Математика – это искусство называть разные вещи одним и тем же именем.

Анри Пуанкаре.

Эта брошюра написана по материалам занятий шестого класса Летней многопредметной школы Кировской области 2013 года. Основную цель своей работы мы видели не в том, чтобы научить школьников нескольким новых для них методам решения задач, а в том, чтобы научить их видеть аналогии между — казалось бы — совсем непохожими задачами.

В брошюре приведены краткие конспекты занятий, содержащие выдававшиеся школьникам задачи. Читатель, разумеется, осознает, что эти материалы подобны карандашным наброскам, которые верно передают общие контуры, но бессильны показать цветовую гамму. По этим наборам задач едва ли можно восстановить ту атмосферу живого и плодотворного общения, которую мы старались поддерживать на протяжении всей смены. К сожалению, записать этот живой диалог со школьниками не представляется возможным. В некоторые листки включены весьма сложные для шестиклассников задачи. Авторы надеются, что в уютной домашней обстановке повзрослевшие школьники к ним вернутся и решат несколько наиболее сложных и интересных из них. Такие задачи сознательно не были разобраны на занятиях и консультациях.

Мы надеемся, что многообразие вкусов и представлений преподавателей о том, как надо учить шестиклассников, более соответствует пословице о двух головах, нежели о семи няньках.

Авторы

Вступительная олимпиада — 4 июля

1. Винни-Пуху на завтрак дали полную тарелку каши. Он съел половину и положил в тарелку еще столько же мёда. Затем съел треть содержимого (каши с медом) и дополнил тарелку мёдом. Потом съел четверть содержимого и снова дополнил тарелку мёдом, после чего с аппетитом всё съел. Чего в итоге Винни-Пух съел больше: мёда или каши?

2. Каждый кандидат в мэры – либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждому из семерых кандидатов задали вопрос: «Кого среди кандидатов больше: рыцарей или лжецов?» Кандидаты А, Б, В ответили: «Лжецов». А что ответил кандидат Г? (Каждый из кандидатов точно знает, кем являются остальные шестеро.)

3. В коробке лежат 5 мандаринов. Известно, что любые три из них весят в сумме больше 300 г, но меньше 600 г. Докажите, что найдётся мандарин, весящий от 100 до 200 г. Веса мандаринов не обязательно целые.

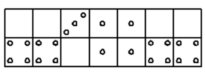
4. Комиссар выложил трупики убитых им комаров в ряд, пересчитал их и понял, что разложить комаров кучками по пять ему не удастся. Тогда он принес еще трупиков и положил по одному между каждыми двумя соседними старыми трупиками. Верно ли, что комиссар, многократно повторяя эту операцию, всегда сможет добиться того, чтобы количество трупиков в ряду делилось на пять?

5. По кругу в произвольном порядке расставили десять чисел от 1 до 10. Докажите, что найдутся четыре подряд стоящих числа, сумма которых не меньше, чем 22.

6. Дракон запер в пещере шестерых мудрецов и сказал: «У меня есть семь колпаков семи цветов радуги. Завтра утром я завяжу вам глаза и надену на каждого по колпаку, а один колпак спрячу. Затем сниму повязки, и вы сможете увидеть колпаки на головах у других, но общаться я вам уже не позволю. После этого все одновременно напишут каждый на своей бумажке цвет спрятанного колпака, и сдадут бумажки мне. Если угадают хотя бы трое, всех отпущу. Если меньше – съем». Как мудрецам заранее договориться действовать, чтобы спастись?

Разумно организованный перебор — 4 июля

1. В коробке лежат костяшки домино (см. рисунок). Как расположены кости? Найдите все варианты.

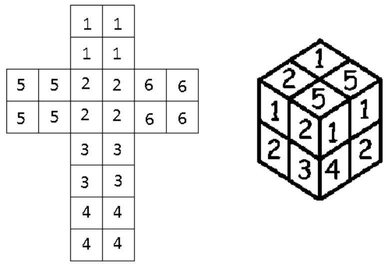


2. За ход к имеющемуся числу можно или прибавить 1, или умножить его на 3. Найдите все способы получить из числа 3 число 20.

3. За ход к имеющемуся числу можно или прибавить 1, или умножить его на 3. За какое наименьшее число операций из числа 1 можно получить число 2013?

4. Все члены конечной последовательности – натуральные числа. Каждый член, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 987. Какое наименьшее число членов может быть в последовательности? Найдите все последовательности из наименьшего числа членов.

5. Вася раскрасил деревянный кубик в шесть цветов, как показано на развёртке. Затем он распилил его на восемь кубиков и составил кубики обратно в виде куба, вся поверхность которого окрашена. Петя смотрит на кубик и видит, конечно, не все грани, а только три, повернутые к нему, как показано на рисунке. Какой кубик лежит в дальнем от него углу?



6. Докажите, что при игре в крестики-нолики на доске 3×3 по обычным правилам тот, кто ходит первым, может никогда не проигрывать.

Чётность — 5 июля

1. (a) Петя утверждает, что число $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$ нечётно. Докажите, что Петя ошибается.

(b) Шестиклассник Петя утверждает, что он разменял 235 тугриков сотней купюр достоинством в 1, 3 и 5 тугриков. Докажите, что Петя ошибается.

(c) Шестиклассник Петя умножил разность двух натуральных чисел на их произведение и получил 235235. Докажите, что Петя ошибается.

2. У Пети есть 12 палочек, длины которых равны первым 12-ти простым числам. Он хочет из всех этих палочек сложить прямоугольник, не ломая палочек. Удастся ли ему это сделать?

3. Можно ли разбить натуральные числа от 1 до 21 на несколько групп так, чтобы в каждой группе было число, равное сумме остальных?

4. Оля, Петя и Вася разобрали карточки, на которых написаны числа от 5 до 11. Оля взяла три карточки, а Петя и Вася – по две карточки. Крутая Оля посмотрела на свои карточки и заявила Васе: «Я точно знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!» Какие карточки у Оли?

5. Выше упомянутый шестиклассник Петя берется представить единицу в виде суммы 1000 дробей, числители которых равны 1, а знаменатели — нечётные числа. Удастся ли это ему?

6. В стране Арагонии жили 100 рыцарей, 99 принцесс и 101 дракон. Рыцари убивают драконов, драконы едят принцесс, а принцессы изводят до смерти рыцарей. Древнее заклятие запрещает убивать того, кто сам погубил нечётное число других жителей. Сейчас в Арагонии остался всего один житель. Кто это?

7. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 20 так расставить в вершинах и серединах ребер куба, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

Неразлучные пары **5 июля**

Упражнения

1. Встретились два пастуха: у одного стадо черных баранов, а у другого стадо белых. Как им узнать у кого больше баранов (считать пастухи не умеют)?

2. На окружности отмечено 2000 синих точек и одна красная точка.

(a) Чего больше – треугольников с вершинами в синих точках или четырёхугольников, у которых одна вершина красная, а остальные три синие?

(b) Чего больше – многоугольников с вершинами только в синих точках, или остальных многоугольников?

3. Хромой король умеет ходить только вверх, вправо и вправо-вверх. Каких путей хромого короля больше: из **a1** в **h8** или из **a1** в **h7**?

4. (a) Среди номеров билетов от 000000 до 999999 каких больше: тех, где каждая цифра больше предыдущей, или тех, где каждая цифра меньше предыдущей?

(b) Каких чисел среди шестизначных больше: тех, где каждая цифра больше предыдущей, или тех, где каждая цифра меньше предыдущей?

5. Каких натуральных пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых первая и вторая цифра – не пятёрки?

6. Докажите, что количество способов разбить прямоугольник $m \times n$ на уголки из трех клеток четно.

7. На двух параллельных прямых отметили точки – на первой 6, на второй 15 и провели все соединяющие их отрезки. Чего получилось больше: четырехугольников с вершинами в этих точках, или точек пересечения проведенных отрезков?

8. Докажите, что среди чисел, меньших 10000, поровну чисел с суммой цифр 14 и с суммой цифр 22.

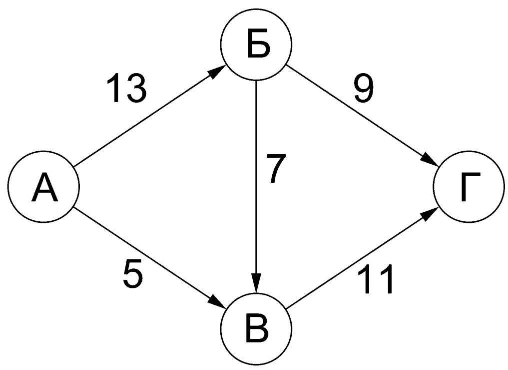
9. Чётно или нечётно количество способов разбить квадрат на доминошки 1×2?

10. Каких пятизначных натуральных чисел с суммой цифр, равной 37, больше: четных или нечетных?

11. Назовём словом любую последовательность букв. Докажите, что количество слов длины 2013, состоящих из букв З, Ю, Е и Р, содержащих последовательность букв ЗЮЗЕР, равно количеству слов длины 2013, состоящих из букв З, Ю, Е и Р, содержащих последовательность букв ЗЮРЕР.

Разнобой–1 5 июля

1. Система дорог некоторой страны показана на рисунке. Число около стрелки обозначает количество способов добраться из начала стрелки в конец. Сколькими способами Егор может добраться из города А в город Г?



2. По кругу стоят Егоры и девочки, всего 237 человек.

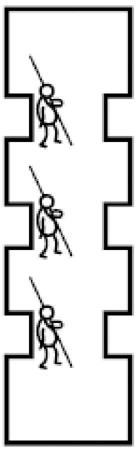
(a) Докажите, что найдутся два человека одного пола, стоящие рядом.

(b) Докажите, что найдутся два человека одного пола, между которыми ровно два человека.

(c) Решите пункт b для 239 человек.

3. На контрольной работе по перекрашиванию уже совершеннолетний Егор перекрашивается из красного цвета в жёлтый, из жёлтого – в зелёный, из зелёного – в синий, из синего – в фиолетовый, из фиолетового – опять в красный. Егор перекрасился 2009 раз и стал из зелёного фиолетовым. Известно, что он допустил одну ошибку: покраснел, в момент, когда должен был приобрести другой цвет. Какого цвета он был перед этим покраснением?

4. Егор решил запереть комара в прямом коридоре, разделённом тремя проходами на четыре комнаты, причём в каждом проходе, облокотившись на одну из стен, стоит толстый усталый стражник. Каждый раз, когда комар перелетает из одной комнаты в другую, стражник переходит к противоположной стене и облокачивается на нее. Если все стражники облокотятся на одну стену, она не выдержит и рухнет, а комар вылетит на свободу. Может ли Егор изначально так прислонить стражников и разместить комара, чтобы он никогда не смог выбраться?



Делимость–1 — 6 июля

1. С вечернего чая идёт стройная колонна шестиклассников. У каждого пряники: в одном кармане в три раза больше, чем в другом. Шестиклассник Петя утверждает, что всего у них ровно 2013 пряников. Докажите, что Петя ошибается.

2. Можно ли монетами в 14 и 35 шиллингов заплатить без сдачи сумму в 2013 шиллингов?

3. Петя написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нём все цифры на буквы, причём одинаковые цифры – на одинаковые буквы, разные – на разные. В итоге у него получилось АБ·ВГ=ДДЕЕ. Докажите, что он где-то ошибся.

Определение. Целое число a *делится* на целое ненулевое число b, если существует такое целое число k, что $a = bk$. В таком случае число b называется делителем числа a, число a называется кратным числу b. Обозначение: $a \,\vdots\, b$, $b|a$.

4. **(a)** $a + 1$ делится на 3. Докажите, что $4 + 7a$ делится на 3.

(b) $2 + a$ и $35 - b$ делятся на 11. Докажите, что $a + b$ делится на 11.

5. Докажите, что если сумма

(a) любых двух из трёх чисел делится на 3, то и сумма всех трёх чисел делится на 3.

(b) любых трёх из четырёх чисел делится на 4, то и каждое число делится на 4.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ.

1) Любое натуральное число, большее 1, можно разложить на простые множители.

