Матрицы. Перезагрузка.

Определение. Множество G с бинарной операцией $*$ называется *группой* $(G, *)$, если выполнены следующие аксиомы:
1) **(ассоциативность)** для любых $a, b, c \in G$ имеет место $a * (b * c) = (a * b) * c$;
2) **(существование нейтрального элемента)** существует элемент $e \in G$ такой, что для любого $a \in G$ выполнено $e * a = a * e = a$;
3) **(существование обратного элемента)** для любого элемента $a \in G$ существует элемент b такой, что $a * b = b * a = e$.

Определение. Группа G с операцией $*$ называется *коммутативной* (или *абелевой*), если

$$\forall a, b \in G \quad a * b = b * a.$$

Определение. Дана квадратной матрицы A размера $n \times n$. Матрица X называется *обратной к матрице* A, если $AX = XA = E$. Обычно её обозначают A^{-1}. Из первой задачи даже следует, что такое обозначение корректно.

Определение Матрицы, для которых существует обратная, называются обратимыми.

Определение Дана матрица A размера $m \times n$. Определим матрицу A^T (транспонированную): $\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}$.

1. а) Докажите, что обратная матрица единственная.
б) Докажите, что если $AB = E$, то и $BA = E$.

2. Докажите, что:
а) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
б) $(AB)^T = B^T A^T$;
в) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Определение. Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если $AA^T = E$.

3. Докажите, что ортогональные матрицы размера $n \times n$ образуют группу по умножению.

4. а) Является ли группа обратимых матриц коммутативной?
б) Докажите, что матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ с операцией умножения образуют коммутативную группу.

Матрицы, где их не ждёшь.

5. Дано натуральное число n и последовательность действительных чисел $a_1, \ldots, a_{n-1}$ Определим последовательности $u_0, \ldots, u_n$ и $v_0, \ldots, v_n$ рекуррентно, положив $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$, и $u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}$, $v_{k+1} = v_k + a_{n-k} v_{k-1}$ при $k = 1, \ldots, n-1$.

Докажите, что $u_n = v_n$.

6. В клетках квадрата 8×8 расставлены 1 и -1. Оказалось, что любые две строки совпадают ровно в четырёх столбцах. Докажите, что у любые два столбца совпадают ровно в четырёх разрядах.

7. В таблице $3n \times 3n$ стоят вычеты по модулю 3. Известно, что разность любых двух столбцов — столбец с n нулями, n единицами и n двойками. Докажите, что разность любых двух строк — строка с n нулями, n единицами и n двойками.