Семнадцатая Летняя многопредметная школа Кировской области

7 КЛАСС, ОБЫЧНЫЕ ГРУППЫ

РАБОЧИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вишкиль 2–25 июля 2001 г.

Предисловие

Если очень вам неймётся – занимайтесь, чем придётся

В.С. Высоцкий

Год назад мы попытались сохранить наработки наших занятий с детьми в Кировской ЛМШ не в виде отдельных листков, а целиком – собрав все материалы в одну брошюру. Как ни странно, наш блин оказался не слишком большим комом. Более того, в течение всего учебного года мы сами достаточно часто пользовались этой брошюрой для работы со школьниками, так что приступая в начале июля к работе с параллелью 7 класса в XVII Летней Многопредметной Школе Кировской области, мы уже практически не сомневались, что к концу смены наши разрозненные листики снова сольются в единую книжечку.

Как и год назад, мы постарались добавить к тексту листков указания, решения и ответы к некоторым задачам – они в тексте выделены шрифтом пишущей машинки.

На занятиях мы давали детям больше заданий, чем они успевали решать. Мы надеемся, что дома, в спокойной обстановке они еще не единожды вернутся к нашим рабочим листикам и прорешают то, что не удалось решить здесь.

Авторы выражают благодарность И.С.Рубанову и администрации Кировской ЛМШ за то, что у нас были хорошие и добросовестные ученики. Большое спасибо А.В.Шаповалову, Д.А.Ростовскому и другим преподавателям 7-х классов ЛМШ-99 и ЛМШ-2000 за подготовленные ими материалы, которые мы внимательнейшим образом изучили и обработали для своих занятий. Мы признательны также многим другим авторам задачных подборок ЛМШ прошлых лет, а также составителям Санкт-Петербургских математических олимпиад.

Особая благодарность – нашим любимым семиклашкам, без которых появление этой книжки было бы просто немыслимым.

Авторы

Делимость, сравнения, системы счисления

Делимость и остатки, 3 июля.

В начале занятия в непрофи-группе происходит разговор и махание руками на тему "а знаете ли вы, дети, что такое остаток".

Утверждение. *Пусть a – целое, m – натуральное число. Тогда a можно единственным образом представить в виде $a = qm + r$, где q и r – целые, $0 \leqslant r < b$.*

Определение. *Число q называется неполным частным, а число r – остатком при делении a на m. Если остаток равен 0, то говорят, что a делится на m без остатка (записывается $a \,\vdots\, m$).*

1. Разделите с остатком а) -15 на 7; б) -224 на 9.

2. Пусть $x = 100k - 16$, k – целое. Чему равны частное и остаток при делении x на а) 100; б) 5?

3. Делимое и делитель увеличили в три раза. Как изменятся неполное частное и остаток?

4. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 – простое число или единица.

Теорема (действия с остатками). *Пусть число a_1 дает при делении на m остаток r_1, число a_2 – остаток r_2. Тогда*

а) число $a_1 + a_2$ при делении на m дает тот же остаток, что и число $r_1 + r_2$;
б) число $a_1 - a_2$ при делении на m дает тот же остаток, что и число $r_1 - r_2$;
в) число $a_1 \cdot a_2$ при делении на m дает тот же остаток, что и число $r_1 \cdot r_2$.

Следствие 1. *Число $n \cdot a_1$ при делении на m дает тот же остаток, что и число $n \cdot r_1$.*

Следствие 2. *Пусть n – натуральное число, а число a дает при делении на m остаток r. Тогда число a^n при делении на m дает тот же остаток, что и число r^n.*

5. Найдите остаток от деления
$1999 \cdot 2000 \cdot 2001 + 2001^3$ на 7;

6. Найдите остаток от деления 9^{100} на 8.

7. Найдите остаток от деления 12^{100} на 13.

8. Найдите остаток от деления $2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$ на 5.

9. Найдите остаток при делении на 7 числа $100^{100} - 30^{100}$.

10. Найдите две последние цифры числа 1999^{2000};

11. Докажите, что
а) произведение 4 последовательных целых чисел;
б) разность квадратов двух простых чисел, больших 3,
делится на 24.

12. Докажите, что если $a + 1$ делится на 3, то $4 + 7a$ делится на 3.

13. Пусть n и m – натуральные числа, причем $m \neq 1$. Известно, что $7n+1 \vdots m$ и $8n+3 \vdots m$. Найдите m.

Решение: Очевидно, что $8\,(7n+1) - 7\,(8n+3) = 13$. Следовательно, $m = 13$.

14. Докажите, что из любых n целых чисел можно выбрать одно или несколько с суммой, кратной n.

Задачи для самостоятельного решения

15. Найдите остаток от деления $5^7 - 7^5$ на 3.

16. Докажите, что $23^{43} + 43^{23}$ делится на 66.

17. Найдите последнюю цифру числа $77^{77^{77}}$.

18. Найдите две последние цифры числа 16^{2000}.

19. Докажите, что если $a+2$ делится на 11 и $35-b$ делится на 11, то $a+b$ делится на 11.

20. Назовем автобусный билет с шестизначным номером счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?

21. Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету не отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что число монет без одной делится на число разбойников в шайке.

Сравнения по модулю, 4 июля.

Определение. *Будем говорить, что числа a и b сравнимы по модулю m, если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m. Это записывается в виде $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \underset{m}{\equiv} b$,*

Необходимо объяснить детям, что в математике слово *модуль* имеет несколько значений.

Замечание. *Очевидно, что если число a дает при делении на m остаток r, то $a \equiv r \pmod{m}$.*

22. Верно ли, что $-17 \equiv 11 \pmod{7}$?

23. Какой остаток при делении на 10 дает число a, если $a \equiv -8 \pmod{10}$?

Утверждение. *Числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m тогда и только тогда, когда их разность $a-b$ делится на m.*

В этом месте необходимо поговорить о словах "тогда и только тогда", "необходимо и достаточно"и т.п.

Следствие (характеристическое свойство). *Числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда их разность $a-b$ делится на m.*

Словосочетание *характеристическое свойство* мы раньше не употребляли. Наверное, стоит на нем остановиться подробнее и рассказать о том, какие именно свойства мы называем этим словосочетанием и почему. Полезно вспомнить различие между свойствами и признаками. Потом можно попросить учеников вспомнить примеры свойств, признаков и *критериев* (еще один синоним для обозначения характеристических свойств) из школьного курса геометрии, из курса делимости 6 класса ЛМШ-2000 и т.п.

Свойства сравнений по модулю

Теорема (транзитивность). *Если $a \equiv b\,(mod\ m)$ и $b \equiv c\,(mod\ m)$, то $a \equiv c\,(mod\ m)$.*

Теорема (алгебраическое сложение). *Сравнения по одному модулю можно складывать, т.е. если $a \equiv b\,(mod\ m)$ и $c \equiv d\,(mod\ m)$, то $a \pm c \equiv b \pm d\,(mod\ m)$.*

Теорема (умножение). *Сравнения по одному модулю можно перемножать, т.е. если* $a \equiv b\,(mod\ m)$ *и* $c \equiv d\,(mod\ m)$, *то* $ac \equiv bd\,(mod\ m)$.

Теорема (возведение в степень). *Сравнения можно возводить в натуральную степень, т.е. если* $a \equiv b\,(mod\ m)$ *и* n *– натуральное число, то* $a^n \equiv b^n\,(mod\ m)$.

* * *

Пример. *Найдите остаток от деления* 3^{2001} *на 7.*

Решение: Действительно, $3^{2001} = (3^3)^{667} = 27^{667} \equiv (-1)^{667} = -1\,(\mathrm{mod}\ 7)$.

24. Найдите последнюю цифру числа 3^{999}.

25. Докажите, что $a^n - b^n$ делится на $a - b$ при любом натуральном n.

26. Докажите, что если n – нечётное число и $a + b \neq 0$, то $a^n + b^n$ делится на $a + b$.

27. Докажите, что при любом натуральном n число $(2^n - 1)^n - 3$ делится на $2^n - 3$.

28. Докажите, что при нечётных n и m число $1^n + 2^n + \ldots + (m-1)^n$ делится на m.

29. Докажите, что а) при любом натуральном n $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ делится на 133;
б) при любых натуральных a и n число $a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}$ делится на $a^2 - a + 1$.

30. Докажите, что $11^{100} - 1$ делится на 100.

31. Докажите, что $a^3 \equiv a\,(\mathrm{mod}\ 6)$.

* * *

32. Докажите, что для любого натурального n
а) либо $n^2 \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 3)$, либо $n^2 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 3)$;
б) либо $n^2 \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 4)$, либо $n^2 \equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)$;
в) либо $n^2 \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 5)$, либо $n^2 \equiv \pm 1\,(\mathrm{mod}\ 5)$;
г) либо $n^3 \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 7)$, либо $n^3 \equiv \pm 1\,(\mathrm{mod}\ 7)$;
д) либо $n^3 \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 9)$, либо $n^3 \equiv \pm 1\,(\mathrm{mod}\ 9)$.

33. Докажите, что $a^5 \equiv a\,(\mathrm{mod}\ 30)$.

34. Докажите, что уравнение $15x^2 - 7y^2 = 9$ не имеет решений в целых числах.

Указание: Рассмотрите остатки при делении на 5.

35. Докажите, что уравнение $x^2 - 7y = 10$ не имеет решений в целых числах.

Решение: Рассмотрите остатки при делении на 7.

36. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 8t - 1$.

Решение: Рассмотрев остатки при делении на 8, видим, что уравнение решений не имеет.

37. Докажите, что числа вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Решение: Рассмотрите остатки при делении на 7.

38. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы двух точных квадратов.

Ответ: Это числа вида $n = 4k + 3$.

39. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх точных кубов.

Ответ: Это числа вида $n = 9k + 4$ и $n = 9k + 5$.

Решение сравнений, 5 июля.

40. Найдите остаток от деления n на 13, если известно что

a. $2n \equiv 6 \pmod{13}$;

b. $3n \equiv -19 \pmod{13}$

c. $3n \equiv 7 \pmod{13}$

d. $-2n \equiv 11 \pmod{13}$;

e. $-9n \equiv -22 \pmod{13}$;

f. $n^2 - 4 \equiv 0 \pmod{13}$;

g. $n^2 \equiv 9 \pmod{13}$;

h. $n^2 \equiv n \pmod{13}$.

i. $6n^2 \equiv 11 \pmod{13}$.

41. Какие значения может принимать переменная n?

a. $13n \equiv -10 \pmod{50}$;

b. $25n \equiv 36 \pmod{113}$;

c. $3n \equiv 21 \pmod{45}$.

НОД, 6 июля.

Определение. *Наибольший общий делитель натуральных чисел a и b – это наибольшее число, которое является общим делителем чисел a и b.*

42. От прямоугольника 324×141 отрезают квадраты со стороной 141 до тех пор, пока это возможно. Затем от полученного прямоугольника отрезают квадраты, у которых сторона равна меньшей из сторон прямоугольника и т.д. Сколько квадратов в конце концов получится и какого они будут размера?

43. То же самое делают с прямоугольником 770×315. Чему равна длина стороны самого маленького квадрата?

44. На доске написаны числа a и b. Разрешается заменять одно из чисел на сумму или разность имеющихся чисел. Какое минимальное натуральное число можно получить такими операциями, если

а) $a = 100$, $b = 151$;
б) $a = 100$, $b = 255$;
в) $a = 7n + 3$, $b = 9n + 4$?

45. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдаёт новую. Прочитав карточку с парой (m, n), первый автомат выдаёт пару $(m - n, n)$, второй – пару $(m + n, n)$, а третий – пару (n, m). Можно ли, используя эти автоматы, получить:

a) из карточки (12,21) карточку (19,97);
b) из карточки (19,97) карточку (12,21);
c) из карточки (13,31) карточку (19,97)?

46. Докажите, что все общие делители чисел a и b, являются также общими делителями чисел b и $a - kb$ (k – произвольное целое число).

47. Пусть r – остаток от деления a на b. Докажите, что

а) все общие делители чисел a и b, являются также общими делителями чисел b и r.

б) все общие делители чисел b и r, являются также общими делителями чисел a и b.
в) Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД(b, r).

48. *(Алгоритм Евклида).* Используя результат предыдущей задачи, придумайте алгоритм для вычисления НОД(a, b).

49. Докажите, что
а) НОД$(2a, 2b) = 2\,$НОД(a, b);
б) НОД$(2a, 2b + 1) =$ НОД$(a, 2b + 1)$;
в) НОД$(2a + 1, 2b + 1) =$ НОД$(a - b, 2b + 1)$.

50. Используя результат предыдущей задачи, придумайте ещё один алгоритм вычисления НОД(a, b).

51. Не разлагая числа на простые множители, вычислите НОД$(861, 637)$ и НОД$(2001, 22012000)$.

52. Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима ни при каком натуральном n.

53. Докажите, что НОД$(3n + 2, 10n + 23)$ может быть равен только 1, 7 или 49.

54. Найти пару чисел, не больших 1000, для которых алгоритм Евклида заканчивает работу (получает два равных числа) только через 14 шагов.

Ответ: соседние числа Фибоначчи – 610 и 987.

55. Найти НОД числа, десятичная запись которого состоит из 100 единиц, и числа, десятичная запись которого состоит из 60 единиц.

56. Найти НОД$(2^{100} - 1, 2^{60} - 1)$.

Признаки равноостаточности, 8 июля.

Любое натуральное число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ представимо в виде

$$a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \ldots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n.$$

57. Докажите, что любое натуральное число сравнимо со своей последней цифрой по модулю а) 2; б) 5; в) 10.

58. Докажите, что любое натуральное число сравнимо с числом, составленным из двух его последних цифр, по модулю а) 4; б) 25 в) 100.

59. Подумайте, как можно обобщить два предыдущих утверждения.

60. Докажите, что любое натуральное число сравнимо с суммой своих цифр а) по модулю 3; б) по модулю 9.

61. Докажите, что любое натуральное число сравнимо с разностью суммы цифр, стоящих на нечётных местах, и суммы цифр, стоящих на чётных местах (нумерация цифр – с меньшего разряда).

Позиционные системы счисления, 8 июля.

