Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 22 июля

Комбинаторная геометрия на плоскости.

Бесконечная теорема Хелли. Пусть есть, возможно бесконечный, набор замкнутых выпуклых множеств на плоскости (в пространстве), по крайней мере одно из которых ограниченно. Тогда если любые три (четыре) из них имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

1. На окружности дана система (возможно бесконечная) дуг, причем длина каждой не больше половины окружности. Оказалось, что любые три имеют общую точку. Докажите, что все имеют общую точку.

2. Пусть F ограниченная выпуклая фигура на плоскости. Докажите, что в F найдется такая точка, что любая хорда, проходящая через эту точку, делится ей в отношении $\lambda : 1/2 \leqslant \lambda \leqslant 2$ (*т.е. эта точка является почти центром симметрии*).

3. Докажите, что в любую выпуклую фигуру на плоскости ширины 1 можно вписать круг радиуса $1/3$ (*теорема Бляшке*).

4. Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^3$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{3/8}$ (*теорема Юнга*).

Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 22 июля

Комбинаторная геометрия на плоскости.

Бесконечная теорема Хелли. Пусть есть, возможно бесконечный, набор замкнутых выпуклых множеств на плоскости (в пространстве), по крайней мере одно из которых ограниченно. Тогда если любые три (четыре) из них имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

1. На окружности дана система (возможно бесконечная) дуг, причем длина каждой не больше половины окружности. Оказалось, что любые три имеют общую точку. Докажите, что все имеют общую точку.

2. Пусть F ограниченная выпуклая фигура на плоскости. Докажите, что в F найдется такая точка, что любая хорда, проходящая через эту точку, делится ей в отношении $\lambda : 1/2 \leqslant \lambda \leqslant 2$ (*т.е. эта точка является почти центром симметрии*).

3. Докажите, что в любую выпуклую фигуру на плоскости ширины 1 можно вписать круг радиуса $1/3$ (*теорема Бляшке*).

4. Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^3$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{3/8}$ (*теорема Юнга*).

Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс (профи) • 22 июля

Комбинаторная геометрия на плоскости.

Бесконечная теорема Хелли. Пусть есть, возможно бесконечный, набор замкнутых выпуклых множеств на плоскости (в пространстве), по крайней мере одно из которых ограниченно. Тогда если любые три (четыре) из них имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

1. На окружности дана система (возможно бесконечная) дуг, причем длина каждой не больше половины окружности. Оказалось, что любые три имеют общую точку. Докажите, что все имеют общую точку.

2. Пусть F ограниченная выпуклая фигура на плоскости. Докажите, что в F найдется такая точка, что любая хорда, проходящая через эту точку, делится ей в отношении $\lambda : 1/2 \leqslant \lambda \leqslant 2$ (*т.е. эта точка является почти центром симметрии*).

3. Докажите, что в любую выпуклую фигуру на плоскости ширины 1 можно вписать круг радиуса $1/3$ (*теорема Бляшке*).

4. Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^3$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{3/8}$ (*теорема Юнга*).