Геометрия. Разминка, потом бег с постоянной скоростью.

Разминка.

1. Пусть M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и BA треугольника ABC, K — точка пересечания биссектрисы угла A с прямой MN. Доказать, что $\angle AKC = 90^\circ$.

2. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности ω, вписанной в треугольник ABC, отличные от прямой AC. Они касаются ω в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

Основная тренировка.

3. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN. На стороне AB выбрана точка P, а на сторонах AC и BC выбраны точки L и K такие, что PL параллельно BN, а PK параллельно AM. Докажите, что отрезок LK делится медианами на три равные части.

4. **(Прямая Гаусса).** Докажите, что середины диагоналей четырёхугольника и середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежат на одной прямой.

5. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M, угол между ними равен 120°, $AM = MD$. На стороне BC выбрана произвольная точка E, через неё проведены прямые параллельные диагоналям, которые пересекают четырёхугольник второй раз в точках P и Q. Докажите, что центр описанной окружности треугольника PEQ лежит на прямой AD.

6. Пусть O и H — соответственно центр описанной окружности и ортоцентр остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, а AP и AM — соответственно высота и медиана этого треугольника. Пусть D — проекция точки A на прямую OH. Окружность ω с центром S проходит через точки A и D и пересекает вторично отрезки AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XSY равноудалён от P и M.

7. На плоскости даны вписанный четырехугольник $ABCD$ и точка X. Точки X_{AB}, X_{AC}, X_{AD}, X_{BC}, X_{BD}, X_{CD} — проекции точки X на прямые AB, AC, AD, BC, BD, CD, соответственно. Докажите, что середины отрезков $X_{AB}X_{CD}$, $X_{AC}X_{BD}$ и $X_{AD}X_{BC}$ лежат на одной прямой.

Вишенка на торте.

8. На ребрах AB, BC, CD, DA тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно. Точки K', L', M', N' симметричны точкам K, L, M, N относительно середин ребер AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что объемы тетраэдров $KLMN$ и $K'L'M'N'$ равны.