

Принцип Дирихле.

1. Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле купил 21 кролика и рассадил в имеющиеся у него 20 клеток. Докажите, что какие-то два кролика сидят в одной клетке.

2. На Земле живёт 7 миллиардов человек. У каждого на голове не более 140000 волос. Докажите, что: есть два человека (a) с одинаковым количеством волос на голове; (b) с одинаковым количеством волос на голове, у которых дни рождения в один день.



3. На шахматной доске стоят 33 коня. Докажите, что два из них бьют друг друга.

4. На Марсе пошла мода носить фенечки не только на руках, но и на ногах. Докажите, что среди собравшихся 33 марсиан найдутся двое, которые носят фенечки на одних и тех же конечностях (у марсианина две ноги и три руки, и все разные).

5. В карьере добыли 36 камней. Их веса составляют арифметическую прогрессию: 490 кг, 495 кг, 500 кг, ..., 665 кг. Можно ли увезти эти камни на семи трёхтонных грузовиках?

6. (a) На доске написано 6 чётных чисел. Докажите, что разность каких-то двух делится на 10.

(b) На доске написано 7 квадратов натуральных чисел. Докажите, что разность каких-то двух делится на 10.

7. Докажите, что в Африке есть две страны, у которых поровну соседей.

Для самостоятельного решения

8. В квадратном ковре со стороной 1 метр моль проела 81 точечную дырку. Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 25 см можно закрыть не менее шести дырок.

9. К празднику зал украсили 50 воздушными шариками. Докажите, что среди них найдутся либо 8 одноцветных, либо 8 попарно различного цвета.

10. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить шахматную доску 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета?

Для тех, кто решил всё предыдущее

11. Доска 6×6 заполнена доминошками 1×2 . Докажите, что можно провести горизонтальный или вертикальный разрез доски, не пересекающий ни одной костяшки.

12. 2013 долларов разложили по кошелькам, а кошельки разложили по карманам. Известно, что всего кошельков больше, чем долларов в любом кармане. Верно ли, что карманов больше, чем долларов в каком-нибудь кошельке? (Класть кошельки один в другой не разрешается.)

13. В ряд выписано n натуральных чисел. Докажите, что найдётся несколько подряд идущих, сумма которых делится на n .