Вступительная олимпиада

1. Существует ли квадратный трёхчлен $f(x)$ такой, что он имеет корни, а $f(\frac{3x+1}{2x+1})$ корней не имеет?

2. Можно ли разбить натуральные числа числа на группы так, чтобы в первую группу вошло одно число, во вторую — два числа, в третью — три числа и т.д., причём сумма чисел в каждой группе была бы точной 2019 степенью?

3. Элемент x_n последовательности x_1, x_2, $\ldots$, x_{2019} назовём *ведущим*, если хотя бы одна из сумм x_n, $x_n + x_{n+1}$, $\ldots$, $x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{2019}$ — положительна. В последовательности нашёлся ведущий элемент. Докажите, что сумма всех ведущих элементов последовательности — положительное число.

4. Диагональ в выпуклом 100-угольнике назовём *хорошей*, если она делит многоугольник на два многоугольника с нечётным количеством вершин. Этот 100-угольник триангулировали (разрезали непересекающимися диагоналями на треугольники) так, что хороших диагоналей получилось ровно 49. Получившиеся треугольники раскрасили в два цвета так, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Докажите, что в этой раскраске поровну чёрных и белых треугольников.

5. Пусть ABC — остроугольный треугольник, причём $AB > AC$, O — центр его описанной окружности, D — середина BC. Точки E и F — проекции D на стороны AB и AC соответственно. Прямая, проходящая через D параллельно AO, пересекает EF в точке M. Докажите, что $EM = FM$.

6. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две бесконечные арифметические прогрессии, у каждой из которых первый член и разность — взаимно простые натуральные числа. Известно, что для любого натурального n хотя бы одно из чисел
$(a_n^2 + a_{n+1}^2)(b_n^2 + b_{n+1}^2)$ или $(a_n^2 + b_n^2)(a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2)$ является точным квадратом. Докажите, что $a_n = b_n$ для любого натурального n.