Разнобой-1

1. Два бога по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Первый своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, второй — одну. Они успевают сделать все ходы (то есть, бесконечно много) за час. Если в итоге получится периодическая дробь (без предпериода), выигрывает первый, иначе — второй. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

2. На плоскости есть 46 точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что из них можно выбрать 10, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой.

3. Числа a и b таковы, что количество делителей числа a равно количеству делителей числа b, а количество делителей числа a^2 равно количеству делителей числа b^2. Обязательно ли количество делителей числа a^3 равно числу делителей числа b^3?

4. По кругу выложены n конфет, пронумерованных от 1 до n. Добрый мальчик Елисей начинает с первой конфеты, идёт по часовой стрелке и съедает каждую вторую из оставшихся на тот момент (например, при $n > 1$ первой будет съедена конфета №2). Обозначим за $J(N)$ номер конфеты, которая будет съедена последней. Докажите, что если $N = 2^k + t$ и $0 \leqslant t \leqslant 2^k$, то $J(N) = 2t + 1$

5. Докажите, что каждый член последовательности $a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ является целым числом и укажите, какие из членов этой последовательности делятся на 3.

6. Докажите, что при любом нечётном $n > 3$, число $2^{n!} - 1$ делится на $n^3 - 4n$.