Неравенства. Начинаем немного применять анализ.

Сегодня мы попробуем применить “Штурм на троих” или так называемый UVW-метод. Во всех этих задачах надо фиксировать сумму и сумму попарных произведений и смотреть, как части неравенства зависят от произведения.

1. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Докажите, что $a+b+c \leqslant 3$.
а) Докажите это неравенство с помощью нахождения минимума на компакте .
б) Докажите это неравенство с помощью метода UVW.

2. Для вещественных x, y, z выполнено $x + y + z = 0$. Докажите, что

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 3 \geqslant 6xyz.$$

а) Докажите это неравенство с помощью нахождения минимума на компакте .
б) Докажите это неравенство с помощью метода UVW.

3. Вещественные числа x, y, z таковы, что $x+y+z = x^2+y^2+z^2 = 1$. Какое наименьшее значение может принимать $x^3 + y^3 + z^3$?

4. Для действительных x, y, z докажите, что

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geqslant (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^2.$$

5. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$a^5 + b^5 + c^5 + abc(ab + bc + ca) \geqslant a^2b^2(a + b) + a^2c^2(a + c) + b^2c^2(b + c).$$

6. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что никакие два из них не равны нулю. Докажите, что

$$(ab + bc + ca)\left(\frac{1}{(a + b)^2} + \frac{1}{(b + c)^2} + \frac{1}{(c + a)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}$$

7. Неотрицательные a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{9 - ab} + \frac{1}{9 - bc} + \frac{1}{9 - ca} \leqslant \frac{3}{8}$$