# Двойное отношение

**Определение 1**: *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек $A, B, C, D$, лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$.
**Определение 2**: *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых $a, b, c, d$, называется величина $(a, b, c, d) = \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{c})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{c})} : \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{d})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{d})}$, где $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых $a, b, c, d$.
**Замечание**: Эта величина не зависит от выбора направлений векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$.
**Определение 3**: Точки $A, B, C, D$ лежат на окружности $S$. Пусть $X$ — произвольная точка этой окружности. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек $A, B, C, D$ называется величина $(A, B, C, D) = (XA, XB, XC, XD)$.
**Определение**: четвёрка точек (прямых) $A$, $B$, $C$ и $D$ называется гармонической, если $(A, B, C, D) = -1$.
**Теорема:** Через точку $X$ проходят четыре прямые: $a$, $b$, $c$ и $d$. Прямая $\ell$ пересекает их в точках $A$, $B$, $C$ и $D$ соответственно. Тогда $(A, B, C, D) = (a, b, c, d)$.

**1.** Докажите, что если двойное отношение $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

**2.** Докажите, что если $ABCD$ — гармонический четырёхугольник, то $(A, C, B, D)$ — гармоническая четвёрка точек.

**3.** На вещественной прямой отметим точки $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$. Докажите, что $(A, B, O, X) = -1$ тогда и только тогда, когда координата $X$ равна среднему гармоническому чисел $a$ и $b$. (Отсюда и взялось название гармоническая четверка).

**4.** Известно, что $(A, B, C, D) = k$. Какие значения может принимать двойное отношение этой же четвёрки точек, взятой в другом порядке?

**5.** Докажите, что по трём точкам $A$, $B$ и $C$, а также по двойному отношению четвёрки $(A, B, C, D)$ однозначно восстанавливается четвёртая точка $D$.

**6.** Докажите, используя двойные отношения, следующие задачи: а) Лемму об изогоналях; б) (**теорема Паскаля**): Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ и $F$ лежат на одной окружности. Прямые $AB$ и $DE$ пересекаются в точке $X$, прямые $BC$ и $EF$ — в точке $Y$, а прямые $CD$ и $AF$ — в точке $Z$. Докажите, что $X$, $Y$ и $Z$ лежат на одной прямой; в) (**теорема о бабочке**) Прямая $\ell$ пересекает окружность $S$ с центром $O$, точка $P$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки $O$ на $\ell$. На окружности $S$ отмечены точки $A, B, C, D$ такие, что прямые $BC$ и $AD$ пересекаются в точке $P$. Прямые $AB$ и $CD$ пересекают $\ell$ в точках $X$ и $Z$. Докажите, что $XP = PZ$.

**7.** В треугольнике $ABC$ продлили симедиану угла $A$ до пересечения с описанной окружностью в точке $D$. Точка $H$ — ортоцентр треугольника $ABC$. Точка $A'$ — вторая точка пересечения прямой $AH$ с описанной окружностью треугольника $ABC$. Аналогично определяются точки $B'$ и $C'$. В треугольнике $A'B'C'$ провели симедиану угла $A$ до пересечения с описанной окружностью в точке $D'$. Докажите, что $D$, $H$ и $D'$ лежат на одной прямой.

**8.** На плоскости даны 4 точки $A$, $B$, $C$ и $T$ общего положения. Пусть $P$ и $Q$ — основания перпендикуляров, опущенных из точки $T$ на прямые $AB$ и $AC$ соответственно, а $R$ и $S$ — основания перпендикуляров, опущенных из $A$ на прямые $TC$ и $TB$ соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых $PR$ и $QS$ лежит на прямой $BC$.