2) Это разложение единственно с точностью до перестановок множителей.

6. Перечислите все делители чисел: **(a)** $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$; **(b)** 1001.

7. Представьте число 111 в виде суммы нескольких натуральных чисел (не обязательно различных) так, чтобы произведение этих чисел также было бы равно 111.

8. **(a)** Докажите, что произведение двух последовательных целых чисел делится на 2.

(b) трёх – на 3!

(c) четырёх – на 4!

(d) пяти – на 5!

Для самостоятельного решения

9. Можно ли расставить по кругу семь натуральных чисел так, чтобы любые два соседних числа имели общий делитель, больший 1, а любые два не соседних числа были взаимно просты?

10. Назовём дробь актуальной, если сумма её числителя и знаменателя равна 100. Всякую ли дробь можно выразить через актуальные с помощью сложения и вычитания?

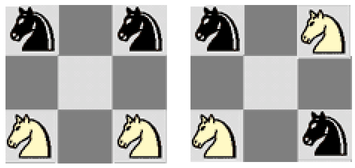
11. Можно ли расставить по кругу 11 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

О пользе схем — 6 июля

1. **(a)** В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр названий этих городов, делится на 3. Назовите все города, в которые можно добраться из города 1.

(b) Та же задача, но города соединены, если из их номеров можно составить число, кратное 7.

(c) Та же задача, но теперь кратное 8.



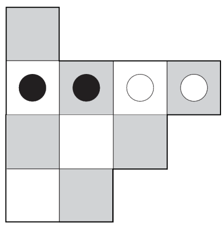
2. Кони стоят так, как показано на левом рисунке. Ходы происходят по шахматным правилам. Могут ли через несколько ходов кони встать так, как показано на правом рисунке?

3. Можно ли расставить числа $1, 2, \ldots, 8, 9$ по кругу так, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

4. Ребята играют на музыкальных инструментах: Петя – на пианино и гитаре, Вова – на гитаре и баяне, Таня – на скрипке и виолончели, Дима – на контрабасе и трубе, Лена – на пианино и баяне, Сергей – на скрипке и трубе, Света – на виолончели и контрабасе. Сколькими способами можно раздать ребятам по одному инструменту (все инструменты – разные) так, чтобы каждый умел играть на полученном инструменте?

5. В приходе графства Липшир 20 усадеб. И в этом приходе любые две дороги имеют общий конец. Докажите, что найдутся 18 усадеб, никакие две из которых не соединены дорогой.

Для самостоятельного решения



6. На куске шахматной доски (см. рисунок) расположены два белых и два черных коня. Ходы происходят по шахматным правилам. Могут ли через несколько ходов белые и чёрные кони поменяться местами?

7. От каждой городской СЭС на совещание было приглашено по пять СЭСовцев. Оказалось, что каждый из приглашенных работал в двух СЭС, поэтому на совещании представлял обе СЭС. Кроме того, для любых двух СЭС города среди участников совещания был единственный СЭСовец, который в них работал. Сколько СЭСовцев принимало участие в совещании?

8. В одной стране из каждого города выходит не более трёх дорог. При этом из каждого города можно добраться до любого другого не более чем с одной пересадкой. Каково наибольшее возможное число городов в этой стране?

1. Сколько есть двузначных чисел, в которых обе цифры одинаковой чётности?

2. На доске написаны 7 существительных, 10 прилагательных и 5 глаголов. Хорошее предложение состоит из 3 слов с доски, по одному каждой части речи. Сколько всего можно составить хороших предложений?

3. Игральный кубик бросают 5 раз и каждый раз записывают, сколько очков выпало. Сколько всего возможно различных записей?

4. Сколько есть пятизначных чисел, у которых все цифры чётны?

5. Сколько пятизначных чисел не делятся на 5?

6. Сколько есть 6-значных чисел, у которых не более одной чётной цифры?

7. Сколько слов в русском языке (где 33 буквы) состоят из не более чем 4 букв?

8. Игральный кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестёрка. Сколько их?

9. Просыпаясь, Игорь Соломонович выбирает одно из 500 своих любимых настроений на весь день. За обедом Игорь Соломонович начал неспешно проходить к столу преподавателей М6. Дети сразу почувствовали настроение Игоря Соломоновича и решили поскорее сообщить о нём своим преподавателям. Для этого они пользуются заранее придуманной системой шифрованных сообщений: каждый из агентов контрразведки отряда М6 кладёт вилку либо в компот, либо в суп. Какое наименьшее количество детей должно быть в контрразведке, чтобы вне зависимости от настроения Игоря Соломоновича точно передать преподавателям его настроение?

10. Сколько есть семизначных чисел, в записи которых нет ни цифры 1, ни цифры 2?

Для самостоятельного решения

11. Агенты контрразведки, поредевшей с прошлого раза до 6 человек, решили усовершенствовать систему шифрованных сообщений. Теперь они встают в ряд, после чего каждый из них поворачивается на 0°, 90°, 180° или 270° градусов против часовой стрелки. Сообщение считается корректным, если первый агент в ряду повернётся на 90° градусов, а любые два соседних агента повернутся на разные углы. Сколько настроений Игоря Соломоновича сможет теперь закодировать контрразведка?

12. Каких 7-значных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?

13. **(a)** Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черную и белую ладью, чтобы они не били друг друга? А если ладьи обе белые?

(b) Та же задача, но для королей.

14. Сколько существует 9-значных чисел, сумма цифр которых чётна?

Одинаковые задачи — 7 июля

Рассмотрим следующую пару задач:

1. В Мисс и Мистер ЛМШ от М6 захотели участвовать 6 мальчиков и 6 девочек. Сколькими способами можно выбрать пару, которая представляет отряд?

2. Сколькими способами можно поставить ладью на доску 6×6?

В каком-то смысле эти задачи – *"одинаковые"*.

Не решая приведённых ниже задач, разбейте их на группы "одинаковых".

1. Есть 36 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их 36 девочкам (каждой по одной конфете)?

2. В "Киллере" участвуют Леонид Михайлович и еще 36 человек. Сколькими способами может Егор Вадимович приписать Леониду Михайловичу жертву, а также человека, который за ним охотится?

3. 36 мальчиков и 36 девочек пришли на бал. Сколькими способами они могут разбиться на пары во время обязательного вальса?

4. Сколько существует способов расставить 36 человек в шеренгу?

5. Сколько в сумме сторон и диагоналей у 36-угольника?

6. На прямой отмечены 36 точек. Сколько существует отрезков с концами в этих точках?

7. Савва нарисовал у себя в тетрадке 36 точек и решил нарисовать одну стрелочку с концами в этих точках. Сколько у него есть способов это сделать?

8. Имеется 34 ёжика и 2 дикобраза. Сколько существует способов отправить по одному зверьку в 36 зоопарков?

9. Сколькими способами можно поставить на доске 6×6 две белых ладьи?

10. Сколькими способами можно на доске 36×36 расставить 36 одинаковых ладей, не бьющих друг друга?

11. Сколькими способами можно расставить на доске 6×6 числа от 1 до 36?

Ландшафтный дизайн при помощи козы — 7 июля

Коза – животное прожорливое. Она ест всю траву, до которой может дотянуться. Поэтому козу держат на привязи. Прожорливость козы издревле используется в ландшафтном дизайне.

1. Нарисуйте участок луга, который выест коза, привязанная веревкой

(a) к одиноко стоящему на лугу колышку;

(b) к натянутой между двумя колышками веревке, вдоль которой свободно передвигается еще одна веревка?

Испокон веков козу привязывают только комбинациями описанных выше способов. Общеизвестно, что коза - животное бесконечно хитрое: она в верёвках никогда не путается, ловко отодвигая их копытцами и поддевая рогами. . .

2. Как привязать козу, чтобы она выела:

(a) полукруг;

(b) квадрат;

(c) прямоугольник размером 7×17;

(d) правильный треугольник;

(e) стрелку на рисунке;

(f) докажите, что коза не сможет выесть звёздочку на рисунке;

(g) произвольный выпуклый пятиугольник.

3. Петрович привязал к себе козу верёвкой длины 1 метр, и ходит по контуру прямоугольника 3?4. Какую фигуру выест коза?

4. На плоскости есть две конкурирующие козы – Машка и Наташка. Машка съедает те травинки, которые находится ближе к ней, чем к Наташке. Какую фигуру выест Машка?

Для самостоятельного решения

5. Как привязать козу, чтобы она выела фигуру на рисунке справа?

6. Три конкурирующие козы – Машка, Наташка и Изабелла – образуют **(a)** правильный; **(b)** произвольный треугольник. Машка съедает те травинки, которые находится ближе к ней, чем к Наташке или Изабелле. Нарисуйте фигуру, выедаемую Машкой.

7. Государственная Дума приняла закон, по которому коза имеет право есть травинку только в том случае, когда все веревки, которыми она привязана, находятся в натянутом состоянии. Как привязать козу, чтобы она выела произвольный выпуклый многоугольник?

Два игрока по очереди ломают друг другу ноги.
Проигрывает тот, кто не может ходить...

Замечание. Пусть в игре проигрывает тот, кто не может сделать ход. Тогда если игрок X играет так, что у него всегда есть возможность ответить на ход соперника, то он *не проигрывает*.

1. Дана доска 9×9. Двое по очереди выставляют на нее королей так, чтоб они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

2. Двое по очереди ставят слонов на шахматную доску. Очередным ходом нужно побить хотя бы одну небитую клетку. Фигура бьёт и ту клетку, на которой стоит. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

3. На доске написано число. Двое по очереди делят его на какой-либо простой делитель и результат записывают вместо старого числа. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

4. На плоскости отмечено 100 точек, являющихся вершинами правильного 100-угольника. Двое играют в следующую игру: каждый по очереди соединяет две вершины многоугольника отрезком, соблюдая следующие правила: нельзя соединять две точки, хотя бы одна из которых уже соединена с чем-то, и нельзя пересекать уже проведённые отрезки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода согласно этим правилам. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Есть кучка n камней. За ход можно разделить любую непустую кучку на две непустые кучки. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6. По линиям сетки обвели контур прямоугольника $3 \times n$, n чётно. Двое играют в игру. Они по очереди проводят одну из ненарисованных ранее линий сетки внутри прямоугольника. Проигрывает тот, после чьего хода образуется клетка 1×1 с четырьмя нарисованными сторонами. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Двое играют на доске 8×8, закрашивая её клетки – каждый в свой цвет (красный и синий для первого и второго игрока соответственно). В начальный момент времени a1 закрашена в красный цвет, h8 – в синий. За ход игрок красит одну из незакрашенных клеток, соседних (по вертикали или горизонтали) с последней закрашенной его цветом, в свой цвет - «ведёт змейку». Красить повторно или перекрашивать закрашенные противником нельзя! Кто не может сделать ход – проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Петя и Вася выписывают 12-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Вася. Докажите, что какие бы цифры он не писал, Петя всегда сможет добиться, чтобы получившееся число делилось на 9.

9. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

10. У ромашки а) 12 лепестков; б) 11 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два *рядом растущих* лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Для самостоятельного решения

11. По кругу расставлены 50 фишек. Дима и Саша по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки вначале не стояли рядом, выигрывает Дима, а в противном случае выигрывает Саша. Дима ходит первым. Кто выиграет при правильной игре?

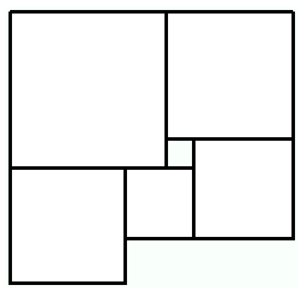
12. Двое игроков по очереди выставляют на доску 65×65 по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

Ввод переменной — 9 июля

1. Задумайте любое число, не равное нулю. Прибавьте к нему 3. Результат умножьте на 4, потом прибавьте задуманное число, умножьте на 2, вычтите 24 и разделите на задуманное число. У Вас получилось 10. В чём секрет?

