Начинаем непрерывно учиться.

Определение по Гейне. Функция f называется *непрерывной* в точке a по множеству A, если она определена в пересечении некоторой окрестности точки a и множества A, и для всякой последовательности $\{x_n\}$, где $x_i \in A$, сходящейся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(a)$.

Определение по Коши. Функция f называется *непрерывной* в точке a по множеству A, если она определена в пересечении некоторой окрестности точки a и множества A и

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in A : (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Функция f называется *непрерывной* на множестве A, если она определена на множестве A и непрерывна в каждой его точке по множеству A.

1 Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для любого $a > 1$ функция $f(x) + f(ax)$ непрерывна. Верно ли, что $f(x)$ — непрерывная функция?

2 Дана последовательность непрерывных функций $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x) \ldots$, а также функция $f(x)$. Оказалось, что для любого $a \in \mathbb{R}$ последовательность $f_i(a)$ сходится к $f(a)$. Говорят, что тогда f является *поточечным пределом* последовательности $\{f_i\}$. Обязательно ли $f(x)$ — непрерывная функция?

3 У Феди есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т. д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

4 а) На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M и точка X. Докажите, что можно провести прямую через точку X, которая делит M на две части равной площади.
б) Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

5 Существует ли непрерывная функция, принимающая каждое действительное значение ровно 3 раза?

6 Рассмотрим функцию *забор*: $f_1(x) = \frac{1}{2} - |\{x\} - \frac{1}{2}|$. Определим $f_n(x) = \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}$.

Докажите, что функция $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$:
а) определена при всех действительных x;
б) не имеет промежутков монотонности;
в) непрерывна на множестве всех действительных чисел.