XXXI Кировская летняя многопредметная школа

31 Кировская ЛМШ

* 3-28 июля 2015 г., с. Вишкиль *

Брагин В.А.
Попов Л.А.
Семенов А.С.
Игошина В.С.
Святокум П.О.
Власова Н.Ю.
Рогозина А.А.
Крохмаль Н.Е.
Голованов А.И.
Баев Б.А.

Думаем, что почти всякому взявшему в руки брошюру, либо пролистывающему её электронный вариант, понятно, что это за книга, но всё же позволю себе сказать. Это книга материалов отряда математиков 6го класса 31ой Кировской Летней Многопредметной Школе 2015 года. Перед преподавательским составом стояла непростая задача. С одной стороны необходимо было обсудить основные темы. С другой стороны надо было не дать заскучать тем, кто когда-то что-то об этом слышал. Строки эти создаются, когда до зачёта осталось несколько дней, и теперь уже можно видеть слегка уставшие (или не слегка), лица наших шестиклассников. После этого понимаешь, что смена стала небольшим и, надеемся, приятным, но испытанием для параллели М6. Читатели вероятно удивятся тому, что по многим темам сюда включено довольно много задач. Всё дело в том, что иногда материалы немного различались в разных группах, в книжке же приведено некоторое объединение.

Представителям М6 же, которые эту книжку получили автоматически, остаётся пожелать не забывать июльские деньки 2015 года. Пусть эта книжечка послужит ещё одним напоминанием. Нам понравилось работать с Вами, надеюсь, и вам тоже. И удачи на зачёте!

Ваши Будимир Александрович Баев, Александр Игоревич Голованов, Николай Евгеньевич Крохмаль, Анна Андреевна Рогозина, Надежда Юрьевна Власова, Полина Олеговна Святокум, Виктория Сергеевна Игошина, Александр Сергеевич Семёнов, Леонид Андреевич Попов и Владимир Алексеевич Брагин.

Оглавление

1. Подсчёт двумя способами. 4 июля

Удав: *Мартышка, подумай еще!*
Мартышка: *Я про одно и то же два раза думать не умею!*

38 попугаев

1. Можно ли заполнить таблицу 3×3 числами $+1, 0, -1$ так, чтобы сумма чисел в каждой строке была положительной, а в каждом столбце отрицательной?

2. В каждой клетке прямоугольной таблицы стоит число. Сумма чисел в каждом столбце равна 20, а в каждой строке — 10. Сколько в таблице столбцов, если строк 8?

3. В клетках шахматной доски расставили восемь единиц, восемь двоек, восемь троек и т.д.
а) Могло ли так оказаться, что в каждом квадрате 2×2 сумма чисел равна 19?
б) А может ли вообще сумма чисел во всех квадратах быть одинаковой?

4. Можно ли занумеровать рёбра куба числами от 1 до 12 так, чтобы в каждой вершине сумма номеров входящих в нее рёбер была одна и та же?

5. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечетное число фигур?

6. Владимир Алексеевич написал на доске несколько натуральных чисел с суммой 100.

а) Старательный Артем посчитал, сколько написано чисел. Потом он посчитал, сколько чисел, больших 0, было выписано Владимиром Алексеевичем, и записал данное число на доску. Потом он посчитал, сколько чисел, больших 1, было выписано Владимиром Алексеевичем, и выписал данное число на доску, и так далее... Докажите, что сумма найденных Артёмом чисел также равна 100.

б) Потом пришёл Саша и посчитал то же самое для чисел Артёма. Докажите, что у Пети получился тот же набор чисел, что и у Владимира Алексеевича.

7. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семёрками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

8. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причем для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (т.е. $1, 2, 4, 8, \dots$). Для каждого города A статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих A с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100000. Докажите, что статистик ошибся.

2. Вступительная олимпиада. 4 июля

1. Петя, Коля, Вася и Дима пинали мяч. Из-за неаккуратности один из ребят разбил окно. На вопрос “Кто разбил окно?” все, кроме Димы, ответили “Не я.”, а Дима ответил: “Не знаю”. Оказалось, что двое мальчиков сказали правду, а двое соврали. Сказал ли Дима правду?

2. На игральном кубике общее число точек на любых двух противоположных гранях равно 7. Вика склеила столбик из 7 кубиков таким образом, что на любых двух склеенных гранях находится одинаковое количество точек. Какое суммарное количество точек на всех наружных гранях могло получится?

3. В магазине продаются свечи двух видов: за 11 рублей можно купить свечу, которая горит 11 минут, а за 60 рублей можно купить свечу, которая горит ровно час. Свечу можно поджигать только с одного конца и тушить в любой момент. Как, потратив не более 150 рублей, отмерить временной интервал 1 минуту?

4. В волейбольном турнире, состоящем из 9 туров, приняли участие 10 команд. В каждом туре команды некоторым образом разбивались на 5 пар, и команды из одной пары играли между собой (при этом никакие две команды не играли друг с другом больше 1 раза). Команда "Лузер" после 5-го тура занимала чистое второе место (т. е. имела меньше побед, чем одна из команд, и больше, чем все остальные). Докажите, что по окончании турнира она не могла занять чистое последнее место (т. е. иметь меньше побед, чем все остальные команды).

5. Есть 100 монет: 99 настоящих (они весят поровну) и одна фальшивая (весит легче настоящих). У Феди есть двухчашечные весы. На чаши весов можно класть по одной монете, и весы показывают один из трех возможных результатов: либо перевесила левая чаша, либо перевесила правая чаша, либо установилось равновесие. К сожалению, Федины весы безнадёжно испорчены: они *всегда* показывают неверный результат взвешивания. Как с помощью этих весов Федя сможет найти 98 настоящих монет?

6. В клетках доски 900×900 расположены 9 маляров. За один ход первый маляр смещается на соседнюю клетку по горизонтали или по вертикали, второй маляр смещается на две клетки по горизонтали или на две клетки по вертикали, и т. д., 9-й маляр смещается на 9 клеток по горизонтали или на 9 клеток по вертикали. Раз в минуту все маляры *одновременно* делают ход и сразу красят клетки, на которых оказались, в черный цвет. (На одной клетке могут оказаться несколько маляров, тогда они вместе красят эту клетку в чёрный цвет.) Вначале вся доска была белая. Через некоторое время вся доска оказалась чёрной. Докажите, что хотя бы один из маляров за это время побывал на закрашенной ранее клетке.

3. Чередование и чётность. 5 июля

не любит прорыдал аркадий
отбросив в сторону в сердцах
безногую сороконожку
не оправдавшую надежд

Фольклор

Чередование

1. Петя сцепил по кругу 19 шестерёнок. Докажите, что шестерёнки в такой конструкции не могут вращаться.

2. Барон Мюнхгаузен, вернувшийся из кругосветного путешествия, рассказывает, что по пути он пересек границы Трапезундии 13 раз. Верите ли Вы ему?

3. Александр Сергеевич написал на листке бумаги число 20. Пятьдесят четыре шестиклассника передают листок друг другу, и каждый по своему усмотрению вычитает от него или прибавляет к нему 1. Может ли в результате получиться а) 9? б) 100?

4. Кузнечик прыгает по плоскости на 1 метр вправо, влево, вверх или вниз. Он делает один прыжок каждые полчаса.
а) Докажите, что кузнечик вернётся на начальную позицию только через целое число часов.

б) Представим, что кузнечик каждый раз поворачивает на $90°$. Докажите, что кузнечик вернётся в исходную точку через чётное число часов.

5. Может ли конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

6. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей мальчик – девочка и девочка – мальчик чётно.

7. В верхней грани кубика провели диагональ. Кубик прокатили по поверхности стола, перекувыркнув через ребро 33 раза, при этом грань с диагональю снова оказалась сверху. Докажите, что начальное и конечное положение диагоналей не параллельно.

Чётность

8.*(разобрать сразу)* Докажите, что чётность суммы определяется чётностью количества нечётных слагаемых.

Ещё про арифметику чётных чисел.

9. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 2015?

10. Сумма трёх чисел чётна. Докажите, что их произведение тоже чётно.

11. Существует ли такое натуральное a, что $a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 = 100! + 1$?

12. Можно ли в выражении $1 + 2 + 3 \ldots + 101$ некоторые плюсы заменить на минусы так, чтобы получилось число 102?

Соображения чётности иногда помогают.

13. Можно ли числа от 1 до 2014 разбить на несколько групп, в каждой из которых есть число, равное сумме остальных чисел этой группы?

14. Вася написал на доске числа от 1 до 100. Каждую минуту к половине чисел прибавляется 1, а из половины вычитается 1. Могло ли в какой-то момент оказаться, что есть три группы равных чисел размерами 30, 30 и 40?

15. Максим написал по кругу 2015 чисел, каждое из которых равно 1 или -1, причём не все числа были равны. После чего Артём выписал произведения всех четвёрок чисел, идущих подряд, а затем сложил получившиеся произведения. Могла ли получившаяся сумма быть
а) чётной;
б) равной 2015;
в) равной 2013;
г) равной 2011?

16. На клетках шахматной доскии стоят 8 ладей, не бьющих друг друга. Могло ли при этом на чёрных полях стоять ровно 5 из этих ладей?

17. Есть 101 монета, из которых 50 фальшивых, отличающихся по весу на 1 грамм от настоящих. Петя взял одну монету и за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающих разность весов на чашках, хочет определить, фальшивая ли она. Сможет ли он это сделать?

4. Перебор. 5 июля

Бывает, что усердие превозмогает и рассудок.

Козьма Прутков

1. Сколькими способами можно разложить число 10 на два слагаемых, сумма квадратов которых равна 58?

2. Сколько существует трёхзначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 4?

3. Найдите все трёхзначные числа, сумма цифр которых равняется произведению цифр.

4. Четверо господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно в произвольном порядке (швейцар забыл, где чья). Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получит чужую шляпу?

5. Замените во фразе «И ВСЕ ЖЕ ОН НЕ ПРАВ» каждую из десяти букв И, В, С, Е, Ж, О, Н, П, Р, А одной из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (разные буквы заменяются на разные цифры) так, чтобы все слова превратились в десятичные записи точных квадратов.

6. На сколько частей могут разбить плоскость 5 различных прямых?

7. а) Сколько всего существует различных фигурок тетрамино (фигур, составленных из четырёх клеток, соединённых между собой по стороне)?
б) Сколько всего существует различных фигурок пентамино (фигур, составленных из пяти клеток, соединенных между собой по стороне)?

8. Сколькими способами можно разрезать квадрат 4×4 на доминошки? (Способы, отличающиеся поворотами доски, считаются разными)

9. Двое играют в крестики-нолики на поле 3×3. Докажите, что, как бы ни играл оппонент, каждый из игроков может не проиграть.

10. Укажите хотя бы один способ расставить 8 ферзей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга.

5. Разнобой. 5 июля

Есть многое на свете, друг Горацио, что и не снилось нашим мудрецам.

У. Шекспир, Гамлет, акт I, сцена IV

1. Докажите, что сумма первых n нечётных чисел равна n^2.

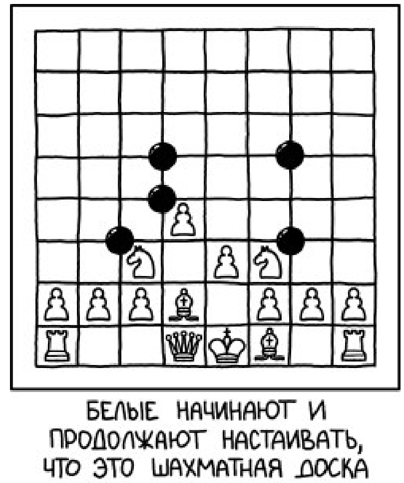
2. По круговому маршруту длиной 15 км двигаются три велосипедиста, скорости которых меньше 45 км/ч. Известно, что с интервалом в 12 минут происходит встреча первого и второго велосипедиста, а с интервалом в один час происходит встреча второго и третьего велосипедиста. Через какое время происходит встреча первого и третьего велосипедистов?

3. Когда Добрая Фея взмахивает волшебной палочкой, появляется либо 100 карамелек и 100 ирисок, либо 101 карамелька и 98 ирисок, либо 103 карамельки и 94 ириски. Фея немного помахала палочкой, и появилось 2943 карамельки. Сколько появилось ирисок?

4. В диком лесу живёт 6 вурдалаков, 55 пауков и 17 единорогов. Вурдалаки едят пауков и единорогов, пауки едят единорогов. Если вурдалак ест паука, он становится единорогом, если вурдалак ест единорога, он становится пауком, если паук ест единорога — он становится вурдалаком. В некий момент оказалось, что в лесу никто никого не может съесть. Животные какого вида остались в живых?

5. Петька играет с компьютером в «Lines-1». Компьютер бросает на свободную клетку поля 9×9 шарик одного из k цветов, а Петя перетаскивает его на одно из свободных полей. Если 5 шариков одного цвета стоят в ряд, то они уничтожаются (естественно, может одновременно уничтожаться больше 5 шаров). При каких k компьютер может победить Петю?

6. Игры. Симметричная стратегия. 6 июля



Вместо эпиграфа

1. На столе выложены две одинаковые монеты. Играют двое. Каждый игрок за один ход может взять любую из монет и разменять ее меньшими монетами, но на ту же сумму. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? (Монеты берутся из набора 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек и 1 рубль).