2. «Во время игры в шахматы у меня осталось фигур в три раза меньше, чем у соперника, и в шесть раз меньше, чем свободных клеток на доске, но все равно я выиграл эту партию!» — сказал Винтик Шпунтику. «А у меня, в одной из партий, фигур осталось в пять раз меньше, чем у соперника, и в десять раз меньше, чем свободных клеток на доске, и всё-таки я сумел победить!» — в свою очередь рассказал Шпунтик. Чьему рассказу можно верить?

3. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна 1.



4. Семеро гномов добывали драгоценные камни. Возвращаясь домой, каждый из них дарил некоторое количество камней из своего рюкзака Белоснежке, а затем оставшуюся часть относил в сокровищницу. Причём каждый день Белоснежка получала в сумме одно и тоже количество камней. Через 7 дней в сокровищнице оказалось 2009 камней. Если бы каждый гном дарил Белоснежке на 1 камень в день меньше, то у нее скопилась бы ровно 1/7 часть всей добычи. Сколько камней в день получала Белоснежка?

5. В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждой строке кроме первой на 1 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце кроме первого в 4 раза больше, чем в предыдущем. Докажите, что сумма чисел во второй строке делится на 7.

6. Прямоугольник, у которого одна из сторон втрое длиннее другой, разрезали на одинаковые квадратики. Оказалось, что сумма их периметров в 6 раз больше периметра исходного прямоугольника. Сколько могло получиться квадратиков?

7. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не 1/2 очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение - не 0 очков, а -1, ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

8. По окружности, чередуясь, стоят 24 чёрных и 24 белых ненулевых числа. Каждое чёрное число равно сумме своих соседей, а каждое белое число равно произведению своих соседей. Чему равна сумма всех 48 чисел?

Комбинаторика–2 — 10 июля

1. а) Сколькими способами можно выстроить в колонну трёх девочек?

б) Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

Определение. Количество способов выстроить в ряд n *различных* предметов называется *числом перестановок* n *элементов*.

2. Сколькими способами можно выстроить 10 человек в колонну, среди которых Маша и Наташа, если

а) Маша должна стоять впереди Наташи;

б) Маша и Наташа должны стоять рядом.

3. а) Сколькими способами из 20 человек можно выбрать начальника и заместителя?

б) Перед чемпионатом, где было 16 участников, был проведён опрос, где требовалось назвать обладателей золотой, серебряной и бронзовой медалей. Сколько есть вариантов прогноза?

Определение. *Числом размещений из* n *элементов по* k называется количество способов выложить в ряд k разных предметов из данных n. Оно обозначается A_n^k.

4. Докажите, что $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ (всего k сомножителей).

5. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

6. Сколькими способами на шахматную доску можно расставить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

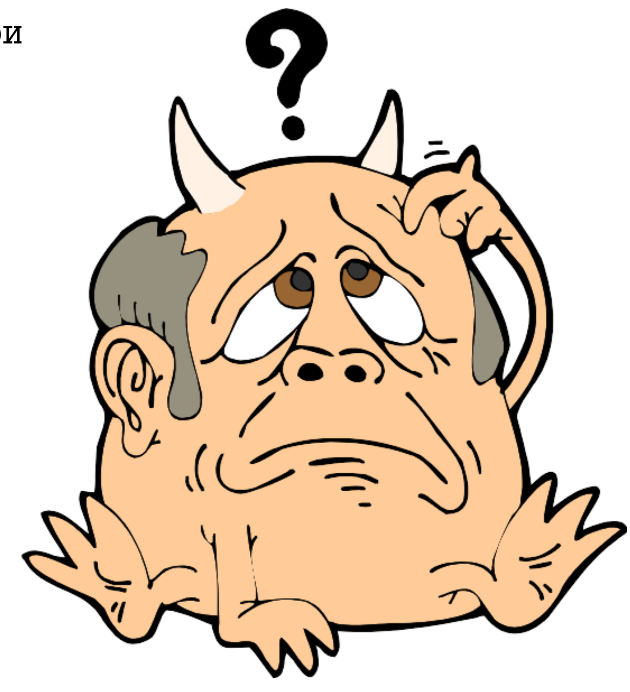
7. Имеется 10 различных чашечек и 8 различных ложечек. Требуется накрыть стол на пять персон (каждая персона нуждается в чашечке и ложечке). Сколькими способами это можно сделать?

Для самостоятельного решения

8. Сколькими способами 10 человек могут образовать цикл в «Киллере»?

9. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

10. Сколькими способами можно переставить буквы в слове ОГОРОД так, чтобы три буквы О не шли подряд?

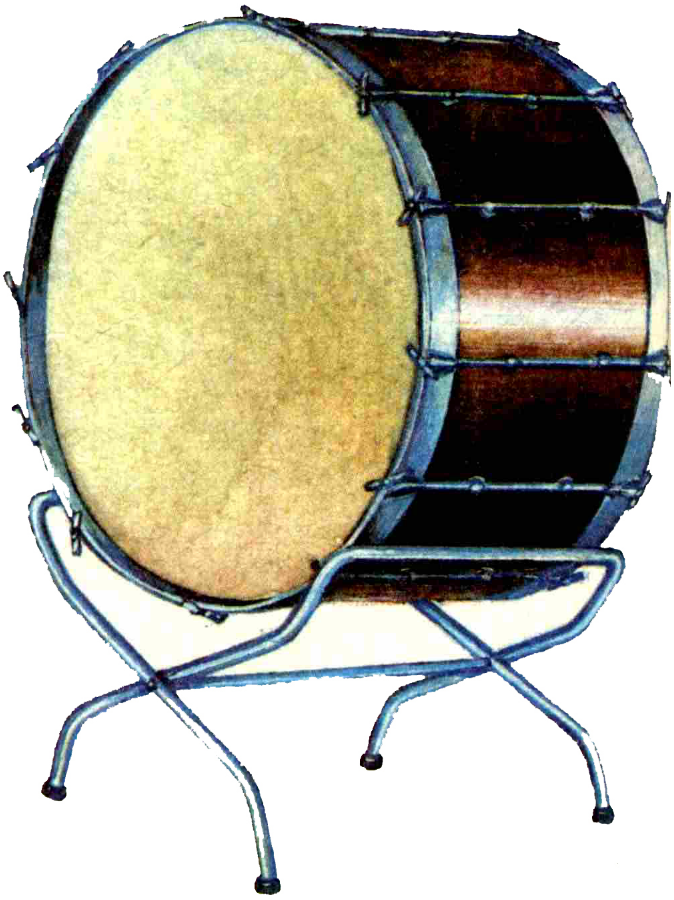


1. Найдите наименьшее натуральное число, записанное с помощью двоек и троек, у которого сумма и произведение цифр делятся на 6.

2. Рассмотрим города России и Украины и только те дороги, которые соединяют русские города с украинскими. Допустим, что из каждого русского города можно проехать в любой русский, а из каждого украинского города – в любой украинский. Докажите, что тогда из любого русского города можно проехать в любой украинский.

3. В 1988 г. телевидение Анчурии начало демонстрацию телесериала «По колено в слезах», причём в каждом году начиная с 1989 г. было показано либо на 40% больше, либо на 40% меньше серий, чем в предыдущем. Чтобы не наносить слишком большого ущерба экономике страны, ежедневно показывали не больше двух серий. При просмотре 1230-й серии зрители были опечалены ссорой Марии Кончиты Лопез и дона Педро, но ровно через 2 года, в тот же день того же месяца, в 1992 г., порадовались их счастливому примирению в последней серии. Сколько серий содержал этот телесериал?

4. На круглом барабане 32 вертикальные полосы, и в каждую полосу нужно записать пятизначное число из цифр 1 и 2 так, чтобы все числа были различными и любые два соседних различались ровно в одном разряде. Как это сделать?



1. Блоха умеет прыгать по прямой либо на 1 влево, либо на 1 вправо. Она начала своё путешествие из точки A и в некоторый момент вернулась в неё. Докажите, что она совершила чётное число прыжков.

2. Лягушонок живёт на одном берегу болота, а комары, которых он ест, живут на другом берегу. Однажды лягушонок несколько раз сходил на обед и вернулся домой, после чего заявил, что пересек болото 2013 раз. Могло ли такое быть?

3. Блоха умеет прыгать по плоскости либо на 1 влево, либо на 1 вправо, либо на 1 вверх, либо на 1 вниз. Она начала своё путешествие из точки A и в некоторый момент вернулась в неё. Докажите, что она совершила чётное число прыжков.

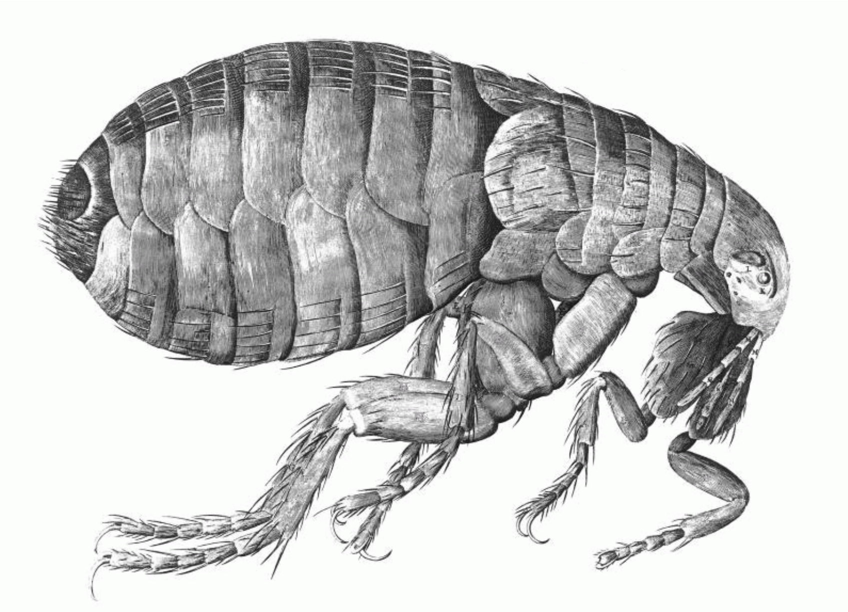
4. Имеется замкнутая ломаная из 2013 звеньев (для простоты пусть она ограничивает некоторый многоугольник). Может ли некоторая прямая пересечь каждое звено этой ломаной ровно один раз?

Для самостоятельного решения

5. Может ли конь обойти шахматную доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, начав свой путь в клетке **a1** и закончив свой путь в клетке **b2**?

6. Король обошёл шахматную доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернулся на исходное поле. Докажите, что он совершил чётное число ходов по диагонали.

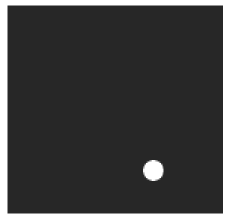
7. Можно ли расставить 2013 чисел по кругу так, чтобы любое число было либо больше, либо меньше обоих своих соседей?



Блоха — ха-ха...

1. Есть двусторонний штамп в форме стрелки. Его перекатывают вдоль прямой, отражая относительно начала или конца стрелки. Какой узор получится в результате всевозможных таких действий?

2. На большом листе бумаги лежит пластмассовый квадрат с дыркой (см. рисунок). Квадрат можно перекатывать через ребро, и после этого надо закрасить бумагу в том месте, где дырка. Какой узор получится, если перекатить квадрат всеми возможными способами?



3. (a) Теперь у нас штамп не такой, как в задаче 1, а в форме стрелки длиной $1/6$ части окружности, и перегибаем мы его так, чтобы он всё время лежал на окружности. Какой узор получится?

(b) Та же задача, но для штампа длиной $1/5$ часть окружности.

4. В какую лунку попадет шар в бильярде 4×5 с четырьмя угловыми лузами, если его пустить под углом 45° из левого нижнего угла?

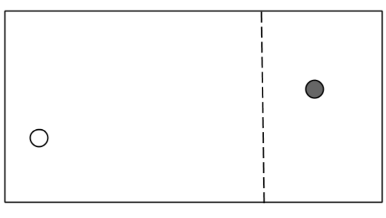
При падении света на зеркальную поверхность, а также при отражении бильярдного шара от стенки всегда действует правило **«Угол падения равен углу отражения»**.

