

Делимость-2.

1. Над африканской деревней сгустились тучи, и ровно в полдень полил дождь. После 3 суток непрерывного дождя племя спросило колдуна, когда все это кончится. Тот сказал: «Ровно через 300 часов после начала дождя тучи развеются, и выглянет солнце». Заслуживает ли колдун доверия?

Определение. Пусть a – целое число, b – натуральное. Тогда существуют такие целые числа q и r , что $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Числа q и r определены однозначно для каждого a и b . Число r называется *остатком* при делении числа a на число b , а число q – *неполным частным*.

Упражнения. Разделите с остатком (a) 1001 на 9; (b) 9 на 1001; (c) 0 на 37; (d) –17 на 5.

Замечание. Умные люди не пишут $7 : 2 = 3$ (ост.1). Умные люди пишут $7 = 3 \cdot 2 + 1$.

2. Какие из утверждений верны:

(a) если число при делении на 8 дает остаток 3, то при делении на 4 оно также дает остаток 3;

(b) если число при делении на 4 дает остаток 3, то при делении на 8 оно также дает остаток 3.

3. Рубрика *Рабочая тетрадь*. Если число при делении...

(a) на 15 дает остаток 7, то при делении на 5 остаток равен

(b) на 15 дает остаток 3, то при делении на 9 остаток равен

(c) на 5 дает остаток 1, то при делении на 3 остаток равен

4. (a) Докажите, что если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c , то их разность делится на c .

(b) Докажите, что если разность чисел a и b делится на c , то они дают одинаковые остатки при делении на c .

5. Докажите, что среди любых 2014 чисел можно найти 2 числа, разность которых делится на 2013.

6. Найдите последнюю цифру числа 2^{50} .

7. Найдите остаток от деления числа $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 \cdot 1004 - 24$ на 25.

8. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 для любого целого n .

9. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2013. Какие числа остались на доске?

Для самостоятельного решения

10. Докажите, что $n^2 + 2$ не делится на 5 ни при каком целом n .

11. Можно ли целые числа от 1 до 200 расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы сумма любых десяти подряд делилась на 10?

12. Камни лежат в трех кучках: в одной – 51 камень, в другой – 49 камней, а в третьей – 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из четного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?