2. Дана клетчатая доска 10×10. За один ход разрешается покрыть любые две соседние клетки доминошкой (прямоугольником 1×2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

3. Двое играют, поочередно выставляя крестики и нолики на квадратном поле 9×9. В конце каждый получает очко за каждую строку и столбец, в которых его знаков больше. Сможет ли первый игрок выиграть?

4. Полина и Аня ломают шоколадку размером 5×8. За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом по любому из имеющихся углублений. Начинает Полина. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

5. На доске записаны два числа: 2014 и 2015. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно либо уменьшить одно из чисел на его ненулевую цифру или на ненулевую цифру другого числа, либо разделить одно из чисел пополам, если оно чётное. Выигрывает тот, кто первым напишет однозначное число. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

6. На клетчатой доске 4×4 играют двое. Ходят по очереди, и каждый играющий своим ходом закрашивает одну клетку. Проигрывает тот, после чьего хода образуется квадрат 2×2, состоящий из закрашенных клеток. Кто выигрывает при правильной игре?

7. На столе донышками вниз стоят 2015 пустых стаканов. Два игрока по очереди переворачивают стаканы, в том числе и перевёрнутые ранее, по следующим правилам: за первый ход можно перевернуть не более одного стакана, за второй — не более двух и т. д. При этом за каждый ход необходимо перевернуть хотя бы один стакан. Выигрывает тот, после хода которого все стаканы расположены донышками вверх. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?

8. На листе клетчатой бумаги отмечены 100 узлов — вершины клеток, образующих квадрат 9×9. Два игрока по очереди соединяют вертикальным или горизонтальным отрезком два соседних отмеченных узла. Игрок, после хода которого образуется один или несколько квадратиков, закрашивает их в свой цвет. Выигрывает тот, кто закрасил больше квадратиков. Придумайте для второго игрока выигрышную стратегию.

9. На доске написано число 1000000000 (1 и 9 нулей). Двое играют в следующую игру: за один ход можно либо стереть с доски два одинаковых числа, либо стереть число n и вместо него записать два числа, в произведении дающих n, но меньших него. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

10. Дана доска 4×2015. Двое по очереди ставят на нее ладьи. Первый должен ставить ладью так, чтобы она била чётное число уже поставленных ладей, а второй — нечётное. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

11. Дана шоколадка 700×2015 (700 — высота, 2015 — ширина). Два человека играют в следующую игру. Ход состоит в том, что можно взять любой отдельный кусок шоколадки (в начале игры такой кусок всего один) и выгрызть из него кусок в форме прямоугольника, причем первому разрешается съедать только прямоугольники, у которых высота больше или равна ширины, а второму — меньше либо равна ширины. Выигрывает тот, кто доест последний кусочек. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Логика. 6 июля

Недавно прошёл чемпионат мира по логичности. Победил победитель, подарили подарок.

КВН, команда «Плохая компания»

1. Аня, Вера и Лиза живут на разных этажах трёхэтажного дома. На каком этаже живёт каждая из девочек, если известно, что Аня живёт не на втором этаже, а Вера живёт ниже всех?

2. Маша, Яна, Диана и Лена встали в круг. Известно, что Яна и Маша не в зелёном платье. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Яной. Девочка в зелёном платье стоит между девочкой в голубом платье и Леной. Какое платье носит каждая из девочек?

3. В трёх мешках находятся крупа, вермишель и сахар. На одном мешке написано «крупа», на другом — «вермишель», на третьем — «крупа или сахар». Что в каком мешке находится, если ни одна надпись не соответствует действительности?

4. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей, если:
а) мы считаем, что сосуды стоят в ряд;
б) мы этого не предполагаем?

5. Среди офицеров Александрова, Борисова, Васильева и Григорьева — майор, капитан и два лейтенанта. Александров и один из лейтенантов — танкисты, Борисов и капитан — артиллеристы, Александров младше по званию, чем Васильев. Определите род войск и звание каждого из них.

6. Смит, Джонсон и Робинсон работают в одном поезде машинистом, кондуктором и кочегаром. В поезде едут три пассажира с теми же фамилиями (Пассажиров будем называть “Мистер” — М-р). М-р Робинсон живёт в Лос-Анджелесе, кондуктор — в Омахе. М-р Джонсон давно позабыл всю алгебру, которой его учили в колледже. Однофамилец кондуктора живёт в Чикаго. Кондуктор и один из пассажиров, известный специалист по математической физике, отовариваются в одном торговом центре. Смит всегда выигрывает у кочегара партию в бильярд. Какая фамилия у машиниста?

7. *Загадка Эйнштейна.* На одной улице в ряд расположены пять домов. Каждый дом отличается цветом. Жильцы каждого дома представляют разные национальности, курят разные сигареты, пьют разные напитки и держат разных домашних животных. Плюс к этому:

- В доме №1 проживает норвежец.
- Англичанин живёт в доме красного цвета.
- Дом зелёного цвета стоит слева от дома белого цвета, рядом с ним.
- Датчанин любит чай.
- Курящий «Marlboro» живёт рядом с тем, кто держит кошек.
- Жилец жёлтого дома курит «Dunhill».
- Немец курит «Rothmans».
- Жилец центрального дома пьёт молоко.
- Сосед курящего «Marlboro» пьёт воду.
- Курящий «Pall Mall» разводит птиц.
- Швед держит собак.
- Норвежец живёт в доме рядом с домом синего цвета.
- Тот, кто держит лошадей, живёт в доме синего цвета.
- Курящий «Winfield» пьет пиво.
- В доме зелёного цвета пьют кофе.

Вопрос: Кто из жильцов разводит рыбок?

8. Рыцари и лжецы. 6 июля

Вместо эпиграфа. Подумайте над этим

Вы находитесь на острове рыцарей и лжецов. Каждый житель острова обязан быть или рыцарем, или лжецом. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут.

1. а) На острове Вы подошли к человеку А и спросили, рыцарь он или лжец. Человек А что-то ответил, но Вы ничего не поняли и попросили помощь у местного переводчика В. Тот ответил: «А сказал, что он лжец». Кем может быть А? Кем может быть В?
б) Вы подошли к группе из трёх жителей острова — А, В и С — и задали человеку А такой вопрос: «Сколько среди вас рыцарей?». А дал ответ, но Вы ничего не поняли и попросили В перевести. В сказал: «А ответил, что среди нас один рыцарь». С, в свою очередь, сказал: «Не верьте В, он лжёт». Кем может быть А? Кем может быть В? Кем может быть С?

2. а) Посетивший остров мудрец встретил двух жителей, А и В, и захотел узнать, кто они. Он спросил у А: “Вы оба рыцари?”. А ответил. Мудрец понял, что он не может определить, кто такие А и В, и задал еще один вопрос: “Вы одного типа?” А опять ответил, и мудрец понял, к какому типу относятся А и В. К какому же?
б) Вы гуляли по острову с мудрецом и встретили двух островитян — А и В. Мудрец спросил у А: «Кто-нибудь из вас является рыцарем?». А дал ответ, но вы его не услышали. Зато мудрец похвастался, что теперь он наверняка знает, кем является А и кем является В. Теперь и Вы скажите, кем они являются.

3. а) Вам повстречались двое островитян: А и В. А сказал следующее: «По крайней мере один из нас лжец». Кем может быть А? Кем может быть В?
б) Вам повстречались двое островитян: А и В. А сказал следующее: «Или я лжец, или В рыцарь». Кем может быть А? Кем может быть В?

4. Вам повстречались трое островитян — А, В и С. Двое сказали следующее:
а) А: Мы все лжецы.
В: Один из нас рыцарь.
б) А: Мы все лжецы.
В: Один из нас лжец.
Кем может быть А? Кем может быть В? Кем может быть С?

5. Пусть островитянин А сказал следующее: «Я лжец, а В не лжец». Кем может быть А? Кем может быть В?

6. Вам повстречались трое островитян — А, В и С. Двое сказали следующее:
А: В — лжец.
В: А и С однотипны.
Кем может быть С?

7. Вам повстречались трое островитян — А, В и С. А сказал: «В и С однотипны». У С спросили: «А и В однотипны?». Что ответит С?

9. Круги Эйлера. 6 июля

Кидая камни в воду, смотри на круги, ими образуемые, иначе сие занятие будет пустою забавою.

Козьма Прутков

1. В классе все увлекаются математикой или биологией. Сколько человек в классе, если математикой занимаются 15 человек, биологией — 20, а математикой и биологией — 10?

2. В саду у Ани и Вити росло 2016 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста (самые красивые) были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались неполитыми?

3. Ученики 7 класса решали две задачи. В конце занятия учитель составил четыре списка: I — решивших первую задачу, II — решивших только одну задачу, III — решивших по крайней мере одну задачу, IV — решивших обе задачи. Какой из списков самый длинный? Могут ли два списка совпадать по составу? Если да, то какие?

4. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 3? На 5? На 15? Не делятся ни на 3, ни на 5?

5. Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

6. В классе есть один ученик, который знает немецкий, французский, английский и китайский. Каждые три из этих языков знают по двое учеников. Каждые два — по шесть. Каждый из этих языков знают по 15 учеников. Каково наименьшее количество учеников в этом классе?

7. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме "р", которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме "к", которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово "кот", 18 других учеников — слово "рот", а остальных — слово "крот". При этом слова "кот" и "рот" оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно?

10. Оценка + пример. 7 июля

1. Какое наибольшее количество: а) ладей; б) слонов; в) королей; г) коней; не бьющих друг друга, можно расставить на доске 8×8?

2. В ряд выложены несколько апельсинов, мандаринов, яблок и бананов. Оказалось, что рядом с фруктами каждого вида можно найти фрукт любого другого вида. Какое наименьшее число фруктов могло быть выложено?

3. В медпункт на медосмотр пришли 10 детей и каждый оставил в коридоре пару тапочек. Все пары тапочек имеют разные размеры. Дети начали уходить из медпункта по одному, надевая любую пару тапочек, в которую могли влезть (т.е. каждый ребенок мог надеть пару тапочек, не меньшую, чем его собственные). В какой-то момент обнаружилось, что ни один из оставшихся детей не может найти себе пару тапочек, чтобы уйти. Какое наибольшее число детей могло навечно остаться в медпункте?

4. На клетчатой доске 100×100 закрасили n доминошек. Оказалось, что в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одна закрашенная клетка. При каком наименьшем n это возможно?

5. Какое наименьшее количество выстрелов необходимо сделать в игре "Морской бой" на поле 10×10, чтобы точно ранить расположенный корабль а) 1×4; б) 1×3; в) уголок из трёх клеток?

6. Какое наименьшее число королей необходимо поставить на шахматную доску так, чтобы любая клетка была побита хотя бы одним королем (король бьет клетку, на которой стоит сам)?

7. В пять горшочков, стоящих в ряд, Кролик налил три килограмма мёда (не обязательно в каждый и не обязательно поровну). Винни-Пух может одновременно взять только два горшочка, стоящие рядом. Какое наибольшее количество мёда сможет гарантированно взять и съесть Винни-Пух?

8. У каждого из 100 членов парламента не более двух близких друзей. Оказавшись в одной фракции, два близких друга начинают непрерывно болтать, и всякая работа в этой фракции прекращается. Сколько фракций наверняка хватит спикеру, чтобы обеспечить бесперебойную работу всей команды?

9. Каждый день Фрёкен Бок испекает квадратный торт размером 3×3. Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?

Добавка:

10. В таблице 10×10 закрасили в чёрный цвет k клеток. При каком наибольшем k все чёрные клетки можно гарантированно покрыть 5 строками и 5 столбцами?

11. Каждый из N депутатов недолюбливает ровно трёх других. На какое наименьшее количество фракций можно разделить парламент, чтобы ни один депутат не был во фракции с тем, кого недолюбливает?

12. На каждом из полей верхней и нижней горизонталей шахматной доски 8×8 стоит по фишке: внизу – белые, вверху – черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые – вверху?

11. Делимость. 7 июля

Бабушки на четыре не делятся!

м/ф «Бабушка удава»

1. Можно ли монетами в 14 и 35 шиллингов заплатить без сдачи сумму в 2015 шиллингов?

2. Коля и Петя купили одинаковые беговые лыжи. Сколько стоит одна пара лыж, если Петя уплатил стоимость лыж трёхрублевыми купюрами, Коля - пятирублевыми, а всего они дали в кассу меньше 10 купюр?

3. Десять шестиклассников стоят в очереди в буфет. Каждый хочет купить несколько булочек. Оказалось, что из любых двух стоящих рядом детей один хочет купить булочек вдвое больше, чем другой. Могло ли оказаться, что шестиклассники суммарно хотят купить 100 булочек?

4. Можно ли прямоугольник со сторонами $2,3 \times 3,5$ см разрезать на прямоугольнички $0,08 \times 0,07$ см?

5. а) Есть 2 бутылки объёмами 15 и 9 литров, а также бесконечный источник воды. Можно ли с их помощью отмерить ровно 4 литра воды?
б) 3 литра?

6. В банк можно положить за один раз 120 рублей или снять 300 рублей. На счету есть 1000 рублей, а других денег нет. Какую наибольшую сумму можно снять за несколько раз?

