# Многочлен как функция

**1.** Пусть $P, Q$ — многочлены степени больше 0 такие, что $P(P(x)) = Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Верно ли, что $P(x) = Q(x)$?

**2.** Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ десятой степени, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $P(x+1) = Q(x-1)$ имеет хотя бы один действительный корень.

**3.** Пусть $P(x)$ — многочлен нечетной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

**4.** Дана бесконечная последовательность различных натуральных чисел $a_i$. Пусть $P(x)$ многочлен такой, что $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, \ldots P(a_{i+1}) = a_i, \ldots$. Какой может быть степень многочлена $P(x)$.

**5.** Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число $a_0$ так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.

**6.** Известно, что при $i$ от 1 до $n$ числа $a_i$ — отрицательны. Докажите, что уравнение $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+a_1} + \frac{1}{x+a_2} + \ldots + \frac{1}{x+a_n}$ имеет $n$ вещественных корней.

**7.** Шесть членов команды Фаталии на Международной математической олимпиаде отбираются из 13 кандидатов. На отборочной олимпиаде кандидаты набрали $a_1$, $a_2$, …, $a_{13}$ баллов ($a_i \neq a_j$ при $i \neq j$).
Руководитель команды заранее выбрал 6 кандидатов и теперь хочет, чтобы в команду попали именно они. С этой целью он подбирает многочлен $P(x)$ и вычисляет *творческий потенциал* каждого кандидата по формуле $c_i = P(a_i)$. При каком минимальном $n$ он заведомо сможет подобрать такой многочлен $P(x)$ степени не выше $n$, что творческий потенциал любого из его шести кандидатов окажется строго больше, чем у каждого из семи оставшихся?