# Рекуррентные соотношения

**1.** Сколько способов Ване выбрать из 11 чисел несколько (больше одного) чисел, чтобы не было выбрано трёх подряд идущих чисел?

**2.** 55 боксёров участвовали в турнире по системе "проигравший выбывает". Бои шли последовательно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боёв мог провести победитель турнира?

**3.** а) Найдите все геометрические прогрессии, которые удовлетворяют соотношению $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ б) Докажите формулу Бине для чисел Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$):

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

**4.** Сколькими способами можно выписать в строчку $n$ ноликов, крестиков и звёздочек, так, чтобы звёздочки не стояли рядом с крестиками?

**5.** Докажите, что число

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$$

является либо точным квадратом, либо упятерённым точным квадратом.

**6.** Таракан ползает по рёбрам правильного тетраэдра $ABCD$ со скоростью 1 ребро в минуту. В каждой вершине он с вероятностью $1/3$ выбирает, по какому ребру ему ползти дальше. Какова вероятность, что через 1 час таракан приползёт в вершину $A$?

**7.** Угадайте и докажите явную формулу $n$-ого члена последовательности для следующих (нелинейных) рекуррентных соотношений: $x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+1} = x_n + 2n + 1$

**8.** Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, с условием $3f(n) - 2f(f(n)) = n$.