7. Можно ли расставить по кругу семь натуральных чисел так, чтобы любые два соседних числа имели общий делитель, больший 1, а любые два не соседних числа были взаимно просты?

8. Существуют ли 11 чисел таких, что у любых пяти есть общий делитель, а у любых шести нет?

9. На окружности отмечены 2014 точек. В одной из них сидит кузнечик, который делает прыжки по часовой стрелке либо на 57 делений, либо на 10. Известно, что он посетил все отмеченные точки, сделав наименьшее количество прыжков длины 10. Какое?

10. У царя Дадона в одиночных камерах сидели 100 пленников. Поворот ручки отпирает каждую камеру, следующий поворот запирает, еще один отпирает и т.д. К празднику царь решил освободить часть пленников и накануне послал слугу, который повернул ручку каждой камеры. Все двери оказались отперты. Но тут пришел второй посыльный и повернул ручку на дверях каждой второй камеры. Следующий посланец повернул ручки 3-й, 6-й, 9-й, 12-й и т.д. камер. Еще один - в каждой четвертой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ручку сотой камеры. Сколько пленников освободил Дадон?

11. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме своих собственных делителей (то есть сумме делителей, отличных от всего числа.) Всякое ли число является делителем некоторого совершенного?

12. Скупой рыцарь хранит золотые монеты в шести сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну в эти два сундука. Еще он заметил, что если открыть любые 3, 4 или 5 сундуков, то тоже можно переложить лежащие в них монеты таким образом, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга так и не узнал, можно ли разложить все монеты поровну по всем шести сундукам. Можно ли, не заглядывая в заветные сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

13. Из чисел от 1 до 1000 выбрали 501 число. Докажите, что найдутся два выбранных числа, одно из которых делится на другое.

12. Разнобой. 9 июля

Две мясных котлеты гриль,
Специальный соус, сыр,
Огурцы, салат и лук,
Всё на булочке с кунжутом.
Только так!
И это биг мак!

Реклама

1. Братья Витя и Вася играли в догонялки. Витя бежит в полтора раза быстрее Васи. Сперва Витя ждёт 30 секунд, давая Васе возможность убежать, а затем пускается в погоню. За сколько секунд Витя догонит Васю?

2. У Пети в кармане несколько монет. Если Петя наугад вытащит из кармана 3 монеты, среди них обязательно найдется монета “1 рубль”. Если Петя наугад вытащит 4 монеты из кармана, среди них обязательно найдется монета “2 рубля”. Петя вытащил из кармана 5 монет. Назовите эти монеты.

3. По кругу расставлены 50 фишек. Дима и Саша по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки вначале не стояли рядом, выигрывает Дима, а в противном случае выигрывает Саша. Саша ходит первым. Кто выиграет при правильной игре?

4. В каждой клетке таблицы 37×5 (37 строк, 5 столбцов) стоит натуральное число от 1 до 10. В каждой строке числа упорядочены слева направо в неубывающем порядке. На любой диагональной линии, направленной вправо-вниз, все числа равны. Докажите, что в таблице есть строка, содержащая 5 одинаковых чисел.

5. Можно ли посадить в саду 9 яблонь, чтобы можно было указать а) 8; б) 10 рядов с тремя яблонями?

6. Можно ли в вершинах куба расставить натуральные числа так, чтобы среди любых двух чисел, стоящих на концах одного ребра, одно делилось на другое, а для любых других пар чисел такого свойства бы не было.

7. Сколькими способами можно разрезать прямоугольник 2×10 на доминошки?

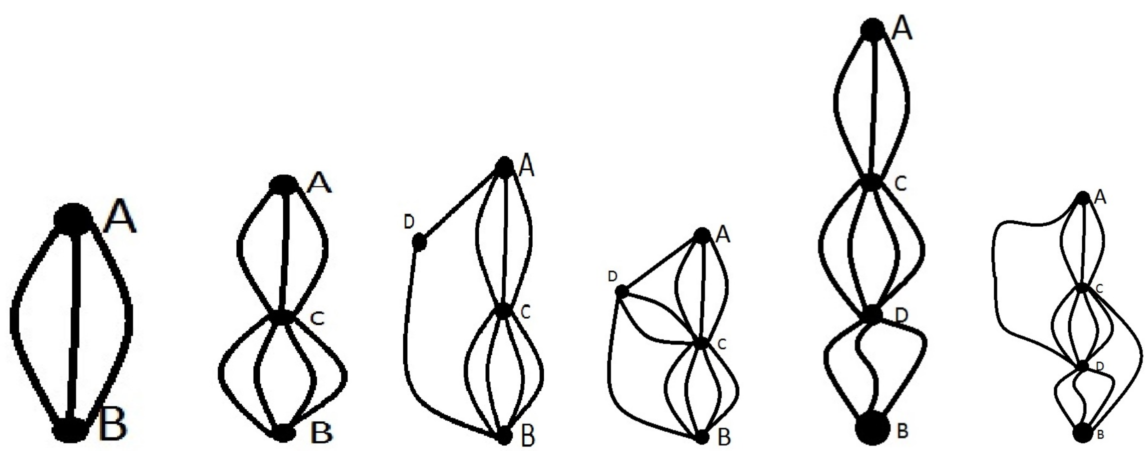
8. На Далёком Острове живёт 100 голубоглазых островитян. Цвет глаз является запретной темой среди жителей острова, и никто из жителей не знает цвета своих глаз. Более того, если какой-то житель острова узнаёт цвет своих глаз, то день он борется с горем, а затем не выдерживает и уплывает с острова. Однажды мореплаватель приплыл на остров. После тёплого приёма он сказал на общем собрании: “Среди вас есть голубоглазые”. Покинет ли кто-то после этого остров, и если да, то сколько человек и когда?

13. Подсчёт числа способов. 9 июля

“Чтоб музыкантом быть, так надобно уменье
И уши ваших понежней”,
Им отвечает Соловей:
“А вы, друзья, как ни садитесь,
Всё в музыканты не годитесь”.

И. А. Крылов, Квартет

1. Сколькими способами можно добраться из города A в город B на каждой из следующих картинок? (Предполагается, что двигаться по дорогам можно только сверху вниз.)



2. а) В гардеробе у джентльмена 5 рубашек, 3 пары брюк, 2 пары туфель, 2 пиджака. Сколькими способами джентльмен может одеться?
б) Та же задача, но пиджак надевать необязательно.

3. Сколько можно образовать чисел, ровно по одному разу использовав цифры а) от 1 до 4; б) от 0 до 4?

4. 8 футбольных команд сыграли друг с другом однокруговой турнир. Сколько было сыграно матчей?

5. А если n футбольных команд?

6. Сколько четырёхзначных чисел можно составить, используя не более одного раза числа от 1 до 6?

7. Сколькими способами в команде из 6 человек можно выбрать а) капитана и заместителя; б) двоих людей, которые отправятся в буфет; в) четверых, которые будут усиленно решать задачи?

Добавка

8. В столовой есть 4 салата, 2 супа, 3 вторых блюда и 2 напитка. Сколькими способами можно выбрать себе обед (состоящий хотя бы из одного блюда)?

9. В классе 13 детей. Сколькими способами можно выбрать нескольких из них для участия в походе?

10. Сколько слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах а) "ФЛАГШТОК" б) "ЛИНИЯ" в) "МОЛОКО" г) "БИССЕКТРИСА" д) "МАТЕМАТИКА"

11. В танцевальной группе 10 мальчиков и 10 девочек.
а) Сколькими способами можно составить из них десять пар "мальчик-девочка"?
б) А если нужно составить 6 пар?

12. Сколькими способами можно разбить 20 человек на пары?

13. Найдите сумму всех пятизначных чисел, составленных из нечётных цифр.

14. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга?

15. Сколько существует счастливых шестизначных билетов с суммой цифр 30? (*Билет называется счастливым, если сумма первых трёх цифр равна сумме других трёх.*)

16. Назовём две цифры близкими, если они отличаются на 1. Кроме того, будем считать близкими цифры 0 и 9. Сколько существует десятизначных чисел, у которых любые две соседние цифры близкие?

17. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

14. Конструкции. 10 июля

Сперва добейся, потом критикуй.

Народная мудрость

Разминочные задачи. После недолгого раздумья кажется, что нет препятствий. Или наоборот.

В футбольном турнире за победу дают 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение очков не присуждается.

1. В чемпионате Вишкиля по футболу команда "Фумигатор" забила больше всех голов. Могла ли она занять последнее место? Могла ли она не набрать ни одного очка?

2. На следующий год команда "Фумигатор" одержала больше всех побед. Могла ли она снова занять последнее место?

3. А можно ли занять не первое место, одержав больше всех побед и потерпев меньше всех поражений?

4. Сумма нескольких чисел равна 2015. Может ли сумма их квадратов быть меньше $\frac{1}{2015}$?

5. Квадрат со стороной 1 порезали на прямоугольники. Может ли сумма периметров прямоугольников быть больше миллиарда?

6. Фирма проработала год, подсчитывая свою прибыль каждый месяц. Каждые три подряд идущих месяца суммарная прибыль была отрицательной. а) Может ли суммарная прибыль за весь год быть положительной? б) А за первые 8 месяцев?

7. Некоторые шестиклассники дружат друг с другом, и дружба взаимна. После завтрака некоторые шестиклассники задержались в столовой. Могло ли у каждого из них быть разное количество друзей среди задержавшихся? А среди всего отряда?

8. В магазин привезли платья трёх цветов и трёх фасонов. Всегда ли можно выбрать для витрины 3 платья, чтобы были представлены все цвета и все фасоны?

9. Можно ли разрезать квадрат на несколько попарно различных прямоугольников?

10. Можно ли закрасить чёрным некоторые клетки квадрата 2015×2015, чтобы в каждом прямоугольнике 2×3 была ровно одна закрашенная клетка?

Надо исхитриться.

11. Красный квадрат покрывают 100 белых квадратов. При этом все квадраты одинаковы и стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один из белых квадратов так, что оставшиеся белые квадраты все еще будут покрывать целиком красный квадрат?

12. Можно ли расположить 11 одинаковых квадратов так, чтобы они не налегали друг на друга, и выполнялось условие: как бы ни раскрасить квадраты в три цвета, обязательно найдутся квадраты одного цвета, имеющие общий участок границы, то есть прилегающие друг к другу частью стороны (не точкой)?

13. Петя написал на доске 3 числа, затем Вася прибавил к каждому из них сумму его цифр. Могли ли все три васины суммы быть равными?

14. Можно ли вырезать из бумаги 100 прямоугольников так, чтобы ни один из них нельзя было накрыть остальными?

Поможет правило, отсутствие хаоса.

15. Можно ли расставить в клетках квадрата 4×4 числа от 1 до 16 так, чтобы число в каждой клетке было или меньше всех чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, или больше всех этих чисел?

16. Можно ли в кубе $8 \times 8 \times 8$ выделить несколько маленьких кубиков так, чтобы в любом ряду из 8 клеток (горизонтальной или продольной строчке, а также столбце) был ровно один отмеченный кубик?

17. Можно ли разбить все натуральные числа на 6 групп так, чтобы для любого натурального n числа $n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n$ были в шести разных группах?

15. Графы-1. 10 июля

Вместо эпиграфа

1. В 20-этажном доме испорчен лифт: он может либо подниматься на 8 этажей вверх, либо спускаться на 13 этажей вниз. Можно ли с помощью этого лифта попасть с 20-ого этажа на 1-ый? (Когда сверху меньше 8 этажей, то лифт вверх не поедет. Аналогично вниз.)

2. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы число, составленное из двух соседних цифр, делилось либо на 7, либо на 13.

3. В спортклубе тренируются 100 толстяков, веса которых равны 1кг, 2кг, …, 100кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить, чтобы ни в какой команде не было двух толстяков, один из которых в два раза тяжелее другого?

4. (**Лемма о хороводах.**) В математической олимпиаде, состоящей из 20 задач, участвовало 20 учеников. Каждый ученик решил на олимпиаде ровно две задачи. Каждую задачу решило ровно два ученика. Докажите, что можно устроить разбор так, что каждая из задач будет разобрана учеником, решившим её, и каждый ученик расскажет одну из решённых им задач.

5. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что
а) из любого города можно добраться до другого (возможно, проезжая другие города);
б) существует циклический маршрут, проходящий по четырём городам.

Подсчёт степеней вершин в графе.

6. В классе 30 человек. Может ли быть так, что у 9 из них по 3 друга (в этом классе), у 11 — по 4, а 10 — по 5 друзей?

7. На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число закрашенных соседей?

8. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и двумя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

9. В лагерь приехали дети. У каждого из детей ровно 5 знакомых мальчиков и ровно 5 знакомых девочек. Докажите, что число детей делится на 4.

10. В классе есть 5 задир и молчуны. Каждый задира обижает не менее половины учеников всего класса. Докажите, что какого-то из молчунов обижают более половины задир, если в классе всего 30 учеников.

11. Некоторые жители деревни дружат друг с другом. Назовём человека необщительным, если у него меньше четырёх друзей. Назовём человека чудаком, если все его друзья необщительные. Докажите, что необщительных не меньше, чем чудаков.

