Симедианы

Определение: симедианой угла A треугольника ABC называется луч (а также его отрезок, заключённый внутри треугольника), симметричный его медиане относительно биссектрисы этого угла.

1. а) Докажите, что симедиана делит противоположную сторону в отношении, равном отношению квадратов соответствующих сторон; б) (**Точка Лемуана**) Докажите, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

2. Докажите, что симедиана — ГМТ, для которых расстояние до сторон треугольника пропорционально этим сторонам.

3. Докажите, что точкой Лемуана для прямоугольного треугольника будет середина высоты, опущенной на гипотенузу этого треугольника.

4. В треугольнике ABC провели касательные к его описанной окружности в точках B и C. Касательные пересеклись в точке P. Докажите, что P лежит на симедиане треугольника ABC.

5. Точка X внутри треугольника ABC такова, что $\angle ABX = \angle CAX$, $\angle ACX = \angle BAX$. Докажите, что AX — симедиана треугольника ABC.

6. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC. Серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A' и B' соответственно. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1. Докажите, что C_1 лежит на симедиане угла C треугольника ABC

7. Прямая, параллельная, стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AB в точке M и сторону AC в точке N. Прямые BN и CM пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников BMP и CNP пересекаются в точках P и Q. Докажите, что AQ является симедианой треугольника ABC.

8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Касательные к этой окружности в точках B и C пересекаются в точке P, окружность радиуса PB с центром в точке P пересекает биссектрису угла A в точке Q, расположенной внутри ABC, а прямые OQ и BC пересекаются в точке D. Наконец, точки E и F — основания перпендикуляров, опущенных из Q на прямые AC и AB соответственно. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.