Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 19 июля

Теорема Хелли.

Определение. Множество точек называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит весь отрезок между ними.

Определение. *Выпуклой оболочкой* множества A, называется минимальное по включению выпуклое множество, содержащее A. Выпуклую оболочку множества A будем обозначать $\mathrm{Conv}(A)$.

Утверждение. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — конечное множество точек. Тогда $\mathrm{Conv}(A)$ это множество точек вида $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$, где α_i — неотрицательные числа с суммой 1.

Теорема Хелли для плоскости. Если любые 3 из N выпуклых множеств на плоскости имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

Теорема Хелли для пространства. Если любые 4 из N выпуклых множеств в пространстве имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдется точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его последовательных вершин.

2. На плоскости дано конечное число вертикальных отрезков.

a) Любые три из них можно пересечь одной прямой. Докажите, что все их можно пересечь одной прямой.

b) Любые четыре из них можно пересечь параболой. Докажите, что все их можно пересечь параболой.

3. Докажите, что выпуклый многоугольник диаметра 1 можно поместить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (*это утверждение называется теоремой Юнга*).

4. На плоскости дано n точек. Докажите, что существует такая точка O, что по любую сторону от любой прямой, проходящей через O лежит не более $\frac{2n}{3}$ этих точек (точки, лежащие на прямой, не учитываются).

Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 19 июля

Теорема Хелли.

Определение. Множество точек называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит весь отрезок между ними.

Определение. *Выпуклой оболочкой* множества A, называется минимальное по включению выпуклое множество, содержащее A. Выпуклую оболочку множества A будем обозначать $\mathrm{Conv}(A)$.

Утверждение. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — конечное множество точек. Тогда $\mathrm{Conv}(A)$ это множество точек вида $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$, где α_i — неотрицательные числа с суммой 1.

Теорема Хелли для плоскости. Если любые 3 из N выпуклых множеств на плоскости имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

Теорема Хелли для пространства. Если любые 4 из N выпуклых множеств в пространстве имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдется точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его последовательных вершин.

2. На плоскости дано конечное число вертикальных отрезков.

a) Любые три из них можно пересечь одной прямой. Докажите, что все их можно пересечь одной прямой.

b) Любые четыре из них можно пересечь параболой. Докажите, что все их можно пересечь параболой.

3. Докажите, что выпуклый многоугольник диаметра 1 можно поместить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (*это утверждение называется теоремой Юнга*).

4. На плоскости дано n точек. Докажите, что существует такая точка O, что по любую сторону от любой прямой, проходящей через O лежит не более $\frac{2n}{3}$ этих точек (точки, лежащие на прямой, не учитываются).