

Упр. 4. Рассмотрим ЛРУ с характеристическим многочленом $\prod(x-\lambda_i)^{n_i}$. Допустим, что для каждого i мы нашли базисы пространства рекуррентных последовательностей, удовлетворяющих ЛРУ с характеристическим многочленом $(x-\lambda_i)^{n_i}$. Докажите, что их объединение есть базис пространства последовательностей, удовлетворяющих ЛРУ с характеристическим многочленом $\prod(x-\lambda_i)^{n_i}$.

Упр. 5. а) Укажите такую рекурренту, которая удовлетворяет ЛРУ с характеристическим многочленом $(x-\lambda)^k$, но не удовлетворяет ЛРУ с характеристическим многочленом $(x-\lambda)^{k-1}$.

б) Найдите базис пространства рекуррентных последовательностей, удовлетворяющих ЛРУ с характеристическим многочленом $(x-\lambda_i)^{n_i}$.

Теорема. Любое решение ЛРУ с характеристическим многочленом $\prod(x-\lambda_i)^{n_i}$ однозначно представимо в виде $\sum P_i(n)\lambda_i^n$, где $P_i(x)$ – многочлен степени не выше $n_i - 1$.

Для самостоятельного решения

1. Решите ФУР $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(f(f(x))) + f(f(x)) = 2x + 5$.

2. Рассмотрим множество всех последовательностей, удовлетворяющих сразу двум ЛРУ. Докажите, что это есть множество последовательностей, удовлетворяющих некоторому одному ЛРУ.