Двадцатая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 2–27 июля 2004 года

7 класс, группа профи

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Волченков С. Г.
Лузгарев А. Ю.
Анисимов Д. П.

3 июля

Вступительная олимпиада

1. Расставьте на доске 10×10 натуральные числа так, чтобы сумма чисел в 1-й строке была равна произведению чисел в 1-м столбце, $\ldots$, сумма чисел в 10-й строке была равна произведению чисел в 10-м столбце.

2. Натуральное число n равно произведению двух простых чисел. Если оба этих простых числа увеличить на 1, то их произведение увеличится на 100. Чему равно исходное n? Найдите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

3. Гэндальф выдал четверым хоббитам коробку, в которой находились бутылки кефира трех сортов: темного, светлого и безалкогольного. При каком наименьшем количестве бутылок в коробке каждый хоббит гарантировано может выбрать себе 2 бутылки одного сорта?

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Докажите, что $AB > AD$.

5. Дано натуральное число n. Разрешается стереть в имеющемся числе 2 цифры, стоящие рядом и отличающиеся на 1 (например, из 245984 можно получить 2984 или 2454). Дима произвел несколько таких операций и получил из числа n число 611, а Саша при помощи нескольких операций получил из n число 556. Докажите, что n содержит хотя бы две цифры '6'.

6. В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны $120°$; $BC = 4$, $DE = 6$, $EF = 7$, $FA = 8$. Найдите длины остальных сторон шестиугольника.

3 июля

Затруднительные ситуации

1 (Маньяк-паралитик). Тюрьма имеет вид квадрата 6×6, разбитого на камеры-одиночки – единичные квадратики. Все внутренние стенки камер – двери. В камере, находящейся в левом нижнем углу, находится маньяк-паралитик, который при виде живого человека немедленно набрасывается на него, убивает его и убегает, однако немедленно впадает в парализованное состояние, если оказывается в одном помещении с мертвым. Выход из тюрьмы ровно один – из правой верхней камеры. Однажды в распоряжении маньяка оказался ключ-“вездеход”, открывающий любую дверь, в том числе и наружную дверь тюрьмы. В результате наутро в 35 камерах были обнаружены трупы заключенных, а маньяк сбежал. Как это ему удалось?

Дополнительное условие. Убив человека, маньяк всегда выскакивает в дверь, по которой вошел в камеру. Какое наибольшее количество трупов могло оказаться в тюрьме?

2 (Лампа). В тюрьме сидят 100 человек. Однажды их собрали всех вместе и объявили следующее: “Через час каждого из вас посадят в одиночную камеру. Затем тюремщик будет отводить вас по одному в специальную комнату, где находится лампа. Лампу можно не трогать, а можно включить или выключить. В комнату с лампой вас будут водить не по очереди, а в произвольном порядке. Обещаем лишь, что никакой визит не будет ни для кого из вас последним. Как только кто-то из заключенных скажет, что все 100 человек уже побывали в комнате с лампой, ваш срок закончится: если сказанное будет правдой, то все выйдут на свободу, а в случае ошибки пойдут на корм крокодилам.” О чем должны договориться за час узники, чтобы рано или поздно выйти на свободу?

3 (Амнистия). У царя Дадона в одиночных камерах сидели 100 пленников. Поворот ручки отпирает каждую камеру, следующий поворот запирает, еще один снова отпирает и т.д. К празднику царь решил освободить часть пленников и накануне послал слугу, который повернул ручку на дверях каждой камеры. Все двери оказались отперты. Но тут пришел второй посыльный и повернул ручку каждой второй камеры. Двери камер 2, 4, 6, … вновь оказались заперты. Следующий посланец повернул ручки камер 3, 6, 9, 12 и т.д. Еще один – в каждой четвертой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ручку сотой камеры. Наконец наступил праздник, и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу. Сколько пленников освободил Дадон?

4 (Двадцать грабителей). Двадцать грабителей делят добычу следующим образом: первый грабитель предлагает свой план дележа, после чего все вместе голосуют. Если за этот план проголосовало не менее половины грабителей, он считается принятым, и добыча делится в соответствии с этим планом. Если же за план проголосовало менее половины, то первого грабителя убивают, после чего второй грабитель предлагает свой план дележа. При голосовании каждый из грабителей руководствуется следующими тремя правилами (в порядке убывания приоритета): 1) Нужно остаться в живых; 2) Нужно прикарманить как можно больше денег; 3) При прочих равных – нужно сохранить жизнь как можно большему числу напарников. Все грабители – идеальные логики. Каким будет исход дележа, сколько грабителей при этом останутся в живых и как они проголосуют?

5 (Ров). У туриста есть веревочная лестница длиной 30 метров и неограниченный запас веревки. Перед ним ров длиной 2 километра, шириной 40 метров, глубиной 50 метров. Обойти ров нельзя (по краям – отвесные скалы). Никаких приспособлений для крепления лестницы и веревки у туриста нет. Как ему переправиться на другую сторону?

4 июля

Остатки и сравнения

1. Дождь над Вишкилем начался в полночь и лил ровно 7777 часов. Может ли случиться, что сразу после этого выглянуло солнце?

2. Найдите последнюю цифру числа а) 777^{777}; б) $77^{77^{7}7}$.

Определение. Пусть a, b – целые числа, m – натуральное число. Говорят, что a сравнимо с b по модулю m, если $a - b$ делится на m. Обозначение: $a \equiv b \pmod{m}$.

3. Докажите следующие свойства сравнений.

Элементарные свойства:

а) $a \equiv a \pmod{m}$;

б) если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$;

в) если $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.

Арифметические свойства:

г) если $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$;

д) если $a \equiv b \pmod{m}$, то $ak \equiv bk \pmod{m}$ для любого целого k;

е) если $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.

4. Найдите две последние цифры числа 1999^{2000}.

5. Докажите признак делимости на 3: число делится на 3 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 3.

6. Поставим перед каждой цифрой числа знаки плюс и минус по очереди начиная с плюса перед последней цифрой и идя справа налево. Назовем результат *знакопеременной суммой цифр* числа. (Например, для числа 2004 это 4-0+0-2=2.)

Докажите признак делимости на 11:

а) число делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр делится на 11;

б) число и его знакопеременная сумма дают одинаковые остатки при делении на 11.

7. На сколько нулей может оканчиваться число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ при натуральных n?

8. Докажите, что $(2^n - 1)^n - 3$ делится на $2^n - 3$ при любом натуральном n.

Для самостоятельного решения

1. Число 1001 делится на 7. Придумайте и докажите признак делимости на 7.

2. Докажите, что число а) $3^{1000} + 13^{1000}$; б) $3^{1000} + 13^{1000} + 23^{1000}$ не является точным квадратом.

3. Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету ни отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что число монет без одной делится на число разбойников в шайке.

4. а) У числа 2004^{2004} подсчитали сумму цифр. У получившегося числа опять подсчитали сумму цифр и т.д., пока не результат не стал однозначным числом. Каким? б) Тот же вопрос для числа 2003^{2003}.

5 июля

Индукция

Пусть требуется доказать некоторое утверждение для любого натурального n. Метод *математической индукции* заключается в следующих двух шагах:

1) (база индукции) Проверка утверждения для $n = 1$.

2) (переход) Доказательство того, что из справедливости утверждения для n следует его справедливость для $n + 1$.

1. На плоскости проведены n прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что они разбивают плоскость на $2n$ областей.

2. Докажите, что при любом натуральном n

а) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

б) $1^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

3. Концы отрезка AB занумерованы числами 1 и 2. Разобьём его на части точками M_1, M_2, $\ldots$, M_n и поставим в соответствие каждой из этих точек ровно одно из чисел 1 или 2. Докажите, что число получившихся при делении отрезков, концы которых имеют различные номера, нечетно.

4. Докажите, что если $x + \frac{1}{x}$ – целое, то $x^n + \frac{1}{x^n}$ – тоже целое.

5. Докажите, что число, состоящее из $3n$ единиц, делится на $3n$.

6. В разных местах кольцевой автомобильной дороги стоят несколько одинаковых автомашин. Если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слить в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге до своего прежнего места. Докажите, что по меньшей мере одна из машин, стоящих на дороге, может объехать всё кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

7. На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что части, на которые эти прямые делят плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние части были окрашены в разные цвета.

8 (Неравенство Бернулли) Докажите, что при всех натуральных n и при $x > -1$ выполняется неравенство $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Для самостоятельного решения

1. Из чисел от 1 до $2n - 1$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что одно из выбранных чисел равно сумме двух других.

2. Число $(1+\sqrt{2})^{2004}$ записали в виде $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b. Докажите, что $|a^2 - 2b^2| = 1$.

3. Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на “уголки” из трёх клеток.

4. В выпуклом n-угольнике проведены несколько непересекающихся диагоналей. Докажите, что из двух вершин диагонали не проведены.

5 июля

Геометрическое место точек (ГМТ)

1. Найдите геометрическое место центров всевозможных окружностей, проходящих через две данные точки A и B.

2. Даны точки A и B. Найдите ГМТ M таких, что расстояние до точки A больше, чем до B.

3. Даны точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Найдите ГМТ M таких, что ближайшей к M точкой среди точек A, B и C является A.

4. Даны точки A и B. Найдите ГМТ M таких, что точки A, B и M являются вершинами равнобедренного треугольника.

5. Даны две параллельные прямые a и b. Найдите ГМТ M таких, что

а) расстояние от M до a вдвое больше, чем от M до b;

б) M является серединой некоторого отрезка AB, такого, что точка A лежит на прямой a, а точка B – на прямой b.

6. Пусть A, B и C – точки, не лежащие на одной прямой. Найдите ГМТ M таких, что:

а) прямая CM пересекает отрезок AB;

б) луч CM пересекает отрезок AB;

в) отрезок CM пересекает отрезок AB.

7. Даны точки A и B. Найдите ГМТ M таких, что

а) $\angle AMB = 90°$.

б) $\angle AMB = \alpha$.

8. Дан угол. Найдите ГМТ M, равноудалённых от его сторон.

9. Докажите, что

а) срединные перпендикуляры, проведённые к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке.

б) биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

10. Дан квадрат $ABCD$. Найдите ГМТ, сумма расстояний от которых до прямых AB и CD равна сумме расстояний до прямых AD и BC.

11. Найдите геометрическое место точек M, лежащих внутри ромба $ABCD$ и обладающих тем свойством, что $\angle AMD + \angle BMC = 180°$.

Для самостоятельного решения

1. Даны точки A и B. Найдите ГМТ M таких, что

а) $\angle BAM$ – наименьший угол треугольника ABM;

б) AMB – средний по величине угол треугольника ABM.

2. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих вершину A с некоторой точкой на стороне BC.

3. Даны точки A и B. Докажите, что ГМТ M таких, что $\angle AMB$ – тупой.

4. Если в треугольнике отметить точку P и соединить ее с вершинами, то треугольник разобьется на три меньших треугольника. Найдите ГМТ P, для которых сумма площадей двух из этих треугольников будет равна площади третьего.

5. Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ M, таких, что отношение расстояний от M до дальней вершины треугольника к расстоянию до ближайшей стороны минимально.

6. Дан отрезок AB. Найдите ГМТ M, таких, что $\frac{AM}{MB} = c$.

5 июля

Инвариант

1. В углу квадрата а) 4×4; б) 3×3 стоит минус, в остальных клетках – плюсы. Разрешается заменять все знаки в любом столбце или в любой строке на противоположные. Можно ли получить таблицу из одних плюсов?

2. На доске написаны числа от 1 до $2003^{2004}+1$. Можно любые два числа заменять на модуль их разности. В конце на доске осталось одно число. Докажите, что это число не равно 0.

3. На доске написали число 1. После этого каждую минуту к написанному числу прибавляют сумму его цифр. Докажите, что на доске никогда не появится число 123456.

4. Три кузнечика сидят на плоскости в точках с координатами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. Каждую минуту один из них перепрыгивает через другого, прыгая в точку, симметричную относительно него. Могут ли они попасть в точки с координатами а) $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$? б) $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$?

5. Утром в луже плавало 19 синих и 95 красных амеб. Иногда они сливались: если сливаются две красные, то получается одна синяя амеба, если сливаются две синие, то получившаяся амеба тут же делится и в итоге образуются четыре красные амебы, наконец, если сливаются красная и синяя амеба, то это приводит к появлению трех красных амеб. Вечером в луже оказалось 100 амеб. Сколько среди них синих?

Для самостоятельного решения

1. На доске написаны числа от 1 до 20. Можно пару чисел (x,y) заменить на $x+y+xy$. Какое число останется после 19 операций?

2. По кругу растут 44 дерева, и на каждом из них сидит чиж. Время от времени какие-то 2 чижа перелетают на соседние деревья – один по часовой стрелке, а другой – против. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

3. На острове есть 17 серых, 18 бурых и 19 малиновых хамелеонов. Когда встречаются 2 хамелеона одного цвета, они одновременно перекрашиваются в третий цвет. Могут ли они все стать одноцветными?

6 июля

Игры

1. Вася и Петя играют с 30 коробками конфет. Они выложили их в ряд и по очереди (начинает Вася) съедают содержимое любой коробки или двух, лежащих рядом. Выигрывает тот, кто съедает последнюю конфету. Кто выигрывает при правильной игре?

