Теорема Менгера.

Определения. 1) Пусть a, b – несмежные вершины графа G. Множество S вершин графа, не содержащее a и b, называется ab-*отделяющим*, если a и b лежат в разных компонентах связности, полученного удалением из G вершин S.

2) Пусть a, b – вершины графа G. Множество T ребер графа называется ab-*отделяющим*, если a и b лежат в разных компонентах связности графа, полученного удалением из G ребер T.

Замечания. 1) Эти определения и последующие доказательства очевидным образом переносятся на ориентированные графы.

2) При исследовании реберной отделимости мы рассматриваем графы с кратными ребрами. Для вершинной отделимости кратные (ориентированные) ребра не важны, поэтому можно считать, что их нет.

Теорема Менгера в вершинной форме, 1927 г. Максимальное число простых цепей, соединяющих несмежные вершины a и b графа G, и не имеющих общих внутренних вершин, равно минимальной мощности ab-отделяющего множества вершин.

Доказательство теоремы Менгера:

Пусть размер минимального ab-отделяющего множества это k. Очевидно, что максимальное количество цепей, соединяющих a и b, и не имеющих общих внутренних вершин, не больше k. Надо доказать неравенство в другую сторону. Доказательство будем вести индукцией по количеству вершин графа G. База очевидна.

1. Докажите переход в случае, когда существует вершина v, смежная и с a и с b одновременно.

2. Докажите переход в случае, когда существует минимальное ab-отделяющее множество S, не все вершины которого смежны с a, и не все вершины которого смежны с b.

Указание: докажите, что есть k путей от a до S и k путей от b до S, рассмотрев «меньшие» чем G графы.

3. Докажите переход в случае, когда существует вершина $u \neq a, b$, не лежащая ни в одном минимальном ab-отделяющем множестве.

4. Докажите переход во всех остальных случаях.

Для самостоятельного решения

Определения. 1) Связный граф, в котором более k вершин, и при этом удаление любых $k-1$ вершин не ведет к потере связности, называется k-*связным.*

2) Связный граф (с кратными ребрами), в котором более 1 вершины, и при этом удаление любых $k-1$ ребер не ведет к потере связности, называется *реберно* k-*связным.*

Выведите из вершинной теоремы Менгера

5. Теорему Уитни (1932 г.): Для любых двух вершин x, y k-связного графа существует не менее k путей из x в y, не имеющих общих внутренних вершин.

6. Теорему Менгера в реберной форме (Форд, Фалкерсон, 1955 г.): Максимальное число простых реберно-непересекающихся цепей, соединяющих различные вершины a и b графа G, равно минимальной мощности ab-отделяющего множества ребер.