Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 19 июля

Линейные рекурренты — 1.

Задачи, приводящие к рекуррентам.

1) Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы нескольких нечетных слагаемых? (Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаем разными)

2) Сколькими способами в ряду $1, 2, \ldots, n$ можно выбрать несколько элементов, никакие три из которых не идут подряд?

Фиксируем линейное рекуррентное уравнение (порядка k)

$$x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 x_n.$$

Упр. 1. а) Решения этого уравнения (то есть последовательности) образуют линейное пространство относительно естественных операций.

б) Предъявите k ЛНЗ последовательностей (=векторов), через которые все остальные последовательности выражаются в виде линейной комбинации.

Теорема 1. Решения ЛРУ образуют k-мерное пространство (над $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \ldots$).

Вопрос. Рекурренты $x_{n+2} = x_{n+1}$ и $x_{n+1} = x_n$ совпадают. А по теореме 1 у них разные размерности пространства решений. В чем дело?

Ключевая идея. Попробуем найти решения, которые являются *геометрическими прогрессиями(!!!)* (разумно искать только знаменатели прогрессий λ_i, не правда ли?). Из какого уравнения находятся эти знаменатели λ_i?

Определение. Полученное уравнение называется *характеристическим уравнением* рекуррентной последовательности.

Теорема 2. Геометрические прогрессии с попарно разными знаменателями ЛНЗ.

Если у характеристического уравнения нет кратных корней...

Основная теорема. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – **различные** корни характеристического уравнения, то любое решение рекуррентного уравнения имеет вид $x_n = c_1\lambda_1^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$, где константы c_i определены однозначно.

Замечание 1. В случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, помимо геометрических прогрессий в базис *должны* входить и другие последовательности. Почему?

Замечание 2. Как правило λ_i и c_i лежат не в том поле, где коэффициенты, а в *большем* поле.

Упр. 2. Найдите точные и асимптотические формулы в задачах из начала листочка.

Для самостоятельного решения

1. а) Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ с условием $3f(n) - 2f(f(n)) = n$.

б) а если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$?

в) докажите, что ответ изменится, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Решите функциональное уравнение: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(f(x)) + f(x) = 6x$.

3. а) Рассмотрим рекуррентное уравнение $x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 x_n + b$. Докажите, что его решения являются линейными рекуррентами порядка $k+1$.

б) Решения уравнения $x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 x_n + b(n)$ устроены так: каждое решение есть сумма решения уравнения с $b(n) = 0$ и одного любого фиксированного решения.

4. $x_1 = 0, x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$. Докажите, что все члены последовательности – целые.