Разнобой 1.

1. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая BO пересекает сторону AC в точке B_1, прямая CO пересекает сторону AB в точке C_1. Прямая B_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что если $AP = AQ$, то $AB = AC$.

2. В спортлото участвуют лоты с номерами от 1 до 36. Случайным определяется выигрышная комбинация из 6 номеров. Можно покупать лотерейные билеты, на каждом из которых можно отметить до шести номеров. Как, купив не более 10 билетов добиться того, чтобы гарантированно нашёлся хотя бы один билет, который совпадает с выигрышной комбинацией хотя бы по двум номерам?

3. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 3$ существуют такие различные натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

4. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $a^2 + f(a)f(b)$ делится на $f(a) + b$ для любых натуральных a и b.

5. С помощью метода Гаусса решите систему уравнений (a, b, c — неизвестные, остальное — параметры).

$$\begin{cases} c + x_1 b + x_1^2 a = y_1 \\ c + x_2 b + x_2^2 a = y_2 \\ c + x_3 b + x_3^2 a = y_3 \end{cases}$$

6. Докажите, что определения непрерывности по Коши и по Гейне равносильны.