Шестнадцатая Летняя многопредметная школа Кировской области

К.А.Кноп, О.С.Нечаева, Р.А.Семизаров

РАБОЧИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вишкиль 3–27 июля 2000 г.

Предисловие

Театр начинается с вешалки

К.С.Станиславский

Мы не театроведы, мы – математики. Именно поэтому мы не поем со сцены и не ставим спектакли, а ведем занятия для одаренных детей в математических кружках. Каждому из нас кажется, что иногда это получается неплохо: среди наших учеников есть победители и призеры олимпиад всех уровней, включая международные. Но больше всего нам нравится работать не с пресытившимися олимпиадниками, а с теми детьми, которые только-только делают первые шаги в математике. Ведь подобно театру, серьезная наука начинается задолго до поступления в вуз – например, с факультатива или кружка в 5–6 классах.

В этом году нам удалось собраться в правильное время в правильном месте – и именно благодаря этому Вы, наш уважаемый Читатель, сейчас держите в руках эту брошюру. В ней – краткий конспект занятий со школьниками параллели шестого класса XVI Летней Многопредметной Школы Кировской области. ("Ничего себе краткий", – подумаете Вы, – "тут же больше полусотни страниц". Вся проблема в том, что если бы мы сделали конспект полным, он бы не уложился и в полторы сотни страниц... Ведь основу этого конспекта составили листки, выдававшиеся детям, а почти все наши устные комментарии и дополнения, увы, "к делу не пришьёшь". Впрочем, мы постарались добавить сюда указания, решения и ответы к некоторым задачам – они в тексте выделены шрифтом пишущей машинки.)

На многих занятиях мы совершенно сознательно выдавали детям намного больше задач, чем они успевали решать. Мы надеемся, что дома, в спокойной обстановке они еще не единожды вернутся к нашим рабочим листикам и прорешают то, что не удалось решить здесь.

Авторы выражают благодарность И.С.Рубанову и администрации Кировской ЛМШ за то, что у нас были хорошие и добросовестные ученики. Большое спасибо А.В.Шаповалову, А.Н.Савину и В.А.Мищенко за замечательные листочки занятий с шестиклассниками в ЛМШ-99, многие из которых послужили нам отправной точкой. Мы признательны также многим другим авторам задачных подборок ЛМШ прошлых лет.

Еще большее спасибо Л.В.Баевой, А.Н.Конькову, Л.Ю.Лазаревой и С.А.Зеленовой, – без их помощи в подготовке и проведении занятий мы просто не смогли бы обойтись.

К.А.Кноп, О.С.Нечаева, Р.А.Семизаров

Чётность

Чётность-1.

Чередование

1. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей разного пола чётно.

2. На плоскости расположено 11 шестеренок, соединенных в кольцо. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно?

3. Шахматный конь вышел с поля $a1$ и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

4. Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно по одному разу?

5. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все ее звенья?

6. На хоккейном поле лежат три шайбы A, B и C. Хоккеист бьет по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 1999 раз. Могут ли после этого все шайбы остаться на исходных местах?

7. На клетчатой бумаге нарисован замкнутый путь, идущий по линиям сетки. Может ли он иметь длину 1999? А длину 2000?

Разбиение на пары

8. Можно ли нарисовать 9-звенную ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

9. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на $90°$ каждые 15 минут. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.

10. Все костяшки домино выложили в цепь по правилам. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков оказалось на другом?

11. Из набора домино выбросили все кости с “пустышками”. Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд по правилам?

12. На доске 25×25 расставлено 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

13. Пусть расположение шашек в предыдущей задаче симметрично относительно обоих диагоналей. Докажите, что одна из шашек стоит в центральной клетке.

Чётность-2.

14. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 1999?

15. Можно ли разменять 25 тугриков десятью купюрами достоинством в 1, 3 и 5 тугриков?

16. 98 спичек разложили в 19 коробков и на каждом написали количество спичек в этом коробке. Может ли произведение этих чисел быть нечётным числом?

17. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция закричала “Это обман!”. Почему?

18. а) На столе лежит 21 монета решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть любые 20 монет. Можно ли за несколько операций добиться, чтобы все монеты легли орлом вверх? б) Тот же вопрос, если монет 20, а разрешается переворачивать по 19.

19. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки “+” и “−” так, чтобы в результате получился 0?

20. Произведение 10 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

21. В вершинах куба расставлены числа 1 и -1. Затем в центре каждой грани написали произведение всех чисел, стоящих в вершинах этой грани. Может ли сумма всех 14 чисел равняться 0?

22. Народная дружина состоит из 100 человек. Каждый день они дежурят по трое. Может ли в некоторый момент оказаться, что каждый дежурил с каждым ровно один раз?

Чётность-3. Несколько задач посложнее...

23. В квадрате 5×5 стоят числа 1 и -1. Вычислили все произведения этих чисел по строкам и по столбцам. Доказать, что сумма этих десяти чисел не равна нулю.

24. В вершинах n-угольника стоят числа 1 и -1. На каждой стороне написали произведение чисел на ее концах. Оказалось, что сумма чисел на сторонах равна нулю. Доказать, что а) n чётно; б) n делится на 4.

25. По кругу расставлены нули и единицы (и те, и другие присутствуют). Каждое число, у которого два соседа одинаковы, заменяют на 0, а остальные числа – на 1. Такую операцию проводят несколько раз. Могут ли все числа стать нулями, если их 13 штук? Могут ли все числа стать единицами, если их 14 штук?

26. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел?

27. Петя купил общую тетрадь из 96 листов и пронумеровал страницы числами от 1 до 192 по порядку. Хулиган Вася вырвал 25 листов и сложил 50 написанных на них чисел. Мог ли он в сумме получить число 2000?

28. Имеется таблица 1999×2001. Известно, что произведение чисел в любой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбец, произведение чисел в котором тоже отрицательно.

29. На доске написаны числа от 1 до 2001. Разрешается производить следующую операцию: стереть два соседних числа и на их месте записать модуль их разности. Может ли на доске остаться один 0?

30. Найти наибольшее значение, которое может принимать выражение

$$aek - afh + bfg - bdk + cdh - ceg,$$

если каждое из чисел a, b, c, d, e, f, g, h, k равно ± 1.

Решение: Нетрудно проверить, что значение выражения – чётное число. Ясно, что больше 6 оно быть не может. Кроме того, для того, чтобы оно равнялось 6, необходимо, чтобы слагаемые, взятые со знаком "$+$" (aek, bfg, cdh), были положительны, а слагаемые, взятые со знаком "$-$" (afh, bdk, ceg), были отрицательны. Но $aek \cdot bfg \cdot cdh = afh \cdot bdk \cdot ceg$. Остаётся показать, что выражение может принимать значение 4. Например, $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 1$, $e = 1$, $f = 1$, $g = 1$, $h = -1$, $k = 1$.
Ответ: 4

Комбинаторика и кодировки

Комбинаторика-1.

Комбинаторные рассуждения для многих трудны, поскольку ненаглядны. Комбинации – это объекты несуществующие, и потому для многих – бессмысленные. Поэтому здесь подобраны задачи про заведомо существующие осмысленные объекты. Очень важно сразу научить детей оформлять рассуждения в графическом виде – графами, таблицами

1. Сколькими способами можно зажечь свет в нашем классе? (в классе 3 лампочки, у каждой – отдельный выключатель)

Ответ: 8.

Указание: Обсуждение путей решения: а) прямой подсчет – перебор возможных способов; упорядочение перебора – то есть суммирование $1+3+3+1=8$; б) рассмотрение ситуации по отдельности для каждой лампочки – либо "вкл", либо "выкл"; правило произведения: $2\times2\times2=8$; графическое отображение в виде графа с кратными дугами и в виде дерева перебора.

2. Комбинация из трёх букв на автомобильном номере состоит только из тех русских букв, у которых есть похожие латинские, а именно из А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х. Сколько всего таких комбинаций?

Отметить, что буквы могут повторяться.

3. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Указание: Перебор по положениям белой ладьи.

4. а) В магазине "Все для чая" продаются 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить там набор "чашка + блюдце"?

Ответ: по правилу произведения получаем $5\times3=15$.

5. В тот же магазин завезли еще 4 вида чайных ложек. Сколькими способами можно купить комплект "чашка + блюдце + ложка"?

Ответ: $5\times3\times4=60$.

(Здесь полезен анекдот о выливании воды из чайника. Мораль: очень часто и в самом деле полезно свести задачу к предыдущей. В рассмотренной задаче можно было вместо двух умножений написать одно: 15×4, где 15 – ответ в задаче а). Кроме упрощения вычислений, это еще дает такую идею: так можно сводить комбинаторные задачи, которые кажутся сложными, к более простым. Показать табличную интерпретацию – в столбцах изобразить ложки, а в строках – пары (чашка+блюдце).

в) Известно, что одна из чашек, одно из блюдец и одна из ложек – золотые. Сколькими способами можно купить набор из 3-х различных пред- метов, в котором

в1) нет золотых предметов?

в2) 1 золотой предмет?

в3) 2 золотых предмета?

в4) 3 золотых предмета?

Комбинаторика-2.

6. а) У скольких двухзначных чисел все цифры чётные? б) А у скольких трёхзначных?

Решение: (а) оформить также в виде таблицы. Про (б) – 3 способа: разветвленное дерево, таблица, где строки занумерованы парами и трёхмерная таблица

7. а) У скольких двухзначных чисел все цифры разные? б) А у скольких трёхзначных? в) А у скольких 11-значных?

Решение: Дополнительно можно изобразить все числа в виде таблицы, и получить второе решение с вычитанием лишних случаев (грубо говоря, квадрат минус диагональ).

8. На окружности отмечены 5 красных и 7 синих точек. Рассмотрим всевозможные отрезки (хорды) с концами в отмеченных точках. У скольких отрезков концы а) разного цвета; б) одинакового цвета?

Решение: Очень полезно разобрать два решения: с деревом перебора и с таблицей. Отметить формулу сложения случаев.

9. В обычном домино на половинках доминошек бывает от 0 до 6 точек. Всего в комплекте 28 доминошек. А сколько доминошек будет в комплекте, где на половинке возможно от 0 до 13 точек?

Ответ: 105. Поскольку задача двухходовая, часто дают неправильные ответы. В этом случае рекомендовать проверить способ решения на обычном домино. При разборе обязательно оформить рассуждения в виде таблицы.

10. Сколькими способами можно разменять 50 руб монетами в 1 и 2 руб?

Ответ: 26. Каждый способ однозначно задается числом 2-рублевых монет, а их может быть от 0 до 25.

11. Сколькими способами можно поставить на доску черного и белого королей так, чтобы они не били друг друга?

Решение: Если черный король стоит в углу доски (4 поля), то белого короля на доску можно поставить 60 способами. Если черный король стоит на границе доски (но не в углу – $6 \times 4 = 24$ поля), то белого короля можно поставить на любое из 58 "незапрещенных" полей. Для всех остальных (их 36) положений черного короля имеется ровно 55 "незапрещенных" положений белого короля. Итого получаем

$$4 \times 60 + 24 \times 58 + 36 \times 55 = 3612$$

способов.

12. В детский сад привезли кубики, красные и синие. Каждому из 100 детей выдали по 3 кубика, и каждый ребенок построил из своих кубиков башню. Какое наибольшее число различно раскрашенных башен могло получиться? А если выдали по 4 кубика? По 5? По 6? По 7?

Ответ: 8, 16, 32, 64, 100. Полезно обратить внимание на последний ответ и причины его появления в ряду степеней двойки.

13. Сигнальное устройство состоит из пяти одноцветных лампочек, расположенных в ряд. Сколько различных сигналов можно подать с его помощью? А сколько, самое меньшее, надо взять лампочек, чтобы можно было подать 200 различных сигналов? А 1000 сигналов?

Ответ: 32 сигнала. Для 200 сигналов нужно взять 8 лампочек, для 1000 сигналов – 10 лампочек.

14. Назовем число забавным, если все его цифры делятся на 4. Сколько забавных чисел среди четырёхзначных? А среди шестизначных?

Ответ: $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$; $486 = 2 \times 3^5$.

15. Как известно, компьютер работает с двоичными кодами, которые представляют собой записи, составленные из нулей и единиц (например, 11001011). Количество знаков в коде называется его длиной. Сколько разных символов можно закодировать двоичными кодами длины 5? Длины 6?

(Начиная с этой задачи, мы будем систематически заниматься кодировкой задач! То есть "переводить их с одного языка на другой", находя взаимосвязи между задачами. К этому моменту уже накоплен большой фактический материал...)

16. Во рту у марсианина есть 10 гнезд для зубов. В каждом гнезде либо есть зуб, либо его нет. Известно, что любые два марсианина отличаются набором зубов (т.е., если взять любых двух, то найдется гнездо, в котором у одного есть зуб, а у другого нет). Каково наибольшее возможно число марсиан?

Решение: Закодируем марсиан двоичными числами – ведь для каждого зуба имеется ровно две возможности: либо этот зуб есть, либо его нет. Таким образом, общее число марсиан не больше, чем число "кодировок" зубов, которое равно $2^{10} = 1024$.

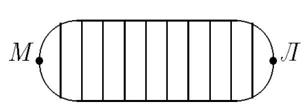
17. Сигнальный флажок состоит из шести горизонтальных полосок белого, синего или красного цвета, причем верхняя полоска всегда синяя, а соседние полоски – разноцветные. Сколько бывает разных сигнальных флажков?

Ответ: 32. Для каждой следующей полоски есть ровно две возможности! Придумайте способ их кодирования числами 0 и 1. Учтите, что таких способов существует не один, а несколько (а кстати, сколько??)

18. Назовем две цифры близкими, если они отличаются на 1. Кроме того, будем считать близкими цифры 0 и 9. Сколько существует различных десятизначных чисел, у которых любые две соседние цифры – близкие?

Ответ: $9 \cdot 2^9$.

19. Из Манчестера в Ливерпуль ведут два шоссе с односторонним движением, пересеченные десятью проселками (см. рисунок). Машина выезжает из М в Л по одному из шоссе, и, доезжая до любой развилки, может либо свернуть на проселок, либо не сворачивать. Свернув, она проезжает проселок до конца и продолжает опять по другому шоссе (по тем же правилам). Сколькими разными способами можно проехать из Манчестера в Ливерпуль?



20. Имеется 10 различных книг. Сколькими различными способами можно выбрать из них одну или несколько книг для подарка?

Решение: "Одну или несколько" – значит, любое число, кроме нуля книг. Добавим еще и возможность подарить 0 книг – тогда общее число способов подарить книги будет равно 2^{10} (объясните, почему?). Можно напомнить о связи этой задачи с задачей о "липовых" чашках-ложках-блюдцах.

Комбинаторика-3.

Не решая задач, разбейте их на группы так, чтобы любые две задачи из одной группы кодировалась бы друг другом (и найдите кодировки), а из разных – нет. Найдите ответы для всех задач, решив как можно меньше задач (а сколько задач придется решить)?

21. Сколькими способами Алексей Николаевич может построить 50 шестиклассников в шеренгу?

22. Сколько сторон и диагоналей у 50-угольника?

23. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске размером 50×50 пятьдесят ладей, не бьющих друг друга?

Решение: 50! Это пара к задаче 21 (а также 27 и 28).

24. Сколькими способами победитель "Поля чудес" может выбрать два приза из 50 имеющихся?

Решение: $50 \times 49/2$. Это пара к задаче 2. Каждый выбранный приз – вершина 50-угольника, а пара выбранных призов – это сторона или диагональ.

25. Сколькими способами можно выдать 50 шестиклассникам два наряда: на уборку апельсиновых корок и дежурство в столовой?

26. Сколькими способами можно из 50 участников собрания выбрать председателя и секретаря?

Решение: 50×49. Это пара к задаче 5. Дадим председателю наряд на уборку корок, а секретарю – наряд на столовую. И наоборот.

27. Есть два письма и 50 разных конвертов. Сколькими способами можно упаковать письма в конверты?

Решение: 50! Это пара к задаче 3. Кодировка такая: по горизонтали разложим письма, а по вертикали – конверты. Будем ставить ладью на пересечении горизонтали и вертикали тогда и только тогда, когда письмо, соответствующее горизонтали, кладем в конверт, соответствующий вертикали.

28. Есть 50 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их по одной 50 шестиклассникам?

Решение: 50! Это пара к задаче 1 (а также задачам 3 и 7). Тот, кто получил первую конфету, встанет в шеренгу самым первым, получивший вторую конфету – вторым, и т.д.

29. Сколькими способами можно расставить в таблице 5×10 числа от 1 до 50?

Решение: 50! Это пара к задаче 8 (а значит, и к задаче 1). Занумеруем конфетки числами от 1 до 50, а шестиклассников посадим в клетки таблицы 6×8. Дальнейшее очевидно.

30. Сколькими способами можно отметить в таблице 5×10 две клетки?

Решение: это еще одна пара к задаче 2 (и к задаче 4). Расположим в таблице 5×10 точки, соответствующие 50 вершинам многоугольника. Отрезок, соединяющий пару вершин, – это либо сторона, либо диагональ. Нам нужно посчитать и те, и другие.

Заключительный комментарий: требуется решить всего 3 задачи – 1, 2 и 5.

Домашнее задание

Здесь шесть задач. Но по-настоящему из них достаточно решить только три: задачи с одинаковым номером ("а" и "б") кодируются друг другом. Но ведь кодировку надо еще придумать... или решать все шесть задач!

31. а) В левом верхнем углу доски 10×8 стоит ладья. Двое по очереди ходят ею, причем разрешается ходить только вправо или вниз. Выигрывает тот, кто ставит ладью в правый нижний угол. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер?

б) В одной кучке лежит 7 спичек, в другой – 9. За один ход разрешается взять любое число спичек, но только из одной кучки. Выиграл тот, кто взял последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре?

Решение: Заметим, что ладья может сдвинуться всего вправо на 9 клеток, а вниз – на 7. Будем кодировать каждый такой сдвиг взятием спичек из кучки. (А когда сдвинуться нельзя – это значит, что кучка опустела!) Выигрышная стратегия: сначала взять 2 спички из кучки-9 (встать ладьей на диагональ), а затем повторять ходы противника в другой кучке (возвращать ладью на диагональ).

32. а) В городе Колоколамске живут 10 шпионов по кличкам Нелли, Одри, Долли, Тилли, Чарли, Петя, Штирлиц, Супер, Вилли, Деловой. Нелли шпионит за Супером, Одри – за Чарли и Тилли, Долли – за Одри, Штирлицем и Вилли, Тилли – за Петей и Деловым, Чарли – за Долли и Деловым, Петя – за Штирлицем и Долли, Штирлиц – за Тилли и Петей, Супер – за Нелли и Вилли, Вилли – за Чарли, Деловой – за Одри и Вилли. Какое наибольшее число шпионов сможет выстроиться в очередь так, чтобы перед каждым, кроме первого, стоял тот, за кем он шпионит?

б) Какое наибольшее количество различных цифр можно выписать в ряд так, чтобы, подчеркнув любые две соседних, мы получили двузначное число, делящееся на 7 или 13? Число 07 тоже считается двузначным.

Решение: Все 10. Например, 0784291356. Теперь к задаче 12а. Закодируем шпионов цифрами (Нелли=Ноль, Одри=Один, и т.д.) Шпионство обозначим стрелочкой:

$0 \to 7;$
$1 \to 4, 3;$
$2 \to 1, 6, 8;$
$3 \to 5, 9;$
$4 \to 2, 9;$
$5 \to 6, 2;$
$6 \to 3, 5;$
$7 \to 0, 8;$
$8 \to 4;$
$9 \to 1, 8.$

Обратим внимание на то, что выписаны все "двузначные числа", которые делятся на 7 или 13. Дальше остается решить любую из задач.

33. а) Летучая ладья ходит как обычная, только не может становиться на соседнюю клетку. Может ли она пройти по доске 4×4, побывав на каждой ее клетке ровно один раз?

б) Хромая ладья ходит как обычная, но только на соседнюю клетку. Может ли она пройти по доске 4×4, побывав на каждой ее клетке ровно один раз?

Решение: Поля доски для летучей ладьи и поля доски для хромой ладьи находятся в таком соответствии:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

11	9	12	10
3	1	4	2
15	13	16	14
7	5	8	6

(Если на левом рисунке может сделать ход хромая ладья, то на правом ход между аналогичными клетками будет у летучей ладьи. И наоборот: для каждого хода летучей ладьи на правом рисунке будет существовать соответствующий ход хромой ладьи на левом.)

Логические задачи

Логика-1.

1. *Пять корзин.* В пяти корзинах А, Б, В, Г и Д лежат яблоки пяти разных сортов. В каждой из корзин А и Б находятся яблоки 3 и 4 сорта, в корзине В – 2 и 3, в корзине Г – 4 и 5, в корзине Д – 1 и 5. Занумеруйте корзины так, чтобы в первой корзине имелись яблоки 1 сорта (как минимум одно), во второй корзине – яблоки второго сорта и т.д.

2. *Кто преступник?.* Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. В ходе следствия каждый из них сделал по два заявления. Браун: "Я не делал этого. Джонс не делал этого". Смит: "Я не делал этого. Это сделал Браун." Джонс: "Браун не делал этого. Это сделал Смит." Потом оказалось, что один из них дважды сказал правду, другой – дважды солгал, третий - раз сказал правду, раз солгал. Кто совершил преступление?

3. *Пять братьев.* Один из пяти братьев испек маме пирог. Андрей сказал: "Это Витя или Толя". Витя сказал: "Это сделал не я и не Юра". Толя сказал: "Вы оба шутите". Дима сказал: "Нет, один из них сказал правду, а другой – нет". Юра сказал: "Нет, Дима, ты не прав." Мама знает, что трое из ее сыновей всегда говорят правду. Кто испек пирог?

4. *Делимость.* Из утверждений "число a делится на 2", "число a делится на 4", "число a делится на 12", "число a делится на 24" три верных, а одно неверное. Какое именно?

5. *Команды и прогнозы.* Команды А, Б, В, Г и Д участвовали в эстафете. До соревнований пять болельщиков высказали следующие прогнозы.

1) команда Д займет 1 место, команда В – 2;
2) команда А займет 2 место, Г – 4;
3) В – 3 место, Д – 5;
4) В – 1 место, Г – 4 место;
5) А – 2 место, В – 3.

В каждом прогнозе одна часть подтвердилась, а другая – нет. Какое место заняла каждая из команд?

6. *Евро-2000.* В финал чемпионата Европы выходили две команды. До соревнований пять болельщиков высказали прогнозы, что в финал выйдут команды: 1) Франции и Голландии; 2) Бельгии и Италии; 3) Бельгии и Франции; 4) Англии и Голландии; 5) Голландии и Италии. Один прогноз оказался полностью неверным, а в остальных была правильно названа только одна из команд-финалисток. Какие команды вышли в финал?

7. *Забег.* В забеге шести спортсменов Андрей отстал от Бориса и еще от двух спортсменов. Виктор финишировал после Дмитрия, но ранее Геннадия. Дмитрий опередил Бориса, но все же пришел после Евгения. Какое место занял каждый спортсмен ?

Логика-2.

На сегодняшнем занятии мы познакомимся поближе с так называемым "методом логических квадратов".

8. *Цвет волос.* В кафе встретились три друга: скульптор Белов, скрипач Чернов и художник Рыжов. "Замечательно, что один из нас блондин, другой – брюнет, а третий – рыжий, и при этом ни у одного из нас цвет не соответствует фамилии", – заметил черноволосый. "Ты совершенно прав", – сказал Белов. Определите цвет волос художника.

Ответ: Брюнет

9. *Выпускной бал.* Три подруги были на выпускном балу в белом, красном и голубом платье. Их туфли были тех же трёх цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвета платьев и туфель у подруг.

Ответ: Валя – белые туфли, голубое платье; Лида – голубые туфли, белое платье, Тамара – красные туфли, красное платье.

10. *Трое с одной улицы.* Кондратьев, Давыдов и Федоров живут на одной улице. Один из них – столяр, другой – маляр, третий – водопроводчик. Недавно маляр хотел попросить своего знакомого столяра сделать кое-что для своей квартиры, но ему сказали, что столяр работает в доме водопроводчика. Известно также, что Федоров никогда не слышал о Давыдове. Кто чем занимается?

Ответ: Кондратьев – столяр, Давыдов – маляр, Фёдоров – водопроводчик.

11. *Три педагога.* Три товарища – Владимир, Игорь и Сергей – окончили один и тот же педагогический институт и преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Ярославля. Владимир работает не в Рязани, Игорь – не в Туле. Рязанец преподает не физику, Игорь – не математику, туляк преподает литературу. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из них?

Ответ: Владимир преподаёт литературу в Туле, Игорь – физику в Ярославле, Сергей – математику в Рязани.

12. *А, Б и Б.* Познакомимся с тремя людьми: Алешиным, Беляевым и Белкиным. Один из них – архитектор, другой – бухгалтер, третий – археолог. Один живет в Белгороде, другой – в Брянске, третий в Астрахани. Требуется узнать, кто где живет и у кого какая профессия.

Белкин бывает в Белгороде лишь наездами и то весьма редко, хотя все его родственники постоянно живут в этом городе.

У двух из этих людей названия профессий и городов, в которых они живут, начинаются с той же буквы, что и их имена.

Жена архитектора доводится Белкину младшей сестрой.

Ответ: Белкин – бухгалтер из Брянска, Беляев – архитектор из Белгорода, Алёшин – археолог из Астрахани.

13. *Четыре подружки.* На улице, став в кружок, разговаривают четыре девочки: Аня, Валя, Галя и Нина. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Ниной. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье на каждой из девочек?

Ответ: На Ане – белое платье, на Вале – голубое, на Нине – розовое, на Гале – зелёное. Стоят по кругу так: Аня, Валя, Галя, Нина.

14. *Студенты.* За круглым столом сидели четыре студента. Филолог сидел против Козина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Волковым. Соседи Шатрова – Егоркин и физик. Какая профессия у Козина?

Ответ: Козин – математик. Егоркин – историк, Шатров – филолог, Волков – физик.

15. *Спортсмены.* Петр, Геннадий, Алексей и Владимир занимаются в детской спортивной школе в разных секциях: гимнастики, легкой атлетики, волейбола и баскетбола. Петр, Алексей и волейболист учатся в одном классе. Петр и Геннадий на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с волейболистом, ни с баскетболистом. Кто в какой секции занимается?

Ответ: Пётр – баскетболист, Геннадий – волейболист, Алексей – гимнаст, Владимир – легкоатлет.

16. *Четыре офицера.* Среди офицеров А, Б, В и Г – майор, капитан и два лейтенанта. А и один из лейтенантов – танкисты, Б и капитан – артиллеристы, А младше по званию, чем В. Определите род войск и звание каждого.

Ответ: Б – майор-артиллерист, В – капитан-артиллерист, А и Г – лейтенанты-танкисты.

Домашнее задание

17. *Определите профессии.* Корнеев, Докшин, Мареев и Скобелев – жители нашего города. Их профессии – пекарь, врач инженер и милиционер.

