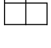
XXVIII Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 3–28 июля 2012 г.

6 КЛАСС.

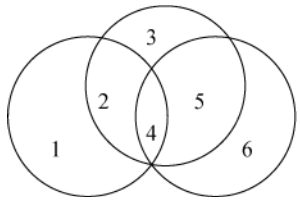
МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Вступительная олимпиада, 4 июля

1. Расставьте в таблице 3×5 пять единиц, пять двоек и пять троек так, чтобы в любой фигурке из трёх клеток вида , сумма чисел не была равна шести. Фигурку можно поворачивать и переворачивать.

2. Малышу и Карлсону дали по одинаковому пирогу. Карлсон начал есть свой пирог на минуту позже Малыша, а через две минуты после этого оказалось, что Карлсон уже съел столько, сколько ещё осталось съесть Малышу. Докажите, что если бы Малыш и Карлсон ели один пирог вдвоём, то они управились бы с ним меньше, чем за три минуты.

3. Три одинаковых круга расположены так, как показано на рисунке, причём площадь каждой из 6 частей равна целому числу квадратных сантиметров. Докажите, что если из суммы площадей первой, третьей и шестой частей отнять площади второй и пятой части, получится число, делящееся на 3.



4. Саша и Андрей написали на 1000 карточках числа от 0 до 999, после чего разделили карточки между собой. Каждый из них выложил свои карточки в ряд и получил длинное число. Могут ли длинные числа у Саши и Андрея совпасть?

5. В коробке лежат белые, синие, красные и зелёные конфеты. Белых конфет в 4 раза меньше, чем синих, красных и зелёных вместе взятых. Синих конфет в 6 раз меньше, чем белых, красных и зелёных вместе. Докажите, что если есть по конфете в день, то конфет хватит на месяц и ещё останется.

6. Игорь выставляет шашки по одной на доску 10×10. Докажите, что в какой-то момент одна из шашек сможет съесть другую.

Деревенская серия, 5 июля

1. Найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до 37.

2. Сельский гипнотизёр Иван Карпович разводит индюков и кур. Вследствие его экспериментов десятая часть индюков считает, что они куры, а десятая часть кур — что они индюки. Если считать вместе, пятая часть птиц Ивана Карповича считает себя индюками. А какова доля индюков в его хозяйстве на самом деле?

3. Усадьбы некоторых джентльменов, проживающих в графстве Липшир, соединены между собой дорогами. Заезжий путешественник обнаружил, что из усадьбы его друга лорда Коннекта можно доехать до любого другого джентльмена (быть может, заезжая по дороге к кому-нибудь ещё). Докажите, что из любой усадьбы в графстве можно проехать по дорогам в любую другую.

4. Вася решил расставить на шахматной доске 15 коней так, чтобы каждый конь бил ровно одного из оставшихся. Удастся ли Васе это сделать?

5. На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по жёлтым — 7 кусков, а если по зелёным — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трёх цветов?

6. В отряде математиков у 18 детей нет стыда, у 20 детей нет совести, а у 24 детей отсутствует здравый смысл. При этом у 4 детей нет ни стыда, ни совести, у 4 детей нет ни стыда, ни здравого смысла и у 5 детей нет ни совести, ни здравого смысла. Наконец, у одного ребёнка нет ни одного из этих качеств. Докажите, что этот отряд математиков – не наш отряд.

7. Докажите, что не существует целых чисел a, b, c, d, e таких, что
$ab = bc = cd = de = ea = 300$.

8. Можно ли расставить на доске 5×6 числа (не обязательно целые) так, чтобы сумма чисел в каждой строчке и в каждом столбце равнялась десяти.

9. На сосне растут 8 бананов и 7 апельсинов. Если сорвать два одинаковых фрукта, то на сосне тут же вырастет один банан, а если сорвать два разных — вырастет один апельсин. Срывать фрукты по одному нельзя. Можно ли срывать фрукты с сосны так, чтобы последним остался банан?

10. Вася приобрел 35 гирь по 2 грамма каждая и 5 гирь по 4 грамма каждая. Можно ли разложить их на две кучки равного веса?

11. Имеется последовательность из 2012 цифр, начинающаяся с тройки. Каждые две последовательные цифры образуют двузначное число, делящееся либо на 17, либо на 23. Какая цифра может стоять на последнем месте?

12. Клетки доски 11×11 покрашены в белый цвет. Разрешается выбрать любые четыре белые клетки, расположенные в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, и две из этих клеток, расположенных по диагонали, перекрасить в чёрный цвет. Какое наибольшее число чёрных клеток удастся получить при помощи таких операций?