Определение. *Говорят, что натуральное число A записано в m-ичной системе счисления, если оно представлено в виде $a_0 \cdot m^0 + a_1 \cdot m^1 + \ldots + a_{n-1} \cdot m^{n-1} + a_n \cdot m^n$, где $0 \leqslant a_i < m$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае пишут, что $A = (\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0})_m$, число m называют основанием системы счисления, а числа a_i – цифрами числа A.*

Это определение, конечно, не обязательно заучивать. Ученик может уметь работать с системами счисления даже если его пугает количество букв.

62. Переведите в десятичную систему счисления: а) 10101_2; б) 211_4; в) 126_7; г) 158_{11}.

Ответ: а) 21; б) 37; в) 69; г) 184.

63. В какой системе счисления справедливо равенство $3 \cdot 4 = 10$?

Ответ: В 12-ричной.

64. Существует ли система счисления, в которой одновременно
а) $3 + 4 = 10$ и $3 \cdot 4 = 15$;
б) $2 + 3 = 5$ и $2 \cdot 3 = 11$?

Ответ: а) Да (7-ричная система счисления).
б) Нет. Второе равенство могло бы выполняться только в 5-ричной системе счисления.

65. Сформулируйте (и докажите) условие, позволяющее определить чётность числа по его записи
а) в троичной системе счисления;
б) в системе счисления с основанием n.

Ответ: Число чётно тогда и только тогда, когда а) в его троичной записи чётное число единиц (сумма цифр чётна). б) его n-ичная запись оканчивается чётной цифрой при чётном n, сумма цифр чётна при нечётном n.

66. Составьте таблицы сложения и умножения в троичной системе счисления и вычислите:
а) $2102_3 + 1021_3$;
б) $201_3 \cdot 102_3$.

Ответ: а) 10200_3; б) 21202_3.

67. На доске сохранилась полустертая запись

$$\begin{array}{r}
 & 2 & 3 & & 5 & \\
+ & & & & & \\
 & 1 & & 6 & 4 & 2 \\
\hline
 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3
\end{array}$$

Выясните, в какой системе счисления записан пример и восстановите слагаемые.

Ответ: $23451 + 15642 = 42423$. 7-ричная система счисления.

68. Один школьный учитель заявил, что у него в классе 100 детей, из них 24 мальчика и 32 девочки. Какой системой счисления он пользовался?

Ответ: Пусть n – основание системы счисления. Тогда $n^2 = (2n + 4) + (3n + 2)$, то есть $n^2 - 5n - 6 = 0$. Отсюда $n = -1$ или $n = 6$. Ответ: $n = 6$.

Системы счисления-2, 9 июля. Признаки делимости

69. Сформулируйте и докажите условие, позволяющее определить чётность числа по его записи
а) в троичной системе счисления;
б) в системе счисления с основанием p.

Ответ: Число чётно тогда и только тогда, когда а) в его троичной записи чётное число единиц (сумма цифр чётна);
б) его p-ичная запись оканчивается чётной цифрой (при чётном p), сумма цифр чётна (при нечётном p).

70. Сформулируйте и докажите признаки делимости
а) на 2, 3, 4, 6, 12 в 12-ричной системе счисления;
б) на делитель основания системы счисления.

Ответ: б) Пусть d – делитель p. Число делится на d тогда и только тогда, когда его последняя цифра p-ичной записи числа делится на d.

71. Сформулируйте и докажите признаки делимости
а) на 3 и 5 в 16-ричной системе счисления;
б) на делитель числа $p - 1$ в p-ичной системе счисления;

Ответ: б) Пусть d – делитель $p-1$. Число делится на d тогда и только тогда, когда сумма цифр его p-ичной записи делится на d.

72. Сформулируйте и докажите признаки делимости

а) на 2, 3, 4, 6, 12 в 11-ричной системе счисления;

б) на делитель числа $p+1$ в p-ичной системе счисления.

Ответ: б) Пусть d – делитель $p+1$. Число делится на d тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр p-ичной записи делится на d.

Системы счисления - 3, 9 июля. Задачи

73. а) Кощей Бессмертный загадывает три двузначных числа: a, b и c. Иван Царевич должен назвать ему три числа x, y и z, после чего Кощей сообщит ему сумму $ax+by+cz$. Иван Царевич должен отгадать задуманные числа, иначе ему отрубят голову. Как ему спастись?

б) Кощей Бессмертный загадывает три *любых* натуральных числа: a, b и c. Иван Царевич называет ему три числа x, y и z, после чего Кощей сообщает ему сумму $ax+by+cz$. Иван Царевич должен отгадать задуманные числа за *два* таких "хода", иначе ему отрубят голову. Как ему спастись?

Решение: а) Иван Царевич должен назвать числа 1, 100, 100^2. Числа a, b, c – "цифры" ответа Кощея в 100-ичной записи.

б) Первым ходом Иван называет, например, три единицы – пусть Кощей в ответ сообщает число x. Тогда Иван действует аналогично пункту а), используя систему счисления с основанием x, – называет числа 1, x и x^2.

74. Какое наименьшее число гирь необходимо для того, чтобы иметь возможность взвесить любой вес от 1 до 100 на чашечных весах, если гири можно класть только на одну чашку весов?

Решение: Любое число можно записать в двоичной системе счисления. Поэтому для взвешивания любого веса от 1 до 100 достаточно иметь семь гирь с весами 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6. Шестью гирями обойтись нельзя, так как с их помощью можно взвесить не более $2^6-1=63$ различных весов (каждая гиря либо участвует, либо не участвует во взвешивании).

75. а) Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде разности двух чисел, запись которых в троичной системе счисления содержит только 0 и 1.

б) Какое наименьшее число гирь необходимо для того, чтобы иметь возможность взвесить любой вес от 1 до 100 на чашечных весах, если гири можно класть на обе чашки весов?

Решение: а) Запишем исходное число в троичной системе счисления и построим требуемые числа поразрядно справа налево. При этом если у получившихся чисел в каких-то одноименных разрядах стоят единицы, то их можно заменить нулями.

б) Воспользовавшись результатом п. а), получаем, что достаточно иметь 5 гирь с весами 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4 (гиря весом 3^5 не нужна). Четырех же гирь явно недостаточно, так как с их помощью можно взвесить не более $3^4-1=80$ различных весов (каждая гиря либо на левой чашке весов, либо на правой, либо не участвует во взвешивании).

Линейное разножение НОД, 10 июля.

Теорема. *Наибольший общий делитель произвольных натуральных чисел a и b представим в виде НОД$(a,b)=ax-by$, где x и y – целые числа. Такое представление называется* ***линейным разложением*** *наибольшего общего делителя.*

Пример: $1 = \text{НОД}(13,5) = 2\cdot 13 - 5\cdot 5 = (-3)\cdot 13 - (-8)\cdot 5 = \ldots$

76. Найдите хотя бы одно линейное разложение а) НОД$(5;4)$; б) НОД$(14;10)$; в) НОД$(17,5)$; г) НОД$(30;11)$;

Доказательство. НОД$(1,1) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1$. Пусть это утверждение верно всех "меньших" (в том или ином смысле) пар (a', b'). Тогда разделим a на b с остатком ($a = bq + r$) и напишем линейное разложение: НОД$(b,r) = bx' - ry'$. Учитывая равенства НОД$(a,b) =$ НОД(b,r) и $r = a - bq$, напишем НОД$(a,b) = bx' - (a-bq)y' = a(-y') - b(-qy' - x')$. Это и требовалось доказать.

Слово "индукция" пока произносить не стоит.

Далее разбирается поиск с помощью алгоритма Евклида.

77. Найдите с помощью алгоритма Евклида линейное разложение а) НОД$(13,15)$;
б) НОД$(79,113)$;
в) НОД$(78,114)$.

78. а) Решите сравнение $23x \equiv 1 \pmod{13}$;
б) С помощью полученного результата найдите линейное разложение НОД$(23,13)$.

79. а) Решите сравнение $24x \equiv 3 \pmod{45}$;
б) С помощью полученного результата найдите линейное разложение НОД$(24,42)$.

Взаимно простые числа, 11 июля.

Определение 1. *Натуральные числа называются* ***взаимно простыми****, если их НОД равен 1.*

Для решения следующих задач используйте теорему о линейном разложении НОД. Разложение на простые множители использовать нельзя.

80. Числа a и b взаимно просты, ac делится на b. Докажите, что c делится на b.

Решение: Найдутся числа x и y такие, что $ax - by = 1$. Домножив это равенство на c, получим $acx - bcy = c$, из которого и следует, что $c \,\vdots\, b$.

81. Числа a и b взаимно просты, c делится на a, c делится на b. Докажите, что c делится на ab.

Решение: Найдутся числа x и y такие, что $ax - by = 1$. Домножив это равенство на c, получим $acx - bcy = c$, из которого и следует, что $c \,\vdots\, ab$.

82. Докажите, что НОД двух чисел делится на произвольный общий делитель этих чисел.

Решение: Существуют x и y, что $(a,b) = ax + by$. Рассмотрим произвольный общий делитель d чисел a и b. Т.к. правая часть делится на d, то и (a,b) делится на d.

83. Числа a и b взаимно просты. Докажите, что для любого натурального c. Докажите, что НОД$(a,bc) =$ НОД(a,c)

Указание: Докажите, что наборы общих делителей совпадают.

Решение: $ax + by = 1$, значит $acx + bcy = c\ldots$

84. Докажите, что любое натуральное число представляется в виде отношения 99-ой степени некоторого натурального числа и 19-ой степени некоторого натурального числа.

85. Фальшивомонетчик Вова взял два взаимно простых числа m и n и нарисовал кучу купюр достоинством в m и n рублей. Докажите, что он сможет без сдачи набрать ими любую сумму начиная с mn рублей.

Дано уравнение $ax - by = c$, 11 июля.

Дано уравнение $ax - by = c$ (a, b и c – целые числа). Требуется решить его в целых числах, то есть найти все пары целых чисел (x, y), при которых уравнение обращается в верное равенство или доказать, что их нет.

Если $(a,b) = d > 1$, то есть два варианта:

- c не делится на d. В этом случае решений нет
- c делится на d. В этом случае мы можем сократить уравнение на d.

Теперь можно считать, что $(a, b) = 1$.

86. НОД$(a, b) = 1$. Докажите, что у уравнения $ax - by = 1$ есть хотя бы одно решение.

87. НОД$(a, b) = 1$. Докажите, что у уравнения $ax - by = c$ есть хотя бы одно решение.

88. Докажите, что если пара $(x = m, y = n)$ – решение уравнения $ax - by = c$, то пары вида $(x = m + kb, y = n + ka)$ также являются решениями, а других решений нет.

89. Решите уравнения: а) $5x - 4y = 1$; б) $3x + 7y = 3$; в) $-12x + 27y = 15$; г) $-15x + 27y = 1$; д) $14x - 68y = 8$; е) $610x - 377y = 3$.

Тест по делимости, 18 июля.

Выполните задания и напишите ответ на этом листочке

Найдите остаток при делении

1. 3^{200} на 7;
2. 79^{100} на 80;
3. 5^{16} на 53;
4. *(2 очка).* $9^{121} + 13^{121}$ на 11.

Найдите наибольший общий делитель

5. НОД$(1234, 3073)$;
6. НОД$(1024, 1000)$;
7. НОД$(165, 432)$;
8. *(2 очка).* НОД$(11! - 20, 10! - 20)$.

Найдите линейное разложение НОД$(a, b) = ax - by$

9. $a = 17$, $b = 12$;
10. $a = 12$, $b = 40$;
11. *(2 очка).* $a = n$, $b = n + 1$.

Решите сравнение

12. $13x \equiv 1 \pmod 7$;
13. $13x \equiv 1 \pmod 8$;
14. $4x \equiv 10 \pmod{12}$;
15. $24x \equiv 15 \pmod{27}$.

Переведите из одной системы счисления в другую

16. $1010001_2 = x_{10}$;
17. $111221_3 = x_5$;
18. $1023_{10} = x_{16}$;
19. *(2 очка).* $256_{256} = x_{16}$
20. *(2 очка).* $121_k = x_{k+1}$ $(k \geqslant 3)$.

Решите уравнение в целых числах

21. $3x - 5y = 1$;

22. $59x + 13y = 0$;

23. $24x - 16y = 18$;

24. $24x - 16y = 28$;

25. $13x - 8y = -3$.

Вокруг геометрии

Геометрия-1. Площади, 4 июля.

1. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.

2. Докажите, что площадь остроугольного треугольника равна половине произведения основания на высоту.

3. Докажите, что площадь тупоугольного треугольника равна половине произведения основания на высоту.

4. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

5. Докажите, что площадь трапеции равна половине произведения суммы двух оснований на высоту.

6. а) Докажите, что медиана делит треугольник на две равновеликие части.
б) Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. Докажите, что $\frac{BD}{DC} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}$.

7. Пусть точка P лежит на медиане AD треугольника ABC. Докажите, что $S_{BAP} = S_{CAP}$.

8. а) Точку пересечения медиан треугольника соединили со всеми вершинами. Докажите, что площади получившихся треугольников равны.

9. В четырёхугольнике $ABCD$ площади треугольников DBC и ADC равны. Докажите, что $AB \| CD$.

10. Диагонали делят трапецию на 4 треугольника. Докажите, что площади двух треугольников, прилегающих к боковым сторонам равны.

11. В параллелограмме $ABCD$ выбрана точка P. Докажите, что

$$S_{ABP} + S_{CPD} = S_{BCP} + S_{DPA}.$$

12. Дан выпуклый четырёхугольник, диагональ AC которого делит среднюю линию MN (M — середина BC, а N — AD) пополам. Докажите, что треугольники ABC и ACD — равновелики.

13. (Теорема Вариньона)
а) Докажите, что фигура, образованная серединами сторон произвольного четырёхугольника — параллелограмм.
б) Докажите, что площадь этого параллелограмма равна половине площади исходного четырёхугольника.

14. Из точки внутри равностороннего треугольника опускаются перпендикуляры на стороны. Докажите, что сумма их длин не зависит от выбора точки.

