Матрицы. Шутки в сторону

Определение: *Определителем* матрицы A размера $n \times n$ называется число

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} sgn\ \sigma \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)},$$

где $sgn\ \sigma = -1$, если σ - нечетная перестановка, и $sgn\ \sigma = 1$, если σ - четная перестановка.

Определение:

1. Докажите, что определитель матрицы A размера $n \times n$ равен нулю тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\overline{v} \neq 0$, что $A\overline{v} = 0$.

2. а) Дано n-мерное линейное пространство V и оператор $f\colon V \to V$. Зафиксируем какую-нибудь n-местную кососимметрическую полилинейную функцию D. Докажите, что существует такое число λ, что для любых $\overline{v_1}, \overline{v_2} \ldots \overline{v_n} \in V$ выполнено $D(f(\overline{v_1}), f(\overline{v_2}), \ldots f(\overline{v_n})) = \lambda D(\overline{v_1}, \overline{v_2} \ldots \overline{v_n})$.
б) Докажите, что определитель матрицы оператора f не зависит от базиса, в котором матрица записывается.
в) Докажите, что для любых двух матриц A и B выполнено равенство $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Определение: Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* для линейного оператора $T : V \to V$, если $T(v) = \alpha v$ для некоторого $\alpha \in k$ (которое называется собственным значением T).

Определение: Матрице A размера $n \times n$ можно сопоставить многочлен $\det(A - tId)$ от переменной t степени n. Он называется *характеристическим многочленом* матрицы.

3. а) Докажите, что все матрицы линейного оператора независимо от выбора базиса имеют один и тот же характеристический многочлен. Таким образом можно говорить о характеристическом многочлене линейного оператора.

б) Докажите, что собственные значения линейного оператора это в точности корни характеристического многочлена в поле k.

К графам!

$A(G)$ — матрица смежности графа G на n вершинах.

Теорема: В $\mathbb{R}^n$ есть базис из собственных векторов этой матрицы (с собственными значениями $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$).

4. . а) Пусть в G степень каждой вершины равна k. Найдите λ_1. Докажите, что G связен тогда и только тогда, когда $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$.

б) Докажите, что количество замкнутых маршрутов длины m в G с отмеченной начальной вершиной равно $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^m$.

в) Вычислите это количество для полного графа на n вершинах.

Определение. Назовём граф *сильно регулярным степени* k, если у него степень каждой вершины равна k, у любых двух смежных вершин нет общего соседа, а у любых двух несмежных вершин ровно один общий сосед.

5. а) (отдельно не сдаём) Сколько вершин у сильно регулярного графа степени k?
б) Пусть A матрица смежности сильно регулярного графа степени k. Составьте равенство, в котором в одной части нечто от матрицы A, а в другой — фиксированная матрица достаточно хорошего вида (назовём её пока что K).
в) Докажите, что если в некотором другом базисе A диагональна, то K — тоже. Что в этом базисе будет у неё на диагонали?
г) **(Теорема Хоффмана-Синглтона)** Докажите, что равенство из пункта б) возможно только если $k = 2, 3, 7, 57$.