Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.

Материалы занятий десятого класса «Профи»

Преподаватели

Волков Владислав Владимирович
Мокин Василий Борисович
Самойлов Леонид Михайлович
Скопенков Аркадий Борисович

Самый большой грех по отношению к ближнему — говорить ему то, что он поймет с первого раза.
Венедикт Ерофеев. *Из записных книжек*

Вступительная олимпиада. 4 июля

1) Назовем натуральное число «замечательным», если оно – наименьшее среди всех натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Сколько существует 2011-значных «замечательных» чисел?

2) На двух клетках шахматной доски стоят черная и белая фишки. За ход одну из них можно двигать на соседнюю по стороне клетку (две фишки на одной клетке стоять не могут). Можно ли получить все расположения фишек, причем каждое – ровно по 1 разу?

3) Диагонали параллелограмма $ABCD$ с тупым углом A пересекаются в точке O. Докажите, что точка O, а также основания перпендикуляров, опущенных из точки A на отрезки BC, BD и CD, лежат на одной окружности.

4) Пусть A и B — две вершины (строго) выпуклого многогранника. Любая грань многогранника содержит или A, или B. Докажите, что вершины A и B можно соединить путем из не более, чем трех ребер.

5) $p > 5$ — простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби $1/p$ равна $2n$. Докажите, что если этот период разбить на два n-значных куска, то сумма чисел в этих кусках равна $\underbrace{99\ldots9}_{n}$ (n девяток). Например, $1/7 = 0,(142857)$ и $142 + 857 = 999$.

Идея линейного отображения. 4 июля

Эзотерическое знание. Посвященные знают, что $C^k_{p^n} \vdots p$, p – простое $(0 < k < p^n)$.

1. По кругу стоят 128 целых чисел. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 128.

а) Сначала рассмотрите случай единицы и 127 нулей. Что получится через 7 ходов? Докажите, что через несколько ходов все числа станут четными.

б) Определим понятие *суммы(суперпозиции)* двух расстановок чисел по кругу. Докажите, что операция замены от суммы=сумме операций замены.

2. (Интерполяционный многочлен Лагранжа.) Докажите что для любого набора из $n+1$ точки с разными абсциссами найдется единственный многочлен степени не выше n, который в этих точках принимает заданные значения.

Указание. Сравним с предыдущей задачей. Что здесь является аналогами 1) начальной расстановки, 2) операции, 3) суммы расстановок, 4) умножения расстановки на число?

3. По окружности расставлены p целых чисел (p – простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2011}.

4. (Китайская теорема об остатках.) а) Даны попарно взаимно простые числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и произвольные $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что существует такое число A, что $A \equiv a_i \pmod{m_i}$.

б) Число A определено однозначно по модулю $m_1 \ldots m_n$.

Для многочлена $P(x)$ рассмотрим последовательность сумм

$$S_n = S_n(P) = P(1) + \cdots + P(n).$$

Нахождение явной формулы для $P(x) = x^k$ представляет особенный интерес.

5. Найдите явную формулу для S_n *хоть для какого-нибудь* многочлена степени k.

а) **Определение.** *Икс в убывающей степени* $m \geqslant 0$: $x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$.

б) Докажите, что $(x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$;

в) Найдите $0^{\underline{m}} + 1^{\underline{m}} + 2^{\underline{m}} + 3^{\underline{m}} + \cdots + (n-1)^{\underline{m}}$.

6. Докажите, что если $\deg P(x) = k$, то $S_n(P)$ есть многочлен степени $k+1$ (то есть $S_n = g(n)$ для некоторого многочлена $g(x)$ степени $k+1$). Для примера вычислите $1^3 + \cdots + n^3$ и $1^4 + \cdots + n^4$.

Для самостоятельного решения

1. По окружности расставлены p^n целых чисел (p – простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2011}, если за ход из каждого числа вычитается его

а) l-ый сосед слева, l фиксировано;

б) l-ый сосед слева, l может меняться от хода к ходу!

2. Есть числа $a_1, \ldots, a_n$, среди них ровно два одинаковых. Напишите выражение от $a_1, \ldots, a_n$, значение которого равно этим одинаковым числам.

3. На планете каждая страна граничит не более, чем с семью другими. Страны хотят перераспределить свой золотой запас так, чтобы у любых двух граничащих стран количество золота различалось бы не более, чем в 13 раз. Докажите, что это перераспределение можно провести так, чтобы каждая страна лишилась не более, чем половины своего золота.

Линейные пространства. 5 июля

Определение. Пусть даны множество V («векторы») и поле K («числа», или «скаляры»), имеются операция сложения векторов и для каждого числа имеется операция умножения вектора на число. При этом:

а) сложение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по сложению элемент ($\overrightarrow{0}$) и у каждого вектора $\overrightarrow{v}$ есть обратный по сложению ($-\overrightarrow{v}$);

б) $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$; $(k_1k_2)\overrightarrow{v} = k_1(k_2\overrightarrow{v})$ (здесь $k_1, k_2 \in K$, $\overrightarrow{v} \in V$);

в) $(k_1 + k_2)\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{v} + k_2\overrightarrow{v}$; $k(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = k\overrightarrow{v_1} + k\overrightarrow{v_2}$.

Тогда V называется *векторным (линейным) пространством* над K.

Примеры.

а) K^n – строки(или столбцы) длины n;

б) множество решений однородной СЛУ от n переменных;

в) линейные уравнения вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$;

г) многочлены над полем K;

д) вещественнозначные функции, определенные на произвольном множестве.

е) последовательности комплексных чисел;

ж) последовательности комплексных чисел с конечным числом ненулевых элементов;

з) множество всех прямоугольных таблиц, заполненных остатками по модулю 2;

и) множество векторов на плоскости.

й) множество всех подмножеств данного (для определенности конечного) множества.

Упр. 1. Образуют ли векторные пространства следующие множества (операции – естественные):

а) многочлены степени n над полем K;

б) неубывающие последовательности (над $\mathbb{R}$);

в) многочлены над данным полем с фиксированным корнем α;

г) строки длины n с нулевой суммой элементов;

д) множество функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$;

е) множество функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$;

ж) строки целых чисел длины n над $\mathbb{Z}$.

з) строки целых чисел длины n над $\mathbb{Z}_p$.

Определение. Подмножество векторного пространства V называется *подпространством* V, если оно само является векторным пространством относительно операций, *индуцированных* с V.

Упр. 2. а) Что необходимо проверить, чтобы убедиться, что некоторое подмножество является подпространством?

б) В примере и упр. 1. перечислены пространства. Найдите в следующих пространствах подпространства из этих списков: пример а), пример г), пример е).

Определение. Подмножество S векторного пространства V называется *системой образующих* этого пространства, если всякий вектор $v \in V$ можно представить в виде $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, где $v_1, \dots, v_n \in S$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Выражение $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение) называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \dots, v_n$.

Определение. Система образующих S пространства называется его *базисом*, если всякий элемент пространства представляется в виде ЛК элементов из S *единственным* образом.

Упр. 3. Укажите базисы в пространствах из примера б,в,г,ж,и,й и упр. 1 в,г. А в примере е?

Упр. 4. Как в терминах базиса формулируется теорема об инт. многочлене Лагранжа?

Упр. 5. $f(x)$ – многочлен степени 10. Докажите, что $f, f', f'', \dots, f^{(10)}$ – базис в пространстве многочленов степени не выше 10.

Определение. Подмножество S векторного пространства V называется *линейно независимым*, если никакая *нетривиальная* линейная комбинация векторов из S не равна нулю.

Упр. 6. Это определение равносильно следующим:

а) если вектор из V выражается в виде ЛК через векторы из S, то единственным образом.

б) никакой вектор из S нельзя выразить в виде ЛК через остальные.

Упр 7. а) Если семейство векторов ЛНЗ, то и любая его часть ЛНЗ;

б) Если семейство ЛЗ, то и любое содержащее его семейство ЛЗ.

Теорема (о равносильных определениях базиса). Следующие условия равносильны:

а) S — базис пространства V;

б) S — линейно независимая система образующих пространства V;

в) S линейно независимо, но теряет это свойство при добавлении любого вектора из V;

г) S — система образующих пространства V, но теряет это свойство при удалении любого вектора.

Таким образом, базис векторного пространства можно описать, с одной стороны, как *минимальную систему образующих*, а с другой – как *максимальную линейно независимую систему*. Возникая на узком стыке двух противоположных качеств, базисы не могут не приобрести ценные свойства.

Теорема (о линейной зависимости линейных комбинаций). Если в пространстве есть базис из n векторов, то любые $n+1$ векторов линейно зависимы.

Следствие (корректность определения размерности). Если в пространстве есть базис из n векторов, то любой другой базис тоже содержит n векторов.

Определение. Векторное пространство, имеющее конечный базис, называется *конечномерным*, а число векторов в каждом из его базисов называется его *размерностью* ($\dim$). Если в векторном пространстве нет конечного базиса, оно называется *бесконечномерным*.

Упр. 8. а) Свойства ЛЗ и ЛНЗ сохраняются при *изоморфизме* пространств.

б) Два конечномерных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны. В частности, любое конечномерное пространство V изоморфно $K^{\dim V}$.

Упр. 9. а) К любой ЛНЗ системе векторов (конечномерного) пространства можно добавить векторы так, чтобы получился базис.

б) Из любой системы образующих (конечномерного) пространства можно удалить часть векторов так, чтобы оставшиеся образовывали базис.

Упр. 10. Размерность собственного (не совпадающего со всем пространством) подпространства конечномерного меньше размерности пространства.

Упр. 11. Рассмотрим пространство и его подпространство, порожденное k векторами (А что это такое?). Докажите, что это подпространство конечномерно, и его размерность $\leqslant k$. При каких условиях размерность в точности равна k?

Науку – в жизнь!

Сюжет 1, в котором появляются пространства.

1. Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

2. В каждую клетку шахматной доски вписано по целому числу. Разрешается за один ход увеличить на 1 все числа в любом квадрате 3×3 или 4×4. Всегда ли можно добиться, чтобы все числа стали кратны 25? А все числа, кроме двух, заранее фиксированных?

Сюжет 2, в котором появляются характеристические векторы.

3. В классе k девочек и $n > k$ мальчиков. Некоторым мальчикам нравятся некоторые девочки. Докажите, что найдется некоторый непустой набор мальчиков такой, что каждая девочка нравится четному количеству мальчиков из этого набора.

4. $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ — непустые подмножества n-элементного множества. Докажите, что можно выбрать такие непустые непересекающиеся множества индексов $\{i_1, \ldots, i_k\}$ и $\{j_1, \ldots, j_\ell\}$, что

$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k} = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_\ell}.$$

Для самостоятельного решения

5. а) Докажите, что $1 + xy + x^2y^2$ не представляется в виде $f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y)$, где $f_1, f_2, g_1, g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – произвольные функции.

б) Обобщите это утверждение на функцию $f(x, y) = 1 + xy + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n$.

6. а) Докажите, что для каждых двух многочленов $f_1(x), f_2(x)$ найдется такой ненулевой многочлен $P(x, y)$, что $P(f_1(x), f_2(x)) = 0$.

б) Имеются многочлены $f_1(y_1, \ldots, y_{100}), \ldots, f_{101}(y_1, \ldots, y_{100})$ с действительными коэффициентами. Докажите, что существует такой ненулевой многочлен $R(x_1, \ldots, x_{101})$, что $R(f_1, \ldots, f_{101}) = 0$.

7. В каждую клетку шахматной доски вписано по целому числу. Разрешается за один ход увеличить на 1 все числа в любом квадрате 3×3 или 4×4. Всегда ли можно добиться, чтобы НОД всех чисел стал больше 1?

8. В таблицу 8×8 вписаны числа. За один вопрос можно узнать сумму чисел в любом прямоугольнике. За какое наименьшее число вопросов можно узнать сумму чисел на диагонали?

9. Докажите, что из $2n - 1$ иррационального числа можно выбрать n чисел так, что сумма любых нескольких выбранных чисел из этих n будет иррациональной.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых a, b, c, d, проходящих через одну точку, называется величина $(a, b; c, d) = \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{c})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{c})} : \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{d})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{d})}$, где $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d, и $\angle(\overline{a}, \overline{c})$ – ориентированный угол между векторами (не между прямыми!).

Упр. 1. Корректно ли это определение?

Упр. 2. Как связаны между собой двойные отношения точек и прямых?

Теорема. Двойные отношения четырех точек сохраняются при при центральных проекциях.

Определение. Точки A, B, C, D лежат на окружности. Пусть X — произвольная точка этой окружности. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D называется величина $(A, B; C, D) = (XA, XB; XC, XD)$.

Замечание. Если одна из точек A, B, C, D совпадает с X, то в качестве соответствующей прямой рассматривается касательная к окружности.

Упр. 3. Корректно ли это определение?

Утверждение. На двух пересекающихся в точке A прямых выбраны точки: на одной – A_1, B_1, C_1, на другой – A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке (возможно, бесконечно удаленной) $\iff (A, A_1; B_1, C_1) = (A, A_2; B_2, C_2)$.

Определение. Если гармоническое отношение четверки (точек на прямой, прямых, точек на окружности) равно -1, то четверка называется *гармонической.*

Примеры гармонических четверок.

а) Пусть M и N – основания внутренней и внешней биссектрис угла A треугольника ABC. Тогда $(B, C; M, N) = -1$.

б) Пусть у окружностей разного радиуса с центрами X и Y общие внешние касательные пересекаются в точке A, общие внутренние касательные пересекаются в точке B. Тогда $(A, B; X, Y) = -1$.

в) Название *гармоническая четверка* взялось вот откуда. Если на вещественной прямой отмечены числа $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$, то $(A, B; O, H) = -1$ тогда и только тогда, когда точке H соответствует среднее гармоническое чисел a и b.

г) $(A, B; C, D) = -1$ тогда и только тогда, когда точки C и D инверсны относительно окружности, построенной на AB как на диаметре.

