Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 16 июля

Центральное проектирование. Проективная плоскость.

Определение проекции плоскости π на π' из точки $O \notin \pi \cup \pi'$.

Если π и π' не параллельны, то на них есть *исключительные (выделенные)* прямые y и y'.

При центральной проекции образом прямой [без точки на y] является прямая [без точки на y']. Верно и обратное.

Вопрос: верно ли, что образом отрезка является отрезок? [может быть отрезок, луч, два луча – нарисовать]. Следовательно, образом треугольника может быть не треугольник.

Как связана параллельность с центральным проектированием?

а) Пересекающиеся не на y прямые переходят в пересекающиеся.

б) Пересекающиеся на y прямые переходят в параллельные.

в) Параллельные прямые, параллельные y, переходят в параллельные.

г) Параллельные прямые, не параллельные y, переходят в пересекающиеся на y' прямые.

Дабы устранить все осложнения, связанные с особым положением выделенных прямых, сделаем с плоскостью следующее.

Присоединим к каждой прямой ровно одну точку, называемую *бесконечно удаленной точкой*; при этом две бесконечно удаленные точки совпадают тогда и только тогда, когда они соответствуют параллельным прямым. Множество всех бесконечно удаленных точек назовем *бесконечно удаленной прямой.* Тогда через любые две точки проходит ровно одна прямая и любые две прямые пересекаются (следовательно, ровно в одной точке). Пополненную таким образом евклидову плоскость будем называть *проективной плоскостью* и обозначать Π. Термин «бесконечно удаленная точка» имеет прозрачный геометрический смысл.

Определим теперь центральное проектирование одной проективной плоскости на другую. Для «обычных» точек оставим все как есть. Далее, сопоставим точке $M \in y \subset \pi$ некоторую бесконечно удаленную точку плоскости π'. А именно, M определяет *пучок* проходящих через нее прямых, они проектируются в параллельные, будем считать, что M проектируется в бесконечно удаленную точку, соответствующую этому семейству параллельных прямых. Аналогично сопоставим каждой бесконечно удаленной точке плоскости π точку на y'. При таком определении центральное проектирование проективных плоскостей является биекцией. Выделенная прямая плоскости π – это прообраз бесконечно удаленной прямой плоскости π'.

Замечание: для параллельных (евклидовых) плоскостей, центральное проектирование соответствующих им проективных плоскостей определяется аналогично, и оно тоже является биекцией. Аналогично определяется параллельное проектирование проективных плоскостей, оно переводит бесконечно удаленную прямую в бесконечно удаленную.

Вопрос: верно ли, что при центральном проектировании проективных плоскостей прямые переходят в прямые? [а разве это не было доказано ранее? Нет, не было!] Да, верно.

Определим *проективное преобразование* проективной плоскости Π. Для этого центрально или параллельно спроектируем плоскость π на плоскость Π_1, затем Π_1 на Π_2 и т.д., в конце спроектируем Π_k на Π. Получим биекцию проективной плоскости на себя. Ясно, что при этом прямые (проективной плоскости) перешли в прямые. Биекция проективной плоскости Π, при которой прямые переходят в прямые, называется *проективным преобразованием* проективной плоскости Π. Множество проективных преобразований плоскости образует *группу* $PGL(3, \mathbb{R})$.

Возникает вопрос, любое ли проективное преобразование является композицией центральных и параллельных проектирований и преобразований подобия? И еще вопрос: верно ли, что любые четыре точки, никакие три из которых не коллинеарны, можно подходящим проективным преобразование перевести в любые четыре точки, никакие три из которых не коллинеарны? Если да, то единственно ли такое преобразование? Ответы на эти вопросы даются следующими теоремами, которые идут в порядке убывания важности.

Теорема 1. *Существует проективное преобразование, переводящее четыре точки* $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \Pi$*, никакие три из которых не коллинеарны, в заданные четыре точки* $B_1, B_2, B_3, B_4 \in \Pi$*, никакие три из которых не коллинеарны.*

Теорема 2. *Такое проективное преобразование единственно.*

Теорема 3. *Пусть* f *– проективное преобразование, и прямая* y *переходит в бесконечно удаленную. Тогда если точки* A, B, C, D *лежат на (евклидовой части) прямой, параллельной* y*, то* $f(A)f(B)/f(C)f(D) = AB/CD$ *(имеются в виду ориентированные отношения длин).*

Теорема 4. *Любое проективное преобразование является композицией центральных и параллельных проектирований и преобразований подобия.*

Определим двойное отношение точек на прямой из проективной плоскости. Положим $(A, B, C, D_\infty) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Аналогично, когда одна из других точек является бесконечно удаленной. Еще надо определить двойное отношение четырех точек на бесконечно удаленной прямой. Теперь надо показать, что при центральном проектировании прямой на прямую оно сохраняется (раньше мы показали, что сохраняется для «обычных» точек).