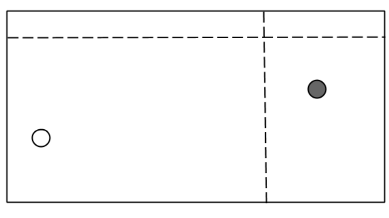
5. В прямоугольном бильярде на произвольных местах лежат белый и черный шары. Как стукнуть по белом шару, чтобы он попал в черный, после того как он отразится от указанной стенки ровно один раз?

6. На плоскости есть зеркальная прямая. Из точки плоскости выпустили сразу несколько лучей света, и все они отразились от этого зеркала. Докажите, что все прямые, вдоль которых идут отраженные лучи света, пересекаются в одной и той же точке.

7. (a) Толя прицелился и ударил по белому шару так, чтобы он столкнулся с чёрным. Но путь шару перекрыла неожиданно всплывшая перегородка, показанная на левом рисунке пунктиром. Нарисуйте траекторию белого шара до первого удара с бортиком стола.

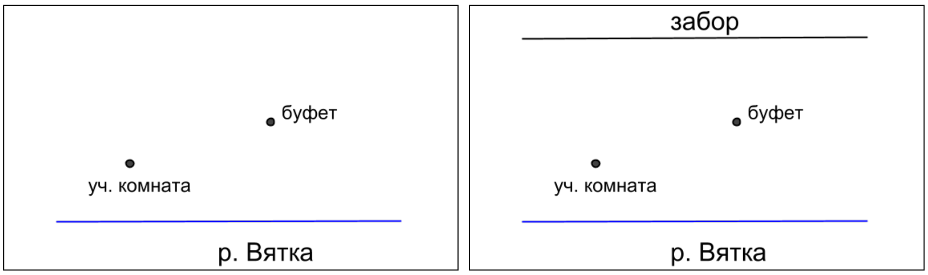
(b) Тот же вопрос для двух перегородок (см. рисунок справа).





8. (a) ЛМШонку Андрею хочется на перемене сходить из учебной аудитории в буфет, и при этом обязательно сбегать по дороге к берегу Вятки, чтобы бросить в реку шишку. Помогите ему найти кратчайший путь (см. рисунок слева).

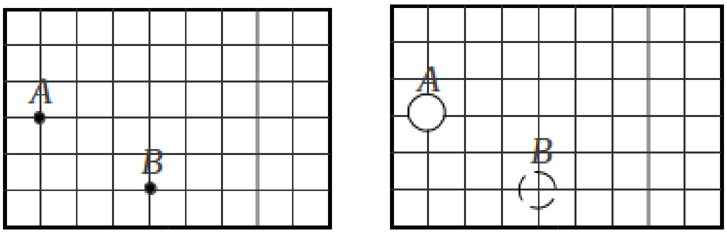
(b) На следующей перемене Андрей решил сделать два важных дела по дороге в буфет: сначала бросить шишку в реку, а затем расписаться на заборе, который огораживает лагерь с другой стороны. Помогите ему найти кратчайший путь (см. рисунок справа).

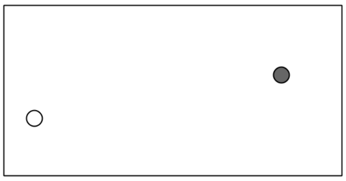


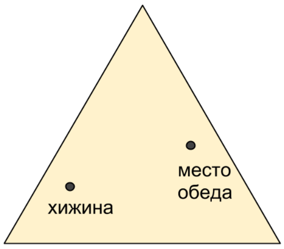
Для самостоятельного решения

9. **(a)** Укажите, где будет находиться бильярдный шар через 5 секунд, если за одну секунду он переместился из положения A в B и известно, что за эту секунду шар не касался бортов. Скорость шара постоянна.

(b) А если вместо бильярдного шара взяли огромный шарище радиуса полклеточки?







10. **(a)** На бильярдном столе как-то расположены два шара – чёрный и белый. Как попасть чёрным шаром в белый, чтобы он отразился сначала от нижней стенки, а затем – от верхней (для педантов: отрезок, соединяющий шары, не вертикален).

(b) Та же задача, но нужно, чтобы чёрный шар отразился относительно правой и верхней стенок в любом порядке.

(c) Можно ли в предыдущем пункте попасть чёрным шаром в белый в обоих порядках отражения: сначала правая, потом верхняя стенки и сначала верхняя, потом – правая?

11. Остров Невезения имеет форму равностороннего треугольника. Робинзон хочет придумать маршрут от хижины до места обеда, но только так, чтобы по дороге он смог зайти и проверить все три побережья (не приближается ли туда корабль). Помогите ему найти кратчайший маршрут, удовлетворяющий всем условиям.

1. Над африканской деревней сгустились тучи, и ровно в полдень полил дождь. После 3 суток непрерывного дождя племя спросило колдуна, когда все это кончится. Тот сказал: «Ровно через 300 часов после начала дождя тучи развеются, и выглянет солнце». Заслуживает ли колдун доверия?

Определение. Пусть a – целое число, b – натуральное. Тогда существует такие целые числа q и r, что $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$. Числа q и r определены однозначно для каждых a и b. Число r называется *остатком* при делении числа a на число b, а число q — *неполным частным*.

Упражнения. Разделите с остатком **(a)** 1001 на 9; **(b)** 9 на 1001; **(c)** 0 на 37; **(d)** -17 на 5.

Замечание. Умные люди не пишут $7 : 2 = 3$ (ост.1). Умные люди пишут $7 = 3 \cdot 2 + 1$.

2. Какие из утверждений верны:

(a) если число при делении на 8 дает остаток 3, то при делении на 4 оно также дает остаток 3;

(b) если число при делении на 4 дает остаток 3, то при делении на 8 оно также дает остаток 3.

3. Рубрика *Рабочая тетрадь*. Если число при делении...

(a) на 15 дает остаток 7, то при делении на 5 остаток равен ......;

(b) на 15 дает остаток 3, то при делении на 9 остаток равен ......;

(c) на 5 дает остаток 1, то при делении на 3 остаток равен ......

4. **(a)** Докажите, что если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c, то их разность делится на c.

(b) Докажите, что если разность чисел a и b делится на c, то они дают одинаковые остатки при делении на c.

5. Докажите, что среди любых 2014 чисел можно найти 2 числа, разность которых делится на 2013.

6. Найдите последнюю цифру числа 2^{50}.

7. Найдите остаток от деления числа $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 \cdot 1004 - 24$ на 25.

8. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 для любого целого n.

9. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2013. Какие числа остались на доске?

Для самостоятельного решения

10. Докажите, что $n^2 + 2$ не делится на 5 ни при каком целом n.

11. Можно ли целые числа от 1 до 200 расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы сумма любых десяти подряд делилась на 10?

12. Камни лежат в трех кучках: в одной – 51 камень, в другой – 49 камней, а в третьей – 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из четного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

13. Когда ковбой Джо зашел в казино, весь его капитал состоял из нескольких однодолларовых купюр. Он сыграл три раза, ставя каждый раз все имеющиеся у него к этому моменту деньги. В рулетку он выиграл вдвое больше, чем поставил, и еще один доллар. В покер он выиграл впятеро больше, чем поставил, и еще один доллар. В Блэк Джек он выиграл втрое больше, чем поставил, и еще один доллар. В итоге его капитал составил 346 долларов. Сколько денег было у него вначале?

Матбой–междусобой — 12 июля

1. Вася задумал два натуральных числа. Далее он сложил их сумму, произведение, разность и частное. Могло ли у него получится 2013?

2. В Пустоземье живут три племени: эльфы, гоблины и хоббиты. Эльф всегда говорит только правду, гоблин всегда лжёт, а хоббит через раз говорит то правду, то ложь. Однажды за круглым столом пировало несколько пустоземцев, и один из них сказал, указав на своего левого соседа: «Он - хоббит». Сосед сказал: «Мой правый сосед солгал». В точности ту же фразу затем повторил его левый сосед, потом её же произнёс следующий по кругу, и так они говорили «Мой правый сосед солгал» много-много кругов, да и сейчас ещё, возможно, говорят. Определите, из каких племён были пирующие, если известно, что за столом сидело десять жителей Пустоземья.

3. В стране было 2013 городов. Из каждого города выходили 4 дороги. Государственная Дума издала закон, согласно которому по каждой дороге можно ездить только в одну сторону. Докажите, что найдётся город, у которого стало чётное число входящих дорог.

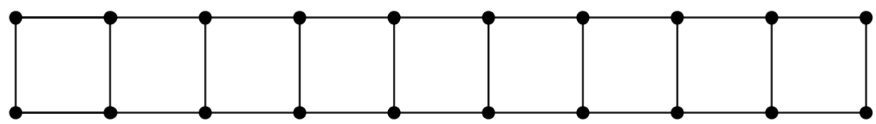
4. В корпусе 10 жилых комнат. Жители этих комнат просыпаются по очереди. Если дверь их комнаты на месте, то они снимают дверь какой-то другой из этих комнат и уносят ее на склад. Если же дверь их комнаты унесена, то они забирают со склада любую дверь и вешают ее на место своей. Какое наибольшее количество дверей могло оказаться на складе после того, как все проснулись?

5. На доске размером $30 \times n$ клеток расставлено несколько ладей таким образом, что каждая ладья бьёт ровно одну другую. При этом в каждой вертикали и в каждой горизонтали стоит как минимум одна ладья. Докажите, что n делится на 3.

6. Разбойники Габ и Рик делят кучу из 666 монет. Сначала Рик раскладывает кучу на 7 непустых кучек с разным числом монет. Затем Габ выбирает четыре самые меньшие кучки и отдает Рику, а остальное забирает себе. Какое наибольшее число монет заведомо сможет получить Габ?

7. В 15-литровые вёдра налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается перелить из любого ведра в другое вдвое больше воды, чем в нём уже есть. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одном ведре?

8. На карте (см. рисунок) точками отмечены города, некоторые соединены дорогами. Играют двое. За ход каждый игрок захватывает один город, который не был никем захвачен ранее. Нельзя захватывать город, соединённый дорогой с городом противника. Проигрывает тот, кто не сможет сделать свой ход по правилам игры. Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?



Графы–2 — 14 июля

Определение. Назовем *графом* множество *вершин*, некоторые пары из которых соединены *ребрами*.

Замечание. Вершина может быть не соединена ни с какой другой вершиной ребром. Любое ребро начинается и заканчивается вершиной. Две вершины могут соединяться несколькими рёбрами.

1. В государстве 50 городов. Из каждого города выходит 7 дорог. Сколько всего дорог в этом государстве?

2. Сколько всего рёбер в *графе короля*?

Теорема. Число ребер в графе равно половине от суммы степеней вершин.

3. В компании 15 человек. Каждый сделал по 5 рукопожатий. Сколько всего было рукопожатий?

4. В компании 20 человек, некоторые пожали руки друг другу. Может ли быть так, что 10 человек пожали руки 4 раза, 3 человека – 6 раз, 4 человека – 1 раз и 3 человека – 5 раз?

Лемма о рукопожатиях. В любом графе число нечётных вершин чётно.

5. Юноши и девушки пожимали друг другу руки. Каждый юноша пожал 13 рук, а каждая девушка – 10 рук. Докажите, что было не менее 100 рукопожатий.

6. На шахматной доске стоит несколько коней. Каждый конь на белом поле бьет 3 коня, а каждый конь на черном поле бьет 4 коня. Докажите, что общее число коней кратно семи.

7. В стране из каждого города, кроме Столицы и город Дальний, выходит ровно четыре дороги. Из Столицы выходит 11 дорог, а из Дальнего одна. Докажите, что по дорогам можно добраться из Столицы в Дальний.

Для самостоятельного решения

8. На спартакиаде проводились соревнования по пяти видам спорта. Каждый из 30 шестиклассников принял участие в соревнованиях либо по одному, либо по трём видам спорта, а в каждом из видов число принимавших участие было 15 или 25. Докажите, что такого быть не могло.

9. Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек? А если девочек 10, а мальчиков 9?

10. В стране 10 городов. Любые два города соединены дорогой, если и только если из них выходит одинаковое число дорог. Может ли число дорог равняться 20?