Определение. *Полным четырехвершинником* называется конфигурация, составленная из четырех точек общего положения (вершин) и шести попарно соединяющих их прямых (сторон). Противоположные стороны полного четырехвершинника попарно пересекаются в трех диагональных точках. Три прямые, попарно соединяющие диагональные точки, называются диагоналями полного четырехвершинника. Недиагональные точки, в которых диагонали пересекаются со сторонами, называются дополнительными.

Теорема о полном четырехвершиннике. а) Каждая пара вершин полного четырехвершинника гармонически разделяет лежащие на той же стороне диагональную и дополнительную точки, а каждая пара диагональных точек – лежащую на той же диагонали пару дополнительных точек.

б) Дополнительные точки являются точками попарного пересечения четырех прямых.

Замечание. Иногда теорему формулируют так: пусть A_1, B_1, C_1 – основания чевиан в треугольнике ABC, K – точка пересечения прямых A_1C_1 и AC. Тогда точки A, B_1, C, K образуют гармоническую четверку. Верно и обратное.

Для самостоятельного решения

1. Продолжения противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках M и K. Через точку O пересечения его диагоналей проведена прямая, параллельная MK. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Его противоположные стороны AB и CD пересекаются в точке K. Его диагонали пересекаются в точке L. Известно, что прямая KL проходит через центр тяжести четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

3. Пусть A_0 и C_0 – середины сторон BC и AB треугольника ABC соответственно, AA_1 – биссектриса угла A, а A' и B' – точки касания вписанной окружности со сторонами BC и CA. Докажите, что прямые AA_1, A_0C_0 и $A'B'$ пересекаются в одной точке.

4. На плоскости задан отрезок AB, перед которым образовалась овальная лужа. Пользуясь только линейкой, продолжите отрезок за эту лужу.

5. Точка пересечения двух прямых находится в луже. Проведите через эту точку и заданную точку вне лужи прямую одной линейкой.

Блоки и точки сочленения. 7 июля

Определения. 1) Вершина v связного графа G называется *точкой сочленения*, если при удалении вершины v граф G становится несвязным. Граф G называется *двусвязным*, если в нем > 2 вершин, и нет точек сочленения.

2) Ребро e связного графа G называется *мостом*, если при удалении ребра e граф G становится несвязным. Граф G называется *реберно-двусвязным*, если в нем > 1 вершины, и нет мостов.

Упр. 1. Все двусвязные(реберно двусвязные) графы получаются из цикла по алгоритму дорисовывания ушей: если на очередном шаге нарисован какой-то граф, то дорисовываем путь, соединяющий две различные(две любые) вершины.

Упр. 2. v – точка сочленения $\iff$ существуют такие вершины $u, w \neq v$, что любая (u, w)-цепь проходит через v.

Определение. *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению подграф графа G без точек сочленения этого подграфа.

Упр. 3. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков B_1 и B_2 либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

Определение. Пусть $B_1, \dots, B_n$ — все блоки связного графа G, а $a_1, \dots, a_m$ — все точки сочленения. Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, \dots, B_n, a_1, \dots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i принадлежит блоку B_j.

Упр. 4. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причем все его висячие вершины соответствуют блокам.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что в связном графе с хотя бы двумя вершинами есть хотя бы две вершины, не являющиеся точками сочленения.

2. Докажите, что на ребрах связного графа можно расставить стрелки так, чтобы он стал сильно связным тогда и только тогда, когда в графе нет мостов.

3. а) Есть двусвязный граф на 100 вершинах. Докажите, что его можно разбить на 2 связных графах, по 50 вершин в каждом.

б) Приведите пример связного графа, для которого аналогичное утверждение неверно.

4. В дереве ровно $2n$ висячих вершин. Докажите, что можно провести n ребер так, чтобы граф стал реберно-двусвязным.

5. В будущем графе $n = 2k$ вершин и изначально нет ребер. Двое игроков по очереди проводят новые ребра графа (кратные ребра и петли не допускаются). Игрок, после хода которого получается двусвязный граф, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

Теорема Менгера для двусвязных графов. 9 июля

Теорема. Для графа не менее чем с тремя вершинами следующие условия эквивалентны:

1) граф двусвязен;

2) любые две вершины принадлежат простому циклу;

3) любая вершина и ребро принадлежат простому циклу;

4) любые два ребра принадлежат простому циклу;

5) для любых двух вершин и ребра существует простая цепь с концами в этих вершинах, проходящая через это ребро;

6) для любых трех вершин существует простая цепь, соединающая первые две из них и проходящая через третью;

Следствие. Граф двусвязен $\iff$ любые две вершины можно соединить двумя простыми путями, пересекаюшимися только в этих вершинах (*Теорема Менгера-Уитни для* $k = 2$).

Для самостоятельного решения

Теорема. Для графа не менее чем с тремя вершинами следующие условия эквивалентны:

1) граф реберно-двусвязен;

2) любые две вершины принадлежат реберно-непересекающемуся циклу;

3) любая вершина и ребро принадлежат реберно-непересекающемуся циклу;

4) любые два ребра принадлежат реберно-непересекающемуся циклу;

5) для любых двух вершин и ребра существует реберно-непересекающаяся цепь с концами в этих вершинах, проходящая через это ребро;

6) для любых трех вершин существует реберно-непересекающаяся цепь, соединающая первые две из них и проходящая через третью.

Следствие. Граф реберно-двусвязен $\iff$ любые две вершины можно соединить двумя простыми реберно-непересекающимися путями (*Теорема Менгера в реберной форме для* $k = 2$).

Опр. k – окружность с центром O. *Полярой* точки $P \neq O$ относительно окружности k называется прямая p, проходящая через точку P' – образ точки P при инверсии относительно S, и перпендикулярная прямой OP. Точка P называется *полюсом* прямой p относительно S.

Лемма о поляре. Пусть p — поляра P, q — поляра Q. Тогда $P \in q \Longleftrightarrow Q \in p$.

Следствие 1. Если $a = \pi(A)$, $b = \pi(B)$, то $AB = \pi(a \cap b)$ (при некоторых ограничениях).

Следствие 2. A, B, C — точки плоскости (не равные O), a, b, c — их поляры. Точки A, B, C лежат на одной прямой $\Longleftrightarrow$ прямые a, b, c проходят через одну точку или параллельны.

Сущность подхода. При помощи полярного преобразования доказывают, что
– три точки лежат на одной прямой;
– три прямые пересекаются в одной точке или параллельны;
– две прямые перпендикулярны.

1. I – центр вписанной окружности треугольника ABC, которая касается сторон AB, BC, CA в точках M, N, P. Пусть PN и AB пересекаются в точке K. Докажите, что $CM \perp IK$.

2. В какую теорему перейдет при полярном преобразовании теорема «опирающиеся на одну дугу углы равны»?

Полярное свойство касательных. Через точку $P \neq O$ проведена секущая XY. Тогда касательные к окружности в точках X и Y пересекаются на поляре точки P (или параллельны этой поляре).

Полярное свойство секущих. Через точку $P \neq O$ проведены две секущих, которые пересекают окружность в точках X_1, Y_1 и X_2, Y_2. Тогда прямые X_1X_2 и Y_1Y_2 пересекаются на поляре точки P (или параллельны этой поляре).

Для самостоятельного решения

3. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в P, AB и CD – в R, BC и DA – в Q.

Гармонический четырехугольник. Пусть $ABCD$ вписан, и касательные в вершинах A и C пересекаются на прямой BD или параллельны BD. Докажите, что касательные в B и D пересекаются на прямой AC или параллельны AC.

Вписанный четырехугольник. Докажите, что если $ABCD$ вписан в окружность с центром O, то O, P, Q, R – ортоцентрическая четверка точек (*т.Брокара*).

Описанный четырехугольник. Пусть $ABCD$ описан. K, L, M, N – точки касания сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в S, LM и NK – в T. Тогда
а) Q, R, S, T лежат на одной прямой;
б) AC, BD, KM, LN пересекаются в одной точке.

Вписанный или описанный четырехугольник. Пусть $ABCD$ а) вписан в окружность S; б) описан вокруг окружности S. Докажите, что перпендикуляр из центра S на QR, проходит через P.

Вписанный и описанный четырехугольник. Пусть $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Ω с центром O. Тогда
а) O, I, P лежат на одной прямой.
б) При фиксированных ω, Ω и меняющихся $ABCD$ точка P и прямая QR постоянны.

4. В какую теорему при полярном преобразовании относительно описанной окружности перейдет теорема «медианы треугольника пересекаются в одной точке»?

5. Точка O не лежит на сторонах и их продолжениях треугольника ABC. A_1 – точка пересечения прямой BC с перпендикуляром к OA, проходящим через точку O. Аналогично определяются точки B_1, C_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

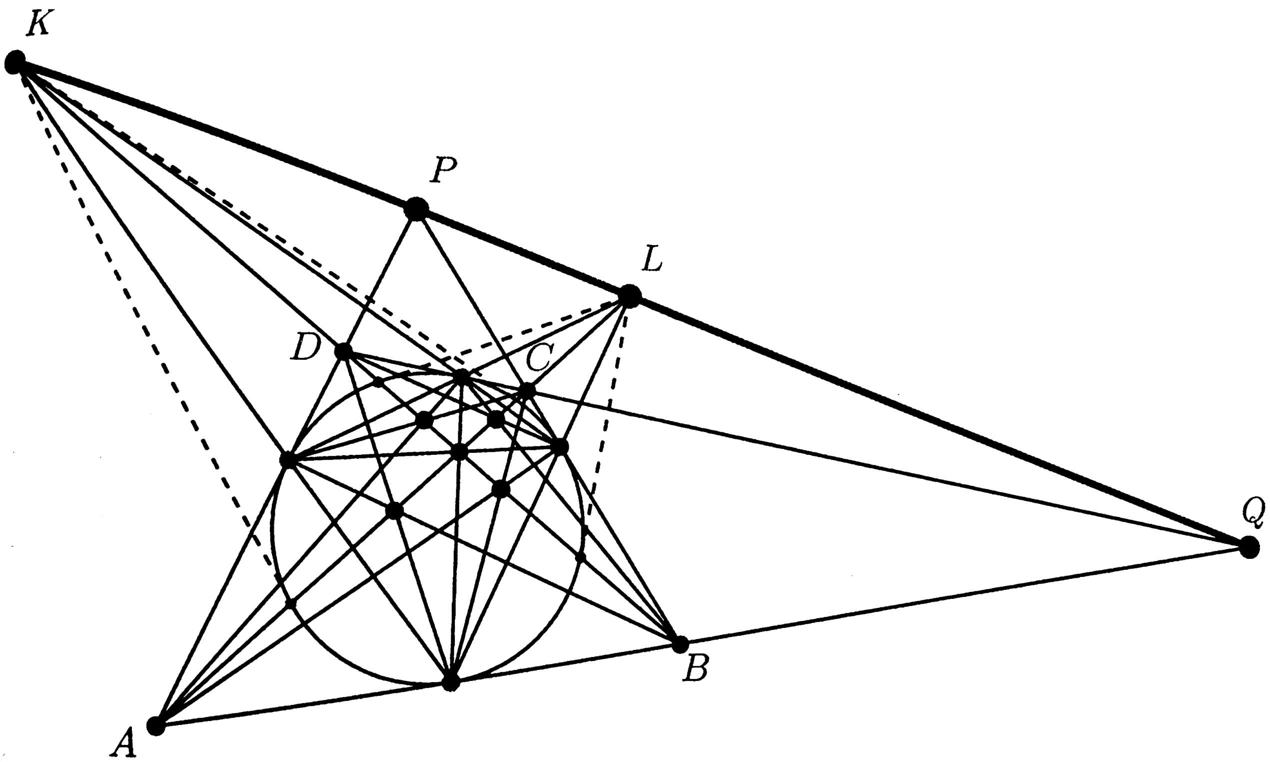
6. I – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая, проходящаячерез I перпендикулярно AI, пересекает BC в точке A_1; аналогично определяется точка C_1. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $KI \perp AC$.

7. S – вписанная окружность треугольника ABC, которая касается сторон AB, BC, CA в точках X, Y, Z. Окружность S_A проходит через точки B, C и касается окружности S в точке A_1. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что

1) прямые A_1Y, B_1Z, C_1X пересекаются в одной точке;

2) прямые AA_1, BB_1, BC_1 пересекаются в одной точке.

8. (Тест Роршаха) Посмотрите на картинку и расскажите, что Вы видите на ней.



Теорема Менгера. 9 июля

Определения. 1) Пусть a, b – несмежные вершины графа G. Множество S вершин графа, не содержащее a и b, называется ab-*отделяющим*, если a и b лежат в разных компонентах связности, полученного удалением из G вершин S.

2) Пусть a, b – вершины графа G. Множество T ребер графа называется ab-*отделяющим*, если a и b лежат в разных компонентах связности графа, полученного удалением из G ребер T.

Замечания. 1) Эти определения и последующие доказательства очевидным образом переносятся на ориентированные графы.

2) При исследовании реберной отделимости мы рассматриваем графы с кратными ребрами. Для вершинной отделимости кратные (ориентированные) ребра не важны, поэтому можно считать, что их нет.

Теорема Менгера в вершинной форме, 1927 г. Максимальное число простых цепей, соединяющих несмежные вершины a и b графа G, и не имеющих общих внутренних вершин, равно минимальной мощности ab-отделяющего множества вершин.

Доказательство теоремы Менгера:

Пусть размер минимального ab-отделяющего множества это k. Очевидно, что максимальное количество цепей, соединяющих a и b, и не имеющих общих внутренних вершин, не больше k. Надо доказать неравенство в другую сторону. Доказательство будем вести индукцией по количеству вершин графа G. База очевидна.

1. Докажите переход в случае, когда существует вершина v, смежная и с a и с b одновременно.

2. Докажите переход в случае, когда существует минимальное ab-отделяющее множество S, не все вершины которого смежны с a, и не все вершины которого смежны с b.

Указание: докажите, что есть k путей от a до S и k путей от b до S, рассмотрев «меньшие» чем G графы.

