Признаки делимости и равноостаточности.

1. Сформулируйте признаки делимости на 2, 4, 8, 16, 5, 25, 125.

Теорема (признаки равноостаточности при делении на степени 2 и 5).

(a) Число при делении на 2 и на 5 даёт такой же остаток, как и его последняя цифра.

(b) Число при делении на 4 и на 25 даёт такой же остаток, как и число, образованное его двумя последними цифрами.

(c) Верны аналогичные признаки при делении на 8 и на 125.

2. Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что предпоследняя цифра квадрата – нечётна.

Теорема (признак равноостаточности при делении на 3 и 9). Число при делении на 3 и на 9 даёт такой же остаток, как и его сумма цифр.

3. Из натурального числа вычли его же, записанное в обратном порядке. Докажите, что полученное число делится на 9.

4. На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?

5. Какой остаток даёт число $10\ldots0$ (n нулей) при делении на 11 при **(a)** чётном; **(b)** нечётном n?

Теорема (признак равноостаточности при делении на 11). Число при делении на 11 даёт такой же остаток, как и его знакопеременная сумма цифр.

6. Докажите, что число $\overline{a_1a_2\ldots a_na_n\ldots a_2a_1}$ – составное.

7. Докажите, что нельзя переставить цифры в числе 123456 так, чтобы полученное число делилось на 11.

Для самостоятельного решения

8. Может ли степень числа 2 оканчиваться на 4 одинаковые цифры? (на три – может: $2^{39} = 549755813888$).

9. У числа 2^{1970} зачеркнули его первую цифру и прибавили её к оставшемуся числу. С результатом проделали ту же операцию и т. д., до тех пор, пока не получили 10-значное число. Докажите, что в этом числе есть две одинаковые цифры.

10. Докажите, что среди 18 последовательных трёхзначных чисел найдётся хотя бы одно, которое делится на сумму своих цифр.

Для тех, кто решил всё предыдущее

11. В клетки таблицы 100×100 записаны ненулевые цифры. Оказалось, что все 100 стозначных чисел, записанных по горизонтали, делятся на 11. Могло ли так оказаться, что ровно 99 стозначных чисел, записанных по вертикали, также делятся на 11?

12. Найдите все натуральные числа k, которые обладают следующим свойством: если n делится на k, то и любая перестановка цифр числа n тоже делится на k.