Матбой 10 против преподавателей.

1. Натуральные m и n таковы, что $\phi(5^n - 1) = 5^m - 1$. Докажите, что $(m, n) > 1$.

2. Вписанная окружность ω остроугольного треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. На прямой B_1C_1 отмечены такие точки M и N, что $\angle MBC = \angle NCB = 90^\circ$. Прямые A_1M и A_1N второй раз пересекают окружность ω в точках P и Q соответственно. Прямые CP и BQ пересекаются в точке X. Докажите, что прямая A_1X содержит медиану треугольника A_1MN.

3. Дан степенной ряд

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i,$$

все коэффициенты c_i у которого равны 0 или 1. Докажите, что если $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$, то $f\left(\frac{1}{2}\right)$ — иррациональное число.

4. За круглым столом сидят n человек. Есть колода карт, пронумерованных числами от 1 до $3n$. Каждому человеку раздали по три карты. Каждую минуту каждый человек отдаёт самую маленькую свою карточку соседу по часовой стрелке, а самую большую — соседу против часовой стрелки. Вряд ли для вас секрет, что последовательность состояний периодична. Найдите её период.

5. Дима и Артём написали на доске по три положительных числа. Оказалось, что все шесть чисел различны, кроме того суммы и произведения чисел у ребят совпали. Марина нашла множество всех таких целых n, для которых сумма n-ых степеней диминых чисел больше суммы n-ых степеней чисел Артёма. Какие множества у неё могли получиться?

6. На плоскости расположены 60 точек общего положения. Докажите, что их можно разбить на 20 троек так, чтобы все 20 треугольников с вершинами в точках из одной тройки пересекались

7. Назовем ребра графа *изоморфными*, если существует такая перенумерация вершин, что граф переходит сам в себя, а эти ребра переходят друг в друга. Докажите, что для любого n найдется граф с n попарно неизоморфными рёбрами такими, что графы, получающиеся удалением любого из этих ребер изоморфны.

8. Дан треугольник ABC. Точки D и E на прямой AB (порядок точек $D - A - B - E$) таковы, что $AD = AC$ и $BE = BC$. Биссектрисы углов A и B пересекают стороны в точках P и Q, а описанную окружность треугольника ABC в точках M и N соответственно. Прямые, соединяющие A с центром описанной окружности треугольника BME и B с центром описанной окружности треугольника AND, пересекаются в точке X. Докажите, что $CX \perp PQ$.

9. Найдите все такие многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами, что для любого натурального $n > 2019$ число $n^{n-1} - 1$ делится на $f(n)$.

10. Куб $10 \times 10 \times 10$ разбит на единичные кубики. Изначально все кубики белые. За один ход можно взять любой целиком белый столбик $1 \times 1 \times n$ (в любом направлении) и закрасить в нём в чёрный цвет любой кубик. Какое наибольшее количество кубиков можно таким образом отметить?