2. В начале игры на доске написано число 0. Два игрока ходят по очереди. За ход игрок прибавляет к написанному числу любое натуральное число, не превосходящее 10, и результат записывает на доску вместо исходного числа. Выигрывает тот, кто первым получит трехзначное число. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его противник?

Разнобой

3. Два игрока по очереди ставят шахматных королей на доску 9×9 так, чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его противник?

4. У Васи и Пети по 55 гирь весом 1, 2, …, 55 кг. Они по очереди подкладывают свои гири – каждый на свою чашу двухчашечных весов, – причем первым ходит Вася. Петя выигрывает, если в какой-то момент разность масс гирь на чашах окажется равной 50 кг. Сможет ли он этого добиться?

4'. Та же задача, но Петя выигрывает, если после его хода разность масс гирь на чашах окажется равной 50 кг.

5. а) На одном конце полосы 1×100 стоит черная, а на другом белая шашка. Двое по очереди двигают каждый свою шашку (первый – черную, второй – белую) на 1, 2, 3 или 4 клетки в направлении шашки соперника (перескакивать через чужую шашку запрещается). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

б) То же самое, только шашку можно двигать в обе стороны.

6. В начале игры на доске написано число 1000. Два игрока ходят по очереди. За один ход можно вычесть из написанного числа любой его натуральный делитель и результат написать на доску вместо исходного числа. Тот, кто напишет ноль, проигрывает. Кто из игроков может обеспечить себе победу: начинающий или его противник?

7. Данил Павлович и Сергей Геннадьевич по очереди ломают шоколадку размером 2003×2005 долек. За один ход можно сломать одну из частей на две (вдоль бороздки). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Данил Павлович. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Малыш и Карлсон играют в такую игру: они берут шоколадку 1001×1001 и по очереди выкусывают из нее (по клеточкам) кусочки: Малыш – 1×1, а Карлсон – 2×2. Малыш начинает. Если Карлсон не может сделать ход, тот весь остаток шоколадки доедает Малыш. Выигрывает тот, кто съест больше шоколада. Кто выигрывает при правильной игре?

9. Из шоколадки 999×2004 выкусывается клеточный квадрат любого размера. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6 июля

МеждусоБой N1

1. Как разрезать квадрат на 5 частей, из которых можно без пропусков и наложений сложить три попарно неравных квадрата?

2. Юра нарисовал на доске квадрат $ABCD$ и провел прямую l, проходящую через точку B и середину стороны CD, а затем стер всё, кроме точки A и проведенной прямой. Как циркулем и линейкой восстановить квадрат?

3. Чтобы от театра доехать до цирка, можно сесть на остановке на автобус №1 или на автобус №2. Они ходят с постоянными интервалами, причем автобус №1 в 2 раза реже, чем №2. За последние 20 минут автобус прошел 16 минут назад, 10 минут назад и 2 минуты назад. Когда будет следующий автобус?

4. Натуральное число удалось разложить на 10 сомножителей, больших 1, двумя способами так, что ни один из сомножителей первого разложения не совпадает ни с одним из сомножителей второго. Докажите, что это число можно разложить на 14 сомножителей (не обязательно различных), больших 1.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a_3, \\ a_2 + a_3 &= a_4, \\ \vdots \quad \vdots \; &\; \vdots \\ a_{n-1} + a_n &= a_1, \\ a_n + a_1 &= a_2. \end{aligned}$$

6. Сколько существует таких трехзначных чисел n, что $n^2 + 8n - 1$ делится на 239?

7. В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку – лжецу или рыцарю (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) – так, чтобы каждый на вопрос: “Есть ли среди ваших соседей лжецы?” ответил положительно? (Каждый знает про каждого из своих соседей, лжец он или нет).

8. На улице – 150 фонарей, расположенных в ряд. Некоторые из них разбиты, причем среди любых трех подряд идущих фонарей хотя бы один разбит. После того, как электрик Петров починил несколько фонарей, оказалось, что среди любых четырех подряд идущих фонарей разбито не более одного. Докажите, что электрик Петров починил по крайней мере 25 фонарей.

8 июля

Алгоритм Евклида и разложение на простые множители

Лемма 1. У составного числа a найдется такой простой делитель p, что $p^2 \le a$.

Упр2. Как проверить, что числа 1997 и 1999 — простые?

Упр3. Найдите НОД$(99! + 100!, 101!)$.

Теорема 4 (Евклид). Простых чисел бесконечно много.

Основные факты, следующие из единственности разложения на простые множители:

1. Если ab делится на простое число p, то одно из чисел a и b делится на p.
2. Если a делится на b и a делится на c, причем НОД$(b, c) = 1$, то a делится на bc.
3. Если ab делится на c и НОД$(a, c) = 1$, то b делится на c.

Зад5. а) Найдутся ли 3 натуральных числа таких, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на третье? б) Тот же вопрос про 10 чисел?

Зад6. Докажите, что НОД$(a, b) \cdot$ НОК$(a, b) = ab$.

Зад7. Каким может при натуральных n быть НОД чисел а) $2n - 17$ и $n - 8$; б) $13n + 8$ и $8n + 5$?

Алгоритм Евклида

Лемма 8. Если $a = bq + r$, то НОД$(a, b) =$ НОД(b, r).

Упр9. Найдите а) НОД$(1998, 8991)$; б) НОД$(7387, 82861)$.

Зад10. Найдите а) НОД$(\underbrace{11\ldots1}_{51}, \underbrace{11\ldots1}_{81})$; б) НОД$(2^{100} - 1, 2^{120} - 1)$; в) НОД$(2^m - 1, 2^n - 1)$.

Зад11. На прямой сидит блоха, и прыгает всякий раз либо на 15 сантиметров вправо, либо на 21 сантиметр влево. В каких точках прямой может побывать эта блоха?

Зад12. Докажите основную теорему арифметики (ОТА):

12-1. Если r — остаток от деления a на b, то НОД$(a, b) =$ НОД(b, r).

12-2. Если $d =$ НОД(a, b), то найдутся такие целые m и n, что $d = ma + nb$.

12-3. Если a не делится на простое число p, то найдутся целые m и n такие, что $1 = ma + np$.

12-4. Если $ab \,\vdots\, p$, где p — простое, то $a \,\vdots\, p$ либо $b \,\vdots\, p$.

12-5 (ОТА). Разложение натурального числа в произведение простых сомножителей единственно с точностью до порядка сомножителей.

