Матбой 9 Профи vs 10 Профи

1. На плоскости расположены 60 точек общего положения. Докажите, что их можно разбить на 20 троек так, чтобы все 20 треугольников с вершинами в точках из одной тройки пересекались.

2. За круглым столом сидят n человек. Есть колода карт, пронумерованных числами от 1 до $3n$. Каждому человеку раздали по три карты. Каждую минуту каждый человек отдаёт самую маленькую свою карточку соседу по часовой стрелке, а самую большую — соседу против часовой стрелки. Вряд ли для вас секрет, что последовательность состояний периодична. Найдите её период.

3. Дан клетчатый квадрат $n \times n$. Можно ли в его клетках расставить числа от 1 до n^2 (каждое по одному разу) таким образом, чтобы сумма чисел в клетках, пересекаемых любой окружностью, не проходящей через вершины клеток (и, возможно, выходящей за пределы квадрата), была не больше $2n^3 + 2n^2$?

4. Вписанная окружность ω остроугольного треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. На прямой B_1C_1 отмечены такие точки M и N, что $\angle MBC = \angle NCB = 90^\circ$. Прямые A_1M и A_1N второй раз пересекают окружность ω в точках P и Q соответственно. Прямые CP и BQ пересекаются в точке X. Докажите, что прямая A_1X содержит медиану треугольника A_1MN.

5. В стране $2n$ городов, соединённых односторонними дорогами, причём между двумя городами может проходить несколько дорог. У каждого города количество входящих дорог отличается от количества выходящих дорог ровно на 1. Докажите, что можно провести не более n новых односторонних дорог так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

6. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Окружности ω_1 и ω_2 описаны около треугольников AHB и AHC. Окружность Γ проходит через точки B и C, а также пересекает отрезки BH и CH вторично в точках B' и C'. Наконец, окружность γ касается ω_1 и ω_2 внешним образом, а также касается внутренним образом дуги BC окружности Γ, лежащей внутри ABC, в точке T. Докажите, что T — середина дуги $B'C'$ окружности Γ.

7. Дано натуральное n и простое $p \in (n;\ \frac{4}{3}n)$. Докажите, что $\sum\limits_{j=0}^{n} (C_n^j)^4$ делится на p.

8. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных $a < b$, что $b^b + a$ делится на $a^a + b$.

9. Даны 10 различных нечетных простых чисел. Может ли так случиться, что разность шестнадцатых степеней любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел?

10. Найдите все функции $f(x, y)$ двух вещественных переменных такие, что для любых вещественных a, b, c (не обязательно различных) медиана набора чисел $f(a, b)$, $f(b, c)$, $f(c, a)$ совпадает с медианой набора a, b, c. (*Медианой* набора из трёх чисел называется то число набора, которое не больше одного из оставшихся и не меньше другого.)