Для тех, кто решил всё предыдущее

11. Каждый депутат имеет хотя бы одного врага, любая вражда взаимна. Докажите, что депутатов можно разбить на две фракции так, чтобы каждый имел врага в противоположной фракции.

12. У каждого марсианина три руки и несколько антенн. Каждый марсианин взял за руки трёх других (так что все руки оказались заняты). Оказалось, что у любых двух из марсиан, взявшихся за руки, количество антенн отличается ровно в 6 раз. Может ли суммарное количество антенн у марсиан быть ровно 2013?

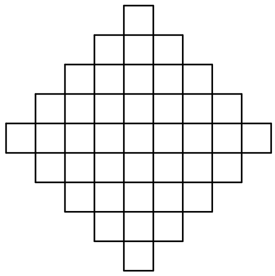
13. Каждый из 102 человек имеет не менее 68 знакомых. Докажите, что найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

1. Сумма нескольких различных натуральных чисел равна 50. Каково наибольшее число слагаемых?

2. В ряд выложены несколько апельсинов, мандаринов, яблок и бананов. Оказалось, что рядом с фруктами каждого вида можно найти фрукт любого другого вида. Какое наименьшее число фруктов могло быть выложено?

3. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить на шахматной доске, чтобы в любом квадратике 2×2 нашлась хотя бы одна отмеченная клетка?

4. Какое наибольшее число доминошек можно уместить в фигуре на рисунке?



5. Какое наибольшее количество слонов можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

6. Поле для игры в «морской бой» имеет форму квадрата 10×10. На нем стоит один корабль, имеющий форму прямоугольника 1×3. Какое наименьшее количество выстрелов нужно сделать, чтобы ранить корабль?

Для самостоятельного решения

7. Пятачок разливает килограмм мёда по пяти стоящим в ряд безграничным горшочкам. Винни-Пух после этого забирает себе два стоящих рядом горшочка, в которых суммарно налито наибольшее количество мёда. Какое наибольшее количество мёда гарантированно сможет забрать себе Винни-Пух?

8. Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 100 можно выбрать таким образом, чтобы никакие два выбранных не давали в сумме 101?

Для тех, кто решил всё предыдущее

9. В медпункт на медосмотр пришли 10 детей и каждый оставил в коридоре пару тапочек. Все пары тапочек имеют разные размеры. Дети начали уходить из медпункта по одному, одевая любую пару тапочек, в которые они могли влезть (т.е. каждый ребёнок мог надеть пару тапочек, не меньшую, чем его собственные). В какой-то момент обнаружилось, что ни один из оставшихся детей не может найти себе пару тапочек, чтобы уйти. Какое наибольшее число детей могло навечно остаться в медпункте?

10. Какое наименьшее число слонов могут побить все поля шахматной доски (слон бьёт поле, на котором стоит)?

Преимущества десятичной системы не математические, а чисто зоологические. Если бы у нас на руках было не десять пальцев, а восемь, то человечество пользовалось бы восьмеричной системой.

Н.Н. Лузин

1. Найдите все двузначные числа, которые от перестановки своих цифр увеличиваются в 4,5 раза.

2. У Миши чемодан с кодовым замком, но, приехав в лагерь, он от волнения забыл шифр. Помнит только, что это семизначное число, три первые цифры которого одинаковые, остальные четыре цифры также одинаковые. Сумма всех цифр этого шифра — число двузначное, первая цифра которого совпадает с первой цифрой шифра, а последняя — с последней. Помогите Мише открыть чемодан.

3. Из пятизначного числа вычли такое же, но записанное в обратном порядке. Докажите, что получившееся число делится на 11.

4. По окружности в произвольном порядке расставлены цифры от 1 до 9 (каждая — ровно один раз). Начиная с любой цифры, по часовой стрелке прочитываем трёхзначное число. Чему может равняться сумма этих девяти чисел?

5. У некоторого числа зачеркнули последнюю цифру и сложили с исходным, получив в сумме 2013. Найдите все такие числа.

6. Петя и Вася по очереди выписывают цифры шестисотзначного числа (каждый имеет право ставить цифры в любое место). Начинает Петя. Если полученное в итоге число не делится на семь, то выигрывает Петя, иначе выигрывает Вася. Кто выигрывает при правильной игре?

Для самостоятельного решения

7. У шестизначного числа первую цифру перенесли в конец, в результате чего число увеличилось в три раза. Найдите все такие числа.

8. Два числа A и B отличаются только перестановкой цифр. Может ли сумма чисел A и B равняться $\underbrace{99\ldots9}_{999\text{ штук}}$?

9. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 5 и сумма цифр следующего за ним натурального числа тоже делится на 5.

1. Какие утверждения верны, а какие – нет, и почему?

(a) Сегодня лето, или В. А. Шаповалова – негритянка.

(b) Сегодня зима, а В. А. Шаповалова – не негритянка.

2. Сформулируйте отрицания следующих высказываний.

(a) У кошки Мурки четыре лапы, да и у кота Мурзика тоже.

(b) Либо коловратка желбит, либо трумкат не придучит.

(c) Все люди, кроме меня, глупы.

3. Переформулируйте следующие утверждения с использованием слов «любой» («каждый», «всякий») и «существует» («найдётся»).

(a) Не все кошки серы.

(b) Не у всех серых кошек 33 жизни.

(c) Неверно, что не каждый серый кот спит ночью.

(d) Неверно, что из каждых трёх шестиклассников можно выбрать школьника не младше 12 лет.

(e) Никому не запрещается не употреблять двойное отрицание.

4. Переформулируйте, не используя отрицаний:

(a) Неверно, что у меня в кармане больше 10 рублей.

(b) Неверно, что каждая клетка доски покрыта хотя бы одной доминошкой.

(c) Неверно, что среди данных n человек есть такой, который съел на обед больше k мышей.

(d) Неверно, что среди любых n из данных зайцев есть такой, у которого больше k ушей.

(e) Неверно, что среди данных n людей нет людей с одинаковым количеством волос.

(f) Неверно, что в кафе нет двух людей, у которых нет общего знакомого среди присутствующих.

5. Каждый человек на острове – рыцарь или лжец. Мы встретили двух из них: А и В. Определите, кто такие А и В, если А заявил:

(a) «По крайней мере один из нас лжец»;

(b) «Или я лжец, или В рыцарь»?

6. Сформулируйте отрицания следующих предложений, используя слова «любой» («каждый», «всякий») и «существует» («найдётся»):

(a) каждый оболтус желает знать, где сейчас француз;

(b) кто-то из политиков честен;

(c) все политики – люди богатые и нечестные;

(d) нет ни одного бедного и честного политика;

(e) все врут, и никто не спасётся;

(f) среди политиков нет бедных людей, а также и честных тоже;

(g) не все политики продажны, да и богаты тоже не все.

Для самостоятельного решения

7. Бизнес-вумен вывесила в своём бутике четыре рекламных слогана:

(a) Всё дешёвое некрасиво!

(b) Всё некрасивое дёшево!

(c) Всё красивое недёшево!

(d) Не всё красивое дёшево!

Конкурентка заметила, что два лозунга утверждают одно и то же. Какие?

Шестиклассник пристаёт к двум преподавателям и отчаянно надеется получить плюсик в кондуит. Каждый из преподавателей – рыцарь или лжец. Шестиклассник хочет узнать, получит ли он плюсик. Помогите ему!

8. Первая попытка.

A: B – рыцарь, и ты получишь плюсик.

B: A – лжец, и ты получишь плюсик.

9. Вторая попытка.

A: Мы оба лжецы, и ты получишь плюсик.

B: Что правда, то правда.

10. Третья попытка.

A: B – рыцарь, или ты получишь плюсик.

B: A – лжец, или ты получишь плюсик.

11. Долго ли, коротко ли, но наш шестиклассник сумел-таки получить плюсик. Впрочем, радость его была преждевременной. Осталось выбрать, в какую из трёх версий кондуита его ставить: ня мятую бумажку, на залитую кофе бумажку, на склеенную скотчем бумажку. В комнате, куда пришёл за советом шестиклассник, находилось пятеро преподавателей: A, B, C, D и E. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, и все с удовольствием облагодетельствовали шестиклассника советами.

A: Мятая бумажка – правильный кондуит!

B: Конечно же, ставить плюсик надо на залитую кофе бумажку!

C: Совершеннейшая неправда, что A и B – оба лжецы! Наглая клевета!

D: Клянусь: либо A – врун, либо B – честнейший человек!

E: Слушай меня: либо я лжец, либо C и D однотипны (либо оба рыцари, либо оба лжецы)!

На какую бумажку школьнику нужно поставить плюсик?

Задачи к спецкурсу по переливаниям 15 июля

1. Десятивёдерная бочка наполнена керосином. Как разлить его на две равные части, пользуясь пустыми семивёдерной и четырехвёдерной бочкой?

2. Три человека купили сосуд, полностью заполненный 24 унциями бальзама. Позже они приобрели три пустых сосуда объемом 5, 11 и 13 унций. Как они могли бы поделить бальзам на равные части используя эти четыре сосуда?

3. Есть три сосуда 3 л, 4 л и 5 л без делений, кран с водой, раковина и 3 л сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли с помощью переливаний получить 6 л смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде воды и сиропа было поровну?

Комбинаторика–3 16 июля

1. (a) Сколькими способами можно выбрать из 20 человек босса и заместителя?

(b) Сколькими способами можно выбрать из 20 человек двоих дежурных?

2. (a) Из 13 карт выбираем три и выкладываем их в ряд. Сколькими способами это можно сделать?

(b) Есть 13 точек, никакие три не лежат на одной прямой. Сколько имеется треугольников с вершинами в этих точках?

3. В клубе настольных игр у Валентины Александровны участвуют 4 девочки и 8 мальчиков. Для участия в конкурсе нужно выбрать

(a) пять человек;

(b) пять человек, среди которых ровно одна девочка;

(c) пять человек, среди которых должна быть хотя бы одна девочка.

Сколькими способами это можно сделать?

Определение. Количество способов выбрать из n элементов k элементов называется *числом сочетаний из n по k* и обозначается C_n^k.

4. Докажите, что $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

5. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого – 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

6. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на чёрных полях шахматной доски?

7. Лестница имеет 20 ступенек. Отрок взбирается по лестнице прыжками, делая ровно 7 прыжков. Сколькими способами отрок может преодолеть лестницу?

8. (a) 15 человек нужно разбить на баскетбольную, волейбольную и футбольную команды по 5 человек. Сколькими способами это можно сделать?

(b) 15 человек нужно разбить на три футбольные команды по 5 человек. Сколькими способами это можно сделать?

(c) 15 человек нужно разбить на две футбольные и волейбольную команды по 5 человек. Сколькими способами это можно сделать?

9. Сколькими способами тяжело раненная ладья (ходит только вверх или вправо ровно на одно поле) может добраться:

(a) из клетки **a1** в клетку **h8**;

(b) из клетки **a1** в клетку **h8**, не заходя в клетку **c5**.

Для самостоятельного решения

10. В классе n мальчиков и n девочек. На уроке дети должны разбиться на пары. Сколькими способами они могут это сделать, если

(a) в каждой паре должны быть мальчик и девочка;

(b) пары могут быть произвольными?

11. Сколько прямоугольников из клеточек есть на шахматной доске?

Для тех, кто решил всё предыдущее

12. В выпуклом n-угольнике провели все диагонали (а сколько их?), и никакие три не пересеклись в одной внутренней точке. Сколько получилось точек пересечения диагоналей?

13. На полке стоит 20 книг. Сколькими способами можно выбрать 5 из них так, чтобы никакие две не стояли рядом?

Принцип Дирихле — 16 июля

1. Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле купил 21 кролика и рассадил в имеющиеся у него 20 клеток. Докажите, что какие-то два кролика сидят в одной клетке.

2. На Земле живёт 7 миллиардов человек. У каждого на голове не более 140000 волос. Докажите, что: есть два человека **(a)** с одинаковым количеством волос на голове; **(b)** с одинаковым количеством волос на голове, у которых дни рождения в один день.