Для самостоятельного решения

Зад13. В банке 500 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 300 долларов или положить в него 198 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

Зад14. Докажите, что

$$\frac{\text{НОД}(a,b)\text{НОД}(b,c)\text{НОД}(c,a)}{\text{НОД}(a,b,c)^2} = \frac{\text{НОК}(a,b)\text{НОК}(b,c)\text{НОК}(c,a)}{\text{НОК}(a,b,c)^2}.$$

Зад15. При каких n можно найти n натуральных чисел, чья сумма равна их НОК?

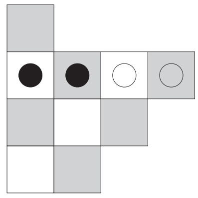
Зад16. Докажите, что в вершинах любого многогранника можно расставить натуральные числа так, чтобы числа в вершинах связанных ребром имели общий делитель больше 1, а не связанные ребром не имели.

Зад17. Числа a, b, c — целые. Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах $\Leftrightarrow c \,\vdots\, \text{НОД}(a,b)$.

8 июля

Графы–1

1. По узкому каналу плывут два кораблика, а навстречу им другие два кораблика. Ширины канала не хватает для того, чтобы они смогли разойтись, но на канале имеется залив, куда может зайти один корабль. Как им проплыть мимо друг друга?



2. На неровной шахматной доске, состоящей из 10 клеток (см. рисунок), расположены два белых и два черных коня. Требуется поменять коней местами, т.е. расположить белых на места черных и наоборот. Коней разрешается переставлять по правилам шахматной игры, т.е. передвигать "буквой Г"на любую свободную клетку. За один ход можно передвинуть одного коня.

Основные определения. Термины. Примеры. *Вершины. Ребра. Степени вершин. Пути. Связность. Компоненты связности. Орграфы. Циклы. Полные графы. Циклические графы. Регулярные графы. Мультиграфы.*

3. Чему равна сумма степеней вершин графа?

4. Сколько вершин нечетной степени может быть в графе?

5. В классе некоторые ученики знакомы друг с другом. Верно ли, что найдутся двое, имеющие одинаковое число знакомых в классе?

6. В классе некоторые ученики завидуют успехам других. Верно ли, что найдутся двое, имеющие одинаковое число завистников в классе?

7. В передаче "Любовь с первого взгляда" участвовали 7 юношей и 7 девушек. Во время передачи каждый юноша поссорился с 6 участниками передачи, а каждая девушка – с двенадцатью. Докажите, что из участников можно составить 7 пар, состоящих из непоссорившихся юноши и девушки.

8. Существует ли 8-вершинный граф, степени вершин которого равны

а) 8, 6, 6, 5, 3, 2, 1, 1;

б) 7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1;

в) 7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1;

г) 7, 6, 4, 3, 4, 4, 1, 2?

9. В классе у каждого ученика ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что а) число учеников четно; б) класс можно разделить на две группы так, чтобы ни у кого не было ни друзей, ни врагов в своей группе.

10. В городе проводилось совещание врачей. От каждой поликлиники на совещание было приглашено по пять врачей. Оказалось, что каждый из приглашенных работал в двух поликлиниках, поэтому на совещании представлял обе поликлиники. Кроме того, для любых двух поликлиник города среди участников совещания найдется врач, который в них работает. Сколько в городе поликлиник и сколько врачей принимало участие в совещании?

11. Можно ли на окружности расположить числа 1, 2, . . . , 9 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Для самостоятельного решения

12. В государстве несколько воинских частей, каждая из которых соединена десятью телефонными ли-ниями с другими частями. Из каждой части можно дозвониться в любую другую (возможно, через другие части). Вражеский шпион перерезал один провод. Докажите, что связь между всеми частями сохранилась.

13. В стране 101 город и из каждого выходит не менее 50 дорог в другие города. Докажите, что по дорогам можно проехать, посетив все города.

14. В графе степень каждой вершины не превосходит 3. Докажите, что вершины можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром.

15. Из полного графа со 100 вершинами удалили 98 ребер. Докажите, что граф остался связным.

16. Докажите, что существует 200-вершинный граф, в котором две вершины степени 1, две вершины степени 2, . . . , две вершины степени 100.

Комбинаторика-1

Упр1. Среди 12 школьников требуется выбрать дежурных на ближайшие шесть дней — на каждый день по дежурному. Сколько существует различных выборов?

Упр2. Сколькими способами можно выбрать из слова "лмышонок" пару из гласной и согласной букв?

Упр3. У скольких 10-значных чисел все цифры различны?

Упр4. Среди 12 школьников требуется выбрать шесть футболистов. Сколько существует различных выборов?

Обозначение. *x в убывающей степени k*:

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\dots(x-k+1) \quad \text{(всего } k \text{ сомножителей).}$$

Упр5. Вычислите или упростите: а) $101^{\underline{3}}$, б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\underline{4}}$, в) $10^{\underline{15}}$, г) $k^{\underline{k}}$, где k — натурально.

Определение. *Числом размещений* из n элементов по k называется количество способов выписать в строчку k разных чисел из данных n (строчки, отличающиеся порядком, считаются разными). Оно обозначается A_n^k.

Теорема 6. $A_n^k = n^{\underline{k}}$.

Определение. *Числом сочетаний* из n элементов по k называется количество способов выбрать k чисел из чисел от 1 до n (наборы, отличающиеся лишь порядком, считаются одинаковыми). Оно обозначается C_n^k.

Упр7. Сколько размещений можно сделать из одного сочетания по k элементов?

Теорема 8. $C_n^k = \dfrac{n^{\underline{k}}}{k^{\underline{k}}} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Упр9. На окружности отмечены 5 красных, 7 желтых и 9 зеленых точек. Сколько есть треугольников в этих точках, у которых все вершины а) зеленые; б) одноцветные; в) все разноцветные; г) не все одноцветные?

Зад10. Сколько различных строк можно получить, переставляя буквы в словах а) ПЕРЕГОРОДКА; б) МАТЕМАТИТИКА.

Зад11. Для проведения вступительной олимпиады преподаватели разбивают 70 школьников следующим образом: список в алфавитном порядке разбивается на 4 части, первая идет в первую аудиторию, вторая — во вторую и т. д. При этом в каждую аудиторию отправляется хотя бы один школьник. Сколькими способами можно произвести распределение?

Зад12. Сколько решений имеет уравнение $x + y + z = 2000$ а) в натуральных числах; б) в целых неотрицательных числах?

Зад13. Преподаватели снова делят 70 школьников на 4 аудитории, но в этот раз без учета алфавитного порядка. Найдите число способов.

Зад14. Хромая ладья ходит на 1 клетку вправо или на 1 клетку вверх. Занумеруем столбцы слева направо, а строки снизу вверх числами $0, 1, 2, 3, \dots$. Найдите количество путей, ведущих из левой нижней клетки в клетку на пересечении m-го столбца и n-ной строки.