3. Докажите переход в случае, когда существует вершина $u \neq a, b$, не лежащая ни в одном минимальном ab-отделяющем множестве.

4. Докажите переход во всех остальных случаях.

Для самостоятельного решения

Определения. 1) Связный граф, в котором более k вершин, и при этом удаление любых $k-1$ вершин не ведет к потере связности, называется k-*связным*.

2) Связный граф (с кратными ребрами), в котором более 1 вершины, и при этом удаление любых $k-1$ ребер не ведет к потере связности, называется *реберно* k-*связным*.

Выведите из вершинной теоремы Менгера

5. Теорему Уитни (1932 г.): Для любых двух вершин x, y k-связного графа существует не менее k путей из x в y, не имеющих общих внутренних вершин.

6. Теорему Менгера в реберной форме (Форд, Фалкерсон, 1955 г.): Максимальное число простых реберно-непересекающихся цепей, соединяющих различные вершины a и b графа G, равно минимальной мощности ab-отделяющего множества ребер.

Поля и расширения полей. 11 июля

Определение. Если поле K содержится в поле L, то будем говорить, что L — *расширение* K.

Упр. 0. Существует ли расширение поля $\mathbb{C}$?

Упр. 1. Докажите, что каждое поле содержит $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}_p$ (точнее говоря, поле, изоморфное $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}_p$) в качестве подполя, причем ровно одно из этих полей.

Определение. Любое расширение L поля K является векторным пространством над K относительно обычных операций сложения и умножения в поле L. Размерность этого векторного пространства L над полем K называется *степенью* расширения $L \subset K$ и обозначается через $[L : K] = \dim_K L$. Если степень конечна, расширение называется *конечным.*

Упр. 2. Существует ли поле из шести элементов? Для каких m *может существовать* конечное поле из m элементов?

Определение. Пусть имеется расширение $K \subset L$, S — некоторое подмножество в L. Обозначим через $K(S)$ наименьшее (по включению) подполе поля L, содержащее все элементы из K и из S. Мы будем говорить, что $K(S)$ получено *присоединением* элементов S к K.

Упр. 3. Докажите, что $K(S)$ существует.

Упр. 4. Докажите, что $K(S)(M) = K(M)(S)$ – расширение не зависит от порядка присоединения элементов – важнейшее свойство!!!

Определение. Два поля K и L называются *изоморфными*, если существует такая биекция φ между их элементами, при которой сумма переходит в сумму, произведение — в произведение.

Упр. 5. Докажите, что при изоморфизме нулевой элемент переходит в нулевой, единичный — в единичный, разность — в разность, а частное — в частное.

Нас будет интересовать простейший (и одновременно с этим важнейший) случай: как устроено расширение, полученное присоединением одного элемента?

Определение. Пусть $K \subset L$ — расширение полей. Элемент $\alpha \in L$ называется *алгебраичным* над K, если он является корнем некоторого ненулевого многочлена с коэффициентами из K (этот многочлен можно считать неприводимым над K). В противном случае говорят, что α *трансцендентен* над K.

Упр. 6. а) Какие комплексные числа алгебраичны над $\mathbb{R}$, а какие – трансцендентны?
б) Докажите, что существуют вещественные числа, трансцендентные над $\mathbb{Q}$.

Теорема 1. Если элемент α трансцендентен над K, то $K(\alpha)$ изоморфно $K(t)$ – полю рациональных функций над K от одной переменной.

Упр. 7. Пусть $K \subset L$, $\alpha \in L$ – алгебраический над K элемент. Рассмотрим ненулевой неприводимый многочлен $f(x) \in K[x]$, корнем которого является α. Тогда если $g(x) \in K[x]$, то $g(\alpha) = 0 \iff g(x) \,\vdots\, f(x)$. То есть этот многочлен определен однозначно с точностью до мультипликативного множителя.

Упр. 8. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{1}{\alpha^2+3\alpha+5}$, где α — корень уравнения $\alpha^3 - \alpha + 1 = 0$.

Теорема 2. Если α — корень неприводимого над K многочлена степени n, то расширение $K \subset K(\alpha)$ имеет степень n, причем элементы $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ образуют базис поля $K(\alpha)$ над K.

Упр. 9. Пусть α_1, α_2 — два корня неприводимого многочлена f. Тогда поля $K(\alpha_1)$ и $K(\alpha_2)$ изоморфны. Приведите пример, показывающий, что они могут не совпадать.

Для самостоятельного решения

1. Изоморфны ли $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$?

2. Опишите все конечные расширения а) $\mathbb{C}$; б) $\mathbb{R}$.

3. а) Докажите, что в поле характеристики p выполняется равенство: $(x+y)^p = x^p + y^p$.
б) Разложите на множители над $\mathbb{Z}_p$ многочлен $x^p - x$.
в) Докажите часть *теоремы Вильсона*: $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ при простом p.

Теорема о размерности башни

Теорема об алгебраичности конечного расширения. Если $K \subset L$ — конечное расширение степени n, то каждый элемент из L алгебраичен над K степени не выше n.

Теорема о размерности башни (часть I). Пусть $k \subset E \subset L$ — поля, причем расширения $k \subset E$ и $E \subset L$ – конечны. Тогда расширение $k \subset L$ конечно и $[L : k] = [L : E] \cdot [E : k]$.

Следствие. Сумма, разность, произведение и частное алгебраических чисел (в данном поле над данным подполем) является алгебраическим числом. Иначе говоря, множество алгебраических чисел (в данном поле над данным подполем) является полем.

Упр. 1. Найдите размерность и базис расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$.

Упр. 2. Пусть α, β – два различных корня многочлена многочлена $x^3 - 3$. Найдите размерность и базис расширения $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

Упр. 3. Докажите, что многочлен $x^5 - 7$ неприводим над полем $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$.

Упр. 4. Докажите, что число $a\sqrt[3]{3} + b\sqrt[5]{7/2} + c\sqrt[8]{8}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ рационально тогда и только тогда, когда оно равно нулю.

Упр. 5. а) Поле $F \subset \mathbb{C}$ получено из $\mathbb{Q}$ присоединением квадратных корней из а) ста; б) всех рациональных чисел. Докажите, что в F нет ни одного кубического корня из а) целого; б) рационального числа, который не являлся бы кубом рационального числа.

б) Изначально дано поле $\mathbb{Q}$. Очередное поле получается из предыдущего присоединением некоторого корня из какого-то элемента этого предыдущего этажа степени 2,3 или 4. Докажите, что ни в каком этаже нет элемента $\sqrt[5]{5}$. ($\sqrt[5]{5}$ *не выражаются через радикалы степеней 2,3 и 4.*)

Упр. 6. Пусть $r = \sqrt[15]{15}$. Рассмотрим число $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_{14} r^{14}$, $a_i \in \mathbb{Q}$. Пусть число является корнем неприводимого многочлена. Чему может равняться его степень?

Упр. 7. а) Рассмотрим любое комплексное число, которое получается из рациональных чисел при помощи арифметических действий и операций извлечения корней. Докажите, что это число алгебраично.

б) Оцените степень алгебраичности числа $\sqrt[3]{2 - 5\sqrt{3}} - \sqrt{3 + 5\sqrt[3]{7}}$.

НЕТРИВИАЛЬНЫЙ ВОПРОС. Любое ли алгебраическое число получается таким образом?

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Теорема (о размерности башни, часть II). Пусть $k \subset E \subset L$ — поля, причем расширение $k \subset L$ конечно. Тогда расширения $k \subset E$ и $E \subset L$ конечны, причем $[L : k] = [L : E] \cdot [E : k]$.

Теорема об алгебраической замкнутости поля алгебраических чисел. Если некоторое комплесное число является корнем многочлена с алгебраическими (над $\mathbb{Q}$) коэффициентами, то это число алгебраично (над $\mathbb{Q}$).

Теорема Кронекера. 14 июля

Теорема Кронекера. Пусть многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ нечетной простой степени неприводим над $\mathbb{Q}$, и уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в радикалах. Тогда многочлен $f(x)$ имеет или ровно один вещественный корень, или все его корни являются вещественными.

Замечание. На самом деле мы докажем более сильный факт: если многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ нечетной простой степени неприводим над $\mathbb{Q}$, и хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$ выражается через радикалы, то многочлен $f(x)$ имеет или ровно один вещественный корень, или все его корни являются вещественными.

Упр. 1. Придумайте какой-нибудь неприводимый многочлен $f(x)$ пятой степени, у которого ровно три вещественных корня. Тогда ни один из его пяти корней не будет выражаться через радикалы.

Упр. 2. 1) Не существует «радикальной» формулы для решения «общего» уравнений пятой степени $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (то есть такой формулы, которая давала бы значение хотя бы одного корня многочлена хотя бы при одном выборе значений всех встречающихся в ней радикалов при любых значениях $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$).

2) Аналогичное утверждение верно для многочленов степени $\geqslant 5$.

Лемма 1. Пусть q – простое число и $x^q - a \in k[x]$. Тогда

1) многочлен $x^q - a$ приводим над $k \iff a = b^q$ для некоторого $b \in k$.

2) если поле k содержит примитивный корень степени q из 1, то многочлен $x^q - a$ или неприводим над k, или полностью раскладывается над k на линейные множители.

Доказательство. 1) Если $a = b^q$, то приводимость $f(x)$ над k очевидна (и даже есть корень!). Допустим теперь, что $x^q - a = f(x)g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены над k, $r = \deg f(x)$, $0 < r < q$. Пусть β – один из (комплексных) корней многочлена $f(x)$, ϵ – примитивный корень степени q из 1. Тогда остальные корни многочлена $f(x)$ имеют вид $\epsilon^{n_i}\beta$. Так как произведение корней многочлена равно $\pm$свободному члену, то для некоторого n выполнено $\beta^r\epsilon^n = c \in k$, где $f(x) = \dots \pm c$. Тогда $a^r = (\beta^q)^r = (\beta^r)^q = (\beta^r\epsilon^n)^q = c^q$. Так как $(r, q) = 1$, то $1 = rs + qt$ для некоторых целых s и t, откуда $a = a^{rs}a^{qt} = c^{qs} \cdot a^{qt} = (c^s a^t)^q$, и $c^s a^t \in k$.

2) Если многочлен $x^q - a$ приводим над k, то по части 1 леммы у него есть корень $b \in k$. Тогда все остальные корни имеют вид $\epsilon^i b$, и так как $\epsilon \in k$, то $\epsilon^i b \in k$.

Лемма 2. Пусть многочлен $f(x) \in k[x]$ простой степени p неприводим над k. Допустим, что многочлен $f(x)$ становится приводимым после присоединения к полю k корня неприводимого многочлена степени m (то есть над полем $k(\beta)$, $[k(\beta) : k] = m$). Тогда $m \,\vdots\, p$.

Доказательство. Пусть α – (комплексный) корень многочлена $f(x)$. Разложим двумя способами расширение $k \subset k(\alpha, \beta)$ в башню:

$$k \subset k(\alpha) \subset k(\alpha, \beta), \qquad k \subset k(\beta) \subset k(\beta, \alpha).$$

Приравнивая степени расширений, получаем: $p \cdot (\leqslant m) = m \cdot (< p)$. Так как p – простое, то $m \,\vdots\, p$.

Доказательство теоремы Кронекера

0) Один вещественный корень у многочлена $f(x)$ точно есть.

1) Пусть многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ простой степени p неприводим над $\mathbb{Q}$. Рассмотрим радикальное расширение, в котором $f(x)$ имеет хотя бы один корень:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[q_1]{a_1}) \subset \dots \mathbb{Q}(\sqrt[q_1]{a_1}, \dots, \sqrt[q_k]{a_k}), \qquad a_i^{q_i} \in \mathbb{Q}(\sqrt[q_1]{a_1}, \dots, \sqrt[q_{i-1}]{a_{i-1}}).$$

Понятно, что все числа q_i можно считать простыми [почему?]. В дальнейшем мы будем многократно «уплотнять» эту башню.

Степень расширения $L \subset L(\sqrt[q_i]{a_i})$ равна непонятно чему. Но если в поле L лежит примитивный корень степени q_i из 1, то по лемме 1.2 ситуация гораздо более приятная: эта степень равна 1 (то есть поля L и $L(\sqrt[q_i]{a_i})$ совпадают) или q_i. Чтобы можно было воспользоваться леммой 1.2, уплотним каждый этаж башни $L \subset L(\sqrt[q_i]{a_i})$ до $L \subset L(\sqrt[q_i]{1}) \subset L(\sqrt[q_i]{1}, \sqrt[q_i]{a_i})$. Под $\sqrt[q_i]{1}$ подразумевается любой комплексный корень из 1, отличный от 1, который в силу простоты q_i является примитивным корнем.

Эту уплотненную башню будем называть $\mathcal{B}$. Рассмотрим минимальный этаж башни $\mathcal{B}$, над которым $f(x)$ приводим. Меняя обозначения, получаем: $f(x)$ неприводим над k, но $f(x)$ приводим над $k(\sqrt[q]{a})$, q – простое.

2) Допустим, что $a \neq 1$. Тогда по леммам 1.2 и 2 $\quad q = p$ (напомним, что примитивный корень степени q из 1 присоединяется на предыдущем шаге). Докажем, что $f(x)$ не просто приводим над $k(\sqrt[p]{a})$, но имеет в этом поле корень, и даже все корни!!! В самом деле, пусть β – любой комплексный корень многочлена $f(x)$. Рассмотрим расширение $k \subset k(\sqrt[p]{a}, \beta)$ и двумя способами разложим его в башню:

$$k \subset k(\beta) \subset k(\sqrt[p]{a}, \beta), \qquad k \subset k(\sqrt[p]{a}) \subset k(\beta, \sqrt[p]{a}).$$

Посмотрим на степени этажей: по лемме 1.2 $[k(\sqrt[p]{a}) : k] = 1$ или p, но первый случай невозможен по выбору поля k; $[k(\sqrt[p]{a}, \beta) : k(\sqrt[p]{a})] < p$ (так как многочлен $f(x)$ приводим над $k(\sqrt[p]{a})$). Далее, $[k(\beta) : k] = p$ (так как многочлен $f(x)$ неприводим над k), и снова по лемме 1.2 $[k(\beta, \sqrt[p]{a}) : k(\beta)] = 1$ или p. Приравнивая размерности, получаем, что $p \cdot (< p) = p \cdot (1 \text{ or } p)$, что возможно только в одном случае $[k(\sqrt[p]{a}, \beta) : k(\sqrt[p]{a})] = 1$, что равносильно включению $\beta \in k(\sqrt[p]{a})$. В силу произвольности выбора β все корни $f(x)$ лежат в $k(\sqrt[p]{a})$.