Болотная, 6 июля

15. Можно ли составить из цифр от 1 до 9 десятизначное число, в котором между цифрами 1 и 2, между цифрами 2 и 3, ..., между цифрами 8 и 9 стояло бы нечётное число цифр?

16. Найдите сумму чисел $1913 + 1915 + 1917 + \ldots + 2011 + 2013$.

17. Докажите, что произведение трёх последовательных натуральных чисел a) делится на 3; b) делится на 6. c) Докажите, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел делится на 24. d) Докажите, что произведение пяти последовательных натуральных чисел делится на 120.

18. В стране 15 городов, и каждый из них связан дорогами по крайней мере с 7 другими. Докажите, что из любого города можно доехать в любой другой.

19. На доске написаны числа от 1 до 100. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них их разность. Может ли после 99 таких операций остаться число 1?

20. Двое по очереди ставят ладьи на доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга. Кто из соперников выигрывает при правильной игре?

21. На рынке в трёх ящиках лежат арбузы. Продавец взял гнилой арбуз из первого ящика и переложил во второй. Потом взял треснутый арбуз из второго и переложил в третий, ну и для очистки совести из третьего ящика переложил самый лучший арбуз в первый. После этого средний вес арбузов в первом ящике возрос на 1,5 килограмма, во втором — на 3 килограмма, а в третьем уменьшился на 9 килограммов. Известно, что в первом и во втором ящиках было по 18 арбузов. Сколько арбузов в третьем ящике?

22. Пусть $A = (2a + b)(a + 2b)$ делится на три. Докажите, что A делится на девять.

23. Из пяти миллионов болотных кикимор 30 процентов любят тяжёлый рок. В то же время, тяжёлый рок любят 90 процентов из десяти миллионов писаных красавиц. Докажите, что писаными красавицами является не более половины всех болотных кикимор.

24. Раскройте скобки в выражении $(x-y)(x+y)$. Решите в натуральных числах уравнение a) $x^2 - y^2 = 3$; b) $x^2 - y^2 = 21$.

25. Можно ли разрезать правильный треугольник на 12 одинаковых треугольников?

26. Клетчатый прямоугольник можно разрезать на полоски 1×3. Докажите, что длина одной из его сторон делится на три. b) Прямоугольник можно разрезать на полоски 1×4.

Докажите, что длина одной из его сторон кратна четырём.

Министерская, 7 июля

27. Можно ли в таблицу 5×5 записать числа $1, 2, 3, \ldots, 25$ так, чтобы в каждой строке сумма нескольких записанных чисел была равна сумме остальных чисел этой строки?

28. Сколько существует способов расставить чёрную и белую ладьи на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

29. Докажите, что среди семи последовательных нечётных чисел одно делится на семь.

30. Сколько различных слов можно получить переставляя буквы в слове ЗЕНЦОВ?

31. Оля придумала два признака делимости: a) если число делится на 27, то сумма его цифр делится на 27; b) если сумма цифр числа делится на 27, то оно само делится на 27. Права ли Оля?

32. Прямоугольник разбит двумя прямыми на четыре маленьких прямоугольника. Площади трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 12, 24 и 30. Найдите площадь четвёртого прямоугольника.

33. В министерстве перекладывания бумажек 2000047 чиновников. По секретному уставу о чистоте рук им положено ровно пять раз за день созвониться с коллегами. Докажите, что кто-то из чиновником нечист на руку.

34. Число $2a^2 + 5ab + 11b^2$ делится на три. Докажите, что оно делится на девять.

35. Найти значение выражения
$2012^2 - 2011^2 + 2010^2 - 2009^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

36. Двое по очереди ставят ладьи на доску $n \times k$ так, чтобы они не били друг друга. Выигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из соперников выигрывает при правильной игре?

37. Новый корпус для шестиклассников имеет форму квадрата 6×6. Маляр обошёл часть комнат, переходя каждый раз в соседнюю комнату. В каждой комнате, где он был, маляр покрасил пол в оранжевый цвет (возможно несколько раз). Может ли среди комнат с оранжевым полом быть 12 таких, которые имеют общую стену ровно с одной оранжевой?

Взвешивания перед походом, 8 июля

Чашечные весы — это прибор, который умеет сравнить два набора предметов и дать один из следующих ответов: первый набор тяжелее второго, второй набор тяжелее первого или массы первого и второго наборов равны.

Весы со стрелкой — это прибор, который сообщает массу одного набора предметов.

38. Среди 12 одинаковых с виду монет 1 фальшивая, которая легче настоящих. Все настоящие монеты весят одинаково. Как с помощью трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету?