3. На шахматной доске стоят 33 коня. Докажите, что два из них бьют друг друга.

4. На Марсе пошла мода носить фенечки не только на руках, но и на ногах. Докажите, что среди собравшихся 33 марсиан найдутся двое, которые носят фенечки на одних и тех же конечностях (у марсианина две ноги и три руки, и все разные).

5. В карьере добыли 36 камней. Их веса составляют арифметическую прогрессию: 490 кг, 495 кг, 500 кг,...,665 кг. Можно ли увезти эти камни на семи трёхтонных грузовиках?

6. (a) На доске написано 6 чётных чисел. Докажите, что разность каких-то двух делится на 10.

(b) На доске написано 7 квадратов натуральных чисел. Докажите, что разность каких-то двух делится на 10.

7. Докажите, что в Африке есть две страны, у которых поровну соседей.

Для самостоятельного решения

8. В квадратном ковре со стороной 1 метр моль проела 81 точечную дырку. Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 25 см можно закрыть не менее шести дырок.

9. К празднику зал украсили 50 воздушными шариками. Докажите, что среди них найдутся либо 8 одноцветных, либо 8 попарно различного цвета.

10. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить шахматную доску 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета?

Для тех, кто решил всё предыдущее

11. Доска 6×6 заполнена доминошками 1×2. Докажите, что можно провести горизонтальный или вертикальный разрез доски, не пересекающий ни одной костяшки.

12. 2013 долларов разложили по кошелькам, а кошельки разложили по карманам. Известно, что всего кошельков больше, чем долларов в любом кармане. Верно ли, что карманов больше, чем долларов в каком-нибудь кошельке? (Класть кошельки один в другой не разрешается.)

13. В ряд выписано n натуральных чисел. Докажите, что найдётся несколько подряд идущих, сумма которых делится на n.

Теорема (признаки равноостаточности при делении на степени 2 и 5).

(a) Число при делении на 2 и на 5 даёт такой же остаток, как и его последняя цифра.

(b) Число при делении на 4 и на 25 даёт такой же остаток, как и число, образованное его двумя последними цифрами.

(c) Верны аналогичные признаки при делении на 8 и на 125.

1. Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что предпоследняя цифра квадрата – нечётна.

Теорема (признак равноостаточности при делении на 3 и 9). Число при делении на 3 и на 9 даёт такой же остаток, как и его сумма цифр.

2. Из натурального числа вычли его же, записанное в обратном порядке. Докажите, что полученное число делится на 9.

3. На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?

4. Какой остаток даёт число $10\ldots0$ (n нулей) при делении на 11 при **(a)** чётном; **(b)** нечётном n?

Теорема (признак равноостаточности при делении на 11). Число при делении на 11 даёт такой же остаток, как и его знакопеременная сумма цифр.

5. Докажите, что число $\overline{a_1a_2\ldots a_na_n\ldots a_2a_1}$ – составное.

6. Докажите, что нельзя переставить цифры в числе 123456 так, чтобы полученное число делилось на 11.

Для самостоятельного решения

7. Может ли степень числа 2 оканчиваться на 4 одинаковые цифры? (на три – может: $2^{39} = 549755813888$).

8. У числа 2^{1970} зачеркнули его первую цифру и прибавили её к оставшемуся числу. С результатом проделали ту же операцию и т. д., до тех пор, пока не получили 10-значное число. Докажите, что в этом числе есть две одинаковые цифры.

9. Докажите, что среди 18 последовательных трёхзначных чисел найдётся хотя бы одно, которое делится на сумму своих цифр.

Для тех, кто решил всё предыдущее

10. В клетки таблицы 100×100 записаны ненулевые цифры. Оказалось, что все 100 стозначных чисел, записанных по горизонтали, делятся на 11. Могло ли так оказаться, что ровно 99 стозначных чисел, записанных по вертикали, также делятся на 11?

Матбой 6 класс – профи7 17 июля

1. Несколько кроликов построились в ряд. Оказалось, что каждый кролик, кроме двух крайних, имеет поровну друзей слева и справа от него. Докажите, что у двух крайних кроликов поровну друзей.

2. Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Докажите, что его можно разбить прямыми, параллельными сторонам, и на 392 равных квадрата.

3. Докажите, что из 3^8 натуральных делителей числа 3^8 можно выбрать несколько (быть может, один) не обязательно различных делителей с суммой, равной 3^8.

4. Какое наибольшее количество фигурок $1 \times 2 \times 2$ можно вырезать из куба $3 \times 3 \times 3$?

5. По кругу расставлены 37 различных чисел. Докажите, что среди всевозможных сумм 12 чисел, стоящих подряд, есть хотя бы 6 различных.

6. Вася и Петя играют в игру. На пяти клавиатурах есть 100, 101, 102, 103 и 104 клавиши соответственно. За ход можно выломать по одной клавише из двух разных клавиатур. Петя ходит первым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7. В ряду чисел 1, 251, 376, 188, 94, ... каждое число, кроме первого, равно либо половине предыдущего, если предыдущее четно, либо половине предыдущего числа, увеличенного на 501, в противном случае. Верно ли, что в этом ряду встретятся все числа от 1 до 500?

8. Казначей Матвей положил в каждую клетку прямоугольника 3×6 по одной монете. Он утверждает, что суммарный вес всех монет в каждой линии (строчки и столбцы), кроме одной, одинаков. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить, в какой именно линии вес отличается от остальных?

Матбой 6 класс – 7 класс 17 июля

1. В каждой клетке квадрата 5×5 сидит либо рыцарь, либо лжец. Каждый из них заявил: «Ровно половина моих соседей по стороне — рыцари». Какое наибольшее число рыцарей могло быть в квадрате?

2. В отряде ровно половина детей умеет играть в футбол, две трети – в волейбол, три четверти – в гандбол, четыре пятых – в пионербол. Докажите, что для участия в Универсиаде можно выбрать по 10 человек на каждый вид спорта так, чтобы никто не участвовал в двух видах спорта одновременно.

3. Вася и Петя играют в игру. На пяти клавиатурах есть 100, 101, 102, 103 и 104 клавиши соответственно. За ход можно выломать по одной клавише из двух разных клавиатур. Петя ходит первым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Казначей Матвей положил в каждую клетку прямоугольника 3×6 по одной монете. Он утверждает, что суммарный вес всех монет в каждой линии (строчки и столбцы), кроме одной, одинаков. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить, в какой именно линии вес отличается от остальных?

5. Какое наибольшее количество фигурок $1 \times 2 \times 2$ можно вырезать из куба $3 \times 3 \times 3$?

6. Несколько кроликов построились в ряд. Оказалось, что каждый кролик, кроме двух крайних, имеет поровну друзей слева и справа от него. Докажите, что у двух крайних кроликов поровну друзей.

7. Хромой король может ходить на любую соседнюю по стороне или углу клетку доски, кроме верхней и нижней (не более 6 возможных ходов с каждой клетки). Может ли хромой король обойти все клетки доски 9×9, побывав на каждой клетке по одному разу и вернувшись на исходное поле?

8. Электронная схема «пожарной сигнализации» состоит из четырёх кнопок. Каждая кнопка управляет своим переключателем: её нажатие переключает его из положения «вкл» в положение «выкл» и обратно. Начальное положение выключателей неизвестно. Пожарная сигнализация подаёт сигнал тревоги на неслышимой (ультразвуковой) частоте в тот момент, когда не менее трёх выключателей оказываются в положении «вкл». За какое наименьшее число нажатий на кнопки можно гарантированно добиться того, чтобы чемоданчик подал сигнал тревоги?

Матбой 6 класс – 6 класс — 17 июля

1. Из 24 спичек выложена фигура в виде квадрата 3×3, длина стороны каждого маленького квадратика равна длине спички. Какое наименьшее число спичек можно убрать так, чтобы не осталось ни одного целого квадратика 1×1, выложенного из спичек?

2. Отцу и двум сыновьям вместе 48 лет. Через 5 лет возраст отца будет вдвое больше суммы возрастов сыновей, а Юре будет столько лет, сколько Коле сейчас. Сколько лет отцу, Юре и Коле сейчас?

3. В написанном на доске выражении $\frac{ab}{b+c}$ Петя и Вася заменяют буквы тремя различными натуральными числами: вначале Петя заменяет букву a, потом Вася заменяет букву b, затем опять Петя – букву c. Если значение полученного на доске выражения окажется целым, то выигрывает Петя, в противном случае – Вася. Кто выигрывает при правильной игре?

4. В семье Ивановых 4 человека: папа, мама, сын и дочь. Их зовут Саша, Женя, Валя и Егор. Как-то за семейным столом некоторые из них сделали по два утверждения, причем каждый ровно единожды сказал правду: Саша: «Женя старше всех. Валя - дочь Егора». Егор: «Женя и Саша – разного пола. Это мои родители». Женя: «Я – отец Егора. Я – дочь Вали». Восстановите имена и отчества детей.

5. Когда ковбой Джо зашел в казино, весь его капитал состоял из нескольких однодолларовых купюр. Он сыграл три раза, ставя каждый раз все имеющиеся у него к этому моменту деньги. В рулетку он выиграл вдвое больше, чем поставил, и еще один доллар. В покер он выиграл впятеро больше, чем поставил, и еще один доллар. В Блэк Джек он выиграл втрое больше, чем поставил, и еще один доллар. В итоге его капитал составил 346 долларов. Сколько денег было у него вначале?

6. Винни-Пух и Пятачок в гостях у Кролика съели несколько тарелок меда со сгущенкой. Пятачок съел одну тарелку меда, перемешанного со сгущенкой, и оказалось, что он съел 1/8 всего меда и 1/5 всей сгущенки. Какое количество тарелок меда со сгущенкой мог съесть Винни-Пух? (Укажите все варианты и докажите, что других нет).

7. У царя Гороха каждый год рождается по потомку, каждого из которых зовут либо Пётр, либо Василий. При этом никакие трое родившихся подряд потомков не носят одинаковое имя. После рождения 2013-го потомка впервые число Петров стало больше числа Василиев. Одинаковые или разные имена носили 2008-й и 2009-й потомок?

8. У алхимика 3 колбы: с ртутью, серой и кислотой. Если смешать одну меру ртути и одну меру другого вещества, то на выходе получится три меры этого вещества. Если смешать меру серы и меру кислоты, получится мера ртути. Для приготовления зелья алхимику необходимо взять 10 мер ртути, 20 мер серы и 30 мер кислоты. А у него есть только 5 мер ртути, 50 мер серы и 10 мер кислоты. Сможет ли алхимик изготовить зелье?

Ставь на минус! 19 июля

Определение. Рассматриваем игры, в которых невозможны бесконечные партии. Позиция называется *выигрышной*, если игрок, делающий с нее ход, имеет возможность выиграть при любой игре соперника. Иначе позиция называется *проигрышной*.

Теорема 1. Пусть некоторой игре **проигрывает** тот, кто не может сделать ход. Пусть все позиции разбиты на два непересекающихся класса: минусовые и плюсовые, причем выполняются три свойства:

1) все финальные позиции – минусовые;

2) *все* ходы из минусовых позиций ведут в плюсовые;

3) из каждой плюсовой позиции *есть* ход в минусовую.

Тогда минусовые позиции являются проигрышными, а плюсовые – выигрышными.

Теорема 2. Пусть некоторой игре **выигрывает** тот, кто не может сделать ход. Пусть все позиции разбиты на два непересекающихся класса: минусовые и плюсовые, причем выполняются три свойства:

1) все финальные позиции – плюсовые;

2) *все* ходы из минусовых позиций ведут в плюсовые;

3) из каждой плюсовой позиции, **кроме финальных**, *есть* ход в минусовую.

Тогда минусовые позиции являются проигрышными, а плюсовые – выигрышными.

1. На концах полоски $1 \times n$ $(n > 2)$ стоит по шашке. За ход разрешается сдвинуть любую шашку в направлении другой шашки на одну или две клетки. Перепрыгивать через шашку нельзя, становиться шашкой на занятую другой шашкой клетку нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. При каких n при правильной игре выигрывает первый игрок, а при каких – второй?

