Проективные преобразования, сохраняющие окружность.

Лемма. *При стереографической проекции окружности переходят в прямые или окружности.*

Теорема. *Дана окружность и не пересекающая ее прямая l. Тогда существует центральная проекция, переводящая данную окружность в окружность, а l – в бесконечно удаленную прямую.*

Следствие. *Дана окружность и точка C внутри нее. Тогда существует центральная проекция, при которой данная окружность переходит в окружность, а точка C – в ее центр.*

1. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке (точке Жергона).

2. Через середину C хорды AB проведены две хорды KM и LN. Прямые KL и MN пересекают прямую AB в точках D и E. Докажите, что $CD = CE$ (возможны две конфигурации) (*т. о бабочке*).

3. Дан вписанный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Докажите, что точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой (*т.Паскаля*). [Теорема Паскаля верна и для самопересекающихся шестиугольников]

4. Окружность Γ касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E и его описанной окружности. Докажите, что прямая DE проходит через точку I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

5. Пусть AA', BB', CC' – главные диагонали вписанного шестиугольника пересекающиеся в точке O. X – произвольная точка этой окружности. Докажите, что точки P, Q, R пересечения прямых XA', XB', XC' с прямыми BC, CA, AB лежат на одной прямой, проходящей через O.

6. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Биссектрисы углов A_1AC и C_1CA пересекаются в точке B'. Аналогично определяются точки A' и C'. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой, проходящей через центр вписанной окружности треугольника.

7. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Некоторая окружность с центром в I пересекает сторону BC в точках A_1 и A_2, сторону CA в точках B_1 и B_2, сторону AB в точках C_1 и C_2. Полученные точки расположены на окружности в порядке A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Точки A_3, B_3, C_3 – середины дуг A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно. Прямые A_2A_3 и B_1B_3 пересекаются в точке C_4, прямые B_2B_3 и C_1C_3 – в точке A_4, а прямые C_2C_3 и A_1A_3 – в точке B_4. Докажите, что отрезки A_3A_4, B_3B_4, C_3C_4 пересекаются в одной точке.