Зад15. Сколько решений в нечетных натуральных числах имеет уравнение $x + y + z + t = 2000$?

Для самостоятельного решения

Зад16. Сколькими способами можно расставить k ладей на доске $N \times N$ так, чтобы они не били друг друга?

Зад17. Сколько есть решений уравнения $x + y + z = 100$ в натуральных числах от 1 до 60?

Зад18. Сколькими способами можно расставить числа $1, 2, \ldots, 20$ в строку так, чтобы каждое число, кроме единицы, было больше по крайней мере одного из своих соседей?

Площадь

— Извините, Вы не подскажете, как мне найти площадь Ленина?
— Очень просто. Нужно длину Ленина умножить на ширину Ленина.

(Диалог на улице)

Определение. Каждой фигуре M на плоскости сопоставляется число S_M, называемое *площадью*, такое, что выполнены следующие свойства:

1) $S_M \geq 0$;
2) Площади равных фигур равны;
3) Если фигура M состоит из фигур A и B, не имеющих общих внутренних точек, то $S_M = S_A + S_B$;
4) Площадь квадрата со стороной a равна a^2.

Зад1. Докажите, что а) площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab, б) площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b равна $\dfrac{ab}{2}$, в) площадь треугольника со стороной a и опущенной на нее высотой h_a равна $\dfrac{ah_a}{2}$, г) площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h равна $\dfrac{(a+b)h}{2}$, д) площадь ромба равна половине произведения длин его диагоналей.

Упр2. Существует ли такой треугольник, что а) все его стороны больше 1 км, а площадь меньше 1 см^2; б) все его высоты меньше 1 см, а площадь больше 1км^2; в) все стороны треугольника меньше 1см, а его площадь больше 1 см^2.

Зад3. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{ABO} = S_{CDO} \Leftrightarrow AD \parallel BC$.

Зад4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Докажите, что

$$AB : AC = BL : CL.$$

Зад5. Внутри треугольника ABC отмечена точка M. Докажите, что а) если M лежит на медиане, проведенной из вершины A, то $S_{AMB} = S_{AMC}$; б) если $S_{AMB} = S_{AMC}$, то M лежит на медиане, проведенной из вершины A.

Зад6. Дан треугольник ABC. Докажите, что а) внутри треугольника найдется такая точка M, что $S_{AMB} = S_{BMC} = S_{CMA}$; б) M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Для самостоятельного решения

Зад7. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в узлах сетки не менее $\frac{1}{2}$.

Зад8. а) В выпуклом четырехугольнике соединили середины противоположных сторон, и получившиеся части раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных частей равна сумме площадей белых. б) Каждую сторону четырехугольника разделили на 4 равные части, соединили соответственные точки на противоположных сторонах, и 16 полученных частей раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных частей равна сумме площадей белых.

Зад9. На сторонах AB и BC треугольника ABC внешним образом построены параллелограммы; P — точка пересечения продолжений их сторон, параллельных AB и BC. На стороне AC построен параллелограмм, вторая сторона которого равна и параллельна BP. Докажите, что его площадь равна сумме площадей первых двух параллелограммов.

Зад10. Квадрат разрезан прямыми, параллельными его сторонам, на прямоугольники, которые раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. При этом оказалось, что общая площадь черных прямоугольников равна площади белых прямоугольников. Докажите, что прямоугольники можно переместить так, что все черные прямоугольники составят один прямоугольник.

Зад11. Стороны прямоугольника на шахматной доске параллельны сторонам доски. Докажите, что разность суммарных площадей белых и черных частей прямоугольника не превосходит площади одной клетки.

Зад12. Докажите неравенство для площади четырехугольника (a, b, c, d — стороны по порядку):

$$S \leq \frac{ac + bd}{2}$$

Зад13 (Принцип Кавальери). а) На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника и прямая. Известно, что любая прямая, параллельная данной, пересекается с многоугольниками по отрезкам раной длины. Докажите, что эти многоугольники равновелики. б) Докажите, что два равновеликих прямоугольника можно расположить на плоскости так, что они будут пересекаться по равным отрезкам с любой прямой, параллельной данной.

Зад14. (Корректность площади) *Решите, не используя понятия площади.* а) Прямоугольник разрезали на несколько меньших прямоугольников. Для каждого вычислили произведение длины на ширину. Докажите, что сумма этих чисел равна произведению длины на ширину исходного прямоугольника. б) Один прямоугольник лежит в другом (возможно, косо). Докажите, что у внутреннего произведение длины на ширину меньше.

Графы–2. Деревья

На реализацию программы “Дороги Средиземья” гномы требуют такого финансирования, чтобы было построено максимальное число дорог, соединяющих все 100 городов (ранее несоединенных дорогами). Хоббиты же хотят построить минимальное количество дорог, обеспечивающих проезд от любого города к любому.

1. Город называется *захолустным*, если в него ведет одна дорога. Докажите, что после реализации одного из хоббитских проектов в Средиземье окажется хотя бы один захолустный город. А два таких города?

2. Во сколько раз сумма, названная гномами, больше суммы, названной хоббитами, если каждая дорога требует одинаковых затрат?

Конкурс. Перечислите различные свойства графов, изображающих возможные хоббитские проекты.

Деревом называется связный граф без циклов.

Какие перечисленные выше свойства графов могут быть выведены друг из друга? Какие определяют деревья? Изобразите на доске, какие свойства или группы свойств эквивалентны.

Все проекты, представленные на конкурс (не только гномами и хоббитами) были красочно изображены на схемах. Однако, художники забыли подписать на них названия городов и неправильно отметили эти города на карте. Гэндальф назвал схемы, которые могут изображать один и тот же проект изоморфными. А как бы вы определили изоморфизм между графами?

3. Сколько бывает различных (неизоморфных) деревьев с а) 4; б) 5 ребрами?

4. Докажите, что из любого связного графа можно выкинуть несколько ребер так, чтобы оставшийся граф был деревом.

Нарисуйте хотя бы четыре неизоморфных кубических графа на 8 вершинах. А кто нарисует еще? (Последний вопрос задать несколько раз).

5. Невод браконьера представляет собой прямоугольную сетку 100×100 клеток. После каждой поимки инспектор рыбоохраны обрезает в неводе одну веревочку (указанную браконьером), так, чтобы невод не распался на части. Сколько задержаний может выдержать браконьер до разрушения своего инструмента? А какой длины веревку можно вырезать из невода, если сторона исходной клетки равна 5 см?

6. В Средиземье построили систему дорог, обеспечивающих проезд между любыми городами. Докажите, что можно совершить объезд всех городов, проехав не более чем по 198 дорогам. А по 196 дорогам?

