Разнобой 4.

1. Существуют ли два различных 2019-значных натуральных числа, что:
- одно является точным квадратом, другое — точным кубом;
- оба числа делятся на 123456789
- они отличаются друг от друга перестановкой цифр?

2. Дан остроугольный треугольник ABC с $AB > AC$, пусть M —- середина BC. P —- точка внутри треугольника AMC такая, что $\angle MAB = \angle PAC$. Пусть O, O_1, O_2 центры описанных окружностей треугольников ABC, ABP, ACP соответственно. Докажите, что прямая AO делит отрезок O_1O_2 пополам.

3. Дано натуральное $n \geq 2$. Найдите все действительные a, для которых существуют действительные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие

$$x_1(1 - x_2) = x_2(1 - x_3) = \cdots = x_n(1 - x_1) = a.$$

4. Пусть A — какое-то множество из N остатков по модулю N^2. Докажите, что существует такое множество B из N остатков по модулю N^2, что в множестве $A + B$ хотя бы $\frac{N^2}{2}$ элементов. ($A + B = \{a_i + b_j | a_i \in A, b_j \in B\}$).