Ясно, что при центральной проекции прямая проецируется на прямую, и все это происходит в одной плоскости. Выше мы показали, что при этом сохраняется двойное отношение точек на прямой. Следовательно, если верна теорема 4, то двойное отношение сохраняется при произвольных проективных преобразованиях. Но мы докажем это минуя теорему 4, ведь ее мы вообще доказывать не собираемся ввиду маловажности! Отметим, что сохранение гармонических отношений следует из теоремы о полном четырехвершиннике.

Теорема 5. *При проективных преобразованиях сохраняются двойные отношения точек, лежащих на одной прямой.*

Замечание. Когда мы говорим о четырехугольнике, то подразумеваем или четырехвершинник, или четырехсторонник. Аналогично, под треугольником подразумеваем трехвершинник или трехсторонник.

Доказательство теорем отложим, при решении задач ими можно пользоваться.

Пример. Докажите обе части теоремы о полном четырехвершиннике.

Для самостоятельного решения

1. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, точки A_2, B_2, C_2 тоже лежат на одной прямой. Докажите, что точки пересечения A_1B_2 и A_2B_1, B_1C_2 и B_2C_1, C_1A_2 и C_2A_1 лежат на одной прямой (*т. Паппа*). Как выглядит т. Паппа, если точки A_1, B_1, C_1 лежат на беск. удаленной прямой?

2. Трехвершинники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ таковы, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке C, аналогично определяются точки A и B. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой (*т. Дезарга*). [Если два трехвершинника имеют центр перспективы, то они имеют ось перспективы]

3. Даны две прямые и не лежащая на них точка P. Через P проводятся пары различных прямых, пересекающих данные в точках A и C, B и D. Докажите, что точки пересечения прямых AD и BC образуют прямую, проходящую через точку пересечения данных прямых (*поляра точки относительно пары прямых*).

4. Докажите, что при проективном преобразовании гармонические четверки точек переходят в гармонические.

5. Даны треугольник ABC и прямая l. Обозначим через A_1, B_1, C_1 середины отрезков, высекаемыми на прямой l углами A, B, C (или смежными к ним), а через A_2, B_2, C_2 – точки пересечения AA_1 и BC, BB_1 и AC, CC_1 и AB. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

6. а) На плоскости даны четыре прямые общего положения. Они образуют четыре треугольника. Докажите, что ортоцентры этих треугольников лежат на одной прямой (*прямая Обера*).

б) Докажите, что прямая Обера перпендикулярна *прямой Гаусса.*

7. На сторонах угла XOY отмечены точки A_1, B_1 и A_2, B_2, соответственно. Прямые A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются в точке K. Точки C, D построены так, что $OC \parallel A_1A_2$, $OD \parallel B_1B_2$, а четверки точек O, C, B_1, B_2 и O, D, A_1, A_2 лежат (каждая) на одной окружности. Докажите, что K лежит на прямой CD.

8. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника проведены четыре прямые, пересекающие его противоположные стороны в точках K и K', L и L', M и M', N и N' (возможны разные конфигурации). Прямые KM и LN, $K'M'$ и $L'N'$ пересекаются в точках P и P'. Докажите, что точки P, O, P' лежат на одной прямой.

9. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC выбрана точка P. Прямые AP и CP пересекают продолжения сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а прямая BP пересекает сторону AC в точке B_1. Прямые C_1B_1 и A_1B_1 пересекают стороны BC и AB в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения симедиан треугольника ABC.

К теореме Дезарга.

10. Докажите обратную теорему Дезарга.

11. Докажите теорему Дезарга для случая, когда плоскости $(A_1A_2A_3)$ и $(B_1B_2B_3)$ различны. Выведите из этого плоскую теорему Дезарга.

12. опознайте теорему Дезарга в следующих утверждениях:

а) медианы треугольника пересекаются в одной точке;

б) вторая часть теоремы о полном четырехвершиннике;

в) если трапеция вписана в четырехугольник так, что ее основания параллельны одной из диагоналей четырехугольника, то продолжения ее боковых сторон пересекаются на прямой, содержащей другую диагональ.