Для самостоятельного решения

1. В доску вбито 2004 гвоздя. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход можно соединить два еще не соединенных между собой гвоздя ниткой. Кто выиграет при правильной игре, если получивший замкнутую цепь а) проигрывает; б) выигрывает?

2. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет – всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.

3. Докажите, что дерево – двудольный граф, т.е. все его вершины можно покрасит в два цвета так, чтобы ни одно ребро не соединяло две вершины одного цвета?

4. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.

5. На каждой черной клетки шахматной доски 8×8 стоит шашка. Какое наименьшее число шашек нужно убрать, чтобы ладья смогла с любого белого поля попасть за несколько ходов на любое белое поле?

13 июля

Малая теорема Ферма

с методическими комментариями

Определение. Пусть m – натуральное число, a – фиксированный остаток по модулю m. Будем изображать все остатки по модулю m вершинами графа, и из каждой точки, соответствующей остатку x, проводить ориентированное ребро в точку, соответствующую остатку xa. Полученный граф называется *графом умножения на a по модулю m.*

Упр1. Нарисуйте графы умножения на все ненулевые остатки по модулям а) 5, б) 6, в) 7.

Упр2. а) Найдите остаток, обратный к остатку 12 по модулю 101. б) Решите сравнение: $12x + 2 \equiv 7 \pmod{101}$.

Зад3. Докажите, что любой ненулевой остаток от деления на простое число имеет обратный.

Зад4. Докажите, что а) граф умножения на ненулевой остаток по простому модулю распадается на циклы; б) все такие циклы, кроме того, который содержит нулевой остаток, имеют одинаковую длину.

Замечание. Длина любого цикла (не содержащего 0) в графе умножения на a по простому модулю p равна наименьшему натуральному n такому, что $a^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Зад5 (МТФ, 1st instalment). Пусть p — простое, a — целое число. Тогда

$$a^p - a \,\vdots\, p.$$

Зад6 (МТФ, 2nd instalment). Пусть целое число a не делится на простое число p. Докажите, что тогда а) числа $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$ дают попарно различные остатки по модулю p; б) числа $(p-1)!$ и $a^{p-1}(p-1)!$ сравнимы по модулю p; в) Получите из предыдущих пунктов МТФ.

Зад7 (Теорема Вильсона). Пусть p — простое число. Тогда $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Упр8. Найдите остатки от деления а) 8^{900} на 29, б) 3^{4000} на 1999.

Упр9. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

Зад10. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ — составное.

Для самостоятельного решения

Зад11. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

Зад12. Простое число p больше пяти. Докажите, что число из $p-1$ единицы делится на p.

Зад13 (Число Кармайкла). Докажите, что $a^{561} - a \,\vdots\, 561$ для любого целого a.

Методические комментарии. Занятие начиналось с предложение повторно посмотреть на уже разобранную задачу из первого листочка про делимость (новые листочки пока не выдаются):

Задача. Какова последняя цифра числа 77^{777}?

Все, конечно, вспомнили решение: посмотрим на последовательность остатков по модулю 10: $7 \to 9 \to 3 \to 1 \to 7$, которая быстро зациклилась.

Вопрос. Что означает стрелочка в такой записи?

Быстрый ответ. Возведение в квадрат.

Правильный ответ. Умножение на 7.

Двигаемся дальше: раз уж мы начали смотреть, что происходит при умножении на 7, давайте доведем дело до конца и посмотрим на остальные остатки по модулю 10. Все радостно рисуют некоторые циклы. После этого сообщается, что такая штука называется *графом умножения*, и предлагается нарисовать графы умножения на все (ненулевые) остатки по модулям 5 и 6 (легко понять, что умножение на нулевой остаток ничего интересного не дает). Видно, что получающиеся графы для 5 и 6 сильно отличаются друг от друга. Первая идея – в графе для пятерки только одно ребро ведет в 0 (петля), а в графе для 6 встречаются исключения (в умножении на 2, 3 и 4). Отчего же это? Некоторые достаточно быстро догадались, что дело в 'делителях нуля', точнее записали условие того, что какой-то остаток b переходит в 0: $ab \equiv 0 \pmod{m}$, и поняли, что для простого числа из этого следует, что либо a, либо b делится на m (ибо соответствующая задача уже была в явном виде раньше). Ну, а для составного числа всегда найдется граф умножения, в котором что-то ненулевое перейдет в 0.

После этого спрашиваем: а верно ли, что в графе для простого модуля в каждую вершину вообще входит не более одного ребра? Вопрос оказывается более сложным, и можно попросить нарисовать графы и для простого числа 7. Когда доказан и этот факт, замечаем, что всего в нашем графе m вершин и m ребер. Если же m простое, то в каждую вершину входит *ровно* одно ребро (подсчет числа ребер).

Предлагаем решить какое-нибудь сравнение типа $3x \equiv 4 \pmod{7}$ с помощью этих графов. Это вызывает некоторые сложности (из-за резкого перехода на алгебраический язык), но в конце концов выясняется, что удобнее посмотреть, что идет в вершину 3 в графе умножения на 2, чем посмотреть, куда переходит 2 во всех графах умножения по модулю 7. Но если потребуется решить более сложное сравнение, вроде $12x \equiv 1 \pmod{101}$, то рисовать граф умножения будет несколько утомительно (фактически это тупой перебор). Значит, нужно придумать что-нибудь поумнее. Наводящая идея: нельзя ли превратить это сравнение в обычное уравнение? Кое-кто придумывает это, и приходим к $12x - 101y = 1$, после чего вспоминаем, где мы это уже видели, и мучительно пытаемся вспомнить что-нибудь, относящееся к линейному представлению НОД и алгоритму Евклида.

Рано или поздно на доске появляется-таки три строчки этого алгоритма, ищется линейное представление, получается решение сравнения. Ну, а если нужно решить что-то вроде $12x \equiv 5 \pmod{101}$? Два почти одинаковых пути: умножить решение предыдущего сравнения на 5, или умножить обе части нашего сравнения на полученное пятью минутами ранее число "12^{-1}". Второе несколько сложнее, но предпочтительнее. Можно провести аналогию с обычными линейными уравнениями вида $ax = b$, где для решения нужно поделить обе части на a. Но в остатках делить мы не умеем (пока!), а вот умножать на a^{-1} – пожалуйста (пояснить, что по сути это одно и то же!). Итак, мы умеем решать *все* такие сравнения (ибо нам нужно, чтобы НОД$(a, m) = 1$, а это всегда так, если m простое, а a не делится на m (то есть не равно нулю: еще бы, делить на 0 нельзя!)

