Чего вы ждёте?

Пусть задана некоторая дискретная случайная величина X, которая принимает значения x_1, x_2, x_3, ... с вероятностями p_1, p_2, p_3, ...

Сумма $S = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n + \ldots$ называется *математическим ожиданием* случайной величины X и обозначается $E(X)$. Обратите внимание, что не у всякой случайной величины определено математическое ожидание.

1. **a)** Приведите пример дискретной случайной величины, у которой матожидание бесконечно.

b) Приведите пример дискретной случайной величины, у которой нет матожидания.

2. Вы подкидываете монету, вероятность выпадения орла на которой равна p.
a) Сколько в среднем раз придётся совершить бросков до первого выпадения орла?
b) А до десятого выпадения?

3. **a)** Докажите, что для любых дискретных случайных величин $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
b) Верно ли, что для любых дискретных случайных величин $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$?

4. Из контейнера A, в котором было 1000 зеленых и 3000 красных яблок, случайным образом взяли половину яблок и перенесли в контейнер B, в котором к тому времени уже лежало 3000 зеленых и 1000 красных яблок. Затем из контейнера B извлекли одно яблоко. Найти вероятность, что оно зеленое.

5. Пусть за столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек в случайном порядке. Сколько в среднем будет блоков из подряд идущих людей одного пола?

6. **a)** Дана случайная величина X, принимающая целые неотрицательные значения. Обозначим $a_n = P(X \geqslant n)$. Докажите, что $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

b) Из хорошо перетасованной колоды в 52 карты извлекаются карты до появления туза. На каком месте в среднем появляется первый туз?

c) Найдите среднее число бросков симметричной монеты, которое потребуется для того, чтобы получилась серия из 10 выпадений орла подряд.

7. Вы собираете серию игрушек из киндер-сюрпризов, состоящую из n разных игрушек. При покупке очередного яйца каждая игрушка выпадает с вероятностью $\frac{1}{n}$ независимо от предыдущих. Сколько в среднем вам придётся купить киндер-сюрпризов, чтобы собрать всю серию?