Добавка

12. В стране любые два города соединены одной авиалинией, принадлежащей одной из двух авиакомпаний. Оказалось, что:
а) Среди любых четырёх городов среди них ровно три рейса первой авиакомпании. Доказать, что авиалиний первой и второй компаний равное количество.
б) Среди любых пяти городов не более четырёх рейсов выполняется первой авиакомпанией. Доказать, что линий первой компании меньше, чем второй.

13. В стране 1000 городов, любые два соединены авиалинией (возможно, односторонней). Докажите, что есть город, выехав из которого, можно посетить все оставшиеся (возможно, не имея возможности вернуться назад самолётом).

14. В стране любые два города соединены одной авиалинией, принадлежащей одной из двух авиакомпаний. Докажите, что можно закрыть все линии одной авиакомпании так, чтобы из каждого города можно было дойти до каждого.

15. В стране 100 городов, из каждого выходит больше 40 дорог. Известно, что нет циклического маршрута, проходящего по трём городам. Докажите, что нет циклического маршрута, проходящего по пяти городам.

16. Разнобой-3. 10 июля

Смешались в кучу кони, люди...

М. Ю. Лермонтов, Бородино

1. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы все клетки шахматной доски были побиты?

2. Катер плывёт из города А в город Б по реке 4 часа, а обратно плывёт 5 часов. Сколько времени будет плыть плот из А в Б?

3. Сколькими способами можно расселить 10 ЛМШат в двухместную, трёхместную и пятиместную комнату?

4. В квадрате 7×7 клеток разместили 16 плиток 1×3 (плитки не имеют общих клеток). Какая из клеток могла остаться свободной?

5. Посадите в саду 10 яблонь так, чтобы можно было указать 5 рядов по 4 яблони.

6. У Пети в распоряжении есть чашечные весы без гирь. Он может положить что-то на каждую чашку, и весы либо покажут равновесие, либо покажут, какая чаша перевесила.
а) У Пети есть 9 монет. Оказалось, что одна из них фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково. А фальшивая легче настоящих. Как за два взвешивания на чашеных весах найти фальшивую монету?
б) Тот же вопрос, но теперь монеты, участвующие во втором взвешивании не должны зависеть от результатов первого взвешивания.
в) У Васи есть гирьки массами 1г, 2г, ... 9г. Одна из гирек всё таки оказалась дефектной, и её масса меньше, чем должна быть. Как за два взвешивания найти дефектную гирьку?

7. Среди натуральных чисел от 1 до 1200 выбрали 372 различных числа так, что никакие два из них не различаются на 4, 5 или 9. Докажите, что число 600 является одним из выбранных.

17. Геометрия-1. Козы. 11 июля

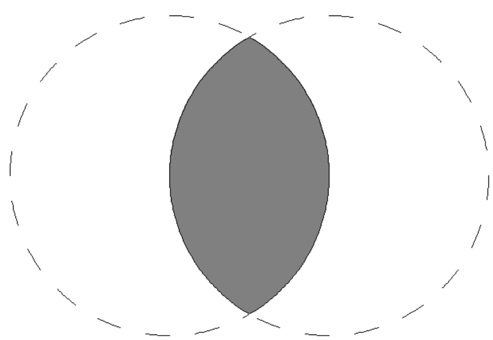
Далеко-далеко на лугу пасутся ко...

Фольклор

Первая часть этого занятия посвящена козам. Они прожорливы и съедают всё, до чего могут дотянуться. Поэтому коз держат на привязи.

1. Нарисуйте участок луга, который выест коза, привязанная верёвкой к одиноко стоящему на лугу колышку.

2. Удержите козу на участке изображённой формы, показанной на рисунке (привяжите её с помощью верёвок и колышков так, чтобы она могла есть траву лишь внутри некоторого участка).



3. Математик прогуливался по лугу, держа козу на поводке длины 1 м. Путь математика имел вид прямоугольника размером 3м $\times$ 5м. Нарисуйте участок, на котором могла побывать при этом коза, не обрывая поводка.

4. На лугу между двумя колышками натянем верёвку. У второй верёвки один конец привяжем к ошейнику козы, а на другом сделаем петлю, скользящую по первой верёвке. Какой участок выест коза?

5. Удержите козу а) в полукруге; б) в квадрате; в) в данном прямоугольнике.

6. Удержите козу в а) треугольнике; б) равностороннем шестиугольнике.

7. Как действовать, чтобы "ограничить" козу заданным выпуклым многоугольником?

18. Матбой-междусобой. 12 июля

1. В классе 14 девочек. Каждую из них спросили, сколько ее одноклассниц имеют такое же имя, как она, а также спросили, сколько ее одноклассниц имеют такую же фамилию, как она. Среди всех двадцати восьми ответов встретились все числа от 0 до 6. Докажите, что какие-то две девочки имеют одинаковые имена и фамилии.

2. На одной известной картине 444 бурых медведя. Двое ценителей искусства по очереди перекрашивают по одному медведю. Если медведь был бурым, он становится белым, если был белым – становится бурым. Делая ход, игрок может выбрать произвольного медведя (в том числе и ранее перекрашенного), но при условии, что после смены цвета картина не станет точно такой же, какой она была в какой-то предыдущий момент. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу? Если да, то какой?

3. Назовем n-значное число всесторонне развитым, если к нему справа можно приписать три различные цифры так, чтобы каждое из трех полученных $(n+1)$-значных чисел было простым. Какое наименьшее значение может принимать разность (из большего меньшее) двух различных всесторонне развитых чисел?

4. На шахматной доске стоит 32 короля. Какое наибольшее число из них можно заведомо оставить на доске (убрав всех других), чтобы они не били друг друга?

5. По кругу расставлено 2014 конфет: жёлтых и зелёных. Вася может за один ход съесть две одноцветные соседние конфеты (после этого окружавшие их конфеты становятся соседними). Петя заметил, что таким образом Вася может съесть все конфеты, и поменял две соседние разноцветные местами. Докажите, что теперь Вася не сможет съесть все конфеты.

6. На столе лежат 119 карточек, пронумерованных числами от 1 до 119. Петя и Вася играют в следующую игру: Вася выбирает любую карточку и ставит её на стол. Петя берёт любую из оставшихся и ставит её справа от первой положенной, потом Вася берёт любую из 117 оставшихся и кладёт справа от второй положенной и т.д. При этом каждое число на карточке должно давать в сумме с числом на предыдущей карточке полный квадрат. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7. На острове в Тихом океане живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. На президентских выборах было $n > 3$ кандидатов. Во время теледебатов все кандидаты по очереди сделали по одному заявлению. k-й по счету кандидат сказал: “Среди всех кандидатов, кроме меня, лжецов на k больше, чем рыцарей”. Сколько было кандидатов?

8. Можно ли разбить квадрат на 2015 треугольников, среди которых ровно 2014 одинаковых?

19. Матбой-междусобой. 12 июля

1. 2013 школьников встали в круг. Каждый из них сказал какое-то из следующих утверждений:

1. У моих соседей в сумме 2015 конфет.
2. У моих соседей в сумме 265 конфет.

Докажите, что кто-то из них солгал.

2. По дороге из А в Б ездят 5 автобусов. Каждый автобус едет прямо с постоянной скоростью и, когда доезжает до одного из пунктов А,Б — разворачивается и едет обратно. Однажды, не застав в А автобуса, Вася пошёл до Б пешком. По пути он 20 раз встретил автобус, идущий навстречу. Сколько раз его обгонял автобус, если дойдя до Б, Вася не застал там ни одного автобуса?

3. Билетом называется последовательность из 7 цифр. Билет называется почти счастливым, если сумма каких-то его трёх цифр равна сумма четырёх остальных. Докажите, что количество почти счастливых билетов не более 5000000.

4. В классе 14 девочек. Каждую из них спросили, сколько ее одноклассниц имеют такое же имя, как она, а также спросили, сколько ее одноклассниц имеют такую же фамилию, как она. Среди всех двадцати восьми ответов встретились все числа от 0 до 6. Докажите, что какие-то две девочки имеют одинаковые имена и фамилии.

5. Можно ли разрезать квадрат 5×5 по клеткам на 7 частей, никакие 2 из которых не состоят из одинакового числа клеток?

6. На острове Правды живут только рыцари и лжецы: рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды несколько островитян встали в очередь. Каждый из них сказал: «Впереди меня столько же рыцарей, сколько и сзади». Пока они это говорили, очередь не менялась: никто не покидал очередь, никто в нее не вставал, никто не переходил внутри очереди с одного места на другое. Сколько рыцарей могло быть в очереди? Укажите все варианты.

7. Семь различных натуральных чисел таковы, что сумма любых трёх из них меньше суммы четырёх остальных. Докажите, что все числа не меньше 10.

8. Двое играют в игру на белой клетчатой доске размером 13×12. За ход разрешается выбрать любую *незакрашенную* клетку и закрасить одну из четырёх горизонтальных или вертикальных “дорожек” от этой клетки до края доски (дорожка обязательно включает начальную клетку, а есть ли там уже закрашенные клетки, неважно). Выигрывает тот, кто закрашивает последнюю клетку. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?

20. Поиск соответствий. Как считать, не считая? 14 июля

С каждым лайком умирает один котёнок.

Юные маркетологи

1. На тренировку пришли 20 опытных футболистов и Вася. Тренер разрешает набрать команду либо из пяти опытных футболистов, либо из шести человек, но если только один из них Вася. Какой из этих вариантов можно реализовать бОльшим числом способов?

2. На окружности отмечено 2015 синих и одна красная точка. Чего больше: многоугольников только с синими вершинами или многоугольников, где есть и красная вершина тоже (остальные при этом синие)?

3. Каких шестизначных чисел больше: тех, в которых цифры идут в убывающем порядке или тех, в которых цифры идут в возрастающем порядке?

4. а) Каких шестизначных счастливых билетов больше: с суммой цифр 30 или с суммой цифр 24?

б) Каких шестизначных билетов больше: счастливых или с суммой цифр 27?

5. а) Хромой король умеет ходить только вверх, вправо и вправо-вверх. Каких путей хромого короля больше: из **a1** в **h8** или из **a1** в **h7**?

б) Докажите, что путей из **a1** в **h8** нечётное количество.

6. Назовём *хромой ладьёй* фигуру, которая может ходить только в соседние по стороне клетки. Рассмотрим все пути такой фигуры по шахматной доске, обходя все клетки по одному разу. Докажите, что в клетке $a1$ (угловой) путей начинается больше, чем тех, которые начинаются в $b2$ (соседней с $a1$ по диагонали).

7. Каких пятизначных чисел больше: с суммой цифр 36 или с суммой цифр 37?

8. Вася смотрит на клетчатый квадрат 10×10. Он считает все пути из левого нижнего узла в правый верхний, идущие по линиям сетки вправо или вверх и не поднимающиеся выше главной диагонали.
За соседней партой сидит Петя, который расставляет в прямоугольнике 2×10 числа от 1 до 20 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце числа шли по возрастанию. Докажите, что у Пети и Васи получлось одно и то же количество способов.

9. Машино любимое число 7. Поэтому Маша отметила на окружности 77 точек. Затем из каждой точки она провела стрелочку в какую-то другую так, что в каждую точку вела ровно одна стрелочка.
а) Докажите, что все точки разбиваются таким образом на циклы.
б) Пусть Маша посчитала только те способы проведения стрелок, при которых получается 7 циклов.
Света выписывала в некотором порядке числа от 1 до 77 так, чтобы ровно 7 чисел были больше всех идущих перед ними. Докажите, что машино количество способов такое же, как и у Светы.

21. Делимость. Арифметика остатков. 14 июля

Твой рост — 38 попугаев и одно попугайское крылышко, но крылышко можно не считать!

м/ф “38 попугаев”

Определение. Говорят, что при делении числа a на число $b > 0$ получаются *неполное частное q и остаток r*, если $a = qb + r$, q — целое и $0 \leqslant r < b$. Если же r при этом равно нулю, то говорят, что *a делится на b* (обозначается: $a \,\vdots\, b$).

Замечание. Неполное частное и остаток при любом делении существуют и единственны, т. е. находятся однозначно.

Упражнение. Найдите остатки от деления: а) 5 на 3; б) 3 на 5; в) -1 на 3; г) $2\pi + 1$ на π.

Утверждение. Если числа a и c дают остатки b и d соответственно при делении на m, то числа $a + c$ и ac дают те же остатки при делении на m, что и числа $b + d$ и bd, соответственно.

Доказательство. Если $(a - b) \,\vdots\, m$ и $(c - d) \,\vdots\, m$, то $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) \,\vdots\, m$ и $ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c - d) + (a - b)d \,\vdots\, m$.

Упражнения.

1. Число a даёт остаток 1 при делении на 5. Что можно сказать про остаток a при делении на 6?

2. Что можно сказать о чётности остатка, получающегося при делении чётного на чётное, нечётного на чётное, чётного на нечётное, нечётного на нечётное?

3. Число a даёт остаток 2 при делении на 3 и остаток 3 при делении на 5. Какой остаток может давать число a при делении на 15? на 30?

Задачи.

1. Натуральное число a таково, что $a+2$ делится на 5. Докажите, что $7a+4$ также делится на 5.