39. У Кости имеется 4 монеты, из которых ровно одна фальшивая (но неизвестно, тяжелее она или легче настоящей). Сергей дал в аренду Косте ещё одну монету, которая выглядит как настоящая, весит как настоящая и пахнет как настоящая. Как Косте за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету?

40. На ужин выдали 55 апельсинов. Один из них отличается по весу от остальных. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, легче он или тяжелее остальных? Сам апельсин при этом находить не нужно.

41. У нумизмата Ани есть 27 советских монет: 9 копеек, 9 двушек и 9 трояков. Известно, что среди монет есть одна фальшивая, которая легче настоящей. Настоящая копейка весит 1 г, двушка — 2 г, трояк — 3 г. С помощью чашечных весов без гирь найдите фальшивую монету a) за 4 взвешивания; b) за 3 взвешивания.

42. Есть шесть монет, среди которых одна фальшивая. Как за четыре взвешивания на одночашечных весах со стрелкой найти фальшивую, если вес настоящей и вес фальшивой монеты неизвестен?

43. a) Есть 10 мешков с одинаковыми с виду монетами. В одном из мешков находятся фальшивые монеты весом 9 г., в остальных мешках — настоящие. Настоящие монеты весят 10 г. Как за одно взвешивание на весах со стрелкой определить мешок с фальшивыми монетами? b) Решите задачу a) при условии, что мешков с фальшивыми монетами несколько. c) Решите задачу a) при условии, что вес фальшивых монет отличается от настоящих и выражается целым числом от 5 г до 15 г. Вес всех фальшивых монет один и тот же.

Походная, 9 июля

44. Сколько различных слов можно получить переставляя буквы в слове
a) ЧЕРАНЁВА; b) ЧЕРАНЕВА?

45. Пусть n — нечётное натуральное число. Докажите, что $n^2 - 1$ делится на a) 4; b) 8.

46. В конференции участвовали 19 учёных. После конференции каждый из них отправил 2 или 4 письма участникам этой конференции. Могло ли получиться так, что каждый участник получил по 3 письма? (Письма на почте не теряют!)

47. В самом начале у Васи и Пети было две кучки спичек: из 1118 и 1123 спичек. Они играют в следующую игру: можно брать любое количество спичек из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

48. Числа p, $p+2$ и $p+4$ —простые. Чему равно $p+236$?

49. На плоскости нарисованы несколько окружностей, причём любые две пересекаются. Докажите, что их можно было нарисовать не отрывая карандаш от бумаги (рисовать линию дважды нельзя).

50. Из квадрата a) 5×5; b) 8×8 вырезали одну клетку. Оказалось, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×3. Где может находиться эта клетка?

51. Участки садового товарищества занимают площадь 100×100 м, причём размер каждого участка равен одной сотке (10×10 метров). Девять участков нерадивых садоводов поросли бурьяном. Если для некоторого участка в какой-то момент оказалось, что два или более соседних по стороне участка поросли бурьяном, то на следующий год порастает и он. Докажите, что, тем не менее, все участки садового товарищества бурьяном не зарастут.

Метаматематическая, 11 июля

52. Сколько различных слов можно получить переставляя буквы в слове МЕТАМАТЕМАТИКА?

53. Докажите, что число $n^5 - n^3$ делится на a) 6; b) 12; c) 24.

54. На шахматной доске стоит 31 фишка. Докажите, что есть уголок из трёх клеток, свободный от фишек.

55. Найдите все такие простые p, что числа $2p+1$ и $4p+1$ тоже простые.

56. Разрежьте квадрат 7×7 на пять частей и переложите их так, чтобы получилось три квадрата: 2×2, 3×3, 6×6.

57. Найдите количество чисел от 1 до 1000, которые делятся на два или на три.

58. a) В маленьком приходе графства Липшир живут только 15 джентльменов. Можно ли соединить их усадьбы дорогами так, чтобы из четырёх усадеб выходило по 3 дороги, из восьми — по 6 и из остальных трёх — по пять?
b) В соседнем приходе из каждой усадьбы выходит ровно 3 дороги. Может ли там быть ровно 100 дорог?

59. В маленьком приходе графства Липшир всего 5 усадеб, некоторые из них соединены дорогами. Известно, что любые две дороги имеют общий конец. Докажите, что найдутся три усадьбы, никакие две из которых не соединены дорогой.

Матбой—междусобой, 12 июля

1. Дано натуральное число n. Известно, что из следующих семи утверждений: 1) n делится на 6; 2) n делится на 10; 3) n делится на 15;
4) n делится на 14; 5) n делится на 22; 6) n делится на 77;
7) n делится на 8 — ровно два неверных. Верно ли, что n делится на 4?

2. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в 72 раза?

3. Существуют ли пять натуральных чисел, среди которых никакие два числа не являются взаимно простыми, а любые три — взаимно просты?

4. В шахматном турнире в один круг участвовали несколько студентов и два школьника (каждый участник турнира сыграл с каждым ровно одну партию, за победу в партии давалось 1 очко, за ничью — 0,5, за проигрыш — 0). Известно, что все студенты набрали одинаковое число очков, а оба школьника набрали по 7 очков. Сколько студентов могло участвовать в турнире? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

5. В выражении $a \cdot (b \cdot (c \cdot (d+1)+1)+1) = 2006$ буквами обозначены натуральные числа 2, 3, 13, 17 (разным буквам соответствуют разные числа). Чему может быть равно c?

6. В строчку без пробелов выписаны последовательные натуральные числа (123456789101112131415. Найдите в этой строчке первый кусок длины 15, в котором встречается не более трёх различных цифр.

7. Можно ли отметить на плоскости 10 красных, 10 синих и 10 зелёных точек, все расстояния между которыми различны, так, чтобы для каждой красной точки ближайшая к ней цветная была синяя, для каждой синей – зелёная, а для каждой зелёной – красная?

8. В нескольких чашках лежат $4n$ алмазов и $4k$ изумрудов, по два драгоценных камня в каждой чашке. Докажите, что чашки можно разделить на две группы, в каждой из которых поровну алмазов и поровну изумрудов.

Клетчатая, 14 июля

60. Докажите, что в любом графе вершин, степень которых нечётна, чётное число.

61. Найдите все простые p такие, что $2p^2+1$ тоже простое число.

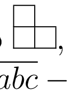
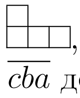
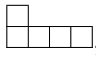
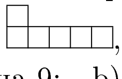
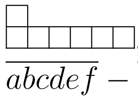
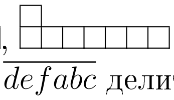
62. Деревом называется связный граф, в котором нет циклов. Докажите, что в дереве есть вершина степени один.

63. Какое наибольшее количество a) королей; b) коней можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

64. Сколько среди чисел от 1 до 3000 таких, которые делятся ровно на одно из чисел 2, 3, 5?

65. Сколько натуральных делителей есть у числа a) 2^{10}; b) $2^{10}3^8$;
c) $2^6 3^7 5^8$?

66. Докажите, что число 8999999 не является простым.

67. Сложите из фигур , , , , ,  прямоугольник.

68. Докажите, что a) $\overline{abc} - \overline{cba}$ делится на 9; b) $\overline{abcdef} - \overline{defabc}$ делится на 27.

69. Двое играют в игру. В самом начале в левом нижнем углу квадрата стоит фишка. За ход можно передвинуть её на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо по диагонали вправо-вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре на поле a) 4×4;
b) 100×100; c) $n \times n$?

70. Из квадрата 8×8 вырезали по линиям сетки восемь квадратов 2×2. Докажите, что можно вырезать ещё один.

Дальняя, 15 июля

71. Каждое из n данных чисел, выписанных вдоль окружности, равно единице или минус

единице. Между каждыми двумя соседними числами написали их произведение, а сами числа после этого стёрли. Сумма оставшихся n произведений оказалась равна нулю. Докажите, что n a) делится на два;
b) делится на четыре.

72. В стране из каждого города, кроме Столицы и Города Дальний, выходит ровно четыре дороги. Из Столицы выходит 11 дорог, а из Дальнего — одна. Докажите, что по дорогам можно добраться из Столицы в город Дальний.

73. Найдите все такие простые p, что числа $4p^2+1$ и $6p^2+1$ тоже простые.

74. Можно ли разрезать прямоугольник 4×5 на пять различных фигурок "тетрамино"?

75. a) В графе 2012 вершин, между любыми двумя вершинами есть ребро. Сколько всего ребер в этом графе? b) Сколько диагоналей в выпуклом 2012-угольнике?

76. Автобусный билет состоит из шести цифр от 000000 до 999999. Билет называется счастливым, если сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр. Докажите, что сумма номеров счастливых билетов делится на 27.

77. Сколькими способами можно поставить 8 ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

78. Может ли факториал какого-нибудь числа оканчиваться ровно на пять нулей?

79. Круг разделён на 6 секторов, и в каждом написано число. Разрешается одновременно увеличивать на 1 числа в любых двух соседних секторах. Можно ли сделать все 6 чисел равными, если в начале они такие:
a) 1,0,0,0,0,0; b) 1,0,1,0,0,0 (именно в таком порядке)?

