

Принцип крайнего.

1. Среди 10 человек прошло соревнование по перетягиванию каната – каждый с каждым. Все оказались различной силы. Вася посмотрел на протокол и захотел узнать: верно ли, что любые трое перетянут любых двоих? За сколько перетягиваний он сможет это установить?

2. Шахматная доска разбита на доминошки. Докажите, что какая-то пара доминошек образует квадратик 2×2 .

Идея 1. В задачах, где надо что-то найти, нужным свойством часто обладает крайний (наибольший, наименьший, самый левый) объект.

Идея 2. В задачах на доказательство часто полезно начать рассуждение с рассмотрения крайнего объекта (или объектов).

3. Можно ли в вершинах кубика расставить все числа от 1 до 8 так, чтобы любые два соседние по ребру числа отличались на 1 или на 2?

4. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьёт не более двух других.

5. По окружности расставлено несколько натуральных чисел так, что каждое из них является делителем одного из соседних. Докажите, что среди этих чисел есть два одинаковых.

6. По окружности расставлено несколько чисел (не обязательно целых чисел) так, что каждое из них является полусуммой своих соседей. Докажите, что все числа равны.

7. Семь шестиклассников решили вместе 100 задач, причём каждый решил разное количество задач. Докажите, что какие-то три школьника решили вместе не менее 50 задач.

8. Известно, что если у двух жителей Вишкиля поровну знакомых среди односельчан, то общих знакомых у них нет. Докажите, что найдётся житель, у которого ровно один знакомый односельчанин.

Для самостоятельного решения

9. На полях шахматной доски расставлены числа $1, 2, \dots, 64$. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, где числа отличаются не меньше, чем на 5.

10. (a) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50? (b) Тот же вопрос для чисел от 1 до 100?

Для тех, кто решил всё предыдущее

11. В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую. Докажите, что можно так выбрать станцию и закрыть её на ремонт (без права проезда через неё), что по-прежнему можно будет проехать с любой оставшейся станции на любую оставшуюся.