Аналитическая модель проективной плоскости.

Есть три модели проективной плоскости

Пополненная евклидова плоскость (Π).

Связка прямых и плоскостей. Пусть O – некая точка в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через S множество прямых, проходящих через O. *Точка* в S – это прямая (проходящая через O), а *прямая* – множество всех прямых, проходящих через O и лежащих в некоторой плоскости. Эта модель называется *связкой прямых и плоскостей.* Ясно, что через каждые две точки проходит единственная прямая и любые две прямые пересекаются. Эту модель можно мыслить как полусферу, в которой отождествлены противоположные точки границы.

Аналитическая модель. Вернемся к модели-связке. Будем представлять точку $P \in S$ (то есть проходящую через O прямую) некоторой точкой (x_1, x_2, x_3) этой прямой, не совпадающей с точкой $O(0,0,0)$. (Из глубоких соображений формализма под (x_1, x_2, x_3) понимается столбец, а не строка). Числа x_1, x_2, x_3 называются *однородными координатами* точки P. При этом точки (x_1, x_2, x_3) и (x_1', x_2', x_3') из $\mathbb{R}^3$ соответствуют одной и той же точке из S тогда и только тогда, когда существует $\lambda \neq 0$: $x_i' = \lambda x_i$. Введем на множестве $\{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)\}$ соответствующее отношение эквивалентности [а что это такое?]. Множество классов эквивалентности L будет образовывать проективную плоскость. *Точкой* является класс эквивалентности $[x_1, x_2, x_3] \in L$. *Прямой* является множество всех классов $[x_1, x_2, x_3]$, для которых числа x_1, x_2, x_3 удовлетворяют уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ при фиксированных a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}^3$, одновременно не равных нулю. Это определение корректно. Снова ясно, что через каждые две точки проходит единственная прямая и любые две прямые пересекаются.

Упр. 1. а) Найдите точку пересечения прямых $a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0$ и $a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0$.
б) Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $[a_1, b_1, c_1]$ и $[a_2, b_2, c_2]$.

Упр. 2. Строки квадратной матрицы линейно независимы тогда и только тогда, когда столбцы линейно независимы.

Упр. 3. Точки $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$ и $[c_1, c_2, c_3]$ коллинеарны тогда и только тогда, когда векторы (a_1, a_2, a_3) и т.п. ЛЗ.

Итак, у нас есть три модели проективной плоскости. Покажем, что между ними существуют биекции, сохраняющие коллинеарность точек, то есть эти три модели *изоморфны*. Для моделей S и L это очевидно. Построим биекцию из L в Π.

Пусть $[x_1, x_2, x_3] \in L$. Если $x_3 \neq 0$, то положим $f([x_1, x_2, x_3]) = (x_1/x_3, x_2/x_3)$ – точка на пополненной евклидовой плоскости. Это определение корректно. Так получается любая «обычная» точка. Если $x_3 = 0$, то $f([x_1, x_2, x_3])$ по определению есть бесконечно удаленная точка, соответствующая пучку параллельных прямых с угловым коэффициентом x_2/x_1 (при $x_1 = 0$ получается пучок «вертикальных» прямых). Это определение снова корректно. Ясно, что f – биекция. Осталось проверить, что коллинеарные точки переходят в коллинеарные. Нестрого говоря, f сопоставляет каждой прямой, проходящей через $O(0,0,0)$, ее точку пересечения с плоскостью $z = 1$.

Упр. 4. Рассмотрим на евклидовой плоскости кривые $2x + 3y = 5$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2$, $xy = 1$, $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$, $y = x + 1/x$. Напишите уравнения этих кривых в однородных координатах на проективной плоскости и выясните, сколько бесконечно удаленных точек на них лежит.

Определение. Биекция проективной плоскости, при которой сохраняется коллинеарность точек, называется *проективным преобразованием.*

Упр. 5. а) Композиция проективных преобразований является проективным преобразованием.
б) Докажите, что неколлинеарные точки переходят в неколлинеарные.
в) Обратное преобразование к проективному преобразованию проективно.

Глобально мы хотим выяснить, как выглядит проективное преобразование в однородных координатах.

Пусть A – 3×3 матрица с ЛНЗ строками. Определим отображение X_A из множества столбцов (не строк!!!) длины 3 в него же следующим образом: столбец $(x_1, x_2, x_3)^T$ переходит в стобец $(x_1', x_2', x_3')^T$, где $x_i' = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3$. Очевидно, что это отображение *линейно*.