80. Камни лежат в трёх кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

Слегка клетчатая, 16 июля

81. Как из полоски бумаги 1×7 сложить единичный кубик?

82. Число $\overline{abcdef}$ a) делится на 37, докажите, что $\overline{defabc}$ делится на 37;
b) делится на 13, докажите, что $\overline{defabc}$ делится на 13.

83. Саша и ещё один Саша играют в следующую игру: можно по очереди брать один камень из некоторой кучки или по одному камню из обеих. В самом начале игры в одной кучке 100 камней, а в другой 1000 камней. Какой по номеру Саша выигрывает при правильной игре?

84. Какое наибольшее количество слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

85. Докажите, что в дереве, в котором более одной вершины, есть хотя бы две висячие вершины.

86. На доске 9×9 расставлены девять ладей, не бьющих друг друга. Каждую из этих ладей передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи бьют друг друга.

87. Докажите, что сумма квадратов двух нечётных чисел не может быть квадратом целого числа.

88. Найдите остаток от деления 2^{100} на 3.

89. По кругу расставлены цифры 1, 2, 3, ..., 9 в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трёхзначное число. Найдите сумму всех девяти таких трёхзначных чисел.

90. Найдите все натуральные a и b такие, что $a^2=2b^2$.

91. Докажите, что $100!$ делится на $50!\cdot 50!$.

92. На плоскости нарисовано 239 отрезков. Могло ли так оказаться, что каждый из них пересекается ровно с 13 другими?

Матбой 6 класс — 7 класс, 17 июля

1. В 17 корпусе имеется 15 датчиков пожарной сигнализации, расположенных в виде прямоугольника 3×5. Один из датчиков неисправен и время от времени срабатывает сам по себе. При каждом таком срабатывании охранник Олег может узнать про любые четыре датчика, образующих квадрат 1×1, есть ли среди них неисправный. Сколько ложных пожарных тревог потребуется Олегу, чтобы наверняка найти сломавшийся датчик?

2. В вазочке лежат конфеты трёх сортов. Известно, что можно взять 50 конфет так, чтобы конфет каждого сорта стало поровну. Докажите, что в исходную вазочку можно добавить 100 конфет так, чтобы конфет каждого сорта стало поровну.

3. Найдите наибольшее простое число такое, что любое число, полученное из него вычёркиванием цифр (но не всех), тоже простое.

4. Можно ли расставить на шахматной доске несколько ладей так, чтобы каждая из них била ровно одну другую и чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали стояла хотя бы одна ладья?

5. Четыре различных числа попарно сложили и получили шесть сумм. Известны четыре наименьших из них: 1, 5, 8 и 9. Найдите две остальные суммы и сами исходные числа.

6. В 11 корпусе живут три преподавателя: АГЗ, КАС и АВА. Каждый из них за час расправляется с целым числом тарелок пельменей. Скорости поедания у преподавателей могут быть различными. На конкурсе по поеданию пельменей требовалось съесть за час три тарелки пельменей. Первую тарелку АГЗ съел в одиночку. Сообразив, что не уложится в установленное время, вторую тарелку он ел вдвоём с КАС. После чего третью тарелку они ели уже все втроём и уложились точно в срок. Завтра команде из двух преподавателей предстоит осилить пять тарелок пельменей за час. Сможет ли 11 корпус выставить команду, способную на этот подвиг?

7. С числом разрешается проделывать следующую операцию: выбрать цифру в его десятичной записи и прибавить её к числу или вычесть её из числа. Можно ли с помощью нескольких таких операций получить из числа 2012 число 96?

8. Натуральное число удалось разложить на 10 сомножителей, больших единицы, двумя способами так, что ни один из сомножителей первого разложения не совпадает ни с одним из сомножителей второго. Докажите, что это число можно разложить на 14 сомножителей (не обязательно различных), больших единицы.

Матбой 6 класс — Профи-7, 17 июля

1. В чемпионате Жуликании по боксу участвуют 100 боксёров разной силы. Каждые два боксёра проводят между собой один бой. Несколько боксёров составили заговор: каждый из них в одном из боёв подложит себе в перчатку свинцовую подкову. Если во время боя подкова подложена ровно у одного из двух его участников, то побеждает именно он; в противном случае побеждает сильнейший. По итогам чемпионата нашлись три боксёра, выигравших больше боёв, чем любой из трёх сильнейших участников. Каким могло быть наименьшее количество заговорщиков?

2. Все натуральные делители числа n, кроме 1 и n, выписали по возрастанию. Оказалось, что последнее число в два раза больше предпоследнего. Какое число стоит вторым?

