Проективная двойственность.

Определим полярное преобразование проективной плоскости. Будем считать, что центр окружности полярно соответствует бесконечно удаленой прямой. Точка на бесконечно удаленной прямой полярно соответствует прямой, проходящей через центр окружности, перпендикулярно направлению, задаваемому этой прямой.

При таком определении сохраняется инцидентность точек и прямых на проективной плоскости (уже без всяких ограничений!).

ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ. *Если верно некоторое утверждение об инцидентности точек и прямых проективной плоскости, то верно и утверждение, получающееся из него заменой слов «точка» и «прямая».*

Полезен словарик: точка $\leftrightarrow$ прямая, трехвершинник $\leftrightarrow$ трехсторонник, четырехвершинник $\leftrightarrow$ четырехсторонник, лежит на $\leftrightarrow$ проходит через, точка пересечения двух прямых $\leftrightarrow$ прямая, проходящая через две точки, коллинеарные точки $\leftrightarrow$ пересекающиеся в одной точке прямые и т.п.

Упр. 1. Сформулируйте двойственные теоремы к: а) теореме Дезарга; б) теореме Паппа.

Упр. 2. При полярных преобразованиях сохраняются двойные отношения.

«Аксиоматические» основы двойственности. Если определять проективную плоскость системой аксиом, то для каждой аксиомы будет верна двойственная ей. Ясно, что на евклидовой плоскости это неверно: любые две точки инцидентны некоторой прямой, но не любые две прямые инцидентны некоторой точке.

Алгебраические основы двойственности. Тождество $2\cdot3+1\cdot4+(-5)\cdot2=0$ означает, что точка $(3,4,2)$ лежит на прямой $(2,1,-5)$, и одновременно, что точка $(2,1,-5)$ лежит на прямой $(3,4,2)$. То есть всякое соотношение между точками и прямыми становится соотношением между прямыми и точками, если координаты точек считать координатами прямых, а координаты прямых – координатами точек. Видим, что «координатная» двойственность имеет место только для проективной плоскости, но не для евклидовой: в уравнении $ax+by+c=0$ никакой симметрии между (a,b,c) и (x,y) нет.

Отметим, что *полярная двойственность* – более мощный инструмент, чем *проективная двойственность*. Ведь при этом появлятся возможность работать с одной окружностью: касательная переходит в точку касания, хорда – в точку пересечения касательных в концах этой хорды.

Упр. 3. Сформулируйте теорему, двойственную теореме Паскаля. Она называется *теоремой Брианшона.*

Упр. 4. Что утверждают теоремы, двойственные к:

а) теореме о полном четырехвершиннике;

б) теореме о поляре точки относительно пары прямых.

в) теореме о полярном свойстве секущей.

Окружность проективным преобразованием может быть переведена в эллипс, параболу или гиперболу. Следовательно, теоремы, справедливые для одной окружности (то есть сформулированные в терминах инцидентности и касания), будут справедливы и для произвольных коник. Это теоремы Паскаля и Брианшона, торема о бабочке в правильной формулировке.

Упр. 5. В любой ли выпуклый шестиугольник можно вписать эллипс?

Упр. 6. В четырехугольник вписаны два эллипса. Они пересекаются в четырех точках. Докажите, что следующие 4 прямые пересекаются в одной точке: диагонали четырехугольника и прямые, соединяющие противоположные точки пересечения.