15. Средние линии четырёхугольника разделяют его на четыре четырёхугольника. Докажите, что суммы площадей несмежных четырёхугольников равны.

16. Докажите, что если одна из средних линий четырёхугольника делит его площадь пополам, то этот четырёхугольник – трапеция или параллелограмм.

Геометрические места точек - 1, 8 июля.

Определение. *Геометрическое место точек (ГМТ), обладающих данным свойством – это фигура, состоящая из всех точек, для каждой из которых выполняется это свойство.*

Пример 1. Назовите

а) ГМТ удалённых от данной точки на расстояние R;

Ответ: окружность радиуса R с центром в данной точке.

б) ГМТ удалённых от данной точки на расстояние не больше R;

Ответ: круг радиуса R с центром в данной точке.

в) ГМТ удалённых от данной точки на расстояние меньше R.

Ответ: круг без границы (внутренность круга).

Пример 2. Найдите а) ГМТ X, для которых $AX + XB = AB$.

б) ГМТ X, для которых $AX + AB = BX$.

Ответ: а) Отрезок AB; б) прямая AB без внутренности отрезка AB.

Решение задачи на ГМТ состоит из следующих частей:

$*$ *предъявление требуемой фигуры;*

$**$ *доказательство того, что каждая точка фигуры удовлетворят требуемому свойству;*

$***$ *доказательство того, что никакие другие точки не удовлетворяют этому свойству.*

Пример 3. Найдите ГМТ, равноудалённых от концов отрезка AB.

Решение:

$*$ Ответ – серединный перпендикуляр к отрезку AB.

$**$ Рассмотрим точку на серединном перпендикуляре и докажем, что она равноудалена от концов отрезка AB...

$***$ Рассмотрим точку не лежащую на серединном перпендикуляре и докажем, что она неравноудалена от концов отрезка AB...

$* * *$

17. Завершите доказательство пунктов $**$ и $***$ в примере 3.

18. Найдите

а) ГМТ, равноудалённых от точек A и B.

Ответ: серединный перпендикуляр к отрезку AB (см. **Пример**).

б) ГМТ, расстояние которых до точки A больше, чем до точки B.

Ответ: полуплоскость

в) ГМТ, удаленных от данной прямой l на данное расстояние x.

Ответ: пара прямых, параллельных l.

г) ГМТ, для которых расстояние до данной прямой меньше x;

Ответ: внутренность полосы (без границ);

д) ГМТ, для которых расстояние до данной прямой больше x;

Ответ: плоскость вне полосы.

19. Найдите

а) ГМТ, лежащих внутри угла AOB, для которых расстояние до прямой OA меньше расстояния до прямой OB.

Ответ: Часть угла между OA и биссектрисой угла.

б) ГМТ, равноудалённых от двух пересекающихся в точке O прямых.

Ответ: объединение биссектрис образующихся углов.

20. Даны две параллельные прямые. Найдите

а) ГМТ, равноудалённых от этих прямых.

Ответ: Прямая, параллельная данным прямым и делящая полосу между ними пополам.

б) ГМТ, для которых расстояние до первой вдвое больше, чем до второй.

Указание: это объединение *двух* прямых;

21. Найдите ГМТ, сумма расстояний от которых до двух данных прямых равна данной величине x.

22. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на двух данных параллельных прямых.

Ответ: Прямая, параллельная данным прямым и равноудалённая от них.

23. Даны точки A и B. Найдите ГМТ M таких, что

а) $MA \neq MB$;

б) $AM < AB$ и $BM \geqslant AB$;

в) $\angle BAM$ – наименьший угол треугольника ABM;

г) $\angle AMB$ – средний по величине угол треугольника ABM;

д) $\angle ABM$ – наибольший угол треугольника ABM.

Ответ: а) плоскость без серединного перпендикуляра к AB;

б) часть открытого круга (B, AB), лежащая не внутри окружности (A, AB) (“полумесяц”);

в) пересечение полуплоскости из а) и круга с центром B и радиусом BA.

24. Пусть A, B и C – точки, не лежащие на одной прямой. Найдите ГМТ M таких, что:

а) прямая CM пересекает отрезок AB;

б) луч CM пересекает отрезок AB;

в) отрезок CM пересекает отрезок AB.

Ответ: а) внутренность угла ACB и угла, вертикального у нему; б) внутренность угла ACB; в) часть внутренности угла ACB, лежащая с другой стороны от точки C относительно отрезка AB.

ГМТ-2, 9 июля.

25. Даны точки A и B. Найдите ГМТ M таких, что точки A, B и M являются вершинами равнобедренного треугольника.

Ответ: объединение серединного перпендикуляра к отрезку AB и окружностей (A, AB) и (B, AB).

26. Даны горизонтальная прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. Найдите ГМТ M таких, что прямая AM пересекает прямую l левее, чем прямая BM.

27. Дана окружность радиуса 2000. Найдите ГМТ M, для каждой из которых расстояние до ближайшей к M точки окружности равно 1.

Ответ: две окружности с центрами в точке M и радиусами 1999 и 2001.

28. Найдите ГМТ, равноудалённых от трёх данных точек.

Ответ: точка пересечения серединных перпендикуляров.

29. а) Найдите ГМТ, лежащих внутри треугольника и равноудаленных от его сторон.

Ответ: точка пересечения биссектрис.

б) Найдите ГМТ, равноудаленных от трёх данных прямых.

Ответ: точки пересечения биссектрис образованных углов (4 точки, если среди прямых нет параллельных, две точки, если среди прямых две параллельных и ни одной, если все три прямые параллельны)

30. Пусть A, B и C – точки, не лежащие на одной прямой. Найдите ГМТ M таких, что ближайшей к M точкой среди точек A, B и C является A.

Ответ: Угол, образованный серединными перпендикулярами к отрезкам AB и AC и содержащий точку A.

31. Если в треугольнике отметить точку P и соединить её с вершинами, то треугольник разобьется на три меньших треугольника. Найдите ГМТ P, для которых сумма площадей двух из этих треугольников будет равна площади третьего.

Ответ: Треугольник с вершинами в серединах сторон исходного треугольника.

32. Точка O лежит на отрезке AC. Найти ГМТ M, для которых $\angle MOC = 2\angle MAC$

Ответ: окружность с центром в точке O и радиусом OA.

Неравенство треугольника, 10 июля.

33. Длина стороны AC треугольника ABC равна 3,8, длина стороны AB – 0,6. Известно, что длина стороны BC – целое число. Какова эта длина?

Решение: Ответ: 4.

34. Докажите, что длина любой стороны треугольника не превосходит его полупериметра.

Решение: Обозначим длины сторон треугольника через a, b, c. Так как $b+c>a$, то $a+b+c>2a$.

35. Найдите внутри выпуклого четырёхугольника точку, такую, что сумма расстояний от нее до вершин минимальна.

Решение: Так как четырёхугольник выпуклый, то его диагонали пересекаются в точке O. Обозначим вершины четырёхугольника через A, B, C и D (по часовой стрелке). Тогда сумма расстояний от O до вершин равна сумме длин диагоналей AC и BD. Но для любой другой точки P имеем, во-первых, что сумма расстояний от P до вершин не меньше $AC+BD$, а во-вторых, либо $PA+PC>AC$, либо $PB+PD>BD$. Значит эта сумма равна $AC+BD$ только если P совпадает с точкой O. Значит, точка O – искомая.

36. Докажите, что $\frac{a+b-c}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}$.

37. Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике сумма длин диагоналей больше его полупериметра и меньше периметра.

Решение: Пусть диагонали пересекаются в точке O. Требуемые неравенства легко выводятся из неравенств треугольника для треугольников OAB, OBC, OCD, ODA и для треугольников ABC, BCD, CDA и DAB.

38. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике сумма длин диагоналей больше периметра и меньше удвоенного периметра.

39. Внутри треугольника взяли две произвольные точки. Докажите, что расстояние между ними не превосходит полупериметра треугольника.

Решение: Продолжите отрезок, соединяющий эти точки, в обе стороны до пересечения с контуром треугольника.

40. На сторонах единичного квадрата отмечены 4 точки, по одной на каждой стороне. Докажите, что периметр образованного ими четырёхугольника больше двух.

41. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle ADC = 90^\circ$. Докажите, что $2DB \leqslant P_{ABC}$.

42. Грибник выходит из леса в заданной точке. Ему надо дойти до шоссе, которое представляет собой прямую линию, и зайти обратно в лес в другой заданной точке. Как ему сделать это, пройдя по самому короткому пути?

Решение: Обозначим точку, в которой грибник выходит из леса, через A, а точку, в которой он должен войти в лес, через B. Отразим точку A симметрично относительно прямой-шоссе и получим точку A'. Тогда из любого пути AKB (K – это точка, в которой грибник выходит на шоссе) можно, отразив симметрично относительно шоссе его участок AK, получить равный ему по длине путь $A'KB$, длина которого по неравенству треугольника не меньше $A'B$.

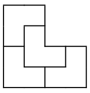
Следовательно, искомая точка K, в которой грибник должен подойти к шоссе – это точка пересечения $A'B$ и шоссе.

43. Точку M, лежащую внутри угла, отразили симметрично относительно сторон этого угла, в результате чего получились точки M_1 и M_2. Докажите, что внутри угла содержится не более половины отрезка M_1M_2.

Разрезания, 18 июля.

44. а) Можно ли разрезать трехклеточный уголок на 4 равные части;

б) квадрат 4×4 на 5 равных частей?

Решение: а) 

45. Семиклассник разрезал квадрат на прямоугольники периметра 7, а восьмиклассник – на прямоугольники периметра 8. Могло ли у восьмиклассника получиться больше прямоугольников?

Решение: Да. Например, семиклассник может разрезать квадрат на прямоугольники 2.5×1, а восьмиклассник – на прямоугольники 0.5×3.5

46. Можно ли разрезать квадрат на 3 десятиугольника и 33-угольник?

Решение: а) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

б) Да. Например, строим внутри квадрата три не имеющие общих вершин десятиугольники так, чтобы по две вершины каждого лежали на одной из сторон квадрата причём одна из таких вершин совпадала с вершиной квадрата

в) Да

47. Можно ли разрезать квадрат на равносторонние треугольники?

Решение: нет, так как не удаётся заполнить угол в квадрате.

48. Для каких значений n можно разрезать а) квадрат на n меньших (не обязательно одинаковых) квадратов; б) правильный треугольник на n меньших (не обязательно одинаковых) правильных треугольников?

Решение: а) $n = 4$ или $n \geqslant 6$; б) $n = 4$ или $n \geqslant 6$.

Теорема Пифагора

49. Разрежьте квадрат 7×7 на

а) квадраты 4×4, квадрат 3×3 и 4 равных прямоугольных треугольника;

б) один квадрат и 4 прямоугольных треугольника, равных треугольникам из (а);

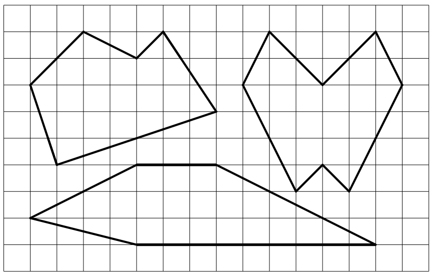
в) Найдите размер квадрата в (б).

50. Даны 4 прямоугольных треугольника с катетами a, b и гипотенузой c. Докажите, что добавив к ним а) один квадрат со стороной c; б) два квадрата со сторонами a и b, можно будет составить квадрат со стороной $a + b$.

51. *(Теорема Пифагора).* Докажите, что $a^2 + b^2 = c^2$.

Формула Пика, 20 июля.

52. Найдите площади многоугольников, изображённых на рисунке



Теорема (Формула Пика). *Вершины многоугольника (не обязательно выпуклого) расположены в узлах клетчатой бумаги с клетками размера 1×1. Пусть внутри многоугольника лежит n узлов, а на границе – m узлов. Тогда площадь этого многоугольника равна $n + \frac{m}{2} - 1$.*

Целесообразно нарисовать несколько многоугольников и попросить детей проверить для них справедливость формулы Пика.

Этапы доказательства:

a. Проверьте формулу Пика для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки.

b. Докажите формулу Пика для многоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки.

c. Докажите формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки

d. Докажите формулу Пика для многоугольника, составленного из двух многоугольников, для которых формула Пика уже доказана.

e. Пусть многоугольник, для которого формула Пика уже проверена, составлен из двух многоугольников. Докажите, что если формула Пика выполняется для одного из них, то она выполняется и для другого.

f. Докажите формулу Пика для произвольного треугольника с вершинами в узлах сетки.

g. Докажите, что всякий выпуклый многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники.

h. Докажите, что любой (не обязательно выпуклый) многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники.

   Доказательство этого факта для случая невыпуклого многоугольника достаточно сложно для 7 класса, поэтому его стоит принять без доказательства.

i. Докажите формулу Пика для произвольного многоугольника с вершинами в узлах сетки.

Следствие. *Площадь многоугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги с клетками размера 1×1 является либо целым числом, либо полуцелым.*

53. Нарисуйте треугольник площади $\frac{1}{2}$, у которого все стороны больше 5, а вершины лежат в узлах сетки.

Решение: Поскольку в формуле Пика для этого треугольника $n \geqslant 3$ (вершины лежат в узлах сетки), внутри треуголька и на сторонах (кроме вершин) целых точек нет. Например, годится треугольник, вершины которого находятся в точках $(0,0)$, $(6,1)$, $(5,2)$.

54. Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах сетки?

Решение: Нет. По формуле Пика площадь образовавшихся частей должна быть целой или полуцелой, а она равна $\frac{50 \cdot 50}{15}$.

55. Замкнутая несамопересекающаяся ломаная идет по линиям сетки и проходит по одному разу через все узлы клетчатого квадрата 7×7. Найдите площадь фигуры, ограниченной этой ломаной.

Решение: Поскольку ломаная проходит через все узлы, внутри узлов нет. Поскольку на границе лежит 64 точки, то площадь фигуры, ограниченной ломаной $0 + \frac{64}{2} - 1 = 31$.

56. Пусть A и B два узла клетчатой бумаги, из которых, второй на p клеток правее и на q клеток выше первого. Чему равно расстояние от прямой AB до ближайшего к ней узла, не лежащего на этой прямой?