2. Игра начинается с числа 4. Двое игроков по очереди прибавляют к имеющемуся числу любое, меньшее его, натуральное число. Выигрывает тот, кто получит ровно 100. Кто выигрывает?

3. **(a)** Часовая стрелка установлена на 12 часах. Двое по очереди двигают ее на 2 или 3 часа вперед. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку снова на 12 часов. Через 12 часов можно «перепрыгивать».

(b) Для каждого начального положения стрелки (и конечного положения на 12 часах) определите, кто выигрывает при правильной игре.

4. Есть длинный ряд луночек. В трёх из них лежит по шарику. Игроки по очереди делают ход: берут один из крайних шариков и перекладывают в свободную луночку между двумя другими. Тот, кто не может сделать ход, считается проигравшим. Кто — начинающий игру или ходящий вторым — победит при правильной игре при показанных на рисунках первоначальных расположениях шариков?

а) – – ● – – – – – – – ● – – – – – – – – ● – – – –

б) – – ● – – – – – – – – ● – – – – – – – – – – ● –

в) – – ● – – – – – – – ● – – – – – – – – – ● – – –

г) Разберите общий случай – между крайними шариками и средним имеется a и b пустых луночек.

Для самостоятельного решения

5. Есть многозначное число, например, 999. Вычисляется сумма его цифр (в данном случае 27) и начинается игра. Первый называет любое число от 27 до 999 (27 – можно, а 999 – нет), исходное число заменяется на это строго меньшее число. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. При скольких начальных числах от 1 до миллиарда при правильной игре победит второй игрок?

6. Имеются две кучи камней, в одной из которых 1, а в другой – 4 камня. Каждый игрок обеспечивается неограниченным запасом камней. За ход разрешается удвоить число камней в одной из куч, или увеличить на 3 количество камней в какой-либо куче. Выигрывает тот игрок, после хода которого суммарное число камней в двух кучах будет не меньше 22. Кто выигрывает при правильной игре?

7. В кучке **(a)** 400; **(b)** 399 камней. За ход можно взять 1, 2 или 3 камня, но не столько, сколько было взято на предыдущем ходе. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Для тех, кто решил всё предыдущее

8. Петя и Вася играют в игру. Изначально на столе лежит кучка из N конфет. Петя делит ее на три непустые кучки, а Вася две из них съедает. Затем Вася делит остатки на три непустые кучки, а Петя две из них съедает, и так далее. Кто не может сделать ход, проигрывает. При каких N при правильной игре выигрывает первый игрок, а при каких – второй?

Поль Сезанн. Игроки в карты (1892-1893 г.). Продана в 2012 году за 250 миллионов долларов. Самая дорогая картина из когда-либо проданных.

1. Есть кран, раковина и два бидона емкостью 19 и 20 литров без делений. Как отмерить ровно 11 литров воды?

2. Давным-давно в стране СССР имелись в обращении 3-копеечные и 5-копечные монеты. Докажите, что можно было набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

3. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое, большее пяти, число квадратов (не обязательно одинаковых).

4. **(a)** На крайней клетке доски 1×101 сидит кузнечик. Одним прыжком он может перепрыгнуть через одну или две клетки и приземлиться в следующей. Сможет ли он побывать на всех клетках ровно по одному разу? **(b)** То же на доске 1×99?

5. Можно ли поверхность куба оклеить без перекрытий **(a)** 16-ю одинаковыми прямоугольниками? **(b)** 15-ю одинаковыми прямоугольниками?

6. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он перекрашивает её в противоположный цвет. Изначально вся доска белая, а маляр находится на угловой клетке. Докажите, что он может покрасить доску в любой узор.

7. **(a)** Докажите, что существуют 3 различных натуральных числа таких, что каждое является делителем суммы всех остальных; **(b)** 4 числа; **(c)** 2013 чисел.

Для самостоятельного решения

8. В каждой клетке клетчатого квадрата 10×10 провели по диагонали. Докажите, что можно покрасить каждый из 200 получившихся треугольников в один из трёх цветов так, чтобы треугольники одинакового цвета по стороне не граничили.

9. В каждой клетке шахматной доски стоит 0. Разрешается выбрать любые две клетки, соединённые ходом коня, и увеличить на 1 стоящие в них числа. Можно ли добиться того, чтобы в клетках оказались числа $1, 2, \ldots, 64$ (в любом порядке)?

1. Среди 10 человек прошло соревнование по перетягиванию каната – каждый с каждым. Все оказались различной силы. Вася посмотрел на протокол и захотел узнать: верно ли, что любые трое перетянут любых двоих? За сколько перетягиваний он сможет это установить?

2. Шахматная доска разбита на доминошки. Докажите, что какая-то пара доминошек образует квадратик 2×2.

Идея 1. В задачах, где надо что-то найти, нужным свойством часто обладает крайний (наибольший, наименьший, самый левый) объект.

Идея 2. В задачах на доказательство часто полезно начать рассуждение с рассмотрения крайнего объекта (или объектов).

3. Можно ли в вершинах кубика расставить все числа от 1 до 8 так, чтобы любые два соседние по ребру числа отличались на 1 или на 2?

4. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьёт не более двух других.

5. По окружности расставлено несколько натуральных чисел так, что каждое из них является делителем одного из соседних. Докажите, что среди этих чисел есть два одинаковых.

6. По окружности расставлено несколько чисел (не обязательно целых чисел) так, что каждое из них является полусуммой своих соседей. Докажите, что все числа равны.

7. Семь шестиклассников решили вместе 100 задач, причём каждый решил разное количество задач. Докажите, что какие-то три школьника решили вместе не менее 50 задач.

8. Известно, что если у двух жителей Вишкиля поровну знакомых среди односельчан, то общих знакомых у них нет. Докажите, что найдётся житель, у которого ровно один знакомый односельчанин.

Для самостоятельного решения

9. На полях шахматной доски расставлены числа $1, 2, \ldots, 64$. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, где числа отличаются не меньше, чем на 5.

10. **(a)** Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50? **(b)** Тот же вопрос для чисел от 1 до 100?

Для тех, кто решил всё предыдущее

11. В марсианском метро с любой станции можно проехать на любую. Докажите, что можно так выбрать станцию и закрыть её на ремонт (без права проезда через неё), что по-прежнему можно будет проехать с любой оставшейся станции на любую оставшуюся.

1. Федя задумал натуральное число от 1 до 8. Лёша задаёт вопросы, на которые можно отвечать только ДА или НЕТ. Лёша хочет узнать задуманное число.

(a) Может ли он это сделать за три вопроса?

(b) За два вопроса?

2. Шоколадка 8×8 разбита канавками на 64 дольки. В одной из долек спрятан орех. Отламывая прямоугольный кусочек от любого из имеющихся кусков, можно узнать, находится ли орех в отломленном кусочке. За какое наименьшее число отламываний можно найти орех?

3. Правильный треугольник разбит на 9 равных правильных треугольничков. Федя отметил один треугольничек невидимыми чернилами. Лёша может указать любой треугольник со сторонами, идущими по линиям разбиения, и Федя скажет ему, лежит ли отмеченный треугольничек в указанном. За какое наименьшее число таких вопросов Лёша наверняка сможет найти отмеченный треугольничек?

4. В сборнике задач 6 класса 80 страниц, на каждой из них по 50 упражнений. Федя выбирает случайное упражнение на случайной странице, а Лёша пытается его отгадать. **(a)** Сможет ли Лёша это сделать за 13 вопросов? **(b)** За какое наименьшее количество вопросов он сможет сделать?

5. **(a)** Можно ли придумать такой набор из 5-ти гирь, при помощи которого можно отмерить любой вес от 1 г до 31 г?

(b) Можно ли придумать такой набор из 4-х гирь?

6. **(a)** Среди 9 монет ровно одна фальшивая – легче остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на весах без гирь её можно наверняка выявить?

(b) Аналогичная задача про 10 монет.

(c) Среди трёх монет – ровно одна фальшивая, но она может быть как легче, так и тяжелее настоящей. За какое наименьшее число взвешиваний её можно выявить на чашечных весах без гирь и узнать, тяжелее или легче она настоящей?

(d) Аналогичная задача про 5 монет.

Для самостоятельного решения

7. Преподаватель задумал целое число от 1 до 3. Вы можете задать ему один вопрос, на который он честно должен ответить «Да», «Нет» или «Не знаю», после чего вы должны наверняка отгадать задуманное число. Придумайте такой вопрос.

8. Есть 17 карт. Зритель загадывает одну. Фокусник раскладывает все карты на 4 стопки и узнает у зрителя, где оказалась задуманная карта. За какое наименьшее число вопросов Фокуник всегда сможет определить задуманную карту?

9. Федя загадывает два натуральных числа от 1 до 10 – одно чётное и одно нечётное. Помогите Леше угадать их за 5 вопросов и докажите, что меньшим числом вопросов он обойтись не сможет.

Для тех, кто решил всё предыдущее

10. В лавке Зловредного Торговца на полке стоит 1000 одинаковых коробок, в одной из них – Торт, остальные – пусты. Торговец согласен ответить на любой Ваш вопрос о коробках и Торте, лишь бы на него можно было ответить «да» или «нет», и обещает соврать не более одного раза. Найдите Торт за 21 вопрос.

Спецкурс. Как зависть осложняет жизнь — 20 июля

Разбойники хотят поделить награбленный золотой песок. Золотой песок считается *безгранично делимым*, т.е. каждый разбойник может разделить любую часть золотого песка на любое число частей, равных с точки зрения этого разбойника.

Как разделить добычу, чтобы все остались довольны?

1. Разбойников двое, каждый хочет получить не менее половины.

2. Разбойников трое, каждый хочет получить не менее трети.

3. Разбойников четверо, каждый хочет получить не менее четверти.

4. Разбойников n, каждый хочет получить не менее $1/n$ от добычи.

Алгоритм 1. Если разбойников двое, то один делит добычу на две равные с его точки зрения части, а другой выбирает из них ту долю, которая кажется ему большей. Предположим теперь, что n разбойников уже умеют разделить добычу справедливо. Для $n+1$ разбойников: разделим справедливо всю добычу между n разбойниками (это они уже умеют) и затем пусть каждый из них разделит свою долю на $n+1$ равных, на его взгляд, частей. Пусть теперь $n+1$-й разбойник выберет на свой вкус по одной из этих частей у каждого из n разбойников. Нетрудно понять, что все получилось.

Алгоритм 2. Первый разбойник откладывает $1/n$ часть. Если второй считает, что тот отложил много, то он «убирает лишнее». Затем подходит третий и т.п. Тот из разбойников, кто последним «убирает лишнее», забирает оставшееся от начального куска (если он последний, то лишнее убирать уже не надо). Далее процесс повторяется с оставшимися разбойниками.

Как разделить добычу, если все разбойники завистливы? Завистливость означает, что каждый не просто хочет получить не менее $1/n$ от добычи, но хочет получить *не меньше* любого другого разбойника.

5. Как разделить добычу между двумя завистливыми рабойниками?

6. Годятся ли рассмотренные выше алгоритмы для трёх завистливых разбойников?

7. Разделите золотой песок между тремя завистливыми разбойниками.

Решение. Впервые алгоритм придумали Selfridge и Conway в 1960 г.

Шаг 0. 0.1. Первый разбойник делит на три равные по его мнению части.

0.2. Второй располагает их по (нестрогому) убыванию по его мнению $A \geqslant_2 B \geqslant_2 C$. Затем второй делит A на части A_1 и A_2 так, чтобы $A_1 =_2 B$.

Шаг 1. Дележ A_1, B, C между тремя разбойниками, то есть дележ «почти всего сокровища». Третий выбирает из A_1, B, C себе одну часть. Остальные две распределяются между первым и вторым.

Сразу отметим, что: а) третий никому не завидует, ибо он выбирал; б) первый никому не будет завидовать, если давать ему B или C.

1.1. Третий выбрал A_1. Даем второму B, первому C. Второй никому не завидует (ибо у него $B =_2 A_1$ и $B \geqslant_2 C$).

1.2. Третий выбрал B. Даем второму A_1, первому C. Второй никому не завидует (ибо у него $A_1 =_2 B$ и $A_1 \geqslant_2 C$).