Тем самым мы показали, что если один корень $f(x)$ выражается через радикалы, то остальные корни тоже выражаются через радикалы (см. замечание после формулировки теоремы Кронекера). Кроме того, приводимость $f(x)$ над $k(\sqrt[p]{a})$ оказалась равносильна разложимости на линейные множители!

3) Сколько всего замечательного мы уже получили в случае, когда $a \neq 1$, а корень из 1 содержится в предыдущем этаже (а дальше мы докажем еще более замечательные факты)! Случай присоединения примитивного корня степени q из 1 является самым сложным в доказательстве, так как для него практически все эти замечательные вещи не верны.

Но оказывается, что на самом деле корень из 1 можно не присоединять! Доказывается это весьма нетривиально. Сейчас мы сформулируем предложение, которое содержит в себе все идейные и технические сложности этого доказательства.

Предложение. Пусть ϵ – примитивный корень простой степени q из 1. Тогда существует радикальная башня

$$L \subset L(\sqrt[n_1]{a_1}) \subset L(\sqrt[n_1]{a_1}, \sqrt[n_2]{a_2}) \subset \cdots \subset L(\sqrt[n_1]{a_1}, \sqrt[n_2]{a_2}, \ldots, \sqrt[n_s]{a_s}), \qquad n_i < q, \tag{$*$}$$

такая, что $\epsilon \in L(\sqrt[n_1]{a_1}, \sqrt[n_2]{a_2}, \ldots, \sqrt[n_s]{a_s})$.

Доказательство предложения временно отложим, а пока поймем, что можно извлечь из этого предложения. В башне $(*)$ заменим присоединение всех радикалов составных степеней на последовательные присоединения радикалов простых степеней. И снова, как мы делали это при уплотнении исходной радикальной башни до башни $\mathcal{B}$, перед присоединенем любого радикала простой степени сначала присоединим примитивный корень этой простой степени из 1. Все эти простые степени строго меньше q.

Вернемся к башне $\mathcal{B}$. Этаж $L \subset L(\sqrt[q]{a})$ будем называть *правильным*, если q – простое, и поле k содержит примитивный корень степени q из 1. Требование наличия корня из 1 в L мотивируется доказанным в пункте 2. По построениею $\mathcal{B}$ неправильными могут быть только этажи $L \subset L(\sqrt[q]{1})$, q – простое. В этом случае каждый неправильный этаж заменим на новую цепочку расширений так, как написано в предыдущем абзаце. Получим новую башню $\mathcal{B}'$. В $\mathcal{B}'$ каждый этаж или является правильным, или имеет вид $L \subset L(\sqrt[p_i]{1})$, p_i – простое. При этом в башне $\mathcal{B}'$ максимальное число q, для которого этаж $L \subset L(\sqrt[q]{1})$ – неправильный, строго меньше, чем в башне $\mathcal{B}$. С башней $\mathcal{B}'$ проделаем аналогичную процедуру, и так далее. На некотором шаге получится башня $\mathcal{B}_1$, в которой нет неправильных этажей. Отметим, что в башне $\mathcal{B}_1$ этажей, вообще говоря, много больше, чем в башен $\mathcal{B}$.

Тем самым мы показали, что в башне $\mathcal{B}_1$ каждый этаж $L \subset L(\sqrt[q]{a})$ удовлетворяет свойствам:

– q – простое

– L содержит примитивный корень степени q из 1.

Вернемся к выбору поля k: рассмотрим минимальный этаж башни $\mathcal{B}_1$, над которым $f(x)$ приводим. Меняя обозначения, получаем: $f(x)$ неприводим над k, но $f(x)$ приводим над $k(\sqrt[q]{a})$, q – простое. Тем самым все то, что мы доказали в пункте 2, верно во всех случаях. А именно:

– $q = p$ и степень расширения $k \subset k(\sqrt[p]{a})$ равна p.

– $f(x)$ полностью раскладывается над $k(\sqrt[p]{a})$ на линейные множители.

– Все корни $f(x)$ выражаются через радикалы.

4) Пусть x_0 – любой корень $f(x)$, $x_0 \in k(\sqrt[p]{a})$. Обозначим для краткости $r = \sqrt[p]{a}$. Тогда по теореме о строении расширения, полученного присоединеним алгебраического элемента,

$$x_0 = \gamma_0 + \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \dots + \gamma_{p-1} r^{p-1}, \gamma_i \in k,$$

причем такое представление единственно. Сейчас мы сделаем очень хитрую вещь: найдем, как именно выглядят остальные корни $f(x)$, которые, напомним, тоже лежат в $k(\sqrt[p]{a})$. Обозначим через ϵ примитивный корень степени p из 1 и положим

$$x_i = \gamma_0 + (\gamma_1 \epsilon^i) r + (\gamma_2 (\epsilon^i)^2) r^2 + \dots + (\gamma_{p-1} (\epsilon^i)^{p-1}) r^{p-1}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, p-1.$$

Оказывается, что $x_0, \dots, x_{p-1}$ – все различные [почему различные?] корни $f(x)$, что совершенно неочевидно! Мы приведем два доказательства этого факта.

Первое доказательство – автоморфизмы. Изучим автоморфизмы поля $k(\sqrt[p]{a})$, которые оставляют элементы поля k на месте. Пусть φ – такой автоморфизм. Куда при этом автоморфизме переходит корень какого-нибудь неприводимого над k многочлена? Только в корень того же самого многочлена (в тот же корень или в другой корень) [почему?]. Поэтому элемент $\sqrt[p]{a}$ – корень *неприводимого* многочлена $x^p - a$ переходит в другой корень этого же многочлена, то есть $\varphi(\sqrt[p]{a}) = \epsilon^s \sqrt[p]{a}$ для некоторого s. При этом значение $\varphi(\sqrt[p]{a})$ полностью определяет, куда переходят *все* элементы поля $k(\sqrt[p]{a})$ [почему?]. С другой стороны, если мы определим отображение $\varphi_s : k(\sqrt[p]{a}) \to k(\sqrt[p]{a})$ по формуле $\varphi_s(\sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i r^i) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i (\epsilon^s r)^i$, то оно будет корректно определено и будет автоморфизмом (разумеется, это все надо проверить). Чтобы φ_s было определено, нужно, чтобы в поле k лежал элемент ϵ^s. Но он там лежит, ведь мы рассматриваем правильные расширения! [Упражнение на понимание: если многочлен $x^p - a$ неприводим над k, а в поле k нет примитивного корня степени p из 1, то сколько автоморфизмов (над k) будет у поля $k(\sqrt[p]{a})$?]

Осталось заметить, что $\varphi_i(x_0) = x_i$. Так как моногочлен $f(x)$ с корнем x_0 неприводим над k, по по вышеупомянутому факту его корень x_0 переходит под действием φ_i в другой корень. Поэтому x_i – корень $f(x)$.

Второе доказательство – симметрические многочлены. Рассмотрим многочлен $g(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{p-1})$ и покажем, что он лежит в $k[x]$. Из этого будет следовать, что оба многочлена $f(x)$ и $g(x)$ лежат в $k[x]$, имеют общий корень x_0, откуда из неприводимости $f(x)$ будет вытекать, что $g(x) \vdots f(x)$, а из сравнения степеней будет вытекать, что $f(x) = const \cdot g(x)$.

Для доказательства того, что все коэффициенты многочлена $g(x)$ лежат в поле k, необходимо показать, что все элементарные симметрические функции от $x_0, \dots, x_{p-1}$ $\sigma_t = \sum_{i_1 < \dots < i_t} x^{i_1} \dots x^{i_t}$ лежат в k. А в силу формул Ньютона [напоминание: если $p_t = x_0^t + \dots + x_{p-1}^t$, то при $k \leqslant p$

$$p_k - p_{k-1}\sigma_1 + p_{k-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^{k-1} p_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k \sigma_k = 0]$$

достаточно доказать, что элементы $x_0^t + \dots + x_{p-1}^t$ лежат в k для всех t. Это достаточно рутинное упражнение «на раскрытие скобочек». Однако в нем где-то надо использовать, что r – это не просто корень какого-то многочлена, а именно корень двучлена $x^p - a$!

Не поленимся, и проделаем это упражнение. По формуле полинома Ньютона

$$x_i^t = \Big(\gamma_0 + (\gamma_1 \epsilon^i) r + (\gamma_2 (\epsilon^i)^2) r^2 + \dots + (\gamma_{p-1} (\epsilon^i)^{p-1}) r^{p-1}\Big)^t =$$

$$= \sum_{t_0 + t_1 + \dots t_{p-1} = t} C_t^{t_0, t_1, \dots, t_{p-1}} \gamma_0^{t_0} \gamma_1^{t_1} \dots \gamma_{p-1}^{t_{p-1}} (\epsilon^i)^{t_1 + 2t_2 + \dots + (p-1)t_{p-1}} r^{t_1 + 2t_2 + \dots + (p-1)t_{p-1}} =$$

$$= \sum_l \theta_l (\epsilon^i)^l r^l, \qquad \theta_l \in k.$$

Просуммируем по $i = 0, 1, \dots, p-1$, с учетом того, что θ_l не зависят от i:

$$x_0^t + \dots + x_{p-1}^t = \sum_l \theta_l r^l \Big(1 + \epsilon^l + (\epsilon^l)^2 + (\epsilon^l)^3 + \dots + (\epsilon^l)^{p-1}\Big).$$

Если $l \not\vdots p$, то выражение в скобках равно 0. Если $l \vdots p$, то выражение в скобках равно p, но при этом $r^l = a^{l/p} \in k$. В итоге $x_0^t + \dots + x_{p-1}^t \in k$.

5) Мы исследуем вещественность/невещественность корней многочлена. Вещественность комплексного числа означает, что оно инвариантно относительно комплексного сопряжения. Поэтому необходимо посмотреть, как соотносится операция комплексного сопряжения с нашей башней радикальных расширений. Пока никак не соотносится. Поэтому уплотним башню $\mathcal{B}_1$: каждый этаж $L \subset L(\sqrt[q_i]{a_i})$ заменим на два этажа $L \subset L(\sqrt[q_i]{a_i} \cdot \overline{\sqrt[q_i]{a_i}}) \subset L(\sqrt[q_i]{a_i} \cdot \overline{\sqrt[q_i]{a_i}}, \sqrt[q_i]{a_i}) = L(\sqrt[q_i]{a_i}, \overline{\sqrt[q_i]{a_i}})$. Получим новую башню $\mathcal{B}_2$. Заметим, что каждый этаж башни $\mathcal{B}_2$ замкнут относительно сопряжения, что доказывается индукцией по числу этажей башни $\mathcal{B}_2$. При этом используется вещественность числа $\sqrt[q_i]{a_i} \cdot \overline{\sqrt[q_i]{a_i}}$.

Расширение $L(\sqrt[q_i]{a_i} \cdot \overline{\sqrt[q_i]{a_i}}) \subset L(\sqrt[q_i]{a_i} \cdot \overline{\sqrt[q_i]{a_i}}, \sqrt[q_i]{a_i})$, очевидно, радикально, так как $a_i^{q_i} \in L$. Необходимо проверить, что расширение $L \subset L(\sqrt[q_i]{a_i} \cdot \overline{\sqrt[q_i]{a_i}})$ радикально. Это легко вытекает из того, что поле L замкнуто относительно сопряжения.

Легко понять, что в башне $\mathcal{B}_2$ каждый этаж получится правильным [почему?]. Поэтому все то, что мы делали для башни $\mathcal{B}_1$, можно проделать и для $\mathcal{B}_2$ (начиная от выбора поля k). Итого, в результате рассуждений этого пункта мы можем считать, что поле k замкнуто относительно комплексного сопряжения.

6) Так как все корни $f(x)$ лежат в $k(\sqrt[p]{a})$, то будем считать, что x_0 – это вещественный корень. Рассмотрим два случая: число a вещественное и невещественное.

Первый случай. Пусть a – вещественное. Тогда r тоже можно считать вещественным, так как все корни степени p из 1 лежат в k. Из равенства $x_0 = \overline{x}_0$ получаем, что

$$\gamma_0 + \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \dots + \gamma_{p-1} r^{p-1} = \overline{\gamma}_0 + \overline{\gamma}_1 r + \overline{\gamma}_2 r^2 + \dots + \overline{\gamma}_{p-1} r^{p-1},$$

откуда в силу ЛНЗ $1, r, r^2, \dots, r^{p-1}$ над k заключаем, что $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}$ – вещественны. Здесь мы воспользовались пунктом 5 – замкнутостью поля k относительно сопряжения. Вот зачем это было нужно. Далее рутинной проверкой устанавливается, что все остальные корни полинома $f(x)$ невещественны. Для доказательства надо предположить, что $x_i = \overline{x}_i$ при $i > 0$ (а по пункту 4 корнями $f(x)$ являются $x_0, \dots, x_{p-1}$), и извлечь из этого, что $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{p-1} = 0$, то есть $x_0 \in k$, что противоречит выбору поля k.

