# Не только про квадратичные вычеты

**1.** Простое нечётное $p$ имеет вид $3k+2$. Докажите, что сравнение $x^3 \equiv a \pmod p$ имеет единственное решение а) при $a=1$; б) при любом вычете $a$.

**2.** При каких простых $p$ уравнение $x^2 = pk+3$ имеет решение в целых числах?

**3.** Докажите, что $(C_{p-1}^k)^2 \equiv 1 \pmod p$ при любом простом нечётном $p$.

**4.** Пусть $\alpha$ — квадратичный вычет по модулю $p$. Докажите, что $\alpha$ — квадратичный вычет по модулю $p^2$.

**5.** Пусть $p>3$ и имеет вид $4k+3$. Докажите, что выполнено сравнение:

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv (-1)^N \pmod p,$$

где $N$ — число квадратичных невычетов по модулю $p$, лежащих между 1 и $\frac{p}{2}$

**6.** Найдите, какие остатки может давать сумма всех квадратичных вычетов по простому модулю $p$.

**7.** При каких простых $p$ и целых неотрицательных $k$ выполняется равенство:

$$(p-1)!+1 = p^k?$$