[Кировская Летняя Многопредметная Школа]

[*3–28 июля 2019 г.*] группа: Пока общая *3 июля 2019 г.*

Вступительный тест

ФИО: _____

1. а) Докажите по определению предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$;

_____

_____

б) Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3 \sin n}{n^3-101}$

_____

_____

2. Выразите a_n через n, если последовательность a_n удовлетворяет условиям $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 6a_n - 7a_{n-1}$.

_____

3. Приведите пример всюду определённой функции, которая

а) непрерывна всюду, кроме двух точек

_____

б) НЕ непрерывна всюду, кроме двух точек

_____

4. Найдите производную функции

а) $(\frac{1}{\sin^2 x})' =$ _____

б) $(x^{\sin x})' =$ _____

5. а) При аффинном преобразовании точки $A = (0, 0)$ и $B = (2, 0)$ перешли в точки $A' = (1, 1)$ и $B' = (2, 3)$. Куда при этом аффинном преобразовании переходит точка $C = (5, 0)$?

_____

б) Точка $D = (0, 1)$ переходит при этом преобразовании в точку $D' = (-2, 3)$. Куда может переходит точка $E = (3, 4)$?

6. Мальчик Гриша утверждает, что тройка является первообразным корнем по модулю 43. Что он имеет в виду?

7. По каким модулям вообще бывают первообразные корни?

8. Сформулируйте лемму Холла. Если вы знаете лемму Холла с дефицитом — сформулируйте ещё и её.

9. В жюри из трех человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий для вынесения решения бросает монетку. Решение принимается большинством голосов. Жюри из одного человека принимает верное решение с вероятностью p. Для какого жюри вероятность принять правильное решение больше, и на сколько?

10. *На плоскости случайно выбраны три точки. Какова вероятность того, что треугольник с вершинами в них будет остроугольным?*

Что не так с формулировкой этой задачи?

11. Вычислите произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Вычислите $\left(\frac{6}{101}\right)$. Ответ обоснуйте.