Дисперсия и метод второго момента

Дисперсией случайной величины X называется число $E(X-E(X))^2$, которое обозначается $D(X)$.

1. Докажите, что дисперсия дискретной случайной величины неотрицательна, причём дисперсия равна нулю в том и только том случае, если эта случайная величина — константа.

2. Докажите, что $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

3. Вы подкидываете монету, вероятность выпадения орла на которой равна p. Пусть X — количество попыток до первого выпадения орла. Найдите $D(X)$.

Определение. Дискретные случайные величины X_1, X_2, ..., X_n называются *независимыми*, если для любых $i_1, i_2, \ldots, i_n$ выполнено

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n)$$

4. Для любого натурального n приведите пример таких n случайных величин, что для любого $k < n$ любые k из них независимы, но все n зависимы.

5. Докажите, что для независимых дискретных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$

a) $E(X_1 X_2 \ldots X_n) = E(X_1)E(X_2)\ldots E(X_n)$

b) $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_n)$

6. Пусть X — дискретная случайная величина, у которой $E(X) < \infty$, $D(X) < \infty$.

a) Неравество Маркова. Пусть X принимает только неотрицательные значения. Докажите, что $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$, где $a > 0$. Для фиксированного a приведите пример такой X, что неравенство обращается в равенство.

b) Неравество Чебышёва. Докажите, что $P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{D(X)}{a^2}$, где $a > 0$. Для фиксированного a приведите пример такой X, что неравенство обращается в равенство.

c) Выведите отсюда частный случай закона больших чисел для симметричной монеты (задача 5 из первого листка по вероятности).

7. Цель этой задачи в том, чтобы доказать следующий факт: Если $\{\alpha_n\}$ — последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности, то вероятность существования треугольника в графе $G(n, \frac{\alpha_n}{n})$ стремится к единице. Здесь $G(n, p)$ — граф на n вершинах, в котором ребро между любыми двумя вершинами проводится с вероятностью p.

а) Пусть T_n - число треугольников в $G(n, \frac{\alpha_n}{n})$. Вычислите $E(T_n)$ и $Var(T_n)$.

б) Докажите, что $\frac{Var(T_n)}{E(T_n)^2} \to 0$ при $n \to \infty$ и выведите из этого утверждение задачи.