1.3. Третий выбрал C. Даем второму A_1, первому B. Второй никому не завидует (ибо у него $A_1 =_2 B$ и $B \geqslant_2 C$).

Шаг 2. Дележ A_2 между тремя разбойниками, то есть дележ «маленького кусочка». Ключевое наблюдение состоит в том, что первый не завидует тому, кто взял A_1 на первом шаге (а это третий или второй) при *любом* распределении части A_2 на втором шаге: ведь доставшаяся первому часть B или C равна по его мнению части A, и поэтому она не меньше, чем A_1 плюс еще часть от A_2.

2.1. Пусть часть A_1 взял второй. Третий делит A_2 на три равные по его мнению трети, а второй выбирает большую по мнению треть. Затем выбирает первый, остатки берет третий. Третий никому не завидует (ибо по его мнению части равны). Второй не завидует никому, ибо он выбирал первым. Первый не завидует третьему, ибо выбирал перед ним, а второму первый вообще завидовать не может!

2.1. Пусть A_1 взял третий. Действуем аналогично.

8. На какое наибольшее число частей придётся делить сокровище в этом алгоритме?

Для самостоятельного решения

9. Три разбойника ужинали. У одного из них было 3 горбушки хлеба, у другого – 5 горбушек хлеба, и только у третьего не было никакой пищи. Разбойники разделили хлеб поровну между всеми тремя. Третий разбойник дал двум другим 8 монет за хлеб, который он съел. Как должны по справедливости разделить 8 монет первые два разбойника?

10. На столе стоят **(a)** восемь; **(b)** семь стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Всегда ли можно с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах стало поровну воды?

1. Можно ли выложить шахматную доску 32 доминошками так, чтобы 17 из них были расположены горизонтально, а 15 – вертикально?

2. Докажите, что доску 10×10 нельзя разрезать на Т-тетрамино.

3. Докажите, что доску 10×10 нельзя разрезать на L-тетрамино.

4. Докажите, что доску 10×10 нельзя разрезать на полоски длины 4.

5. Из доски 8×8 вырезали угловую клетку. Можно ли оставшуюся часть разрезать на прямоугольники 3×1?

6. Замок имеет форму правильного треугольника, разбитого на 25 одинаковых залов, каждый из которых также имеет форму правильного треугольника (всего по 5 слоев в кажом из трех направлений). В стене между любыми двумя залами есть дверь. Путник хочет обойти как можно больше залов, не заходя ни в один зал дважды. Какое наибольшее количество залов ему удастся обойти?

7. Из доски 5×5 вырезали одну клеточку, а оставшуюся часть порезали на полоски длины 3. Докажите, что вырезанная клетка – центральная.

8. Дно прямоугольной коробки покрыто плитками 2×2 и 1×4. Одна плитка 2×2 потерялась. Можно ли вместо нее воспользоваться плиткой 1×4 для покрытия дна коробки иным образом ?

Для самостоятельного решения

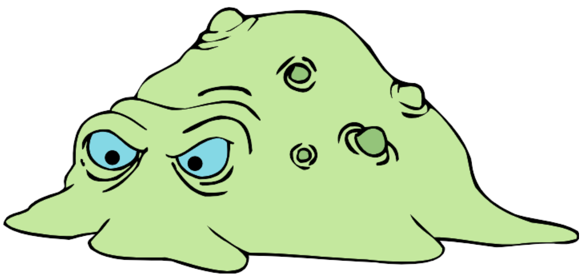
9. Докажите, что числа от 40 до 99 нельзя разбить на группы по 4 числа так, чтобы числа каждой группы в одном разряде совпадали, а цифры другого разряда шли бы подряд (например “{54, 55, 56, 57}”; “{44, 54, 64, 74}”)

10. Докажите, что доску 75×75 нельзя разрезать на пятиклеточные кресты и доминошки.

11. Из доски 29×29 по линиям сетки вырезаны 99 квадратов 2×2. Докажите, что из оставшейся части доски можно вырезать еще хотя бы один такой же квадрат.

Для тех, кто решил всё предыдущее

12. Докажите, что доску $m \times n$ можно разрезать на прямоугольники $1 \times k$ тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел m или n делится на k.



Game over **21 июля**

1. На белой полоске 1×100 двое по очереди красят клетки в черный цвет: первый – две клетки подряд, а второй – три клетки подряд. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

2. На белой полоске 1×100 двое по очереди красят клетки в черный цвет: первый – три клетки подряд, а второй – две клетки подряд. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Есть многозначное число, например, 999. Вычисляется сумма его цифр (в данном случае 27) и начинается игра. Первый называет любое число от 27 до 999 (27 – можно называть, а 999 – нет), исходное число заменяется на это строго меньшее число. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. При скольких начальных числах от 1 до миллиарда включительно при правильной игре победит второй игрок?

4. По кругу расставлены 50 фишек. Дима и Саша по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки вначале не стояли рядом, выигрывает Дима, а в противном случае выигрывает Саша. Дима ходит первым. Кто выиграет при правильной игре?

5. В кучке **(a)** 400; **(b)** 399 камней. За ход можно взять 1, 2 или 3 камня. При этом нельзя брать столько камней, сколько было взято на предыдущем ходе. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Разнобой–3 **21 июля**

1. Разрежьте квадрат на 1000 равных пятиугольников.

2. На шахматной доске стоят 10 коней, каждый бьёт ровно трёх других. Докажите, что коней на чёрных и белых полях поровну.

3. **(a)** Двое играют на доске 10×10. Они по очереди выставляют на доску непересекающиеся фигуры: первый игрок – уголки из трёх клеток, а второй – в форме Т-фигурки из четырёх клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

(b) Та же задача, только первый – в форме Т-фигурки из четырёх клеток, а второй – уголки из трёх клеток.

4. **(a)** В правильном n-угольнике отмечено 3 вершины. При каких n они обязательно образуют равнобедренный треугольник?

(b) В правильном 20-угольнике отметили 9 вершин. Докажите, что найдётся равнобедренный треугольник с вершинами в отмеченных точках.

Зрение двумя глазами стереоскопично. Увиденно двумя глазами больше суммы увиденного каждым глазом. При составлении уравнений некоторую величину выражают двумя способами (например, площадь, время, число шашек,...). Иногда некоторую величину оценивают двумя способами, тогда получают или строгое неравенство, или величину разной чётности. Это является источником противоречия.

1. Можно ли в таблице 10×12 (10 строк и 12 столбцов) расставить по одной звёздочке в некоторые клетки так, чтобы в каждой строке было 7 звёздочек, а в каждом столбце – 5 звёздочек.

2. Можно ли вписать в клетки доски 8×8 различные числа от 1 до 64 так, чтобы в любом квадратике 2×2 сумма чисел была равна 120?

3. На двух противоположных гранях кубика написали по 1, на двух других противоположных – по 2, на оставшихся двух противоположных – по 3. Из восьми таких кубиков сложили большой куб. Может ли сумма чисел на его гранях равняться 48?

4. На рёбрах куба расставили все числа от 1 до 12, а затем для каждой вершины посчитали сумму чисел на трёх ребрах, выходящих из этой вершины. Могут ли восемь полученных чисел оказаться равными?

5. На острове, население которого составляют только рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, находится НИИ. Каждый из его сотрудников однажды сделал два заявления:

а) В институте нет и десяти человек, которые работают больше меня;

б) По крайней мере сто человек в институте получают зарплату большую, чем моя.

Известно, что нагрузка у всех работников разная, как и зарплата. Сколько человек работает в НИИ?

6. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?

7. Однажды в СССР в автобусе без кондуктора ехали 40 пассажиров, имевших при себе только монеты достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Всего у пассажиров было 49 монет. Докажите, что пассажиры не могли купить нужное количество билетов и правильно рассчитаться между собой. (Стоимость автобусного билета в СССР составляла 5 копеек.)

Для самостоятельного решения

8. Сколькими способами можно расставить числа ± 1 в таблицу $m \times n$ так, чтобы произведения в каждом столбце и в каждой строке равнялись бы -1?

Для тех, кто решил всё предыдущее

9. В чемпионате по футболу участвовало 15 команд, и каждая команда играла с каждой одну игру. Никакие две игры не игрались одновременно. Докажите, что хотя бы в одной игре встретились две команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечётном числе игр.

Конструкции много-мало 22 июля

1. Имеется два мальчика и две девочки. Могут ли эти четверо протанцевать 100 танцев так, чтобы в каждом танце, начиная со второго, каждый мальчик танцевал либо с более умной (по сравнению с предыдущей), либо с более красивой (по сравнению с предыдущей) девочкой?

2. Площадь прямоугольника меньше 1 кв.мм. Может ли его периметр быть больше 1 км?

3. Сумма положительных чисел больше 10. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,1?

4. Группа граждан страны А эмигрировала в страну Б. Покажите, что при этом в обеих странах средний рост мог увеличиться.

5. На занятии Вася, Петя и Стас сдали все три задачи одному преподавателю. Может ли оказаться, что Стас большинство задач сдал раньше Пети, Петя – большинство задач раньше Васи, а Вася – большинство задач раньше Стаса?

6. В школе два шестых класса. В каждом из них процент отличниц среди девочек выше, чем процент отличников среди мальчиков. Докажите, что может так случиться, что целиком в шестых классах, вместе взятых, процент отличниц среди девочек ниже, чем процент отличников среди мальчиков.

7. Раз в месяц директор фирмы предлагает десяти своим заместителям проголосовать за новый список своей и их зарплат. Сам директор не голосует. Те заместители, чью зарплату предлагается увеличить, голосуют за, остальные – против. Предложение принимается большинством голосов. Может ли директор за год добиться, чтобы его зарплата вдесятеро увеличилась, а зарплаты всех заместителей вдесятеро уменьшились?

Для самостоятельного решения

8. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов с суммой периметров 100?

9. У Сони есть таблица 3×3, заполненная 9 различными числами. Соня выбирает наименьшее число из этой таблицы и вычёркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наименьшее из оставшихся чисел и вычёркивает строку и столбец, содержащие это число и так же в третий раз.

Может ли случится, что сумма чисел, выбранных Соней, больше суммы любых других трёх чисел исходной таблицы, удовлетворяющих условию: никакие два из них не стоят в одной строке или в одном столбце?

Заключительная олимпиада. Довывод — 24 июля

1. Между некоторыми цифрами числа 2013201320132013 можно ставить знаки арифметических действий и скобки. Можно ли получить 1000?

2. Есть коробка в форме параллелепипеда. Площадь нижней грани равна 8, площадь лицевой грани равна 3, площадь боковой грани равна 1.5. Найдите объём коробки.

3. Можно ли расставить в таблице 4×6 различные натуральные числа, не превосходящие 30, так, чтобы каждая пара чисел в клетках с общей стороной имела общий делитель, больший единицы?

4. В однокруговом чемпионате по матбоям участвовали 16 команд из 16 разных школ. Каждый бой проходил в одной из школ-участниц. Могло ли по окончании чемпионата случиться, что каждая команда сыграла во всех школах, кроме своей?

5. Ветка с листьями имеет вид, изображённый на рисунке. Всего на ней 103 листа. Двое по очереди срывают листья. Каждым ходом разрешается сорвать либо один лист, либо любую пару листьев, растущих из одной точки. Выигрывает тот, кто сорвёт последний лист. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Перед вами три человека: двое нормальных, один – идиот. На вопрос, требующий ответа «Да» или «Нет» нормальные отвечают честно. Идиот же в смысл вопроса не вникает, а отвечает «Да» или «Нет» наугад. Как за два таких вопроса определить про всех кто есть кто? (Разумеется, после ответа на первый вопрос можно второй вопрос задать тому же или другому).

7. В клетках таблицы 10×10 расставлены все натуральные числа от 1 до 100. Докажите, что можно вычеркнуть строку и столбец так, чтобы сумма всех оставшихся чисел была чётной.

8. На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли (может быть, не ушёл никто). Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно $2, 3, 4, \ldots, 99$ знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

СОДЕРЖАНИЕ