Решение: Пусть C – ближайшая к AB точка. На отрезке AB лежит НОД$(p, q) + 1$ точек (считая концы). Внутри треугольника ABC и на сторонах AC и BC точек нет (так как если бы такая точка нашлась, то она была бы ближе к прямой AB, чем C). Не забыв про точку C, видим, что по формуле Пика площадь треугольника ABC равна $\frac{\text{НОД}(p,q)+2}{2} - 1 = \frac{\text{НОД}(p,q)}{2}$. Поскольку $AB = \sqrt{p^2 + q^2}$, высота треугольника ABC вычисляется по формуле $h = \frac{2S}{AB} = \frac{\text{НОД}(p,q)}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

Графы

Графы. Определения, 13 июля.

Определение 2. *Будем говорить, что задан **граф**, если задано конечное множество его **вершин** и про любую пару различных вершин сказано, связаны они **ребром** или нет.*

Определение 3. ***Степенью** вершины называется количество выходящих из нее ребер.*

Определение 4. ***Полным** называется граф, в котором проведены все возможные ребра.*

Определение 5. *Вершина, степень которой равна нулю называется **изолированной**.*

Определение 6. *Вершина, степень которой равна 1 называется **висячей**.*

Определение 7. *Граф называется **связным**, если между любыми двумя его вершинами есть путь по ребрам (как по дорогам).*

Определение 8. *Часть графа (**подграф**), состоящий из всех вершин, любые две из которых связаны путем, и всех ребер, их соединяющих, называется **компонентой связности**.*

Определение 9. ***Циклом** называется замкнутый путь по ребрам графа без повторяющихся ребер.*

Определение 10. ***Деревом** называется связный граф без циклов.*

Определение 11. ***Мостом** (перешейком) называется ребро, при выкидывании которого граф перестает быть связным.*

Определение 12. ***Скелетом** (остовом) графа называется подграф, содержащий все его вершины и являющийся деревом.*

Определение 13. *Граф называется **ориентированным**, если на каждом его ребре задано направление.*

Графы-1, 13 июля. Вводные задачи

1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля–Меркурий, Плутон–Венера, Земля–Плутон, Плутон–Меркурий, Меркурий–Венера, Уран–Нептун, Нептун–Сатурн, Сатурн–Юпитер, Юпитер–Марс и Марс–Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

Решение: Нарисуем схему: планетами будут соответствовать точки, а соединяющим их маршрутам – непересекающиеся между собой линии. Теперь видно, что долететь от Земли до Марса нельзя.

2. В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

3. В углах доски 3×3 стоят четыре коня. Два белых с одной стороны и два черных – с другой. Ходы происходят по шахматным правилам. Могут ли через несколько ходов белые кони встать в углах одной диагонали, а черные кони – в углах другой?

4. Людоед захватил маленькую принцессу. Он нарисовал на земле k квадратов в ряд. Людоед обещал отпустить принцессу, если она сможет пропрыгать по всем квадратам по разу и снова вернуться на первый, при этом прыгать с любого квадратика на соседний нельзя, можно прыгать только через один или через два квадратика (например, с 5 можно прыгнуть только на 2,3,7 или 8). Если принцесса не выполнит задание, людоед её съест. Как принцессе спастись при а) $k = 5$; б) $k = 10$.

5. Можно ли на окружности расположить числа от 1 до 10 так, чтобы соседние числа отличались на 2 или на 3?

6. Муравей забрался в банку из-под сахара, имеющую форму куба. Сможет ли он последовательно обойти все рёбра куба, не проходя дважды по одному ребру?

Графы-2, 13 июля. Степени вершин. Подсчёт числа рёбер

7. В деревне Вишкиль 9 домов. Из каждого дома тянется четыре шланга к четырём другим домам. Сколько шлангов в деревне?

Ответ: $9 \cdot 4/2 = 18$

8. В москитной сетке ровно 100 узелков, любые два узелка соединены отдельной ниточкой. Сколько всего ниточек?

Ответ: $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$

9. В доме отдыха Вишкиль 57 корпусов. Электрик решил соединить телефонными проводами каждый корпус ровно с пятью другими. Сможет ли он это сделать?

10. Существуют ли графы, степени вершин которых равны:
а) 9, 8, 8, 7, 6, 6, 3, 2, 1;
б) 8, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 2, 1;
в) 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1;
г) 8, 7, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2?

Ответ: нет нет да нет

11. Докажите, что число людей, когда-либо живших на земле и сделавших нечётное число рукопожатий – чётно.

12. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

13. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

14. В графе каждая вершина покрашена в синий или зеленый цвет. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелеными, а каждая зеленая – с девятью синими и шестью зелеными. Каких вершин больше – синих или зеленых?

Графы-3, 14 июля. Связность

15. На плоскости нарисованы вершины графа, пронумерованные числами от 2 до 30. При этом две вершины с номерами a и b соединены ребром только в том случае, если одно из чисел a или b делится на другое. Сколько компонент связности имеет этот граф?

Ответ: 5 компонент – {29}, {23}, {19}, {17}, {все остальные}

16. В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).

Решение: Рассмотрим два произвольных города и предположим, что они не соединены путем, то есть такой последовательностью дорог, в которой начало очередной дороги совпадает с концом предыдущей. Каждый из этих двух городов по условию соединен не менее, чем с 7 другими; при этом все упомянутые города различны – ведь если какие-то два из них совпадают, то есть путь, соединяющий исходные города.

Таким образом, мы указали не менее 16 городов. Противоречие.

17. Степень каждой вершины связного графа не менее 100. Одно ребро выкинули. Может ли получиться несвязный граф?

18. Докажите, что связный граф, в котором степень каждой вершины чётн при удалении любого ребра остается связным.

Решение: Если удалено ребро AB, то нам достаточно доказать, что и после этого есть путь из A в B. Если это не так, то в компоненте связности, содержащей A, все вершины, кроме A, – чётные. Ровно одной нечётной вершины быть не может.

19. В компьютерной сети от сервера отходит 21 провод, от остальных компьютеров – по 4 проводов, а от принтера – один провод. Докажите, что с сервера можно послать документ на принтер.

Решение: Рассмотрим компоненту связности, содержащую сервер. Нам нужно доказать, что она содержит также и принтер. Предположим противное. Тогда в этой компоненте связности из одной вершины (сервера) выходит 21 ребро, а из всех остальных вершин – по 20 ребер. Таким образом в этом графе (компоненте связности) ровно одна нечётная вершина. Противоречие!

20. В Метрополисе 12 станций метро, соединённых 56 перегонами (две станции соединяются не более чем одним перегоном). Докажите, что метрополитен связен.

Решение: Докажем, что со станции 1 можно попасть на станцию 2. Если нельзя, то на непересекающихся 11-ти маршрутах 1–2, 1–3–2, 1–4–2, 1–5–2,. . . , 1–12–2 не хватает хотя бы по одному ребру. Но до полного графа не хватает всего 10 рёбер.

Графы-4, 14 июля. Разные задачи

21. Четыре девочки – Катя, Вера, Маша и Аня – участвовали в конкурсе “Старая калоша”. В каждом из туров участвовали 3 девочки. Катя участвовала в 8 турах – больше всех, а Вера в 5 турах – меньше всех. Сколько было туров?

22. Окружность не проходит через вершины 17-угольника и не касается его сторон. Может ли она пересечь каждую сторону ровно по одному разу?

23. У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

24. В парламенте у каждого члена не больше трёх врагов. Доказать, что его можно разбить на две палаты так, что у каждого будет не больше одного врага в своей палате.

Решение: Если у кого-нибудь два врага в своей палате, то общее “количество вражды” внутри палат можно уменьшить, отправив его в другую.

25. Каждая пара депутатов парламента либо дружит, либо враждует. При этом неукоснительно соблюдаются условия “друг моего друга – мой друг” и “друг моего врага – мой враг”. Известно, что в парламенте 50 депутатов, и что каждый из них послал открытки всем своим друзьям из числа коллег. Какое наименьшее число открыток могло быть послано? А наибольшее?

26. По окончании однокругового шахматного турнира, в котором участвовали 7 гроссмейстеров и 8 мастеров, комментатор посчитал, сколько партий каждый сыграл вничью. У него получилось 8 раз по 3, 9 раз по 6 и один раз 5. Однако известно что все партии между игроками одного звания закончились победой одного из них. Докажите, что комментатор ошибся.

27. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены: в них стоит звёздочка. Известно, что для любой отмеченной клетки число звёздочек в ее столбце равно числу звёздочек в её строке. Докажите, что число строк таблицы, где есть хотя бы одна звёздочка, равно числу столбцов таблицы, где есть хотя бы одна звёздочка.

Графы-5, 15 июля. Эйлеровы графы

28. В связном графе степени всех вершин чётны. Маляр садится в одну из вершин и красит рёбра в розовый цвет, передвигаясь по ним. Ходить по уже покрашенному ребру он не может, а когда попадает в вершину, из которой не может выйти, заканчивает свою работу. Докажите, что это та самая вершина, с которой он начал.

29. Оказалось, что маляр покрасил не весь граф. Докажите, что он мог бы покрасить больше рёбер, чем покрасил.

30. *(Теорема 1).* Дан связный граф. Докажите, что

а) если в нем нашелся **эйлеров цикл** (проходящий по каждому ребру ровно по одному разу), то все его вершины имеют чётную степень;

б) если все вершины имеют чётную степень, то в графе существует эйлеров цикл.

31. *(Теорема 2).* В связном графе существует **эйлеров путь** (проходящий по каждому ребру ровно по одному разу, но не обязательно замкнутый) тогда и только тогда, когда не более двух вершин графа имеют нечётную степень.

Замечание. *Понятие графа можно обобщить. Позволим соединять две вершины более чем одним ребром (кратные ребра), а также проводить ребра от вершины к самой себе (петли). Такой объект называется мультиграфом. Заметим, что для мультиграфов также верны доказанные выше теоремы.*

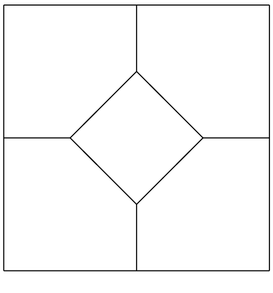
32. а) Можно ли из проволоки длины 12 см сложить каркас кубика с ребром 1 см?

б) На какое наименьшее число частей надо разрезать эту проволоку, чтобы из них можно было сложить такой кубик?

33. На занятии 20 школьников решили каждый по 6 задач, причём каждая задача была решена ровно двумя школьниками. Докажите, что можно организовать разбор всех задач так, чтобы каждый школьник рассказал ровно по 3 задачи.

34. Город в плане выглядит как квадрат 3×3, каждая сторона квартала-квадратика – участок улицы длиной 100 м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы?

35. Поле разбито межами на несколько участков (см. рисунок). Землемер захотел, не выходя за пределы поля, пройти по нему так, чтобы пересечь каждую межу ровно один раз. Удастся ли ему это?



Графы-6, 16 июля. Деревья

Напомнить определения связности, цикла, моста...

Обсуждение. В некотором государстве имеется система дорог. При этом из каждого города в каждый ведет единственный маршрут. Мы сели в машину, которая не умеет делать развороты. Что будет происходить при достаточно долгом движении?

Варианты ответа:

1. Новые города будут появляться снова и снова.
2. Города начнут повторяться.
3. Машина окажется в тупике.

Вопрос. Чему противоречат две первые возможности?

36. Доказать, что во всяком дереве есть висячие вершины.

37. Может ли дерево содержать ровно одну висячую вершину?

38. Нарисуйте все возможные деревья с шестью вершинами. Докажите, что других нет.

(Всего получается 6 деревьев. Для доказательства используется возможная длина самого длинного пути.)

Рисуя различные деревья, наблюдаем за взаимосвязью между числом вершин и рёбер.

Гипотеза: количество вершин на 1 больше количества рёбер.

Процесс обеднения дерева. Обрезаем висячие вершины (по одной) с входящими в них рёбрами.

39. Доказать, в дереве количество вершин на 1 больше количества рёбер.

40. В дереве есть 8 вершин степени три, 10 вершин степени 4 и несколько висячих вершин. Других вершин нет. Найти число висячих вершин.

41. У царя Гвидона было три сына. Из его потомков 100 имели по два сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

Определение. ***Лесом*** *называется граф без циклов (не обязательно связный).*

Каждая компонента связности леса является деревом.

42. Лес состоит из k деревьев. Найти, на сколько в этом лесу вершин больше, чем рёбер.

43. Доказать, что в связном графе с циклами вершин не больше чем рёбер.

44. На каждую общую сторону двух клеток шахматной доски положена спичка. Хулиган Вася хочет убрать некоторые из них так, чтобы можно было пройти с каждой клетки на каждую, не перепрыгивая через спички. Какое минимальное число спичек ему нужно убрать?

Скелеты

45. Имеется государство с некоторой системой дорог. Из каждого города в каждый можно проехать единственным образом. Можно ли закрыть одну дорогу так, что это свойство сохранится?

Указание: Рассматриваем государство со следующими системами дорог. (Рисуем различные связные графы с циклами). Какие дороги можно закрывать, не нарушая связность системы?

Даём определение моста.

Выводы из предшествующей задачи: В дереве любое ребро – мост.

Даём определение скелета.

46. В связном графе B вершин и P рёбер. Сколько рёбер надо удалить, чтобы получить скелет этого графа? **Указание:** Надо доказать, что если ребро входит хоть в один цикл, то оно не является мостом.

47. Система станций метро устроена таким образом, что из каждой станции в каждую можно проехать единственным образом. Доказать, что одну из станций можно закрыть так, что это свойство сохранится.

48. Система станций метро устроена таким образом, что из каждой станции в каждую можно проехать. Доказать, что одну из станций можно закрыть так, что это свойство сохранится.

Замечание.

1.Важно понимать, что в этом параграфе процесс обеднения графа понимается, как удаление ребра без вершин, которые оно соединяет.

2.Школьник не должен забывать о наличии нескольких скелетов в связном графе.