2. Найдите все возможные остатки, которые могут давать квадраты натуральных чисел (или *точные квадраты*) при делении на: а) 3; б) 4; в) 5.

3. Докажите, что если $a+b$ делится на 7, то и число $\overline{aba}$ также делится на 7.

4. Пусть $p>3$ — простое число. Докажите, что p^2-1 делится на 24.

5. Докажите, что уравнение а) $x^2+y^2=2015$; б)$15x^2-7y^2=9$ не имеет решений в целых числах.

6. Найдите последнюю цифру числа 3^{999}.

7. Найдите остаток от деления на 8 числа 267^{2015}.

8. Докажите, что $123^{128}+4^{666}$ делится на 17.

9. Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что его предпоследняя цифра нечётна.

10. Может ли десятичная запись точного квадрата состоять из 100 нулей, 100 единиц, 100 двоек и 100 троек?

11. У числа 2^{100} нашли сумму цифр, у результата снова нашли сумму цифр и т.д. В конце концов получилось однозначное число. Найдите его.

12. Докажите, что разность произвольного 2001-значного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

Добавка.

13. Докажите, что при любом натуральном n число $12^{2n+1}+11^{n+2}$ делится на 133.

14. Стёпа играл в солдатиков. Сначала он попытался построить их парами, но один солдатик оказался лишним. Тогда Стёпа стал строить солдат тройками, но снова один остался. Та же история повторялась и при построениях по 4, по 5 и по 6. Стёпа уже приготовился выбрасывать непослушного, но тут ему наконец удалось построить всех в колонну по 7. Сколько солдат могло быть у Стёпы, если их было меньше 1000?

15. Сколько существует наборов из десяти подряд идущих натуральных четырёхзначных чисел таких, что первое из них делится на 10, второе — на 9, третье — на 8, ..., и последнее — на 1?

22. Разнобой. 14 июля

А потом началось самое забавное.

Наполеон

1. Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Все жители деревни встали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли тот. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы. Определите и вы, чему она равна.

2. Передние покрышки автомобиля “Антилопа Гну” выходят из строя через 25000 км, а задние — через 15000 км. Когда О. Бендер должен поменять их местами, чтобы машина прошла максимальное расстояние? Чему равно это расстояние?

3. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причём одинаковые цифры на одинаковые буквы, а разные — на разные. В итоге у него получилось $AB \cdot CD = EEFF$. Докажите, что он где-то ошибся.

4. На берегу моря стоит одноэтажный отель, в котором 20 комнат с окнами на море. Постоялец может занимать либо две соседние комнаты в течение одного дня, либо одну комнату в течение двух дней. Комната стоит 1 гульден в день. Согласно книге посетителей, в первый день сезона комната №1 была свободна, а в последний, сотый день сезона свободна была комната №20. Докажите, что выручка отеля за сезон не превзошла 1996 гульденов.

5. На доске в ряд написано 50 чисел. Докажите, что можно стереть 42 из них так, чтобы оставшиеся числа шли либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания.

23. Взвешивания. 15 июля

Всему виною деньги, деньги! Всё зло от них,
мне б век их не видать!

м/ф “Остров сокровищ”

1. В вашем распоряжении есть чашечные весы без гирь.
а) Среди 9 монет одна фальшивая (она легче настоящих). Как за два взвешивания найти фальшивую монету?
б) Среди 27 монет одна фальшивая. Как за три взвешивания найти фальшивую монету? А если монет 22?

2. Среди восьми монет, возможно, есть одна лёгкая фальшивая монета (но её может и не быть). Как за два взвешивания найти фальшивую монету, если она есть, или доказать, что её нет?

3. Есть одна золотая, 3 серебряные и 5 бронзовых медалей. Известно, что одна из них фальшивая (весит легче настоящей). Настоящие медали из одного материала весят одинаково, а из разного — нет. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую медаль?

4. Есть 5 серебряных и 4 золотые монеты. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей золотой). Если фальшивая монета серебряная, то она легче настоящей серебряной, а если золотая, то тяжелее настоящих золотых. За какое минимальное число взвешиваний можно найти фальшивую монету?

5. Пусть среди 24 монет ровно половина — золотые, а остальные серебряные. Одна из этих монет фальшивая. Если фальшивая монета серебряная, то она легче настоящей серебряной, а если золотая, то тяжелее настоящих золотых. Если на чашу весов положить больше 4 золотых или больше 4 серебряных монет, то весы сломаются. Как найти фальшивую монету за три взвешивания?

6. Имеются 4 гири с маркировками 1 г, 2 г, 3 г и 4 г. Одна из них дефектная: более лёгкая или более тяжёлая, чем указано. Можно ли за два взвешивания узнать, какая из гирь дефектная, и при этом определить, легче она или тяжелее, чем на этой гире указано?

7. Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, все веса которых известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стёрлись, и только завхоз знает, где что. Он может это всем доказать (то есть обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами, показывающими разницу весов. Докажите, что ему для этой цели хватит четырёх взвешиваний.

8. Даны четыре монеты, среди которых могут оказаться фальшивые. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Найдите наименьшее количество взвешиваний, которые нужно сделать на одночашечных весах со стрелкой, чтобы найти все фальшивые монеты.

Добавка

9. Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. За какое наименьшее количество взвешиваний можно гарантировано найти хотя бы одну настоящую монету?

10. Есть 9 гирь массами 1 г, 2 г, ..., 9 г, причем гиря большей массы имеет больший размер. Одна из гирь потерялась. Как за два взвешивания на чашечных весах выяснить, какая именно из гирь потерялась?

11. а) По кругу лежат 9 одинаковых с виду котлет. Известно, что среди них семь одинаковых, а две более лёгкие, и они лежат рядом. При этом лёгкие котлеты не обязательно равны друг другу. Как найти их двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь?
б) Найдите все лёгкие котлеты, если одинаковых не 7, а 6, а лёгких — три подряд.

12. Имеются 7 мешков, в некоторых из них все монеты фальшивые, а в остальных все монеты настоящие. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9. Как за одно взвешивание на весах со стрелкой найти все мешки с фальшивыми монетами?

24. Игры-2. 15 июля

Эта игра не для стариков! Пришлите мальчиков!

У. Хейс

1. В передаче “Форт Боярд” в одном из конкурсов нужно было сыграть с мудрецом в нехитрую игру. На столе лежат 20 палочек. Два игрока по очереди берут от одной до трёх палочек. Кто забирает последнюю палочку, тот побеждает. Предпочли бы вы начинать в этой игре или быть вторым?

2. Конь стоит на поле **a1**. За ход разрешается передвигать коня на две клетки вправо и одну клетку вверх или вниз, или на две клетки вверх и на одну вправо или влево. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Костя и Виталик по очереди берут по одной карточке. Костя хочет, чтобы сумма чисел на его карточках делилась на 25. Сможет ли Виталик ему помешать?
а) Костя ходит первым.
б) Костя ходит вторым.

4. На столе лежит две кучи, в каждой из которых по 7 камней. За один ход можно взять 2 камня из одной кучи и один из другой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. На доске написано число 12345. За ход разрешается вычесть из написанного числа любую его ненулевую цифру. Выигрывает тот, после чьего хода на доске будет написан ноль. Кто выиграет при правильной игре.

6. Петя и Вася играют в игру. На доске записано число 2015. Каждым ходом игрок может отнять от числа любой из его делителей. Проигрывает тот игрок, после хода которого на доске будет записан 0. Кто выигрывает при правильной игре?

7. а) Алиса и Белая Королева играют в такую игру: Королева своим первым ходом ставит шашку на любую клетку, после чего, начиная с Алисы, они поочередно двигают его по доске (в соседнюю по стороне или по диагонали клетку), причем запрещается ходить в ранее посещенные клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Сможет ли Алиса выиграть? б) А если фишку надо двигать ходом коня? в) А если на соседнюю по диагонали?

8. Двое по очереди выставляют коней на шахматную доску. Каждый новый конь должен бить предыдущго, а больше никаких коней бить не может. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

25. Постепенное конструирование. 16 июля

Шаг за шагом, босиком по воде...

К. Кинчев (гр. АлисА), "Красное на чёрном"

1. Можно ли разложить а) 7 монет в 3 кошелька; б) 15 монет в 4 кошелька; в) 1000 монет в 10 кошельков так, чтобы любое количество монет вплоть до максимального можно было выдать, не открывая кошельки?

2. Докажите, что трёхкопеечными и пятикопеечными монетами можно выдать любую сумму, большую 7 копеек.

3. Можно ли разрезать разрезать квадрат на а) 6; б) 7; в) n квадратов (не обязательно различных)?

4. В маленькой коробке 4 пакета сока, а в большой — 9. Дежурный по столовой утверждает, что он может набрать любое нужное число пакетов сока, начиная с 24, не вскрывая коробок. Прав ли он?

5. Можно ли представить единицу в виде суммы трёх различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем? б) А если дробей 4? в) А если их 10?

6. Можно ли подобрать 10 натуральных чисел так, чтобы разность любых двух из них была их наибольшим общим делителем?

7. Назовём словом любую последовательность букв русского алфавита. Назовём подсловом слова любые несколько подряд идущих букв этого слова. Вася выписал слово, в котором нельзя выделить два одинаковых подслова, идущие подряд. Могло ли оказаться, что это свойство нарушится, если дописать к васиному слову справа любую букву?

8. Можно ли посадить несколько кустов в саду так, чтобы от каждого куста было ещё 10 кустов на расстоянии 10 метров от него?

26. Подсчёт числа способов-2. 16 июля

Мне нужно выбрать всего лишь несколько вещей.

И.Маркос

1. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт (52 листа):
а) 4 карты разных мастей,
б) 4 карты одной масти,

в) 4 карты одного цвета,
г) 4 карты разных мастей так, чтобы карты одного цвета были одинакового номинала (например: 6Ч, 6Б, 9П, 9К),
д) 4 карты разного номинала (например: 6, 9, Т, В),
е) 4 карты, среди которых есть хотя бы одна карта червовой масти?

2. В классе 7 мальчиков и 8 девочек. Сколькими способами можно выбрать 5 человек так, чтобы среди них был хотя бы один мальчик и хотя бы одна девочка?

3. Сколькими способами 5 девушек и 3 юноши могут разбиться на две команды по 4 человека, так чтобы в каждой было хотя бы по одному юноше?

4. Сколько существует 6-значных чисел в которых:
а) все цифры различные,
б) все цифры идут в порядке возрастания,
в) все цифры идут в порядке убывания?

5. Сколькими способами можно раздать колоду из 36 карт 6 игрокам для игры в “Дурака”?

6. На поле **a1** шахматной доски стоит ладья. Она может делать ход на одну клетку вверх или на одну клетку вправо. Сколькими способами ладья сможет добраться до поля **h8**?

7. Сколькими способами можно поставить а) в шеренгу б) в круг 7 человек так, чтобы Вова, Лёня и Саша стояли рядом?

8. Сколькими способами можно разложить 5 шаров по 3 ящикам, если ящики а) не могут быть пустыми б) могут быть пустыми?

9. Сколькими способами можно представить число 10 в виде суммы 3 натуральных чисел?

10. Сколькими способами можно раздать трём людям 15 а) разных б) неразличимых конфет?

11. Сколькими способами можно разложить k шаров по n ящикам?

12. Сколько существует шестизначных чисел, цифры в которых идут в невозрастающем порядке?

13. У Будимира Александровича есть 3 вагончика красного цвета, 4 синего и 7 зеленого. Сколькими способами он может собрать состав поезда так, чтобы
а) никакие два вагончика синего цвета не стояли рядом,
б) никакие два вагончика одного цвета не стояли рядом?

14. а) На полке стоят n книг. Сколькими способами можно выбрать с полки k книг так, чтобы никакие две выбранные книги не стояли рядом?

б) За круглым столом короля Артура сидят n рыцарей. Каждый из них враждует со своими соседями. Король хочет составить отряд из k рыцарей. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы в этом отряде не было врагов?

27. Скорости. 17 июля

Скорость ни разу никого не убила. Внезапная остановка — вот что убивает.

Джереми Кларксон

1. Ахиллес бежал по дороге и увидел перед собой черепаху в 400 метрах впереди. Ахиллес бежит со скоростью 30 км/ч, а черепаха плетётся со скоростью 20 метров в минуту. Через какое время Ахиллес догонит черепаху?

2. Петя и Вася тренируются, бегая по кругу с постоянными скоростями. Известно, что если бы Петя бежал в противоположном направлении, то они встречались бы втрое чаще. Во сколько раз отличаются скорости Пети и Васи?

3. Будимир Александрович вышел из клуба в столовую. Одновременно с ним из столовой в клуб вышел Леонид Андреевич. В момент встречи Будимиру Александровичу оставалось идти еще 4 минуты, а Леониду Андреевичу – одну минуту. Через сколько минут после выхода они встретились?

4. Если в забеге на 110 м с барьерами жираф опережает носорога на 10 м, а носорог выигрывает у бегемота 11 м, то на какое расстояние на этой же дистанции жираф опередит бегемота?

5. Имеющегося на катере запаса топлива достаточно, чтобы проплыть либо 120 км по течению реки, либо 72 км против течения. Какое расстояние смог бы проплыть катер с тем же запасом топлива по той же реке туда и обратно? (Собственная скорость катера и расход топлива постоянны.)

