В основном про показатели

Определение: показателем вычета a по модулю m называется наименьшее натуральное число t, что $a^t \equiv 1 \pmod{m}$. Очевидно, что показатель корректно определён тогда и только тогда, когда $(a, m) = 1$.

1. (**Основное свойство показателя**) Пусть a и n взаимно просты. Докажите, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда d делится на t.

2. Докажите, что в разложении на простые множители числа $2^q - 1$, где $q \in \mathbb{P}$, любой множитель будет давать остаток 1 по модулю q

3. Докажите, что уравнение $x^3 \equiv a \pmod{p}$ при $p = 3k + 1$ имеет либо три решения, либо ни одного.

4. Рассмотрим для простого нечётного числа p арифметическую прогрессию $a_1, a_2, \ldots a_p$ с разностью, не делящейся на p. Докажите, что в ней можно выделить такой элемент a_i, что выполняется равенство: $a_i + a_1 a_2 \ldots a_p \equiv 0 \pmod{p^2}$

5. Пусть $p > 5$ — простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби k/p $(0 < k < p)$ четна и равна $2n$. Докажите, что если этот период разбить на два куска длины n, то их сумма будет равна $99\ldots9$ (n девяток). Например, $1/7 = 0.(142857)$, $142 + 857 = 999$.

6. Число $k = 2^{2^n} + 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Докажите, что k простое тогда и только тогда, когда $3^{(k-1)/2} + 1$ делится на k.

7. Найдите все простые p и q такие, что $p^2 + 1 | 2003^q + 1$, а $q^2 + 1 | 2003^p + 1$