

Матбой профи10 — молодые преподаватели 7-го класса

1. В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше $1 + x$ г. При каком наибольшем значении x заведомо можно разложить весь изюм на две чаши весов так, чтобы они показали разность, не превосходящую 1 г?
2. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойством: $f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Найдите все такие многочлены $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, что всякого натурального числа n уравнение $P(x) = 2^n$ имеет целый корень.
4. В графе K ребер и T треугольников. Докажите, что $9T^2 \leq 2K^3$.
5. Дан выпуклый шестиугольник $AC'BA'SB'$, у которого каждые две противоположные стороны равны. A_1 — точка пересечения BC и серединного перпендикуляра к AA' . Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.
6. Дан выпуклый многоугольник. Докажите, что найдутся шесть таких многоугольников, полученных из исходного параллельными переносами, что они касаются исходного многоугольника, и попарно не имеют общих внутренних точек.
7. Прямая проходит через центр описанной окружности треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Докажите, что на окружности девяти точек треугольника ABC найдется точка, из которой отрезки AQ и CP видны под прямыми углами.
8. Пусть $n > 3$ — нечетное число. Докажите, что существует такое простое p , что p не делит n , но делит $2^{\varphi(n)} - 1$.
9. На клетчатой доске $n \times n$ расставлены несколько фишек так, что каждая клетка без фишки граничит по стороне с клеткой, содержащей фишку, а каждые две клетки с фишками можно соединить цепочкой клеток, содержащих фишки, в которой соседние клетки граничат по стороне. Докажите, что фишки стоят не менее, чем в $\frac{n^2-1}{3}$ клетках.
10. Найдите все \mathbb{Q} -линейные отображения $F: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ такие, что для любого неприводимого многочлена $p \in \mathbb{Q}[x]$ многочлен $F(p)$ тоже неприводим.