Упр. 6. Отображение X_A биективно $\Longleftrightarrow$ строки(столбцы) матрицы A линейно независимы.

Определение. Пусть A – 3×3 матрица с ЛНЗ строками. Определим отображение $T_A : L \to L$ следующим образом: точка $[x_1, x_2, x_3]$ переходит в точку $[x_1', x_2', x_3']$, где $x_i' = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3$.

Утверждение 1. T_A – *проективное преобразование плоскости* L.

Д-во. Надо проверить корректность, биективность и что T_A переводит прямые в прямые.

Упр. 7. Напишите уравнение параллельного переноса в однородных координатах.

Упр. 8. Как выглядит в координатах проективное преобразование вида T_A на евклидовой части проективной плоскости?

Упр. 9. У отображения T_A есть *обратное* отображение, равное T_B для некоторой матрицы B с ЛНЗ строками. Композиция $T_{A_2} \circ T_{A_1}$ равна T_C для некоторой матрицы C с ЛНЗ строками. То есть множество $G = \{T_A\}$ является *группой* относительно композиции.

Утверждение 2. $T_{A'} = T_A$ *тогда и только тогда, когда* $A' = \lambda A$ *для некоторого* $\lambda \neq 0$.

Д-во. Смотрим значения на точках $P_1 = [1, 0, 0], P_2 = [0, 1, 0], P_3 = [0, 0, 1], Q = [1, 1, 1]$.

Утверждение 3. *Пусть точки* $B_1, B_2, B_3, B_4 \in L$ *таковы, что никакие три из них не коллинеарны. Точки* $C_1, C_2, C_3, C_4 \in L$ *таковы, что никакие три из них не коллинеарны. Тогда найдется единственное преобразование* $T_A \in G$, *такое что* $T_A(B_i) = C_i$.

Д-во. Достаточно перевести точки P_1, P_2, P_3, Q в четыре заданные, что считается в координатах. Единственность доказывается как в утверждении 2.

Теперь будем доказывать самое сложное – что G совпадает с множеством всех проективных преобразований (вытекает из утверждений 3,4,5).

Утверждение 4. *Пусть* f – *произвольное проективное преобразование плоскости* L *с неподвижными точками* $P_1 = [1, 0, 0]$, $P_2 = [0, 1, 0]$, $P_3 = [0, 0, 1]$, $Q = (1, 1, 1)$. *Тогда найдется такой автоморфизм* σ *поля* $\mathbb{R}$, *что* $f([x_1, x_2, x_3]) = [x_1^\sigma, x_2^\sigma, x_3^\sigma]$.

Утверждение 5. *Поле* $\mathbb{R}$ *имеет только тождественный автоморфизм.*

Д-во. $a > 0 \Longleftrightarrow a^\sigma > 0$, откуда $\lim a_n = a \Longleftrightarrow \lim a_n^\sigma = a^\sigma$. Осталось каждое число приблизить рациональными числами и воспользоваться единственностью предела.

Из утверждений 1–5 вытекают теоремы 1 и 2 предыдущего листка.

Каков алгебраический смысл двойных отношений? Нас явно не устраивает классическое определение, ведь оно совсем не переносится на произвольные поля. А все остальное — переносится (с учетом того, что у полей бывают нетождественные автоморфизмы).

Пусть различные точки A, B, C, D лежат на одной прямой, при этом $A = [a]$ и т.д. Тогда c и d однозначно представимы в виде ЛК a и b (почему и почему однозначно?). Пусть $c = \gamma_1 a + \gamma_2 b$, $d = \delta_1 a + \delta_2 b$. Назовем число $(A, B; C, D) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} : \frac{\delta_2}{\delta_1}$ *двойным отношением четырех точек на прямой*. Видим, что это определение нуждается в проверки корректности (то есть что оно определено не на тройках чисел, а на классах эквивалентности троек, и что нет деления на 0).

Теперь легко понять, что двойное отношение сохраняется при проективных преобразованиях. [почему?]

Для расширенной евклидовой плоскости это определение двойного отношения совпадает со старым.[почему?]

То есть мы доказали теорему 5 из предыдущего листка.

Определим *двойное отношение четырех прямых*, проходящих через одну точку, так. Пересечем их любой прямой, и двойное отношение полученных четырех точек назовем двойным отношение четырех прямых. Ясно, что надо доказывать корректность, считая все в координатах.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что $(A, B; C, D) = (C, D; A, B)$.

2. Докажите теорему 3 из предыдущего листка.