Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 5 июля

Линейные пространства.

Определение. Пусть даны множество V («векторы») и поле K («числа», или «скаляры»), имеются операция сложения векторов и для каждого числа имеется операция умножения вектора на число. При этом:

а) сложение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по сложению элемент ($\overrightarrow{0}$) и у каждого вектора $\overrightarrow{v}$ есть обратный по сложению ($-\overrightarrow{v}$);

б) $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$; $(k_1k_2)\overrightarrow{v} = k_1(k_2\overrightarrow{v})$ (здесь $k_1, k_2 \in K$, $\overrightarrow{v} \in V$);

в) $(k_1 + k_2)\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{v} + k_2\overrightarrow{v}$; $k(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = k\overrightarrow{v_1} + k\overrightarrow{v_2}$.

Тогда V называется *векторным (линейным) пространством* над K.

Примеры.

а) K^n – строки(или столбцы) длины n;

б) множество решений однородной СЛУ от n переменных;

в) линейные уравнения вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$;

г) многочлены над полем K;

д) вещественнозначные функции, определенные на произвольном множестве.

е) последовательности комплексных чисел;

ж) последовательности комплексных чисел с конечным числом ненулевых элементов;

з) множество всех прямоугольных таблиц, заполненных остатками по модулю 2;

и) множество векторов на плоскости.

й) множество всех подмножеств данного (для определенности конечного) множества.

Упр. 1. Образуют ли векторные пространства следующие множества (операции – естественные):

а) многочлены степени n над полем K;

б) неубывающие последовательности (над $\mathbb{R}$);

в) многочлены над данным полем с фиксированным корнем α;

г) строки длины n с нулевой суммой элементов;

д) множество функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$;

е) множество функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$;

ж) строки целых чисел длины n над $\mathbb{Z}$.

з) строки целых чисел длины n над $\mathbb{Z}_p$.

Определение. Подмножество векторного пространства V называется *подпространством* V, если оно само является векторным пространством относительно операций, *индуцированных* с V.

Упр. 2. а) Что необходимо проверить, чтобы убедиться, что некоторое подмножество является подпространством?

б) В примере и упр. 1. перечислены пространства. Найдите в следующих пространствах подпространства из этих списков: пример а), пример г), пример е).

Определение. Подмножество S векторного пространства V называется *системой образующих* этого пространства, если всякий вектор $v \in V$ можно представить в виде $v = \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n$, где $v_1, \dots, v_n \in S$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Выражение $\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение) называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \dots, v_n$.

Определение. Система образующих S пространства называется его *базисом*, если всякий элемент пространства представляется в виде ЛК элементов из S *единственным* образом.

Упр. 3. Укажите базисы в пространствах из примера б,в,г,ж,и,й и упр. 1 в,г. А в примере е?

Упр. 4. Как в терминах базиса формулируется теорема об инт. многочлене Лагранжа?

Упр. 5. $f(x)$ – многочлен степени 10. Докажите, что $f, f', f'', \dots, f^{(10)}$ – базис в пространстве многочленов степени не выше 10.

Определение. Подмножество S векторного пространства V называется *линейно независимым*, если никакая *нетривиальная* линейная комбинация векторов из S не равна нулю.

Упр. 6. Это определение равносильно следующим:

а) если вектор из V выражается в виде ЛК через векторы из S, то единственным образом.

б) никакой вектор из S нельзя выразить в виде ЛК через остальные.

Упр 7. а) Если семейство векторов ЛНЗ, то и любая его часть ЛНЗ;

б) Если семейство ЛЗ, то и любое содержащее его семейство ЛЗ.

Теорема (о равносильных определениях базиса). Следующие условия равносильны:

а) S — базис пространства V;

б) S — линейно независимая система образующих пространства V;

в) S линейно независимо, но теряет это свойство при добавлении любого вектора из V;

г) S — система образующих пространства V, но теряет это свойство при удалении любого вектора.