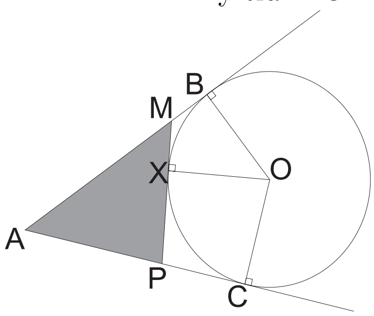
Потом раздаются листочки, понимается, что мы сделали все вплоть до задачи 3, которую тоже сделали, да еще и двумя способами. Еще 5-10 минут уходит на задачу 4а (вспоминаем графы), и выясняется, что 2 часа уже прошло.

Касательная к окружности

Теорема 1. Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны.

Теорема 2. Суммы противолежащих сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равны.

1. Прямые AB и AC – касательные в точках B и C к окружности с центром в точке O. Через произвольную точку X дуги BC проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что периметр треугольника AMP и величина угла MOP не зависят от выбора точки X.



2. В треугольник со сторонами a, b и c вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K. Найти длину отрезка AK.

3. Тот же вопрос для вневписанной окружности.

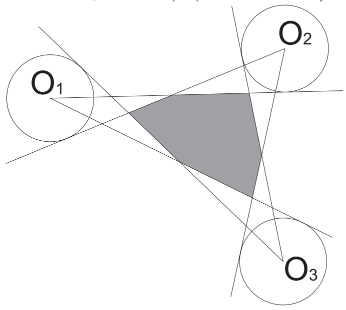
4. Стороны пятиугольника в порядке обхода равны 5, 6, 10, 7, 8. Доказать, что в этот пятиугольник нельзя вписать окружность.

5. В четырёхугольнике $ABCD$ $AD = DC$, $AB = 3$, $BC = 5$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD касаются отрезка BD в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN.

6. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD имеют радиусы R и r соответственно. Найти расстояние между центрами этих окружностей.

7. В четырёхугольнике $ABCD$ расположены две окружности: первая окружность касается сторон AB, BC и AD, а вторая – сторон BC, CD и AD. На сторонах BC и AD взяты точки E и F соответственно так, что отрезок EF касается обеих окружностей, а периметр четырёхугольника $ABEF$ на $2p$ больше периметра четырёхугольника $ECDF$. Найти AB, если $CD = a$.

8. Центры O_1, O_2 и O_3 трёх непересекающихся окружностей одинакового радиуса расположены в вершинах треугольника. Из точек O_1, O_2, O_3 проведены касательные к данным окружностям так, как показано на рисунке. Известно, что эти касательные пересекаясь образовали выпуклый шестиугольник, стороны которого через одну покрашены в красный и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих.



9. В выпуклом четырёхугольнике отметили середины сторон и соединили их с вершинами так, как показано на рисунке. Докажите, что площади серой и черной частей равны.

Для самостоятельного решения

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются друг друга. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC также касаются друг друга.

11. В треугольнике ABC со сторонами a, b и c на стороне BC отмечена точка D так, что окружности, вписанные в треугольники ABD и ACD касаются отрезка AD в одной точке. Найти длину отрезка BD.

12. Найти радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c.

13. К двум окружностям проведены две общие внешние касательные и одна внутренняя. Внутренняя касательная пересекает внешние в точках A, B и касается окружностей в точках A_1 и B_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1$.

Плоские графы и многогранники

Примеры плоских графов и многогранников.

Формула Эйлера. Проверка на примерах.

1. Пусть V – число вершин связного плоского графа, E – число ребер, D – число областей, на которые граф делит плоскость. Докажите, что если $E > 1$, то а) $E \geq 1,5D$; б) $E \leq 3V - 6$.

2. Докажите, что полный граф с 5 вершинами нельзя нарисовать на плоскости без пересечений.

3. Есть три дома и три колодца. Жители хотят проложить по одной тропинке от каждого дома к каждому колодцу так, чтобы тропинки не пересекались. Докажите, что им это не удастся.

4. Докажите, что для графа, нарисованного без самопересечений на сфере, верна формула Эйлера: $V - E + D = 2$. (Значит, верны все предыдущие задачи.)

Формула Эйлера для выпуклых многогранников.

5. В квадрате отметили 20 точек, а затем соединили их и вершины квадрата непересекающимися отрезками так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

6. Страна разделена на 5 республик, причем каждая республика связна (то есть от любой ее точки можно дойти до любой другой, не пересекая границу). Докажите, что какие-то две республики не граничат между собой. (*Двойственность*)

7. Докажите, что в любом планарном графе есть хотя бы одна вершина, степень которой не больше 5.

Классификация правильных многогранников (Платоновых тел)

8. Дана географическая карта, на которой нарисовано несколько стран, причем каждая страна связна. Докажите, что карту можно правильно раскрасить, т. е. так, чтобы любые две соседние страны (имеющие общий участок границы) были разноцветными

а) в 6 цветов;

б) в 5 цветов;

в) в 4 цвета (*хи-хи*).

Для самостоятельного решения

1. Каждое ребро полного графа на 11 вершинах раскрасили в синий или красный цвет. Могут ли и синий и красный графы оказаться плоскими?

2. Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники, причем так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.

3. Любые два круга из пяти на плоскости имеют общую точку. Верно ли, что любые три круга имеют общую точку?

4. Тот же вопрос, если круги заменить правильными 2004-угольниками.

5. В выпуклом многограннике все грани – пятиугольники или шестиугольники. В каждой вершине сходятся 3 ребра. Сколько всего пятиугольных граней? (Приведите примеры известных вам двух таких многогранников.)

6. Существует ли выпуклый многогранник, не имеющий двух граней с одинаковым количеством сторон?

7. Существует ли выпуклый многогранник, не имеющий трех граней с одинаковым количеством сторон?

8. Несколько государств на карте изображены в виде одинаковых квадратов? Верно ли, что такую карту всегда можно правильно раскрасить в три цвета?

Полуинвариант

Под полуинвариантом понимается величина, которая в процессе преобразований изменяется монотонно, то есть, например, увеличивается или уменьшается. Например: возраст человека, который может только увеличиваться с течением времени.

1. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2004. Разрешается заменять любое число на произведение его цифр или любые два числа на их сумму. Можно ли такими заменами добиться, чтобы среди чисел на доске появилось 3000000?

2. Путешественник отправляется из своего родного города A в самый удаленный от него город B; затем из B – в самый удаленный от него город C и т. д. Докажите, что если A и C – разные города, то путешественник никогда не вернется домой.

3. В парламенте 100 депутатов, и у каждого не более 3 врагов. Докажите, что их можно разделить на 2 палаты так, чтобы каждый имел не более одного врага в своей палате.