Выводы

Теорема (5 определений дерева). *Следующие утверждения равносильны.*

а) граф связен и не содержит циклов.

б) между любыми 2 вершинами существует единственный путь по рёбрам.

в) в графе любое ребро – мост.

г) граф связный и имеет n вершин и $n-1$ ребро.

д) граф не содержит циклов и имеет n вершин и $n-1$ ребро.

Надо добиться умения доказывать любую из 20 импликаций, содержащихся в теореме. Можно пообещать, что любая из них может встретиться на зачёте.

Тест по графам, 19 июля.

1. Сколько рёбер в полном графе с 20 вершинами?

Ответ: 190

2. Сколько всего рёбер в графе, степени вершин которого равны 3, 4, 5, 3, 4, 5, 3, 4, 5 ?

Ответ: 18

3. В дереве имеется 100 вершин степени 5, 100 вершин степени 3, а остальные – висячие. Сколько висячих вершин в этом дереве?

Ответ: 402

4. Какое число рёбер нужно убрать из полного графа с 15 вершинами, чтобы оставить его скелет?

Ответ: 91

5. Какое минимальное количество рёбер нужно убрать из полного графа с 15 вершинами, чтобы он перестал быть связным?

Ответ: 14

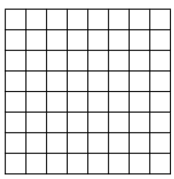
6. Лес состоит из 10 деревьев. Всего в лесу 200 вершин. Сколько в нем рёбер?

Ответ: 190

7. Однажды Рома сказал: “Если степень каждой вершины 100-вершинного графа не меньше N, то этот граф связен”. При каком наименьшем значении N Рома сможет это доказать, если известно, что его не зря взяли в профи?

Ответ: 50

8. Из нескольких кусочков проволоки спаяна проволочная решетка 8×8 клеток. Какое наименьшее число кусочков для этого могло потребоваться?



Ответ: 14

9. Во дворе живут 4 пёсика: Бобик, Робик, Тобик и Толстолобик. Каждому из них случалось драться с кем-нибудь из остальных, причём у Бобика, Робика и Тобика число тех, с кем они дрались – разное. Со сколькими собаками двора дрался Толстолобик?

Ответ: 2

10. В стране 6 городов. Авиасообщение осуществляют несколько авиакомпаний. Каждая обслуживает 3 авиалинии, связывающие попарно некоторые три города (между двумя городами могут летать самолеты нескольких компаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной линией. При каком наименьшем числе компаний это возможно?

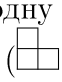
Ответ: 6

11. Каждое ребро графа покрасили в синий или зелёный цвет так, что ни из одной вершины не выходит двух одноцветных рёбер. Синих рёбер оказалось на 5 больше, чем зелёных. Какое наименьшее число компонент связности может иметь этот граф?

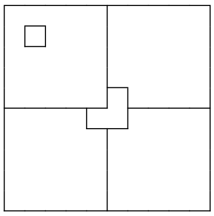
Ответ: 5

Математическая индукция

Индукция-1, 13 июля. Знакомство с ММИ

1. Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на “уголки” из трёх клеток ().

Указание: Переход: разбиваем квадрат на четыре квадрата $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ и вырезаем из каждой недырявой части угловую клетку так, чтобы вырезанные клетки образовали уголок.



2. Докажите, что любую сумму, начиная с 8 тугриков, можно выплатить купюрами по 3 тугрика и 5 тугриков.

Указание: Переход: меняем купюру в 5 тугриков на две купюры по 3 тугрика. Если же пятитугриковых купюр нет – меняем три купюры по 3 тугрика на две купюры по 5 тугриков...

3. Приведите пример натурального числа, которое равно сумме а) трёх своих различных делителей; б) ста своих различных делителей.

Ответ: а) 6; б) $2^{97} \cdot 6$. Переход: $n \to 2n$ (в список суммируемых делителей добавляется число n).

4. Докажите, что при каждом натуральном n, начиная с 3, существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла.

Указание: Переход: стороны AB и BC, образуюшие тупой угол, заменяем на отрезок $A'C'$ ($A' \in AB$; $C' \in BC$). Вновь образованные углы $AA'C'$ и $CC'A$ – внешние углы треугольника $A'BC'$, а значит “тупее” угла B...

5. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растет щетина. Его пересекает несколько прямых общего положения, на каждой из которых с одной из сторон растут волосы. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется волосатой снаружи.

Указание: Проводим прямые одну за другой. Если очередная прямая пересекает волосатую снаружи часть, то часть, оказавшаяся с неволосатой стороны – также волосатая снаружи...

6. *(Игра “Ханойская башня”).* Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров (внизу – самое большое) и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что

а) можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней;

б) это можно сделать не более, чем за $2^n - 1$ перекладываний.

Указание: Пусть мы умеем переность пирамиду высоты $k-1$.

1. Перенести $k-1$ кольцо на пустой стержень
2. Перенести k-е кольцо на другой пустой стержень.

3. Переносим $k-1$ кольцо на тот же стержень

7. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета. (Соседними считаются области, имеющие общий участок границы.)

8. В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трёх цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трёх цветов.

9. Плоскость поделена на области несколькими прямыми и окружностями. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета. (Соседними считаются области, имеющие общий участок границы.)

Индукция-2, 14 июля.

10. Докажите, что $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$;

11. Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

Конечно, надо сказать детям, что существуют и другие методы нахождения этой суммы: вспомнить про Гаусса, упомянуть арифметическую прогрессию.

12. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке? (Такие прямые называют прямыми “*общего положения*”)

Ответ: $1 + \frac{n(n+1)}{2}$.

13. Докажите, что $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9 при всех натуральных n.

14. Докажите, что $6^n + 1$ делится на 7 при всех нечётных n.

15. Докажите, что $3^n - 1$ делится на 8 при чётных n и дает остаток 2 при делении на 8 при нечётных n.

16. Докажите, что $4^n - 3n - 1$ делится на 9 при всех натуральных n.

17. Докажите, что $2^n > 2n + 1$ при всех натуральных $n > 2$.

18. Докажите, что $2^n > 8n - 17$ при всех натуральных n.

19. Докажите, что $n! > 2^n$ при всех натуральных $n \geqslant 4$.

Решение: База $n = 4$ проверяется непосредственно. Переход:

$$(n+1)! = (n+1)n! > 2^n(n+1) > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

20. Докажите, что число, состоящее из 243 единиц, делится на 243. $(243 = 3^5)$

Индукция в графах, 18 июля.

Напомнить доказательство того, что в дереве количество вершин на один больше количества рёбер и добиться решения задачи 1. Вероятно, стоит разобрать и одну из следующих задач (например, задачу 4).

21. Докажите по индукции, что в графе с n вершинами чётное число вершин с нечётной степенью.

22. В стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Доказать, что можно проехать по всем городам, побывав в каждом по одному разу.

Решение: Индукционный переход. Уберём произвольный город A. По индукционному предположению оставшуюся часть можно обойти, пусть этот путь начинается с города B. Если дорога между A и B ведёт в B, то можно из A переехать в B, и проехать оттуда по оставшимся городам. Если же эта дорога ведёт в A, то рассмотрим последний город на пути (C). Если дорога между A и C ведёт в A, то искомый маршрут – B–…–C–A. Иначе – рассмотрим первый город на пути, в который ведёт дорога из A. (назовём его D, а предыдущий – E) и воспользуемся маршрутом B–…–E–A–D–…–C.

23. Усадьбы любых двух джентльменов в графстве Вишкиль соединены либо водным (лодочка), либо сухопутным (карета) сообщением. Докажите, что можно закрыть один из видов транспорта так, чтобы любой джентльмен мог по-прежнему добраться до любого другого.

Решение: Переход. Уберём произвольный город A. По индукционному предположению теперь можно добраться от одного города в другой с помощью лодочки или кареты. Пусть, для определённости, можно добраться с помощью лодочки). Если из A можно добраться водным путём хотя бы в один город, то можно добраться и до любого другого города. Если же из A во все остальные города ездит карета, то из любого города до любого другого можно добраться сухопутным путём через город A.

24. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой не более чем с одной пересадкой.

Решение: Индукция по числу городов. База очевидна. Для доказательства индукционного перехода удалим сначала один из городов (назовём его A). В силу индукционного предположения есть город B с требуемым свойством. Если из B в A ведёт дорога, то город B искомый. Если же дорога ведёт из A в B, то рассмотрим все города, в которые ведёт дорога из B. Если хоть из одного из них ведёт дорога в A, то город B снова искомый. В противном случае искомым является город A.

25. Доказать, что после окончания однокругового турнира по теннису его участников можно выстроить в ряд так, что каждый выиграл у следующего за ним в этом ряду.

Решение: Это переформулировка задачи о существовании пути в полном ориентированном графе.

Если учащийся узнал задачу – хорошо. Если нашёл индукционное решение – ещё лучше.

Бонусные задачи

26. В графе с $2n$ вершинами n^2+1 ребро. Докажите, что в нем есть три вершины, попарно соединённые ребрами.

Решение: Индукционный переход. Пусть утверждение верно для произвольного графа с $2n$ вершинами. Докажем, что оно верно и для графа с $2(n+1)$ вершинами. Рассмотрим произвольные две вершины A и B. Если существует вершина C, из которой идут рёбра и в A и в B, то треугольник нашёлся. Если же такой вершины нет, то из вершин A и B ведёт не более $2n$ рёбер. Поэтому, если убрать из графа вершины A и B, то останется $2n$ вершин и не менее чем $(n+1)^2-2n=n^2+1$ рёбер и по индукционному предположению в оставшейся части графа найдётся треугольник.

27. В компании из n человек среди любых четверых есть знакомый с остальными троими. Доказать, что есть человек, который знает всех остальных.

Контрольная работа по мат. индукции, 19 июля.

1. В Вишкиландии имеются в обращении банкноты в 7 и 11 рублей. Докажите, что ими можно уплатить без сдачи любую сумму, начиная с 60 рублей.

2. Строители строят одноэтажный дом из бетонных плит, окрашенных с одной стороны в синий цвет, а с другой – в жёлтый. Сначала возводятся наружные стены, а затем по одной ставятся перегородки так, что каждая новая перегородка закрепляется концами к уже существующим стенам или перегородкам. Докажите, что если снаружи дом синий, то в нем есть хотя бы одна полностью жёлтая комната.

3. Докажите, что $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{(3n-1)n}{2}$.

4. Докажите, что $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

5. Докажите, что сумма кубов любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

6. В компании из k человек ($k>3$) каждый узнал по новому анекдоту. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им анекдоты. Докажите, что за $2k-4$ разговоров все смогут узнать все новые анекдоты.

7. Докажите, что $(n+1)! > 3^n$ при всех натуральных $n > 4$.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика-1, 15 июля.

Правило суммы. Если в языке 10 гласных и 23 согласных буквы, то выбрать одну букву можно 33 способами.

Правило произведения. Двухбуквенное слово, в котором одна гласная буква и одна согласная, можно составить 230 способами.

1. Сколькими способами можно выбрать из слова “ПАНТЕЛЁНЯ” пару из гласной и согласной букв?

2. Сколько различных n-буквенных слов существует в языке племени Мумбо-Юмбо, если мумбоюмбский алфавит содержит 5 букв М, У, Б, О, Ю?

* * *

3. Строкой называется произвольная последовательность символов. Сколько различных строк можно получить, а) переставляя буквы в слове “КОТЕЛЬНИЧ”;

б) составляя девятизначное число из цифр от 1 до 9, используя все цифры.

Определение 14. ***Числом перестановок*** *из n элементов называется количество способов выписать в строчку все эти n элементов. Оно обозначается* P_n.

4. Доказать, что $P_n = n!$.

5. Поезд состоит из трёх различных багажных вагонов (без номеров), четырёх плацкартных (с номерами от 1 до 4) и двух купейных (с номерами 5 и 6).

а) Сколькими способами можно сформировать состав, который начинается с вагона номер 1, а заканчивается вагоном номер 6?

б) Сколькими способами можно сформировать состав, в котором сначала идут все плацкартные вагоны, потом все купейные, а в конце – все багажные?

Ответ: а) $7!$; б) $4! \cdot 2! \cdot 3!$

6. Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 разноцветных лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов).

Ответ: $\frac{10!}{10} = 9!$

7. Сколько есть перестановок чисел $1, 2, 3, \ldots, 9$, в которых цифры 4 и 8 стоят на своих местах?

Ответ: $7!$

8. Сколько есть перестановок чисел $1, 2, 3, \ldots, 9$, в которых цифры 1 и 2 не стоят рядом?

Ответ: $9! - 2 \cdot 8!$

Обратить внимание, что в задаче 8 используется **правило дополнения**.

* * *

9. Есть 12 шариков различных цветов и три различных ящика. Сколькими способами можно заполнить ящики шариками (по одному шарику в каждый ящик)?

Определение 15. ***Числом размещений*** *из n элементов по k называется количество способов выписать в строчку k различных элементов из данных n (строчки, отличающиеся порядком, считаются разными). Оно обозначается A_n^k.*

10. Доказать, что $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Правило дроби.

Анекдот: Едут в поезде двое математиков и смотрят в окно. Там мирно пасется огромное стадо коз. Один говорит другому: “Здесь 1462 козы”. “Как ты их сумел сосчитать?” - удивляется тот. “Очень просто: я сосчитал ноги и поделил их число на 4”.

11. Сколько способов выдать 10 различных нарядов кому-нибудь из 69 школьников (один наряд – один школьник).

Ответ: A_{69}^{10}.

12. В выпуклом 20-угольнике провели все стороны и диагонали.

а) Сколько проведено линий?

б) Сколько треугольников (вершины которых являются вершинами исходного 20-угольника) при этом образовалось?

13. Сколькими способами можно выбрать троих дежурных в столовую из группы, в которой занимается 17 школьников?

Ответ: C_{17}^3

Определение 16. ***Числом сочетаний*** *из n элементов по k называется количество способов выбрать k элементов из данных n различных элементов (наборы, отличающиеся лишь порядком, считаются одинаковыми). Оно обозначается C_n^k.*

14. Из 15 семиклассников требуется выбрать на матбой семь человек – капитана и шесть остальных членов команды. Сколько существует различных выборов?

