

Матбой Профи 6 – Профи 7

1. Несколько кроликов построились в ряд. Оказалось, что каждый кролик, кроме двух крайних, имеет поровну друзей слева и справа от него. Докажите, что у двух крайних кроликов поровну друзей.

2. Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Докажите, что его можно разбить прямыми, параллельными сторонам, и на 392 равных квадрата.

3. Докажите, что из 3^8 натуральных делителей числа 3^8 можно выбрать несколько (быть может, один) не обязательно различных делителей с суммой, равной 3^8 .

4. Какое наибольшее количество фигурок $1 \times 2 \times 2$ можно вырезать из куба $3 \times 3 \times 3$?

5. На окружности даны $n > 10$ точек. Кенни посчитал количество способов провести три отрезка с концами в данных точках, не имеющих общих точек (в том числе и концов). Докажите, что это количество делится на 5.

6. Вася и Петя играют в игру. На пяти клавиатурах есть 100, 101, 102, 103 и 104 клавиши соответственно. За ход можно выломать по одной клавише из двух разных клавиатур. Петя ходит первым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7. В ряду чисел 1, 251, 376, 188, 94, ... каждое число, кроме первого, равно либо половине предыдущего, если предыдущее четно, либо половине предыдущего числа, увеличенного на 501, в противном случае. Верно ли, что в этом ряду встретятся все числа от 1 до 500?

8. Казначей Матвей положил в каждую клетку прямоугольника 3×6 по одной монете. Он утверждает, что суммарный вес всех монет в каждой линии (строчки и столбцы), кроме одной, одинаков. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить, в какой именно линии вес отличается от остальных?

Замена задачи №5. По кругу расставлены 37 различных чисел. Докажите, что среди всевозможных сумм 12 чисел, стоящих подряд, есть хотя бы 6 различных.