Матрицы. Революция.

Немного практики.

1. Найдите обратные к следующим матрицам:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Линейное отображение f в базисе e_1, e_2, e_3 записывается матрицей

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 6 & -2 & -5 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

а) Какой матрицей запишется f в базисе $e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $-e_1 - e_2 + e_3$, $-2e_1 - 2e_2 + e_3$.

б) Существует ли базис, в котором f запишется диагональной матрицей?

3. Линейное отображение f в базисе e_1, e_2 записывается матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

В каком базисе f запишется диагональной матрицей?

4. Сколько существует обратимых матриц размера 3×3 над полем из трёх элементов?

Про полилинейные отображения.

Определение. Дано векторное пространство V над полем F. Назовём отображение $f\colon V \times V \times V \ldots \times V \to F$ *полилинейным*, если оно линейное по каждому аргументу.

Определение. Полилинейное отображение $f(v_1, v_2, \ldots v_n)$ назовём *кососимметрическим*, если для любых векторов $v_1, v_2, \ldots v_n$ и любых индексов $1 \leqslant i < j \leqslant n$ имеет место равенство

$$f(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots v_n) = -f(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots v_n).$$

5. Чему равна *ориентированная площадь* параллелограмма, натянутого на векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

6. Дано векторное пространство $V = \mathbb{R}^3$ с базисом e_1, e_2, e_3, f — трёхместное кососимметрическое полилинейное отображение на нём. Известно, что $f(e_1, e_2, e_3) = 2019$. Найдите

а) $f(e_1 + e_2 - e_3, 2e_2 + e_3 - e_1, 2e_3 + e_1 - e_2)$;

б) $f(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3, a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3, a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3)$.

7. Докажите, что все кососимметрические полилинейные n-местные функции в n-мерном пространстве пропорциональны.