Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 5 июля

Степенные последовательности.

Степенью вершины графа называется количество выходящих из вершины ребер. Мы используем экспоненциальную запись невозрастающих целочисленных последовательностей: a^k означает, что k последовательных членов последовательности равны a.

1. Даны целые положительные числа n; d_1, d_2, ..., d_n.

(a) При каких условиях существует граф с n вершинами (возможно, имеющий петли и кратные ребра), из которых выходит d_1, d_2, ..., d_n ребер, соответственно?

(b) То же, если граф не может иметь кратных ребер (но, возможно, имеет петли).

(c) То же, если граф не может иметь петель (но, возможно, имеет кратные ребра).

(d)* То же, если граф не может иметь ни петель, ни кратных ребер.

Основной вопрос для серии состоит в том, чтобы определить, какие последовательности являются степенными, то есть представляют последовательность степеней вершин некоторого графа без петель и кратных ребер (задача 1 (d)). В дальнейшем под графом понимается граф без петель и кратных ребер.

2. Невозрастающую последовательность из n положительных целых чисел будем называть *правильной*, если первый ее член не превосходит $n-1$, а сумма всех членов четна. Докажите, что степенная последовательность является правильной.

3. Являются ли степенными последовательности (a) $(4^3, 1^6)$, (b) $(6^4; 2^3)$, (c) $(5^3; 3^3)$, (d) $(18^{10}; 12^3; 6^8)$, (e) $(15^8; 10^6; 3^4)$?

4. Докажите, что при любых $0 \leqslant k \leqslant n$ таких, что kn — четное, существует граф на n вершинах, степени которого равны k.

5. Докажите, что для степенной последовательности d_1, ..., d_n выполнены неравенства:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} \qquad (1)$$

для любого $1 \leqslant k \leqslant n$.

6. Пусть a, b, c, d — различные вершины графа, причем (ab), (cd) — ребра, а (ac), (bd) — не ребра. Назовем обменом преобразование графа, состоящее в удалении р?бер (ab), (cd) и добавлении р?бер (ac), (bd). Пусть G_1, G_2 — два графа с одинаковыми последовательностями степеней $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$. Докажите, что обменами можно перевести граф G_1 в граф G_2.

7. Докажите, что последовательность является степенной тогда и только тогда, когда она правильная и выполняются неравенства (??).

8. Докажите, что если сумма членов правильной последовательности из n чисел равна $2(n-1)$, то существует дерево, для которого данная последовательность является последовательностью степеней вершин.

Основная теорема. Правильная последовательность d_1, d_2, ..., d_n является степенной тогда и только тогда, когда выполняются неравенства (??).

Доказательство. Необходимость тривиальна и доказана в задаче 5. Осталось обосновать достаточность.

Разрешим элементам правильных последовательностей в доказательстве быть нулями. Тем не менее, не умаляя общности, можно считать, что в рассматриваемой последовательности $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \quad d_n \neq 0$.

Доказательство ведем индукцией по сумме элементов последовательности $\sum d_i$.

Случай когда все d_i равны был рассмотрен в задаче 4. Пусть теперь не все d_i равны и $t = \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$. «Соединим ребром» вершину наибольшей степени d_t и вершину наименьшей степени d_n (то есть отнимем по единичке от этих степеней). Получим новую правильную последовательность

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad c_i = \begin{cases} d_i, & i \neq t, n, \\ d_i - 1, & i = t, n. \end{cases} \qquad (2)$$

Докажем, что если последовательность c — степенная, то и d — степенная.
Упражнение: докажите это.

Обозначим $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i$, $S'_k = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i$. Нужно доказать неравенства:

$$S'_k \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}. \tag{3}$$

При $k \geqslant t$ имеем:

$$S'_k = S_k - 1 \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} - 1 \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}.$$

Для $k \leqslant t-1$ получаем, что $S'_k = S_k = kd_k$. Тогда при $d_k \leqslant k-1$, неравенство (??) тривиально. Рассмотрим теперь два случая:
1) $d_k = k$
Тогда $\min\{k, c_i\} = c_i$, при $i \geqslant k+1$. Используя (??), получаем:

$$\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\} = \sum_{i=k+1}^{n} d_i - 2 = d_{k+1} + \left(\sum_{i=k+2}^{n} d_i - 2\right). \tag{4}$$

Заметим, что $d_{k+1} = d_k = k$ и $\sum\limits_{i=k+2}^{n} d_i \geqslant 2$. Последнее неравенство очевидно, если $k+2 < n$. Если же $k+2 = n$, то $d = ((n-2)^{(n-1)}, d_n)$ и $d_n \geqslant 2$ в силу четности суммы d_i. Итого, из (??):

$$k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\} \geqslant k(k-1) + k = k^2 = S'_k.$$

2) $d_k \geqslant k+1$
Если $d_n \geqslant k+1$, то $\min\{k, d_i\} = \min\{k, c_i\} = k$ при $i \geqslant k+1$ и неравенство (??) сразу следует из аналогичного для S_k.
Теперь $d_n \leqslant k$. Имеем $\min\{k, c_i\} = \min\{k, d_i\}$ при $k+1 \leqslant i < n$ и $\min\{k, c_n\} = \min\{k, d_n\} - 1$. В нашем случае $S'_k = S_k$, поэтому достаточно показать, что

$$S_k \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\} = k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} - 1.$$

Пусть не так. Тогда

$$S_k = k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}.$$

Учитывая, что $d_{k+1} = d_k \geqslant k+1$, получаем

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k+1)d_k = \frac{k+1}{k} S_k = (k+1)(k-1) + \frac{k+1}{k} \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} = \\ &= (k+1)(k-1) + (k+1) + \frac{k+1}{k} \sum_{i=k+2}^{n} \min\{k, d_i\} > (k+1)k + \sum_{i=k+2}^{n} \min\{k+1, d_i\}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено, так как при всех $k+2 \leqslant i < n$ имеем нестрогое неравенство и при $i = n$ строгое. Получилось, что последовательность d не удовлетворяла неравенствам. Противоречие.