Второй случай. Пусть a – невещественное, $c = r\overline{r} \in \mathbb{R}$. Из равенств $x_0 = \overline{x}_0$ и $r^p = a$ получаем, что

$$\gamma_0 + \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \dots + \gamma_{p-1} r^{p-1} = \overline{\gamma}_0 + \overline{\gamma}_1 \overline{r} + \overline{\gamma}_2 \overline{r}^2 + \dots + \overline{\gamma}_{p-1} \overline{r}^{p-1} =$$

$$= \overline{\gamma}_0 + \overline{\gamma}_1 (c/r) + \overline{\gamma}_2 (c/r)^2 + \dots + \overline{\gamma}_{p-1} (c/r)^{p-1} = \frac{r^p}{a}\Big(\overline{\gamma}_0 + \overline{\gamma}_1 (c/r) + \overline{\gamma}_2 (c/r)^2 + \dots + \overline{\gamma}_{p-1} (c/r)^{p-1}\Big) =$$

$$= \overline{\gamma}_0 + (\overline{\gamma}_1 c/a) r^{p-1} + (\overline{\gamma}_2 c^2/a) r^{p-2} + \dots + (\overline{\gamma}_{p-1} c^{p-1}/a) r.$$

Но просто так мы не можем воспользоваться тем же приемом, что и в первом случае — приравнять коэффициенты при соответствующих степенях r. Дело в том, что эти коэффициенты (за счет наличия множителя c) могут, вообще говоря, не лежать в k. Здесь надо вспомнить про построение башни $\mathcal{B}_2$: до присоединения к очередному этажу элемента $\sqrt[q_i]{a_i}$ мы присоединяли к нему элемент $\sqrt[q_i]{a_i} \cdot \overline{\sqrt[q_i]{a_i}}$. Поэтому элемент c на самом деле лежит в k. Поэтому можно приравнять коэффициенты при соответствующих степенях r, и получить p равенств. Далее прямой проверкой убеждаемся, что эти p равенств влекут $x_i = \overline{x}_i$, $i = 1, \dots, p-1$, то есть все корни многочлена $f(x)$ оказываются вещественными.

Теорема Кронекера доказана.

Задача. Докажите, что если все три корня неприводимого над полем $\mathbb{Q}$ многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Q}[x]$ вещественны, то их нельзя выразить посредством вещественных радикалов.

Доказательство предложения

Для удобства сформулируем доказываемое предложение еще раз, изменив обозначения. Его доказательство связано с именем Гаусса.

Предложение. Пусть α – примитивный корень простой степени p из 1. Тогда существует радикальная башня

$$L \subset L(\sqrt[n_1]{a_1}) \subset L(\sqrt[n_1]{a_1}, \sqrt[n_2]{a_2}) \subset \dots \subset L(\sqrt[n_1]{a_1}, \sqrt[n_2]{a_2}, \dots, \sqrt[n_s]{a_s}), \qquad n_i < p, \qquad (*)$$

такая, что $\alpha \in L(\sqrt[n_1]{a_1}, \sqrt[n_2]{a_2}, \dots, \sqrt[n_s]{a_s})$.

Доказательство. Докажем утверждение при помощи индукции по p для любых, не обязательно простых, p. Если p составное, то $p = ab$ для некоторых a и b. Поэтому $\sqrt[p]{1} = \sqrt[a]{\sqrt[b]{1}}$. Пусть теперь p простое. Пусть g — первообразный корень по модулю p. Обозначим $\alpha := \varepsilon_p$, $\varepsilon := \varepsilon_{p-1}$ и,

$$\text{для} \quad r = 0, 1, 2, \dots, p-2, \quad T_r(x) := x + \varepsilon^r x^g + \varepsilon^{2r} x^{g^2} + \dots + \varepsilon^{(p-2)r} x^{g^{p-2}} \in \mathbb{Q}(\varepsilon)[x].$$

Тогда $\alpha = \dfrac{(T_0 + T_1 + \dots + T_{p-2})(\alpha)}{p-1}$. Имеем $T_0(\alpha) = -1$. Поэтому достаточно доказать, что число $T_r(\alpha)$ выражается через радикалы степени меньше p для каждого $r = 1, 2, \dots, p-2$.

Так как

$$T_r(x^g) \equiv \varepsilon^{-r} T_r(x) \mod (x^p - 1), \quad \text{то} \quad T_r^{p-1}(x^g) \equiv T_r^{p-1}(x) \mod (x^p - 1).$$

Возьмем многочлен $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{p-1} x^{p-1}$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, сравнимый с $T_r^{p-1}(x)$ по модулю $x^p - 1$. Тогда $a_k = a_{kg \bmod p}$ для любого $k = 1, 2, \dots, p-1$ [почему?]. Значит, $a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1}$. Поэтому $T_r^{p-1}(\alpha) = a_0 - a_1 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$. Таким образом, число $T_r(\alpha)$ выражается через радикалы степени меньше p.

Одномерная комбигеометрия. 15 июля

1. На плоскости отмечено несколько прямоугольников, причем любые два из них имеют общую точку. Докажите, что все прямоугольники имеют общую точку.

2. Докажите, что если в некотором множестве дуг на окружности любые две имеют общую точку, то есть прямая, проходящая через центр и пересекающая все дуги множества.

3. На прямой дана система из $2n + 1$ отрезков, такая что каждый отрезок в этой системе пересекается еще с хотя бы n отрезками. Докажите, что есть отрезок, пересекающий все остальные.

4. Семейство фигур на плоскости, таково, что любые две из них имеют общую точку. Докажите, что через произвольную точку можно провести прямую, пересекающую все эти множества.

5. На плоскости рассматривается конечное множество равных, параллельно расположенных квадратов, причем среди любых $k + 1$ квадратов найдутся два пересекающихся. Докажите, что это множество можно разбить не более чем на $2k - 1$ непустых подмножеств так, что в каждом подмножестве все квадраты будут иметь общую точку.

6. Внутри выпуклого стоугольника выбрано k точек, $2 \leqslant k \leqslant 50$. Докажите, что можно отметить $2k$ вершин стоугольника так, чтобы все выбранные точки оказались внутри $2k$-угольника с отмеченными вершинами.

Определение проекции плоскости π на π' из точки $O \notin \pi \cup \pi'$.

Если π и π' не параллельны, то на них есть *исключительные (выделенные)* прямые y и y'.

При центральной проекции образом прямой [без точки на y] является прямая [без точки на y']. Верно и обратное.

Вопрос: верно ли, что образом отрезка является отрезок? [может быть отрезок, луч, два луча – нарисовать]. Следовательно, образом треугольника может быть не треугольник.

Как связана параллельность с центральным проектированием?

а) Пересекающиеся не на y прямые переходят в пересекающиеся.

б) Пересекающиеся на y прямые переходят в параллельные.

в) Параллельные прямые, параллельные y, переходят в параллельные.

г) Параллельные прямые, не параллельные y, переходят в пересекающиеся на y' прямые.

Дабы устранить все осложнения, связанные с особым положением выделенных прямых, сделаем с плоскостью следующее.

Присоединим к каждой прямой ровно одну точку, называемую *бесконечно удаленной точкой*; при этом две бесконечно удаленные точки совпадают тогда и только тогда, когда они соответствуют параллельным прямым. Множество всех бесконечно удаленных точек назовем *бесконечно удаленной прямой*. Тогда через любые две точки проходит ровно одна прямая и любые две прямые пересекаются (следовательно, ровно в одной точке). Пополненную таким образом евклидову плоскость будем называть *проективной плоскостью* и обозначать Π. Термин «бесконечно удаленная точка» имеет прозрачный геометрический смысл.

Определим теперь центральное проектирование одной проективной плоскости на другую. Для «обычных» точек оставим все как есть. Далее, сопоставим точке $M \in y \subset \pi$ некоторую бесконечно удаленную точку плоскости π'. А именно, M определяет *пучок* проходящих через нее прямых, они проектируются в параллельные, будем считать, что M проектируется в бесконечно удаленную точку, соответствующую этому семейству параллельных прямых. Аналогично сопоставим каждой бесконечно удаленной точке плоскости π точку на y'. При таком определении центральное проектирование проективных плоскостей является биекцией. Выделенная прямая плоскости π – это прообраз бесконечно удаленной прямой плоскости π'.

Замечание: для параллельных (евклидовых) плоскостей, центральное проектирование соответствующих им проективных плоскостей определяется аналогично, и оно тоже является биекцией. Аналогично определяется параллельное проектирование проективных плоскостей, оно переводит бесконечно удаленную прямую в бесконечно удаленную.

Вопрос: верно ли, что при центральном проектировании проективных плоскостей прямые переходят в прямые? [а разве это не было доказано ранее? Нет, не было!] Да, верно.

Определим *проективное преобразование* проективной плоскости Π. Для этого центрально или параллельно спроектируем плоскость π на плоскость Π_1, затем Π_1 на Π_2 и т.д., в конце спроектируем Π_k на Π. Получим биекцию проективной плоскости на себя. Ясно, что при этом прямые (проективной плоскости) перешли в прямые. Биекция проективной плоскости Π, при которой прямые переходят в прямые, называется *проективным преобразованием* проективной плоскости Π. Множество проективных преобразований плоскости образует *группу* $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$.

Возникает вопрос, любое ли проективное преобразование является композицией центральных и параллельных проектирований и преобразований подобия? И еще вопрос: верно ли, что любые четыре точки, никакие три из которых не коллинеарны, можно подходящим проективным преобразование перевести в любые четыре точки, никакие три из которых не коллинеарны? Если да, то единственно ли такое преобразование? Ответы на эти вопросы даются следующими теоремами, которые идут в порядке убывания важности.

Теорема 1. *Существует проективное преобразование, переводящее четыре точки* $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \Pi$, *никакие три из которых не коллинеарны, в заданные четыре точки* $B_1, B_2, B_3, B_4 \in \Pi$, *никакие три из которых не коллинеарны.*

Теорема 2. *Такое проективное преобразование единственно.*

Теорема 3. *Пусть* f *– проективное преобразование, и прямая* y *переходит в бесконечно удаленную. Тогда если точки* A, B, C, D *лежат на (евклидовой части) прямой, параллельной* y, *то* $f(A)f(B)/f(C)f(D) = AB/CD$ *(имеются в виду ориентированные отношения длин).*

Теорема 4. *Любое проективное преобразование является композицией центральных и параллельных проектирований и преобразований подобия.*

Определим двойное отношение точек на прямой из проективной плоскости. Положим $(A, B, C, D_\infty) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Аналогично, когда одна из других точек является бесконечно удаленной. Еще надо определить двойное отношение четырех точек на бесконечно удаленной прямой. Теперь надо показать, что при центральном проектировании прямой на прямую оно сохраняется (раньше мы показали, что сохраняется для «обычных» точек).

Ясно, что при центральной проекции прямая проецируется на прямую, и все это происходит в одной плоскости. Выше мы показали, что при этом сохраняется двойное отношение точек на прямой. Следовательно, если верна теорема 4, то двойное отношение сохраняется при произвольных проективных преобразованиях. Но мы докажем это минуя теорему 4, ведь ее мы вообще доказывать не собираемся ввиду маловажности! Отметим, что сохранение гармонических отношений следует из теоремы о полном четырехвершиннике.

Теорема 5. *При проективных преобразованиях сохраняются двойные отношения точек, лежащих на одной прямой.*

Замечание. Когда мы говорим о четырехугольнике, то подразумеваем или четырехвершинник, или четырехсторонник. Аналогично, под треугольником подразумеваем трехвершинник или трехсторонник.

Доказательство теорем отложим, при решении задач ими можно пользоваться.

Пример. Докажите обе части теоремы о полном четырехвершиннике.

Для самостоятельного решения

1. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, точки A_2, B_2, C_2 тоже лежат на одной прямой. Докажите, что точки пересечения A_1B_2 и A_2B_1, B_1C_2 и B_2C_1, C_1A_2 и C_2A_1 лежат на одной прямой (*т. Паппа*). Как выглядит т. Паппа, если точки A_1, B_1, C_1 лежат на беск. удаленной прямой?

2. Трехвершинники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ таковы, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке C, аналогично определяются точки A и B. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой (*т. Дезарга*). [Если два трехвершинника имеют центр перспективы, то они имеют ось перспективы]

3. Даны две прямые и не лежащая на них точка P. Через P проводятся пары различных прямых, пересекающих данные в точках A и C, B и D. Докажите, что точки пересечения прямых AD и BC образуют прямую, проходящую через точку пересечения данных прямых (*поляра точки относительно пары прямых*).

4. Докажите, что при проективном преобразовании гармонические четверки точек переходят в гармонические.

5. Даны треугольник ABC и прямая l. Обозначим через A_1, B_1, C_1 середины отрезков, высекаемыми на прямой l углами A, B, C (или смежными к ним), а через A_2, B_2, C_2 – точки пересечения AA_1 и BC, BB_1 и AC, CC_1 и AB. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

6. а) На плоскости даны четыре прямые общего положения. Они образуют четыре треугольника. Докажите, что ортоцентры этих треугольников лежат на одной прямой (*прямая Обера*).

б) Докажите, что прямая Обера перпендикулярна *прямой Гаусса.*

7. На сторонах угла XOY отмечены точки A_1, B_1 и A_2, B_2, соответственно. Прямые A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются в точке K. Точки C, D построены так, что $OC \parallel A_1A_2$, $OD \parallel B_1B_2$, а четверки точек O, C, B_1, B_2 и O, D, A_1, A_2 лежат (каждая) на одной окружности. Докажите, что K лежит на прямой CD.

8. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника проведены четыре прямые, пересекающие его противоположные стороны в точках K и K', L и L', M и M', N и N' (возможны разные конфигурации). Прямые KM и LN, $K'M'$ и $L'N'$ пересекаются в точках P и P'. Докажите, что точки P, O, P' лежат на одной прямой.

9. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC выбрана точка P. Прямые AP и CP пересекают продолжения сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а прямая BP пересекает сторону AC в точке B_1. Прямые C_1B_1 и A_1B_1 пересекают стороны BC и AB в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения симедиан треугольника ABC.

К теореме Дезарга.

10. Докажите обратную теорему Дезарга.

11. Докажите теорему Дезарга для случая, когда плоскости $(A_1A_2A_3)$ и $(B_1B_2B_3)$ различны. Выведите из этого плоскую теорему Дезарга.

