Движение с сохранением двойного отношения

Ещё немного про линейность

1. Докажите, что в остроугольном треугольнике можно найти точку, являющуюся центром 3-х различных вписанных в треугольник прямоугольников.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На дуге ABC описанной окружности треугольника ABC выбрана произвольная точка D. Прямые AD и CC_1 пересекаются в точке P, а прямые CD и AA_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая A_1C_1 делит отрезок PQ пополам.

А дальше мы линейность подробим.

3. На стороне BC треугольника ABC выбирается точка P. Точка Q симметрична ей относительно середины BC. Прямые AP и AQ вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках P' и Q' соответственно. Докажите, что все прямые $P'Q'$ проходят через фиксированную точку.

4. На высоте BH треугольника ABC выбрана произвольная точка P. Прямые AP и CP пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что HB — биссектриса угла A_1HC_1.

5. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $AP = CQ$. Обозначим через M — середину AC, а через K — точку пересечения отрезков AQ и CP. Докажите, что точка, симметричная K относительно M, лежит на биссектрисе угла B.

7. На прямой AC выбраны точки M и N такие, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$. X — основание перпендикуляра из M на BC, Y — основание перпендикуляра из N на AB, H — ортоцентр ABC. Докажите, что B, X, Y и H лежат на одной окружности.

8. Внешние биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC с наименьшей стороной BC пересекаются в точке I_A. На отрезках BC_1, CB_1 взяли точки X и Y соответственно так, что XY проходит через I_A. Докажите, что отражения прямых CX и BY относительно осей CI_A и BI_A соответственно пересекаются на прямой B_1C_1.