Разнобой 3.

1. Для каких n число $2019^n - 1$ делится на 2^{2019}?

2. У каждого натурального числа от $n+1$ до $n+1000$ выписывают все делители, не превосходящие 1000. Докажите, что для бесконечно многих натуральных n сумма всех выписанных чисел больше миллиона, и для бесконечно многих — меньше.

3. Какое наибольшее значение может принимать НОД$(ab+1,\ bc+1,\ ac+1)$, если a, b и c — различные натуральные числа, сумма которых не превосходит 3 000 000?

4. Докажите, что для любого простого p существует не более двух натуральных n таких, что $p2^n + 1$ является точным квадратом.

5. Клетки прямоугольника $m \times n$, где $m \leqslant n$ покрашены в чёрный и белый цвет так, что все строчки различны (строк m). Для какого наибольшего k можно закрасить k столбцов в красный цвет так, чтобы все строки по-прежнему были различны?

6. Докажите, что компактное множество является замкнутым.

7. Рассмотрим последовательность $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$.
Скажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится абсолютно, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ сходится.
а) Докажите, что сходящийся абсолютно ряд сходится.
б) Приведите пример ряда, сходящегося, не не сходящегося абсолютно.
в) Докажите, что в абсолютно сходящемся ряду при произвольной перестановке элементов сумма не меняется.
г) Докажите, что в сходящемся, но не сходящемся абсолютно ряду можно перестановкой элементов добиться какой угодно суммы.