Игры с функциями

1. а) Докажите, что если функция является инъекцией и непрерывна, то она монотонная; б) Верно ли, что если функция монотонна и непрерывна, то она является инъекцией; в) А верно ли, что если функция является инъекцией и монотонна, то она непрерывна? г) Верно ли, что если функция сюръективна и монотонна, то она всё-таки непрерывна?

2. Найдите все точки разрыва функции Римана:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \text{ (дробь несократима)} \end{cases}$$

3. Существует ли функция, область определения которой можно разбить на два непересекающихся континуальных множества, таких, что во всех точках одного из них она непрерывна, а во всех точках другого — нет?

4. Пусть $f(x)$ — некоторая непрерывная функция, про которую известно, что уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что тогда и уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет корней.

5. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0, 1]$. Докажите, что на этом отрезке найдётся число x, такое, что
$\frac{1}{n} \cdot (|x - x_1| + |x - x_2| + \ldots + |x - x_n|) = \frac{1}{2}$

6. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$ и принимает значения из этого же отрезка. Докажите, что существует такая точка $x_0 \in [0; 1]$, что $f(x_0) = x_0$.

7. Существует ли функция, непрерывная на отрезке $[0; 1]$, которая в рациональных точках принимает иррациональные значения, а в иррациональных точках — рациональные, и при этом все значения принадлежат отрезку $[0; 1]$?