Корнеев и Докшин – соседи и всегда на работу ездят вместе

Докшин старше Мареева

Корнеев регулярно обыгрывает Скобелева в пинг-понг

Пекарь на работу всегда ходит пешком

Милиционер не живет рядом с врачом

Инженер и милиционер встречались единственный раз, когда милиционер оштрафовал инженера за нарушение правил уличного движения.

Милиционер старше врача и инженера

Определите, кто чем занимается.

18. *Четыре инженера.* Борисов, Кириллов, Данин и Савин – инженеры. Один из них – автомеханик, другой – химик, третий – строитель, четвертый – радиотехник.

Борисов, который обыгрывает в шахматы Данина, но проигрывает Савину, бегает на лыжах лучше того инженера, который моложе его, и ходит в театр вдвое чаще, чем тот инженер, который старше Корнилова.

Химик, который посещает театр вдвое чаще, чем автомеханик, не является ни самым молодым, ни самым пожилым из этой четверки.

Строитель, который бегает на лыжах хуже, чем радиотехник, как правило, проигрывает в шахматных сражениях автомеханику.

Самый пожилой из инженеров лучше всех играет в шахматы и чаще всех бывает в театре, а самый молодой лучше всех ходит на лыжах.

Назовите профессии каждого из этой четверки инженеров, если известно, что ни в спорте, ни в приверженности к театру среди них нет двух одинаковых,

19. *Студенты.* Дина, Соня, Коля, Рома и Миша учатся в институте. Их фамилии - Бойченко, Карпенко, Лысенко, Савченко и Шевченко.

Мать Ромы умерла.

Родители Дины никогда не встречались с родителями Коли.

Студенты Шевченко и Бойченко играют в одной баскетбольной команде.

Услышав, что родители Карпенко собираются поехать за город, мать Шевченко пришла к матери Карпенко и попросила, чтобы та отпустила своего сына к ним на вечер, но оказалось, что отец Коли уже договорился с родителями Карпенко и пригласил их сына к Коле.

Отец и мать Лысенко - хорошие друзья родителей Бойченко. Все четверо очень довольны, что их дети собираются пожениться.

Установите имя и фамилию каждого из молодых людей и девушек.

20. *Семья Семеновых.* В семье Семеновых 5 человек: муж, жена, их сын, сестра мужа и отец жены. Все они работают. Один – инженер, другой – юрист, третий – слесарь, четвертый – экономист, пятый – учитель. Вот что еще известно о них. Юрист и учитель не кровные родственники. Слесарь – хороший спортсмен. Он пошел по стопам экономиста и играет в футбол за сборную завода. Инженер старше жены своего брата, но моложе, чем учитель. Экономист старше, чем слесарь. Назовите профессии каждого члена семьи Семеновых.

21. *Преподаватели.* В педагогическом институте Аркадьева, Бабанова, Корсакова, Дашков, Ильин и Флеров преподают экономическую географию, английский язык, французский язык, немецкий язык, историю, математику.

Преподаватель немецкого языка и преподаватель математики в студенческие годы занимались художественной гимнастикой.

Ильин Старше Флерова, но стаж работы у него меньше, чем у преподавателя экономической географии.

Будучи студентами, Аркадьева и Бабанова учились вместе в одном университете. Остальные окончили педагогический институт.

Флеров – отец преподавателя французского языка.

Преподаватель английского языка – самый старший из всех по возрасту и по стажу работы. Он работает в этом институте с тех пор, как окончил его. Преподаватели математики и истории – его бывшие студенты.

Аркадьева старше преподавателя немецкого языка.

Кто какой предмет преподает?

22. *Поездная бригада.* Поездная бригада состоит из кондуктора, проводника, машиниста и помощника машиниста. Их зовут Андрей, Петр, Дмитрий и Трофим.

Дмитрий старше Андрея.

У кондуктора нет родственников в бригаде.

Машинист и помощник машиниста – братья. Других братьев у них нет.

Дмитрий – племянник Петра.

Помощник машиниста – не дядя проводника, а проводник – не дядя машиниста.

Кто в качестве кого работает? Какие родственные отношения существуют между членами бригады?

23. *Шесть пассажиров.* В междугороднем автобусе едут шесть пассажиров: Агеев, Боков, Власов, Громов, Дубов, Елисеев. Живут они в разных городах: в Москве, Ленинграде, Туле, Киеве, Риге и Одессе. Известно, что:

а) Агеев и москвич – врачи, Дубов и ленинградец – учителя, Власов и туляк – инженеры.

б) Боков и Елисеев – участники Великой Отечественной войны, а туляк в армии никогда не служил.

в) рижанин старше Агеева, а одессит старше Власова. Боков и москвич выйдут в Киеве, а Власов и рижанин намерены выйти в Виннице.

Определите фамилию, профессию и место жительства каждого пассажира.

Логика-3. “Принцесса или тигр?”

Есть такая сказка “Принцесса или тигр?”. В этой сказке узник должен был угадать, в какой из двух комнат находится принцесса, а в какой – тигр. В некотором царстве правил король. Однажды он тоже прочитал эту сказку и решил попробовать сделать то же самое со своими заключёнными, благо, у него было достаточно и узников, и принцесс, и тигров.

Только наш король не хотел полагаться на случайность. На дверях каждой комнаты вешали по табличке, а заключённому что-то говорилось о них. Если узник умел рассуждать логически, то он мог определить, где кто находится.

24. На одной табличке правда, на другой – ложь

I: В этой комнате находится принцесса, а в другой комнате сидит тигр. **II:** В одной из этих комнат находится принцесса; кроме того в одной из этих комнат сидит тигр.

Ответ: Узник должен выбрать вторую комнату

25. Может быть оба утверждения истины, а может быть оба ложны.

I: По крайней мере в одной из этих комнат находится принцесса **II:** Тигр сидит в другой комнате

Ответ: Узник должен выбрать вторую комнату

26. Может быть оба утверждения истины, а может быть оба ложны.
I: Или в этой комнате сидит тигр, или принцесса находится в другой комнате. **II:** Принцесса в другой комнате.

Ответ: Узник должен выбрать вторую комнату

27. Если в комнате I принцесса, то утверждение истинно, если же тигр, то ложно. Если в комнате II принцесса, то утверждение ложно, если же тигр, то истинно.
I: В обеих комнатах находятся принцессы. **II:** В обеих комнатах находятся принцессы.

Ответ: Узник должен выбрать вторую комнату

28. Если в комнате I принцесса, то утверждение истинно, если же тигр, то ложно. Если в комнате II принцесса, то утверждение ложно, если же тигр, то истинно.
I: По крайней мере в одной из комнат находится принцесса. **II:** Принцесса – в другой комнате.

Ответ: Узник должен выбрать первую комнату

29. Если в комнате I принцесса, то утверждение истинно, если же тигр, то ложно. Если в комнате II принцесса, то утверждение ложно, если же тигр, то истинно.
I: Что не выберешь – всё едино. **II:** Принцесса – в другой комнате.

Ответ: Узник должен выбрать вторую комнату

30. Если в комнате I принцесса, то утверждение истинно, если же тигр, то ложно. Если в комнате II принцесса, то утверждение ложно, если же тигр, то истинно.
I: Что выбрать большая разница **II:** Лучше выбрать другую комнату

Ответ: Узник должен выбрать первую комнату

31. Если в комнате I принцесса, то утверждение истинно, если же тигр, то ложно. Если в комнате II принцесса, то утверждение ложно, если же тигр, то истинно.
Таблички ещё не повесили.
??: В этой комнате сидит тигр **??:** В обеих комнатах сидят тигры

Ответ: Узник должен выбрать вторую комнату

32. В одной комнате находится принцесса, а в двух других сидят тигры. Хотя бы два утверждения ложны.
I: В этой комнате сидит тигр. **II:** В этой комнате находится принцесса. **III:** В комнате II сидит тигр.

Ответ: Узник должен выбрать первую комнату

33. В одной комнате находится принцесса, а в двух других сидят тигры. Табличка на двери принцессы говорит правду, а из двух других хоть одна ошибочна
I: В комнате II тигр **II:** В этой комнате тигр **III:** В комнате I тигр

Ответ: Узник должен выбрать первую комнату (табличка II правдива, табличка III – ложна).

34. В одной из комнат находится принцесса, в другой сидит тигр, а третья комната пуста. Надпись на двери, где находится принцесса истинна, надпись на двери, за которой сидит тигр ложна, а то, что написано на табличке у пустой комнаты, может оказаться как истинным, так и ложным.
I: Комната III пуста. **II:** В комнате I сидит тигр **III:** Эта комната пуста

Ответ: Узник должен выбрать первую комнату; в комнате II сидит тигр, в комнате III никого нет.

35. В одной из комнат находится принцесса, в некоторых тигры, а в остальных – никого нет. Утверждение у комнаты, где находится принцесса истинно, таблички на дверях комнат с тиграми содержат ложные сведения, а на дверях пустых комнат может быть написано, что угодно. В этой задаче достаточно определить где принцесса.
I: Принцесса находится в комнате с нечётным номером.
II: Эта комната пуста
III: Или утверждение V истинно, или утверждение VII ложно.
IV: Утверждение I ложно.
V: Утверждение II или утверждение IV истинно.
VI: Утверждение III ложно.
VII: В комнате I принцессы нет.
VIII: В этой комнате тигр, а комната IX пуста.
IX: В этой комнате сидит тигр, а утверждение VI ложно.
Поняв, что задача неразрешима, узник попросил короля сказать, пуста комната VIII или нет, и когда король ответил, узник догадался, где принцесса.

Ответ: Узник должен выбрать седьмую комнату

Врачи и пациенты

Обитатели лечебниц – пациенты и врачи. Каждый обитатель лечебницы, будь то пациент или врач, либо находится в здравом уме, либо лишён рассудка. Вообще-то положено, чтобы врачи были нормальными, а пациенты – нет, но не во всех лечебницах это так. Инспектору надо выявить такие "неправильные"лечебницы. Нормальные обитатели на сто процентов уверены в том, что они говорят, они твёрдо знают, что все истинные утверждения действительно являются истинными, а все ложные – ложными. В то же время безумные обитатели лечебниц придерживаются совершенно противоположных представлений: все истинные утверждения они считают ложными, а все ложные – истинными. Все обитатели лечебниц всегда остаются честными – они всегда верят в то, что говорят.

36. **Джонс:** доктор Смит – один из врачей нашей лечебницы. **Смит:** Джонс – пациент.
Всё ли в порядке в этой лечебнице?

Ответ: Нет: если Джонс нормален, то либо он здравомыслящий пациент, либо Смит – сумасшедший врач; если же Джонс безумен, тогда либо он сумасшедший врач, либо Смит – здравомыслящий пациент.

37. Что должен сказать обитатель лечебницы чтобы убедить инспектора, что он пациент, находящийся в здравом уме?

Ответ: "Я не врач, обладающий здравым умом". (Возможны и другие решения).

38. Некоторый обитатель лечебницы высказал утверждение, из которого ясно, что он является свихнувшимся врачом. Придумайте такое утверждение.

Ответ: "Я – лишившийся рассудка пациент".

39. **Инспектор:** Вы пациент? **Обитатель:** Да.
Как обстоят дела в этой лечебнице?

Ответ: Плохо.

40. **Инспектор:** Считаете ли Вы себя пациентом? **Обитатель:** Да, считаю.
Как обстоят дела в лечебнице?

Ответ: Нормально. Говорящий лишь утверждает, что он верит в то, что является пациентом. Это вовсе не означает, что он на самом деле в это верит...

41. Повстречав, двух обитателей лечебницы, назовём их А и Б , инспектор выяснил следующее: А думает, что Б не в своём уме, а Б считает, что А – доктор. Кого следует удалить из больницы и почему?

Ответ: Удалить следует обитателя А. Он – либо сумасшедший врач, либо нормальный пациент.

Вампиры (они же упыри) и люди

Обычные люди всегда говорят правду, а упыри всегда лгут. Кроме того, любой – будь то человек или упырь – может оказаться лишённым рассудка, и тогда он считает все ложные утверждения истинными, а все истинные – ложными. Зато все остальные психически здоровы и абсолютно безупречны в своих суждениях.
Каждая из нижеперечисленных ситуаций имеет дело с двумя обитателями острова из которых один – человек, а другой упырь. Ваша цель определить кто есть кто.

42. **I:** Мы оба не в своём уме. **II:** Это неправда.

Ответ: Сначала установим общее правило: если некто утверждает, что он человек, то он обязательно должен находиться в здравом уме; если же он называет себя упырем, то он лишился рассудка.
Первый – упырь, причем независимо от того, истинно или ложно его утверждение. Второй – человек.

43. **I:** Я человек. **II:** Я человек. **I:** II-й вполне нормален.

Ответ: Первый – человек, второй – упырь.

44. **I:** Я упырь **II:** Я человек **I:** Психическое состояние II-го совпадает с моим.

Ответ: I – человек, II – упырь.

45. **I:** По крайней мере один из нас безумец. **II:** Совершенно верно **I:** Но я-то, конечно, не упырь!

Ответ: I – человек, II – упырь.

46. В этом случае известно, что один из собеседников в здравом уме, а второй – нет. **I:** II-й – упырь. **II:** I-й сошёл с ума!

Ответ: I – упырь в здравом уме, II – человек, лишившийся рассудка.

В последующих задачах речь идёт об острове, на котором в брак могут вступать только два человека или два упыря. В каждой из следующих задач речь идёт о супружеской паре. Вам предстоит выяснить, не упыри ли супруги. Если это возможно, выясните состояние психики каждого из них.

47. **Ж:** Мой муж – человек. **М:** Моя жена – упырь. **Ж:** Один из нас нормален, а другой сошёл с ума.

Ответ: Оба люди, притом муж безумен, а жена нормальна.

48. **Ж:** Всё, что говорит мой муж – правда. **М:** Моя жена свихнулась

Ответ: Оба супруга – упыри.

49. **М:** Мы оба упыри. **Ж:** Да, это так. **М:** Состояние нашей психики совершенно одинаково.

Ответ: Оба супруга – упыри, причем оба безумны.

50. **М:** Мы оба сошли с ума. **Ж:** Это правда.

Ответ: Оба супруга – упыри. Больше ничего сказать о них не удается.

51. **М:** По крайней мере один из нас свихнулся. **Ж:** Это неправда. **М:** Мы оба люди, а не упыри.

Ответ: Оба супруга – люди, притом муж нормален, а жена лишилась рассудка.

52. A сообщил, что B находится в здравом уме, а B показал, что A лишился рассудка. Одновременно A заявил, что B является упырём, в B в свою очередь стал уверять, что A – человек. Кто такие A и B?

Ответ: A – упырь в здравом уме, B – человек, лишившийся рассудка.
Комбинация двух различных высказываний, которые A может сделать относительно личности B (одно – по поводу состояния его психики, другое – по поводу его природы), с двумя любыми аналогичными высказываниями B относительно личности A, будет однозначно определять характеристики личностей A и B. Всего имеется 16 возможностей, каждая из них дает единственное решение поэтому имеет смысл предложить ученикам сформулировать и порешать остальные 15 задач.

53. Про двух близнецов с острова известно, что один из них является человеком в здравом уме, а другой – лишившимся рассудка упырём. Вы встречаете только одного из них и хотите выяснить, кто же он такой. Можно ли выяснить это с помощью определённого числа вопросов, требующих ответа “да” или “нет”? Какое минимальное число вопросов?

Ответ: Достаточно одного вопроса – спросить одного из братьев “Вы человек?” (Или, например, “Вы в здравом уме?”).

Логика-4. Логическая арифметика

Каждое высказывание состоит из простых логических предложений и связок между ними. Простое предложение – это высказывание, у которого мы можем определить истинность за один раз, не проделывая логических операций.
Логические связки в русском языке выражаются союзами. Полезно предложить детям придумать союзы и найти те, которые могут выражать одну и ту же логическую связку

1) . . . и . . . (а также; кроме того. . . ; еще и)
2) . . . или. . . (либо; или. . . , или. . .)
3) неверно, что. . . (не; ни)
4) если. . . , то (в силу того, что; потому что. . . ; из-за того, что; вследствие того, что. . . ; оттого, что. . . ; кто . . . , тот. . .)
5) тогда и только тогда, когда (равносильно; если . . . , то . . . , и наоборот).

Если известны значения простых предложений, то легко вычислить значение сложного предложения, частями которого они являются.

54. Заполните пропуски так, чтобы полученное предложение было а) истинным; б) ложным.
1) “Число 24 делится на 3 и на . . . ”
2) “число 11 делится на 3 и на . . . ”

55. Для каких натуральных n предложение “n – число чётное и $n + 2k + 1$ также чётное число” является истинным?

56. Для каких натуральных n предложение “n – число чётное или нечётное” является истинным?

57. Сформулируйте с помощью союза “или” утверждение “по крайней мере одно из чисел n, $n+1$, $n+2$ является чётным”. Истинно ли это предложение?

58. Сформулируйте с помощью союза “или” и других союзов утверждение “ровно одно из чисел n, $n + 1$, $n + 2$ делится на 4”. Истинно ли это предложение?

59. Сформулировать отрицание следующих предложений:
1) в праздники я схожу в кино по крайней мере один раз;
2) я никогда не был в Одессе;
3) за время каникул он был в музее, сходил в кино, а также два раза ходил в парк;
4) каждый человек на Земле хочет мира.

60. Какое из предложений: “$a < 2$”, “a не больше 2”, является отрицанием предложения “$2 < a$”? Чем они отличаются?

61. Является ли предложение “он мой враг” отрицанием предложения “он мой друг”?

62. Учитель сказал: “Кто закончит учебный год без троек, тот поедет в Москву на экскурсию”. У Васи было две тройки, которые он не смог исправить. Значит ли это, что он не поедет в Москву?

63. Перед дождем Петин кот всегда чихает. Сегодня он чихнул. “Значит, будет дождь,” – подумал Петя. Прав ли он?

64. Если ученик много занимается, то он успешно сдает экзамены. ученик провалился на экзаменах. Значит ли это, что он мало занимался?

65. Верны ли следующие предложения:
1) если $2 \times 2 = 4$, то $2 = 2$;
2) если $2 \times 2 = 4$, то $2 = 0$;
3) если $2 \times 2 = 5$, то $2 = 2$;
4) если $2 \times 2 = 5$, то $2 = 0$?

66. Равносильны ли следующие утверждения:
1) “$x(x-1) = 0$”; “$x = 0$ и $x = 1$”.
2) “$x(x-1) = 0$”; “$x = 0$ или $x = 1$”.
3) $x > 3$; $x > 5$.
4) “сегодня пятница”; “завтра суббота”; “послезавтра воскресенье”.
5) “Кто не рискует, тот не пьёт шампанского”; “Кто пьёт шампанское, тот рискует”.

67. Если мама поедет в командировку, то Коля поедет в лагерь. Мама поедет в командировку или в дом отдыха. Если мама поедет в дом отдыха, то Лена поедет к бабушке. Но Лена не поедет к бабушке. Следовательно, Коля поедет в лагерь. Верно ли это рассуждение?

68. Сформулируйте отрицания следующих предложений.
1) все политики – мошенники;

Ответ: Существуют честные политики
2) все политики – люди богатые и нечестные;

Ответ: Среди политиков есть бедный или честный
3) нет ни одного бедного и честного политика;

Ответ: Среди политиков есть бедный и честный
4) среди политиков нет бедных людей, а также и честных тоже;

Ответ: Среди политиков есть бедный или честный
5) есть честные политики;

Ответ: Все политики мошенники
6) Явлинский – честный политик;

Ответ: Явлинский – мошенник (Вообще-то возможно и другое толкование исходной фразы, при котором отрицание будет таким: Явлинский – либо нечестный, либо не политик).
7) Жириновский – политик, и, следовательно, обманывает простых людей;

Ответ: Жириновский – политик и не обманывает простых людей.
8) если человек жулик, то его фамилия – не Жириновский;

Ответ: Существует жулик по фамилии Жириновский
9) неверно, что все политики продажны или богаты;

Ответ: Все политики продажны или богаты
10) не все политики продажны, да и богаты тоже не все;

Ответ: Все политики продажны или все политики богаты
11) неверно, что если человек политик, то он жулик;

Ответ: Все политики – жулики. (Если человек политик, то он жулик)
12) бывают честные политики.

Ответ: Все политики – жулики.

69. Найдите среди высказываний из предыдущей задачи равносильные, противоречащие друг другу, пары высказываний, в которых одно следует из другого, и пары предложений, в которых одно является отрицанием другого.

Делимость

Делимость-1.

Разные задачи

1. Ковбой Джо зашел в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, три пачки табака и 9 коробок непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал 11 долларов 80 центов, на что Джо вытащил револьвер. Бармен сосчитал снова и исправил ошибку. Как Джо догадался, что бармен пытался его обсчитать?

2. Коля и Петя купили одинаковые беговые лыжи. Сколько стоит пара лыж, если Петя уплатил стоимость лыж 3-х рублевыми ассигнациями, Коля – 5-ти рублевыми, а всего они дали в кассу меньше 15 купюр?

3. а) $a + 2$ делится на 5, докажите, что $7a + 4$ делится на 5; б) $2000 + a$ и $999 - b$ делятся на 11, докажите, что $a + b$ делится на 11.

4. Доказать а) если сумма любых двух из трёх чисел делится на 3, то и сумма всех трёх чисел делится на 3; б) если сумма любых трёх из четырёх чисел делится на 4, то и каждое число делится на 4; в) сформулируйте и докажите утверждение б) для n чисел.

5. Докажите, что число, составленное из пятидесяти пяти единиц, является составным.

6. На новом супер-калькуляторе есть только три кнопки: "умножить на 7", "прибавить 27" и "вычесть 12". Можно ли на этом калькуляторе из числа 6 получить число 1? Какие числа можно получить из числа 6?

7. Докажите, что числа вида $\overline{aaa}$ делятся и на 3 и на 37.

8. Петя и Вася задумали по трёхзначному числу, затем каждый приписал к нему такое же число. У полученного шестизначного числа они выписали все натуральные делители. Докажите, что не менее 8 чисел в их списках совпало.

9. Делится ли число $77\ldots77$ (666 семерок) на 13?

10. При каких n число $88\ldots88$ (n восмерок) делится на 91?

11. Дана полоска из 6 клеток. Петя и Вася по очереди записывают в клетки цифры. Если полученное число делится на 91, то выигрывает Вася, если нет, то Петя. Всегда ли Вася сможет победить? А если полоска состоит из 12 клеток?

12. У царя Дадона в одиночных камерах сидели 100 пленников. Поворот ручки отпирает каждую камеру, следующий поворот запирает, еще один снова отпирает и т.д. К празднику царь решил освободить часть пленников и накануне послал слугу, который повернул ручку на дверях каждой камеры. Все двери оказались отперты. Но тут пришел второй посыльный и повернул ручку каждой второй камеры. Двери камер 2, 4, 6, ... вновь оказались заперты. Следующий посланец повернул ручки камер 3, 6, 9, 12 и т.д. Еще один – в каждой четвертой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ручку сотой камеры. Наконец наступил праздник, и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу. Сколько пленников освободил Дадон?

Теория

13. Делится ли $2^9 \times 3$ на 2? А на 5? На 6? Делится ли $2^2 \times 3^3 \times 5^5$ на 120?

14. Число a не делится на 3. Может ли делится на 3 число $2a$?

15. Число a чётно. Верно ли, что число $3a$ делится на 6?

16. Число $5a$ делится на 3. Верно ли, что a делится на 3?
Обобщить решение задач 1 – 4: если в разложении числа a на простые множители встречаются все множители из разложения числа b, то a делится на b; и наоборот, если a делится на b, то в a есть все множители из b.

17. Если число a делится на 3 и на 4, то следует ли отсюда, что оно делится и на 12? А если a делится на 4 и на 6, то следует ли отсюда, что оно делится на 24?

18. Число $15a$ делится на 6. Верно ли что a тоже делится на 6?
Взаимно простые числа. Обобщить результат задач 5 и 6: если a делится на m и на n, m и n взаимно просты, то a делится на mn; если ap делится на q, p и q взаимно просты, то a делится на q.

19. Известно, что $a + 15$ делится на 5. Делится ли a на 5?

20. Если число a делится на 3 и b делится на 3, верно ли, что тогда сумма a и b делится на 3? А разность a и b?

21. Вспомнить некоторые свойства делимости:

а) $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $a \pm b \vdots c$.

б) $a \pm b \vdots c$, и $a \vdots c$, то и $b \vdots c$.

в) $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то и $a \vdots c$.

22. Сколько существует двузначных чисел, которые делятся на 5? А трёхзначных, которые делятся на 7?

Ответ: 18, 128.

23. Доказать, что произведение а) любых двух последовательных натуральных чисел делится на 2; б) трёх любых последовательных натуральных чисел делится на 6.

24. А что можно сказать про произведения четырёх, пяти, n идущих подряд чисел?

25. Доказать, что для любого $n > 2$ а) сумма первых n натуральных чисел – составное число; б)* сумма любых n последовательных натуральных чисел – составное число.

Основная теорема арифметики

26. Разложите на простые множители 2000, 2001, 1999.

27. Сколько делителей у числа $2^5 \times 3^3 \times 5^2$? А у чисел 2000, 2001, 1999?

28. Сколько делителей у чисел 1, 4, 9, 16, 25; а у чисел 5, 10, 15, 24? Сравните количество делителей.
Показать доказательство нечётности количества делителей квадрата разбиением делителей на пары. Выяснение простоты числа.

29. Может ли в разложении числа n^2 на простые множители содержаться ровно 5 “троек”?

Факториал

30. Делится ли $11! + 12!$ на 13?

31. На сколько нулей заканчивается 200!?

32. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 5 нулей?

33. Каково наименьшее натуральное n такое, что $n!$ делится на 1999, 2000, 2001?

Делимость-2.

Признаки делимости

В Дании носороги не водятся!

А. Н. Коньков

Задумайте число. Прибавьте 2, умножьте на 3, возведите в квадрат, прибавьте 36, посчитайте сумму цифр, еще раз, и еще, пока не получите однозначное число. Отнимите от него 4. Найдите n-ую букву алфавита, придумайте на нее название страны, на третью букву названия придумайте животное. Так вот, в Дании носороги не водятся!

34. Сформулируйте признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25, 50, 100.

35. Почему верны признаки “Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2” и “Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 5” и не верны аналогичные признаки для других однозначных чисел?

36. Почему верен признак “Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное двумя его последним цифрами делится на 4”? Сформулируйте аналогичные признаки делимости для чисел 25 и 50. Что общего у этих чисел с числом 4?

37. Назовем число “забавным”, если все его цифры делятся на 4. А делится ли “забавное” число на 4? Существуют ли **не** “забавные” числа, которые делятся на 4?

38. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 8 и 125. (А на 2^n и 5^n?)

39. Сформулируйте признаки делимости на 3 и на 9. Верны ли аналогичные признаки для других однозначных чисел? Почему всякое число вида $10\ldots0$ при делении на 9 (и на 3) дает в остатке 1?

