Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 12 июля

Матбой-междусобой.

1. Натуральные числа a и b таковы, что $(a^2+b^2) \vdots (ab+1)$. Докажите, что $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ — точный квадрат.

2. Докажите, что граф любого выпуклого многогранника трехсвязен.

(задача заменена на следующую) Докажите, что для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ существует многочлен $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ такой, что $Q(x^{100}) \vdots P(x)$.

3. Докажите, что из $2n-1$ иррационального числа можно выбрать n чисел так, что сумма любых нескольких выбранных чисел из этих n будет иррациональной.

4. Докажите, что $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ не представляется в виде $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ при рациональных a, b, c.

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны соответсвенно точки D и E так, что $DE \| BC$. Внутри треугольника ADE отмечена точка P. Пусть F — точка пересечения PB и DE, а G — точка пересечения PC и DE. Пусть Q — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников PGD и PFE. Докажите, что точки A, P, Q лежат на одной прямой.

6. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$2x_1x_2^2 - x_2x_3^2 + 2x_3x_4^2 - x_4x_5^2 + 2x_5x_6^2 - x_6x_1^2$$

при $x_1, x_2, \ldots x_6 \in [0,1]$?

7. В окружность ω вписан четырехугольник $ABCD$. Касательные к ω, проведенные в точках A и D, пересекаются в точке P, при этом дуга $ABCD$ лежит вне треугольника ADP. На луче BA нашлась точка K, такая что $PK \| AC$, а на луче CD — точка N, такая что $PN \| BD$. Докажите, что точки B, C, K, N лежат на одной окружности.

8. Докажите, что функция $F(x,y) = 1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3$ не представляется в виде $f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y) + f_3(x)g_3(y)$, где $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – произвольные функции.