6. Расстояние AB равно 100 км. Из A и B одновременно выезжают навстречу друг другу велосипедисты со скоростями 20 км/ч и 30 км/ч соответственно. Вместе с первым из A вылетает муха со скоростью 50 км/ч, она летит до встречи с велосипедистом из B, после чего разворачивается и летит обратно до встречи с велосипедистом из A, после чего разворачивается и т.д.
а) Сколько километров пролетит муха?
б) Сколько километров пролетит муха в направлении от A к B до момента встречи велосипедистов?

7. Однажды человек опаздывал на работу и, чтобы наверстать потерянное в пробке время, побежал вниз по эскалатору метро. Спускаясь со скоростью две ступени в секунду, он насчитал ? сто сорок ступеней. Через день ситуация повторилась, но теперь ему грозило большее опоздание. Естественно, по тому же эскалатору он бежал быстрее — со скоростью три ступени в секунду, а насчитал на двадцать восемь ступенек больше. Странно получилось: чем быстрее бежишь, тем длиннее эскалатор.

Сколько же всего ступенек на нём?

8. Бассейн наполняется трубой. Если в полный бассейн, в который на полную мощность поступает вода, поместить 5 водохлёбов, то они выпьют всю воду за 3 часа. Если вместо 5 поместить 11 водохлёбов, то они справятся за один час. Что будет, если в наполняющийся бассейн поместить двух водохлёбов?

9. Расстояние между деревнями Петрово и Васино равна 60 км. В 11:00 из Петрово в Васино выехал Вася на велосипеде. После этого (неизвестно во сколько) из Васино в Петрово выехал Петя. Через четыре часа после выезда Пети Вася приехал в Васино. Петя приехал в Петино в 15:00. На каком расстоянии от Васино встретились Вася и Петя?

28. Бой 6-7. 17 июля

1. На шахматную доску по одной выставляются ладьи так, чтобы каждая выставленная побила (на момент выставления) чётное число пустых полей. Какое наибольшее число ладей можно выставить?

2. Даны три различные цифры. Из них составляются всевозможные четырехзначные числа. Могут ли у этих чисел встречаться все остатки при делении на 56?

3. В однокруговом волейбольном турнире участвовали 14 команд. Интересной назовем команду, выигравшую нечётное число матчей, а особенной — команду, выигравшую нечётное число матчей у интересных. Докажите, что число особенных команд чётно.

4. Каждое натуральное число покрашено в один из двух цветов. Докажите, что какие-то два одноцветных числа отличаются на 6 или на 8.

5. Каждая грань кубика $3 \times 3 \times 3$ разделена на 9 единичных квадратиков. Можно ли вписать во все квадратики по натуральному числу так, чтобы все числа были различны, а суммы чисел в каждом клетчатом кольце ширины 1 были равны между собой?

6. Клетки доски 8×8 покрашены в два цвета: красный и синий. Если в каком-то уголке из трёх клеток центральная клетка покрашена в один цвет, а две — в другой, то можно изменить цвет всех клеток этого уголка. Вначале в красный цвет покрашена диагональ из восьми клеток, а остальные клетки покрашены в синий. Можно ли при помощи описанных перекрашиваний получить раскраску, в которой в красный цвет покрашена другая диагональ из восьми клеток, а остальные клетки — в синий?

7. Докажите, что среди любых 25 различных положительных чисел можно выбрать два числа так, чтобы ни их сумма, ни их разность не была равна одному из оставшихся 23 чисел.

8. Можно ли прямоугольник 7×7 разрезать на 9 прямоугольников (не обязательно различных) так, чтобы из них можно было сложить любой прямоугольник с целыми сторонами, длины которых не превышают 7?

29. МеждусоБОЙ. 17 июля

1. На клетчатую доску 100×100 выставлены короли двух цветов так, что чёрные не бьют белых, и чёрных королей не больше, чем белых. Каково наибольшее возможное число чёрных королей?

2. На Сириусе в году дней не столько, сколько на Земле, но также, как и на Земле, каждый четвёртый год високосный, а в неделе семь дней. Сегодня, во вторник, у сирианца Васи день рожденья и он хочет узнать на какой день недели придётся его день рожденья через год. При этом он помнит, что предыдущий год был високосным и что 4 года назад он справлял свой день рожденья в понедельник. На какой день недели выпадет день рожденья у Васи через год?

3. 666 лжецов и рыцарей сидят за круглым столом (среди сидящих есть как рыцари, так и лжецы). На вопрос: «Сколько лжецов рядом с тобой?» все сказали: «Один». Сколько лжецов может сидеть за столом?

4. На шахматную доску по одной выставляются ладьи так, чтобы каждая выставленная побила (на момент выставления) чётное число пустых полей. Какое наибольшее число ладей можно выставить?

5. У Пети есть 10 карточек с числами 1,2,...,10 и 5 палочек для дробных черт. Может ли Петя из всего этого составить пять обыкновенных дробей так, чтобы никакая дробь не равнялась целому числу, а сумма всех пяти дробей была целым числом?

6. На вечеринку пришло $2n$ людей. Каждый из них имеет чётное число знакомых среди пришедших. Докажите, что найдутся два человека, имеющие чётное число общих знакомых.

7. Можно ли квадрат 3×3 разрезать на 4 прямоугольника (не обязательно различных) так, чтобы из них можно было сложить любой прямоугольник с целыми сторонами, длины которых не превышают 3?

8. Докажите, что среди любых 5 различных положительных чисел можно выбрать два числа так, чтобы ни их сумма, ни их разность не была равна одному из оставшихся трех чисел.

30. Бой профи. 17 июля

1. Назовем число хорошим, если оно простое или равно единице. Найдите наибольшее хорошее число, которое останется останется хорошим при вычеркивании любого количества цифр (но не всех).

2. Даны три цифры. Из них составляются всевозможные четырехзначные числа. Могут ли у этих чисел встречаться все остатки при делении на 56?

3. Какое наименьшее количество клеток необходимо отметить на доске 8×8, чтобы любой прямоугольник площадью больше 8 содержал хотя бы одну отмеченную клетку.

4. Карлсон хочет разрезать торт размерами 7×7 на 9 прямоугольных кусков (не обязательно различных) так, чтобы из них можно было сложить любой прямоугольник с целыми сторонами, длины которых не превышают 7. Сможет ли он это сделать?

5. Докажите, что среди любых 25 различных положительных чисел можно выбрать два числа так, чтобы ни их сумма, ни их разность не была равна одному из оставшихся 23 чисел.

6. В однокруговом волейбольном турнире участвовали 14 команд. Интересной назовем команду, выигравшую нечётное число матчей, а особенной — команду, выигравшую нечётное число матчей у интересных. Докажите, что число особенных команд чётно.

7. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он знает такое натуральное число, что если его умножить на 2, то сумма цифр полученного числа будет в 2 раза меньше суммы цифр исходного числа, а если изначальное число умножить на 3, то сумма цифр полученного числа будет в 3 раза меньше суммы цифр исходного. Может ли Барон говорить правду?

8. Максим выписал в тетради все натуральные числа от 1 до 2015 и покрасил некоторые из них в красный цвет. Костя может взять любой набор различных натуральных чисел, не превосходящих 2015, и спросить Максима, сколько среди них красных (каждый вопрос можно задавать только один раз). Максим записывает все свои ответы в тетрадь. После того, как Костя задал все свои вопросы, Максим читает все ответы, но не обязательно в том порядке, в котором записывал. Какие вопросы может задать Костя, чтобы наверняка определить все красные числа?

9. Клетки доски 8×8 покрашены в два цвета: красный и синий. Если в каком-то уголке из трёх клеток центральная клетка покрашена в один цвет, а две — в другой, то можно изменить цвет всех клеток этого уголка. Вначале в красный цвет покрашена диагональ из восьми клеток, а остальные клетки покрашены в синий. Можно ли при помощи описанных перекрашиваний получить раскраску, в которой в красный цвет покрашена другая диагональ из восьми клеток, а остальные клетки — в синий?

10. На доске в ряд стоят 100 гирь, на каждой из которых написан ее вес. Вася и Петя ходят по очереди, начинает Петя. Он своим ходом может взять по очереди 4 гири, причем брать гирю разрешено только с одного из краев. Вася своим ходом может взять любую гирю, но тоже только с краю. Игра продолжается, пока не будут взяты все ги-ри. Докажите, что Петя может играть таким образом, что суммарный вес взятых им гирь окажется не меньше учетверенного суммарного веса гирь, взятых Васей.

31. Геометрия-2. Не козы. 19 июля

В задачах по элементарной геометрии
приходится пользоваться очень остроумными,
подчас тонкими приёмами, и тот, кто в своей
молодости вкусил их прелесть,
никогда их не забудет.

Эмиль Борель

1. Можно ли квадратный лист бумаги размером 2×2 сложить так, чтобы его можно было разрезать на 4 квадрата 1×1 одним взмахом ножницами?

2. В цирк привезли девять тигров, которых поместили в загон, имеющий форму квадрата. Изобразите, каким образом внутри загона можно установить две решётки, каждая из которых также огораживает участок квадратной формы, чтобы изолировать хищников друг от друга (то есть, чтобы в результате загон разделился на девять частей)?

3. В углах квадратного бассейна стоят 4 столба. Можно ли расширить бассейн так, чтобы столбы остались на суше, площадь бассейна увеличилась бы в 2 раза, а форма осталась квадратной?

4. *Кольца Борромео.* Однажды итальянский вельможа Карло Борромео заказал сделать своему роду герб, на котором была бы изображена цепочка из трёх переплетённых колец.
Цепочка по замыслу вельможи должна быть такой: если её собрать из трёх бумажных колец, и разрезать любое одно звено, то она распалась бы на три части. Художники сказали, что такое невозможно, и предложили цепочку из трёх колец, распадающуюся на три части при разрезании одного конкретного звена. Однако Борромео придумал, как собрать из трех колец нужную ему цепочку. Приведите пример цепочки, которую могли предложить художники Карло Борромео. Как может выглядеть герб рода Борромео?

5. Из кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$ удалили центральный шарнир и восемь угловых кубиков. Можно ли оставшуюся фигуру из 18 кубиков составить из шести брусков размером $3 \times 1 \times 1$?

6. Все стенки и дно картонной коробки (без крышки) представляют собой квадраты, площадь каждого из которых равна 1. Разрежьте коробку на три куска так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

7. На листе бумаги размером 3×4 сделали разрезы так, чтобы он при этом не распался, но им стало возможно оклеить кубик размером $1 \times 1 \times 1$ в два слоя. Как можно это сделать?

8. Как с помощью наименьшего количества прямолинейных разрезов разрезать квадрат 3×3 на единичные квадраты, если
а) части нельзя накладывать (каждый раз можно разрезать только одну часть)?
б) части перед разрезанием можно накладывать друг на друга?
в) перед разрезанием квадрат можно сложить?

32. Анализ с конца. 19 июля

Всё, что имеет начало, имеет и конец.

Матрица: Революция

1. За булочками в столовой выстроилась очередь. Булочки задерживались, и в каждый промежуток между стоящими успело влезть по человеку. Булочки все ещё не начали выдавать, и во все промежутки опять влезло по человеку. Тут наконец принесли 85 булочек, и всем стоящим досталось по одной. Сколько человек стояло в очереди первоначально?

2. Путешественник в первый день прошёл 20% всего пути и ещё 2 км. Во второй день он прошёл 50% остатка и ещё 1 км. В третий день — 25% оставшегося расстояния и ещё 3 км. Остальные 18 км пришлись на четвёртый день. Найдите длину пути.

3. Все натуральные числа от 1 до 1000 выписали в следующем порядке: сначала были выписаны в порядке возрастания числа, сумма цифр которых равна 1, затем, также в порядке возрастания, числа с суммой цифр 2, потом — числа, сумма цифр которых равна 3 и т. д. На каком месте оказалось число 996?

4. 8 богатырей вели бой со Змеем Горынычем. В каждой схватке погибала половина живых богатырей, но каждый богатырь в каждой схватке (даже если он погибал) срубал по голове у Змея. Во время передышек между схватками на каждые две живые головы появлялась третья. Так продолжалась до тех пор, пока в живых не остался один Илья Муромец, он-то и одолел проклятого. Сколько же было схваток и сколько голов у Змея было вначале?

5. С числами можно выполнять следующие операции: умножать на два или произвольным образом переставлять цифры (нельзя только ставить нуль на первое место). Можно ли с помощью таких операций из 1 получить 74?

6. У калькулятора работают только две кнопки, одна увеличивает число на 1, другая — удваивает. За какое наименьшее число нажатий можно из 1 получить а) 10; б) 50; в) 243?

7. На окружности стоят 6 фишек белого и чёрного цветов. Настя убрала все белые фишки, у которых есть хотя бы один чёрный сосед. После этого Алёша убрал все чёрные фишки, у которых есть хотя бы один белый сосед. Могла ли после этого на окружности остаться одна фишка?

8. Из некоторого числа вычли сумму его цифр. Из полученного числа также вычли сумму цифр (новую). После 11 таких вычитаний впервые получился 0. Какое число было первым?