40. Какой остаток от деления на 3 и на 9 дает число вида $\overline{a0\ldots0}$? Докажите, что число и его сумма цифр дают при делении на 9 одинаковые остатки. Докажите, что то же верно при делении на 3.

41. Разберите эпиграф.

42. Докажите, что $11\ldots1$ (27 единиц) делится на 27. Верен ли признак делимости на 27, аналогичный признакам делимости на 3 и 9?

43. Как проверить, делится ли число на а) 6; б) 12; в) 15; г) 18; д) 30; е) 45; ж) 75; з) 225?

44. При каких a число $\overline{875a}$ делится на 6?

Задачи

45. Из двузначного числа вычли число, получающееся из него же перестановкой цифр. Докажите, что результат делится на 9.

46. Шестиклассник Петя перемножил все числа от 1 до 2000. У полученного числа он подсчитал сумму цифр, затем подсчитал сумму цифр результата, и так далее, пока не получил число, состоящее из одной цифры. Какое?

47. Натуральное число возвели в квадрат. Может ли результат оканчиваться на 66?

48. Ольга Сергеевна называет три цифры. А Константин Александрович говорит, что всегда сможет составить из них одно-, двух- или трёхзначное число, делящееся на 3. Прав ли он?

49. В ряд стоят 100 фишек. Разрешается поменять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли переставить все фишки в обратном порядке?

50. В трёхзначном числе n первые две цифры одинаковые, а последняя цифра – 5. Кроме того, известно, что n дает остаток 8 при делении на некоторое однозначное число. Найдите n.

51. На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?

52. Из числа 123123123123 вычеркните несколько цифр так, чтобы получилось наибольшее возможное число, кратное 9.

53. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?

54. Из трёхзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 120 раз. Докажите, что в результате получился нуль.

55. Шесть игральных кубиков нанизали на спицу (протыкая ею центры противоположных граней кубиков) так, что каждый может вращаться независимо от остальных. На гранях каждого кубика написаны все цифры от 1 до 6, причем сумма цифр на противоположных гранях равна 7. Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях кубиков. Докажите, что можно так повернуть кубики, чтобы это число делилось на 7.

56. В десятизначном числе все цифры встречаются по разу. Может ли оно делиться на 11?

Делимость-3.

57. Существует ли такая тройка натуральных чисел, что любые два из них имеют общий делитель, больший единицы, но общим делителем для всех трёх чисел является только 1?

58. Можно ли монетами в 14 и 35 шиллингов заплатить без сдачи сумму в 1999 шиллингов?

Решение: Нельзя, так как 1999 не кратно НОД(14,35).

59. В банк можно положить за один раз 120 руб. или снять 300 руб. У кого-то есть 1000 руб. Какую наибольшую сумму кто-то может положить в банк за несколько раз?

Ответ: 960. Оценка получается из делимости. Снять и положить можно только числа, делящиеся на 60 ($120 = 60 \times 2$, $300 = 60 \times 5$), максимальное число, меньшее 1000 и делящееся на 60 – это 960. Пример: кладём 3 раза по 300, снимаем 2 раза по 120 и кладём 300.

60. $a = 2^3 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7^2$, $b = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$. Чему равен НОД(a,b)?

Указание: НОД – это общая часть разложений.

61. $a = 2^8 \cdot 5^3 \cdot 7$, $b = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^7$. Чему равен НОК$(a, b)$?

Указание: НОК – это объединение разложений.

62. Про натуральные числа a и b известно, что $15a = 14b$ и что НОД$(a, b) = 13$. Найдите a и b.

63. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство

$$\text{НОК}(a, b)\,\text{НОД}(a, b) = ab.$$

Проиллюстрируйте рассуждения с помощью "кругов Эйлера".

64. Докажите, что если a и b – натуральные числа ($a > b$), то НОД$(a, b) =$ НОД$(a - b, b)$

Задачи для самостоятельного решения

65. Может ли наименьшее общее кратное двух натуральных чисел равняться их сумме?

Решение: Пусть такие числа x и y существуют. $\text{НОК}(x, y)$ делится на x и на y. Тогда $x + y$ делится на x и на y, значит, x делится на y и y делится на x, поэтому $x = y$. Но тогда $x + y = 2\,\text{НОК}(x, y)$, что противоречит предположению.

66. Может ли наименьшее общее кратное трёх чисел равняться их сумме?

Ответ: Да, например, $6 = 1 + 2 + 3$.

67. НОД двух натуральных чисел в восемь раз меньше, чем их НОК. Докажите, что одно из этих чисел делится на другое.

68. Даны 6 натуральных чисел. Могут ли среди их попарных НОДов встречаться все натуральные числа от 1 до 15?

Решение: Нет. Так как какие-то числа имеют НОДы, равные 7 и 14, то есть не менее трёх чисел, кратных 7. Но тогда существует третий НОД, кратный 7, а среди чисел от 1 до 15 такого нет. (Аналогичное рассуждение проходит по делимости на 2).

69. Разность двух нечётных чисел является степенью двойки. Докажите, что они взаимно просты.

Указание: $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a - b) = \text{НОД}(a, 2^k)$.

70. Известно, что $(n - 1)! + 1$ делится на n. Докажите, что число n – простое.

Решение: Если n – составное, то $(n - 1)!$ делится на n.

71. В результате некоторой перестановки цифр число уменьшилось в три раза. Докажите, что исходное число делилось на 27.

72. Найдите все такие натуральные a, что число а) $\frac{12}{2a+1}$; б) $\frac{a+3}{a-1}$; в) $\frac{3a+2}{a-2}$ – тоже целое.

Конструкции

Конструкции-1. Можно или нельзя?

Очень часто в самых различных задачах встречаются вопросы "можно ли...". Постарайтесь всегда помнить, что поиски ответа на такой вопрос напоминают раскачивание на качелях: нужно поискать соответствующую конструкцию (построить **ПРИМЕР**), если это не получается, то можно попытаться доказать, что такой пример невозможен в принципе, а при необходимости повторить все попытки еще несколько раз...

1. Может ли в месяце быть 3; 4; 5; 6 воскресений?

2. Может ли в году быть 51; 52; 53; 54 воскресенья?

3. Может ли сумма цифр трёхзначного числа быть равной 22? А равной 28?

4. Может ли произведение цифр трёхзначного числа быть равно 22? 28? 350? 730?

5. Позавчера Васе было 11 лет, а в следующем году исполнится 14. Может ли такое быть?

6. Двое близнецов родились с интервалом в 10 минут. Когда спустя 7 лет они готовились идти в первый класс, их спросили, сколько им лет. "Мне вчера исполнилось семь", – гордо ответил один. "А мне семь исполнится только завтра", – признался второй. Как такое могло быть?

Ответ: Они родились в ночь с 28 февраля на 1 марта невисокосного года, а в школу поступали в високосном году. Вопрос был задан 29 февраля.

7. Можно ли в прямоугольную таблицу поставить числа так, чтобы в каждом столбце сумма была положительна, а в каждой строке – отрицательна?

8. Можно ли в таблицу 4×4 поставить числа -1, 0 и 1 так, чтобы все 8 сумм чисел в строках и столбцах были различными?

9. Можно ли в прямоугольной таблице расставить натуральные числа так, чтобы в каждом столбце сумма чисел была больше 100, а в каждой строке – меньше 5 ?

10. Может ли и сумма, и произведение нескольких натуральных чисел быть равными а) 999? б) 1999?

Ответ: а) Да. Например, это числа 111, 9 и много-много единиц. б) Нет. 1999 – простое число, так что среди множителей непременно присутствует само это число, а тогда сумма больше 1999.

11. Площадь прямоугольника меньше 1 кв.м. Может ли его периметр быть больше 1 км?

Ответ: Да, пусть стороны равны 500 м и 1/1 000 м.

12. На балу было юношей и девушек поровну, было 10 танцев и каждый раз танцевали все.
а) Могло ли получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал либо с более красивой, либо с более умной девушкой?

Ответ: Да. Пусть на балу 2 юноши и 2 девушки, причем вторая красивее, а первая – умнее. Танцуют они попеременно.
б) Как могло получиться, что в дополнение к тому в каждом танце (начиная со второго) был юноша, который танцевал и с более красивой, и с более умной девушкой?

Ответ: Пусть на балу 3 юноши и 3 девушки А, Б и В, причем красота возрастает в порядке АБВ, а ум – в порядке БВА. Юноши чередуют девушек по кругу в порядке АБВ.

13. Сумма положительных чисел больше 10. Может ли сумма их квадратов быть меньше 1?

Решение: Да. Возьмем 1001 число, все равны 1/100, тогда их сумма равна 10.01, а сумма квадратов – 1 001/10 000.

14. На занятии Вася, Леня и Стас решили все задачи. Может ли оказаться, что Стас большинство задач решил раньше Лени, Леня – большинство раньше Васи, а Вася – большинство раньше Стаса?

Решение: Например, задач всего три, первую задачу решил сперва Стас, потом Леня, потом Вася; вторую – Леня, Вася, Стас; третью – Вася, Стас, Леня.

15. Фирма проработала год, подсчитывая свою прибыль каждый месяц. Каждые два подряд идущих месяца суммарная прибыль была отрицательной.
а) Может ли суммарная прибыль за весь год быть положительной?
б) А за первые 11 месяцев?

Решение: а) Нет. Разбиваем 12 месяцев на пары, складываем и видим, что суммарная прибыль тоже должна быть отрицательной. б) Да: представим, что каждый нечётный месяц фирма работала с прибылью $+100$, а в каждом чётном месяце прибыль равнялась -101.

16. В однокруговом футбольном турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. "Спартак" одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

Решение: Да. Пусть Спартак одержал победу лишь однажды, а остальные матчи проиграл. Все матчи, в которых Спартак не участвовал, завершились вничью. Если в турнире участвовало не меньше пяти команд, то у Спартака меньше всех очков.

17. Можно ли на шахматной доске расставить а) 9 ладей; б) 14 слонов так, чтобы они не били друг друга?

Решение: Нельзя в обоих пунктах.

18. Какое наибольшее число ладей (слонов, королей, ферзей, коней) можно расставить на доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение: 8 (12, 32, 8, 32)

19. У шахматной доски выпилены а) угловая клетка; б) две противоположные угловые клетки; в) две клетки разного цвета. Можно ли такую испорченную доску распилить на двуклеточные прямоугольники?

Ответ: а) нет (чётность); б) нет (шахматная раскраска); в) можно всегда.

Решение: в) Обойдем шахматную доску ладьей по циклу. Выброшенные клетки разного цвета разобьют цикл на два куска чётной длины, и каждый кусок режется на пары соседних клеток.

20. Из 4 одинаковых с виду монет одна фальшивая (легче настоящей). Можно ли наверняка найти ее за одно взвешивание на чашечных весах без гирь?

Решение: Нельзя, поскольку при невезении после взвешивания останутся 2 подозрительные монеты.

21. На сковороде могут одновременно жариться 2 котлеты. Каждую надо обжарить с обеих сторон, причём для обжаривания одной стороны требуются 2 минуты. Можно ли поджарить 3 котлеты быстрее, чем за 7 минут?

Решение: Да. Через две минуты одну котлету переворачиваем, а вторую снимаем и вместо нее кладем третью. Через четыре минуты снимаем первую котлету, вместо нее кладем дожариваться вторую (на вторую сторону), а третью котлету переворачиваем. Через шесть минут котлеты готовы.

22. В магазин привезли платья трёх цветов и трёх фасонов. Всегда ли можно выбрать для витрины 3 платья, чтобы были представлены все цвета и все фасоны?

Решение: Не всегда. Например, если есть три красных платья трёх фасонов, и еще синее и зеленое платье первого фасона, то выбрать требуемым образом нельзя.

Конструкции-2. Постепенное конструирование

23. а) Придумайте такие 3 различных натуральных числа, чтобы каждое делило сумму остальных; б) то же, но все числа больше 100; в) как в (а), но 4 числа; г) как в (а), но 10 чисел.

Решение: а), б) 100, 200, 300. в) Если уже построен набор из n чисел, то к ним можно добавить $(n+1)$-ое число – их сумму, т.к. она делится на каждое из этих n чисел и ее прибавление к набору из $(n-1)$-го числа не изменяет их делимости на оставшееся. Таким образом, получаем, например, ряд 1, 2, 3, 6, 12, 24, и т.д.

24. а) Придумайте 3 различных натуральных числа, чтобы каждые два имели общий делитель, больший 1, но при этом чтобы НОД всех трёх чисел был равен 1; б) то же, но все числа больше 100; в) как в (а), но 4 числа; г) как в (а), но 10 чисел.

25. Разрежьте квадрат на n меньших квадратов (не обязательно одинаковых) а) $n = 4$; б) $n = 7$; в) $n = 10$; г) $n = 1999$.

26. В мешке лежит 64 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы без гирь, отмерить 23 кг гвоздей?

Решение: Мы можем разделить 64 кг на 2 группы по 32 кг, затем одну из них – на 2 группы по 16, затем одну из них – на 2 группы по 8 и т.д. Как известно, $23 = 1 + 2 + 4 + 16$.

27. Давным-давно в СССР имелись в обращении 3-копеечные и 5-копечные монеты. Докажите, что можно было набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

Решение: Если число делится на 3, набираем требуемую сумму монетами по 3 копейки – так можно получить 3, 6, 9, 12,... Если число дает остаток 2 по модулю 3, то берем одну пятикопеечную и необходимое количество трёхкопеечных – получаем 5, 8, 11, и т. д. Если число дает остаток 1 по модулю 3, берем 2 монеты по 5 и остальное дополняем трёхкопеечными – получаем 10, 13, 16,... Видно, что можно получить любое число, кроме 1, 2, 4 и 7.

28. Докажите, что если ввести в обращение монеты достоинством в 5 и 26 копеек, то можно будет уплатить без сдачи любую сумму, начиная с 1 рубля.

Решение: Заметьте, что $100 = 5 \cdot 20$, $101 = 26 + 5 \cdot 15$, $102 = 2 \cdot 26 + 5 \cdot 10$, $103 = 3 \cdot 26 + 5 \cdot 5$, $104 = 4 \cdot 26$.

29. Представьте число 1 в виде суммы а) трёх б) четырёх в) десяти различных дробей с числителем 1.

Решение: а) $1/2 = 1/3 + 1/6$. Дальнейшие примеры получается следующим образом: берем самую маленькую дробь, и если ее знаменатель – чётное число, равное $2a$, то разбиваем эту дробь на две $1/2a = 1/3a + 1/6a$. Замечаем, что в итоге получаем наименьшую дробь с чётным знаменателем $(6a)$, то есть процесс можно продолжить.

30. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

Решение: Рассмотрим путь, проходящий по всем клеткам доски. Пустим маляра вперед по этому пути. Пусть маляр оглядывается по прохождении каждой клетки и смотрит, в нужный ли цвет она покрашена. Если в нужный – все нормально, идем дальше. Иначе возвращаемся назад, перекрашиваем клетку и снова идем вперед. Так мы сможем покрасить все, кроме последних двух клеток – но с ними можно разобраться отдельно.

Есть и другие способы решения. Например, можно заметить, что маляр может сделать такую операцию: перекрасить одновременно две клетки – ту на которой он стоит, и любую другую по своему выбору (для этого ему достаточно сходить в приглянувшуюся ему клетку и вернуться обратно по тому же маршруту). Для того, чтобы покрасить доску в шахматном порядке, ему достаточно применить эту операцию 32 раза.

31. При каких натуральных n можно разрезать квадрат на n меньших квадратов (не обязательно одинаковых)?

Решение: Легко привести примеры для $n = 1$, 4, и всех, начиная с 6. Остается 2, 3 и 5. Невозможность разрезания на 2 и 3 очевидна. Для $n = 5$ устраиваем перебор: 4 квадрата должны располагаться в углах, пятый обязан примыкать к какой-то стороне, дальше – просто.

32. Расставьте различные натуральные числа в таблицу 2×3 (2 строки, 3 столбца) так, чтобы произведения в столбцах были равны, и суммы в строках тоже были равны (но суммы могут отличаться от произведений).

Решение: Сначала расставляем любые числа так, чтобы произведения в столбцах были равны. Затем, если умножить все числа в одной строке на любое натуральное число, то произведения останутся равными.

33. а) Может ли свеча внутри пустой многоугольной комнаты не освещать полностью ни одну из стен? б) Существует ли многоугольник и точка вне него, из которой ни одной стороны не видно полностью?

34. У входа в пещеру с сокровищами стоит бочка с 4 дырками по кругу в крышке. В каждой дырке можно нащупать селедку хвостом вверх или вниз. Али-Баба может просунуть руки в любые две дырки, определить положение селедок под ними и, если хочет, перевернуть одну или обе по своему усмотрению. Когда хвосты всех четырёх селедок окажутся направленными в одну сторону, дверь в пещеру откроется. Однако, после того, как Али-Баба вытаскивает руки, бочка некоторое время с дикой скоростью крутится, так что Али-Баба не может определить, куда именно он совал руки раньше. Как Али-Бабе открыть дверь не более чем за 10 засовываний?

Решение:
Шаг 1. Засовываем руки в 2 соседних дырки и делаем так, чтобы там обе селедки находились хвостами вверх.
Шаг 2. Засовываем руки в 2 дырки по диагонали и делаем так, чтобы там обе селедки находились хвостами вверх. Если дверь еще не открылась, то получаем такую ситуацию: три селедки хвостами вверх, одна – хвостом вниз (с точностью до поворота).
Шаг 3. Засовываем руки по диагонали. Если одна из селедок хвостом вверх, а другая – вниз, то переворачиваем вверх ту, которая была вниз, и дверь открывается. Если обе – вверх, то переворачиваем одну из них хвостом вниз и получаем такую ситуацию: две рядом идующие селедки смотрят хвостом вниз, а две остальных – хвостом вверх.
Шаг 4. Засовываем руки в соседние дырки. Если там селедки имеют одинаковое направление хвостов, то переворачиваем обе и дверь открывается. Иначе – тоже переворачиваем обе и получаем следующую ситуацию: две диагональные селедки смотрят хвостами вниз, остальные две – хвостами вверх.
Шаг 5. Засовываем руки по диагонали и переворачиваем обе селедки. В итоге все четыре селедки оказываются направленными в одну сторону, и дверь открывается.

35. Решите более сложную задачу о сокровищах: в бочке по кругу находится 8 дырок, а за один ход разрешается “тестировать” и при необходимости переворачивать любые четыре из них.

36. Докажите, что существуют 1000 подряд идущих составных чисел.

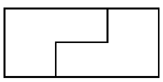
37. Найдите шесть последовательных натуральных чисел, первое из которых делится на 2, второе – на 3, третье – на 4, четвертое – на 5, пятое – на 6, шестое – на 7. Обязательно ли число, следующее за шестым, будет делиться на 8?

38. Найдите шесть последовательных натуральных чисел, первое из которых делится на 2, второе – на 3, третье – на 5, четвертое – на 7, пятое – на 11, шестое – на 13.

Разрезания и перекладывания.

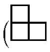
39. Как разрезать прямоугольник 4×9 на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

Ответ:

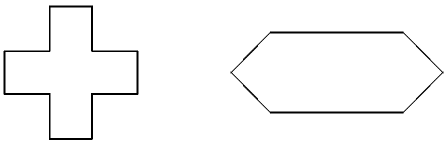


40. Дан круг и отмечена точка внутри него. На какое минимальное количество частей можно разрезать этот круг так, чтобы из получившихся частей можно было сложить круг, в котором отмеченная точка является центром.

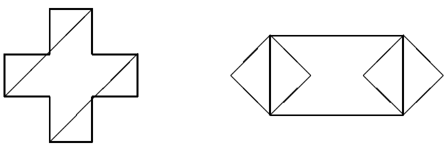
Решение: Вырежем из круг с диаметром AO (вернее чуть больше) и повернём его на $180°$.

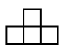
41. Разрежьте уголок, составленный из трёх клеток (), на четыре равные по форме части.

42. С помощью разрезаний и перекладываний сделайте из фигуры “крест” фигуру “конфета” (см. рисунок).

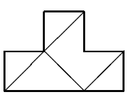


Ответ:



43. Разрежьте тетраминошку  на пять частей и сложите из них два равных квадрата.

Ответ:

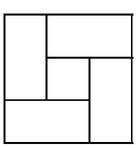


44. Сделайте из квадрата четыре равных прямоугольника и один квадрат

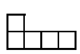
а) с помощью разрезаний и перекладываний;

b) с помощью только разрезаний.

Ответ:



45. а) Можно ли разрезать квадрат на 100 равных четырёхугольников, не являющихся прямоугольниками? б) Можно ли разрезать квадрат на 2000 равных треугольников?

46. Можно ли сложить квадрат из фигурок ? Фигурки можно брать в неограниченном количестве. А если длинная сторона уголка равна n клеткам?

47. Можно ли замостить плоскость одинаковыми а) пятиугольниками; б) шестиугольниками; в) семиугольниками?

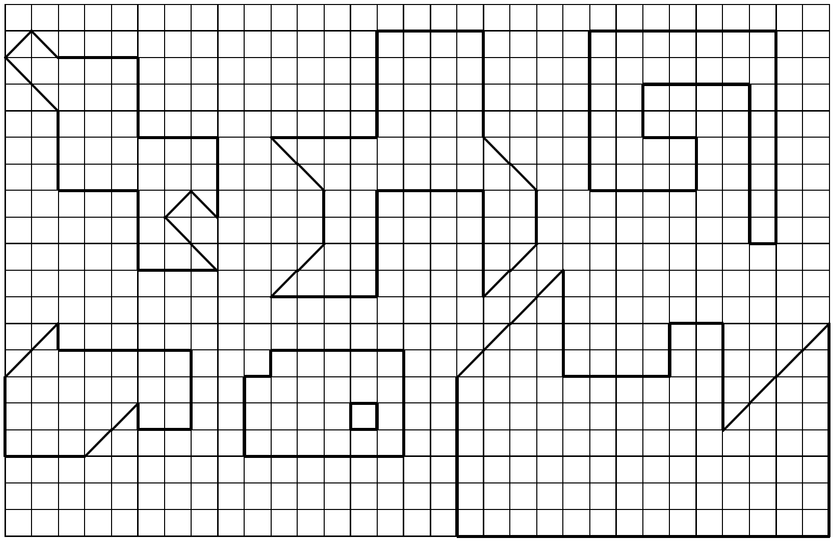
48. Разрежьте квадрат на два одинаковых а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) $2n$-угольника; г) $2n + 1$-угольника. Можно ли разрезать так прямоугольник? Для каких еще фигур годится этот алгоритм?

49. Можно ли разрезать на четыре остроугольных треугольника а) какой-нибудь пятиугольник; б) правильный пятиугольник?

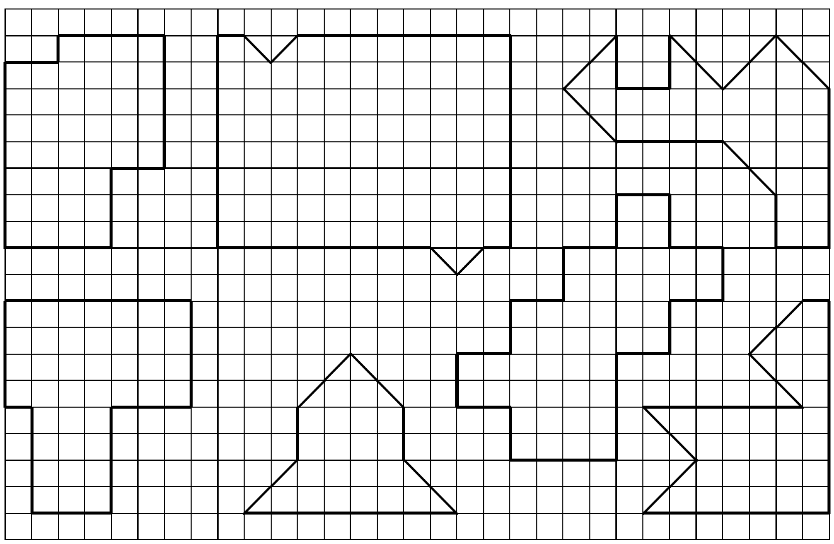
Недорезанные фигуры

На картинках приведены фигуры на клетчатой бумаге. Ваша задача – разрезать каждую фигуру на две одинаковых (по форме и размерам) части.

12–17.



18–24.



(В задаче 22 надо разрезать фигуру на *четыре* одинаковые части)

Принцип Дирихле

Принцип Дирихле-1.

1. Имеется 25 конфет 3 сортов. Верно ли, что не менее 9 из них будут какого-то одного сорта?

2. На складе есть 25 пар обуви 3 размеров. Докажите, что из них можно выбрать не менее 9 пар одного размера.

3. 20 школьников решали задачи. Один решил 18 задач, а остальные меньше. Доказать, что какие-то 2 школьника решили поровну задач.

Обратить внимание, что возможностей для остальных учеников не 17, а 18.

4. В ящике лежит 10 красных, 8 синих, 8 зеленых и 4 желтых шарика. Сколько надо вынуть шариков, чтобы среди них наверняка нашлись
а) шарик каждого цвета;
б) не менее 4 шариков каждого цвета;
в) не менее 6 синих;
г) не менее 6 красных?

5. Докажите, что среди любых 11 натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на 10.

После этой задачки следует устроить небольшое обсуждение и постараться выяснить, в чем общность этих, столь разных, задачек. Потом можно переходить к следующим задачам.

Задачи

6. Есть 82 кубика. Докажите, что из них найдется либо 10 кубиков разных цветов, либо 10 одноцветных.

7. Придумайте аналогичную задачу, чтобы нашлось либо 20 разноцветных, либо 20 одноцветных кубиков. Каким наименьшим числом кубиков вам удастся обойтись? Попробуйте объяснить, почему это число действительно наименьшее.

Обратить внимание, что тут нужны оценка и пример.

8. Тиранозаврик Вася весь день вычислял степени двойки – его интересовало, найдутся ли такие две различных степени, что три их последние цифры совпадут. Помогите Васе.

Тут новая идея – общая конечность числа вариантов плюс бесконечность числа "зайцев" в клетках.

9. Какого количества степеней двойки заведомо хватит тиранозаврику Васе, чтобы получить ответ на свой вопрос?

Решение: Легкая оценка – 1000. Чуть сложнее – 500. Еще сложнее – 251. Точный ответ – 103. Не следует требовать от шестиклашек ни хороших оценок, ни точного ответа. Главное – чтобы они понимали, что найденная ими оценка "1000" не является лучшей из возможных.)

Далее следует обсудить четыре последних задачки. В итоге прийти к окончательной формулировке "принципа кроликов": если есть N комнат и не менее чем $N \times K + 1$ ЛМыШат, то хотя бы в одной из комнат живет не меньше, чем $K + 1$ ЛМыШат.

Задачи для самостоятельного решения

10. В стране Курзюпии есть M футбольных команд по 11 человек. Они все должны ехать на чемпионат страны. M-местный самолет сделал 10 рейсов, а еще один вертолет перевез $M - 1$ человека. Доказать, что хотя бы одна команда приехала на чемпионат в неполном составе.