15. Докажите, что $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Задачи

16. Из цифр от 1 до 9 составляются всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4, 5 одновременно.

Ответ: $6 \cdot 5 \cdot 5!$

17. У семиклассника Лени есть 7 книг по математике, а у восьмиклассника Бори – 8 книг. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Ответ: $C_7^3 \cdot C_8^3$

18. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трёх до десяти звуков?

Ответ: $C_{10}^3 + C_{10}^4 + \ldots + C_{10}^{10}$

19. Во сколько раз A_n^k больше C_n^k?

Ответ: $k!$

20. Двенадцати семиклассникам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда по 6 человек, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант.

Ответ: $2 \cdot 6! \cdot 6!$

21. Пусть на диск сейфа нанесено 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

Ответ: $12^5 - 1$

22. Сколькими способами может пригласить Констатин Александрович на консультацию 7 семиклассников по 3 человека в течение 7 дней, так, чтобы никакие 3 из них не встретились на консультации дважды?

Ответ: $35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$.

“Подумаешь, бином Ньютона!”, 18 июля.

– Вы когда умрёте?
Тут уж буфетчик возмутился.
– Это никому не известно и никого не касается, – ответил он.
– Ну да, неизвестно, – послышался все тот же дрянной голос из кабинета, – подумаешь, бином Ньютона!

Михаил Булгаков “Мастер и Маргарита”

Настоящий листок посвящён числам C_n^k и их различным свойствам. В частности, в нём появляется и объясняется привычное название для этих чисел – “биномиальные коэффициенты”.

23. Мы определили C_n^k как число способов выбрать k (неупорядоченных) предметов из n. Используя именно это определение (т.е. не пользуясь формулой для числа сочетаний), докажите, что для любых “допустимых” n и k (т.е. удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant k \leqslant n$) выполнены равенства:
а) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
б) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
в) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$.

24. *(Треугольник Паскаля).* Расположите C_n^k в виде таблицы, имеющей вид равнобедренного треугольника (в верхней строке одно число, под ним два, затем три и т.п.) Используя пункт в) предыдущей задачи, выпишите полученный вами *треугольник Паскаля* до восьмой строки включительно.

25. Найдите сумму всех чисел n-ой строки треугольника Паскаля.

Указание: Вычислите её при нескольких небольших значениях n, угадайте общий результат, а для его доказательства примените метод математической индукции.

26. Сколько всего слагаемых получится после раскрытия скобок в выражении $(1+x)^n$
а) без приведения подобных слагаемых;
б) после приведения подобных слагаемых?

27. Сколькими способами можно выбрать произвольное непустое подмножество из множества, содержащего n элементов?

Указание: Сначала разберитесь с задачей без слова “непустое”.

28. В каждой клетке квадрата 8×8 напишите количество кратчайших путей “хромой ладьи” из левой нижней клетки квадрата в эту клетку. (Хромая ладья ходит только на одну клетку вправо либо на одну клетку вверх). Какое число будет записано в правой верхней клетке?

29. Докажите, что произведение n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.

30. Докажите, что для любого простого числа p число C_p^k делится на p при всех k, кроме $k = 0$ и $k = p$.

31. *(Бином Ньютона).* Взгляните на равенства $1 = 1 \cdot 1 \cdot 1$, $x = x \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot x \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot x$, $x^2 = x \cdot x \cdot 1 = x \cdot 1 \cdot x = 1 \cdot x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Они показывают, что если составлять произведения трёх множителей, каждый из которых равен 1 или x, то единицу и x^3 можно получить единственным способом, а x и x^2 – тремя способами.

а) Сколькими способами можно представить x^k в виде произведения n множителей, каждый из которых равен 1 или x?

б) Используя очевидное равенство $(1+x)^n = (1+x)(1+x)\ldots(1+x)$ и результат пункта а), докажите формулу *бинома Ньютона*

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n.$$

32. *(Ещё раз бином Ньютона).* Докажите методом математической индукции формулу бинома Ньютона.

33. Найдите коэффициент при x^4 в разложении $(1+x)^{10}$.

34. С помощью бинома Ньютона докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

35. Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots \pm C_n^n = 0$.

36. Сколькими способами можно расставить в ряд n единиц и n минус единиц так, чтобы сумма любого количества подряд идущих чисел ряда, начиная с первого, была неотрицательной?

37. *($n + n = 2n$ – часть 1).* В куче лежит n синих и n красных шариков. Докажите, что количество способов взять из кучи ровно n шариков равно $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \ldots + C_n^n C_n^0$.

Указание: Разберитесь отдельно со случаями “0 синих шариков”, “1 синий шарик”, ..., “n синих шариков”.

38. *($n + n = 2n$ – часть 2).* Чему равен коэффициент при x^n, который получается после раскрытия скобок

а) в выражении $(1+x)^{2n}$?

б) в выражении $(C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n)^2$.

39. Сравните результаты, полученные в двух предыдущих задачах.

Тест по комбинаторике, 20 июля.

1. Чему равно C_{20}^2?

2. Чему равно A_{200}^1?

3. Известно, что $(C_{30}^5 + C_{30}^4) - (2C_{29}^4 + C_{29}^5) = C_{29}^x$. Чему может быть равен x?

4. Известно, что $C_n^{n-k} = C_n^k \cdot C_n^x$. Чему может быть равен x? (выразите x через n и k)

Ответ: $x = 0$ или $x = n$

5. Известно, что $C_n^{n-k} = C_{n-1}^k + C_{n-1}^x$. Чему может быть равен x? (выразите x через n и k)

Ответ: $x = k - 1$ или $x = n - k$

6. Вычислите $(C_{14}^4 + C_{14}^5)/C_{14}^6$.

Ответ: 1

7. Выразите $\frac{A_{12}^8 A_{10}^5}{P_5 \cdot P_8}$ через C_n^k.

Ответ: $C_{12}^8 \cdot C_{10}^5$.

8. Сколько различных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3,... 9 (каждая цифра используется ровно один раз) таких, чтобы никакие две нечётные цифры не стояли рядом?

Ответ: $5! \cdot 4!$

9. В группе 18 мальчиков и 2 девочки. Сколько способов выбрать 10 человек для работы в столовой, если хоть одна девочка должна работать?

Ответ: $C_{18}^8 + 2C_{18}^9$.

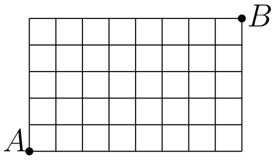
10. В классе, в котором учатся Петя и Ваня – 17 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса команду для ЧГК (6 человек) так, чтобы Петя и Ваня не входили в команду одновременно?

Ответ: $2C_{16}^5 + C_{15}^6$.

11. Вычислите наибольший коэффициент в выражении $(1+2x)^5$

Ответ: 80

12. План города имеет схему, изображенную на рисунке. На всех улицах введено одностороннее движение: можно ехать только "вправо" или "вверх". Сколько есть разных маршрутов, ведущих из точки A в точку B?



Ответ: C_{13}^8.

13. Сколькими способами можно разбить 24 школьников на две команды, в одной из которых – 15 человек, а в другой – 9 человек?

Ответ: $C_{24}^{15} = C_{24}^9$.

14. Сколькими способами можно разбить 24 школьников на две команды по 12 человек?

Ответ: $\frac{C_{24}^{12}}{2}$

15. Сколькими способами можно разбить 24 школьников на четыре команды по 6 человек?

Ответ: $\frac{24!}{(6!)^4 \cdot 4!}$.

Разнобой

Разнобой-1, 4 июля.

1. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме "р", которую просто пропускают при письме, а остальные — знают все буквы, кроме "к", которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово "кот", 18 других учеников — слово "рот", а остальных — слово "крот". При этом слова "кот" и "рот" оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно?

2. Можно ли 16 жирафов попарно разного роста расставить в шеренгу так, что какие бы 11 жирафов не вышли из шеренги, оставшиеся 5 не будут стоять по росту?

Ответ: Да. Пусть жирафы пронумерованы по росту (1 – самый низкий, 16 – самый высокий). Расставим жирафов в таком порядке: 13, 14, 15, 16, 9, 10, 11, 12, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4.

3. Все клетки доски 10×10 покрашены в белый цвет. Владик и Юра по очереди (начинает Владик) перекрашивают по одной белой клетке в черный цвет. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется двух соседних по стороне белых клеток. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Юра. Он разбивает все клетки на пары (парой объявляются клетки из одной "доминошки", доска разбивается на доминошки произвольно) и каждый раз ходит в клетку, парную к той, куда сходил Владик.

4. Десятичная запись числа $5 \cdot A$ состоит из 1000 пятерок и 1000 шестерок. Найдите сумму цифр числа A.

Решение: 4000. Представим $5 \cdot A$ в виде суммы числа $55\ldots5$ (2000 пятерок) и числа, в котором на некоторых 1000 местах стоят единички, а на остальных – нули. Тогда $10 \cdot A$ равно сумме числа $11\ldots10$ и числа, в котором на некоторых 1000 местах стоят двойки, а на остальных – нули. Сумма цифр этого числа равна $2000 + 2000 = 4000$, а у числа A сумма цифр точно такая же, как у числа $10 \cdot A$.

5. На доске выписали все возможные девятизначные числа, которые можно получить из цифры 9, записывая каждый раз за последней цифрой либо её же, либо цифру, меньшую её на 1 (например, так можно получить число 998766543). Сколько раз встречается цифра 3 среди последних цифр этих чисел?

Решение: $C_7^2 + C_7^1 = 28$. Мы должны выбрать те две цифры, которые в этом числе будут повторяться. C_7^2 соответствует выбору пары различных цифр, а C_7^1 – выбору тройки одинаковых цифр.

6. Дан угол, величина которого 82°. Пользуясь только циркулем и линейкой, построить угол в 33°.

Указание: Если дополнить 82° до прямого угла, то получится 8°. Если провести биссектрису угла 82°, то получится 41°. Наконец, $41 - 8 = 33$.

7. Есть 10 монет, среди них ровно две фальшивые. Детектор R7 за одну операцию исследует три монеты и указывает на одну из них. Известно, что детектор не может указать на настоящую монету, если среди тестируемых монет есть хотя бы одна фальшивая. Как за шесть тестов выявить обе фальшивые монеты?

8. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AB в точке D, а продолжение за точку A стороны AC — в точке E. Докажите, что $AD < AE$.

Разнобой-2, 5 июля.

9. В ряд выписаны цифры: 1234567890. Вставим между ними (в некоторых местах) знаки "+" и "−" так, чтобы в сумме получилось трехзначное число. Какое наибольшее трехзначное число может получиться?

10. Одним пакетиком чая можно заварить два или три стакана чая. Мила и Таня разделили коробку чайных пакетиков поровну. Мила заварила 57 стаканов чая, а Таня – 83 стакана. Сколько пакетиков могло быть в коробке.

11. На электронных часах высвечиваются 4 цифры – часы (от 0 до 23) и минуты. Сколько времени в сутки хотя бы на одном из мест горит цифра 2?

12. Даны 16 чисел: 1, 11, 21, 31 и т.д. (каждое следующее на 10 больше предыдущего). Можно ли расставить их в таблице 4×4 так, чтобы разность любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, не делилась на 4?

13. Соревнования по плаванию В ЛМШ проводились на реке Вятке и плыть пришлось против течения. Леша проплыл 50 метров между двумя буйками за 2 минуты, а Веня, который плавает в полтора раза медленнее – за 4 минуты. За какое время проплыл дистанцию Леня, который плавает в два раза медленнее Вени.

14. В однокруговом футбольном турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. "Спартак" одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

15. В записи натурального числа используются цифры 3 и 7 (каждая встречается хотя бы один раз), причем это число делится как на 3, так и на 7. Найдите наименьшее такое число.

16. Есть три одинаковых бочонка мёда, а Винни-Пух, Пятачок и Кролик едят из них мёд: Винни-Пух может есть из первого и второго бочонка, Пятачок – из второго и третьего, а Кролик – из третьего и первого. Едят по-очереди. За один присест можно съесть одну или две полных ложки. Проигрывает тот, кто не может зачерпнуть полной ложки. Докажите, что Винни-Пух и Пятачок могут обыграть Кролика.

Разнобой-3, 8 июля.

17. Докажите, что если основание, угол при основании и сумма боковых сторон одного треугольника соответственно равны основанию, углу при основании и сумме боковых сторон другого треугольника, то эти треугольники равны.

18. а) Докажите, что по итогам однокругового турнира всегда найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число игр вничью.

б) Докажите, что у каждого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

19. Первоначально на доске написано число 2. Двое играющих ходят по очереди. За один ход разрешается имеющееся число увеличить на любой его делитель, не равный самому числу. Проигрывает тот, кто первым получит число больше тысячи. Кто из игроков может выигрывать независимо от игры противника?

20. Веня утверждает, что он может покрасить квадратную доску 2001×2001 в 2 цвета таким образом, что любая клетка будет иметь ровно два закрашенных соседа. Вова, однако, с ни не согласен. Кого из них зря взяли в профи?

21. В треугольнике ABC проведены отрезки AD и AE, причём $BD = DE = EC$. Докажите, что $AB + AC > AD + AE$.

22. Докажите, что если цифры десятизначного числа выписать в обратном порядке, то полученное число не будет в три раза больше исходного.

23. После представления "Ревизора" состоялся следующий диалог:

Бобчинский: "Это вы, Петр Иванович, первый сказали "Э!". Вы сами так говорили!"

Добчинский: “Нет, Петр Иванович, я так не говорил. Это Вы семгу первый заказали. Вы и сказали “ Э!”. А у меня зуб во рту со свистом!”

Бобчинский: “Что я первый семгу заказал, верно. И верно, что у Вас зуб со свистом. А все-таки Вы первый сказали “Э!”.

Кто первый сказал “Э!”, если из девяти произнесенных фраз-утверждений чётное число верных?

24. Имеется 185 монет, из них ровно 7 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые монеты также весят одинаково. Фальшивая монета легче настоящей. Как за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь отобрать 23 настоящие монеты?

Разнобой-4, 9 июля.

