Лексикографический порядок.

Аксиома индукции. В каждом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьший элемент.

Принцип минимального контрпримера. Если утверждение зависит от натурального параметра n, то либо оно верно для всех n, либо есть *наименьшее* n, для которого утверждение неверно.

Пример. Докажите, что два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

Упр. 1. Прожектор в пространстве освещает октант с осями, параллельными координатным. Такие прожектора последовательно помещаются в неосвещенные точки с натуральными координатами. Докажите, что удастся разместить лишь конечное число прожекторов.

Определение. Обозначим $\mathbb{N}^m = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) | a_i \in \mathbb{N}\}$. Пусть $A, B \in \mathbb{N}^m$. Будем говорить, что $A \preceq B$, если или $a_1 < b_1$, или $a_1 = b_1$ и $a_2 < b_2$, или $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 < b_3$ и т.д.

Упр. 2. а) Если $A \preceq B$, $B \preceq C$, то $A \preceq C$. Таким образом, множество $\mathbb{N}^m$ превращается в ЧУМ.

б) Строго убывающая последовательность строк из $\mathbb{N}^m$ всегда конечна!

Теорема. В каждом непустом подмножестве из $\mathbb{N}^m$ есть наименьший элемент.

1. В колоде несколько карт лежат рубашкой вверх, остальные – рубашками вниз. Время от времени Петя выбирает пачку из несколько карт подряд, в которой первая и последняя карты лежат рубашкой вниз, вынимает ее, переворачивает, и вставляет в то же место. (Пачка может состоять и из одной карты рубашкой вниз). Докажите, что рано или поздно все карты в колоде лягут рубашкой вверх.

2. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x * (p-1)^k/p$, где p – какой-нибудь простой делитель числа x, а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.

Вопрос. Аналогично можно определить порядок на множестве бесконечных строк натуральных чисел. Верно ли, что при этом в любом непустом подмножестве будет наименьший элемент?

3. Дана последовательность из бесконечного числа нулей и конечного числа единиц. Если найдется группа вида 01, то ее можно заменить на группу вида $10\ldots0$ с произвольным числом нулей. Докажите, что можно сделать лишь конечное число таких замен.

4. В памяти компьютера записан массив вещественных положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обнаружив любую пару соседних элементов в беспорядке, то есть $a_i > a_{i+1}$, компьютер меняет их местами. Но при этом вирус умножает новый элемент a_{i+1} на 1000. Докажите, что со временем весь массив будет идти в порядке неубывания. Верно ли это для произвольных вещественных чисел?

5. Али-Баба делит с разбойником 10 куч золотого песку. Али-Баба может в любой момент взять три кучи и уйти, либо он может выбрать 4 кучи, разделить каждую на левую и правую часть (обе непустые). Затем разбойник правые части нетождественно переставляет и затем части объединяются – каждая левая с каждой правой. Докажите, что Али-Баба сможет унести домой более 99.99% процентов золотого песку.

6. Функция $F(x,y)$ задана условиями: $F(0,y) = y+2$, $F(x,1) = 2$ $(x > 0)$, $F(x+1,y) = F(x, F(x+1, y-1))$.

а) Покажите, что функция определена для всех пар (x,y), где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$.

б) Найдите явную формулу для $F(1,y)$.

в) Найдите явную формулу для $F(2,y)$.

г) Найдите явную формулу для $F(3,y)$.

д) Что больше: $1000!^{1000!}$ или $F(5,5)$?