11. Даны 8 различных натуральных чисел, каждое из которых не больше 15. Доказать, что среди их попарных разностей найдутся три одинаковых.

Очень полезно для самых сильных попробовать пообобщать это утверждение во всевозможные стороны.

12. В каждой клетке таблицы записано число 1, 0 или -1. В каждой строке, столбце и диагонали считаем сумму всех стоящих там чисел. Могут ли все такие суммы быть различными?

Принцип Дирихле-2. Сначала сосчитаем...

13. Пятнадцать мальчиков собрали вместе 100 орехов. Докажите, что какие-то двое из них собрали одинаковое количество орехов.

Решение: Предположим противное – тогда мальчики собрали не меньше, чем $0+1+2+\ldots+14=105$ орехов. Противоречие.

14. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что двое послали открытки друг другу.

Решение: Всего было послано 50 открыток. Число "неориентированных" пар школьников равно $\frac{10\cdot 9}{2}$, поэтому на какую-то пару приходится не менее двух открыток, ч.т.д.

15. Докажите, что в любой момент однокругового чемпионата найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Указание: Не может существовать двух команд, одна из которых не сыграла ни одного матча, а другая – все матчи.

16. Числа 1, 2, ..., 7 разбиты на две группы. Докажите, что произведение чисел хотя бы в одной из групп меньше 72.

17. Цифры 1, 2, ..., 9 разбили на 3 группы. Докажите, что произведение чисел в хотя бы одной группе меньше 72.

Решение: Перемножим числа в трёх группах и докажем, что $9! < 72^3$.

18. Докажите, что из любых 10 чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 10.

Решение: Эта задача содержит идею "вспомогательной последовательности сумм". Рассмотрим 10 сумм a_1, a_1+a_2, $\ldots a_1+a_2+\ldots+a_{10}$. Среди них либо есть сумма, делящаяся на 10, либо две суммы с одинаковыми последними цифрами.

19. Докажите, что из 65 целых чисел всегда можно найти ровно 9 таких, сумма которых делится на 9.

Решение: Рассмотрим, сколько из чисел имеют одинаковые остатки при делении на 9. Если какой-то из остатков повторяется не менее 9 раз, то берем ровно 9 чисел с этим остатком. Если же такого остатка нет, то среди 65 чисел обязательно встретятся все 9 различных остатков. Возьмем по одному "представителю" – их сумма будет кратна 9.

20. Докажите, что из 65 целых чисел либо найдутся 9 таких, что каждое из чисел этой девятки, кроме последнего, делится на число, стоящее за ним, либо найдется девять таких чисел, что ни одно из них не делится на другое.

Решение: Будем выписывать в строчку числа до тех пор, пока следующее делится на предыдущее. Когда встретится число, не делящееся на предыдущее, начнем им новую строчку. В дальнейшем для каждого нового числа проверяем его делимость на *последние* числа во всех уже выписанных строчках, и если оно делится, то вписываем его. Если же делимости ни на одно из чисел нет, то снова начинаем новую строчку. В результате таких операций получим либо табличку, в которой более 8 строк, либо табличку, в которой хотя бы одна из строк содержит более восьми чисел.

Обратить внимание на то, что последние две задачи являются кодировками задачи 6 занятия "Принцип Дирихле-1". Плюс маленький шажок...

21. Верно ли, что среди любых 34 разных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два числа, одно из которых вдвое больше другого?

Ответ: Да, верно.

Решение: Разобьем числа на такие пары-клетки:
(1,2), (3,6), (5,10), ..., (25,50);
(4,8), (12,24), (20,40);
(16,32);
Добавим к этим 17-ти парам ещё не использованные 16 чисел, не превосходящих 50 (27, 28, 29, 31, 33, 35, 36, 37, 39, 41, 43, 44, 45, 47, 48, 49), каждое из них образует отдельную клетку. Всего получилось 33 клетки, поэтому в одну из них попадут хотя бы два данных числа. В "одноместную" клетку они попасть не могут, значит они попали в пару, так что одно из них действительно в два раза больше другого.

22. Докажите, что из 26 различных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

Решение: Разобьем числа на "цепочки":
1-2-4-8-16-32;
3-6-12-24-48;
5-10-20-40;
...
25-50;
27;
...
49
Иначе говоря, каждая цепочка однозначно задана своим наименьшим нечётным делителем. Цепочек всего 25, поэтому какие-то два из 26 чисел попадут в одну и ту же цепочку.

23. Попробуйте обобщить предыдущую задачу, если вместо 50 в условии будет стоять произвольное чётное число $2N$. (Какое число должно стоять вместо числа 26?)

Решение: Количество цепочек равно числу нечётных чисел от 1 до $2N$.

Ответ: $N+1$

24. Дано 20 различных натуральных чисел, меньших 70. Рассматриваются всевозможные их попарные разности (из большего числа вычитают меньшее). Докажите, что среди них всегда найдутся четыре одинаковых.

Решение: Простая оценка числа попарных разностей не дает требуемого результата. Правильная оценка строится так: будем считать, что числа упорядочены по возрастанию, и рассмотрим числа a_2-a_1, a_3-a_2, ..., $a_{20}-a_{19}$. Сумма этих 19 натуральных чисел равна $a_{20}-a_1$, то есть меньше $70-1$. Но если предположить, что среди них нет четырёх равных, то там не более трёх единиц, трёх двоек, ..., трёх шестерок и еще одно число, не меньшее 7. Сумма таких чисел не меньше, чем $3\cdot(1+2+3+4+5+6)+7=70$. Получили противоречие, доказывающее, что четыре равных разности найдутся даже среди выписанных 19 разностей соседних чисел.

25. В последовательности 2, 0, 0, 0, 2, 2, 4,... каждый член, начиная с пятого, равен последней цифре суммы предшествующих четырёх членов. а) Встретятся ли в этой последовательности еще раз подряд 4 цифры 2, 0, 0, 0? б) Встретятся ли в ней четыре подряд цифры 0, 0, 8, 2 ?

Ответ: а) Да. б) Да. Последовательность рано или поздно зациклится, потому что четверка последовательных цифр однозначно определяет следующую цифру. При этом последовательность обратима с любого места, то есть в ее период входят все цифры, включая самые первые. Цифры 0,0,8,2 встретятся в ней как раз перед вторым появлением четверки 2,0,0,0, потому что если продлить вправо 0,0,8,2, то последовательно получим 0,0 и 0.

Принцип Дирихле-3. Вокруг геометрии

26. В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 дырку (дырка – точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 50 см можно закрыть не менее 13 дырок.

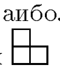
Решение: Разобьём ковёр на 4 квадрата 50 см×50 см. В один из них обязательно попадёт 13 дырок. На него и наложим заплатку.

27. В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 дырку (дырка – точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 20 см можно закрыть не менее трёх дырок.

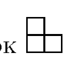
Решение: Разобьём ковёр на 25 квадратов 20 см×20 см. В один из них обязательно попадёт 3 точки. На него и наложим заплатку.

28. В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 15 дырок. Докажите, что из этого ковра можно вырезать круг радиуса 12.5 см, в котором нет ни одной дырки.

Решение: Разобьём ковёр на 16 квадратов 25 см×25 см. В одном из них не будет ни одной дырки, значит, из него можно вырезать круг без дырок.

29. Какое наибольшее число клеток можно закрасить на шахматной доске 8×8 так, чтобы в любом уголке из трёх клеток  были как закрашенные, так и незакрашенные клетки?

Решение: Разобьём доску на 16 квадратов 2×2. В каждом из них должно быть ровно две закрашенные клетки (иначе найдётся одноцветный уголок). Значит закрашенных клеток должно быть $16\cdot 2=32$. Примеры – раскраска “зеброй” или стандартная шахматная раскраска.

30. На шахматной доске стоит 31 фишка. Докажите, что найдется свободный уголок из трёх клеток .

Решение: Разобьём доску на 16 квадратов 2×2. В одном из них не более одной фишки, значит в нём найдётся свободный уголок.

31. В правильном 20-угольнике отметили 9 вершин. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с вершинами в отмеченных точках.

Решение: Разобьём вершины 20-угольника на 4 группы так, чтобы вершины, входящие в каждую из них, образовывали правильный пятиугольник. По принципу Дирихле какие-то 3 ($\frac{9-1}{4}+1$) из отмеченных вершин попадут в одну группу. Остаётся заметить, что любые три вершины правильного пятиугольника образуют равнобедренный треугольник.

32. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что существует отрезок, оба конца и середина которого окрашены в один цвет.

Решение: Пусть такого отрезка нет. Возьмём отрезок AB с концами одного (синего) цвета. Теперь возьмём на прямой по разные стороны от отрезка точки D и E так, чтобы расстояние от них до концов отрезка AB равнялось его длине ($DA=AB=BE$). Они, очевидно, должны быть несинего (красного) цвета. Середина отрезака DE, стало быть, должна быть синей. Но она также является серединой отрезка AB, у которого синие концы.

33. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что на ней найдется правильный треугольник с одноцветными вершинами.

Решение: Рассмотрим три синие точки A, B и C, такие, что B – середина отрезка AC (они существуют согласно предыдущей задаче). Пусть D – третья вершина правильного треугольника ACD, E и F – третьи вершины правильных треугольников ABE и BFC, лежащие в той же полуплоскости (относительно AC), что и точка D. Тогда либо хотя бы одна из точек D, E и F окрашена в синий цвет (и тогда образуется синий правильный треугольник), либо все эти три точки красные и образуют красный правильный треугольник.

34. Доска 6×6 заполнена костяшками домино 1×2. Докажите, что можно провести вертикальный или горизонтальный разрез доски, не пересекающий ни одной из костяшек.

Решение: Каждая строка, очевидно, пересекает чётное число вертикальных доминошек. Первый (верхний) возможный горизонтальный разрез по линии сетки пересекает ровно те доминошки, которые пересекает первая строка, то есть чётное число. Второй разрез – те, что занимает вторая строка, кроме тех, которые пересекает первый разрез – тоже чётное число. Рассуждая далее, выясняем, что каждый горизонтальный разрез пересекает чётное число доминошек. Аналогично доказывается, что каждый вертикальный разрез пересекает чётное число доминошек.

Таким образом, если требуемого разреза провести нельзя, то каждый из 10 возможных разрезов по линии сетки пересекает как минимум 2 доминошки, значит все они пересекают как минимум 20 доминошек. Но в разбиении доски участвуют только 18 доминошек.

35. Клетки прямоугольника 5×41 раскрашены в два цвета. Докажите, что можно выбрать три строки и три столбца так, что все 9 клеток, находящихся на их пересечении, будут иметь один цвет.

Решение: Найдётся хотя бы 21 столбец, в котором будет преобладать один из цветов (назовём этот цвет чёрным, а другой цвет – белым). Если в каком-нибудь из этих столбцов больше трёх чёрных клеток – перекрасим некоторые клетки в белый цвет так, чтобы в каждом из 21 столбца было три чёрных клетки. Теперь заметим, что вариантов расстановки этих трёх чёрных клеток в столбце всего 10, а, значит, раскраска хотя бы трёх столбцов совпадает.

36. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 16.

Решение: Пример расстановки 16 королей несложен – королей надо поставить "горошком". Теперь докажем, что больше 16 королей не поставить. Разобьём доску на 16 квадратов 2×2. Если короли не бьют друг друга, то в каждом квадратике должно быть не более одного короля, значит, всего королей не более 16.

Принцип Дирихле-4. Заплаты на кафтане

37. *Прямой коридор.* Коридор длины 6 м покрыт тремя трёхметровыми ковровыми дорожками, причем нигде дорожки не лежат в три слоя. Докажите, что какие-то две из них перекрываются не меньше, чем на 1,5 м.

Решение: Занумеруем дорожки слева направо. Закрасим все такие участки, где первая дорожка перекрывается со второй, а вторая с третьей. Суммарная длина таких перекрытий равна 3 м: три дорожки длины 9 м должны уместиться на коридоре длины 6 м. Следовательно, какое-то из этих трёх перекрытий не меньше 1,5 м (а какое-то другое – не больше 1,5 м).

38. *Круговой коридор.* Окружность длины 6 м покрыта тремя трёхметровыми дугами, причем никакие три дуги не имеют общих точек. Докажите, что какая-то пара дуг имеет пересечение не меньше, чем 1 м.

39. *Первая задача о трёх коврах.* В комнате площадью 6 кв.м постелены на полу три ковра площади 3 кв.м каждый. Верно ли, что какие-нибудь 2 из них пересекаются по площади, не меньшей 1 кв.м.?

Решение: Будем считать, что сначала на пол положен первый ковёр, затем второй, затем третий, то есть ковёр с меньшим номером не может лежать на ковре с большим номером. Суммарная площадь ковров равна 9, площадь ковров, лежащих непосредственно на полу, не больше 6, значит, часть ковров площадью не меньше 3 лежит на других коврах.
Эта площадь складывается из:
1) части третьего ковра, лежащей непосредственно на втором,
2) части третьего ковра, лежащей непосредственно на первом
3) части второго ковра, лежащей на непосредственно на первом.
Отсюда следует, что одна из этих частей не меньше 1.

40. *Вторая задача о трёх коврах.* В комнате площадью 6 кв.м постелены на полу три ковра площади S кв.м каждый. Известно, что $S > 2$. Докажите, что какие-нибудь 2 из них пересекаются по площади, не меньшей $S - 2$ кв.м.

41. *Первая задача о четырёх коврах.* В комнате площадью 6 кв.м на полу постелены 4 ковра площади 2 кв.м каждый. Верно ли, что какие-то два из них обязательно перекрываются по площади, не меньшей 1 кв.м?

Ответ: Нет, неверно. Контрпример строится очень легко.

42. Внутри квадрата со стороной 1 расположены 4 прямоугольника, площадь каждого из которых не менее $1/2$. Докажите, что хотя бы два из них имеют общую часть площади не менее $1/6$.

43. *4 заплаты на кафтане.* На кафтане площади 1 расположены 4 заплаты, площадь каждой из которых не менее $5/8$. Докажите, что какие-то две из них имеют общую часть площади не менее $1/3$.

Решение: "Излишек" площади состоит из 6 ($= 4 \cdot 3/2$) попарных пересечений (при этом возможны тройные и четверные пересечения). Обозначим через S_1 площадь, покрытую только один раз, S_2 – площадь двойных пересечений, через S_3 –

площадь тройных и через S_4 – площадь четверных пересечений. Сумма всех площадей попарных пересечений равна $S_2+3S_3+6S_4$. С другой стороны, по условию $S_1+2S_2+3S_3+4S_4 \geq 4\cdot 5/8 = 2.5$. Умножая это неравенство на 2 и вычитая очевидное условие $3(S_1+S_2+S_3+S_4) \leq 3$ (квадрат не обязательно покрыт целиком!), получаем неравенство $-S_1+S_2+3S_3+5S_4 \geq 2$. Следовательно, $S_2+3S_3+6S_4 \geq 2$ и какое-то из попарных пересечений заплат не меньше $2/6$.

44. *Спортсмены в секциях.* На спортивные соревнования в ЛМШ ходили 220 школьников. При этом некоторые из них участвовали в чемпионатах, а остальные были зрителями. В легкоатлетической эстафете приняли участие 30 человек, в соревнованиях по волейболу – 26, пионерболу – 32, футболу – 31, шахматам – 28 и теннису – 36 человек. 53 школьника приняли участие более чем в одном соревновании; из них 24 школьника участвовали 3 или более раз, 9 школьников – не менее 4 раз и 3 школьника – даже 5 раз (в последнюю тройку входит и один чудак, который выступал во всех шести соревнованиях). Сколько из школьников были зрителями.

Решение: Это классическая задача на "круги Эйлера" и формулу включений и исключений – в ней необходимо тщательно разобраться с составом участников соревнований. В сумме в них были $30+26+32+31+28+36 = 183$ школьника. Число школьников, игравших хотя бы один раз, равно $183-53-24-9-3-1 = 93$. Оставшиеся 127 школьников были зрителями.

45. *5 заплат на кафтане.* На кафтан площади 1 поставлены 5 заплат. Площадь каждой из них равна $1/2$. Докажите, что найдутся две заплаты, пересекающиеся по площади не менее $1/5$.

Решение: Обозначим через x_k площадь части кафтана, покрытую ровно k заплатами ($k = 0, 1, \dots, 5$). По условию площадь кафтана равна 1, а сумма площадей заплат – $5/2$:

$$S_0 = x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 1, S_1 = x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 = 5/2.$$

Сумма площадей всех 10 попарных пересечений заплат равна $S_2 = x_2+3x_3+6x_4+10x_5$. Оценим ее: $S_2 \geq -3x_0-x_1+x_2+3x_3+5x_4+7x_5 = 2S_1-3S_0 = 2$, поэтому хотя бы одно из 10 попарных пересечений будет по площади не меньше $2/10$. Равенство возможно, только если $x_0 = x_1 = x_4 = x_5 = 0$ и все 10 попарных пересечений равны по площади!

46. *Вторая задача о пяти заплатах.* На кафтане площади 1 имеется 5 заплат площади $1/3$. Докажите, что найдутся такие две заплаты, площадь общей части которых не меньше $1/15$.

47. *Для тех, кто любит покруче.* На кафтане площади 1 имеется 9 заплат площади $1/5$. Докажите, что найдутся такие две заплаты, площадь общей части которых не меньше $1/45$.

Текстовые задачи

Задачи про часы.

Найдем угол

1. Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут?

Решение: В 12 часов стрелки совпадали. Через 20 минут минутная стрелка пройдет $1/3$ часть окружности, а часовая пройдет $1/36$ часть окружности. Поэтому угол между ними составит $11/36$ частей окружности или $110°$.

2. Найдите угол между часовой и минутной стрелками а) в 9 часов 15 минут; б) в 14 часов 12 минут?

3. Когда угол между часовой и минутной стрелками часов больше а) в 13:45 или в 22:15; б) в 13:43 или в 22:17; в) через t минут после полудня или за t минут до полуночи?

4. Вася измерил транспортиром и записал в тетрадку углы между часовой и минутной стрелками сначала в 8:20, а потом в 9:25. После этого Петя забрал свой транспортир. Помогите Васе найти углы между стрелками в 10:30 и 11:35.

Найдем момент времени

5. Сколько раз с 12:00 до 23:59 совпадают минутная и часовая стрелки часов?

6. На часах полдень. Когда часовая и минутная стрелки совпадут в следующий раз?

7. Укажите хотя бы один момент времени, отличный от 6:00 и 18:00, когда часовая и минутная стрелки правильно идущих часов направлены в противоположные стороны.

8. Когда Петя начал решать эту задачу, он заметил, что часовая и минутная стрелки его часов образуют прямой угол. Пока он решал ее, угол все время был тупым, а в тот момент, когда Петя закончил решение, угол снова стал прямым. Сколько времени Петя решал эту задачу?

9. Петя проснулся в восьмом часу утра и заметил, что часовая стрелка его будильника делит пополам угол между минутной стрелкой и стрелкой звонка, показывающей на цифру 8. Через какое время должен прозвенеть будильник?

10. Коля отправился за грибами между восемью и девятью часами утра в момент, когда часовая и минутная стрелки его часов были совмещены. Домой он вернулся между двумя и тремя часами дня, при этом стрелки его часов были направлены в противоположные стороны. Сколько продолжалась Колина прогулка?

Ответ: 6 часов

11. Ученик начал решать задачу между 9 и 10 часами и закончил между 12 и 13 часами. Сколько времени он решал задачу, если за это время часовая и минутная стрелки часов поменялись местами?

Сколько раз бывает в жизни встреча?..

12. Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки правильно идущих часов образуют угол в 30 градусов?

13. Перед вами часы. Сколько существует положений стрелок, по которым нельзя определить время, если не знать, какая стрелка часовая, а какая минутная? (Считается, что положение каждой из стрелок можно определить точно, но следить за тем, как стрелки двигаются, нельзя.)

Неправильные часы

14. В мире антиподов минутная стрелка часов идет с нормальной скоростью, но в противоположную сторону. Сколько раз за сутки стрелки антиподных часов а) совпадают; б) противоположны?

15. Сколько раз в сутки антиподные часы невозможно отличить от нормальных (если не знать, который час на самом деле)?

16. Правильно шедшие часы испортились. С 24 часов до часу они шли нормально. Затем каждый час часовая и минутная стрелка меняются скоростями. Найти угол между стрелками в 3:30.

17. По точному хронометру было установлено, что часовая и минутная стрелки равномерно идущих (но с неправильной скоростью!) часов совпадают через каждые 66 минут. На сколько минут в час спешат или отстают эти часы?

18. В Италии выпускают часы, в которых часовая стрелка делает в сутки один оборот, а минутная – 24 оборота, причем, как обычно, минутная стрелка длиннее часовой (в обычных часах часовая стрелка делает в сутки два оборота, а минутная – 24). Рассмотрим все положения двух стрелок и нулевого деления, которые встречаются и на итальянских часах, и на обычных. Сколько существует таких положений? (Нулевое деление отмечает 24 часа в итальянских часах и 12 часов в обычных часах).

Ответ: 12 раз, в каждый чётный час.

Вместе весело шагать.

19. От потолка комнаты вертикально вниз по стене поползли две мухи. Спустившись до пола, они поползли обратно. Первая муха ползла в оба конца с одной и той же скоростью, а вторая хотя и поднималась вдвое медленнее первой, но зато спускалась вдвое быстрее. Какая из мух раньше приползет обратно? У какой из мух выше средняя скорость движения?

Решение: Первая муха, конечно, приползёт раньше. Пока вторая муха доберётся до верха, первая успеет сползать туда и обратно (так как её скорость в это время в два раза больше).

20. Двое одновременно отправились из A в B. Первый поехал на велосипеде, второй – на автомобиле со скоростью, в пять раз большей скорости первого. На полпути с автомобилем произошла авария, и оставшуюся часть пути автомобилист прошел пешком со скоростью, в два раза меньшей скорости велосипедиста. Кто из них раньше прибыл в B?

Решение: Велосипедист, двигается в два раза быстрее пешехода, поэтому может проехать весь путь за время, которое потребуется пешеходу на половину пути. Но в момент, когда пешеход стартовал, велосипедист уже проехал некоторое расстояние, Поэтому велосипедист приехал раньше

21. Группа туристов должна была прибыть на вокзал в 5 ч. К этому времени с турбазы за ними должен был прийти автобус. Однако, прибыв на вокзал в 3 ч 10 минут, туристы пошли пешком на турбазу. Встретив на дороге автобус, они сели в него и прибыли на турбазу на 20 минут раньше предусмотренного времени. С какой скоростью шли туристы до встречи с автобусом, если скорость автобуса 60 км/ч?

Решение: 6 км/ч. Туристы сэкономили 20 минут, за это время автобус дважды проехал бы путь, который они прошли, а шли они 100 минут.

22. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Одновременно из пункта B в пункт A на встречу велосипедисту вышел пешеход. После их встречи велосипедист повернул обратно, а пешеход продолжил свой путь. Известно, что велосипедист вернулся в пункт A на 30 минут раньше пешехода, при этом его скорость была в 5 раз больше скорости пешехода. Сколько времени затратил пешеход на путь из A в B?

Ответ: 45 минут.

Решение: Пусть до встречи пешеход прошел расстояние в x метров. Тогда велосипедист до встречи проехал $5x$ метров. К моменту возвращения велосипедиста в пункт А пешеход прошел $2x$ метров и ему осталось еще пройти $5x - x = 4x$ метров, на которые он потратил 30 минут. Следовательно, на каждые $2x$ метров он тратил 15 минут, а все расстояние между пунктами A и B $x + 5x = 6x$ пешеход преодолел за 45 минут.

23. Пароход шел от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно – 7 суток. Сколько времени плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

Решение: Пусть одновременно из Нижнего вышли плоты и пароход. Если за систему отсчета взять Волгу, то за пять суток пароход отплыл от плотов, а затем за пять суток к ним вернулся. То есть за 10 суток плоты прошли столько, сколько пароход за двое суток проходит против течения, следовательно, плоты будут в пути 35 суток. Основная идея: сменить систему отсчета.

24. Пловец плывет вверх против течения Невы. Возле Дворцового моста он потерял пустую фляжку. Проплыв еще 20 минут против течения, он заметил потерю и вернулся догонять флягу; догнал он ее возле моста лейтенанта Шмидта. Какова скорость течения Невы, если расстояние между мостами равно 2 км?

Решение: Догонит он флягу, очевидно, тоже за двадцать минут (достаточно принять Неву за систему отсчёта). За эти 40 минут фляга проплыла 2 км, значит за час она бы проплыла 3 км.

Ответ: 3 км/ч

25. Два охотника отправились одновременно навстречу друг другу из двух деревень, расстояние между которыми 18 км. Первый шел со скоростью 5 км/ч, а второй – 4 км/ч. Первый охотник взял с собой собаку, которая бежала со скоростью 8 км/ч. Собака сразу же побежала навстречу второму охотнику, встретила его, тявкнула, повернула и с той же скоростью побежала навстречу хозяину, и так далее. Так она бегала до тех пор, пока охотники не встретились. Сколько километров она пробежала?

Решение: До встречи охотников пройдёт два часа, за это время собака пробежала 16 км.

26. Андрей ведет машину со скоростью 60 км/ч. Он хочет проезжать каждый километр на 1 минуту быстрее. На сколько ему следует увеличить скорость?

Решение: Не слишком ли многого он хочет? Он и так на километр тратит только минуту времени.

27. Турист шел 3,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/час?

Решение: Пусть он идёт по такому графику: переходы по полчаса со скоростью 10 км/ч и привалы по полчаса. Тогда за 3,5 часа он пройдёт 20 км, и его средняя скорость равняется 20/3,5=35/7 км/ч.

Игры

Игры-1.

Обычно в играх, которые мы будем рассматривать, принимают участие два игрока, которые делают свои ходы по очереди. Когда игра заканчивается, можно определить, кто из игроков выиграл.
Если один из игроков может играть так, что он выиграет вне зависимости от игры его противника, то говорят, что у этого игрока есть *выигрышная стратегия*. Если игроки достаточно сообразительны для того, чтобы, имея выигрышную стратегию, пользоваться именно ей, то такую игру называют *правильной*. Выигрышная стратегия может быть только у одного игрока – попытайтесь понять, почему.
Если в задаче про игру не задано вопроса, то считается, что он таков: "кто выигрывает при правильной игре и как ему играть?".
В начале занятия стоит разобрать (или напомнить) следующие задачи:
задача 5 из вступительной олимпиады;
задача 31 из комбинаторики-3 (выигрышные позиции);
задача 57 из разнобоя-8 (шутка);
задача 66 из разнобоя-9 (подобие суммы многих игр);
задача 75 из разнобоя-10 (соответствие).

Углубляться в теорию здесь незачем, цель разбора – показать разнообразие стратегий.

1. *Две кучки по 100.* В двух кучках лежат предметы, по 100 предметов в каждой. За ход разрешается взять произвольное количество предметов, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Найдите выигрышную стратегию для второго игрока.