25. Джон и Мэри живут в небоскребе, на каждом этаже которого 10 квартир. Номер этажа Джона равен номеру квартиры Мэри, а сумма номеров их квартир равна 239. Каков номер квартиры Джона?

26. Разбейте число 186 на три попарно различных натуральных слагаемых, сумма любых двух из которых делится на третье.

27. В ряд слева направо были выставлены гирьки массами 1 г, 2 г, ..., 13 г. Из них осталось только семь подряд стоящих, а остальные шесть гирек потеряны. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах определить массы оставшихся гирек?

Указание: На одну чашу весов надо положить две самых лёгких гири, а на другую – вторую по тяжести.

28. Представьте число 2001 в виде дроби, числителем которой является девятая степень какого-то целого числа, а знаменателем – десятая степень какого-то числа.

29. Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось число мальчиков?

30. На доске написаны три числа: 1, 0, 0. За один ход разрешается выбрать любые два из них и заменить каждое на их полусумму (например, из 1, 0, 0 получить $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0). Можно ли сделать все три числа одинаковыми?

31. На тропинке, на одинаковом расстоянии друг от друга, по алфавиту выстроились семиклассники. Между ними туда и обратно ходит Сергей Юрьевич. Время от времени Сергей Юрьевич останавливается и свистит в свисток. По этой команде все семиклассники подбегают к нему и возвращаются на свои места. Докажите, что в результате самое большое расстояние пробежит либо Анисимов Женя, либо Эпштейн Ксюша.

32. На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 пар обуви одного размера.

Разнобой-5, 10 июля.

33. Какие две цифры нужно приписать справа к числу 1983, чтобы получилось число, делящееся на 83?

Решение: Запишем условие в виде $198300+\overline{xy}\,\vdots\,83$. Первое слагаемое при делении на 83 дает остаток 13. Значит, $13+\overline{xy}$ делится на 83, из чего заключаем, что $\overline{xy}=70$, то есть нужно приписать цифры 7 и 0.

34. Найдите все двузначные числа, обладающие следующим свойством: если вставить между цифрами числа произвольное ненулевое количество семёрок, то полученное число делится нацело на 13.

Решение: Пусть $\overline{ab}$— двузначное число, обладающее требуемым свойством. Тогда числа $\overline{a77b}$ и $\overline{a7b}$, а следовательно, и их разность, равная $100(9a+7)$ делятся на 13. Так как 100 и 13 взаимно просты, на 13 делится число $9a+7$, откуда перебором всех возможных случаев получаем, что a может равняться только 5. Из делимости на 13 числа $\overline{57b}$ находим, что $b=2$, то есть 52 – единственно возможный вариант.

Убеждаемся, что все числа вида $\overline{57\ldots72}$ делятся на 13. Это немедленно следует из равенства: $\overline{57\ldots72} = 52+520+5200+\ldots+5200\ldots0$.

35. На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый Толстый выстрелил в одного из Тонких. Затем каждый уцелевший Тонкий выстрелил в одного из Толстых. Наконец, каждый уцелевший Толстый ещё раз выстрелил в одного из Тонких. После этого у каждой армии кончились патроны. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.

Решение: Пусть Тонкие своим единственным залпом убили n Толстых. Тогда вторым залпом Толстые убьют не более $1000-n$ Тонких, поэтому за два последних залпа погибнет не более 1000 солдат с той и другой стороны.

Пусть после первого залпа Толстых в живых осталось x Тонких. Возможны два случая:

1) $x \leqslant 500$. Тогда после залпа Тонких у Толстых останется в живых не менее $1000-x$ солдат, что не меньше 500, и утверждение в этом случае доказано.

2) $x > 500$. Тогда после первого залпа Толстых у двух армий в сумме более 1500 живых солдат. Как показано выше, за два последних залпа не может погибнуть более 1000 человек, что и завершает доказательство.

36. Решите ребус ДЕДКА + БАБКА + РЕПКА = СКАЗКА.

37. Через точку плоскости проведены 3 прямые, разбивающие плоскость на 6 углов. Известно, что один из образовавшихся углов не превосходит полусуммы наибольшего и наименьшего угла. Докажите, что этот угол не превосходит 60°.

Решение: Обозначим три подряд идущих угла через $\alpha,\ \beta$ и γ. Оставшиеся три угла также будут соответственно равны $\alpha,\ \beta$ и γ, как вертикальные. Без ограничения общности, пусть $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Тогда $\beta \leqslant \frac{\alpha+\gamma}{2}$, откуда $\alpha+\gamma \geqslant 2\beta$. Но углы α, β и γ составляют развёрнутый угол, поэтому $\pi = \alpha+\beta+\gamma \geqslant 3\beta$, откуда и следует утверждение задачи.

38. Если класс из 30 человек рассадить в зале кинотеатра, то в любом случае хотя бы в одном ряду окажется не менее двух одноклассников. Если то же самое проделать с классом из 26 человек, то по крайней мере три ряда окажутся пустыми. Сколько рядов в зале?

Решение: Первое условие означает, что в зале не более 29 рядов. Действительно, если бы количество рядов было не меньше 30, то, очевидно, класс из 30 человек можно было бы рассадить не более чем по одному на каждый ряд.

Второе условие означает, что количество рядов в зале не менее 29. Действительно, если количество рядов не больше 28, то сажая учеников класса из 26 человек по очереди на пустые ряды, получим, что либо в какой-то момент все ряды будут заняты, либо все 26 учеников будут сидеть по одному на 26 рядах, и в этом случае останутся свободными не более двух рядов.

Значит, в кинотеатре 29 рядов. Очевидно, что в этом случае оба условия задачи выполнены.

39. На складе стеклотары могут храниться банки из-под консервированных овощей по 0.5 л, 0.7 л и 1 л. Сейчас на складе имеется 2500 банок общей вместимостью 1998 л. Докажите, что на складе есть хотя бы одна поллитровая банка.

40. Все натуральные числа поделены на хорошие и плохие. Известно, что если число A хорошее, то и число $A+6$ тоже хорошее, а если число B плохое, то и число $B+15$ тоже плохое. Может ли среди первых 2000 чисел быть ровно 1000 хороших?

Решение: Докажем, что числа C и $C+3$ являются одновременно либо хорошими, либо плохими при любом значении C. Предположим для этого, что число C — хорошее, а $C+3$ — плохое. Тогда с одной стороны, число $C+18 = (C+3)+15$ должно быть хорошим, а с другой стороны, это же число $C+18 = ((C+6)+6)+6$ должно быть плохим. Если же предположить, что число C — плохое, а $C+3$ — хорошее, то число $C+15 = ((C+3)+6)+6$ должно быть одновременно и плохим и хорошим. Полученное в обоих случаях противоречие доказывает, что числа C и $C+3$ всегда принадлежат одному классу. Из этого следует, что любой класс вычетов по модулю 3 является либо целиком хорошим, либо целиком плохим.

Среди первых 2000 чисел каждый такой класс содержит 666 или 667 чисел. Любой класс содержит меньше 1000 чисел, а любые два класса — больше 1000 чисел. Поэтому ровно 1000 хороших чисел быть не может.

Разнобой-6, пятница, 13-е.

41. Доказать, что сумма расстояний от произвольной точки внутри треугольника до его вершин больше полупериметра.

Решение: $OA+OB > AB$; $OB+OC > BC$; $OA+OC > AC$, значит $2(OA+OB+OC) > AB+BC+AC$.

42. Ученики ЛМШ-3001 посещают 14 клубов, причём в каждом клубе ровно 4 слушателя, и любые два клуба имеют ровно одного общего слушателя. Докажите, что есть ученик, посещающий все клубы.

Решение: Рассмотрим произвольный клуб. Его посещают четыре ученика. Так как эти ученики должны посетить все остальные 13 клубов, то один из них (Вася) посещает по крайней мере четыре других клуба (итого – 5). Обозначим их буквами A, B, C, D, E. Обратим внимание, что именно Вася является общим слушателем каждой пары из этих клубов (а других общих слушателей по условию нет). Теперь рассматриваем любой из остальных 9 клубов – X. Для каждого из клубов A, B, C, D, E в клубе X должен быть ученик, который посещает этот клуб. Но так как в X ровно 4 слушателя, то для каких-то двух из них эти слушатели совпадут. Следовательно, этим самым совпадающим слушателем будет Вася. Мы доказали, что Вася посещает все клубы.

43. Верно ли, что среди любых 12 последовательных трёхзначных чисел не более четырёх простых?

Решение: Среди чисел есть шесть чётных чисел и два нечётных числа, делящихся на три...

44. В классе 33 ученика, всем им вместе 430 лет. Докажите, что в классе найдутся 20 учеников, которым вместе не менее 260 лет.

Решение: Возраст двадцати старших учеников не менее $\frac{20}{33} \cdot 430 > 260$.

45. Леня по одной достает и складывает в две стопки черные и красные карточки. Класть карточку на другую карточку того же цвета запрещено. Десятая и одиннадцатая карточки были красные, а двадцать пятая – черная. Какого цвета была двадцать шестая?

Решение: Состояния верха кучки чередуются: сначала одинаковые, потом разные, потом снова одинаковые... После одиннадцатой карточки одинаковые, значит после двадцать пятой – тоже одинаковые (чёрные). Значит двадцать шестая карточка – красная.

46. На доске написаны 6 чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум прибавить по 1. Можно ли, проделав эту операцию несколько раз, сделать все числа равными?

Решение: Нет. Инвариант – чётность суммы (количества нечётных чисел).

47. Никита написал на доске пять единиц, а потом вставил между ними некоторое количество нулей. Он утверждает, что получилось число, которое является квадратом некоторого целого числа. Прав ли Никита?

Решение: Нет, потому что полученное число делится на три, но не делится на 9.

48. Из шести спичек одинаковой длины выложен шестиугольник $ABCDEF$, причем противолежащие спички лежат параллельно. Доказать, что площади треугольников ACE и BDF равны.

Разнобой-7, 14 июля.

49. Мультфильм показывали целое число минут. Когда посмотрели в программке время начала и конца показа (часы по 24-часовой шкале и минуты), оказалось, что в этой записи использованы 8 различных цифр. Какое наименьшее время мог идти мультфильм?

Ответ: 15 минут (19.58 – 20.13)

50. Семиклассник считается прожорливым, если он унёс с вечернего чая больше 500 граммов сухарей. Людмила Юрьевна подсчитала процент прожорливых семиклассников, а Константин Александрович – процент унесенных ими сухарей. У кого процент получился больше, если семиклассники унесли с вечернего чая все сухари?

Ответ: у Константина Александровича процент *не меньше*

51. Докажите, что число 2002 нельзя представить в виде суммы кубов трех неотрицательных целых чисел.

Указание: $2002 \equiv 4 \pmod 9$.

52. Найти все натуральные n такие, что для любых натуральных a и b верно, по крайней мере, одно из утверждений: a делится на n, b делится на n, $a+b$ делится на n, $a-b$ делится на n.

Ответ: 1, 2 и 3. Иначе для $a=1$ и $b=2$ ни одно из условий не выполнено.

53. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M, такая что $\angle BAM = \angle ABM = 15°$. Докажите, что треугольник MDC – равносторонний.

Решение: Нарисуем равносторонний треугольник CDM', тогда заметив равнобедренность парочки треугольников, выясним, что $\angle BAM' = \angle ABM' = 15°$. *Прямым ходом не считается... не нравится (ТК)*

54. Семиклассники ходили купаться через большой песчаный пляж. Шедшая последней Марина Зак аккуратно провела на песке две черты, перпендикулярных направлению движения ребят, на расстоянии 10 метров друг от друга, и насчитала между ними ровно 559 следов своих одноклассников. Сколько семиклассников ходило на реку, если известно, что длина шага каждого из них составляет ровно 55 см?

Решение: Между чертами каждый семиклассник оставляет или 18 следов (если первым шагом он заступил хотя бы на 10 сантиметров за черту), или 19 (если не заступил). Получаем, уравнение $18x + 19y = 559$. Посмотрев остатки при делении на 18, получаем, что $y \equiv 1 \pmod{18}$. Поскольку уже $19 \cdot (18 \cdot 2 + 1) > 559$, то $y = 1$ или $y = 19$, откуда $x + y = 31$ или $x + y = 30$

55. Докажите, что число $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ при любом натуральном n делится на 19?

Решение: Это выражение сравнимо по модулю 19 с $30 \cdot 6^{n-1} + 27 \cdot 6^{n-1} = 57 \cdot 6^{n-1} \vdots 19$.

56. Докажите, что из любых семи разных двузначных чисел найдутся два таких, что разность их квадратов делится на 10 без остатка.

Решение: При делении на 10 квадраты могут давать только остатки 0, 1, 4, 5, 6 и 9, поэтому среди 7 квадратов будут два с одинаковыми остатками.

Разнобой-8, 19 июля.

57. Можно ли из числа 123456789 вычеркнуть одну или несколько цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 11?

58. В узлах сетки 3×100 стоят красные точки (в каждой строке – 100 точек и в каждом столбце – 3 точки). Сколько можно провести прямых, проходящих ровно через 3 красные точки?

Ответ: $100 \cdot 50 = 10000$.

59. На столе лежат 500 спичек. Двое играющих ходят по очереди. За один ход можно взять со стола 1, 2, 4, 8, … (любую степень двойки) спичек. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

60. Известно, что p_1, p_2 и p_3 – простые числа. Докажите, что

$$(p_1 + p_2 + p_3)^3 - (-p_1 + p_2 + p_3)^3 - (p_1 - p_2 + p_3)^3 - (p_1 + p_2 - p_3)^3$$

делится на $p_1 p_2 p_3$.

61. Никакие три диагонали некоторого 100-угольника не пересекаются в одной точке. Сколько у него имеется точек пересечения диагоналей?

62. В шестом часу минутная стрелка находится на три минутных деления позади часовой. Который час?

Ответ: 17 часов 24 минуты.

63. Найдите все несократимые дроби, которые увеличиваются вдвое после одновременного увеличения числителя и знаменателя на 10?

Ответ: $2/5$.

64. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки K и L соответственно так, что $\angle BAK = 40^\circ$, а $\angle LAD = 10^\circ$. Докажите, что $AL = LD + BK$.

