Открытые множества и их друзья.

Определение. Назовём множество X *метрическим пространством*, если на нём задана функция расстояния $dist\colon X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:
1) (неотрицательность) $dist(a,b) \geqslant 0$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b$.
2) (симметричность) $dist(a,b) = dist(b,a)$
3) (неравенство треугольника) $dist(a,b) + dist(b,c) \geqslant dist(a,c)$.

Это не совсем корректно в общем случае, но мы в большинстве случаев для простоты обозначений будем разрешать обозначать $dist(a,b)$ просто $\|a-b\|$.

Определение. Рассмотрим точку a в метрическом пространстве X и положительное число r. *Открытым шаром* с центром a и радиусом r или *r-окрестностью* точки a назовём множество

$$B_r(a) = \{x \in X \,|\, dist(a,x) < r\}.$$

1. Как надо задать расстояние между точками на плоскости, чтобы в получившемся метрическом пространстве любая окрестность любой точки являлась
а) внутренностью квадрата со сторонами, параллельными осям;
б) внутренностью квадрата со сторонами, не параллельными осям;
в) внутренностью эллипса, но не кругом?

Определение. Множество $A \subset X$ называется *открытым*, если всякая точка множества входит в множество A вместе с некоторой своей окрестностью. Или более формально

$$\forall a \in A \exists r > 0 : B_r(a) \subset A.$$

2. Является ли открытым множество A в метрическом пространстве X, на котором задано расстояние $dist(\cdot,\cdot)$, если
а) $A = X$;
б) $X = \mathbb{R}$, $dist(a,b) = |a-b|$, $A = (c,d)$;
в) $X = [0,1]$, $dist(a,b) = |a-b|$, A – множество всех чисел, в десятичной записи которых есть цифра 7?

3. Верно ли, что является открытым множеством
а) объединение любого конечного набора открытых множеств;
б) объединение любого семейства открытых множеств;
в) пересечение любого конечного набора открытых множеств;
г) пересечение любого семейства открытых множеств?

4. Докажите, что любое открытое множество является объединением окрестностей.

Определение. Множество $A \subset X$ называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Определение. Дано множество $A \subset X$. Скажем, что семейство множеств Λ покрывает A, если их объединение содержит A.

Определение. Назовём множество *компактным*, если из любого его открытого покрытия (то есть покрытия открытыми множествами) можно выбрать конечное подпокрытие.

5. Докажите, что отрезок является компактным множеством ($dist(a, b) = |a - b|$). *Подсказка. Здесь необходимо воспользоваться одной из аксиом полноты. Например той, что любое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.*

6. Докажите, что следующие множества являются компактными:
а) замкнутое подмножество компактного множества;
б) квадрат с границей (расстояние будем считать, например стандартное);
в) n-мерный куб с границей (расстояние вновь евклидовое).