*Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области*
*Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.*
10 класс (профи) • 9 июля

# Полярное преобразование.

**Опр.** $k$ – окружность с центром $O$. *Полярой* точки $P \neq O$ относительно окружности $k$ называется прямая $p$, проходящая через точку $P'$ – образ точки $P$ при инверсии относительно $S$, и перепендикулярная прямой $OP$. Точка $P$ называется *полюсом* прямой $p$ относительно $S$.

**Лемма о поляре.** Пусть $p$ — поляра $P$, $q$ — поляра $Q$. Тогда $P \in q \iff Q \in p$.

**Следствие 1.** Если $a = \pi(A)$, $b = \pi(B)$, то $AB = \pi(a \cap b)$ (при некоторых ограничениях).

**Следствие 2.** $A$, $B$, $C$ — точки плоскости (не равные $O$), $a$, $b$, $c$ — их поляры. Точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой $\iff$ прямые $a$, $b$, $c$ проходят через одну точку или параллельны.

**Сущность подхода.** При помощи полярного преобразования доказывают, что
– три точки лежат на одной прямой;
– три прямые пересекаются в одной точке или параллельны;
– две прямые перпендикулярны.

**1.** $I$ – центр вписанной окружности треугольника $ABC$, которая касается сторон $AB, BC, CA$ в точках $M, N, P$. Пусть $PN$ и $AB$ пересекаются в точке $K$. Докажите, что $CM \perp IK$.

**2.** В какую теорему перейдет при полярном преобразовании теорема «опирающиеся на одну дугу углы равны»?

---

**Полярное свойство касательных**. Через точку $P \neq O$ проведена секущая $XY$. Тогда касательные к окружности в точках $X$ и $Y$ пересекаются на поляре точки $P$ (или параллельны этой поляре).

**Полярное свойство секущих**. Через точку $P \neq O$ проведены две секущих, которые пересекают окружность в точках $X_1, Y_1$ и $X_2, Y_2$. Тогда прямые $X_1X_2$ и $Y_1Y_2$ пересекаются на поляре точки $P$ (или параллельны этой поляре).

## Для самостоятельного решения

**3.** Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в $P$, $AB$ и $CD$ – в $R$, $BC$ и $DA$ – в $Q$.

**Гармонический четырехугольник.** Пусть $ABCD$ вписан, и касательные в вершинах $A$ и $C$ пересекаются на прямой $BD$ или параллельны $BD$. Докажите, что касательные в $B$ и $D$ пересекаются на прямой $AC$ или параллельны $AC$.

**Вписанный четырехугольник.** Докажите, что если $ABCD$ вписан в окружность с центром $O$, то $O, P, Q, R$ – ортоцентрическая четверка точек (*т.Брокара*).

**Описанный четырехугольник.** Пусть $ABCD$ описан. $K, L, M, N$ – точки касания сторон $AB, BC, CD, DA$ соответственно. Прямые $KL$ и $MN$ пересекаются в $S$, $LM$ и $NK$ – в $T$. Тогда
а) $Q, R, S, T$ лежат на одной прямой;
б) $AC, BD, KM, LN$ пересекаются в одной точке.

**Вписанный или описанный четырехугольник.** Пусть $ABCD$ а) вписан в окружность $S$; б) описан вокруг окружности $S$. Докажите, что перпендикуляр из центра $S$ на $QR$, проходит через $P$.

**Вписанный и описанный четырехугольник.** Пусть $ABCD$ описан около окружности $\omega$ с центром $I$ и вписан в окружность $\Omega$ с центром $O$. Тогда
а) $O, I, P$ лежат на одной прямой.
б) При фиксированных $\omega, \Omega$ и меняющихся $ABCD$ точка $P$ и прямая $QR$ постоянны.

**4.** В какую теорему при полярном преобразовании относительно описанной окружности перейдет теорема «медианы треугольника пересекаются в одной точке»?

**5.** Точка $O$ не лежит на сторонах и их продолжениях треугольника $ABC$. $A_1$ – точка пересечения прямой $BC$ с перпендикуляром к $OA$, проходящим через точку $O$. Аналогично определяются точки $B_1$, $C_1$. Докажите, что точки $A_1, B_1, C_1$ лежат на одной прямой.

**6.** $I$ – центр вписанной в треугольник $ABC$ окружности. Прямая, проходящаячерез $I$ перпендикулярно $AI$, пересекает $BC$ в точке $A_1$; аналогично определяется точка $C_1$. Прямые $AA_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $K$. Докажите, что $KI \perp AC$.

**7.** $S$ – вписанная окружность треугольника $ABC$, которая касается сторон $AB, BC, CA$ в точках $X$, $Y$, $Z$. Окружность $S_A$ проходит через точки $B$, $C$ и касается окружности $S$ в точке $A_1$. Аналогично определяются точки $B_1$ и $C_1$. Докажите, что

1) прямые $A_1Y$, $B_1Z$, $C_1X$ пересекаются в одной точке;

2) прямые $AA_1$, $BB_1$, $BC_1$ пересекаются в одной точке.

---

**8.** (Тест Роршаха) Посмотрите на картинку и расскажите, что Вы видите на ней.