Подсчёт двумя способами.

Зрение двумя глазами стереоскопично. Увиденно двумя глазами больше суммы увиденного каждым глазом. При составлении уравнений некоторую величину выражают двумя способами (например, площадь, время, число шашек,…). Иногда некоторую величину оценивают двумя способами, тогда получают или строгое неравенство, или величину разной чётности. Это является источником противоречия.

1. Можно ли в таблице 10×12 (10 строк и 12 столбцов) расставить по одной звёздочке в некоторые клетки так, чтобы в каждой строке было 7 звёздочек, а в каждом столбце – 5 звёздочек.

2. Можно ли вписать в клетки доски 8×8 различные числа от 1 до 64 так, чтобы в любом квадратике 2×2 сумма чисел была равна 120?

3. На двух противоположных гранях кубика написали по 1, на двух других противоположных – по 2, на оставшихся двух противоположных – по 3. Из восьми таких кубиков сложили большой куб. Может ли сумма чисел на его гранях равняться 48?

4. На рёбрах куба расставили все числа от 1 до 12, а затем для каждой вершины посчитали сумму чисел на трёх ребрах, выходящих из этой вершины. Могут ли восемь полученных чисел оказаться равными?

5. На острове, население которого составляют только рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут, находится НИИ. Каждый из его сотрудников однажды сделал два заявления:

а) В институте нет и десяти человек, которые работают больше меня;

б) По крайней мере сто человек в институте получают зарплату большую, чем моя.

Известно, что нагрузка у всех работников разная, как и зарплата. Сколько человек работает в НИИ?

6. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?

7. Однажды в СССР в автобусе без кондуктора ехали 40 пассажиров, имевших при себе только монеты достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Всего у пассажиров было 49 монет. Докажите, что пассажиры не могли купить нужное количество билетов и правильно рассчитаться между собой. (Стоимость автобусного билета в СССР составляла 5 копеек.)

Для самостоятельного решения

8. Сколькими способами можно расставить числа ± 1 в таблицу $m \times n$ так, чтобы произведения в каждом столбце и в каждой строке равнялись бы -1?

Для тех, кто решил всё предыдущее

9. В чемпионате по футболу участвовало 15 команд, и каждая команда играла с каждой одну игру. Никакие две игры не игрались одновременно. Докажите, что хотя бы в одной игре встретились две команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечётном числе игр.