Визуализируй!

1. Докажите, что числа от 40 до 99 нельзя разбить на группы по 4 числа таким образом, чтобы числа каждой группы в одном разряде совпадали, а в другом шли подряд (например: (54, 55, 56, 57) или (44, 54, 64, 74)).

2. Петя задумал двузначное число. За ход Вася называет любое двузначное число. Цель Васи — назвать такое число, которое отличалось бы от задуманного в каждом из двух разрядов не более чем на 1. Какое наименьшее число ходов заведомо хватит Васе?

3. Обозначим через c_m количество жителей в m-ом по величине населения доме, а через d_k — количество таких домов, в которых живет не меньше k жителей. Докажите равенство $c_1 + c_2 + \ldots = d_1 + d_2 + \ldots$

4. Найдите $\sum\limits_{n=0}^{10^6} [\sqrt[3]{n}]$.

5. Монах с 8 часов утра до 8 часов вечера поднимался на священную гору. Ночь он провел в молитвах, а на следующий день спускался с горы с 8 утра до 8 вечера по той же дороге. Скорость его оба раза вовсе не была постоянной, иногда он отдыхал, мог и возвращаться за забытой на предыдущем привале вещью. Докажите, что в каком-то месте дороге он в первый и во второй день был ровно в одно и то же время.

6. Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой длины 20, смогли проехать, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись друг друга, два круглых воза радиуса 10, один из которых едет из A в B, а другой — из B в A?

7. Двое флатландцев спускаются с высочайшей вершины Флатландии «Пик кипа» — один по левому склону, а второй по правому. Гора везде выше уровня моря, а её поверхность — график кусочно-линейной непрерывной функции. Докажите, что флатландцы могут достичь моря, все время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря.