Двойные отношения и гармонические четверки.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых a, b, c, d, проходящих через одну точку, называется величина $(a, b; c, d) = \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{c})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{c})} : \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{d})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{d})}$, где $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d, и $\angle(\overline{a}, \overline{c})$ – ориентированный угол между векторами (не между прямыми!).

Упр. 1. Корректно ли это определение?

Упр. 2. Как связаны между собой двойные отношения точек и прямых?

Теорема. Двойные отношения четырех точек сохраняются при при центральных проекциях.

Определение. Точки A, B, C, D лежат на окружности. Пусть X — произвольная точка этой окружности. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D называется величина $(A, B; C, D) = (XA, XB; XC, XD)$.

Замечание. Если одна из точек A, B, C, D совпадает с X, то в качестве соответствующей прямой рассматривается касательная к окружности.

Упр. 3. Корректно ли это определение?

Утверждение. На двух пересекающихся в точке A прямых выбраны точки: на одной – A_1, B_1, C_1, на другой – A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке (возможно, бесконечно удаленной) $\iff (A, A_1; B_1, C_1) = (A, A_2; B_2, C_2)$.

Определение. Если гармоническое отношение четверки (точек на прямой, прямых, точек на окружности) равно -1, то четверка называется *гармонической*.

Примеры гармонических четверок.

а) Пусть M и N – основания внутренней и внешней биссектрис угла A треугольника ABC. Тогда $(B, C; M, N) = -1$.

б) Пусть у окружностей разного радиуса с центрами X и Y общие внешние касательные пересекаются в точке A, общие внутренние касательные пересекаются в точке B. Тогда $(A, B; X, Y) = -1$.

в) Название *гармоническая четверка* взялось вот откуда. Если на вещественной прямой отмечены числа $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$, то $(A, B; O, H) = -1$ тогда и только тогда, когда точке H соответствует среднее гармоническое чисел a и b.

г) $(A, B; C, D) = -1$ тогда и только тогда, когда точки C и D инверсны относительно окружности, построенной на AB как на диаметре.

Определение. *Полным четырехвершинником* называется конфигурация, составленная из четырех точек общего положения (вершин) и шести попарно соединяющих их прямых (сторон). Противоположные стороны полного четырехвершинника попарно пересекаются в трех диагональных точках. Три прямые, попарно соединяющие диагональные точки, называются диагоналями полного четырехвершинника. Недиагональные точки, в которых диагонали пересекаются со сторонами, называются дополнительными.

Теорема о полном четырехвершиннике. а) Каждая пара вершин полного четырехвершинника гармонически разделяет лежащие на той же стороне диагональную и дополнительную точки, а каждая пара диагональных точек – лежащую на той же диагонали пару дополнительных точек.

б) Дополнительные точки являются точками попарного пересечения четырех прямых.

Замечание. Иногда теорему формулируют так: пусть A_1, B_1, C_1 – основания чевиан в треугольнике ABC, K – точка пересечения прямых A_1C_1 и AC. Тогда точки A, B_1, C, K образуют гармоническую четверку. Верно и обратное.

Для самостоятельного решения

1. Продолжения противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках M и K. Через точку O пересечения его диагоналей проведена прямая, параллельная MK. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Его противоположные стороны AB и CD пересекаются в точке K. Его диагонали пересекаются в точке L. Известно, что прямая KL проходит через центр тяжести четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

3. Пусть A_0 и C_0 – середины сторон BC и AB треугольника ABC соответственно, AA_1 – биссектриса угла A, а A' и B' – точки касания вписанной окружности со сторонами BC и CA. Докажите, что прямые AA_1, A_0C_0 и $A'B'$ пересекаются в одной точке.

4. На плоскости задан отрезок AB, перед которым образовалась овальная лужа. Пользуясь только линейкой, продолжите отрезок за эту лужу.

5. Точка пересечения двух прямых находится в луже. Проведите через эту точку и заданную точку вне лужи прямую одной линейкой.