Решение: Второму игроку достаточно повторять ходы первого, но только в другой кучке. Таким образом, только после ходов второго в количество предметов в кучках становится равным, следовательно, ситуация, когда в обеих кучках не останется ни одного предмета, также может наступить только после хода второго, а, значит, он не проиграет. Поскольку с каждым ходом количество предметов в кучках уменьшается, игра закончится, и так как второй не проиграет – он выиграет.

2. *Три кучки по 100.* В трёх кучках лежат предметы, по 100 предметов в каждой. За ход разрешается взять произвольное количество предметов, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Найдите выигрышную стратегию для первого игрока.

Ответ: Забирая все предметы из одной кучки, первый сводит игру к игре "две кучки по 100", в которой он играет уже вторым.

3. *Миллионеры.* Два миллионера по очереди кладут пятаки на круглый стол, так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Как надо играть миллионеру, который кладёт первый пятак, чтобы наверняка выиграть?

Решение: Выигрывает первый. Первый ход – положить пятак в центр стола, и дальше симметрия.

4. *Шоколадка-2.* Двое по очереди разламывают шоколадку. За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1. Кто выигрывает при правильной игре, если шоколадка имеет размеры а) 10×10; б) 10×13. в) шоколадка 10×13, но первый получивший дольку 1×1 выигрывает.

Решение: Всюду выигрывает второй, разделив шоколадку на две, и далее действуя симметрично. В пункте в) надо играть симметрично до предпоследнего момента.

5. *Слоны на доске.* Двое по очереди ставят шахматных слонов в клетки доски 8×8 так, чтобы слоны не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре, и как ему при этом нужно играть?

Решение: Выигрывает второй. Симметрия относительно вертикальной оси или относительно центра.

6. *Любит – не любит.* У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

Решение: В обоих случаях выигрывает второй. Своим первым ходом он разбивает лепестки на две одинаковых группы, а дальше действовать симметрично. В а) проходит и тривиальная центрально-симметричная стратегия.

7. *Выкладывание доминошек.* Доска 8×8. За ход можно положить доминошку на любое свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход.

Решение: Выигрывает второй, стратегия – центральная симметрия.

8. *Снятие шашек.* В каждой клетке доски а) 11×11 б) 11×12 в) 12×12 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.

Решение: В а) выигрывает первый. Например, первым ходом он снимает центральную шашку и дальше действовует центральносимметрично. В б) первым ходом нужно снять всю центральную (шестую) вертикаль, а дальше действовать осесимметрично. (Эта же стратегия проходит и в задаче а)). И, наконец, в в) можно сразу действовать центральносимметрично, поэтому выигрывает второй.

9. *Щёлк.* Для игры “щелк” требуется прямоугольная шоколадка (в этой задаче – шоколадка 8×8). За ход разрешается съесть произвольную дольку и все находящиеся слева и сверху от неё. Проигрывает тот, кто съедает левую нижнюю дольку.

Решение: Выигрывает первый. Он должен первым ходом съесть квадрат 7×7, и далее действовать симметрично.

10. *Король-турист.* Двое играют в следующую игру: первый выбирает любое поле на доске 8×8, ставит туда короля и делает ход (король может ходить в соседние и соседние по диагонали клетки), при условии, что на эту клетку раньше никто не вставал. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение: Выигрывает второй. Клетки разбиваются на пары стоящих рядом (например на доминошки), и как только первый поставил короля на одну из клеток пары, второй ходит на другую.

Игры-2. “+” и “–”

Напоминаем, что если в задаче не сформулировано никакого вопроса, то это нужно понимать так: спрашивается, кто из игроков выигрывает при правильной игре и какова его выигрышная стратегия.

11. *Уменьшение на делитель.* Игра начинается с числа 60. За ход разрешается уменьшить имеющееся число на любой из его делителей. Проигрывает тот, кто получит ноль.

Ответ: Во-первых, заметим, что эта игра всегда заканчивается победой одного из игроков: числа на доске постоянно уменьшаются, поэтому рано или поздно на доске окажется число 0. Теперь докажем, что выигрывает первый. Своим ходом он всегда может забирать 1, оставляя второму нечётное число. Второй должен отнять от нечётного числа какой-нибудь его делитель, а поскольку все делители нечётных чисел нечётны, то в результате после хода второго на доске опять окажется чётное число. Таким образом, первый игрок всегда сможет сделать ход, то есть он не может проиграть. Следовательно (см. первое замечание), проиграет второй.

12. *Уменьшение на цифру.* Волк и Заяц играют в следующую игру: на доске написано некоторое натуральное число с ненулевой последней цифрой. Ход состоит в том, что из числа вычитают какую-нибудь его ненулевую цифру и пишут результат вместо старого числа. Выигрывает тот, кто первым получит нуль.

Решение: Первый игрок постоянно вычитает из числа его последнюю (ненулевую!) цифру.

13. *Две кучки-1.* Имеется две кучи конфет: в первой – 40, во второй – 45. За ход нужно одну кучу съесть, а другую разделить на две (не обязательно равные). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение: В этой игре выигрывает первый игрок. Он всегда съедает нечётную кучку, а чётную делит на две нечётных – в результате после его хода оказываются две нечётных кучки, а после хода второго – снова одна нечётная и одна чётная кучка. Единственная позиция, в которой невозможно сделать ход – позиция (1,1), которая могла получиться только после хода первого игрока.

14. *Две кучки-2.* Имеется две кучи конфет: в первой – 100, во второй – 201. За ход разрешается съесть из одной кучки любое число конфет, являющееся делителем количества конфет в другой кучке. Выигрывает тот, кто съедает последнюю конфету.

Ответ: И здесь выигрышными являются позиции, в которых обе кучки содержат нечётное число конфет. Первый игрок должен своим ходом взять 1 конфету из первой кучки.

15. *Система со звездочками.* Два игрока ставят по очереди числа вместо звездочек в следующей системе равенств:

$$\{ \ * = * * = * + * * = * + * + * \ldots * = * + * + \ldots + *$$

(в последнем равенстве справа 8 слагаемых). Второй игрок выигрывает, если все равенства выполняются, в противном случае выигрывает первый.

Ответ: Эта задача кодируется игрой про 8 шашек, стоящих на диагонали шахматной доски.

В этом месте имеет смысл разобрать предыдущие задачи и подробно поговорить о том, как именно они анализировались и находились выигрышные стратегии, а также о том, почему эти стратегии действительно были выигрышными.

Анализ с конца в играх

Рассматриваем игровые ситуации начиная с конца, отмечая заведомо проигрышные или выигрышные ситуации. Далее, идем с конца – если из некоторой игровой позиции можно попасть в проигрышную, то эта позиция – выигрышная. Если же из некоторой позиции можно попасть только в выигрышные, то данная позиция – проигрышная. Часто позиции в игре полезно представить в виде таблицы.

16. *Игра Баше.* Имеется полоска клетчатой бумаги длиной 10 клеток. В крайней правой ее клетке стоит шашка (рис. 1). Двое играющих по очереди передвигают ее влево на одну или две клетки. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Рис 1.

Решение: Представим себе, что шашка уже дошла до крайней левой клетки, помеченной на рис. 1 цифрой 0. Понятно, что в этом случае проиграл тот, чья очередь ходить (назовем его очередником), потому что ходить ему некуда. А вот если шашка стоит на клетках 1 или 2 то очередник одним ходом сдвинет ее на клетку 0 и выиграет. Отметим клетку 0, где очередником быть невыгодно, минусом, а выгодные для очередника клетки 1 и 2 – плюсами (рис. 2).

−	+	+							

Рис 2.

−	+	+	−	+	+	−	+	+	−

Рис 3.

Теперь посмотрим, каково быть очередником, когда шашка стоит на клетке 3? Если сдвинуть шашку на одну клетку, она окажется на клетке 2, а если на две – на клетке 1. Обе клетки выгодны для очередника, да только очередником будет уже не тот, кто ходил, а его партнер. Он и выиграет. Получается, что клетка 3 для очередника невыгодна, а клетки 4 и 5 выгодны: с них очередник одним ходом переводит шашку на клетку 3, и его партнер, став очередником, оказывается у разбитого корыта. Продолжая в том же духе, нетрудно показать, что клетка 6 невыгодна для очередника, клетки 7 и 8 – выгодны, а клетка 9 – снова невыгодна (рис. 3). Стало быть выигрывает второй игрок.

17. *Баше – длинные полоски.* Кто выигрывает в игре Баше, если длина полоски составляет 11 клеток? 12 клеток? 13 клеток? 2000 клеток?

Решение: Как видно из решения предыдущей задачи, невыгодные для очередника позиции – это клетки, номера которых имеют остаток 1 при делении на 3. Поэтому на полоске длиной 12 клеток выигрывает второй игрок, а на полосках длин 11, 13 и 2000 клеток – первый.

18. *Баше – ходы до 5.* Изменим правила игры Баше: теперь за один ход можно сдвигать шашку на 1, 2, 3, 4 или 5 клеток, а длина полоски – 13 клеток.

Решение: Нарисуем эту полоску и, как в предыдущей задаче, отметим на ней плюсами и минусами клетки, выгодные и невыгодные для очередника. Получается, что невыгодные для очередника клетки (то есть клетки, на которые надо ходить, чтобы выиграть) имеют остаток 1 при делении на 6.

19. *Баше – вариация.* А теперь в игре Баше можно сдвигать шашку на 3, 6, 9 или 12 клеток, а длина полоски – 40 клеток.

20. *Баше – 1, 3, или 4.* Проанализируйте игру Баше, где можно сдвигать шашку на 1, 3 или 4 клетки, а длина полоски – 15 клеток. А что можно сказать про случай, если длина полоски – 2000 клеток?

Игры-3.

21. Имеется 40 конфет. Двое по очереди едят от одной до шести из них. Выигрывает съевший последнюю конфету.

Решение: А что это, как не игра Баше? Первым ходом нужно съесть 5 конфет.

22. Имеется 40 конфет. Двое по очереди едят от 1 до 6 из них. Тот, кто съел последнюю, *проигрывает.*

Решение: Это тоже игра Баше, только цель в ней – достичь не нуля конфет, а одной конфеты! Все выигрышные позиции сдвинуты на 1 относительно "стандартной" игры. Первый игрок должен первым ходом съесть 4 конфеты.

23. В 6-й класс ЛМШ приехало 50 школьников. За ход разрешается съесть двух, четверых или семерых из них. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение: Выигрышными здесь являются все "позиции", в которых число школьников больше 3 и не кратно 3, а также "позиции" 2 и 3. Работае стратегия "ставь на минус!" – первым ходом игрок должен съесть двух школьников и оставить 48. Затем на каждый ход 2 он отвечает ходом 7, а на каждый ход 4 или 7 – ходом 2. Так он действует до тех пор, пока число школьников не станет равно 6, 9 или 12. В позиции "12" на ход 7 надо ответить ходом 4 (соответственно, на ход 4 нужно ответить ходом 7), а на ход 2 – также ходом 4. В позиции "9" на ход 7 отвечаем ходом 2 (и наоборот), а на ход 4 – тоже ходом 4. Наконец, в позиции "6" возможны только ходы 4 и 2, поэтому все очевидно.

24. В чашке сидит 105 микробов. За ход разрешается вытащить 2, 3 или 5 микробов. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход.

Решение: Проигрышными являются позиции вида $7k$ и $7k+1$. Поскольку 105 – одна из таких позиций, то в игре выигрывает второй игрок.

25. Конь стоит на поле $a1$. За ход разрешается передвигать коня на две клетки вправо и одну клетку вверх или вниз, или на две клетки вверх и на одну вправо или влево. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Проигрывает первый игрок. На доске проигрышными клетками являются только $a1$, $c3$, $c4$, $d3$, $d4$, $c7$, $c8$, $d7$, $d8$, $g3$, $g4$, $h3$, $h4$, $g7$, $g8$, $h7$, $h8$.

26. В кучке n спичек. За ход нужно взять от 1 до 3 спичек, но не столько, сколько только что взял противник. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре сторон а) при $n = 12$ б) при $n = 13$?

Решение: Для анализа игры нужно понять, что она ведется на поле $n \times 3$, где номер строки соответствует величине последнего хода, сделанного соперником.

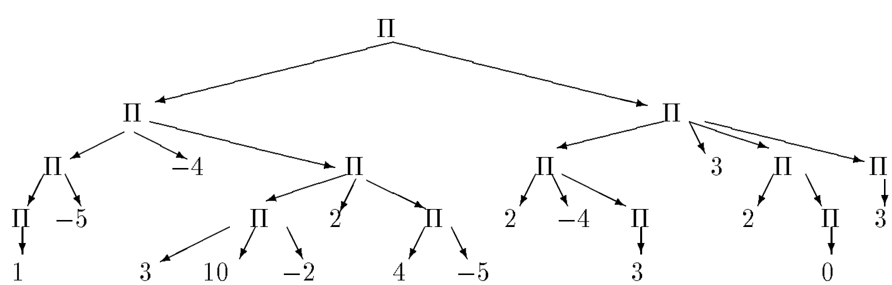
27. В куче – n спичек, из них 3 – обломанные, остальные – целые. За ход можно взять 1, 2 или 3 спички, но обломанные можно брать только когда кончились целые. Тот, кому досталось меньше обломанных спичек, выплачивает разницу в их числе другому. Кто победит и с каким счетом а) при $n = 13$; б) при $n = 14$?

28. Имеется две кучи по семь апельсинов. За ход разрешается съесть один апельсин из любой кучки или по одному апельсину из каждой кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

29. Король стоит на поле $a1$. За один ход разрешается сдвинуть его на одну клетку вверх, одну клетку вправо или одну клетку по диагонали вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля на поле $h8$.

Решение: Эти две игры кодируются друг дружкой.

30.



В начале игры фишка стоит на верхней позиции П. Игроки по очереди передвигают ее на одну позицию вниз по линиям. Игра заканчивается, когда фишка попадает на число. После этого второй выплачивает первому столько тугриков, каково это число (если число меньше 0, то на самом деле выплачивает первый второму). Сколько тугриков будет выплачено при наилучшей игре сторон, и какой игрок их получит?

Решение: Второй выплатит первому 2 тугрика.

31. В трёх кучках лежит по 7 камней. За ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает взявший последний камень. а) Кто выигрывает в этой игре, если в нее играют 2 человека? б) Докажите, что если в эту игру играют трое, то двое из них могут сговориться и обыграть третьего.

32. В коробке лежат 300 спичек. За ход можно взять из коробка не более половины имеющихся в нем спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Ответ: Проигрышными позициями ("минусами") являются 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127 и 255.

33. На столе лежат 9 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 9. Двое по очереди откладывают в сторону по одной карточке. Проигрывает тот, после хода которого сумма чисел на отложенных карточках станет больше 25.

Решение: Первый берет карточку с числом 5, а затем дополняет ходы противника до 10.

Игры-4.

Щёлк

Напомним, что для игры "щёлк" требуется прямоугольная шоколадка. За ход разрешается съесть произвольную дольку и все находящиеся справа и сверху от неё. Проигрывает тот, кто съедает левую нижнюю дольку.

34. Найдите выигрышную стратегию для первого игрока в игре “щёлк” на шоколадке 2×100.

Решение: Выигрышные позиции – шоколадки, со столбцами длинами $n+1$ и n.

35. Проанализируйте игру “щёлк” на огрызке шоколадки из трёх строчек: 2, n и $n+2$ дольки. а) Кто выигрывает при $n = 2, 3, 4, 5$ б) n – произвольное.

Передача хода

Если один из игроков каким-то способом может воспользоваться стратегий другого, то он не проиграет.

36. Игра в “двойные шахматы” ведется также, как и в обычные, только игроки делают по 2 хода за раз. Докажите, что в этой игре у второго игрока не может быть выигрышной стратегии.

Решение: Передача хода – ход конём туда-обратно, в результате чего позиция не изменится. Знатоков шахматных правил могут заметить, что на самом деле ситуация в игре всё же не вполне симметрична, так как есть, наример, правило троекратного повторения позиции (и правило 50 ходов). Полезно подумать, как можно ответить на эти возражения.

37. Докажите, что в игре “щёлк” у первого игрока есть выигрышная стратегия на любой прямоугольной шоколадке, в которой больше одной дольки (предъявлять стратегию не обязательно).

Решение: Вничью игра закончиться не может. Предположим, что выигрышная стратегия есть у второго игрока. Долька, находящаяся в правом верхнем углу съедена в любом случае после первого хода. Если у второго есть выигрышная стратегия, то у него есть выигрышный ответный ход на ход первого, состоящего в поедании только правой верхней дольки. Но этот выигрышный ход первый может с тем же успехом сделать сам с самого начала, а далее воспользоваться выигрышной стратегией второго! (А так ли получается, если в шоколадке всего одна долька?)

38. На бесконечной доске двое играют в крестики-нолики. Кто поставит пять своих в ряд – по вертикали или горизонтали – выигрывает. Докажите, что при правильной игре первый не проигрывает.

39. На доске написано число 2. За ход можно к записанному числу прибавить один из его делителей отличный от самого этого числа. Проигрывает тот, кто получит число большее 1000. Докажите, что у первого игрока есть выигрышная стратегия.

Ответ: После первых двух ходов всегда получается число 4. Из него можно получить как 5, так и 6, но из 5 можно получить только 6. Следовательно, после числа 4 можно осуществить передачу хода в зависимости от того, выигрышным или проигрышным является число 6.

Ещё одна, последняя, игра

40. Двое играют в следующую игру: первый выбирает любое поле на доске 8×8, ставит туда а) короля; б) коня и делает ход этой фигурой, причем разрешается ходить только на те клетки, на которые раньше никто не вставал. Далее игроки ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Решение: Выигрывает второй. Клетки разбиваются на пары стоящих “ходом короля (коня)”, и как только первый поставил короля (коня) на одну из клеток пары, второй ходит на другую.

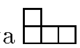
С миру по нитке

Раскраска-1.

Занятие начинается с разбора задачи из темы “можно или нельзя” про разбиение на доминошки шахматной доски с двумя вырезанными из противоположных углов клетками. После этого имеет смысл “в диалоге” проработать первые несколько задач.

1. Можно ли выложить шахматную доску тридцатью двумя доминошками так, чтобы 17 из них были расположены горизонтально, а 15 – вертикально?

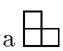
Решение: Раскраска “зеброй”. Горизонтальные доминошки занимают нечётное число чёрных клеток (а именно – 17), а вертикальные – чётное.

2. Можно ли выложить квадрат 8×8, используя 15 прямоугольников 1×4 и один уголок вида ?

Решение: Раскраска “зеброй”. Прямоугольники занимают чётное число чёрных клеток, а уголок – нечётное.

3. Можно ли выложить прямоугольник 6×10 прямоугольниками 1×4?

Решение: Применим раскраску “в горошек” – покрасим в чёрный цвет те клетки, которые находятся на пересечении чётных вертикалей и чётных горизонталей, а остальные – в белый. Каждый прямоугольник занимает чётное количество чёрных клеток, значит все вместе они тоже занимают чётное число чёрных клеток. Кроме того, проходит шахматная раскраска крупными квадратами 2×2 и диагональная четырёхцветная раскраска.

4. Можно ли сложить квадрат 6×6 с помощью 11 прямоугольников 1×3 и одного уголка вида ?

Решение: Предположим, что квадрат удалось сложить. Раскрасим клетки в три цвета “по диагоналям”, причём так, чтобы, две “крайних” клетки уголка оказались одного цвета (синего). Прямоугольники будут занимать ещё 11 синих клеток, значит все фигурки вместе занимают 13 синих клеток, но синих клеток на доске всего 12.
Другое решение: раскрасим доску “зеброй” в три занумерованных цвета (1, 2, 3) и заметим, что сумма цветов клеток по всей доске делится на 3. С другой стороны, сумма цветов клеток, покрываемых любым прямоугольником 1×3, делится на 3, а сумма цветов клеток, покрываемых уголком, не делится на три.

5. На каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент времени все жуки взлетают и приземляются на соседние по стороне клетки. Докажите, что при этом окажется хотя бы одна пустая клетка.

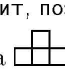
6. Из доски 8×8 вырезали угловую клетку. Можно ли оставшуюся часть разрезать на прямоугольники 3×1?

Решение: трёхцветная раскраска

Задачи

7. Фигура “верблюд” ходит по шахматной доске ходом типа (1, 3). Можно ли пройти ходом “верблюда” с произвольного поля на соседнее?

Решение: Ход верблюда не меняет цвета клетки, на которой он стоит, поэтому на соседнюю клетку перейти он не сможет.

8. Можно ли доску размером 10×10 покрыть фигурами вида ?

Решение: Шахматная раскраска. Каждая такая фигурка занимает нечётное число чёрных клеток, значит все 25 фигурок тоже занимают нечётное число чёрных клеток.

9. Дана доска 12×12. В левом нижнем углу стоят 9 шашек, образуя квадрат 3×3. За один ход можно выбрать какие-то две шашки и переставить одну из них симметрично относительно другой (не выходя при этом за пределы доски). Можно ли за несколько ходов переместить эти шашки так, чтоб они образовали квадрат 3×3 в правом нижнем углу?

Ответ: Нет (шахматная раскраска – шашки остаются на клетках тех же цветов).

10. В каждой клетке квадрата 9×9 сидит жук. По команде каждый жук перелетает на одну из соседних по диагонали клеток. Доказать, что по крайней мере 9 клеток после этого окажутся свободными.

Решение: Раскрасим доску в четыре цвета, так чтобы каждый цвет образовывал раскраску “в горошек”. Назовём цвет, в который окрашены угловые клетки, синим, а цвет, в который окрашены клетки, примыкающие к угловым по диагонали –

красным. На синие клетки жуки могут перелетать только с красных. Остаётся заметить, что синих клеток на 9 больше, чем красных. Стоит заметить, что мы здесь имеем дело с той же самой шахматной раскраской, но применённой к диагоналям.

11. Замок имеет форму правильного треугольника, разделенного на 25 маленьких залов той же формы. В каждой стене между залами проделана дверь. Путник ходит по замку, не посещая более одного раза ни один из залов. Найти наибольшее число залов, которое ему удастся посетить.

Ответ: 21 зал. Раскрасим треугольник в шахматном порядке. Залов одного цвета (например чёрного) – 15, а другого цвета (белого) – 10. Заметим, что в чёрном зале путник может находиться с самого начала, или попасть в него из белого, поэтому он побывает не более, чем в 11 чёрных залах. Таким образом, не менее 4 чёрных залов останутся непосещёнными. Пример, когда путник не посетит ровно четыре зала, строится без труда.

12. Дан куб $6 \times 6 \times 6$. Докажите, что его нельзя разбить на параллелепипеды $4 \times 1 \times 1$.

Решение: Трёхмерный вариант задачи 3

13. Докажите, что числа от 40 до 99 нельзя разбить на группы по 4 числа так, чтобы числа каждой группы в одном разряде совпадали, а цифры другого разряда шли бы подряд (например “{54, 55, 56, 57}”; “{44, 54, 64, 74}”)

Указание: Попытайтесь закодировать эту задачу так, чтобы оправдать её наличие в теме “раскраски”.

Решение: Задача кодируется задачей 3.

14. Докажите, что трёхзначные числа нельзя разбить на группы по 4 так, чтобы числа в каждой группе совпадали во всех разрядах кроме одного, а в оставшемся разряде цифры шли бы подряд.

Ответ: Трёхмерный вариант задачи 13 (кодируется задачей очень похожей на задачу 12).

Ацнóк с зиланá

Не то чудо из чудес, что упал мужик с небес, а то чудо из чудес, как же он туда залез

15. *Лилия.* На озере расцвела одна лилия. Каждый день число ее цветков удваивалось, а на 20-й день всё озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?

Решение: Начнём с конца. Пусть сегодня половина озера покрылась цветами. Через сколько дней покроется всё озеро? Завтра! И это будет 20-й день.

Ответ: за 19 дней.

16. *Канцтовары для Алёши.* Мама послала Алешу в магазин за покупками, вручив ему кошелек с деньгами. Половину денег Алеша уплатил за молоко и сыр. Доехав за 3 р. на автобусе до магазина, половину оставшихся денег и еще 1 р. он уплатил за книгу. На половину того, что еще осталось, Алеша купил тетрадей. Выйдя из магазина, он купил мороженое за 4 р., оставив деньги лишь на обратный проезд на автобусе. Сколько денег мама дала Алеше?

Решение: Так как нам известно количество денег перед последней покупкой, то задачу проще решать с конца. После покупки тетрадей у Алеши осталось 7 р., значит, за тетради он заплатил 7 р. Тогда 14 р. вместе с 1 р. – это половина денег, бывших у Алеши до покупки книги. Тогда до покупки книги у него было 30 р. Поэтому после покупки молока и сыра у Алеши оставалось 33 р., а это половина первоначальной суммы. Т.е. мама дала Алеше 66 р.

17. *Из кучки в кучку.* 48 спичек разложены по трем кучкам. Известно, что если из первой кучки переложить во вторую столько спичек, сколько в этой второй кучке имеется, а затем из этой второй переложить в третью столько, сколько в этой третьей находится и, наконец, из третьей переложить в первую столько спичек, сколько в этой первой кучке будет тогда находиться, то число спичек во всех кучках станет одинаковым. Сколько спичек было в каждой кучке первоначально?

Решение: Эту задачу также проще решать с конца. Так как после всех перекладываний число спичек в кучках стало одинаковым, то в каждой кучке их оказалось $48{:}3 = 16$ штук. Перед этим в первой кучку добавили столько спичек, сколько в ней было, т.е. 8 штук. Эти 8 спичек взяли из третьей кучки, т.е. там перед последним перекладыванием было $16 + 8 = 24$ спички. Но эти 24 спички мы получаем перекладыванием из второй кучки в третью такого количества спичек, какое в третьей кучке уже было. Т.е. удвоением спичек. Значит до второго перекладывания в третьей кучке было 12 спичек, а во второй $16 + 12 = 28$ спичек. Рассуждая аналогично получаем, что во второй кучке 14 спичек, а в первой $8 + 14 = 22$ спички.

Ответ: Первоначально в первой кучке было 22 спички, во второй – 14, а в третьей – 12.

Задачи для самостоятельного решения

18. *Алёшино число.* Алеша задумал число. Он прибавил к нему 5, потом разделил сумму на 3, умножил на 4, отнял 6, разделил на 7 и получил число 2. Какое число задумал Алеша?

Ответ: 10

19. *Калькулятор.* Микрокалькулятор позволяет делать с введённым в него числом две операции: умножать на 2 или переставлять его цифры. Можно ли получить из числа 1 число 68?

20. *Бактерия.* В колбу пустили бактерию. Каждую минуту число бактерий удваивается. Через три часа колба заполнилась бактериями. В какой момент бактериями была заполнена четверть колбы?

Ответ: Через 2 часа 58 минут.

21. *Гуси.* Над озерами летели гуси. На каждом садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на 7 озерах. Сколько было гусей?

Ответ: 127.