12. опознайте теорему Дезарга в следующих утверждениях:

а) медианы треугольника пересекаются в одной точке;

б) вторая часть теоремы о полном четырехвершиннике;

в) если трапеция вписана в четырехугольник так, что ее основания параллельны одной из диагоналей четырехугольника, то продолжения ее боковых сторон пересекаются на прямой, содержащей другую диагональ.

Лексикографический порядок. 17 июля

Аксиома индукции. В каждом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьший элемент.

Принцип минимального контрпримера. Если утверждение зависит от натурального параметра n, то либо оно верно для всех n, либо есть *наименьшее* n, для которого утверждение неверно.

Пример. Докажите, что два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

Упр. 1. Прожектор в пространстве освещает октант с осями, параллельными координатным. Такие прожектора последовательно помещаются в неосвещенные точки с натуральными координатами. Докажите, что удастся разместить лишь конечное число прожекторов.

Определение. Обозначим $\mathbb{N}^m = \{(a_1, a_2, \dots, a_m) | a_i \in \mathbb{N}\}$. Пусть $A, B \in \mathbb{N}^m$. Будем говорить, что $A \preceq B$, если или $a_1 < b_1$, или $a_1 = b_1$ и $a_2 < b_2$, или $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 < b_3$ и т.д.

Упр. 2. а) Если $A \preceq B$, $B \preceq C$, то $A \preceq C$. Таким образом, множество $\mathbb{N}^m$ превращается в ЧУМ.

б) Строго убывающая последовательность строк из $\mathbb{N}^m$ всегда конечна!

Теорема. В каждом непустом подмножестве из $\mathbb{N}^m$ есть наименьший элемент.

1. В колоде несколько карт лежат рубашкой вверх, остальные – рубашками вниз. Время от времени Петя выбирает пачку из несколько карт подряд, в которой первая и последняя карты лежат рубашкой вниз, вынимает ее, переворачивает, и вставляет в то же место. (Пачка может состоять и из одной карты рубашкой вниз). Докажите, что рано или поздно все карты в колоде лягут рубашкой вверх.

2. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x * (p-1)^k/p$, где p – какой-нибудь простой делитель числа x, а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.

Вопрос. Аналогично можно определить порядок на множестве бесконечных строк натуральных чисел. Верно ли, что при этом в любом непустом подмножестве будет наименьший элемент?

3. Дана последовательность из бесконечного числа нулей и конечного числа единиц. Если найдется группа вида 01, то ее можно заменить на группу вида $10\ldots0$ с произвольным числом нулей. Докажите, что можно сделать лишь конечное число таких замен.

4. В памяти компьютера записан массив вещественных положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обнаружив любую пару соседних элементов в беспорядке, то есть $a_i > a_{i+1}$, компьютер меняет их местами. Но при этом вирус умножает новый элемент a_{i+1} на 1000. Докажите, что со временем весь массив будет идти в порядке неубывания. Верно ли это для произвольных вещественных чисел?

5. Али-Баба делит с разбойником 10 куч золотого песку. Али-Баба может в любой момент взять три кучи и уйти, либо он может выбрать 4 кучи, разделить каждую на левую и правую часть (обе непустые). Затем разбойник правые части нетождественно переставляет и затем части объединяются – каждая левая с каждой правой. Докажите, что Али-Баба сможет унести домой более 99.99% процентов золотого песку.

6. Функция $F(x, y)$ задана условиями: $F(0, y) = y + 2$, $F(x, 1) = 2$ $(x > 0)$, $F(x+1, y) = F(x, F(x+1, y-1))$.

а) Покажите, что функция определена для всех пар (x, y), где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$.

б) Найдите явную формулу для $F(1, y)$.

в) Найдите явную формулу для $F(2, y)$.

г) Найдите явную формулу для $F(3, y)$.

д) Что больше: $1000!^{1000!}$ или $F(5, 5)$?

Матбой профи9 — профи10. 17 июля

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, точка M — середина AB. На прямой AB выбраны точки S_1 и S_2. Касательные, проведенные из S_1 к окружности ω_1 касаются ее в точках X_1 и Y_1, а касательные из S_2 к ω_2 касаются ее в точках X_2 и Y_2. Докажите, что если прямая X_1X_2 проходит через M, то прямая Y_1Y_2 тоже проходит через M.

2. На каждой клетке бесконечной шахматной доски написано наименьшее количество ходов, за которое конь может дойти от этой клетки до данной клетки O. Назовем клетку *особой*, если на ней написано число 100, а на всех соседних с ней (по стороне) клетках — 101. Сколько существует особых клеток?

3. На отрезке натурального ряда имеется ровно 10 четвертых степеней и ровно 100 кубов. Докажите, что на этом отрезке не менее 2000 точных квадратов.

4. Все числа, большие 1, покрашены в два цвета (оба цвета использованы). Докажите, что существуют такие вещественные a и b, что числа $a+b$ и ab покрашены в разные цвета.

5. Окружность, проходящая через вершины A и B вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает его диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Прямые AF и BC пересекаются в точке P, а прямые BE и AD — в точке Q. Докажите, что PQ параллельно CD.

6. Дано слово более чем из 10 букв, в котором любые две соседние буквы различны. Докажите, что можно поменять местами две соседние буквы так, чтобы полученное слово не было периодическим (не разбивалось на одинаковые подслова).

7. В графе k ребер и T треугольников. Докажите, что $9T^2 \leqslant 2K^3$.

8. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со свойством: $f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

9. В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше $1+x$ г. При каком наибольшем значении x заведомо можно разложить весь изюм на две чаши весов так, чтобы они показали разность, не превосходящую 1 г?

10. Можно ли так покрасить точки трёхмерного пространства в 2011 цветов, чтобы на каждом отрезке в пространстве встречались все 2011 цветов?

Матбой профи10 — молодые преподаватели 7-го класса. 17 июля

1. В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше $1+x$ г. При каком наибольшем значении x заведомо можно разложить весь изюм на две чаши весов так, чтобы они показали разность, не превосходящую 1 г?

2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со свойством: $f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Найдите все такие многочлены $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, что всякого натурального числа n уравнение $P(x) = 2^n$ имеет целый корень.

4. В графе K ребер и T треугольников. Докажите, что $9T^2 \leqslant 2K^3$.

5. Дан выпуклый шестиугольник $AC'BA'CB'$, у которого каждые две противоположные стороны равны. A_1 – точка пересечения BC и серединного перпендикуляра к AA'. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

6. Дан выпуклый многоугольник. Докажите, что найдутся шесть таких многоугольников, полученных из исходного параллельными переносами, что они касаются исходного многоугольника, и попарно не имеют общих внутренних точек.

7. Прямая проходит через центр описанной окружности треугольника ABC и пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Докажите, что на окружности девяти точек треугольника ABC найдется точка, из которой отрезки AQ и CP видны под прямыми углами.

8. Пусть $n > 3$ – нечетное число. Докажите, что существует такое простое p, что p не делит n, но делит $2^{\varphi(n)} - 1$.

9. На клетчатой доске $n \times n$ расставлены несколько фишек так, что каждая клетка без фишки граничит по стороне с клеткой, содержащей фишку, а каждые две клетки с фишками можно соединить цепочкой клеток, содержащих фишки, в которой соседние клетки граничат по стороне. Докажите, что фишки стоят не менее, чем в $\frac{n^2-1}{3}$ клетках.

10. Найдите все $\mathbb{Q}$-линейные отображения $F\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$ такие, что для любого неприводимого многочлена $p \in \mathbb{Q}[x]$ многочлен $F(p)$ тоже неприводим.

Скалярное произведение. 19 июля

Определение. Пусть K — поле, $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $v = (v_1, \dots, v_n)$ — векторы из K^n. Положим $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$ (*скалярное произведение* векторов u и v).

Упр. 1. Свойства скалярного произведения:

а) $\langle u, v\rangle \ = \ \langle v, u\rangle$;

б) $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle \ = \ \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$;

в) Если $\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_sv_s = 0$, то $\alpha_1\langle v_1, v\rangle \ + \dots \ + \alpha_s\langle v_s, v\rangle \ = \ 0$.

Определение. Векторы $u, v \in K^n$ называются *ортогональными*, если $\langle u, v\rangle = 0$.

Упр. 2. Может ли ненулевой вектор быть ортогональным самому себе?

Упр. 3. Докажите, что любой набор попарно ортогональных ненулевых векторов в $\mathbb{R}^n$ линейно независим. На какие поля, помимо $\mathbb{R}$, переносится это свойство?

Задача 1. В городе живет n человек и имеется несколько клубов. Известно, что в каждом клубе состоит нечетное число членов, а любые два клуба различаются по составу и имеют четное число общих членов. Докажите, что количество клубов в городе не превосходит n.

Определение. Пусть M — подмножество K^n. Положим $M^\perp = \{v | (v, M) = 0\}$ — *ортогональное дополнение* к множеству M.

Упр. 4. а) Докажите, что $M^\perp$ является подпространством. б) Как связаны $(M^\perp)^\perp$ и M? в) Пусть M — подпространство. Докажите, что $\dim M + \dim M^\perp \ = \ n$. г) Пусть M — подпространство. Докажите, что $(M^\perp)^\perp = M$.

Задача 2. Каково наибольшее возможное количество подмножеств 100-элементного множества, таких, что пересечение любых двух (возможно, совпадающих) из них содержит четное количество элементов?

Для самостоятельного решения

1. В городе k супружеских пар и n клубов. Известно, что для мужчины и женщины количество клубов, в которых они оба бывали, нечетно тогда и только тогда, когда они — муж и жена. Докажите, что $k \leqslant n$.

2. В КИМах Единой Государственной Олимпиады (ЕГО) n вопросов с ответами «да» и «нет», за каждый правильный ответ начисляется 1 первичный балл. ЕГО сдавали k участников, и при этом они дали такой набор ответов на вопросы, что экспертная комиссия может так приписать положительные веса вопросам, чтобы участники расположились по итоговым баллам в любом нужном порядке. Докажите, что $k \leqslant n$.

3. (Неравенство Фишера). Пусть $A_1, \dots, A_m$ — различные непустые подмножества n-элементного множества. Если пересечение любых двух различных из них состоит из l элементов, то $m \leqslant n$. Указание: ЛЗ над $\mathbb{Q}$.

Теорема Хелли. 19 июля

Определение. Множество точек называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит весь отрезок между ними.

Определение. *Выпуклой оболочкой* множества A, называется минимальное по включению выпуклое множество, содержащее A. Выпуклую оболочку множества A будем обозначать $\mathrm{Conv}(A)$.

Утверждение. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — конечное множество точек. Тогда $\mathrm{Conv}(A)$ это множество точек вида $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$, где α_i — неотрицательные числа с суммой 1.

Теорема Хелли для плоскости. Если любые 3 из N выпуклых множеств на плоскости имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

Теорема Хелли для пространства. Если любые 4 из N выпуклых множеств в пространстве имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдется точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его последовательных вершин.

2. На плоскости дано конечное число вертикальных отрезков.

а) Любые три из них можно пересечь одной прямой. Докажите, что все их можно пересечь одной прямой.

b) Любые четыре из них можно пересечь параболой. Докажите, что все их можно пересечь параболой.

3. Докажите, что выпуклый многоугольник диаметра 1 можно поместить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (*это утверждение называется теоремой Юнга*).

4. На плоскости дано n точек. Докажите, что существует такая точка O, что по любую сторону от любой прямой, проходящей через O лежит не более $\frac{2n}{3}$ этих точек (точки, лежащие на прямой, не учитываются).

Линейные рекурренты — 1. 19 июля

Задачи, приводящие к рекуррентам.

1) Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы нескольких нечетных слагаемых? (Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаем разными)

2) Сколькими способами в ряду $1, 2, \ldots, n$ можно выбрать несколько элементов, никакие три из которых не идут подряд?

Фиксируем линейное рекуррентное уравнение (порядка k)

$$x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 x_n.$$

Упр. 1. а) Решения этого уравнения (то есть последовательности) образуют линейное пространство относительно естественных операций.

б) Предъявите k ЛНЗ последовательностей (=векторов), через которые все остальные последовательности выражаются в виде линейной комбинации.

Теорема 1. Решения ЛРУ образуют k-мерное пространство (над $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \ldots$).

Вопрос. Рекурренты $x_{n+2} = x_{n+1}$ и $x_{n+1} = x_n$ совпадают. А по теореме 1 у них разные размерности пространства решений. В чем дело?

Ключевая идея. Попробуем найти решения, которые являются *геометрическими прогрессиями(!!!)* (разумно искать только знаменатели прогрессий λ_i, не правда ли?). Из какого уравнения находятся эти знаменатели λ_i?

Определение. Полученное уравнение называется *характеристическим уравнением* рекуррентной последовательности.

Теорема 2. Геометрические прогрессии с попарно разными знаменателями ЛНЗ.

Основная теорема. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – **различные** корни характеристического уравнения, то любое решение рекуррентного уравнения имеет вид $x_n = c_1\lambda_1^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$, где константы c_i определены однозначно.

Замечание 1. В случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, помимо геометрических прогрессий в базис *должны* входить и другие последовательности. Почему?

Замечание 2. Как правило λ_i и c_i лежат не в том поле, где коэффициенты, а в *большем* поле.

Упр. 2. Найдите точные и асимптотические формулы в задачах из начала листочка.

Для самостоятельного решения

1. а) Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ с условием $3f(n) - 2f(f(n)) = n$.
б) а если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$?
в) докажите, что ответ изменится, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Решите функциональное уравнение: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(f(x)) + f(x) = 6x$.

3. а) Рассмотрим рекуррентное уравнение $x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 x_n + b$. Докажите, что его решения являются линейными рекурентами порядка $k+1$.

б) Решения уравнения $x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 x_n + b(n)$ устроены так: каждое решение есть сумма решения уравнения с $b(n) = 0$ и одного любого фиксированного решения.

4. $x_1 = 0, x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$. Докажите, что все члены последовательности – целые.

