Линейная алгебра. Близимся к завершению.

Везде ниже скалярное произведение подразумевается стандартное.

Определение. Назовём оператор $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовём *самосопряжённым*, если для любых векторов u и v выполнено $< u, f(v) >=< f(u), v >$.

Определение. Дан оператор $f\colon V \to V$. Назовём его подпространство $U \subset V$ *инвариантным*, если $\forall u \in U$ имеем $f(u) \in U$.

Теорема 1. Самосопряжённый оператор в каком-то базисе записывается диагональной матрицей.

1. Петя написал матрицу самосопряжённого оператора в ортогональном базисе. Что можно сказать про эту матрицу?

2. а) рассмотрим собственный вектор $v \in \mathbb{R}^n$ самосопряжённого оператора f. Докажите, что ортогональное дополнение к $< v >$ (пространству векторов, коллинеаных v) является инвариантным подпространством оператора f.
б) Поймите, что если мы вдруг докажем, что у самосопряжённого оператора всегда есть собственный вектор, то мы придумаем доказательство теоремы 1 по индукции по размерности пространства.

3. а) Предположим, что комплексное, но невещественное число $z = x+iy$ ялвяется собственным значением некоторого оператора $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Докажите, что существуют два таких вектора u, v, что $f(u) = xu + yv$, $f(v) = -yu + xv$.
б) Докажите, что у самосопряжённого оператора так не бывает.
в) Докажите теорему 1.

Разное.

4. Назовём *следом* квадратной матрицы сумму элементов на главной диагонали. Докажите, что для след матрицы данного оператора не зависит от базиса, в котором матрица записана.
Подсказка. Как связан след с характеристическим многочленом?

5. а) Предположим, что

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^3 + (a_2x + b_2y + c_2z)^3 + (a_3x + b_3y + c_3z)^3 = xyz.$$

Докажите, что $\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ перпендикулярны.

б) Найдите здесь 15 пар взаимно перпендикулярных векторов.

в) В виде какого наименьшего числа кубов однородных линейных функций можно представить многочлен xyz?

6. В компании 16 мальчиков и 16 девочек. Для любых двух мальчиков есть ровно 8 девочек, которых знает ровно один из них. Докажите, что для любых двух девочек есть ровно 8 мальчиков, которых знает ровно одна из них.