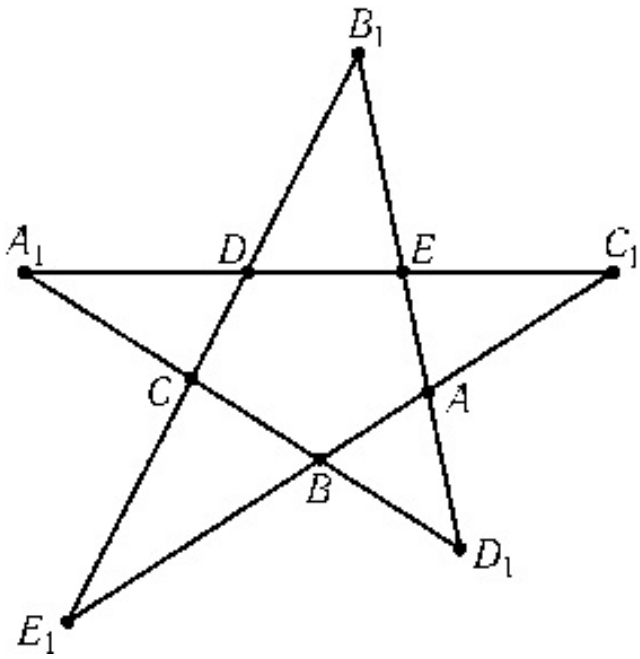
Как много синусов хороших...

Теорема синусов: Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c. Углы α, β, γ лежат напротив сторон a, b, c соответственно. Тогда $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

1. Четырёхугольник $ABCD$ — вписанный. Лучи AB и DC пересекаются в точке M, а лучи BC и AD — в точке N. Известно, что $BM = DN$. Докажите, что $CM = CN$.

2. Обозначим вершины и точки звеньев (неправильной) пятиконечной звезды так, как показано на рис. Докажите, что

$$A_1C \cdot B_1D \cdot C_1E \cdot D_1A \cdot E_1B = A_1D \cdot B_1E \cdot C_1A \cdot D_1B \cdot E_1C.$$



3. (**Теорема Чевы в синусной форме**). На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1} \cdot \frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1} \cdot \frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1} = 1.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол при вершине A равен 80°. Внутри треугольника взята точка M так, что $\angle MBC = 30^\circ$ и $\angle MCB = 10^\circ$. Доказать, что $\angle AMC = 70^\circ$.

5. Докажите, что два угла треугольника однозначно восстанавливаются, если известна их сумма и отношение их синусов.

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, $AC = a$, $BD = b$, $AB \perp CD$. Найдите радиус окружности.

7. Две окружности радиусов R и r касаются прямой l в точках A и B и пересекаются в точках C и D. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC не зависит от длины отрезка AB.

8. Докажите, что в правильном восемнадцатиугольнике $A_1, A_2, \ldots A_{18}$ диагонали A_1A_{13}, A_3A пересекаются в одной точке.