Аналитическая модель проективной плоскости. 20 июля

Есть три модели проективной плоскости

Пополненная евклидова плоскость (Π).

Связка прямых и плоскостей. Пусть O – некая точка в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через S множество прямых, проходящих через O. *Точка* в S – это прямая (проходящая через O), а *прямая* – множество всех прямых, проходящих через O и лежащих в некоторой плоскости. Эта модель называется *связкой прямых и плоскостей*. Ясно, что через каждые две точки проходит единственная прямая и любые две прямые пересекаются. Эту модель можно мыслить как полусферу, в которой отождествлены противоположные точки границы.

Аналитическая модель. Вернемся к модели-связке. Будем представлять точку $P \in S$ (то есть проходящую через O прямую) некоторой точкой (x_1, x_2, x_3) этой прямой, не совпадающей с точкой $O(0, 0, 0)$. (Из глубоких соображений формализма под (x_1, x_2, x_3) понимается столбец, а не строка). Числа x_1, x_2, x_3 называются *однородными координатами* точки P. При этом точки (x_1, x_2, x_3) и (x_1', x_2', x_3') из $\mathbb{R}^3$ соответствуют одной и той же точке из S тогда и только тогда, когда существует $\lambda \neq 0$: $x_i' = \lambda x_i$. Введем на множестве $\{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)\}$ соответствующее отношение эквивалентности [а что это такое?]. Множество классов эквивалентности L будет образовывать проективную плоскость. *Точкой* является класс эквивалентности $[x_1, x_2, x_3] \in L$. *Прямой* является множество всех классов $[x_1, x_2, x_3]$, для которых числа x_1, x_2, x_3 удовлетворяют уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ при фиксированных $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$, одновременно не равных нулю. Это определение корректно. Снова ясно, что через каждые две точки проходит единственная прямая и любые две прямые пересекаются.

Упр. 1. а) Найдите точку пересечения прямых $a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0$ и $a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0$.

б) Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $[a_1, b_1, c_1]$ и $[a_2, b_2, c_2]$.

Упр. 2. Строки квадратной матрицы линейно независимы тогда и только тогда, когда столбцы линейно независимы.

Упр. 3. Точки $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$ и $[c_1, c_2, c_3]$ коллинеарны тогда и только тогда, когда векторы (a_1, a_2, a_3) и т.п. ЛЗ.

Итак, у нас есть три модели проективной плоскости. Покажем, что между ними существуют биекции, сохраняющие коллинеарность точек, то есть эти три модели *изоморфны.* Для моделей S и L это очевидно. Построим биекцию из L в Π.

Пусть $[x_1, x_2, x_3] \in L$. Если $x_3 \neq 0$, то положим $f([x_1, x_2, x_3]) = (x_1/x_3, x_2/x_3)$ – точка на пополненной евклидовой плоскости. Это определение корректно. Так получается любая «обычная» точка. Если $x_3 = 0$, то $f([x_1, x_2, x_3])$ по определению есть бесконечно удаленная точка, соответствующая пучку параллельных прямых с угловым коэффициентом x_2/x_1 (при $x_1 = 0$ получается пучок «вертикальных» прямых). Это определение снова корректно. Ясно, что f – биекция. Осталось проверить, что коллинеарные точки переходят в коллинеарные. Нестрого говоря, f сопоставляет каждой прямой, проходящей через $O(0, 0, 0)$, ее точку пересечения с плоскостью $z = 1$.

Упр. 4. Рассмотрим на евклидовой плоскости кривые $2x + 3y = 5$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2$, $xy = 1$, $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$, $y = x + 1/x$. Напишите уравнения этих кривых в однородных координатах на проективной плоскости и выясните, сколько бесконечно удаленных точек на них лежит.

Определение. Биекция проективной плоскости, при которой сохраняется коллинеарность точек, называется *проективным преобразованием.*

Упр. 5. а) Композиция проективных преобразований является проективным преобразованием.

б) Докажите, что неколлинеарные точки переходят в неколлинеарные.

в) Обратное преобразование к проективному преобразованию проективно.

Глобально мы хотим выяснить, как выглядит проективное преобразование в однородных координатах.

Пусть A – 3×3 матрица с ЛНЗ строками. Определим отображение X_A из множества столбцов (не строк!!!) длины 3 в него же следующим образом: столбец $(x_1, x_2, x_3)^T$ переходит в стобец $(x_1', x_2', x_3')^T$, где $x_i' = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3$. Очевидно, что это отображение *линейно.*

Упр. 6. Отображение X_A биективно $\Longleftrightarrow$ строки(столбцы) матрицы A линейно независимы.

Определение. Пусть A – 3×3 матрица с ЛНЗ строками. Определим отображение $T_A : L \to L$ следующим образом: точка $[x_1, x_2, x_3]$ переходит в точку $[x_1', x_2', x_3']$, где $x_i' = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3$.

Утверждение 1. T_A – *проективное преобразование плоскости* L.

Д-во. Надо проверить корректность, биективность и что T_A переводит прямые в прямые.

Упр. 7. Напишите уравнение параллельного переноса в однородных координатах.

Упр. 8. Как выглядит в координатах проективное преобразование вида T_A на евклидовой части проективной плоскости?

Упр. 9. У отображения T_A есть *обратное* отображение, равное T_B для некоторой матрицы B с ЛНЗ строками. Композиция $T_{A_2} \circ T_{A_1}$ равна T_C для некоторой матрицы C с ЛНЗ строками. То есть множество $G = \{T_A\}$ является *группой* относительно композиции.

Утверждение 2. $T_{A'} = T_A$ *тогда и только тогда, когда* $A' = \lambda A$ *для некоторого* $\lambda \neq 0$.

Д-во. Смотрим значения на точках $P_1 = [1, 0, 0]$, $P_2 = [0, 1, 0]$, $P_3 = [0, 0, 1]$, $Q = [1, 1, 1]$.

Утверждение 3. *Пусть точки* $B_1, B_2, B_3, B_4 \in L$ *таковы, что никакие три из них не коллинеарны. Точки* $C_1, C_2, C_3, C_4 \in L$ *таковы, что никакие три из них не коллинеарны. Тогда найдется единственное преобразование* $T_A \in G$, *такое что* $T_A(B_i) = C_i$.

Д-во. Достаточно перевести точки P_1, P_2, P_3, Q в четыре заданные, что считается в координатах. Единственность доказывается как в утверждении 2.

Теперь будем доказывать самое сложное – что G совпадает с множеством всех проективных преобразований (вытекает из утверждений 3,4,5).

Утверждение 4. *Пусть f – произвольное проективное преобразование плоскости L с неподвижными точками $P_1 = [1,0,0]$, $P_2 = [0,1,0]$, $P_3 = [0,0,1]$, $Q = (1,1,1)$. Тогда найдется такой автоморфизм σ поля $\mathbb{R}$, что $f([x_1,x_2,x_3]) = [x_1^\sigma, x_2^\sigma, x_3^\sigma]$.*

Утверждение 5. *Поле $\mathbb{R}$ имеет только тождественный автоморфизм.*

Д-во. $a > 0 \iff a^\sigma > 0$, откуда $\lim a_n = a \iff \lim a_n^\sigma = a^\sigma$. Осталось каждое число приблизить рациональными числами и воспользоваться единственностью предела.

Из утверждений 1–5 вытекают теоремы 1 и 2 предыдущего листка.

Каков алгебраический смысл двойных отношений? Нас явно не устраивает классическое определение, ведь оно совсем не переносится на произвольные поля. А все остальное — переносится (с учетом того, что у полей бывают нетождественные автоморфизмы).

Пусть различные точки A, B, C, D лежат на одной прямой, при этом $A = [a]$ и т.д. Тогда c и d однозначно представимы в виде ЛК a и b (почему и почему однозначно?). Пусть $c = \gamma_1 a + \gamma_2 b$, $d = \delta_1 a + \delta_2 b$. Назовем число $(A,B;C,D) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} : \frac{\delta_2}{\delta_1}$ *двойным отношением четырех точек на прямой.* Видим, что это определение нуждается в проверки корректности (то есть что оно определено не на тройках чисел, а на классах эквивалентности троек, и что нет деления на 0).

Теперь легко понять, что двойное отношение сохраняется при проективных преобразованиях. [почему?]

Для расширенной евклидовой плоскости это определение двойного отношения совпадает со старым.[почему?]

То есть мы доказали теорему 5 из предыдущего листка.

Определим *двойное отношение четырех прямых*, проходящих через одну точку, так. Пересечем их любой прямой, и двойное отношение полученных четырех точек назовем двойным отношение четырех прямых. Ясно, что надо доказывать корректность, считая все в координатах.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что $(A,B;C,D) = (C,D;A,B)$.

2. Докажите теорему 3 из предыдущего листка.

Линейные рекурренты — 2. 20 июля

По прежнему рассматриваем линейное рекуррентное уравнение (порядка k)

$$x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 x_n. \qquad (*)$$

Упр. 1. Докажите, что если λ – корень кратности $\geqslant 2$ характеристического уравнения, то последовательность $x_n = n\lambda^n$ удовлетворяет уравнению $(*)$.

Упр. 2. Пусть некоторая последовательность удовлетворяет ЛРУ с характеристическим многочленом $\chi(x)$. Докажите, что тогда эта последовательность удовлетворяет ЛРУ с характеристическим многочленом $\chi(x) \cdot g(x)$, $g(x)$ – любой многочлен.

Замечание. Уже это слишком технично. Дело в том, что основной объект нашего изучения – последовательность, удовлетворяющая ЛРУ – «недостаточно алгебраизирован», поэтому с ним тяжело работать (ведется работа не с *последовательностями* целиком, а с *элементами последовательностей*). Для устранения недостатка заведем на пространстве всех последовательностей V_∞ *линейные операторы* (то есть линейные отображения $V_\infty \to V_\infty$). По сути дела нам будет важен только один такой оператор – оператор сдвига: $J(x_1, x_2, x_3 \ldots) = (x_2, x_3, x_4 \ldots)$. Несложно понять, что линейные операторы можно складывать, умножать на константы, умножать друг на друга – снова будут получаться линейные операторы. Рассмотрим, например, оператор $J^2 - J - 1$ $(1 = \mathrm{Id})$. Что за последовательности будут решениями уравнения $(J^2 - J - 1)(x_1, x_2, x_3, \ldots,) = (0, 0, 0, \ldots)$?

Итак, каждому ЛРУ с характеристическим многочленом $\chi(x)$ мы сопоставляем линейный оператор $\chi(J)$. Решением уравнения $(\chi(J))\{x_i\} = 0$ в точности являются последовательности, удовлетворяющие ЛРУ с характеристическим многочленом $\chi(x)$. После этого решение упр. 2. становится очевидным. Но чудес не бывает: сложность никуда не исчезла, просто она запряталась в (рутинную!) проверку «естественных свойств» линейных операторов.

Контрольный вопрос. Какие последовательности являются решениями уравнений $(J - \lambda)\{x_i\} = 0$? $(J^2 - \lambda J)\{x_i\} = 0$? $(J^3 - \lambda J^2)\{x_i\} = 0$?

Упр. 3. Пусть $\chi(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$, где многочлены $\chi_1(x), \chi_2(x)$ взаимно просты, и последовательность $\{x_i\}$ удовлетворяет ЛРУ с характеристическим многочленом $\chi(x)$. Тогда $\{x_i\} = \{y_i\} + \{z_i\}$, где последовательности $\{y_i\}$ и $\{z_i\}$ удовлетворяют ЛРУ с характеристическими многочленами $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$.

Упр. 4. Рассмотрим ЛРУ с характеристическим многочленом $\prod(x - \lambda_i)^{n_i}$. Допустим, что для каждого i мы нашли базисы пространства рекуррентных последовательностей, удовлетворяющих ЛРУ с характеристическим многочленом $(x - \lambda_i)^{n_i}$. Докажите, что их объединение есть базис пространства последовательностей, удовлетворяющих ЛРУ с характеристическим многочленом $\prod(x - \lambda_i)^{n_i}$.

Упр. 5. а) Укажите такую рекурренту, которая удовлетворяет ЛРУ с характеристическим многочленом $(x - \lambda)^k$, но не удовлетворяет ЛРУ с характеристическим многочленом $(x - \lambda)^{k-1}$.

б) Найдите базис пространства рекуррентных последовательностей, удовлетворяющих ЛРУ с характеристическим многочленом $(x - \lambda_i)^{n_i}$.

Теорема. Любое решение ЛРУ с характеристическим многочленом $\prod(x-\lambda_i)^{n_i}$ однозначно представимо в виде $\sum P_i(n)\lambda_i^n$, где $P_i(x)$ – многочлен степени не выше $n_i - 1$.

Для самостоятельного решения

1. Решите ФУР $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(f(f(x))) + f(f(x)) = 2x + 5$.

2. Рассмотрим множество всех последовательностей, удовлетворяющих сразу двум ЛРУ. Докажите, что это есть множество последовательностей, удовлетворяющих некоторому одному ЛРУ.

Элементарный анализ. 21 июля

Определение. Множество A называется *открытым*, если вместе с любой точкой $a \in A$ оно содержит некоторый открытый шар $B_r(a)$, где $r > 0$, (= окрестность этой точки).

Определение. Множество V называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Определение. Точка x называется *граничной* для множества A, если каждая ее окрестность содержит элементы из A и не из A.

Утверждение. Множество V замкнуто $\iff$ содержит все свои граничные точки. Множество A открыто $\iff$ содержит ни одной своей граничной точки.

Вопрос. Найдите все множества в $\mathbb{R}^n$, замкнутые и открытые одновременно.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Функция $f\colon A \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной*, если для любой точки $x \in A$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой точки $y \in A$ с условием $||x - y|| < \delta$ выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Теорема о знаке. Пусть $f\colon A \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $f(x) > 0$. Тогда существует окрестность точки x такая, что в любой точки $y \in A$ из этой окрестности $f(y) > 0$.

Определение. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если оно замкнуто и ограничено.

