Напоминания о линейной алгебре.

Определение из прошлого года.

Пусть даны: 1) Множество V элементов произвольной природы, называемых *векторами*;
2) Поле F, называемое в дальнейшем *полем скаляров*;
3) Операция сложения на множестве V, сопоставляющая паре элементов $u, v \in V$ элемент $u + v \in V$;
4) Операция умножения элемента множества V на скаляр, сопоставляющая паре элементов (λ, v), где $\lambda \in F$, $v \in V$ элемент $\lambda v \in V$.

При этом выполнены следующие свойства *(аксиомы векторного пространства)*:

- $x + y = y + x$ для любых $x, y \in V$;
- $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- существует такой элемент $0 \in V$, что $x + 0 = x$ для любого $x \in V$;
- для любого $x \in V$ существует $y \in V$ такой, что $x + y = 0$;
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для любых $\alpha, \beta \in F$ и $x \in V$;
- $1 \cdot x = x$ для единицы из поля F и любого $x \in V$;
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для любых $\alpha, \beta \in F$, $x \in V$;
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любых $\alpha \in F$, $x, y \in V$.

Тогда множество V называется *линейным пространством* или *векторным пространством* над полем F.

Определение. Две системы линейных уравнений (от одинакового набора переменных) называются *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Определение Рассмотрим *элементарные преобразования* системы линейных уравнений трех типов:

ЭП1. к строке прибавляем другую строку, умноженную на число;

ЭП2. строку умножаем на ненулевое число;

ЭП3. меняем местами две строки.

Упр. Если одна система линейных уравнений получается из другой путем применения ЭП1-ЭП3, то эти системы эквивалентны.

1. **Метод Гаусса.** При помощи ЭП1-ЭП3 каждую систему линейных уравнений можно привести к ступенчатому виду, т.е. к виду

$$\begin{cases} b_{1e}x_e + \cdots\cdots\cdots\cdots + b_{1n}x_n & = & d_1 \\ b_{2k}x_k + \cdots\cdots\cdots + b_{2n}x_n & = & d_2 \\ b_{3l}x_l + \cdots\cdots + b_{3n}x_n & = & d_3 \\ \ddots \qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{rs}x_s + \cdots + b_{rn}x_n & = & d_r \\ 0 & = & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & = & d_m \end{cases},$$

где $b_{1e}b_{2k}b_{3l}\ldots b_{rs} \neq 0$, $e < k < l < \cdots < s$.

Определение. Система линейных уравнений называется *однородной*, если все правые части равны 0.

2. Докажите, что если в однородной системе неизвестных больше, чем уравнений, то у неё есть ненулевое решение.

Определение. Дано векторное пространство V над полем F. Назовём множество векторов E *линейно независимым*, если нельзя выбрать $e_1, e_2 \ldots e_n \in E$ и ненулевые $c_1, c_2 \ldots c_n \in F$ такие, что $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n = 0$.

Назовём множество векторов $E \subset V$ *порождающим*, если для любого вектора $v \in V$ существуют такие $e_1, e_2 \ldots e_n \in E$ и $a_1, a_2 \ldots a_n \in F$, что $a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n = v$.

Порождающее и линейно независимое множество будем называть *базисом* пространства V.

Назовём множество $U \subset V$ *подпространством* пространства V, если оно само по себе является линейным пространством над тем же полем.

3. С помощью метода Гаусса решите систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x + 12y + 4z = 16 \\ 2y + 3z + 4t = 8 \\ 4x + 2z + 12t = 4 \\ 3x + 4y + 2t = 2 \end{cases}$$

4. **Основная лемма о линейной зависимости.** Даны натуральные числа $m > n$. Даны векторы $e_1, e_2 \ldots e_n$, через них выражены векторы $v_1, v_2 \ldots v_m$. Докажите, что они линейно зависимы.

5. В каждой клетке таблицы 2019×2019 написано число.
а) Докажите, что если векторы-столбцы линейно зависимы, то и векторы-строки тоже линейно зависимы.
б) Докажите, что если векторы-столбцы линейно независимы, то и векторы-строки линейно независимы.

6. Дана система с n уравнениями и n неизвестными, у которой все коэффициенты и правые части ненулевые. Докажите, что можно умножить каждый коэффициент на какое-нибудь положительное число, чтобы получилась система без решений.