3. Гирьки набора 1 г, 2 г, 3 г, $\ldots$, 100 г разложили по 50 штук на 2 чашки весов так, что весы показали равновесие. Верно ли, что с каждой чашки можно снять по 2 гирьки так, что равновесие сохранится?

4. Имеется доска 3×3 и 9 карточек размером в одну клетку, на каждой из которых записано некоторое число. Двое играющих по очереди выбирают одну из карточек и кладут её на пустую клетку доски. После того, как все карточки разложены, первый игрок подсчитывает сумму шести чисел, стоящих в верхней и нижней строках, а второй — стоящих в левом и правом столбцах. Выигрывает тот, у которого сумма больше. Докажите, что при правильной игре первого, второй не сможет выиграть независимо от того, какие числа записаны на карточках.

5. На окружности отмечено 100 синих и несколько красных точек. Известно, что точка, диаметрально противоположная любой синей, — красная, но синих точек не меньше, чем красных. Докажите, что есть две синие точки, между которыми нет ни одной красной.

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что числа $p = b^c + a$, $q = a^b + c$, $r = c^a + b$ простые. Докажите, что хотя бы два из чисел p, q, r равны между собой.

7. Разрежьте прямоугольник 3×8 на две части так, чтобы ими можно было полностью оклеить поверхность куба $2 \times 2 \times 2$.

8. У крестьянина были коза, корова, кобыла и копна сена. Сын крестьянина подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу 1 месяц, или козу и корову $\frac{3}{4}$ месяца, или же корову и кобылу $\frac{1}{3}$ месяца. В ответ на это отец заметил, что сын плохо учится в школе. Прав ли он?

Никакая-то, 19 июля.

93. Двое играющих ходят по очереди на циферблате с одной стрелкой: каждый своим ходом переводит стрелку на два или три часа вперёд. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку на 11 часов, начиная с положения 12 часов. Кто выигрывает при правильной игре?

94. Пусть $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на a) 6; b) 12.

95. На доске 3×3 стоят четыре коня: в двух противоположных углах чёрные, в двух других — белые. Докажите, что если кони будут ходить по правилам, то два коня в верхней строке не смогут поменяться местами.

96. Сколько можно составить шестибуквенных слов из букв З, Е, Н, Ц, О, В таких, что не все буквы различны?

97. Докажите, что число $\overline{a_{100}a_{99}\ldots a_2a_1} - a_{100} - a_{99} - \ldots - a_2 - a_1$ делится на девять.

98. Игра начинается с числа 2. За один ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто первым получит число 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

99. Докажите, что найдутся две различные степени двойки такие, что их разность делится на 2012.

100. В стране 100×100 километров находится 101 город. Докажите, что между какими-то двумя из них можно построить дорогу длиной не более 20 км.

101. Можно ли разрезать доску 10×10 на Т-тетрамино?

102. В противоположных углах клетчатой доски 7×7 стоят чёрная и белая ладьи, остальные поля заполнены серыми пешками. Двое ходят по очереди каждый своей ладьей. Каждым ходом игрок обязан что-нибудь съесть: пешку или ладью противника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

103. Вася выписал на доску число 1. Каждую минуту он берет предыдущее число, умножает его на 19 и пишет на доску две последние цифры результата. Докажите, что рано или поздно он пойдет по циклу.

104. На листе бумаги отмечены 2005 точек. Двое играют в следующую игру: каждый своим ходом соединяет две отмеченные точки линией. Запрещается соединять пару точек повторно. Проигрывает тот, после чьего хода из любой точки можно пройти в любую другую, двигаясь от точки к точке по проведённым линиям. Кто выигрывает при правильной игре?

Властелин связи, 20 июля

105. Может ли число состоящее из 100 двоек, 100 троек и 100 единиц быть квадратом натурального числа?

106. Средний возраст 11 игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один игрок получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся — 21 год. Сколько лет получившему травму?

107. Сумма двух натуральных чисел равна 210. Докажите, что их произведение не делится на 210.

108. Дан связный граф. Нина раз в минуту стирает в нем одно ребро так, что новый граф остается связным. Докажите, что рано или поздно граф станет деревом.

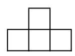
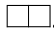
109. Докажите, что число $\overline{a_{100}a_{99}\ldots a_2a_1} - \overline{a_{100}a_{99}} - \overline{a_{98}a_{97}} - \ldots - \overline{a_2a_1}$ делится на 11.

110. В одной вершине куба написано число 1, в остальных — нули. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться, чтобы все числа a) делились на два; b) делились на три?

111. Горлум пишет в ряд на доске последовательность чисел. В самом начале на доске написаны числа 33 и 10. Каждую минуту он берёт последние два числа, складывает их и записывает на доску последние две цифры суммы в качестве нового числа. a) Докажите, что Горлум зациклится. b) Докажите, что когда-нибудь Горлум напишет самую прелестную последовательность чисел — 33, 10.

