

Чётность.

1. (а) Петя утверждает, что число $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$ нечётно. Докажите, что Петя ошибается.

(б) Шестиклассник Петя утверждает, что он разменял 235 тугриков сотней купюр достоинством в 1, 3 и 5 тугриков. Докажите, что Петя ошибается.

(с) Шестиклассник Петя умножил разность двух натуральных чисел на их произведение и получил 235235. Докажите, что Петя ошибается.

2. У Пети есть 12 палочек, длины которых равны первым 12-ти простым числам. Он хочет из всех этих палочек сложить прямоугольник, не ломая палочек. Удастся ли ему это сделать?

3. Можно ли разбить натуральные числа от 1 до 21 на несколько групп так, чтобы в каждой группе было число, равное сумме остальных?

4. Оля, Петя и Вася разобрали карточки, на которых написаны числа от 5 до 11. Оля взяла три карточки, а Петя и Вася – по две карточки. Крутая Оля посмотрела на свои карточки и заявила Васе: «Я точно знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!» Какие карточки у Оли?

5. Выше упомянутый шестиклассник Петя берется представить единицу в виде суммы 1000 дробей, числители которых равны 1, а знаменатели — нечётные числа. Удастся ли это ему?

6. В стране Арагонии жили 100 рыцарей, 99 принцесс и 101 дракон. Рыцари убивают драконов, драконы едят принцесс, а принцессы изводят до смерти рыцарей. Древнее заклятие запрещает убивать того, кто сам погубил нечётное число других жителей. Сейчас в Арагонии остался всего один житель. Кто это?

7. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 20 так расставить в вершинах и серединах ребер куба, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

