Производная и локальные минимумы.

Определение Определим производную функции f в точке x_0 как $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta\to 0} \frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta}$.

То же самое, но другими словами. Определим f' в точке x_0 равной такому числу d, что для некоторой константы C и некоторого $\epsilon > 0$ на отрезке $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ функция $f(x)$ *приближается* линейной $f(x_0) + d(x - x_0)$, то есть для всех $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0) - d(x - x_0)| < \overline{\overline{o}}(x - x_0)$.

Если у функции существует производная в точке x_0, она называется *дифференцируемой* в точке x_0. Отметим, что это свойство намного сильнее, чем просто непрерывность. Хотя у вас велик шанс не заметить этого. Ну.. Какие ваши годы!

1. Докажите следующие свойства производной (голосом с вами проговорим, что неявно подразумевается):
а) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;
б) $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$;
в) $f(g(x_0))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

2. Найдите производную функций:
а) x^k, где k — натуральное число;
б) $\dfrac{1}{x^k}$, где k — натуральное число;
в) $\sqrt[k]{x}$, где k — натуральное число.

Определение. Назовём точку x_0 нестрогим локальным максимумом (минимумом) функции f, если $\exists\varepsilon > 0 : \forall x \in B_\varepsilon(x_0) f(x) \leqslant (\geqslant) f(x_0)$.

Назовём точку x_0 строгим локальным максимумом (минимумом) функции f, если $\exists\varepsilon > 0 : \forall x \in B_\varepsilon(x_0) f(x) < (>) f(x_0)$.

3. Существует ли непрерывная на отрезке $[0; 1]$ функция, имеющая бесконечно много локальных минимумов?

4. Докажите, что если функция f дифференцируема в точке x_0 и имеет в ней локальный минимум (максимум), то $f'(x_0) = 0$.

5. При каких c многочлен $x^3 + x^2 - 2x - c$ имеет три действительных корня с учётом кратности?

Определение Рассмотрим произвольную функцию f на плоскости. Её *производной в точке A по направлению $\overline{v}$* назовём число $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(A + tv) - f(A)}{t}$. Обозначается $\frac{\partial f}{\partial v}(A)$.

6. а) Рассмотрим функцию $f(X)$, равную расстоянию от точки X до B. Докажите, что производная f, в точке $B \neq A$ по направлению v равна $\left\langle v, \dfrac{\overline{BA}}{|BA|} \right\rangle$.

б) Внутри треугольника ABC нашлась точка T, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна. Докажите, что из точки T все стороны треугольника видны под углом $120°$.

7. Поймите, что вы уже видели пример непрерывной всюду функции, у которой нет производной.