Производная. Задачи.

1. Докажите, что если функция дифференцируема в точке, то она в ней непрерывна.

2. а) Докажите *теорему Ролля*: если $a < b$ действительные корни непрерывно дифференцируемой функции f, то производная $f'(x)$ имеет корень на отрезке $[a; b]$.
б) Докажите *теорему Лагранжа*: если $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция, то на этом отрезке найдется точка c такая, что $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3. Докажите, что непрерывная дифференцируемая функция $f(x)$, отличная от константы, имеет кратный корень тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $f'(x)$ имеют общий корень.

4. Дано натуральное n. Докажите, что многочлен $1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

5. Даны многочлены f и g степени n. Докажите, что функция $fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + f''g^{(n-2)} - f^{(3)}g^{(n-3)} + \ldots + (-1)^n f^{(n)}g$ является константой.

6. На доске написаны три функции: $f_1(x) = x + \frac{1}{x}$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = (x-1)^2$. Можно складывать, вычитать и перемножать эти функции (в том числе возводить в квадрат, в куб, ...), умножать их на произвольное число, прибавлять к ним произвольное число, а также проделывать эти операции с полученными выражениями. Получите таким образом функцию $\frac{1}{x}$. Докажите, что если стереть с доски любую из функций f_1, f_2, f_3, то получить $\frac{1}{x}$ невозможно.

7. Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

8. $f(x) = x^2 - 2$ сколько корней имеет уравнение $f(f(f(f(f(f(x)))))) = x$?