22. *Покрытие доски доминошками.* Клетчатая доска 8×8 выложена плитками домино 1×2. Докажите, что какие-то две из них образуют квадрат из четырёх клеток.

23. *Открытки.* Учитель раздавал школьникам открытки. Первому он дал одну открытку и одну десятую оставшихся. Второму он дал две открытки и одну десятую оставшихся и т.д. Девятому он дал девять открыток и одну десятую оставшихся. Оказалось, что все получили поровну и все открытки были розданы. Сколько всего было открыток?

Ответ: 81

24. *Нули и единицы по кругу.* По кругу расставлены 9 нулей и единиц, причем не все они равны. За один ход между каждыми двумя соседними числами записывается 0, в случае если они равны, и 1 в противном случае. Далее старые числа стираются. Могут ли в конце все числа оказаться равными?

Ответ: Нет, не могут

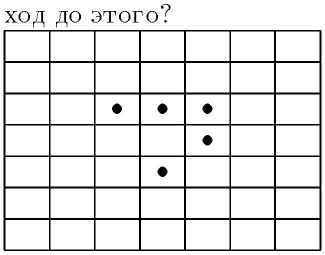
25. *Гномы.* За столом сидят 7 гномов, перед каждым – кружка, в некоторые налит эль (но, быть может, не поровну). Первый разлил весь свой эль поровну в кружки всем остальным. Затем второй разлил свой эль поровну всем остальным (включая первого), затем третий гном и т.д. до седьмого. Когда и седьмой гном разлил свой эль, у всех оказалось столько же эля, сколько было вначале. Сколько эля в каждой кружке, если всего его 3 литра?

Ответ: 6/7, 5/7, 4/7, 3/7, 2/7, 1/7 и 0.

26. *Игра "жизнь".* На большой клетчатой доске стоят (*живут*) несколько шашек. За один ход некоторые шашки убираются с доски (*умирают*), кроме того на некоторых клетках шашки появляются (*рождаются*). Рождение и смерть происходят одновременно на всех клетках по следующим законам:

- Живая шашка умирает, если у неё меньше двух или больше трёх живых соседей (по стороне или углу).
- Шашка рождается в клетке, если у этой клетки три соседа (по стороне или углу).

Оказалось, что на доске шашки стоят так, как показано на рисунке. Какое положение шашек могло быть за ход до этого?



Тест по комбинаторике.

1. У Маши есть 5 разных фломастеров и 3 разных карандаша. Сколькими способами она может подарить Вите набор из одного фломастера и одного карандаша?

Ответ: $5 \times 3 = 15$

2. У Маши есть еще 7 разных тетрадей. Сколькими способами она может подарить набор из одного карандаша одного фломастера и одной тетради?

Ответ: $7 \times 5 \times 3 = 105$

3. В стране $ABCD$ из города A в город B идет 17 дорог. Из города B в C – 5, из A в D – 4 дороги и из D в C – 8. Сколькими способами можно проехать из города A в город C?

Ответ: $17 \times 5 + 4 \times 8 = 117$.

4. На 3 призовых места претендуют Вася, Дима и Коля. Каким числом способов могут распределиться эти места?

Ответ: $3! = 6$

5. В алфавите племени Мумбо-Юмбо 4 буквы: А, В, Х, У.
а) Сколько различных трёхбуквенных слов может быть в Мумбо-Юмбском словаре?

Ответ: $4^3 = 64$
b) Сколько различных двухбуквенных слов?

Ответ: $4^2 = 16$
с) Сколько есть трёхбуквенных слов, в которых все буквы различны?

Ответ: $4 \times 3 \times 2 = 24$

6. Через 100 лет алфавит племени Мумбо-Юмбо стал содержать 8 букв. Сколько теперь может существовать различных 8-буквенных слов с неповторяющимися буквами?

Ответ: $8! = 40320$

7. В каждую клетку таблицы 3×3 можно покрасить либо в синий, либо в голубой цвет. Сколько существует различных способов покраски этой таблицы?

Ответ: $2^9 = 512$

8. Сколько существует 10-значных чисел?

Ответ: 9×10^9

9. Сколько существует 10-значных чисел, в записи которых нет 1?

Ответ: 8×9^9

10. Сколько существует 10-значных чисел, в записи которых есть 1?

Ответ: $9 \times 10^9 - 8 \times 9^9$

11. а) Сколькими способами можно разбить 12 школьников на 2 команды для участия в матбое, по 6 человек в каждой команде?

Ответ: $\frac{12!}{6! \cdot 6!} = 924$
б) Тот же вопрос, если надо выбрать еще и капитанов в каждой команде.

Ответ: $\frac{12!}{6! \cdot 6!} \times 6^2 = 33264$

Тест по делимости.

Верно ли, что

1. если $24a$ делится на 9, то a делится на 3;

2. если $24a$ делится на 9, то a делится на 9;

3. если $3a$ делится на 2, то $3a$ делится на 6;

4. если $5a$ делится на 3, то a делится на 3;

5. если a делится на 12, то a делится на 6;

6. если a делится на 12, то a делится на 8;

7. если a делится на 15 и a не делится на 60, то a не делится на 4;

8. если a делится на 2, то $3a$ делится на 2;

9. если a делится на 2, то $3a$ делится на 6;

10. если a делится на 24 и a делится на 15, то a делится на 360;

11. если a делится на 3, то a^2 делится на 9;

12. если a делится на 4 и a не делится на 24, то a не делится на 6;

13. если a делится на 4 и на 6, то a делится на 24;

14. если a делится на 4, а b делится на 6, то ab делится на 24;

15. если a делится на 49 и a делится на 17, то a делится на 119;

16. если a делится на 9, а b делится на 10, то ab делится на 90;

17. если a делится на 9, а a делится на 10, то a делится на 90;

18. если a не делится на 3, то $2a$ не делится на 3;

19. если a^2 делится на 3, то a делится на 3;

20. если a^2 делится на 3, то a^2 делится на 9;

21. если a^2 делится на 8, то a делится на 4;

22. если a^2 делится на 8, то a делится на 8;

23. если ab делится на 24, а b делится на 6, то a делится на 4;

24. если a не делится на 3, а b не делится на 5, то $a + b$ не делится на 8;

25. если a делится на 10, а b делится на 15, то $a + b$ делится на 5;

26. если a делится на 10, а b делится на 15, то $a + b$ делится на 10;

27. если a делится на 10, а b делится на 15, то $a + b$ не делится на 10?

Тест по логике.

1. Среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами. Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров. Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

---

2. Некоторые чиновники ездят за границу. Если ты поехал за границу, верно ли, что ты чиновник?

Ответ: Нет

3. Все маленькие мальчики мечтают полететь в космос. Юра и Владик мечтают полететь в космос. Верно ли, что они оба – маленькие мальчики?

Ответ: Нет

4. Все зеленые существа – рептилии. Это существо – не рептилия. Верно ли, что оно не зеленое?

Ответ: Да

5. Каждый англичанин любит играть в гольф. Майкл любит играть в гольф. Верно ли, что он англичанин?

Ответ: Нет

6. Все красные овощи вкусные. Все помидоры красные. Этот овощ не красный. Верно ли, что этот овощ невкусный?

Ответ: Нет

7. Неверно, что все друзья моего друга – мои друзья. Что тогда верно?

---

8. Дети нелогичны. Тот, кто управляет крокодилами, достоин уважения. Нелогичные персоны не достойны уважения. *Какой можно сделать вывод?*

---

9. Однажды в минуту отдыха друзья-мушкетеры Атос, Портос, Арамис и д'Артаньян решили немного поразвлечься в перетягивании каната. Портос с д'Артаньяном легко перетянули Атоса с Арамисом. Но когда Портос стал в паре с Атосом, то победа против Арамиса с д'Артаньяном досталась им уже не так легко. А когда Портос с Арамисом оказались против Атоса с д'Артаньяном, то никакая из этих пар не смогла одолеть другую. Определите, как мушкетеры распределяются по своей силе.

---

10. Когда Шерлок Холмс чем-то доволен, то он говорит загадками. Если Шерлок Холмс сегодня раскрыл преступление, то он доволен. Сегодня он говорит загадками. Верно ли, что он сегодня раскрыл преступление?

---

11. Неверно, что все ананасы приятны на вкус. Что тогда верно?

---

12. Ни одна утка не танцует вальс. Ни один офицер не откажется танцевать вальс. Все мои домашние птицы – утки. *Какой вывод можно сделать?*

---

13. Шерлок Холмс, выходя из дома, всегда надевает шляпу. Когда Шерлок Холмс нервничает, он бывает рассеян. Сегодня Шерлок Холмс нервничает. Забудет ли он надеть шляпу, выходя из дому?

---

14. Неверно, что ни один вор не честен. Что тогда верно?

---

15. Ни один опытный человек не является некомпетентным. Дженкинс всегда очень неловок. Ни один из компетентных людей не бывает неловким всегда. *Какой вывод можно сделать?*

---

16. Аркадий, Борис, Николай и Владимир развлекались в перетягивании каната. Борис мог перетянуть Аркадия и Николая, вместе взятых. Если с одной стороны становились Борис и Аркадий, а с другой – Николай и Владимир, то ни та, ни другая пара не могла перетянуть канат на свою сторону. Но, если Николай и Аркадий менялись местами, Владимир и Аркадий легко побеждали противников. Кто из них был самый сильный, кто занимал второе место, кто – третье, кто самый слабый?

---

17. Шерлок Холмс не курит трубку утром только перед расследованием. Расследование всегда длится до темноты. Сегодня утром Шерлок Холмс не курил. Верно ли, что он ляжет поздно?

---

18. Неверно, что все заборы вполне преодолимы. Что тогда верно?

---

19. Все пудинги прекрасны. Это блюдо – пудинг. Ни одна прекрасная вещь не является полезной. *Какой вывод можно сделать?*

---

20. На день рождения Вовы пришло 4 его друзей. Лена мяч не дарила. Света знает, что Вова не любит читать книги. Антон часы подарить не мог, а Денис знал, что Вова очень любит фотографировать. Что подарила Света, если мяч подарил мальчик?

---

21. Если Шерлок Холмс находит улику, то он находит преступника, после чего преступника арестовывают. Если Шерлок Холмс кого-то арестовал, то верно ли, что он нашел улику?

---

22. Неверно, что все пауки ткут паутину. Что тогда верно?

---

23. Никто не работает в Times, кроме хорошо образованных. Ни один еж не умеет читать. Любой хорошо образованный человек умеет читать. *Какой вывод можно сделать?*

---

24. На вопрос Ватсона “Как вам это удалось?” Шерлок Холмс отвечает: “Это же элементарно, Ватсон!”, после чего раскрывает свой секрет. Вчера Шерлок Холмс раскрыл Ватсону небольшой секрет. Следует ли, что Ватсон задавал свой вопрос?

---

25. Неверно, что есть лентяй достойный славы. Что тогда верно?

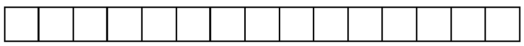
---

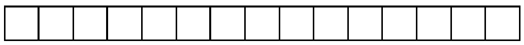
26. Мои кастрюли – это единственное, что сделано из олова. Я считаю, что все твои подарки довольно полезны. Мои кастрюли – самые бесполезные вещи в доме. *Какой вывод можно сделать?*

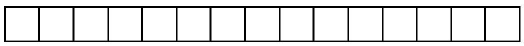
Тест по теме “Анализ с конца в играх”

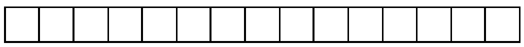
I. Игра Баше

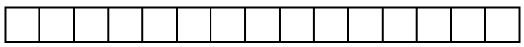
Проанализируйте следующие варианты игры Баше на доске 1×15 (отметьте **плюсами** положения шашки, при которых выигрывает игрок, у которого очередь хода, а **минусами** – положения, при которых выигрывает тот, кто ходит вторым).
Шашка ходит на:

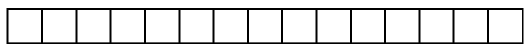
1. 1 или 2 хода влево; 

2. 2 или 3 хода влево; 

3. 1, 2 или 3 хода влево; 

4. 1, 2 или 4 хода влево; 

5. На любую степень двойки; 

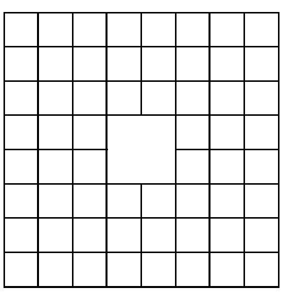
6. Не более, чем на половину номера клетки влево. 

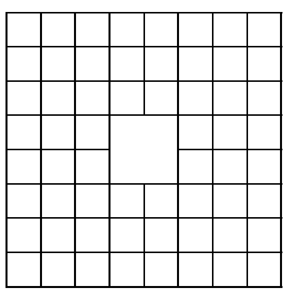
II. Хромые фигуры

В заданиях этой серии мы будем иметь дело с разновидностями следующей игры. Есть клетчатая доска некоторой формы и размера, на ней стоит шахматная фигура. Игроки ходят фигурой по очереди, проигрывает тот, кто не может сделать хода. Отметьте положения фигуры, при которых выигрывает тот игрок, у которого очередь хода плюсами, а положения, при которых выигрывает тот, кто ходит вторым – минусами.

7. Однобокий король, который может ходить только вверх, вправо и вправо-вверх по диагонали на шахматной доске с вырезанной серединкой 2×2

8. Однобокая ладья, которая может ходить только вверх или вправо на произвольное количество клеток на той же доске. Перепрыгивать через дырку, конечно, нельзя.

7) 

8) 

III. Кучки

А здесь игра происходит с двумя кучками спичек – не больше 5 штук в каждой. Игроки по очереди меняют количество спичек в кучках по некоторым заданным правилам. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Напишите *полный* список позиций (количеств спичек в кучках), при которых тот, кто ходит первым, проигрывает.
Например, в игре, в которой разрешается взять произвольное количество спичек из любой (но только одной) кучки, ответом будет
(0,0); (1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5)

9. Разрешается брать одну или две спички из любой кучки.

---

10. Разрешается брать любое количество спичек из любой кучки, а также перекладывать спичку из *первой* кучки во *вторую*

11. Разрешается брать из какой-нибудь кучки не более половины спичек, которые там находятся.

Разнобой

Разнобой-1.

1. На двух кустах сидело 25 воробьев. После того как с первого куста перелетело на второй 5, а со второго улетело 7 воробьев, то на первом кусте осталось вдвое больше воробьев, чем на втором. Сколько воробьев было на каждом кусте первоначально?

Решение: Пусть x – количество воробьёв на первом кусте. Тогда $x - 5 = 2 \times (25 - x - 7 + 5)$. Решаем, и получаем, что $x = 17$.

2. Золотоискатель Джек добыл 9 кг. песка. Сможет ли он за три взвешиванимя отмерить 2 кг песка с помощью двухчашечных весов а) с двумя гирями – 200 г и 50 г; б) с одной гирей 200 г?

Ответ: Сможет в обоих пунктах

а) сначала надо без гирь отмерить 4 кг 500 г и 2 кг 250 г, а третьим взвешиванием при помощи гирь и отмеренного веса 2 кг 500 г взвесить 2 кг.

б) При помощи гири взвесим 4.400 и 4.600, потом разделим 4.400 на две равные части по 2.200 и, наконец, отвесим ровно 2 кг.

3. Часы показывают час дня. Найти ближайший момент времени, когда часовая и минутная стрелка совпадут.

Решение: Это произойдет через $1/11$ часа.

4. Из 100 туристов, отправляющихся в заграничное путешествие, немецким языком владеют 30 человек, английским – 28, французским – 42. Английским и немецким одновременно владеют 8 человек, английским и французским – 10, немецким и французским – 5, всеми тремя языками – 3. Сколько туристов не владеют ни одним языком?

Ответ: только английским владеет 13 человек, только французским – 30, только немецким – 20 человек. 20 человек не знают ни одного из этих языков.

5. Три человека выписали по 100 различных слов. После этого слова, встречающиеся не менее двух раз, вычеркнули. В результате у одного осталось 45 слов, у другого – 68, а у третьего – 54. Докажите, что по крайней мере одно слово выписали все трое.

Ответ: Если бы это было не так, то сумма всех попарных пересечений содержала бы чётное число слов.

6. Оксана Николаевна раздавала фумигаторы для шести отрядов. Каждому отряду она давала половину всех имеющихся у нее фумигаторов и еще полфумигатора. Оксана Николаевна раздала все фумигаторы. Сколько их всего было?

Решение: 63.

7. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными – единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра – единица, то выигрывает первый игрок, а если двойка – то второй. Докажите, что игрок, который ходит вторым, всегда выигрывает.

Решение: Чётность количества единиц не меняется.

8. Каких натуральных чисел, меньших 200 000, больше: тех, которые делятся на 8 и не делятся на 9, или тех, которые делятся на 9 и не делятся на 8?

Решение: Первых. Добавим и к тем, и к другим все числа, кратные 72. Тогда вопрос превратится в такой: каких чисел больше – тех которые делятся на 8 или тех, которые делятся на 9? Ответ на этот вопрос очевиден.

Разнобой-2.

9. Найти наименьшее натуральное число, записанное с помощью двоек и троек, у которого сумма и произведение цифр делятся на 6.

10. В Котельниче собрались школьники, едущие в Вишкиль. На первом автобусе уехал каждый десятый школьник, на втором – каждый седьмой из оставшихся, а затем на третьем – каждый пятый из оставшихся на данный момент. В итоге 111 школьников осталось ждать других автобусов. Сколько школьников изначально стояло на остановке в Котельниче?

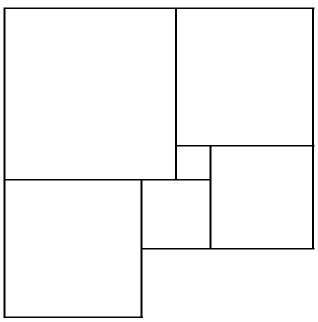
11. Можно ли на плоскости отметить 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками (с концами в этих точках) так, чтобы из каждой точки выходило ровно по 4 отрезка?

12. В столовую привезли халву, но в дороге она раскрошилась на 2000 частей. Константин Александрович сказал, что он сможет разложить халву на две кучки равной массы, сделав не более N разрезов. Какое наименьшее N мог назвать Константин Александрович, если разломанную халву он еще не видел?

13. Барон Мюнхгаузен говорит, что, как бы ни стояли на шахматной доске 6 ладей, не бьющих друг друга, он всегда сможет добавить еще коня так, чтобы ни одна из фигур не била другую. Прав ли он?

14. Решите ребус $\overline{AAB}+\overline{ABA}+\overline{BAA}=1998$, если одинаковым цифрам соответствуют одинаковые буквы, а разным – разные.

15. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна 1.



16. Федоту выставили годовые оценки по 12 предметам. Оказалось, что его средний балл равен 3,5. По скольким предметам в следующем году он должен улучшить свою оценку на один балл для того, чтобы средний балл стал равен 4?

Разнобой-3.

17. Поле для игры в “морской бой” имеет форму квадрата размером 8×8 клеток. На нем стоит один корабль, имеющий форму прямоугольника 1×4. В клетках поля можно установить детекторы, показывающие, накрывает ли корабль эту клетку. Какое наименьшее число клеток нужно снабдить такими детекторами, чтобы по их показаниям можно было однозначно определить положение корабля?

18. а) Стороны и диагонали шестиугольника раскрасили в два цвета. Докажите, что образовался хотя бы один одноцветный треугольник, вершины которого совпадают с вершинами шестиугольника.
б) Как раскрасить стороны и диагонали пятиугольника в два цвета так, чтобы не образовалось ни одного одноцветного треугольника?

19. Про учеников школы, которые участвовали в районной олимпиаде, известно:
1) 7 из них справились с задачами и по математике и по физике;
2) 11 из них справились с задачами по математике;
3) 9 из них справились с задачами по физике.
Сколько учеников принимали участие в районной олимпиаде и справились хоть с чем-нибудь?

Ответ: 13

20. Из A в B выехал мотоциклист, и одновременно навстречу ему из B в A выехал велосипедист. Через 20 минут после начала движения мотоциклист проехална 2 км больше половины пути, а еще через 10 минут после этоговелосипедисту осталось проехать 3 км до середины пути. Через сколько минут после начала движения встретились мотоциклист и велосипедист?

21. В фирме “Рога и копыта” работает 1111 сотрудников. Каждый из них обязан отработать на уборке территории 7 дней подряд в году. Доказать, что а) существовал хотя бы один день, когда на уборке территории работало нечётное число сотрудников; б) таких дней существовало как минимум 7.

22. Найти хотя бы одно натуральное число, которое оканчивается на 17, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 17.

23. Два мудреца написали на карточках числа от 5 до 11 и перемешали их, после чего первый взял себе три из них, второй – две, а оставшиеся две мудрецы спрятали в мешок. Первый, посмотрев на свои карточки, воскликнул: “Я точно знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!” Какие числа написаны на карточках первого?

Разнобой-4.

24. Каких восьмизначных чисел больше: тех, у которых первые две цифры не пятерки, или тех, которые не делятся на 5?

25. Дано 6 гирь: две зеленых, две красных, две синих. В каждой паре одна гиря тяжелая, а другая легкая, причем все тяжелые гири весят одинаково и все легкие тоже. Можно ли за 2 взвешивания на чашечных весах найти все тяжелые гири?

26. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Осталось пять корок. Как такое могло случиться?

27. Даны вычисления на французском языке (результат нигде не превышает ста)
(1). huit $\times$ huit = soixante-quatre
(2). quatre + quatre = huit
Определите числовое значение этих записей.
Аналогичное задание выполните для следующих записей:
(3). sept $\times$ dix = soixante-dix
(4). quatre $\times$ dix-sept = soixante-huit
(5). soixante + vingt = quatre-vingt
(6). soixante-dix-huit + dix-neuf = quatre-vingt-dix-sept
Заполните пропуски
(7). soixante + ? = quatre-vingt-neuf
(8). soixante-sept + dix-sept = ?

28. Можно ли покрыть равносторонний треугольник двумы другими равносторонними треугольниками меньшего размера?

29. Из пунктов A и B одновременно вышли два пешехода. В момент встречи одному из них оставалось идти час, а другому – 4 часа. Сколько времени шел каждый из них до встречи?

30. Несколько (больше одного) шахматистов провели между собой матч-турнир в несколько кругов (в одном круге каждый с каждым сыграл по одной партии). Во сколько кругов прошло это соревнование, если всего было сыграно 224 партии?

31. Имеется 19 каменных глыб весом 1,2 т каждая и 47 глыб весом 1,1 т каждая. Начальник станции хочет погрузить их в два вагона так, чтобы общий вес камней в них был одним и тем же. Сможет ли он сделать это, не дробя камни?

32. Разрежьте квадрат на треугольники так, чтобы каждый из треугольников граничил ровно с тремя другими.

Разнобой-5.

33. Какое наибольшее число слонов можно добавить к шести ладьям так, чтобы ни одна из шахматных фигур на доске не била другую?

Ответ: 4

34. В классе 21 человек. Никакие две девочки не дружат с одинаковым количеством мальчиков. Какое наибольшее количество девочек может быть в классе?

Ответ: 11 девочек.

Решение: Построим пример для 11 девочек. Первая девочка дружит с нулем мальчиков, вторая девочка дружит с одним мальчиком, третья – с двумя мальчиками и так далее. Тогда одиннадцатая девочка дружит с 10 мальчиками. Докажем, что больше 11 девочек быть не может. Если в классе больше 11 девочек, то там меньше 10 мальчиков. Тогда различных вариантов количества мальчиков, с которыми можно дружить, всего 0, 1, 2, n, где n - количество мальчиков в классе , $n < 10$. Тогда вариантов $n+1 < 11$. А девочек больше 11. Противоречие.

35. Может ли шахматный конь (который ходит по правилам) обойти все поля доски 4×4, побывав на каждом поле ровно один раз, и вернуться на ту же клетку? Начинать разрешается на любом поле.

Решение: Так как нам надо вернуться на ту же клетку, то путь коня можно считать замкнутым. Назовем поля $b2$ и $c3$, узловыми для угловых полей $a4$ и $d1$. Заметим, что с любого из этих двух полей, и только с них, можно попасть на угловые поля $a4$ и $d1$. Так как путь замкнут, то на каждое поле необходимо попасть с какого-нибудь поля, а затем выйти на другое. Пусть первым на пути коня встречается поле $a4$. На него конь может попасть только с одного из узловых полей. Тогда выйти с этого поля он может только на другое узловое поле. Но в этом случае на следующем ходе он обязан встать на поле $d4$, так как если он на него не встанет, то больше он на узловые поля не попадет (на каждом поле он бывает только один раз), а только с узловых полей он может попасть на поле $d4$. Таким образом, он обязан встать на поле $d4$, но далее с этого поля он выйти уже не сможет, так как на обоих узловых полях он уже побывал, и на них он больше встать не может. Отсюда получаем, что требуемого маршрута не существует.

36. Разрежьте правильный шестиугольник на 8 равных частей.

37. Три девочки и три мальчика в течение года решали одни и те же задачи. Катя решила $\frac{3}{4}$ всех задач и еще $\frac{1}{4}$ от того, что решил Петя. Лена решила $\frac{1}{2}$ всех задач и еще $\frac{1}{10}$ того, что решил Вася. Маша решила $\frac{3}{5}$ всех задач и еще $\frac{1}{7}$ от того, что решил Федя. Какая из девочек решила больше всех задач?

Решение: $\frac{1}{10}$ того, что решил Вася – это не больше, чем $\frac{1}{10}$ общего числа задач. Поэтому Лена решила не больше, чем $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$ всех задач. Аналогично, Маша решила не больше, чем $\frac{3}{5}+\frac{1}{7}=\frac{26}{35}$ всех задач. С другой стороны, Катя решила не меньше $\frac{3}{4}$ всех задач. Поскольку $\frac{3}{4}>\frac{3}{5}$ и $\frac{3}{4}>\frac{26}{35}$, среди девочек больше всех задач решила Катя.

38. Три команды играли в КВН. Перед игрой игрок Иванов перешел из первой команды во вторую, игрок Сидоров перешел из второй команды в третью, а игрок Петров перешел из третьей команды в первую. После этого средний возраст первой команды увеличился на 1 неделю, второй – увеличился на 2 недели, а третьей – уменьшился на 4 недели. Известно, что в первой и во второй команде по 12 игроков. Сколько игроков в третьей команде?

Решение: Общий возраст первой команды увеличился на 12 недель, а второй – на 24 недели. Так как общий возраст всех команд при этом не изменился, то общий возраст третьей команды уменьшился на 36 недель, поэтому в ней 9 игроков.

39. В квадрате 3×3 расставлены числа так, чтобы суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и на каждой большой диагонали равны нулю. Известно, что сумма квадратов чисел в верхней строке равна 2000. Чему может быть равна сумма квадратов чисел в нижней строке?

