Ставь на минус!

Определение. Рассматриваем игры, в которых невозможны бесконечные партии. Позиция называется *выигрышной*, если игрок, делающий с нее ход, имеет возможность выиграть при любой игре соперника. Иначе позиция называется *проигрышной.*

Теорема 1. Пусть некоторой игре **проигрывает** тот, кто не может сделать ход. Пусть все позиции разбиты на два непересекающихся класса: минусовые и плюсовые, причем выполняются три свойства:

1) все финальные позиции – минусовые;
2) *все* ходы из минусовых позиций ведут в плюсовые;
3) из каждой плюсовой позиции *есть* ход в минусовую.

Тогда минусовые позиции являются проигрышными, а плюсовые – выигрышными.

Теорема 2. Пусть некоторой игре **выигрывает** тот, кто не может сделать ход. Пусть все позиции разбиты на два непересекающихся класса: минусовые и плюсовые, причем выполняются три свойства:

1) все финальные позиции – плюсовые;
2) *все* ходы из минусовых позиций ведут в плюсовые;
3) из каждой плюсовой позиции, **кроме финальных**, *есть* ход в минусовую.

Тогда минусовые позиции являются проигрышными, а плюсовые – выигрышными.

1. На концах полоски $1 \times n$ $(n > 2)$ стоит по шашке. За ход разрешается сдвинуть любую шашку в направлении другой шашки на одну или две клетки. Перепрыгивать через шашку нельзя, становиться шашкой на занятую другой шашкой клетку нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. При каких n при правильной игре выигрывает первый игрок, а при каких – второй?

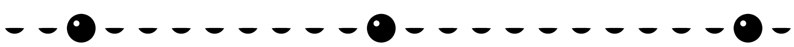
2. Игра начинается с числа 4. Двое игроков по очереди прибавляют к имеющемуся числу любое, меньшее его, натуральное число. Выигрывает тот, кто получит ровно 100. Кто выигрывает?

3. (a) Часовая стрелка установлена на 12 часах. Двое по очереди двигают ее на 2 или 3 часа вперед. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку снова на 12 часов. Через 12 часов можно «перепрыгивать».

(b) Для каждого начального положения стрелки (и конечного положения на 12 часах) определите, кто выигрывает при правильной игре.

4. Есть длинный ряд луночек. В трёх из них лежит по шарику. Игроки по очереди делают ход: берут один из крайних шариков и перекладывают в свободную луночку между двумя другими. Тот, кто не может сделать ход, считается проигравшим. Кто — начинающий игру или ходящий вторым — победит при правильной игре при показанных на рисунках первоначальных расположениях шариков?

а) 

б) 

в) 

г) Разберите общий случай – между крайними шариками и средним имеется a и b пустых луночек.

Для самостоятельного решения

5. Есть многозначное число, например, 999. Вычисляется сумма его цифр (в данном случае 27) и начинается игра. Первый называет любое число от 27 до 999 (27 – можно называть, а 999 – нет), исходное число заменяется на это строго меньшее число. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. При скольких начальных числах от 1 до миллиарда включительно при правильной игре победит второй игрок?

6. Имеются две кучи камней, в одной из которых 1, а в другой – 4 камня. Каждый игрок обеспечивается неограниченным запасом камней. За ход разрешается удвоить число камней в одной из куч, или увеличить на 3 количество камней в какой-либо куче. Выигрывает тот игрок, после хода которого суммарное число камней в двух кучах будет не меньше 22. Кто выигрывает при правильной игре?

7. В кучке **(a)** 400; **(b)** 399 камней. За ход можно взять 1, 2 или 3 камня. При этом нельзя брать столько камней, сколько было взято на предыдущем ходе. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Для тех, кто решил всё предыдущее

8. Петя и Вася играют в игру. Изначально на столе лежит кучка из N конфет. Петя делит ее на три непустые кучки, а Вася две из них съедает. Затем Вася делит остатки на три непустые кучки, а Петя две из них съедает, и так далее. Кто не может сделать ход, проигрывает. При каких N при правильной игре выигрывает первый игрок, а при каких – второй?

Поль Сезанн. Игроки в карты (1892-1893 г.). Продана в 2012 году за 250 миллионов долларов. Самая дорогая картина из когда-либо проданных.