112. a) В углу таблицы 4×4 стоит минус, а в остальных клетках — плюсы. Разрешается выбирать любую строку или столбец и менять все стоящие там знаки на противоположные. Можно ли такими операциями получить таблицу из одних плюсов? b) Та же задача для таблицы 3×3.

113. В противоположных углах клетчатой доски 7×8 стоят чёрная и белая ладьи, остальные поля заполнены серыми пешками. Двое ходят по очереди, каждый своей ладьей. Каждым ходом игрок обязан что-нибудь съесть — пешку или ладью противника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

114. Лесенкой размера n назовем клетчатую фигуру, состоящую из n столбцов, причём в первом одна клетка, в следующем — две клетки, и так далее, в последнем — n клеток. При каких $n < 100$ эту лесенку можно разрезать на фигуры вида , .

115. Из доски 100×100 по линиям сетки вырезаны 800 Т-тетрамино. Докажите, что из оставшейся части доски можно вырезать хотя бы ещё: a) 25 таких фигурок; b) 50 таких фигурок.

Логические задачи, 20 июля

116. Следователь допрашивает трёх свидетелей. Клод утверждает, что Жак лжёт, Жак обвиняет во лжи Дика, а Дик уговаривает не верить ни Клоду, ни Жаку. Кто из свидетелей говорит правду?

117. Встретились несколько аборигенов, и каждый из них заявил всем остальным: “Вы все — лжецы”. Сколько рыцарей могло быть среди этих аборигенов?

118. a) За круглым столом сидят рыцари и лжецы, всего 20 человек. Каждый из них заявил своему соседу слева: “Ты лжец”, на что получил ответ: “Сам ты лжец”. Сколько рыцарей и сколько лжецов сидит за столом? b) Могла ли быть такая ситуация, если за столом 25 человек?

119. В комнате находятся 12 человек. Некоторые из них всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. Один из них сказал: “Здесь нет ни одного честного человека”, второй: “Здесь не более одного честного человека”, третий: “Здесь не более двух честных людей”, и т. д., двенадцатый: “Здесь не более одиннадцати честных людей”. Сколько в комнате честных людей?

120. В ряд выстроились 1000 аборигенов. Каждый сказал: “Слева от меня рыцарей меньше, чем лжецов справа”. На каких местах в ряду стоят рыцари?

121. Предположим, что справедливы следующие утверждения:
• среди людей, имеющих ноутбуки, есть такие, которые не являются преподавателями.
• люди, каждый день едящие мороженое, но не являющиеся преподавателями, не имеют ноутбуков.
Верно ли, что не все владельцы ноутбуков каждый день едят мороженое?

122. Перед вами три человека: двое нормальных, один — идиот. На вопрос типа “Да/нет” нормальные отвечают честно, а идиот вопроса не слушает, и отвечает “Да” или “Нет” наугад. Как за два вопроса определить, кто есть кто? (Разумеется, после ответа на первый вопрос можно второй вопрос задать тому же или другому.)

Предпоследняя, 21 июля

123. Задумано трёхзначное число, у которого с любым из чисел 543, 142 и 562 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?

124. Сколько существует способов покрасить доску 8×8 в два цвета?

125. Есть a) 3; b) 9; c) 27 одинаковых с виду монет, среди которых одна фальшивая, легче настоящей. Как за a) одно; b) два; c) три взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету?

126. По окружности выписаны 2012 чисел, каждое из которых равно полусумме двух соседних. Докажите, что все числа равны.

127. a) Докажите, что число $\overline{a_{300}a_{299}a_{298}\dots a_2a_1} - \overline{a_{300}a_{299}a_{298}} - \overline{a_{297}a_{296}a_{295}} - \dots - \overline{a_3a_2a_1}$ делится на 37.
b) Докажите, что число $\overline{a_{100}a_{99}\dots a_2a_1} + a_{100} - a_{99} + a_{98} - a_{97} + \dots - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1$ делится на 11.

128. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьет не более двух других.

129. Коридор длины 6 м покрыт тремя ковровыми дорожками, каждая длиной 3 м, причём ни в каком месте дорожки не лежат в три слоя. Докажите, что какие-то две дорожки перекрываются не менее, чем на 1,5 м.

130. В классе, где учился дедушка Васи, каждый мальчик дружил с тремя девочками, а каждая девочка — с двумя мальчиками. При этом в классе был 31 пионер и стояло 19 парт. Сколько учеников было в классе дедушки?