Решение: Сложим все числа в таблице. Сумма равна нулю. Вычтем теперь большие диагонали, средний столбец и среднюю строку. Все числа, кроме среднего, мы вычли 1 раз, а среднее – 4 раза. Все это дело опять равно нулю, следовательно, в середине стоит ноль. Тогда на концах одной и той же большой диагонали, а так же на концах среднего столбца стоят противоположные числа. Следовательно, в третьей строке стоят числа, противоположные числам первой строки, а сумма квадратов та же.

Разнобой-6.

40. У мартышки было три кокосовых ореха. Один из них упал с 16 этажа и разбился. Может ли мартышка за 5 попыток определить, начиная с какого этажа при падении орехи будут разбиваться, если у нее осталось только два ореха?

41. Как посадить 9 деревьев так, чтобы получилось 10 прямых рядов по три дерева в каждом?

42. На уроке физкультуры весь класс выстроился в линейку. По команде учителя каждый третий сделал шаг вперед. По второй команде каждый пятый из оставшихся сделал шаг назад. После этого на месте остались 16 учеников. Сколько всего учеников могло быть в этом классе? Постарайтесь найти все ответы.

Ответ: 28, 29 или 30 учеников.

43. В Мексике экологи добились принятия закона, по которому каждый автомобиль хотя бы день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и "выходной" день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый – по своим делам). Сколько автомобилей должно быть в семье, если взрослых в ней а) 5 человек; б) 8 человек?

Решение: а) 5 автомобилей не хватит, так как они должны отдыхать. 6 автомобилей хватит (каждый имеет свой автомобиль, которые имеют различные дни отдыха. В день отдыха своего автомобиля человек пользуется общим "дежурным автомобилем", который имеет выходной в день, отличный от остальных пяти).
б) 8 автомобилей не хватит, их должно быть минимум 9. Следовательно, есть день, когда разом отдыхают 2 автомобиля. В этот день минимум 8 должны ездить, следовательно, минимум 10 автомобилей. График легко составляется.

44. Найдите все трёхзначные числа, у которых сумма любых двух цифр делится на третью.

45. За круглым столом сидит 30 учеников, некоторые из которых всегда лгут, а другие всегда говорят правду. Среди двух соседов любого лжеца есть ровно один лжец. При опросе 12 учеников сказали, что ровно один из их соседей – лжец, а остальные ученики сказали, что оба их соседа – лжецы. Сколько лжецов сидит за столом?

46. Существует ли фигура, которую можно разрезать как на четыре равных четырёхугольника, так и на три равных треугольника?

47. По кругу написаны 20 натуральных чисел. Для любого числа подсчитывают сумму 10 чисел, следующих за ним по часовой стрелке. После этого все числа стирают, а на их место вписывают вычисленные суммы. Доказать, что рано или поздно все числа на окружности станут чётными.

Разнобой-7.

48. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама – за 2 минуты, малыш – за 5, а бабушка – за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя, носить друг друга на руках нельзя).

Решение: Сначала мама с папой – 2 минуты, папа обратно – 1 минута, бабушка с малышом – 10 минут, мама обратно – 2 минуты и вместе с папой обратно – 2 минуты. Итого $2+1+10+2+2=17$ минут.

49. Управдом Остап Бендер собрал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич заинтересовался, почему у них в третьем подъезде надо собрать денег на 20% больше, чем во втором, хотя квартир во всех подъездах поровну. Не растерявшись, Остап объснил, что за двузначные номера приходится платить вдвое, а за трёхзначные – втрое больше, чем за однозначные. Сколько квартир в подъезде?

50. Разрежьте квадрат на 2 одинаковых а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) $2n$-угольника; c) $(2n+1)$-угольника

51. Петя и Витя ехали вниз по эскалатору. Посередине эскалатора хулиган Витя сорвал с Пети шапку и бросил ее на встречный эскалатор. Пострадавший Петя побежал обратно по эскалатору, чтобы затем спуститься вниз и вернуть шапку. Хитрый Витя побежал по эскалатору вниз, чтобы затем подняться вверх и успеть раньше Пети. Кто успеет раньше, если скорости ребят относительно эскалатора постоянны и не зависят от направления движения?

52. Пешеход обошел шесть улиц родного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?

53. На пишущей машинке сломалась цифра "3", и теперь машинистка стала нумеровать страницы следующим образом 1, 2, 4, 5, ..., 29, 40, 41, 42, 44, ...и так далее. Какой номер будет иметь страница, которая при нормальной нумерации имела бы номер 2000?

54. Есть 9 борцов разной силы. В поединке любых двух из них всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их на три команды по три борца так, чтобы во встречах команд по системе "каждый с каждым" первая команда по числу побед одержала верх над второй, вторая – над третьей, а третья – над первой?

Разнобой-8.

55. Пловец встретил мяч, проплыл 2 секунды, повернул назад и встретил повторно мяч на расстоянии 8 метров от места первоначальной встречи. Какова скорость течения реки?

56. Есть две параллельные прямые. На одной отмечено 10 точек, а на другой – 8. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

57. Два игрока по очереди ломают шоколадку 5×10. За ход можно разломить один из имеющихся кусков на два вдоль углубления. Проигрывает тот, у кого нет хода. Докажите, что тот, кто ломает шоколадку первым, всегда выигрывает.

58. На доске было написано двузначное натуральное число. Разрешается заменять число на сумму квадратов его цифр. После четырёх операций на доске оказалось написано число 100. Какое число было написано на доске изначально?

59. Некоторое трёхзначное число, все цифры которого различны, имеет с каждым из следующих чисел – 137, 345, 794 ровно одну общую цифру, которая расположена в том же разряде, что и в этих числах. Найдите это число и объясните, как Вы его нашли.

60. Имеются шесть одинаковых по виду монет. Четыре из них настоящие по 4 грамма каждая, а две – фальшивые, одна весом 3 грамма, а другая – весом 5 граммов. Как с помощью 4-х взвешиваний на чашечных весах определить обе фальшивые монеты?

61. На конкурсе красоты приняли участие 5 девушек: Кира, Инна, Таня, Света, Надя. В зале собрались 200 зрителей, среди которых есть честные и лгуны. Каждому зрителю задали 5 вопросов: "Вы болеете за Киру? за Инну? за Таню? за Свету? за Надю?" В ответ 428 раз прозвучало "да". Известно, что каждый зритель болеет лишь за одну девушку. Сколько среди зрителей лгунов?

Ответ: 76 (система уравнений).

62. Можно ли раскрасить плоскость в три цвета так, чтобы на каждой прямой были точки не более двух цветов, и все три цвета были использованы?

63. На доске 4×4 расставляются шестнадцать шахматных коней четырёх мастей – четыре вороных, четыре соловых, четыре гнедых и четыре каурых. Существует ли такая расстановка коней, в которой вороные не бьют соловых, соловые – гнедых, гнедые – каурых, а каурые – вороных?

Ответ: Нет. Переформулировка: можно ли расставить восемь соловокаурых и восемь вороногнедых на доске 4×4 так, чтобы кони разного цвета не били друг друга?

Разнобой-9.

64. 4 коровы черной масти и 3 рыжей масти за 5 дней дали столько же молока, сколько 3 коровы черной масти и 5 рыжей за 4 дня. Коровы какой масти продуктивней?

65. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько непересекающихся квадратов, сумма сторон которых равна 2000?

Ответ: да, можно. Например, можно разместить 100 000 000 квадратиков со стороной $\frac{1}{200\,000}$ (например 1000 рядов по 100 000 квадратиков).

66. На доске 50×50 на каждой клетке одной из диагоналей стоит по шашке. Два игрока, делая ходы по очереди, играют в следующую игру. За один ход игрок сдвигает одну из шашек на одну клетку в фиксированном направлении (вниз). Если при этом шашка сходит с доски, игрок забирает ее себе в карман. Какое наибольшее количество шашек может забрать себе в карман первый игрок независимо от игры второго?

67. Среди 5 деталей 4 стандартных, одинаковой массы, одна бракованная, отличающаяся по массе от остальных. Имеется еще одна отмеченная деталь (эталон). Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах найти бракованную деталь?

68. В ряд стоят лжецы и рыцари. 7 человек на вопрос: "Верно ли, что все люди справа от Вас – рыцари, а слева – лжецы" ответили "да", а остальные – "нет". Сколько в ряду могло стоять лжецов?

Ответ: 7 лжецов.

69. Существует ли двузначное число такое, что если вставить между двумя его цифрами произвольное количество семерок, то оно будет делится на 13?

Ответ: 52

70. 48 кузнецов должны подковать 60 лошадей. Какое наименьшее время они затратят на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)

Ответ: 25 минут

Решение: Для удобства рассуждений объединим кузнецов в 4 бригады по 12 человек, а лошадей – в 5 табунов по 12 лошадей. Тогда расписание работ бригад по пятиминуткам можно устроить образом:

1 табун	•	•	•	•	
2 табун	•	•	•		•
3 табун	•	•		•	•
4 табун	•		•	•	•
5 табун		•	•	•	•

Таким образом, за пять пятиминуток кузнецы смогут подковать лошадей. За меньшее время это сделать не удастся, что нетрудно понять, если заметить, что при предложенном расписании ни один кузнец не простаивает.

Разнобой-10.

71. Две свечи одинаковой длины зажглись одновременно. Первая может гореть 2 часа, а вторая 8 часов. Через сколько часов одна будет в 2 раза длиннее другой?

72. В Эрмитаже 2 лестницы. Высота первой 13 метров, а ее длина (по горизонтали) – 20 метров; у второй соответственно 11 и 22 метра. Обе лестницы покрыты ковровыми дорожками. Какая из дорожек длиннее, если на первой лестнице ступенек вдвое меньше, чем на второй?

73. Доказать, что $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ не делится на 5 ни при каком натуральном n.

74. Из 11 шаров 2 радиоактивных. За одну проверку про любую кучку шаров можно узнать, есть ли в ней радиоактивный шар, но при наличии такого шара нельзя узнать, сколько их – один или два. Как за 7 проверок найти оба радиоактивных шара?

75. На доске выписаны целые числа от 1 до 14, каждое по одному разу. Двое играющих по очереди стирают по одному числу до тех пор, пока не останется ровно два числа. Если их сумма точный квадрат, то выигрывает второй, иначе первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение: Выигрывает второй. Он может разбить числа на пары следующим образом: (1, 8); (2, 14); (3, 13); (4, 12); (5, 11); (6, 10); (7, 9). Теперь достаточно брать число из той же пары, из которой только что взял соперник.

76. Фигура "заяц" ходит либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку по диагонали вправо-вверх, либо на одну клетку по диагонали влево-вверх. а) Может ли заяц обойти доску 7×7, побывав на каждой клетке ровно 1 раз? б) За какое наименьшее число ходов "заяц" может обойти доску 7×7 и вернуться на исходное поле?

77. За круглым столом сидит 100 человек, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Каждый из сидевших сказал: "Сидящий справа от меня и двое сидящих сразу за ним – лжецы." Сколько лжецов сидит за столом?

Решение: 75 лжецов. Назовем рыцарем человека, который говорит всегда только правду. Заметим, что за столом не могут сидеть только лжецы, так как в этом случае каждый из них говорит правду. Поэтому за столом есть и рыцари. Рассмотрим одного из них. Справа от него по кругу должны сидеть три лжеца. Рассмотрим его правого соседа-лжеца. Справа от него уже сидит два лжеца. Если третий по счету тоже будет лжецом, то это означает, что первый лжец говорит правду. Следовательно, такого быть не может, и третий по кругу будет рыцарем. За этим рыцарем должно сидеть два лжеца и так далее. Получается, что каждый четвертый за этим столом – рыцарь, а так как за столом всего 100 человек, что кратно 4, то получаем $100/4 = 25$ рыцарей и $100 - 25 = 75$ лжецов.

78. Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 10 так, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через одно, не делилась на 3, а сумма любых двух рядом стоящих чисел была нечётной? Каждое число можно использовать ровно один раз?

Решение: Четные и нечётные числа должны чередоваться, а по делимости на 3 чётные числа 2, 4, 8 и 10 должны стоять через одно от числа 6, что невозможно.

Разнобой-11.

79. Имеются двое песочных часов: одни на 7 минут, а другие – на 11 минут. Яйцо варится 15 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?

Решение:

80. У Ольги Сергеевны в комнате имеется n розеток и m тройников. Сколько фумигаторов можно одновременно включить в сеть?

Решение: Каждый тройник добавляет две розетки независимо от того, включен он в розетку, или в другой тройник.
Ответ: $n + 2m$

81. На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: А, Б, 1, 2. (О том, что написано на другой стороне карточек, ничего не известно). Какое наименьшее количество карточек и какие именно надо перевернуть, чтобы узнать, верно ли утверждение: “Если на какой-то стороне карточки написано чётное число, то на другой стороне – гласная буква”?

Ответ: 2 и Б.

82. Леспромхоз решил вырубить сосны в лесу, что сильно встревожило экологов. Но директор леспромхоза всех успокоил, сказав: “В лесу 99% сосен. Мы будем рубить только сосны. После рубки их останется 96% от всех деревьев”. Какую часть леса вырубит леспромхоз?

Ответ: $3/4$ леса. До рубки деревья, не являющиеся соснами, составляли 1%, а после рубки – 4% от общего числа деревьев. Это означает, что общее число деревьев уменьшилось в 4 раза.

83. Трое жильцов готовят обед на одной печи. Жилица – назовем ее для удобства Тройкиной – положила в общую печь 3 полена своих дров, жилица Пятеркина – 5 поленьев, жилец Бестопливный, у которого, как вы догадываетесь, не было своих дров, получил от обеих гражданок разрешение сварить обед на общем огне. В возмещение расходов он уплатил соседкам 8 рублей. Как должны они поделить между собой эту плату?

Решение: Естественно считать, что Тройкина и Пятёркина тоже истратили по 8 рублей, на внесли свою долю дровами. Все поленья вместе стоили $3 \cdot 8 = 24$ рубля, значит, одно бревно стоило 3 рубля. Тройкина истратила $3 \cdot 3 = 9$ рублей, значит она должна получить $9 - 8 = 1$ рубль. Пятёркина же истратила $5 \cdot 3 = 15$ рублей, значит, она должна получить $15 - 8 = 7$ руб.

84. Можно ли числа от 1 до 17 выписать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом?

Решение: Нет, нельзя. Найдутся два рядом стоящих числа одной чётности, их сумма будет чётным числом. Кроме того, эта сумма не может равняться двум, т.е. является составной.

85. В море Дождей живут осьминожки; у каждой одна или две подруги. Когда рассвело, те, у кого было две подружки, посинели, а у кого одна – покраснели. Оказалось, что любые две подружки стали разноцветными. Тогда 10 синих осьминожек перекрасились в красный цвет, и одновременно 12 красных перекрасились в синий цвет, после чего любые две подруги стали одного цвета. Сколько всего осьминожек живет в море Дождей?

Решение: Из условия следует, что осьминожки разбиваются на тройки: после восхода в каждой тройке одна синяя осьминожка дружит с двумя красными, и ни с кем больше осьминожки этой тройки не дружат. Затем в 10 тройках перекрасилась синяя осьминожка, а в 6 тройках перекрасились две красных. Таким образом всего в есть 16 троек осьминожек.

Ответ: в море дождей 48 осьминожек.

86. И сказал Кощей Ивану-Царевичу: “Вот тебе два одинаковых листа в форме квадрата 8×8. Сначала ты вырежешь из одного листа несколько фигур общей площадью в 63 клетки. Потом я отмечу одну из клеток второго листа, а ты должен будешь наложить свои фигуры на него так, чтобы они полностью закрывали все его клетки, кроме отмеченной. Обойдешься четырьмя фигурками – отпущу с миром. Обойдешься пятью – будешь у меня свинопасом. А ежели и пятью не обойдешься – голова с плеч!” Сможет ли Иван наверняка остаться в живых? А уйти с миром? Если да, то покажите, как Иван должен вырезать фигуры и пользоваться ими. Если нет, то объясните, почему.

Ответ: Иван может обойтись даже тремя фигурками – уголками ширины 1, 2 и 4 клетки.

Разнобой-12.

87. Найдите все двузначные числа, у которых четвертая степень суммы цифр равна сумме цифр четвертой степени самого числа.

Ответ: 10 и 11.

88. Сколько вершин может иметь выпуклый многоугольник, если известно, что количество его сторон делится на количество его диагоналей?

Ответ: 4 или 5.

89. Из единичных кубиков составлен кубик размером $3 \times 3 \times 3$. Какое наибольшее число кубиков можно из него удалить так, чтобы при взгляде на оставшуюся фигуру с любой из шести возможных сторон был виден квадрат со стороной 3 без просветов? (Привести пример и объяснить, почему это наибольшее число.)

90. Даны натуральные числа A и B. Известно, что среди четырёх утверждений “$A+1$ делится на B”, “$A = 2B+5$”, “$A+B$ делится на 3”, “$A+7B$ – простое число” имеются три верных и одно неверное. Найти все возможные пары чисел A и B.

91. На витрине лежали N монет, легчайшая из которых весит 100 г, а каждая следующая – на 1 г тяжелее предыдущей. Какой-то шутник перепутал все этикетки под монетами, причем продавец все равно помнит, какая из монет сколько весит, но хозяин ему не верит. В распоряжении продавца имеются чашечные весы без гирь, которые показывают разность масс на чашках (в граммах). Как продавцу убедить хозяина в своей правоте, если а) $N = 9$ и хозяин согласен провести два взвешивания; б) $N = 27$ и хозяин согласен на три взвешивания?

Решение: а) Первым взвешиванием продавец кладет на одну чашу весов монеты 100, 101, 102, а на другую – монеты 106, 107 и 108. Разность весов будет равна 18, и эта разность может быть получена только для этого набора монет, что должно убедить хозяина в том, что взвешены именно эти монеты. Таким образом, после этого взвешивания имеются три кучки монет (100,101,102), (103,104,105) и (106,107,108). Вторым взвешиванием продавец сравнивает $100+103+106$ и $102+105+108$. Разность весов снова будет максимальной и единственно достижимой.

б) Решается аналогично. Первым взвешиванием на весы кладутся 18 монет.

92. Какое наименьшее значение может принимать сумма цифр числа, кратного 14?

Ответ: 2, число 10010

93. Кот может съесть гирлянду сосисок за 37 минут, а пес – за 23 минуты. Они начали есть с двух концов, и когда съели всю, то посчитали, сколько процентов от всей гирлянды досталось каждому. Оказалось, что коту досталось на 10% больше, чем псу. Кто из них начал есть раньше и на сколько минут?

Решение: Кот начал есть гирлянду раньше на 10 минут. Очевидно, что пес съел 45% или 9/20 всей гирлянды, а кот съел 55% или 11/20 всей гирлянды. Если кот тратит 37 минут на поедание всей гирлянды, то 55% всей гирлянды он съест за $37 \times \frac{11}{20} = \frac{407}{20}$ минут. Аналогично, если пес тратит 23 минуты на всю гирлянду, то 45% всей гирлянды он съест за $23 \times \frac{9}{20} = \frac{207}{20}$ минут. Тогда кот потратил на $\frac{407}{20} - \frac{207}{20} = 10$ минут больше. Следовательно, кот начал есть гирлянду раньше на 10 минут.

94. Найдите а) 18; б) 19; в) 20 наименьших последовательных натуральных чисел, сумма которых делится на 27.

Ответ: а) числа от 2 до 19; б) числа от 18 до 36; в) от 4 до 23.

Разнобой-13.

95. В Великобритании и США температуру принято измерять по шкале Фаренгейта. Например, температура плавления льда составляет $32\,F$, а кипения воды – $212\,F$. Существует ли температура, при которой значения в градусах по шкалам Цельсия и Фаренгейта одинаковы?

Ответ: $-40^\circ = -40\,F$

96. Начальник отдела, в котором служит Джеймс Бонд, получил приказ об установлении взаимной слежки между агентами с номерами от 001 до 007 по схеме: первый следит за тем, кто следит за вторым, второй – за тем, кто следит за третьим, и так далее, последний следит за тем, кто следит за первым. Но в тот момент, когда начальник составил соответствующую схему, пришло дополнение к приказу – включить в эту группу и агента 008. Какую схему слежки уже составил начальник и сможет ли он составить новую схему?

Ответ: Схема имела вид 1-5-2-6-3-7-4-1 (семиугольная звезда). Для восьми агентов решения не существует.

97. Во фразе, взятой в кавычки, подставьте вместо многоточий числа так, чтобы она оказалась верной.
“В этой фразе используются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, причем цифра 0 – … раз, цифра 1 – … раз, цифра 2 – … раз, цифра 3 – … раз, цифра 4 – … раз, цифра 5 – … раз, цифра 6 – … раз, цифра 7 – … раз, цифра 8 – … раз, цифра 9 – … раз”.

Ответ: 2, 2, 8, 4, 3, 2, 2, 2, 3, 2.

98. Два человека бегут вниз по ступеням эскалатора метро, идущего вниз. Один бежит быстрее другого. Кто из них насчитает больше ступенек?

Ответ: Тот, кто бежит быстрее.

Решение: Если они одновременно взойдут на эскалатор, то второй не сосчитает те ступеньки, которые “уйдут” между моментами схода с эскалатора первого и второго человека.

99. В квадрате 3×3 находится 9 лампочек. За одну операцию можно переключить все лампочки, находящиеся в каком-нибудь квадрате 2×2. Сколько различных узоров можно получить из “погасшего” состояния?

Ответ: Так как все определяется угловыми лампочками, то узоров $2^4 = 16$.

100. Можно ли в вершинах и на серединах сторон правильного восьмиугольника расставить натуральные числа от 1 до 16 так, чтобы сумма чисел на концах любой стороны равнялась числу в его середине? Каждое из чисел можно использовать ровно 1 раз.

Ответ: Нельзя, так как тогда сумма всех чисел от 1 до 16 должна быть кратна 3.

101. У Кащея есть куб, в каждой вершине которого вставлено по алмазу. Известны веса этих алмазов: 1 карат, 2 карата, ..., 8 карат. Кащей предлагает Ивану-Царевичу следующую игру: он называет сумму весов алмазов на каждом ребре. Если после этого Иван сможет правильно определить, в какой вершине какой алмаз, то он получает драгоценный куб, а если нет, то распрощается с жизнью. Стоит ли Ивану соглашаться на такую игру?

102. Найдите наименьшее натуральное число, которое после деления на 2 становится квадратом, а после деления на 3 – кубом целого числа.

Ответ: 648.

103. Есть четыре утверждения: “$2x + y + z$ – простое число”, “$x + 2y + z$ – простое число”, “$x + y + 2z$ – простое число”, “x, y, z – натуральные числа”. Докажите, что все четыре утверждения не могут быть верными одновременно.

Решение: Сложив все три суммы, получим $4x + 4y + 4z \,\vdots\, 2$. Но все три суммы – простые числа большие двух, а значит нечётны.

Соревнования

Вступительная олимпиада.

1. Решите задачу из папируса Ринда: найти натуральное n такое, что

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{n}$$

Ответ: $\frac{1}{365}$

2. На пол разлили больше десяти литров сгущенки. Как собрать с пола ровно шесть литров с помощью только девятилитровой кастрюли и пятилитровой кружки?

3. Алла, Галя, Лена и Марина играли в настольный теннис "пара на пару". Марина младше Гали. Лена старше, чем любая из ее противниц. Марина старше своей партнерши. Алле и Гале вдвоем больше лет, чем Лене и Марине вместе. Кто с кем играл и как распределить девушек по возрасту? Обоснуйте ваш ответ.

4. На рисунке изображены два правильных треугольника. Сторона большего из них равна 5 см, а меньшего – 4 см. Найдите периметр образовавшегося шестиугольника.

5. Костя и Рома играют в интересную игру на прямоугольнике а) 10×10; б) 10×11 с вырезанной внутренностью (оставлены только те клетки, которые примыкают к границе). За каждый ход разрешается вырезать любой прямоугольник, целиком состоящий из клеток, при условии, что оставшаяся часть не распадается на два куска. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Первым ходит Костя. Кто выиграет при правильной игре?

6. Назовем пятизначное число неразложимым, если его нельзя представить в виде произведения двух *трёхзначных* чисел. Какое наибольшее количество неразложимых чисел может идти подряд?

Математическая карусель.

Исходный рубеж

1. (исх.) Маша и Катя весят вместе 40 кг, Катя и Света весят вместе 50 кг, Света и Даша – 60 кг, Даша и Галя – 70 кг, Маша и Галя – 80 кг. сколько весит каждая из девочек?

2. (исх.) В ящике лежит 10 красных, 8 синих и 4 желтых карандаша. В темноте берем из ящика карандаши. Какое наименьшее число карандашей надо взять, чтоб среди них было не менее 4 карандашей одного цвета?

3. (исх.) На сколько нулей оканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 100?

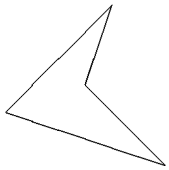
4. (исх.) Напишите, используя каждую из цифр 1, 2, 3 и 4 ровно два раза, восьмизначное число, у которыми между единицами стоит ровно 1 цифра, между двойками – ровно 2 цифры, между тройками – ровно 3 и между четверками – ровно 4 цифры.

5. (исх.) Найдите два двузначных простых числа, получаемых друг из друга перестановкой цифр, разность которых – полный квадрат.

6. (исх.) Нарисуйте ломаную, которая пересекает каждое свое звено ровно 2 раза. (Пересечения считаются только во внутренних точках звеньев ломаной, а не в вершинах).

7. (исх.) В некотором месяце три воскресенья приходятся на чётные числа. Какой день недели был 20-го числа этого месяца? Найдите все ответы.

8. (исх.) Разрежьте фигуру, нарисованную на кратинке, на 6 частей, проведя только две прямые.



9. (исх.) Найдите трёхзначное число, все цифры в котором различны и стоят в порядке возрастания, а в его названии все слова начинаются с одинаковых букв.

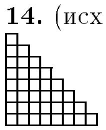
10. (исх.) В розыгрыше первенства по футболу участвуют 17 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой из остальных два матча: на своем поле и на чужом. Сколько матчей будет сыграно?

11. (исх.) Для нумерации страниц книги понадобилось 1392 цифры. Сколько в этой книге страниц?

12. (исх.) Найдите наименьшее число, сумма цифр которого делится на 17 и сумма цифр следующего за ним тоже делится на 17.

13. (исх.) Из теста можно сделать 20 одинаковых калачей или 25 одинаковых булочек. Какова масса теста, если на 1 калач идет на 10 г теста больше, чем на 1 булочку?

14. (исх.) Разрежьте лесенку на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.



15. (исх) На электронных часах высвечивается время: часы и минуты. Сколько времени в сутки на их табло присутствует хотя бы в одном месте цифра 2?

16. (исх) Поставьте вместо звездочек цифры так, чтобы получилось верное равенство $(**)^3 = ***9$.

Зачётный рубеж

1. (зач) Сколькими способами можно представить число 2000 в виде суммы двух чётных натуральных чисел? (Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считать одинаковыми)

2. (зач) Найдите семь таких идущих подряд целых чисел, что сумма трёх первых равна сумме четырёх последних.

