Рекуррентные соотношения-2

1. Назовём последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ *хорошей*, если для любого $n \geqslant 0$ выполнено соотношения $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Назовём последовательность $\{b_i\}_{i=0}^{n}$ *замечательной*, если для любого $n \geqslant 0$ выполнено соотношения $b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n + 6$.
а) Придумайте любую замечательную последовательность.
б) Что можно сказать про разность хорошей и замечательной последовательностей?
в) Найдите замечательную последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, если $x_0 = 20$, $x_1 = 19$.

2. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_1 = 8, x_2 = 20$ и $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n + 2^n$. Выведите формулу общего члена для этой последовательности

3. Придумайте рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют следующие последовательности:
а) $a_n = 7^n + (-3)^n - 2 \cdot (-4)^n$;
б) $b_n = n2^n$;
в) $c_n = n(n+1)(n+2)3^n$;

4. Когда мы пытаемся найти геометрические прогрессии, то есть последовательности $a_n = \lambda^n$ удовлетворяющие соотношению $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$, мы просто ищем корни многочлена $g_n(\lambda) = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - \ldots - c_k\lambda^{n-k}$.
а) Предположим, что число t является корнем характеристического, а значит и этого многочлена более чем первой кратности. Что тогда можно сказать, подставив t в производную $g_n(\lambda)$?
б) Докажите, что если число t является корнем характеристического многочлена кратности r, то последовательности t^n, nt^n, $\ldots n^{r-1}t^n$ удовлетворяют линейному рекуррентному соотношению.

5. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_1 = 8, x_2 = 20$ и $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n + 2^n$. Выведите формулу общего члена для этой последовательности