

Графы-2.

Определение. Назовем *графом* множество *вершин*, некоторые пары из которых соединены *ребрами*.

Замечание. Вершина может быть не соединена ни с какой другой вершиной ребром. Любое ребро начинается и заканчивается вершиной. Две вершины могут соединяться несколькими рёбрами.

1. В государстве 50 городов. Из каждого города выходит 7 дорог. Сколько всего дорог в этом государстве?

2. Сколько всего рёбер в *графе короля*?

Теорема. Число ребер в графе равно половине от суммы степеней вершин.

3. В компании 15 человек. Каждый сделал по 5 рукопожатий. Сколько всего было рукопожатий?

4. В компании 20 человек, некоторые пожали руки друг другу. Может ли быть так, что 10 человек пожали руки 4 раза, 3 человека – 6 раз, 4 человека – 1 раз и 3 человека – 5 раз?

Лемма о рукопожатиях. В любом графе число нечётных вершин чётно.

5. Юноши и девушки пожимали друг другу руки. Каждый юноша пожал 13 рук, а каждая девушка – 10 рук. Докажите, что было не менее 100 рукопожатий.

6. На шахматной доске стоит несколько коней. Каждый конь на белом поле бьет 3 коня, а каждый конь на черном поле бьет 4 коня. Докажите, что общее число коней кратно семи.

7. В стране из каждого города, кроме Столицы и город Дальний, выходит ровно четыре дороги. Из Столицы выходит 11 дорог, а из Дальнего одна. Докажите, что по дорогам можно добраться из Столицы в Дальний.

Для самостоятельного решения

8. На спартакиаде проводились соревнования по пяти видам спорта. Каждый из 30 шестиклассников принял участие в соревнованиях либо по одному, либо по трём видам спорта, а в каждом из видов число принимавших участие было 15 или 25. Докажите, что такого быть не могло.

9. Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек? А если девочек 10, а мальчиков 9?

10. В стране 10 городов. Любые два города соединены дорогой, если и только если из них выходит одинаковое число дорог. Может ли число дорог равняться 20?

Для тех, кто решил всё предыдущее

11. Каждый депутат имеет хотя бы одного врага, любая вражда взаимна. Докажите, что депутатов можно разбить на две фракции так, чтобы каждый имел врага в противоположной фракции.

12. У каждого марсианина три руки и несколько антенн. Каждый марсианин взял за руки трёх других (так что все руки оказались заняты). Оказалось, что у любых двух из марсиан, взявшихся за руки, количество антенн отличается ровно в 6 раз. Может ли суммарное количество антенн у марсиан быть ровно 2013?

13. Каждый из 102 человек имеет не менее 68 знакомых. Докажите, что найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.