Таким образом, базис векторного пространства можно описать, с одной стороны, как *минимальную систему образующих*, а с другой – как *максимальную линейно независимую систему*. Возникая на узком стыке двух противоположных качеств, базисы не могут не приобрести ценные свойства.

Теорема (о линейной зависимости линейных комбинаций). Если в пространстве есть базис из n векторов, то любые $n+1$ векторов линейно зависимы.

Следствие (корректность определения размерности). Если в пространстве есть базис из n векторов, то любой другой базис тоже содержит n векторов.

Определение. Векторное пространство, имеющее конечный базис, называется *конечномерным*, а число векторов в каждом из его базисов называется его *размерностью* ($\dim$). Если в векторном пространстве нет конечного базиса, оно называется *бесконечномерным*.

Упр. 8. а) Свойства ЛЗ и ЛНЗ сохраняются при *изоморфизме* пространств.

б) Два конечномерных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны. В частности, любое конечномерное пространство V изоморфно $\mathsf{K}^{\dim V}$.

Упр. 9. а) К любой ЛНЗ системе векторов (конечномерного) пространства можно добавить векторы так, чтобы получился базис.

б) Из любой системы образующих (конечномерного) пространства можно удалить часть векторов так, чтобы оставшиеся образовывали базис.

Упр. 10. Размерность собственного (не совпадающего со всем пространством) подпространства конечномерного меньше размерности пространства.

Упр. 11. Рассмотрим пространство и его подпространство, порожденное k векторами (А что это такое?). Докажите, что это подпространство конечномерно, и его размерность $\leqslant k$. При каких условиях размерность в точности равна k?

Науку – в жизнь!

Сюжет 1, в котором появляются пространства.

1. Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

2. В каждую клетку шахматной доски вписано по целому числу. Разрешается за один ход увеличить на 1 все числа в любом квадрате 3×3 или 4×4. Всегда ли можно добиться, чтобы все числа стали кратны 25? А все числа, кроме двух, заранее фиксированных?

Сюжет 2, в котором появляются характеристические векторы.

3. В классе k девочек и $n > k$ мальчиков. Некоторым мальчикам нравятся некоторые девочки. Докажите, что найдется некоторый непустой набор мальчиков такой, что каждая девочка нравится четному количеству мальчиков из этого набора.

4. $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ — непустые подмножества n-элементного множества. Докажите, что можно выбрать такие непустые непересекающиеся множества индексов $\{i_1, \ldots, i_k\}$ и $\{j_1, \ldots, j_\ell\}$, что

$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k} = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_\ell}.$$

Для самостоятельного решения

5. а) Докажите, что $1 + xy + x^2y^2$ не представляется в виде $f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y)$, где $f_1, f_2, g_1, g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – произвольные функции.

б) Обобщите это утверждение на функцию $f(x, y) = 1 + xy + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n$.

6. а) Докажите, что для каждых двух многочленов $f_1(x), f_2(x)$ найдется такой ненулевой многочлен $P(x, y)$, что $P(f_1(x), f_2(x)) = 0$.

б) Имеются многочлены $f_1(y_1, \ldots, y_{100}), \ldots, f_{101}(y_1, \ldots, y_{100})$ с действительными коэффициентами. Докажите, что существует такой ненулевой многочлен $R(x_1, \ldots, x_{101})$, что $R(f_1, \ldots, f_{101}) = 0$.

7. В каждую клетку шахматной доски вписано по целому числу. Разрешается за один ход увеличить на 1 все числа в любом квадрате 3×3 или 4×4. Всегда ли можно добиться, чтобы НОД всех чисел стал больше 1?

8. В таблицу 8×8 вписаны числа. За один вопрос можно узнать сумму чисел в любом прямоугольнике. За какое наименьшее число вопросов можно узнать сумму чисел на диагонали?

9. Докажите, что из $2n - 1$ иррационального числа можно выбрать n чисел так, что сумма любых нескольких выбранных чисел из этих n будет иррациональной.