

Матбой профи10 — профи9

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , точка M — середина AB . На прямой AB выбраны точки S_1 и S_2 . Касательные, проведенные из S_1 к окружности ω_1 касаются ее в точках X_1 и Y_1 , а касательные из S_2 к ω_2 касаются ее в точках X_2 и Y_2 . Докажите, что если прямая X_1X_2 проходит через M , то прямая Y_1Y_2 тоже проходит через M .

2. На каждой клетке бесконечной шахматной доски написано наименьшее количество ходов, за которое конь может дойти от этой клетки до данной клетки O . Назовем клетку *особой*, если на ней написано число 100, а на всех соседних с ней (по стороне) клетках — 101. Сколько существует особых клеток?

3. На отрезке натурального ряда имеется ровно 10 четвертых степеней и ровно 100 кубов. Докажите, что на этом отрезке не менее 2000 точных квадратов.

4. Все числа, большие 1, покрашены в два цвета (оба цвета использованы). Докажите, что существуют такие вещественные a и b , что числа $a + b$ и ab покрашены в разные цвета.

5. Окружность, проходящая через вершины A и B вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает его диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Прямые AF и BC пересекаются в точке P , а прямые BE и AD — в точке Q . Докажите, что PQ параллельно CD .

6. Дано слово более чем из 10 букв, в котором любые две соседние буквы различны. Докажите, что можно поменять местами две соседние буквы так, чтобы полученное слово не было периодическим (не разбивалось на одинаковые подслова).

7. В графе k ребер и T треугольников. Докажите, что $9T^2 \leq 2K^3$.

8. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойством: $f(x^3 + y^3) = xf(x^2) + yf(y^2)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

9. В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше $1 + x$ г. При каком наибольшем значении x заведомо можно разложить весь изюм на две чаши весов так, чтобы они показали разность, не превосходящую 1 г?

10. Можно ли так покрасить точки трёхмерного пространства в 2011 цветов, чтобы на каждом отрезке в пространстве встречались все 2011 цветов?