Немного проекции

Исключительной прямой центральной проекции называется прямая тех точек, у которых нет соответствующих им точек на другой плоскости.

1. Докажите следующие свойства центрального проектирования:
а) если прямые пересекаются вне исключительной прямой, то их образы пересекаются тоже вне исключительной прямой;
б) если прямые пересекаются на исключительной прямой, то их образы параллельны;
в) если прямые параллельны друг другу и параллельны исключительной прямой, то их образы также параллельны между собой и параллельны исключительной прямой
г) если прямые параллельны друг другу и НЕ параллельны исключительной прямой, то их образы пересекаются на исключительной прямой.

2. Докажите, что при центральной проекции сохраняется отношение $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, если точки A, B и C лежат на прямой, параллельной исключительной.

3. (Теорема Паппа) На прямой a выбраны точки A_1, B_1 и C_1, а на прямой b — точки A_2, B_2 и C_2. Пусть C — точка пересечения прямых A_1B_2 и B_1A_2. Аналогично определяются точки A и B. Докажите, что точки A, B и C — лежат на одной прямой.

4. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, а E, F – — точки пересечения продолжений сторон AB и CD, BC и AD соответственно. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках K и L, а прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках M и N. Докажите, что точка X пересечения прямых KN и LM лежит на прямой EF.

5. (Теорема Дезарга) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 коллинеарны тогда и только тогда, точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, а также прямых AC и A_1C_1 лежат на одной прямой.