Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 19 июля

Скалярное произведение.

Определение. Пусть K — поле, $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $v = (v_1, \dots, v_n)$ — векторы из K^n. Положим $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$ (*скалярное произведение* векторов u и v).

Упр. 1. Свойства скалярного произведения:
а) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;
б) $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$;
в) Если $\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_sv_s = 0$, то $\alpha_1\langle v_1, v\rangle + \dots + \alpha_s\langle v_s, v\rangle = 0$.

Определение. Векторы $u, v \in K^n$ называются *ортогональными*, если $\langle u, v\rangle = 0$.

Упр. 2. Может ли ненулевой вектор быть ортогональным самому себе?

Упр. 3. Докажите, что любой набор попарно ортогональных ненулевых векторов в $\mathbb{R}^n$ линейно независим. На какие поля, помимо $\mathbb{R}$, переносится это свойство?

Задача 1. В городе живет n человек и имеется несколько клубов. Известно, что в каждом клубе состоит нечетное число членов, а любые два клуба различаются по составу и имеют четное число общих членов. Докажите, что количество клубов в городе не превосходит n.

Определение. Пусть M — подмножество K^n. Положим $M^{\perp} = \{v | (v, M) = 0\}$ — *ортогональное дополнение* к множеству M.

Упр. 4. а) Докажите, что $M^{\perp}$ является подпространством. б) Как связаны $(M^{\perp})^{\perp}$ и M? в) Пусть M — подпространство. Докажите, что $\dim M + \dim M^{\perp} = n$. г) Пусть M — подпространство. Докажите, что $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

Задача 2. Каково наибольшее возможное количество подмножеств 100-элементного множества, таких, что пересечение любых двух (возможно, совпадающих) из них содержит четное количество элементов?

Для самостоятельного решения

1. В городе k супружеских пар и n клубов. Известно, что для мужчины и женщины количество клубов, в которых они оба бывали, нечетно тогда и только тогда, когда они — муж и жена. Докажите, что $k \leqslant n$.

2. В КИМах Единой Государственной Олимпиады (ЕГО) n вопросов с ответами «да» и «нет», за каждый правильный ответ начисляется 1 первичный балл. ЕГО сдавали k участников, и при этом они дали такой набор ответов на вопросы, что экспертная комиссия может так приписать положительные веса вопросам, чтобы участники расположились по итоговым баллам в любом нужном порядке. Докажите, что $k \leqslant n$.

3. (Неравенство Фишера). Пусть $A_1, \dots, A_m$ — различные непустые подмножества n-элементного множества. Если пересечение любых двух различных из них состоит из l элементов, то $m \leqslant n$. Указание: ЛЗ над $\mathbb{Q}$.