Синусы, косинусы и так далее

Теорема косинусов: Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c. Угол α лежит напротив стороны BC. Тогда $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

1. Стороны параллелограмма равны a и b, а острый угол между диагоналями равен α. Найдите площадь параллелограмма.

2. В правильном треугольнике ABC со стороной a проведена средняя линия MN параллельно AC. Через точку A и середину MN проведена прямая до пересечения с BC в точке D. Найдите AD.

3. Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна третьей стороне.

4. (**Теорема Стюарта**) В треугольнике ABC проведена чевиана BD. Тогда

$$BD = \sqrt{\frac{AB^2 \cdot DC + BC^2 \cdot AD - AD \cdot DC \cdot AC}{AC}}$$

5. (**Лемма об изогоналях**) Внутри угла CDA проведены лучи DN и DM, симметричные относительно биссектрисы этого угла. Если P — точка пересечения прямых AN и CM, а Q — точка пересечения прямых CN и AM, то лучи DP и DQ также симметричны относительно биссектрисы угла CDA.

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA', на отрезке AA' выбрана точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B', а прямая CX пересекает AB в точке C'. Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P, а отрезки $A'C'$ и BB' пересекаются в точке Q. Докажите, что углы PAC и QAB равны.

7. В треугольнике ABC проведены чевианы BB_1 и CC_1. Докажите, что BB_1 и CC_1 пересекаются на высоте AA_1 треугольника, если $\angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A$.

8. Треугольник ABC вписан в окружность. Через точки A и B проведены касательные к этой окружности, которые пересекаются в точке P. Точки X и Y — проекции точки P на прямые AC и BC. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую XY, поделит AB пополам.