Производная-2

1. Пусть $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2. Дана дифференцируемая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[0,1]$, такая, что $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что найдется такая точка $x_0 \in (0,1)$, что $f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

Определение. функция $f(x)$ называется выпуклой вверх (вниз) в точке x, если существует такая окрестность точки x, что все значения функции в этой окрестности лежат ниже (выше) касательной.

3. а) Докажите, что если функция $f(x)$ выпукла вверх (кстати, а что, если вниз?) на отрезке $[a;b]$, то для любых различных точек x_1, x_2 из $[a;b]$ и любых положительных α_1, α_2 таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ выполняется неравенство:
$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$.
б) Докажите **неравенство Йенсена:** пусть даны положительные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ и даны $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$. Тогда

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

(Функци $f(x)$, очевидно, из предыдущего пункта).
в) Когда в пункте б) достигается равенство?

4. Про непрерывную функцию f известно, что: а) f определена на всей числовой прямой; б) f в каждой точке имеет производную; в) график функции f не содержит точек, у которых одна из координат рациональна, а другая — иррациональна. Следует ли отсюда, что график f — прямая?

5. Если функция $y = f(x)$ имеет положительную (отрицательную) вторую производную в каждой точке промежутка $(a;b)$, то $y = f(x)$ выпукла вверх (вниз) на этом промежутке.