9. Мальвина дала Буратино задание: “Сосчитай кляксы в своей тетрадке, прибавь к их числу 7, раздели на 8, умножь на 6 и отними 9. Если сделаешь все правильно, получишь простое число”. Буратино все перепутал: кляксы он подсчитал точно, но потом умножил их количество на 7, вычел из результата 8, затем разделил на 6 и прибавил 9. Какой ответ получился у Буратино?

10. По кругу расставлены 9 нулей и единиц, причём не все расставленные числа равны. За один ход между каждыми двумя соседними числами записывается 0, если эти числа равны, и 1, если они не равны. После этого старые числа стираются. Могут ли через некоторое время все числа стать равными?

11. В начале времен в Средиземье жили 100 рыцарей, 99 принцесс и 101 дракон. Рыцари убивают драконов, драконы едят принцесс, а принцессы изводят до смерти рыцарей. Древнее заклятее запрещает убивать того, кто сам погубил нечетное число других жителей. Сейчас в Средиземье остался ровно один житель. Кто это?

33. Эти задачи уже были разобраны. 20 июля

Повторение — мать учения.

Поговорка

1. На олимпиаде по математике было 20 задач. Каждый из 20 участвующих в соревновании учеников решил ровно по две задачи. Оказалось, что каждую задачу решили ровно два ученика. Докажите, что можно организовать разбор так, чтобы все задачи были разобраны, и каждый ученик рассказал по одной из своих решённых задач.

2. Вычислить сумму:

$$1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + \ldots + 4 \cdot 2(n-1) + 4 \cdot 2n.$$

3. На девяти карточках написаны числа от -4 до 4. Лёня и Саша берут карточки по очереди. Выигрывает тот из них, у которого первым появятся на руках три карточки, сумма чисел на которых равна нулю. Кто выиграет при правильной игре, если начинает Лёня?

4. На главной диагонали доски 20×20 расположено зеркало, разбивая эту доску на две части. Сколькими способами можно расставить 10 ладей на одну из полученных частей так, чтобы они не били друг друга, если ладья бьет все, что видит?

5. В городе есть 10 банковских хранилищ с номерами от 1 до 10. Банде налетчиков известно, что в течение 10 дней в город привезут крупную сумму денег. Ее либо положат в одно хранилище и будут держать там 4 дня, а потом сразу же увезут, либо распределят по 4 хранилищам с последовательными номерами и увезут всё через день. За какое минимальное количество набегов банда налетчиков сможет украсть хотя бы часть денег (за один день можно сделать несколько набегов)?

34. Алгоритмы. 20 июля

Мы раздобыли лук, морковь, петрушку, сельдерей с ботвой. И котёл. Соединив все это, получим суп. Уха называется.

А. Сапковский, Крещение огнём

Надо немного перелить.

1. Как, имея лишь два сосуда емкостью 5 и 7 л, налить из крана 6 л воды?

2. Есть три бидона емкостью 14 л, 9 л и 5 л. В большем бидоне 14 литров молока, остальные бидоны пусты. Как с помощью этих сосудов разлить молоко пополам?

3. Таня стоит на берегу речки. У неё есть два глиняных кувшина: один — на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды.)

4. В трёх бочках вместе 128 литров воды (вместимость каждой бочки довольно велика). Можно взять две бочки и перелить из одной из них во вторую столько воды, сколько там есть сейчас. Докажите, что такими операциями можно собрать всю воду в одной бочке, если изначально в бочках

а) 32, 16 и 80 литров.

в) 17, 5 и 106 литров.

г*) любое целое количество литров в каждой бочке (в сумме, конечно, 128)

Определить что-то фальшивое.

5. Имеется 3 шара, среди которых один радиоактивный, и три детектора, в каждый из которых можно вложить один шар, после чего детектор укажет, радиоактивный ли он. Известно, что один из детекторов всегда дает верные показания, второй – всегда неправильные, а третий – как повезет. Возможно ли определить радиоактивный шар?

6. а) Есть 10 монет, одна из которых – фальшивая. Имеется также детектор, который за одну операцию исследует 4 монеты и указывает на одну из них. Известно, что если среди исследуемых монет есть фальшивая, то детектор указывает на неё. Однако если фальшивой монеты среди исследуемых нет, то детектор может указать на любую монету. За какое наименьшее число операций удастся заведомо определить фальшивую монету?

б) То же самое, только для 100 монет.

в) Есть 65 монет, среди которых две фальшивых. Детектор за одну операцию исследует 4 монеты и указывает на одну из них. Известно, что если среди исследуемых монет есть фальшивые, то детектор указывает на какую-то из них. Однако если фальшивых монет среди исследуемых нет, то детектор может указать на любую монету. Как определить обе фальшивые монеты не более чем за 24 операции?

7. У вас есть 10 шаров, 5 из которых радиоактивные. У вас есть прибор, в который можно положить 3 шара и узнать, есть ли среди них радиоактивный. Сможете ли вы за 10 операций узнать про данный шар, радиоактивный ли он?

8. Имеется 13 грузов с различными массами. И есть хитрый прибор, который из 5 грузов находит средний по массе. Как за 15 операций найти средний по массе из всех?

Применить идеи постепенного конструирования.

9. В мешке лежит 64 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы без гирь, отмерить 23 кг гвоздей?

10. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

11. Если на доске записано число A, к нему можно прибавить любой его собственный делитель (отличный от 1 и самого A) и заменить число на получившуюся сумму. Доказать, что из $A = 4$ можно получить любое составное число.

35. Разнобой. 20 июля

Всё смешалось в доме Облонских.

Л. Н. Толстой, Анна Каренина

1. В последовательности 5, 55, 555, 5555, 55555, ... найдите наименьшее число, кратное 495.

2. Можно ли расставить все корабли (один 4-палубный, два 3-палубных, три 2-палубных, четыре 1-палубных) на поле 10 на 10 по правилам морского боя так, чтобы на него нельзя было доставить еще одного 1-палубного корабля?

3. Расстояние между городами А и Б на реке равно 63 километра. Скорость течения реки 2 км/ч. Катер сплавал туда и обратно и вернулся через 8 часов. Какова собственная скорость катера?

4. У Васи в распоряжении есть 5 гирь. Вася взвесил каждые две из них и получил массы 97г, 91г, 99г, 102г, 96г, 100г, 93г, 105г, 94г. Найти массу каждой гири.

5. Между некоторыми городами Тридевятого и Тридесятого Царства проведены дороги. Злая колдунья покрыла туманом все дороги между городами из одного царства (по этим дорогам стало невозможно ездить). Тем не менее оказалось, что между любыми двумя городами из разных царств сообщение сохранилось. Докажите, что между любыми двумя городами из одного царства тоже сохранился путь.

6. Лёша хочет подняться по лестнице на 10 ступенек вверх. При этом он может либо шагнуть на следующую ступеньку, либо через одну перешагнуть. Сколькими способами Лёша может подняться наверх?

7. Наверху скалы высотой в 100 метров находится человек. Ровно посередине скалы (на высоте 50-ти метров) растет дерево. У человека есть веревка длиной 75 метров и нож, которым он может отрезать веревку. Как ему спуститься со скалы?

8. Какое наименьшее число ферзей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждый из них бил не менее четырёх других?

9. Можно ли, задействовав все цифры по одному разу, записать натуральное число и его квадрат?

10. Существует ли составное число, которое станет простым, есл добавить к нему $(1000!)!$?

11. Али-Баба пытается проникнуть в пещеру с сокровищем. У входа в пещеру стоит барабан с четырьмя отверстиями по бокам. Внутри каждого отверстия поставлен переключатель, имеющий два положения: $<$вверх$>$ и $<$вниз$>$. Разрешается засунуть руки в любые два отверстия, пощупать, как стоят переключатели и переключить их произвольным образом (в частности, можно не переключать). После этого барабан вращается и после остановки нельзя установить, какие именно переключатели переключали в прошлый раз. Разрешается проделать эту операцию до 10 раз. Дверь в пещеру открывается, когда все переключатели в одном положении. Как Али-Бабе попасть в пещеру?

36. Графы-2. 21 июля

Как же получилось, что мне задают все эти тяжёлые вопросы?

О. Норт

1. Существует ли многогранник с нечетным числом граней, все грани которого – многоугольники с нечетным числом сторон?

2. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно три дороги, быть ровно 100 дорог?

3. В шахматном турнире один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире, и сколько партий сыграл выбывший участник?

4. Можно ли расставить 2015 коней на доске 100×100 так, чтобы каждый бил ровно четырёх других?

5. В маленькой стране некоторые пары деревень соединены друг с другом. Причём из любой деревни можно доехать до любой другой. Однажды путешественик выехал из деревни Санвил по прямой дороге в Мунвил, затем после некоторых странствий вернулся обратно в Санвил, не проезжая при этом ни по какой дороге дважды. Докажите, что если закрыть дорогу из Санвила в Мунвил, то можно будет по-прежнему доехать из любой деревни до любой другой.

6. Докажите, что в связном графе можно удалить несколько рёбер так, чтобы он остался связным, а циклов в нём уже не было.

7. В неизвестной стране из Столичного города выходит 101 дорога, а из города Дальний выходит ровно одна дорога. Из всех остальных городов выходит 10 дорог. Докажите, что из города Дальнего можно доехать до Столичного (возможно, с пересадками).

8. Вася рисовал всевозможные графы со ста вершинами. (Вершины пронумерованы)
а) Сколько различных графов получилось у Васи?
б) Каких из них больше: связных или несвязных?

9. Каждый день один из жителей города N устраивает у себя дома приём, на который зовёт всех своих знакомых. Любые двое, побывавшие на одном приёме, после этого становятся знакомыми. Однажды оказалось, что каждый житель уже устроил хотя бы один приём, но Петров и Сидоров до сих пор не знакомы. Докажите, что на следующщем приёме они тоже не познакомятся.

10. В стране 100 городов, из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы по-прежнему из каждого города выходило не менее одной дороги и при этом по крайней мере из 67 городов выходило ровно по одной дороге.

11. В кружке 20 учеников. Среди них есть ученик, имеющий среди кружковцев одного друга, ученик, имеющий среди кружковцев двух друзей, ..., ученик, имеющий среди кружковцев 14 друзей. Докажите, что найдутся трое кружковцев, любые двое из которых дружат.

12. Можно ли расставить на доске 100×100 2015 коней так, чтобы каждый бил ровно четырёх других?

37. Разнобой. 21 июля

Никто не видел всего!

Марко Поло

1. Какой остаток даёт 13^{101} при делении на 17?

2. В коробке лежат 82 карандаша. Докажите, что среди них есть либо 10 одного цвета, либо 10 разноцветных.

3. Масса груды камней равна 10 тонн, а каждый камень легче тонны. На каком наименьшем количестве трёхтонных машин гарантировано можно увезт всю груду?

4. Школьники построились на линейку в прямоугольник 6×9. Оказалось, что в каждой колонне дети упорядочены по росту (чем дальше в колонне, тем выше). После этого в каждом ряду все тоже перестроились по росту. (Чем левее, тем выше). Докажите, что после этого в каждой колонее они по-прежнему стоят по росту.

5. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше — доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

6. Петя приехал летом на дачу к своему дедушке. Дедушка начал показывать Пете свой сад и сказал: “У меня в саду груши и яблони, причёи на расстоянии 10 метров от каждой яблони ровно две груши”. “Значит, груш вдвое больше, чем яблонь” — заключил Петя. “Наоборот, вдвое меньше” — удивил Петю дедушка. Нарисуйте, как такое могло быть.

7. В классе учатся n мальчиков и n девочек. Каждый мальчик составил рейтинг девочек в порядке убывания: какая нравится ему больше всего, какая на втором месте и т.д. (никакие две девочки не нравятся никакому мальчику одинаково). После уроков каждая девочка пошла в гости к одному из мальчиков, причем ни к кому не пришли сразу две девочки. Мальчики заметили, что при любом другом распределении девочек хотя бы к одному из них пришла бы менее нравящаяся ему девочка. Докажите, что хотя бы к одному из мальчиков пришла та девочка, которая нравилась ему больше всего.

8. Докажите, что в компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

9. В классе 20 детей. Каждый день какие-то пары из них при встрече пожимают друг другу руки, а какие-то нет. Известно, что всего за месяц было совершено 2014 рукопожатий. Докажите, что можно выделить группу из 7 человек так, чтобы между детьми из этой группы было совершено не менее 211 рукопожатий.

10. Докажите, что из ста натуральных чисел можно выбрать несколько (возможно, одно) так, чтобы их сумма делилась на 100.

38. Игры-3. Выигрышные и проигрышные позиции. 22 июля

Если орел — я выиграла, если решка — ты проиграл.

сериал «Друзья»

1. В куче лежит 2015 конфет. Два игрока по очереди берут 2, 4 или 9 конфет. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

2. В куче лежит 1000 конфет. За один ход можно взять 1, 10 или 11 конфет. Проигрывает тот, кто заберёт последнюю конфету. Кто выигрывает при правильной игре?

3. В стране Дураков однажды на волшебном дереве выросло 300 золотых монет. Кот Базилио и лиса Алиса договорились по очереди каждую ночь ходить к этому дереву и забирать не более половины имеющихся на нем монет. Если кто-то из них не может больше сорвать ни одной монеты, то отдает другому все, что успел взять. Первой пошла Алиса. Кто останется в дураках?