Теорема. Следующие условия равносильны:
1) K — компакт;
2) из любой последовательности точек в K можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из K;
3) из любого открытого покрытия K можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема Вейерштрасса о максимальном значении. Пусть K — компакт и $f\colon K \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда она достигает на K своего максимума.

Теорема о промежуточном значении. Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, ее максимум равен M, а минимум — m. Тогда f принимает все значения на отрезке $[m, M]$.

Задача. a) Фиксируем точку $y \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что функция $f(x)$ равная расстоянию от x до y непрерывна.

b) Пусть V — выпуклое замкнутое множество на плоскости и точка $x \notin V$. Докажите, что существует прямая l такая, что V и x лежат строго по разные стороны от нее (*лемма об отделяющей прямой*).

Для самостоятельного решения

1. Пусть K_1, K_2 — два выпуклых компакта на плоскости, не имеющих общих точек. Докажите, что существует прямая l такая, что K_1 и K_2 лежат строго по разные стороны от нее.

2. f – непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, для которой уравнение $f(x) = x$ не имеет решений. Докажите, что тогда уравнение $f(f(x)) = x$ тоже не имеет вещественных решений. Приведите контрпример для разрывных функций.

3. На отрезке $[0, 1]$ задана непрерывная функция $f(x)$ такая, что $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что найдется горизональный отрезок длины $1/3$ с концами на графике функции. Приведите примеры того, что отрезков длины 0.333 и 0.334 может не найтись.

4. Существует ли непрерывная биекция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Проективные преобразования, сохраняющие окружность. 21 июля

Лемма. *При стереографической проекции окружности переходят в прямые или окружности.*

Теорема. *Дана окружность и не пересекающая ее прямая l. Тогда существует центральная проекция, переводящая данную окружность в окружность, а l – в бесконечно удаленную прямую.*

Следствие. *Дана окружность и точка C внутри нее. Тогда существует центральная проекция, при которой данная окружность переходит в окружность, а точка C – в ее центр.*

1. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке (точке Жергона).

2. Через середину C хорды AB проведены две хорды KM и LN. Прямые KL и MN пересекают прямую AB в точках D и E. Докажите, что $CD = CE$ (возможны две конфигурации) (*т. о бабочке*).

3. Дан вписанный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Докажите, что точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой (*т.Паскаля*). [Теорема Паскаля верна и для самопересекающихся шестиугольников]

4. Окружность Γ касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E и его описанной окружности. Докажите, что прямая DE проходит через точку I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

5. Пусть AA', BB', CC' – главные диагонали вписанного шестиугольника пересекающиеся в точке O. X – произвольная точка этой окружности. Докажите, что точки P, Q, R пересечения прямых XA', XB', XC' с прямыми BC, CA, AB лежат на одной прямой, проходящей через O.

6. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Биссектрисы углов A_1AC и C_1CA пересекаются в точке B'. Аналогично определяются точки A' и C'. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой, проходящей через центр вписанной окружности треугольника.

7. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Некоторая окружность с центром в I пересекает сторону BC в точках A_1 и A_2, сторону CA в точках B_1 и B_2, сторону AB в точках C_1 и C_2. Полученные точки расположены на окружности в порядке A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Точки A_3, B_3, C_3 – середины дуг A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно. Прямые A_2A_3 и B_1B_3 пересекаются в точке C_4, прямые B_2B_3 и C_1C_3 – в точке A_4, а прямые C_2C_3 и A_1A_3 – в точке B_4. Докажите, что отрезки A_3A_4, B_3B_4, C_3C_4 пересекаются в одной точке.

Проективная двойственность. 21 июля

Определим полярное преобразование проективной плоскости. Будем считать, что центр окружности полярно соответствует бесконечно удаленой прямой. Точка на бесконечно удаленной прямой полярно соответствует прямой, проходящей через центр окружности, перпендикулярно направлению, задаваемому этой прямой.

При таком определении сохраняется инцидентность точек и прямых на проективной плоскости (уже без всяких ограничений!).

ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ. *Если верно некоторое утверждение об инцидентности точек и прямых проективной плоскости, то верно и утверждение, получающееся из него заменой слов «точка» и «прямая».*

Полезен словарик: точка $\leftrightarrow$ прямая, трехвершинник $\leftrightarrow$ трехсторонник, четырехвершинник $\leftrightarrow$ четырехсторонник, лежит на $\leftrightarrow$ проходит через, точка пересечения двух прямых $\leftrightarrow$ прямая, проходящая через две точки, коллинеарные точки $\leftrightarrow$ пересекающиеся в одной точке прямые и т.п.

Упр. 1. Сформулируйте двойственные теоремы к: а) теореме Дезарга; б) теореме Паппа.

Упр. 2. При полярных преобразованиях сохраняются двойные отношения.

«Аксиоматические» основы двойственности. Если определять проективную плоскость системой аксиом, то для каждой аксиомы будет верна двойственная ей. Ясно, что на евклидовой плоскости это неверно: любые две точки инцидентны некоторой прямой, но не любые две прямые инцидентны некоторой точке.

Алгебраические основы двойственности. Тождество $2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-5) \cdot 2 = 0$ означает, что точка $(3, 4, 2)$ лежит на прямой $(2, 1, -5)$, и одновременно, что точка $(2, 1, -5)$ лежит на прямой $(3, 4, 2)$. То есть всякое соотношение между точками и прямыми становится соотношением между прямыми и точками, если координаты точек считать координатами прямых, а координаты прямых – координатами точек. Видим, что «координатная» двойственность имеет место только для проективной плоскости, но не для евклидовой: в уравнении $ax + by + c = 0$ никакой симметрии между (a, b, c) и (x, y) нет.

Отметим, что *полярная двойственность* – более мощный инструмент, чем *проективная двойственность*. Ведь при этом появлятся возможность работать с одной окружностью: касательная переходит в точку касания, хорда – в точку пересечения касательных в концах этой хорды.

Упр. 3. Сформулируйте теорему, двойственную теореме Паскаля. Она называется *теоремой Брианшона*.

Упр. 4. Что утверждают теоремы, двойственные к:
а) теореме о полном четырехвершиннике;
б) теореме о поляре точки относительно пары прямых.
в) теореме о полярном свойстве секущей.

Окружность проективным преобразованием может быть переведена в эллипс, параболу или гиперболу. Следовательно, теоремы, справедливые для одной окружности (то есть сформулированные в терминах инцидентности и касания), будут справедливы и для произвольных коник. Это теоремы Паскаля и Брианшона, торема о бабочке в правильной формулировке.

Упр. 5. В любой ли выпуклый шестиугольник можно вписать эллипс?

Упр. 6. В четырехугольник вписаны два эллипса. Они пересекаются в четырех точках. Докажите, что следующие 4 прямые пересекаются в одной точке: диагонали четырехугольника и прямые, соединяющие противоположные точки пересечения.

Комбинаторная геометрия на плоскости. 22 июля

Бесконечная теорема Хелли. Пусть есть, возможно бесконечный, набор замкнутых выпуклых множеств на плоскости (в пространстве), по крайней мере одно из которых ограниченно. Тогда если любые три (четыре) из них имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

1. На окружности дана система (возможно бесконечная) дуг, причем длина каждой не больше половины окружности. Оказалось, что любые три имеют общую точку. Докажите, что все имеют общую точку.

2. Пусть F ограниченная выпуклая фигура на плоскости. Докажите, что в F найдется такая точка, что любая хорда, проходящая через эту точку, делится ей в отношении $\lambda : 1/2 \leqslant \lambda \leqslant 2$ (*т.е. эта точка является почти центром симметрии*).

3. Докажите, что в любую выпуклую фигуру на плоскости ширины 1 можно вписать круг радиуса $1/3$ (*теорема Бляшке*).

4. Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^3$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{3/8}$ (*теорема Юнга*).

Основное соображение. Если на плоскости задана линейная функция (то есть каждой точке (x, y) сопоставлено число $\ell(x, y) = ax + by + c$), то множество нулей этой функции есть или пустое множество, или прямая, или вся плоскость.

Пример. Дана точка X на основании равнобедренного треугольника. Через X перпендикулярно основанию проведена прямая, пересекающая боковые стороны или их продолжения в точках A и B. Докажите, что $XA + XB$ не зависит от X.

Ориентированное расстояние

Предложение. Ориентированное расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $ax + by + c = 0$ равно

$$\rho(ax + by + c = 0, (x_0, y_0)) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1. Докажите, что основания внешних биссектрис (неравнобедренного) треугольника лежат на одной прямой.

2. Грани правильного октаэдра раскрашены в черный и белый цвет (при этом любые две грани, имеющие общее ребро, раскрашены в разные цвета). Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей черных граней.

Что такое часовая стрелка?

Рассмотрим треугольник ABC. Мы часто говорим: его вершины обходятся по или же против часовой стрелки. Но в аксиомах плоскости «часовая стрелка» или что-то подобное не фигурирует!

Определение 1. *Ориентированным треугольником* $\overline{ABC}$ (о.т.) называется упорядоченная тройка точек, не принадлежащих одной прямой. При обозначении о.т. порядок его вершин определяется порядком их записи Треугольник можно превратить в о.т. шестью способами.

Определение 2. *Цепью*, соединяющей о.т. $\overline{ABC}$ и о.т. $\overline{A'B'C'}$, называется конечная последовательность о.треугольников, первым членом которой является о.т. $\overline{ABC}$, последним – о.т. $\overline{A'B'C'}$, такая, что каждые два соседних о.т. этой последовательности отличаются только одной вершиной, занимающей в обоих о.т. одно и то же место.

Предложение 1. Любые два о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$ можно соединить цепью.

Определение 3. Два о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{ABD}$ имеют *одинаковый обход*, если точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB. Если же точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB, то о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{ABD}$ имеют *противоположный обход*. Аналогично определяется одинаковый и противоположный обход о.т., отличающихся только вторыми или только первыми вершинами.

Определение 4. Если в цепи, соединяющей о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$, число пар соседних треугольников, имеющих противоположный обход, четное, то говорят, что о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C}$ имеют *одинаковую ориентацию*, если же это число нечетное, то *разную ориентацию*.

Предложение 2. Это определение корректно.

Предложение 2 докажем счетом в координатах, что делается в предложении 3.

Предложение 3. Пусть точки A, B, C, A', B', C' имеют в некоторой декартовой системе координат координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_1', y_1'), (x_2', y_2'), (x_3', y_3')$ соответственно. Тогда о.т. $\overline{ABC}$ и $\overline{A'B'C'}$ имеют одинаковую(разную) ориентацию $\Rightarrow$ определители $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} x_2' - x_1' & y_2' - y_1' \\ x_3' - x_1' & y_3' - y_1' \end{vmatrix}$ одного(разных) знака.

Замечание. Получается, что эти совпадение(различие) знаков этих определителей *не зависит* от выбора декартовой системы координат!

Следствия. а) Ориентация треугольника не меняется при циклической перестановке вершин.

б) Ориентация треугольника меняется при центральной симметрии.

в) Ориентация треугольника не меняется при параллельном переносе.

г) Ориентация треугольника не меняется при осевой симметрии.

Определение 5. *Ориентированная плоскость* – это плоскость, где фиксирован о.треугольник. Если некий треугольник имеют одинаковую ориентацию с фиксированным, то говорят, что он *ориентирован положительно*, иначе – *отрицательно*.

Если на плоскости есть декартова система координат, то она индуцирует ориентацию фиксированием базисного треугольника $\overline{OE_1E_2}$, где O – начало координат, E_1, E_2 – единичные точки осей Ox, Oy соответсвенно. Тем самым все системы координат делятся на два класса.

Предложение 4. Если точки A, B, C имеют в некоторой декартовой системе координат координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ соответственно, то о.т. $\overline{ABC}$ ориентирован положительно (ориетация плоскости индуцирована системой координат) $\iff \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} > 0.$

Что такое ориентированная площадь треугольника?

Определение 1. *Ориентированная площадь о.т.* на ориентированной плоскости – это: площадь для положительно ориентированных треугольников, и минус площадь для отрицательно ориетированных треугольников.

Теорема 1. Если точки A, B, C имеют в некоторой декартовой системе координат координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ соответственно, то $S_{or}(\overline{ABC}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

Замечание. О.площадь о.треугольника, натянутого на вектора (a, b) и (c, d), равна $1/2(ad - bc)$.

Линейность ориентированной площади

Если зафиксировать точки A, B, то функция $f(X) = S_{or}(ABX)$ является линейной функцией. В каждой из двух полуплоскостей относительно AB обычная площадь тоже является линейной функцией (но не на всей плоскости!).

3. Диагонали отрезают от выпуклого пятиугольника 5 треугольников (некоторые части отрезаются дважды). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше площади пятиугольника.

Утверждение. Точка X делит отрезок CD в отношении $p : q$ (не обязательно $p, q > 0$). Тогда

$$S_{or}(ABX) = \frac{q}{p+q} S_{or}(ABC) + \frac{p}{p+q} S_{or}(ABD).$$

4. Середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.

5. В выпуклом четырехугольнике середины диагоналей и середина отрезка с концами в точках пересечения противоположных сторон, лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*). А в невыпуклом?

Для самостоятельного решения

6. В описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой (*прямая Ньютона*).

7. Дан четырехугольник. В одной паре его противоположных углов провели внешние биссектрисы – получили точку их пересечения. Потом в другой паре – получили вторую точку. Потом противоположные стороны продлили до пересечения, получили два угла – по ним аналогично построили третью точку. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

8. На плоскости даны несколько черных и белых отрезков. Берем точку и строим треугольники с вершинами в этой точке и основаниями – данными отрезками. Рассмотрим ГМТ таких точек, что сумма черных (обычных) площадей равна сумме белых. Докажите, что это ГМТ почти всегда покрывается несколькими прямыми. Скольких прямых гарантировано хватит? Почему покрывается почти всегда, но не всегда?

9. На высотах (но не на продолжениях высот) остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1, отличные от точки пересечения высот H, такие, что сумма площадей треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1 равна площади треугольника ABC. Докажите, что это выполняется тогда и только тогда, когда окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через H.