Математические соревнования

Вступительный тест, 2 июля.

1. В стране $ABCD$ из города A в город B идет 17 дорог. Из города B в C – 5, из A в D – 4 дороги и из D в C – 8. Сколькими способами можно проехать из города A в город C?

Ответ: $17 \times 5 + 4 \times 8 = 117$.

2. На 3 призовых места в шахматном турнире претендуют Вася, Максим и Филипп. Каким числом способов могут распределиться эти места?

Ответ: $3! = 6$

3. В алфавите племени Мумбо-Юмбо 4 буквы: А, В, Х, У. Сколько различных трёхбуквенных слов может быть в Мумбо-Юмбском словаре?

Ответ: $4^3 = 64$

4. Малыш поехал в другой город. И решил нарисовать Карлсону прощальную картинку: уезжающий паровозик на фоне радуги. Сколькими способами он сможет это сделать, если хочет изобразить 13 разноцветных вагончиков и 13-цветную радугу (у Малыша есть карандаши 13 цветов)?

Ответ: $13! \times 13!$

Верно ли, что

5. если $24a$ делится на 9, то a делится на 9;

6. если $3a$ делится на 2, то $3a$ делится на 6;

7. если a делится на 12, то a делится на 6;

8. если a делится на 12, то a делится на 8;

9. если a делится на 24 и a делится на 15, то a делится на 360;

10. если a делится на 4 и a не делится на 24, то a не делится на 6;

11. если a делится на 49 и a делится на 17, то a делится на 119;

12. если a^2 делится на 3, то a^2 делится на 9;

13. если a делится на 10, а b делится на 15, то $a + b$ не делится на 10?

14. Среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами. Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров. Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

15. Все маленькие мальчики мечтают полететь в космос. Юра и Владик мечтают полететь в космос. Верно ли, что они оба – маленькие мальчики?

Ответ: Нет

16. Каждый англичанин любит играть в гольф. Майкл любит играть в гольф. Верно ли, что он англичанин?

Ответ: Нет

17. Все красные овощи вкусные. Все помидоры красные. Этот овощ не красный. Верно ли, что этот овощ невкусный?

Ответ: Нет

18. Неверно, что все друзья моего друга – мои друзья. Что тогда верно?

19. Дети нелогичны. Тот, кто управляет крокодилами, достоин уважения. Нелогичные персоны не достойны уважения. *Какой можно сделать вывод?*

20. Неверно, что все ананасы приятны на вкус. Что тогда верно?

21. Ни один опытный человек не является некомпетентным. Дженкинс всегда очень неловок. Ни один из компетентных людей не бывает неловким всегда. *Какой (наиболее полный) вывод можно сделать?*

22. Мои кастрюли – это единственное, что сделано из олова. Я считаю, что все твои подарки довольно полезны. Мои кастрюли – самые бесполезные вещи в доме. *Какой (наиболее полный) вывод можно сделать?*

Вступительная олимпиада, 3 июля.

1. Верно ли, что среди трёх чисел либо найдётся число, кратное 5, либо найдутся 2 числа, чья сумма делится на 5, либо найдутся 2 числа, чья разность делится на 5.

2. Перед началом урока учитель написал на доске какое-то целое число от 1 до 100. После этого дети по очереди сказали следующее:

1-й: “Это число больше 1.”
2-й: “Это число больше 2.”
...
99-й: “Это число больше 99.”
100-й: “Это число больше 100.”
101-й: “Это число меньше 100.”
...
200-й: “Это число меньше 1.”

Сколько раз ребята сказали правду? Найдите все варианты и покажите, что других нет.

Ответ: 99

3. У продавца есть много гирек весом 37 г, 66 г, 99 г. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах отвесить 1 кг 69 г товара (класть гирьки на чашу с товаром запрещается, других гирек у продавца нет)?

Ответ: Нет, нельзя

4. Существует ли треугольник, который можно разрезать

а) на три равных треугольника;
б) на четыре равных треугольника;
в) на пять равных треугольников?

5. Юра, Владик и Марина Юрьевна решили сыграть в следующую игру. В кучке лежит 2001 спичка. Юра и Владик имеют право брать 1 или 2 спички, а их мама Марина Юрьевна – 1, 2 или 3. При этом Владик и Юра объединяют свои усилия против мамы, а она имеет право выбрать очередь своего хода – первый, второй или третий. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Может ли Марина Юрьевна выбрать себе такую очередь, что при правильной игре выиграет именно она?

Ответ: Да. Она берет 1 спичку, а дальше каждый раз ходит так, чтобы оставить количество спичек, кратное 5.

6. В ЛМШ живут 5 отрядов математиков (с 6 по 10 класс), а также отряд физиков и отряд биологов. Каждый отряд живет в своем домике. От домиков, в которых живут школьники каждого из отрядов, проложены дорожки к домикам не менее чем четырёх других отрядов, а от домика математиков 7 класса идет не менее 5 таких дорожек. Докажите, что существует путь, проходящий (по дорожкам) через все отрядные домики, причем ровно по одному разу.

Матбой 1, 6 июля.

Посвящается Юле Семаковой

1. Семь звездочек на рисунке замените цифрами так, чтобы получилось верное равенство: $*** \cdot 9* = *2**$. Найдите все решения. Первые звездочки в числах не должны заменяться нулями.

Ответ: $100 \cdot 92 = 9200$, $101 \cdot 92 = 9292$, $102 \cdot 91 = 9282$, $103 \cdot 90 = 9270$.

2. Если на прямой отметить несколько отрезков (быть может, пересекающихся), и левую половину каждого отрезка покрасить в красный цвет, то закрашенные точки образуют сплошной красный отрезок. Если вместо этого правую половину каждого из тех же отрезков покрасить в синий цвет, то синие точки образовали бы сплошной синий отрезок на 20 см короче красного. Докажите, что среди исходных отмеченных отрезков найдутся два, длины которых отличаются не менее чем на 40 см.

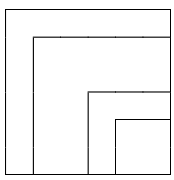
3. Малыш и Карлсон играют в такую игру: они берут шоколадку 1997×1998 и по очереди выкусывают из нее “по клеточкам” кусочки (не обязательно с краю): Карлсон — 2×2, Малыш — 1×1. Если не осталось ни одного кусочка 2×2, то весь оставшийся шоколад доедает Малыш. Выигрывает тот, кто больше съест. Начинает игру Малыш. Кто выиграет при правильной игре?

4. Аборигены планеты Смаллии – рыцари или лжецы. За круглым столом сидит 30 смаллиан. Известно, что среди соседей каждого лжеца имеется ровно один лжец. При опросе 12 смаллиан сказали, что ровно один из их соседей – лжец, а остальные сказали, что оба их соседа – лжецы. Сколько лжецов сидит за столом?

5. Клетки двух таблиц размерами 2000×2001 закрашены в синий и красный цвет так, что в каждом столбце и любой строке – чётное число синих клеток. Одну из таблиц наложили на другую, при этом одна из синих клеток наложилась на красную. Докажите, что найдутся ещё три клетки, покрытые клетками противоположного цвета.

6. Отрезки $OA = AB = BC$ отложены на одной стороне угла с вершиной O, а отрезки $OD = DE = EF$ – на другой его стороне. Докажите, что треугольники AEC и DBF равновелики.

7. Все длины сторон квадратов, изображенных на рисунке – целые числа. Докажите, что делая разрезы только по линиям, можно вырезать фигуру, площадь которой кратна 12.



8. Алеша написал на доске 5 различных чисел. Саша может стереть любое из этих чисел и записать вместо него число $a - b + c$, где a, b, c – любые три из четырёх оставшихся чисел. Может ли Саша за несколько таких операций добиться того, чтобы все числа на доске стали одинаковыми?

9. Юзер Петя выписал 20 первых натуральных чисел и отобрал из них 10 таких, сумма которых равна 105. Хакер Федя проверил, что сумма никаких двух из них не равна 21. Докажите, что этой информации крутому программисту Константину Александровичу хватит для того, чтобы вычислить сумму квадратов этих 10 чисел.

10. Красивым называется число вида x^y, где x и y – натуральные числа и $y > 1$. Сколько существует 100-значных красивых чисел, состоящих только из цифр 2 и 0?

Матбой "А ну-ка, девушки!", 7 июля.

Девушки 7 кл. – девушки 8 кл.

1. 50 детей сидят за круглым столом. Среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что найдется ребенок, сидящий между двумя девочками.

2. Таня К. сварила набор полосок лапши массами 1 г, 2 г, ..., 2001 г. На какое наибольшее число ушей она может повесить лапшу так, чтобы на каждом ухе висело поровну (по массе)?

3. Роман Александрович принимает меры воспитательного воздействия к учащимся, не выходящим на зарядку, причем, если на зарядку не выходит m человек и число $\frac{m!}{m+1}$ оказывается целым, то он раздает наряды, а если не целым, то ограничивается устным внушением. Каким должно быть количество прогульщиков, если они не желают слушать долгих речей, а хотят просто получить свое и отправиться на завтрак?

4. Во время линейки учащиеся ЛМШ столпились внутри правильного треугольника со стороной 30 метров. Игорь Соломонович дал 10 школьникам по наряду. Доказать, что найдутся два огорченных школьника на расстоянии не более 10 метров друг от друга.

5. Константин Александрович перенумеровал всех учеников 7 класса и приказал построиться в одну шеренгу, обещая дать наряд каждому, чей номер окажется средним арифметическим какого-то стоящего слева и какого-то стоящего справа от него человека (не обязательно соседа). Докажите, что хитрые дети могут построиться так, что Константин Александрович не сможет выдать ни одного наряда.

6. В поисках наилучшего тактического расположения футбольная команда 8 класса расположилась сначала в виде ромба $ABCD$, а затем в виде того же ромба, но повернутого на $90°$ относительно его центра. Игроки, которые оказались в точках пересечения этих двух ромбов, получили наряд за непосещение бани. Докажите, что на поле нарядники находились в вершинах квадрата.

7. Для выполнения наряда требуется три юноши и две девушки, причем эти девушки должны жить в одной комнате. Сколькими способами можно организовать бригаду, если накануне Лариса Ивановна и Борис Юрьевич застукали после отбоя в комнате, где живут три девушки, кроме хозяек, еще трёх девушек из соседней комнаты и пятерых юношей черт знает откуда?

8. Усатый стажер Рома построил 12 учащихся по кругу и выдает им наряды, причем за один раз по одному наряду получает сразу группа из четырёх рядом стоящих учеников. После того, как он несколько раз повторил эту процедуру, оказалось, что учащиеся имеют следующее число нарядов: 2,6,7,7,8,9,8,10,9,4,4,6. Докажите, что кое-кто из этих учащихся получал наряды не только от Ромы.

Заключительная олимпиада, 22 июля.

Основные задачи

1. Можно ли расставить на клетчатой доске 16×16 полный комплект для игры в "морской бой" (1 кораблик 1×4, 2 кораблика 1×3, 3 кораблика 1×2 и 4 кораблика 1×1) так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали хотя бы одна клетка была занята?

Ответ: Нет: они занимают в сумме не более 30 линий (строк и столбцов).

2. Дети, построенные парами, выходят из лесу, где они собирали грибы. В каждой паре идут мальчик и девочка, причем у мальчика грибов либо вдвое больше, либо впятеро меньше, чем у девочки. Могло ли так случиться, что у всех вместе 1000 грибов?

Решение: Количество орехов в паре делится на 3

3. Квадрат разрезан на равные прямоугольные треугольники с катетами 3 и 4 и квадраты со стороной 2. Докажите, что число треугольников чётно.

4. Существует ли такой набор из 10 натуральных чисел, что каждое не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого делится на каждое из остальных?

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C_1 и B_1 так, что $\angle ABB_1 = 5°$, $\angle ACC_1 = 10°$. Найдите углы треугольника AB_1C_1, если $\angle ABC = 60°$, $\angle ACB = 70°$.

Заключительная олимпиада, 22 июля.

Выводные задачи

6. Через клетчатый квадрат 1000×1000 проведены по линиям сетки несколько прямых. Образовавшиеся при этом прямоугольные части раскрашены в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. Докажите, что количество чёрных клеточек чётно.

Решение: В любом квадрате 2×2 либо все клетки одного цвета, либо чёрных и белых клеток поровну, а значит, чёрных клеток – чётное число.

7. В Зильбермании 2001 житель. Пятеро из них – математики, но мало кому известно, кто именно. Заезжий писатель м-р Вонабур попросил каждого жителя назвать четверых человек, которые, по его мнению, являются математиками. Каждый математик назвал четверых других математиков, а остальные могли назвать кого угодно. Докажите, что, пользуясь этими данными, м-р Вонабур может выбрать себе проводника, не являющегося математиком.

Решение: Рассмотрим все пятерки жителей, в которых каждый указывает на других. Хотя бы один человек не входит ни в одну из таких пятёрок. Следовательно, он не математик.

8. На трёх полках стоит в беспорядке многотомная энциклопедия "Всё о насекомых". Самым левым на верхней полке стоит том "Комары". Каждое утро библиотекарь меняет местами два тома с соседними номерами, стоящие на разных полках. В один прекрасный день все тома вернулись на свои полки. Докажите, что "Комары" по-прежнему стоят слева на верхней полке.

9. На доске написано число 35. Веня и Вова играют в такую игру: за один ход разрешается увеличить написанное на доске число на любой из его делителей, отличный от самого числа (при этом предыдущее число с доски стирается). Выигрывает тот, кто первым получит число, большее $35! - 1$. Первым ходит Вова. Докажите, что у Вени есть выигрышная стратегия.

Решение: Вова может записать вместо 35 либо $36 = 35 + 1$, либо $40 = 35 + 5$, либо $42 = 35 + 7$. В ответ Веня применяет *передачу хода*: если "ход" из числа $p - 1$ в число $p + 1$ ($p = 37$, 41 или 43) ведет к выигрышу, то он делает этот ход; в противном случае Веня делает ход в число p и заставляет Вову самого сделать ход в $p + 1$ (т.к. p – простое число).

Оглавление