4. Калькулятор "АИ" может вычитать из имеющегося числа только степени двойки (1, 2, 4, ...). Леонид Андреевич набирает число 2015. Миша и Галя по очереди нажимают на кнопки калькулятора. Выигрывает тот, кто первым получит 0. Миша первым начинает действовать. Выиграет ли он?

5. В двух кучах n и k камней соответственно. За один ход можно либо взять несколько камней из одной кучи, либо поровну из двух куч. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для каких n и k, не превосходящих 15, у начинающего игрока нет выигрышной стратегии?

5'. На доске 16×16 стоит ферзь. Его можно двигать либо вверх, либо вправо, либо вправо-вверх. Проигрывает тот, кто не может ходить. При каких начальных положениях ферзя второй игрок победит?

6. Игра "Щёлк". Дана шоколадка размером а) 10×10 б) 6×10. За один ход разрешается съесть произвольную дольку и все находящиеся левее и выше нее. Проигрывает тот, после чьего хода ничего не останется. Кто выиграет?

7. Докажите, что в крестиках-ноликах "Пять в ряд" у ноликов нет выигрышной стратегии.

8. Двое называют числа, не превосходящие 1000!. Нельзя называть делители одного из названных ранее чисел. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Реально сложные задачи об этом.

9. В куче 2015 конфет. Двое по очереди берут от 1 до 5 конфет из кучи, причёмм нельзя повторять предыдущий ход соперника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

10. Барон Мюнхгаузен рассказывает историю про одну очень увлекательную игру. Он не помнит правил, но точно помнит, что в неё играют два игрока. Кроме того, он помнит, что в каждой игровой ситуации у игроков одни и те же доступные варианты ходов, каждый из которых меняет текущее состояние на какое-то другое, а всего состояний конечное число. А проигрывает тот, кто не может сделать ход. Барон уверен, что эта игра точно закончится через конечное число ходов, как бы ни действовали игроки. Из всего этого Мюнхгаузен делает вывод, что у одного из игроков есть выигрышная стратегия. Прав ли он?

39. Логика. 22 июля

Вот поэтому настоящие рыцари и вымирают. Их кодекс превращает их в тупиковую ветвь эволюции...

С. Мусаниф, «Цвет мира — серый»

Упражнение 1. Вам повстречалось двое островитян — А и В. Пусть А сказал следующее “Если я рыцарь, то и В рыцарь”.
Кем может быть А? Кем может быть В?

Упражнение 2. Вам повстречалось двое островитян — А и В. Пусть А сказал следующее “Если В рыцарь, то я лжец”.
Кем может быть А? Кем может быть В?

Упражнение 3. Вам повстречалось трое островитян — А, В и С. Пусть они сказали следующее:
А: В — рыцарь.
В: Если А — рыцарь, то С — рыцарь.
Кем может быть А? Кем может быть В? Кем может быть С?

Упражнение 4. У рыцаря спросили: «Верно ли, что если вы любите А, то вы любите В?». Он ответил:
а) “Если это верно, то я люблю А”.
б) “Если это верно, то я люблю А, и если я люблю А, то это верно”
Означает ли это, что он любит А? Означает ли это, что он любит В?

Упражнение 5. Человек с острова рыцарей и лжецов сказал:
1) Я люблю А.
2) Если я люблю А, то я люблю В.
Он был рыцарем или лжецом?

1. В шеренгу выстроились 100 человек, каждый из которых рыцарь или лжец. Первый сказал: “оличество рыцарей среди нас — делитель числа 1”, второй сказал: “Количество рыцарей среди нас — делитель числа 2” и т.д., вплоть до сотого, который сказал:“Количество рыцарей среди нас — делитель числа 100”. Сколько рыцарей в шеренге?

2. а) В шеренгу выстроили 7 человек, каждый из которых рыцарь или лжец. У каждого из них спросили, сколько в шеренге лжецов. Четверо ответили, что не больше четырех. Трое ответили, что не меньше четырех. Сколько лжецов может быть в шеренге?
б) В шеренгу выстроили 1001 человека, каждый из которых рыцарь или лжец. У каждого из них спросили, сколько в шеренге лжецов. 501 ответили, что не больше 501. 500 ответили, что не меньше 501. Сколько лжецов может быть в шеренге?

3. За круглым столом сидит 120 человек. Каждый из них смог сделать ровно одно из двух следующих утверждений:
1) “Мой сосед справа — рыцарь”;
2) “Тот, кто находится через одного справа от меня, — рыцарь”.
Сколько всего лжецов могло находиться за столом?

4. На острове живут рыцари, которые говорят только правду, лжецы, которые всегда лгут, и нормальные люди, которые могут время от времени и говорить правду, и лгать. В компании из 100 друзей были произнесены следующие высказывания: "Среди моих друзей 0 лжецов"; "Среди моих друзей 1 лжец"; и т.д. до фразы "Среди моих друзей 99 лжецов". Через минуту в той же компании прозвучали те же фразы, но каждую фразу произнес не тот человек, что в первый раз. Еще через минуту в той же компании прозвучали те же фразы, но ни один человек не повторил уже произнесенных им фраз, и так далее. Каждый произнес 99 различных фраз. Сколько лжецов могло находится в этой компании?

5. За круглым столом сидят 100 социологов, некоторые из которых всегда говорят правду, а остальные всегда лгут, причем количество лжецов нечетно. Социологи играют в игру "Опрос общественного мнения". В первом круге каждый социолог спросил соседа слева, правда ли, что $2+2=4$. В каждом следующем круге каждый социолог спрашивает своего соседа слева, получил ли он в предыдущем круге ответ "да". Сколько ответов "нет" могло прозвучать в первых 100 кругах игры?

6. На острове живут рыцари, лжецы и нормальные люди. Путешественник повстречал компанию, среди которой 1 рыцарь, 1 лжец и k нормальных людей, но путешественник не знает, кто из них кто. При каком наименьшем k путешественник не сможет, задавая вопросы, понять, кто есть кто?

7. Путешественник повстречал компанию из 5 рыцарей и n нормальных людей. Он может спрашивать каждого из людей про любого другого, нормальный ли тот. При каком n путешественник может гарантированно определить, кто рыцарь?

40. Финальный разнобой. 22 июля

Пока тебя мучит множество вопросов, ты ни на что и не способен. И только когда уже ничего не ждёшь, ты открыт для всего и не ведаешь страха.

Эрих Мария Ремарк, «Время жить и время умирать»

1. Петя купил общую тетрадь из 96 листов и пронумеровал страницы числами от 1 до 192 по порядку. Хулиган Вася вырвал 25 листов и сложил 50 написанных на них чисел. Мог ли он в сумме получить число 2000?

2. Начнём считать пальцы на руке следующим образом: пусть 1-м будет большой, 2-м — указательный, 3-м — средний, 4-м — безымянный, 5-м — мизинец, 6-м — снова безымянный, 7-м — средний, 8-м — указательный, 9-м — большой, 10-м — указательный, и так далее. Какой палец будет 2015-м?

3. Найдите последние три цифры числа $999 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 996$.

4. а) Докажите, что существуют 100 подряд идущих составных чисел.
б) Докажите, что простых чисел бесконечно много.
в) Докажите, что существует составное число, которое станет простым, если прибавить к нему $(1000!)!$.

5. Вася загадал число от 1 до 89. Петя задаёт ему вопросы, подразумевающие ответ "да" или "нет". Причём за каждый полученный ответ "да" Пете надо заплатить 2 рубля, а за ответ "нет" — 1 рубль. Как за 10 рублей Петя сможет отгадать число?

6. Докажите, что число $30^{239} + 61^{30}$ составное.

7. Вася умеет писать только цифру 1. Докажите, что он может написать число, делящееся на 1989.

8. Клетки доски 2015×2015 покрашены в 3 цвета, причем есть клетки всех цветов. Оказалось, что любые четыре клетки, вершины которых образуют прямоугольник со сторонами, параллельными линиям сетки, покрашены не более чем в два различных цвета. Докажите, что либо все клетки каждой строки покрашены в один и тот же цвет, либо все клетки каждого столбца покрашены в один и тот же цвет.

41. Заключительная олимпиада. 24 июля

Довывод

1. Три брата вернулись с рыбалки. Мама спросила у каждого, сколько они вместе поймали рыб. Вова сказал: “Больше десяти”, Лёня: “Больше восемнадцати”, Саша: “Больше пятнадцати”. Сколько могло быть поймано рыб (укажите все возможности), если известно, что два брата сказали правду, а третий — неправду?

2. Существуют ли 7 таких натуральных чисел, что ровно 2 из них не делятся 2, ровно 3 не делятся на 3, ровно 4 не делятся на 4, ровно 5 не делятся на 5 и ровно 6 не делятся на 6?

3. Умная Вика загадала некоторое натуральное число. Каждую минуту она прибавляет к числу его предпоследнюю цифру. Через 99 минут она получила 56789. Докажите, что она ошиблась.

4. По кругу расставлены 2015 железных гирек. Между каждыми соседними гирьками находится бронзовый шарик. Масса каждого шарика равна разности масс соседних с ним гирек. Докажите, что шарики можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы уравновесились.

5. В круговом турнире по волейболу каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу (ничьих не бывает). Тройка команд A; B; C называется *удивительной*, если A выиграла у B, B выиграла у C, а C выиграла у A. Аня посчитала количество удивительных троек и написала его на доску. Надя не видела турнирную таблицу, но знает, сколько игр выиграла каждая из команд. Докажите, что она может однозначно восстановить записанное на доске число.

Вывод

6. В математическом лагере каждые 32 ученика имеют ровно одного общего знакомого. У ученика Артёма самое большое число знакомых в этом лагере. Сколько знакомых у Артёма?

7. В строку выписано 300 натуральных чисел. Известно, что каждое число, кроме самого первого, на 1, 2 или на 3 больше предыдущего. Докажите, что существует натуральное число больше 1, на которое делятся не менее 50 из выписанных чисел.

8. Кто-то один из пяти юных математиков должен идти мыть посуду. Для назначения этого дежурного на стол выкладывается кучка из 100 спичек. Первый делит её на две кучки, второй делит на две кучки любую из получившихся кучек, и так далее – по кругу. Тот, после чьего хода среди кучек окажутся хотя бы две с одинаковым количеством спичек, и пойдёт дежурить. Докажите, что один из юных математиков может играть так, что его отправить мыть посуду будет невозможно.

42. Теоретические вопросы к зачёту

1. Сумма чисел от 1 до n двумя способами.

2. Сумма первых k нечётных чисел двумя способами.

3. Арифметические операции чётных/нечётных чисел. Чётность суммы нескольких слагаемых.

4. Симметричные стратегии в играх, дополняющий ход, выигрышные/проигрышные позиции, примеры задач.

5. Круги Эйлера. Нахождения количества элементов в объединении множеств на примере задачи: Найти количество чисел, меньших тысячи, которые делятся на 3, или на 5 или на 7.

6. Какое наибольшее количество: а) ладей; б) слонов; в) королей; г) коней; не бьющих друг друга, можно расставить на доске 8×8?

7. Делимость. Определение и арифметические свойства. *а) Если a делится на b, а b делится на c, то a делится на c.*
б) Если a делится на n, и b делится на n, то $a - b$, $a + b$, $ka + lb$ делится на n.

8. Признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 25 с доказательством.

9. Признаки делимости на 3, 9, 11 с доказательством.

10. Подсчёт числа способов. Правило произведения, правило сложения, примеры задач. Количество способов выстроить n человек в ряд.

11. Подсчёт числа способов. Количество способов выбрать нескольких людей из n для участия в походе. Количество способов раздать n разных конфет трём разным людям.

12. Количество способов выбрать из отряда в n человек компанию из k человек, идущих на дежурство.

13. Шары и перегородки. Количество способов разложить k одинаковых шаров по n ящикам так, чтобы ни один из ящиков не был пустым.

14. Шары и перегородки. Количество способов разложить k одинаковых шаров по n ящикам так, что ящик может остаться пустым.

15. Графы. Определение, примеры. Теорема о том, что сумма степеней вершин равна удвоенному количеству рёбер. Следствие.

16. Графы. Лемма о хороводах.

17. Графы. Связность. Определение. Задача о сохранении связности при удалении ребра из цикла.
В маленькой стране некоторые пары деревень соединены друг с другом. Причём из любой деревни можно доехать до любой другой. Однажды путешественик выехал из деревни Санвил по прямой дороге в Мунвил, затем после некоторых странствий вернулся обратно в Санвил, не проезжая при этом ни по какой дороге дважды. Докажите, что если закрыть дорогу из Санвила в Мунвил, то можно будет по-прежнему доехать из любой деревни до любой другой.

18. Остатки. Определение. Сумма остатков равна остатку суммы. Разность остатков равна остатку разности. Произведение остатков равно остатку произведению.

19. Остатки. Остатки квадратов при делении на $3, 4, 5, 8, 10$. Последняя цифра числа 7^{102}.

20. Взвешивания. Задача о нахождении лёгкой фальшивой монеты из 9. То же самое, но результат обоих взвешиваний узнаём после проведения второго.

21. Оценка + пример. Задача про “Морской бой”.

22. Задача о 1000 последовательных составных числах.

23. Бесконечность множества простых чисел.