Двадцать седьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2011 года.
10 класс • 23 июля

Решения задач олимпиады.

1. В каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости записано одно из чисел 1, 2, 3, 4 так, что каждое число встречается хотя бы один раз. Назовем клетку *правильной*, если количество различных чисел, записанных в четыре соседние (по стороне) с ней клетки, равно числу, записанному в эту клетку. Могут ли все клетки плоскости оказаться правильными?

Рассуждает от клетки, где стоит четверка. Однозначно восстанавливается расстановка единиц и четверок, с пропусками квадратов 2 на 2. Далее смотрим, где стоит тройка (или же двойка).

2. Дан выпуклый 2011-угольник со длинами сторон $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + a_3 + \ldots + a_{2011})$. Докажите, что $f(a_{2011}) = f(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2010})$.

Заметим, что в силу выпуклости многоугольнника: $a_1 < a_2+\ldots+a_{2011}$. Поэтому a_1 и $a_2+\ldots+a_{2011}$ это две различных точки, в которых трехчлен f принимает одинаковые значения. Тогда, если x_0 — абсцисса вершины f, то $a_1+a_2+\ldots+a_{2011} = 2x_0$. Тогда точки a_{2011} и $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2010}$ симметричны относительно x_0, поэтому $f(a_{2011}) = f(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2010})$.

3. На окружности с диаметром AB выбраны точки C и D. XY — диаметр, проходящий через середину K хорды CD. M — проекция точки X на прямую AC, N — проекция точки Y на прямую BD. Докажите, что точки M, N и K лежат на одной прямой.

Так как $\angle XKC = \angle XMC = 90^\circ$, то точки X, K, M, C лежат на одной окружности и $\angle MKC = \angle MXC$. Так как $MX \perp AC$ и $BC \perp AC$, то $\angle MXC = \angle BCX$. Рассуждая аналогично, получим, что $\angle NKD = \angle ADY$. Из равенства дуг AY и BX (на них опираются равные центральные углы) следует, что $\angle ADY = \angle BCX$, откуда следует утверждение задачи.

4. Дано натуральное число n, не являющееся точным квадратом. Докажите, что найдутся такие целые неотрицательные числа a и b, что числа $n - a^2$ и $b^2 - n$ — натуральные, причем первое из них делится на второе.

Пусть k такое натуральное число, что $k^2 < n < (k+1)^2$. Возьмем $b = k+1$ и будем подбирать подходящее a. Ясно, что достаточно найти $0 \leqslant a \leqslant k$ такое, чтобы $b^2 - a^2$ делилось на $b^2 - n$. Обозначим $b^2 - n = s < 2k + 1$. То есть достаточно того, чтобы $b - a$ или $b + a$ делилось на s. Тогда выберем в качестве a число $s - b$, если $s \geqslant k + 1$ и число $b - s$ в противном случае. Легко видеть, что выбранное a подходит.

5. Ребра полного графа на N вершинах покрашены в красный и черный цвет. При каком наименьшем N в этом графе обязательно найдется n одноцветных ребер без общих концов?

Ответ $3n - 1$. Приведем пример на $3n - 2$. Разобьем вершины на 2 множества A и B, состоящие из $2n - 1$ и $n - 1$ элемента соответственно. Ребра, идущие между вершинами множества A сделаем красными, а остальные черными. Тогда каждое красное ребро целиком лежит в A, а любое синее ребро имеет вершину из B. Тогда любые n одноцветных ребра пересекаются. Покажем, что для $N = 3n - 1$ условие выполняется по индукции по n. База для $n = 1$ очевидна. Пусть мы доказали для $n = k$. Докажем для $n = k + 1$. Если все ребра одного цвета, то условие, очевидно, выполняется. Пусть это не так. Тогда есть два разноцветных ребра, имеющие общую вершину. Выкинем все три вершины, являющиеся концами этих ребер. В графе останется $3n - 4$ ребра. Значит, по предположению индукции, в нем найдутся $n - 1$ непересекающееся реберо одного цвета. Добавим к ним выброшенное ребно нужного цвета. Переход доказан.

6. На доске написаны числа $1, 2, 4, \ldots, 2^{2011}$. Двое играют в игру: за один ход разрешается уменьшить на единицу ровно пять из написанных на доске чисел. Получивший отрицательное число проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?

Начинающий. Первым ходом начинающий уменьшает на единицу числа в первой и четырех последних ячейках. В дальнейшем на каждый ход второго он уменьшает на единицу числа в тех же ячейках, что и второй. Все числа в ячейках с первой по 1995-ю четные после ответных ходов первого и поэтому ни одно из них первый не может сделать отрицательным.

Первый программист может сломать компьютер лишь в том случае, если он сделает отрицательным одно из чисел в четырех последних ячейках. Для этого должно быть сделано более 2^{2005} ходов, не ломающих компьютер. С другой стороны, на каждом ходу уменьшается пять чисел, т.е. хотя бы одно из чисел в ячейках с 1 по 2005. Первоначальная сумма чисел в этих ячейках $1 + 2 + \cdots + 2^{2004} = 2^{2005} - 1$. Поэтому могло быть сделано не более $2^{2005} - 1$ ходов, не ломающих компьютер.

Противоречие. Значит, компьютер испортит второй программист.

7. Точка O – центр описанной окружности равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD. Точки K, L, M, N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA, причем четырехугольник $KLMN$ – ромб. Докажите, что точка O лежит на прямой KM.

Пусть S – центр ромба. $SK = SM$, значит S равноудалено от AB и CD. Тогда, т.к. S – середина LN, расстояние от L до AB равно расстоянию от N до CD, а значит $BL = DN$. При симметрии относительно прямой KM, отрезок AD переходит отрезок $A'D'$, а точка N в точку L. Тогда $LB = ND = LD'$, а $BC = AD = A'D'$. Если A', B, C и D' лежат на одной прямой, то KM перпендикулярна основаниям, но тогда она является осью симметрии трапеции, то есть проходит через O. В противном случае четырехугольники $ABCD$, $AA'D'D$ и $A'BD'C$ являются равнобокими трапециями. Тогда вокруг них можно описать окружности. Если они не совпадают, то прямые AD, BC и $A'D'$ являются их радикальными осями. Тогда AD прохоит через L, что невозможно. Значит они совпадают. Тогда прямая KM проходит через O как серединный перпендикуляр к хорде AA'.

8. Найдите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами со свойством: если $a, b \in \mathbb{N}$ и $a + b$ — точный квадрат, то $f(a) + f(b)$ — точный квадрат.

Задача непроста. Ответ: $f(x) = k^2 \cdot x$.