Блоки и точки сочленения.

Определения. 1) Вершина v связного графа G называется *точкой сочленения*, если при удалении вершины v граф G становится несвязным. Граф G называется *двусвязным*, если в нем > 2 вершин, и нет точек сочленения.

2) Ребро e связного графа G называется *мостом*, если при удалении ребра e граф G становится несвязным. Граф G называется *реберно-двусвязным*, если в нем > 1 вершины, и нет мостов.

Упр. 1. Все двусвязные(реберно двусвязные) графы получаются из цикла по алгоритму дорисовывания ушей: если на очередном шаге нарисован какой-то граф, то дорисовываем путь, соединяющий две различные(две любые) вершины.

Упр. 2. v – точка сочленения $\iff$ существуют такие вершины $u, w \neq v$, что любая (u, w)-цепь проходит через v.

Определение. *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению подграф графа G без точек сочленения этого подграфа.

Упр. 3. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков B_1 и B_2 либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

Определение. Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — все блоки связного графа G, а $a_1, \ldots, a_m$ — все точки сочленения. Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, \ldots, B_n, a_1, \ldots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i принадлежит блоку B_j.

Упр. 4. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причем все его висячие вершины соответствуют блокам.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что в связном графе с хотя бы двумя вершинами есть хотя бы две вершины, не являющиеся точками сочленения.

2. Докажите, что на ребрах связного графа можно расставить стрелки так, чтобы он стал сильно связным тогда и только тогда, когда в графе нет мостов.

3. а) Есть двусвязный граф на 100 вершинах. Докажите, что его можно разбить на 2 связных графах, по 50 вершин в каждом.

б) Приведите пример связного графа, для которого аналогичное утверждение неверно.

4. В дереве ровно $2n$ висячих вершин. Докажите, что можно провести n ребер так, чтобы граф стал реберно-двусвязным.

5. В будущем графе $n = 2k$ вершин и изначально нет ребер. Двое игроков по очереди проводят новые ребра графа (кратные ребра и петли не допускаются). Игрок, после хода которого получается двусвязный граф, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?