3. (зач) Окрашенный куб с ребром 12 см распилили на кубики с ребром 1 см. Сколько среди них окажется кубиков с одной окрашенной гранью?
4 (зач). На кольцевой дорожке 660 метров проводится эстафета, длина каждого этапа которой равна 150 метров. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какое наименьшее число этапов может быть в этой эстафете?

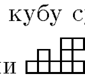
5. (зач) Натуральные числа от 1 до 2000 записали в следующем порядке: сперва записали в порядке возрастания все числа, сумма цифр которых равна 1, затем – все числа с суммой цифр 2 (также в порядке возрастания), потом – все числа с суммой цифр 3 (также в порядке возрастания) и т.д. На каком месте оказалось число 1998?

6. (зач). Сумма тринадцати различных чисел равна

93. Найдите эти числа. (найдите все ответы).

7. (зач) Три землекопа выкопали за три часа три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

8. (зач) Найдите трёхзначное число, равное кубу суммы его цифр.

9. (зач) Можно ли из 4 экземпляров фигурки  сложить квадрат?

10. (зач) В магазин поступила тонна фруктов: яблоки в ящиках по 48 кг, груши в ящиках по 20 кг, сливы в коробках по 14 кг и вишни в коробках по 10 кг. При этом яблок поступило в 2 раза больше, чем груш, вишен столько же, сколько слив. Сколько ящиков яблок и груш, сколько коробок слив и вишен поступило в магазин?

11. (зач) Даны три различные цифры, отличные от нуля. Если сложить все шесть двузначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру в числе дважды, получится

176. Найдите эти цифры (укажите все возможные варианты).

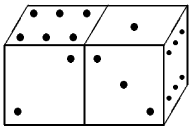
12. (зач) Расставьте числа от 2 до 10 в клетки таблицы 3×3 так, чтобы суммы чисел в любой строке, любом столбце и любой большой диагонали были равны.

13. (зач) Замостите плоскость одинаковыми пятиугольниками.

14. (зач) На доске выписаны в ряд 99 единиц. Расставьте между некоторыми из них знаки “+” и “−” так, чтобы значение полученного выражения равнялось

2000.

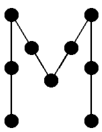
15. (зач). Два совершенно одинаковых игральных кубика, на гранях которых написаны числа от 1 до 6, поставили так, как показано на рисунке. Найдите сумму чисел на двух гранях, соприкасающихся друг с другом друг к другу.



16. (зач) Найдите значение выражения, если разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым – одинаковые

$$\frac{\text{Г} \cdot \text{Р} \cdot \text{У} \cdot \text{З} \cdot \text{И} \cdot \text{Я}}{\text{Т} \cdot \text{Б} \cdot \text{И} \cdot \text{Л} \cdot \text{И} \cdot \text{СИ}}$$

17. (зач) В кружки буквы М впишите все цифры от 1 до 9 так, чтобы все суммы из трёх чисел, стоящих по линиям буквы, были равными и наименьшими из возможных. (Приведите пример и укажите сумму)



18. (зач) Найти трёхзначное число такое, что если в нем стереть цифру единиц, то полученное двузначное число кратно 7, если стереть цифру десятков, то полученное двузначное число кратно 11, если стереть цифру сотен, то полученное двузначное число кратно 13.

19. (зач) Найдите, какие числа должны стоять вместо звездочек в последовательности $*, *, 11, 17, 23, 31, 41, 47, *$.

20. (зач) Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды – 22 года. Во время матча один из игроков был удален за грубость. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет удаленному футболисту?

Ответы

Исходный рубеж

1. Даша - 20 кг, Маша - 30 кг, Света - 40 кг, Катя - 10 кг, Галя - 50 кг.

2. 10 карандашей.

3. 24 нуля.

4. 41312432 и 23421314 (берем любой)

5. 73 и 37

6. Например, пятиконечная звезда (могут быть другие ответы)

7. четверг

9. 147

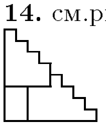
10. 272 матча

11. 500 страниц

12. 8899

13. 1 кг

14. см.рис.



15. 10 ч 30 мин

16. 193=6859

Ответы к зачётным задачам

1. 500 способов.

2. −15, −14, −13, −12, −11, −10, −9

3. 600 кубиков

4. 22 этапа

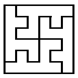
5. на 1999-м месте.

6. 1, ..., 12, 15 или 1,...,11, 13, 14

7. 10 ям.

8. 512

9. см.рис.



10. 10 ящиков яблок, 12 ящиков груш, 10 коробок слив и 14 коробок вишен.

11. 1,2, 5 или 1,3,4

14. 1111 - 111 + 1111 - 111 - 11 + 1 + 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+1+1, далее чередуем.

15. 9

16. 0

18. 565

19. 2, 5, 59

20. 32 года

Математическая карусель.

Исходный рубеж

1. Имеется 10 ящиков. В некоторых из них лежит по 10 ящиков меньшего размера, а в некоторых из меньших ящиков лежит еще по 10 ящиков. Сколько всего ящиков, если заполнено всего 54 ящика?

2. Какой угол составляют стрелки часов в 9 часов 25 минут?

3. Сумма цифр первого числа равна второму числу, а сумма цифр второго числа равна третьему. Найти все эти числа, если сумма всех трёх чисел равна 60, и известно, что все три числа различные.

4. Сколькими способами можно прочитать в таблице слово КОРЕНЬ, начиная с буквы К и двигаясь вправо или вниз?

					К
				К	О
			К	О	Р
		К	О	Р	Е
	К	О	Р	Е	Н
К	О	Р	Е	Н	Ь

5. Поезд длиной 20 м проезжает мимо телеграфного столба за 10 секунд. Сколько времени потребуется ему, чтобы проехать мост длиной 40 м?

6. Английское слово "underground" начинается и оканчивается одной и той же комбинацией из трёх букв. Найдите русское слово (сущ., нарицательное, ед. ч., им. падеж) с тем же свойством, которое содержат минимум 7 букв.

7. На стоянке были легковые автомобили и мотоциклы. Мотоциклов с коляской было в два раза меньше, чем без коляски. Какое наибольшее число автомобилей могло быть на стоянке, если всего колес у автомобилей и мотоциклов было 116?

8. В ящике лежат носки двух цветов: красные и синие, причем красных столько же, сколько и синих. Известно, что для того, чтобы гарантировать, что из вытащенных носков можно составить одноцветную пару, надо вытащить столько же носков, сколько необходимо и для того, чтобы гарантировать, что можно составить разноцветную пару. Сколько всего носков лежит в ящике?

9. Начиная с 12 июля 2000 г., И.С. Рубанов каждый день говорит, что он дал нарядов больше, чем два дня назад, но меньше, чем неделю назад. Какое наибольшее число дней подряд Рубанов может говорить эту фразу, если известно, что он никогда не врет?

10. На электронных часах высвечивается время: часы и минуты. Сколько времени в сутки на их табло присутствует хотя бы в одном месте цифра 3?

11. Через железнодорожную станцию проследовали три воинских эшелона, в первом было 462 солдата, во втором – 546 и в третьем – 630. Сколько вагонов было в каждом эшелоне, если в каждом вагоне находилось одинаковое число солдат и что это число было наибольшим из всех возможных?

12. Черный кофе разлили поровну в два стакана. После добавления в первый стакан пакетика сливок его объем увеличился на 2%. Из второго стакана сначала отлили половину, а затем долили до прежнего объема сливками. Сколько пакетиков при этом было использовано?

13. Половинка кирпича весит 1 кг, еще шестую часть кирпича и еще половину от половинки кирпича. Сколько весит кирпич?

14. Месяц назад я покупал на базаре 1 кг картошки, 1 л молока и 10 яиц. В прошлое воскресенье картошка стала дороже в 3 раза, молоко – в 4 раза, яйца – в 5 раз, и за то же количество я заплатил 60 руб. Сегодня картошка в 6 раз дороже, чем месяц назад, молоко – в 5 раз, яйца – в 4 раза. Сегодня за те же покупки я заплатил бы 66 руб. Сколько денег я заплатил в первый раз?

15. Два последовательных двухзначных чисел сложили и в их сумме переставили цифры. В результате получилось большее из складываемых чисел. Какие это числа?

16. В магазин привезли 223 литра молока в бидонах по 10 и 17 литров. Сколько всего было бидонов?

17. Куб, ребро которого равно 20 м, разрезали на кубики, ребро каждого из которых равно 1 м. Во сколько раз изменилась площадь поверхности?

18. За мороженым стоят Юра, Ира, Оля, Саша и Коля. Юра стоит раньше Ирины, но после Коли. Оля и Коля не стоят рядом, а Саша не находится рядом ни с Колей, ни с Юрой, ни с Олей. В каком порядке стоят ребята?

Зачётный рубеж

1. К числу 1999 припишите по цифре слева и справа так, чтобы полученное таким образом шестизначное число делилось на 31.

2. В Украине сливочное масло стоит 12 гривней за кг, а в США – 1,89 доллара за полфунта. Сколько в фунте граммов, если в 1 долларе 3,6 гривней, а масло в Украине стоит в 2,5 раза дешевле, чем в США?

3. Из 10 различных цифр составьте десятизначное число, такое, что число из первых его двух цифр делится на 2, из 3-х первых цифр – на 3 и так далее до того, что само число делится на 10.

4. Приведите пример карты, на которой четыре треугольные страны граничат каждая с каждой.

5. На стене висит двое часов – нормальные и испорченные. У испорченных часовая стрелка идет правильно, а минутная – в 5 раз быстрее, чем обыкновенная. Сколько раз в течении суток по показаниям только этих часов нельзя определить, какие часы исправны, а какие – испорчены?

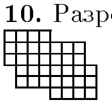
6. Про три простые числа известно, что одно из них является разностью кубов двух других. Найдите такую тройку.

7. Петя перемножил все нечётные числа от 1 до 99 включительно. Найдите последние две цифры произведения.

8. Фирма "Рога и копыта" изготавливает деревянные кубики со стороной 20 см. Каждый кубик стоит 40 коп (10 коп – материал для изготовления, 30 коп – лак для полировки всей поверхности). Во сколько раз дороже обойдется производство одного кубика со стороной 40 см? Сама работа по изготовлению и полировке кубиков ничего не стоит.

9. Сколькими способами можно разменять 2000 руб. монетами по 1, 2 и 5 рублей?

10. Разрежьте фигуру на 4 равные части.



11. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскуток граничит только с белыми, а каждый белый – с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

12. Машинистка хочет отобрать из 1999 чистых листов бумаги пачку из известного только ей количества листов. При подсчете она тратит 1с на 1 лист. За какое наименьшее время она наверняка сделает свой отбор независимо от количества листов в пачке?

13. Произведение двух целых чисел равно 293. Найдите эти числа, если известно, что каждое из них меньше 18.

14. Найдите наибольшее и наименьшее трёхзначное число, делящееся на 6 и имеющее в своей записи цифру 7.

15. На одной из боковых сторон треугольника взято 60 точек, а на другой – 50. (Эти точки отличны от вершин треугольника). Каждая из вершин при основании соединена отрезками прямых с точками, взятыми на противоположной стороне. Сколько точек пересечения (включая точки на сторонах и вершины треугольника) при этом образовалось?

16. . Найти сумму $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \ldots + 1997 + 1998 - 1999$

17. На кольцевой дорожке 660 метров проводится эстафета, длина каждого этапа которой равна 150 метров. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какое наименьшее число этапов может быть в этой эстафете?

18. В стозначном числе 12345678901234567890…1234567890 вычеркнули все цифры, стоящие на нечётных местах. В полученном таким образом пятидесятизначном числе вновь вычеркнули цифры на нечётных местах. Вычеркивание продолжалось до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была вычеркнута последней?

19. Числа 100 и 90 разделили на одно и то же число. В первом случае получили в остатке 4, а в другом – 18. На какое число делили?

20. Трёхзначное число с первой цифрой 5 записали подряд 1999 раз. Оказалось, что полученное таким образом число делится на 91. Найдите исходное трёхзначное число.

21. Огромный военный оркестр выступал на площади. Сначала музыканты выстроились в квадрат, а затем перестроились в прямоугольник, причем количество шеренг увеличилось на 5. Сколько музыкантов было в оркестре?

22. Лисица бежит впереди собаки на 60 своих прыжков, 3 прыжка собаки равны 7 прыжкам лисицы. За одно и то же время собака делает 6 прыжков, а лисица – 9. Через сколько своих прыжков собака догонит лисицу?

Ответы

Исходный рубеж

1. 550

2. 132,5 0

3. 47, 11, 2

4. 32

5. 30 сек

6. например, колокол или водопровод

7. 22 автомобиля

8. 4

9. 6

10. 495 мин. = 8 часов 15 минут

11. 11, 13 и 15 вагонов

12. 25

13. 12 кг

14. 14 руб.

15. 36 и 37

16. 16 бидонов (7 десятилитровых и 9 семнадцатилитровых).

17. в 20 раз

18. Коля, Юра, Оля, Ирина, Саша.

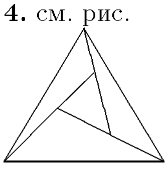
Зачётный рубеж

1. 519994

2. 453,6 г

3. 3816547290

4. см. рис.



5. 96 раз

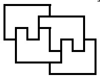
6. 2, 3, 19

7. 75

8. в 5 раз

9. 200 801

10. см. рис.



11. 40

12. 999 сек

13. −1, −293

14. 174 и 978
15. 3113
16. 0
17. 22
18. 4
19. 24
20. 546
21. 400
22. 7

Матбой непрофи6 – непрофи7.

1. На острове живут лжецы и рыцари. Однажды 12 человек, собравшиеся в компанию, сделали следующие заявления: двое сказали "ровно двое из здесь присутствующих – лжецы", еще четверо сказали "ровно четверо среди здесь присутствующих – лжецы", последние шестеро сказали "ровно шестеро среди присутствующих – лжецы". Сколько лжецов было в этой компании?

Ответ: Шесть или двенадцать. Нужно разобрать 4 случая, два из них оказываются возможными, остальные два – невозможными.

2. Для каждого натурального числа, начиная с 1, подсчитали количество жителей деревни Вишкиль, возраст которых больше или равен этому числу. Полученные результаты сложили. Доказать, что результат равен сумме возрастов всех жителей Вишкиля.

Решение: Пусть a_i - количество жителей Вишкиля, возраст которых равен i, а n – возраст самого пожилого вишкильца. Тогда количество жителей, возраст которых больше либо равен i, равно $a_i+a_{i+1}+\ldots+a_n$. Общая сумма всех таких возрастов равна $1\cdot a_1+2\cdot a_2+\ldots+n\cdot a_n$. Это же выражение получается, если подсчитать суммарный возраст всех жителей.

3. В противоположных углах квадратного зала лежат два одинаковых ковра 7 м$\times$10 м. Известно, что площадь пола, покрытая коврами в два слоя, равна 16 м^2. Найдите сторону зала.

Ответ: 12 м либо 13 м. Если большие стороны ковров параллельны друг другу, то ковры пересекаются по прямоугольнику $a\times b$, причем $10+10-a=7+7-b$. Отсюда находит, что $a=b+6$. Так как $ab=16$, то стороны прямоугольника легко найти (даже подбором): $a=8$, $b=2$. Единственность решения в этом случае доказывается таким рассуждением: если $b>2$, то $b+6>8$, $b(b+6)>16$, а если $0<b<2$, то $b+2<8$, $b(b+2)<16$. Отсюда находим, что сторона зала равна $7+7-b=12$. Если же бóльшие стороны ковров перпендикулярны, то фигура в пересечении ковров – квадрат. Следовательно, его сторона равна 4, а сторона зала равна $10+7-4=13$ м.

4. На доске написали два равных двенадцатизначных числа. Запись первого разбили на двузначные числа, запись второго – на трёхзначные (получившиеся числа могут начинаться с нулей). Может ли оказаться так, что сумма получившихся двузначных чисел равна сумме получившихся трёхзначных чисел?

Ответ: Да. Например, для числа 105 000 005 000 сумма трёхзначных "кусков" равна 110 и сумма двузначных "кусков" тоже равна $10+50+00+00+50+00=110$.

5. У Кости есть несколько гирек различного веса и странные чашечные весы, на одну чашку которого можно класть только грузы, а на другую – ровно две гирьки. Костя выяснил, грузы какого веса он может уравновесить своими гирьками, и попросил своего друга Витю подарить на день рождения такую гирьку, которой у Кости еще нет. Может ли оказаться так, что после такого подарка Костя все равно не сможет уравновесить на своих весах ни одного нового веса?

Ответ: Да. Например, для набора гирек 1 г, 2 г, 3 г, 5 г, 6 г, 7 г добавление к нему гирьки 4 г не добавляет никаких новых возможностей: по-прежнему с помощью пар гирь удается взвесить любой вес от 3 до 13 г.

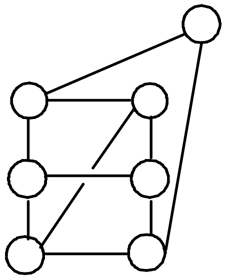
6. Из 64 одинаковых кубиков составили куб $4\times4\times4$. Каждым ходом можно вытащить кубик, у которого на поверхность оставшейся фигуры выходит ровно одна грань. Можно ли сделать 16 ходов?

Ответ: Да, это возможно. Нужно из середины каждого слоя вырезать по два диагональных кубика (итого будет вырезано 12 кубиков), а затем вырезать еще четыре кубика из центрального куба $2\times2\times2$, которые не имеют общих сторон и к которым "открылся доступ" после удаления первых 12 кубиков.

7. Существует ли кратное 111 натуральное число, цифры которого расположены в порядке убывания?

Ответ: Нет. Предположим, что такие числа есть. Рассмотрим наименьшее из них. Оно не может кончаться на 0, потому что тогда бы можно было сократить это число в 10 раз и получить еще меньшее число, кратное 111. Кроме того, оно не может кончаться ни на какую другую цифру, потому что тогда от него можно отнять 111 и снова получить меньшее число с убывающими цифрами, делящееся на 111. Противоречие.

8. Рома пытается расставить в кружочки семь натуральных чисел, так, чтобы все пары чисел, НОД которых больше 1, были соединены отрезками, а все остальные пары соединены не были (см. рисунок). В каких кружочках может оказаться число 2000?



Ответ: 2000 может стоять только в нижнем кружочке. (Числа в остальных кружочках должны иметь не менее трёх различных простых делителей. Пример для расположения числа 2000 в нижнем кружочке легко строится, если на каждого из ребер поставить "свой" простой делитель, а в остальные кружочки вставить числа, равные произведению делителей, стоящих на смежных с ними ребрах.

Математический аукцион.

В начале игры каждая команда получает 100 фишек, которые затем могут быть использованы при "торговле". После выдачи задачи командам дается 3–5 минут на ее решение, а затем начинается "торговля". Ведущий называет начальную цену задачи. Команда, предложившая в ходе торгов наибольшую цену, получает право назвать свой вариант ответа. При этом она платит названную ею сумму в банк. Если после этого снова имеются желающие рассказать эту же самую задачу (предъявить лучший ответ), то проводится повторный аукцион. Наконец, когда больше желающих нет, то команда, предъявившая наилучший ответ, получает весь банк плюс начальную цену задачи.

1. Поставьте вместо звездочек различные цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма дробей $\frac{***}{**} + \frac{***}{**}$ равнялась
а) как можно большему числу;
б) как можно меньшему числу.

2. Назовем слово монокоренным, если в нем есть ровно один корень (слово "монокоренной", например, к монокоренным не относится). Найдите как можно более длинное монокоренное нарицательное существительное русского языка (длина вычисляется в именительном падеже единственного числа).

3. Найдите как можно большее натуральное число, в записи которого не встречается цифра 0, которое делится на сумму своих цифр, причем любое число, получаемое из него отбрасыванием одной или нескольких последних цифр, обладает тем же свойством.

4. За один ход можно поменять местами либо две соседние буквы, либо две буквы, стоящие через одну. Преобразовать слово АПЕЛЬСИН в слово СПАНИЕЛЬ за как можно меньшее число ходов.

5. Найдите как можно больше решений ребуса ТРОС+СТАР=КРУПА.

6. Расставить на шахматной доске как можно меньше коней так, чтобы они били все черные поля.

7. Получить число 2000 с помощью как можно меньшего количества одинаковых цифр (допускаются 4 арифметических действия и скобки).

8. На листе бумаги отмечены несколько точек так, что для каждой из них ровно n из отмеченных точек лежит на расстоянии 1. Нарисуйте такую картинку для как можно большего n.

9. Разбейте прямоугольник 1×3 на возможно меньшее число квадратов так, чтобы среди них не нашлось трёх равных.

10. Придумайте как можно более длинную цепочку различных слов (существительных, единственного числа, именительного падежа, не имен собственных) так, чтобы первые три буквы очередного слова совпадали с последними тремя буквами предыдущего, например корОЛЬ - ОЛЬха.

11. Расставьте на шахматной доске как можно большее число ладей так, чтобы каждая била нечётное число других.

12. Нарисуйте как можно больше прямоугольников, ни один из которых нельзя покрыть всеми остальными вместе.

Заключительная олимпиада.

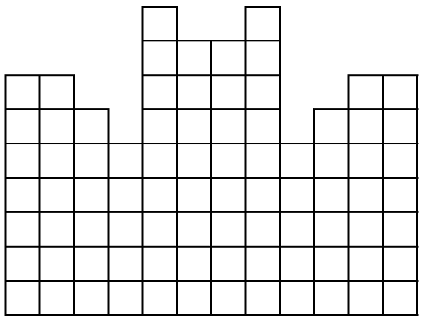
Довыводные задачи

1. Юра задумал число, умножил его на 13 и зачеркнул последнюю цифру результата. Полученное число Владик умножил на 7, вновь зачеркнул последнюю цифру результата и получил 21. Каким могло быть задуманное число? Не забудьте привести все возможные варианты.

Ответ: 24 (анализ с конца с разветвлениями)

2. В некоторой компании все, кроме одного, родились в 1988 году или в июне, все, кроме одного, – в 1989 году или в июле, и все, кроме одного, – в 1990 году или в августе. Сколько человек в этой компании?

3. Фигуру, изображённую на рисунке, разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник.



4. Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными разрезами на девять прямоугольных частей. Площади некоторых из них указаны на рисунке. Найдите площадь верхней правой части. Ответ обоснуйте.

30		?
21	35	
	10	8

5. 50 детей водят хоровод, держась за руки. Докажите, что найдутся хотя бы два ребёнка, каждый из которых держит за руки либо двух мальчиков, либо двух девочек.

Выводные задачи

6. На девяти карточках написаны числа от 1 до 9. Два игрока по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто первым сможет составить с помощью своих карточек, знаков “+”, “−”, “×”, “:” и скобок арифметическое выражение, значение которого равно 50. Составлять из карточек многозначные числа не допускается. Кто выигрывает при правильной игре и как ему следует играть?

7. a, b, c – нечётные натуральные числа, не являющиеся квадратами. Может ли число $a^b \cdot b^c \cdot c^a$ быть полным квадратом?

Ответ: Да, может. Например $a = 3 \cdot 5$, $b = 5 \cdot 7$, $c = 7 \cdot 3$.

8. 90 яблок разложены по нескольким ящикам. Докажите, что можно съесть часть яблок так, чтобы во всех непустых ящиках осталось поровну яблок, а общее число оставшихся яблок было не менее 20.

9. Константин Александрович выписал на доске 6930 единиц. Вначале он изменил знак у каждого 5-го числа, затем – у каждого 7-го, после этого – у каждого 9-го, и, наконец, у каждого 22-го. А теперь он спрашивает вас: какова сумма чисел, записанных на доске?

Ответ: 2100

Расписание занятий

Первая четырёхдневка

<table>
<tr><th></th><th>4 июля</th><th>5 июля</th><th>6 июля</th><th>7 июля</th></tr>
<tr><td>1 час</td><td rowspan="5">Вст. олимпиада</td><td>Разбор олимпиады</td><td rowspan="2">Комбинаторика-2</td><td rowspan="2">Четность-3</td></tr>
<tr><td>2 час</td><td>Пары и черед-е</td></tr>
<tr><td>3 час</td><td>Комбинаторика-1</td><td>Четность-2</td><td rowspan="2">Комбинаторика-3</td></tr>
<tr><td>4 час</td><td>Логика-1</td><td>Логика-2</td></tr>
<tr><td>5 час</td><td>Разнобой-1</td><td>Разнобой-2</td><td>Разнобой-3</td></tr>
</table>

Вторая четырёхдневка

<table>
<tr><th></th><th>9 июля</th><th>10 июля</th><th>11 июля</th><th>12 июля</th></tr>
<tr><td>1 час</td><td rowspan="2">Делимость-1</td><td>Тест по комбинаторике</td><td>Делимость</td><td>Делимость</td></tr>
<tr><td>2 час</td><td>Тест по делимости</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3 час</td><td rowspan="2">Логика-3</td><td rowspan="2">Конструкции-1</td><td rowspan="2">Раскраски</td><td rowspan="2">Конструкции-2</td></tr>
<tr><td>4 час</td></tr>
<tr><td>5 час</td><td>Разнобой-4</td><td>Разнобой-5</td><td>Разнобой-6</td><td>Разнобой-7</td></tr>
</table>

Третья четырёхдневка

<table>
<tr><th></th><th>14 июля</th><th>15 июля</th><th>16 июля</th><th>17 июля</th></tr>
<tr><td>1 час</td><td rowspan="2">Пр. Дирихле-1</td><td rowspan="2">Ацнóк с зиланá</td><td rowspan="2">Пр. Дирихле-3</td><td rowspan="2">Пр. Дирихле-4</td></tr>
<tr><td>2 час</td></tr>
<tr><td>3 час</td><td rowspan="2">Логика-4</td><td rowspan="2">Принцип Дирихле-2</td><td rowspan="2">Задачи про часы</td><td rowspan="2">Задачи на движение</td></tr>
<tr><td>4 час</td></tr>
<tr><td>5 час</td><td>Разнобой-8</td><td>Разнобой-9</td><td>Разнобой-10</td><td>Разнобой-11</td></tr>
</table>

Четвёртая четырёхдневка

<table>
<tr><th></th><th>19 июля</th><th>20 июля</th><th>21 июля</th><th>22 июля</th></tr>
<tr><td>1 час</td><td rowspan="2">Мат.игры-1</td><td rowspan="2">Мат.игры-2</td><td rowspan="2">Мат.игры-3</td><td rowspan="2">Мат.игры-4</td></tr>
<tr><td>2 час</td></tr>
<tr><td>3 час</td><td rowspan="2">Разрезаловка</td><td rowspan="2">Повторение</td><td rowspan="3">Мат. аукцион</td><td rowspan="2">Тест по играм</td></tr>
<tr><td>4 час</td></tr>
<tr><td>5 час</td><td>Тест по логике</td><td>Разнобой-12</td><td>Разнобой-13</td></tr>
</table>

Заключительные занятия

	23 июля	24 июля	25 июля	26 июля
	Закл. олимпиада	Консультации	Консультации	ЗАЧЕТ

Оглавление