Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 21 июля

Элементарный анализ.

Определение. Множество A называется *открытым*, если вместе с любой точкой $a \in A$ оно содержит некоторый открытый шар $B_r(a)$, где $r > 0$, (= окрестность этой точки).

Определение. Множество V называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Определение. Точка x называется *граничной* для множества A, если каждая ее окрестность содержит элементы из A и не из A.

Утверждение. Множество V замкнуто $\Longleftrightarrow$ содержит все свои граничные точки. Множество A открыто $\Longleftrightarrow$ содержит ни одной своей граничной точки.

Вопрос. Найдите все множества в $\mathbb{R}^n$, замкнутые и открытые одновременно.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Функция $f\colon A \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной*, если для любой точки $x \in A$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой точки $y \in A$ с условием $||x - y|| < \delta$ выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Теорема о знаке. Пусть $f\colon A \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $f(x) > 0$. Тогда существует окрестность точки x такая, что в любой точки $y \in A$ из этой окрестности $f(y) > 0$.

Определение. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если оно замкнуто и ограничено.

Теорема. Следующие условия равносильны:
1) K — компакт;
2) из любой последовательности точек в K можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из K;
3) из любого открытого покрытия K можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема Вейерштрасса о максимальном значении. Пусть K — компакт и $f\colon K \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда она достигает на K своего максимума.

Теорема о промежуточном значении. Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, ее максимум равен M, а минимум — m. Тогда f принимает все значения на отрезке $[m, M]$.

Задача. a) Фиксируем точку $y \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что функция $f(x)$ равная расстоянию от x до y непрерывна.

b) Пусть V — выпуклое замкнутое множество на плоскости и точка $x \notin V$. Докажите, что существует прямая l такая, что V и x лежат строго по разные стороны от нее (*лемма об отделяющей прямой*).

Для самостоятельного решения

1. Пусть K_1, K_2 — два выпуклых компакта на плоскости, не имеющих общих точек. Докажите, что существует прямая l такая, что K_1 и K_2 лежат строго по разные стороны от нее.

2. f – непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, для которой уравнение $f(x) = x$ не имеет решений. Докажите, что тогда уравнение $f(f(x)) = x$ тоже не имеет вещественных решений. Приведите контрпример для разрывных функций.

3. На отрезке $[0, 1]$ задана непрерывная функция $f(x)$ такая, что $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что найдется горизональный отрезок длины $1/3$ с концами на графике функции. Приведите примеры того, что отрезков длины 0.333 и 0.334 может не найтись.

4. Существует ли непрерывная биекция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?