Матбой M9-M10

1. В некоторой точке окружности длины 1 стоит мальчик, еще в 10 различных точках окружности стоят флажки. Мальчик хочет собрать все флажки (относить их никуда не нужно). Он может передвигаться только по окружности. Известно, что вне зависимости от начального расположения флажков он может собрать все, преодолев дистанцию длины не больше L. Найдите минимальное значение L, для которого это верно.

2. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Известно, что при любом целом n число $P(n)$ делится на a или b. Докажите, что при любом целом n число $P(n)$ делится на a или при любом целом n число $P(n)$ делится на b.

3. Последовательность 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, ... строится следующим образом: первый член равен 1, а каждый следующий является «прочтением» слева направо предыдущего. Например, число 111221 читается как «три единицы, две двойки, одна единица», и получается 312211 (блок из одинаковых цифр всегда прочитывается целиком). Докажите, что эта последовательность монотонно возрастает.

4. Каждое из 2019 натуральных чисел взаимнопросто с одним и тем же количеством остальных, но не со всеми. При каком наименьшем k можно утверждать, что среди любых k из наших чисел найдутся два, имеющих общий делитель, больший 1?

5. Аня и Боря играют в игру на квадрате 6×6. Каждый по очереди ставит в одну из клеток квадрата любое число (первой ставит Аня). Ставить число, встречавшееся ранее, не разрешается. Когда все клетки заняты, в каждой строке закрашивается клетка с наибольшим в этой строке числом. Если можно пройти по соседним закрашенным клеткам из верхней строки в нижнюю, победила Аня. Если пройти нельзя – Боря. Кто выиграет при правильной игре? (Клетки считаются соседними, если они имеют хотя бы одну общую вершину)

6. Найдите все простые p такие, что уравнение $p^n = x^3 + y^3$ имеет решение в натуральных числах.

7. Пусть a, b, c, d — действительные числа, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} (a+b)(c+d) = 2 \\ (a+c)(b+d) = 3 \\ (a+d)(b+c) = 4 \end{cases}$$

Найдите минимальное возможное значение выражения $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

8. В остроугольном треугольнике ABC угол A больше угла C. На стороне AC взята точка D такая, что $AB = BD$. Точка G — центр вписанной окружности треугольника BDC. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC

в точках K и L соответственно. Докажите, что отрезок KL делит отрезок AG пополам.

9. Внутри круга радиуса $n \in \mathbb{N}$ расположено $4n$ отрезков длины 1 каждый (концы всех отрезков лежат внутри круга). Докажите, что если дана некоторая прямая, то найдется прямая либо параллельная, либо перпендикулярная данной, которая пересекает как минимум 2 отрезка.

10. Пусть треугольник ABC является остроугольным, где $\angle BAC = 60^\circ$ и $AB > AC$. Пусть I является центром вписанной окружности, H — ортоцентром треугольника ABC. Докажите, что $2\angle AHI = 3\angle ABC$.