131. Чёрный ящик работает так: любые три числа a, b и c, попадающие в него, он перерабатывает в числа $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$. Можно ли с помощью этого ящика из чисел 1, 3, 8 получить числа -1, 3, 9?

132. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

133. Прямая произвольно окрашена в два цвета. Докажите, что найдется отрезок, середина и концы которого одинаково раскрашены.

134. Разрежьте квадрат на: a) 4 меньших квадрата; b) на 7 квадратов; c) на 6 квадратов; d) на 8 квадратов; e) на любое, большее пяти, число квадратов.

135. На каждой клетке треугольной доски со стороной 5 сидит жук. В некоторый момент времени все жуки переползают на соседние по стороне клетки этой доски. Докажите, что после этого найдутся по крайней мере 5 пустых клеток.

Последняя, 22 июля

136. На столе стоят 50 стаканов, из них 25 — вверх дном. Можно ли, переворачивая по два стакана, поставить все стаканы вверх дном?

137. У царя Гороха I было три сына. Каждый из его потомков либо умер во младенчестве, либо правил государством и также имел трёх сыновей. Известно, что последним правителем был Горох XVII. Сколько потомков царя Гороха умерло во младенчестве?

138. Сколько существует способов покрасить доску 8×8 в два цвета так, чтобы a) в каждой строке было чётное количество чёрных клеток; b) в каждой строке и в каждом столбце было чётное количество чёрных клеток?

139. Среди десяти монет одна фальшивая, которая легче настоящей. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь выделить фальшивую?

140. Плоскость произвольно раскрашена в два цвета. Докажите, что найдется равносторонний треугольник, все вершины которого окрашены одинаково.

141. На полях шахматной доски расставлены числа $1, 2, \ldots, 64$. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, где числа отличаются не меньше, чем на 5.

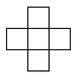
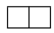
142. Докажите, что если ab, bc, ca являются точными кубами, то каждое из чисел a, b, c является точным кубом.

143. a) Докажите, что если число является квадратом натурального числа, то у него нечётное количество натуральных делителей. b) Докажите, что если у числа нечётное количество делителей, то оно квадрат.

144. Разбиение прямоугольника на доминошки называется прочным, если любая прямая, проходящая по линии сетки, разрезает хотя бы одну доминошку. Существует ли прочное разбиение прямоугольника a) 5×6; b) 6×6?

145. В каждой клетке шахматной доски стоит 0. Разрешается выбрать любые две клетки, соединённые ходом коня, и увеличить на 1 стоящие в них числа. Можно ли добиться того, чтобы в клетках оказались числа $1, 2, \ldots, 64$ (не обязательно идущие по порядку)?

146. Докажите, что у любого выпуклого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

147. Можно ли разрезать квадрат 75×75 на фигурки вида  и ?

148. Докажите, что в графе найдутся две вершины одинаковой степени.

Заключительная олимпиада, 24 июля

1. Разрежьте квадрат на два выпуклых четырёхугольника и выпуклый пятиугольник.

2. Найдите наименьшее натуральное n такое, что $1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}$ делится на 45.

3. Петя и Коля играют на клетчатой доске 4×4. Они ходят по очереди, и каждый игрок своим ходом закрашивает одну клетку. Проигрывает тот, после чьего хода образуется квадрат 2×2, состоящий из закрашенных клеток. Первым свой ход делает Коля. Кто выиграет при правильной игре: Коля или Петя? Ответ обоснуйте.

4. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно записать на доске так, чтобы разность любых двух из них (от большего отнимают меньшее) была простым числом?

5. На окружности даны $n > 10$ точек. Кенни посчитал количество способов провести три отрезка с концами в данных точках, не имеющих общих точек (в том числе и концов). Докажите, что это количество делится на 5.

Вывод

6. Семеро козлят задумали по трёхзначному числу. Затем каждые двое сыграли в такую игру: они сравнили первые цифры своих чисел, и тот, у кого цифра больше, дал другому столько щелчков, на сколько больше его цифра; потом проделали то же самое со вторыми и третьими цифрами. Могло ли случиться так, что всего они пробили 217 щелчков?

7. Бумажная полоса размером 1×100 разбита на единичные квадраты. В эти квадраты записывают числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ следующим образом: сначала в какой-нибудь квадрат записывают 1, потом в один из соседних квадратов записывают 2, потом в один из соседних с уже занятыми квадратами записывают число 3, и т.д. Сколькими способами это можно сделать?

8. На доске в строку выписаны 50 различных натуральных чисел. Докажите, что можно стереть 42 из них (то есть оставить восемь) так, чтобы оставшиеся шли в порядке возрастания или убывания.