4. Имеется 20 дискеток и 20 этикеток к ним, раскрашенные в несколько цветов. Дубль – это дискета, к которой приклеена этикетка того же цвета. Докажите, что можно распределить этикетки так, чтобы все дубли были одного цвета (или дублей вообще не было).

5. Имеется двадцать больших бидонов. В 1-ый налито 1 л воды, во 2-ой – 2 л, ..., в 20-ый – 20 л. Над любыми двумя бидонами можно проделать следующую операцию. Из одного бидона разрешается перелить в другой бидон ровно столько воды, сколько её было в том бидоне, в который наливают. Можно ли после некоторой серии переливаний получить бидоны, содержащие 3 л, 3 л, 3 л, 3 л, 3 л, 6 л, 7 л, ..., 20 л?

6. а) На плоскости дано $2N$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, N из них окрашены в красный цвет, остальные – в синий. Докажите, что эти точки можно соединить N непересекающимися отрезками, каждый из которых будет соединять красную точку с синей.

б) На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и n прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что из этих точек можно опустить попарно не пересекающиеся перпендикуляры на эти прямые так, чтобы на каждую прямую был опущен ровно 1 перпендикуляр.

Для самостоятельного решения

1. В клетках таблицы 2004×2004 стоят числа. Разрешается заменять все знаки в любом столбце или в любой строке на противоположные. Докажите, что можно сделать так, чтобы сумма чиел в любой строке и в любом столбце стала неотрицательной.

2. На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с доски два числа и записать вместо них их НОД и НОК. Докажите, что когда-нибудь числа на доске перестанут меняться.

3. В графе с n вершинами степень каждой вершины не превосходит 5. Докажите, что вершины можно раскрасить в 3 цвета так, что ребер с одноцветными концами будет не более $\frac{n}{2}$.

16 июля

Бином Ньютона

– Вы когда умрёте?
Тут уж буфетчик возмутился.
– Это никому не известно и никого не касается, – ответил он.
– Ну да, неизвестно, – послышался все тот же дрянной голос из кабинета, – подумаешь, бином Ньютона!

Михаил Булгаков, "Мастер и Маргарита"

Упр1. Сколько слагаемых будет после раскрытия скобок, но до приведения подобных в выражениях: а) $(a+b+c+\dots+i+j)(k+l+\dots+y+z)$, б) $(a+b)^{10}$?, в) $(a+b)^n$.

Упр2. Сколько слагаемых будет после раскрытия скобок и приведения подобных в выражениях: а) $(x^2+x+1)^{10}$, б) $(a+b)^n$?

Теорема 3 (Бином Ньютона).

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Зад4. Докажите следующие свойства биномиальных коэффициентов двумя способами (алгебраически и комбинаторно):

а) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

б) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$;

в) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$;

г) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$;

Зад5. Докажите формулу бинома Ньютона по индукции, воспользовавшись свойствами из предыдущей задачи.

Коан. Чему равно C_n^{-1}?

Зад6. Пусть p – простое. Докажите, что

а) если $1 \le k \le p-1$, то $C_p^k \,\vdots\, p$,

б) $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$,

в) $(a_1+a_2+\dots+a_n)^p \equiv a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p \pmod{p}$

Зад7 (МТФ, 3rd instalment). Выведите из результатов задачи 5 Малую теорему Ферма.

Творческое задание. Сформулируйте и докажите аналог теоремы 3 для *убывающих* степеней.

Для самостоятельного решения

Зад8. Найдите следующие суммы биномиальных коэффициентов:

а) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$;

б) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots;$

в) $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + 8C_n^3 + \ldots;$

г) $C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - 8C_n^3 + \ldots;$

Зад9. Докажите, что произведение k последовательных целых чисел делится на $k!$.

Зад10. Докажите следующие формулы:

а) $C_{n-3}^{k-3} + 3C_{n-3}^{k-2} + 3C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^{k} = C_n^k,$

б) $C_t^0 C_{n-t}^{k-t} + C_t^1 C_{n-t}^{k-t+1} + C_t^2 C_{n-t}^{k-t+2} + \cdots + C_t^{t-1} C_{n-t}^{k-1} + C_t^t C_{n-t}^{k} = C_n^k.$

Зад11. Докажите формулу:

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \cdots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

В сторону КТО

Определение. Пусть n – натуральное число. Количество чисел, взаимно простых с n и не превосходящих его, обозначается $\varphi(n)$. Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера.*

Упр1. Вычислите а) $\varphi(1)$; б) $\varphi(6)$; в) $\varphi(25)$.

Упр2. Докажите, что если p — простое число, то $\varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$.

Зад3. Сколько чисел, меньших 300, делится а) на 2; б) на 2 и на 3; в) на 2, 3 и 5?

Зад4.

а) Пусть a чисел удовлетворяют какому-то свойству 1, b чисел удовлетворяют свойству 2, и c чисел удовлетворяют обоим свойствам сразу. Тогда количество чисел, удовлетворяющих хотя бы одному из этих свойств, равно $a+b-c$.

б) Пусть a_1 чисел удовлетворяют первому свойству, a_2 чисел удовлетворяют второму свойству, a_3 чисел удовлетворяют третьему свойству, a_{12} удовлетворяют свойствам 1 и 2, a_{13} удовлетворяют свойствам 1 и 3, a_{23} удовлетворяют свойствам 2 и 3, и a_{123} удовлетворяют всем трем свойствам. Тогда количество чисел, удовлетворяющих хотя бы одному из этих свойств, равно $a_1+a_2+a_3-a_{12}-a_{13}-a_{23}+a_{123}$.

Теорема 5 (Формула включения и исключения). Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для нахождения количества чисел, удовлетворяющих хотя бы одному из n свойств, если для каждого набора этих свойств известно количество чисел, удовлетворяющих одновременно всем свойствам из этого набора.

Зад6.

а) Пусть $n = pq$, где p, q – различные простые числа. Докажите, что

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p} - \frac{n}{q} + \frac{n}{pq};$$

б) Пусть $n = pqr$, где p, q, r – различные простые числа. Докажите, что

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p} - \frac{n}{q} - \frac{n}{r} + \frac{n}{pq} + \frac{n}{pr} + \frac{n}{qr} - \frac{n}{pqr};$$

в) Упростите выражения для $\varphi(n)$ в пунктах а) и б).

Зад7. Докажите, что в условиях предыдущей задачи а) $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$; б) $\varphi(pqr) = \varphi(p)\varphi(q)\varphi(r)$. Верно ли это, если p, q, r – не простые, а попарно взаимно простые числа?

Упр8. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2, 3, 5, 7 соответственно остатки 1, 2, 4, 6.

Зад9. Пусть даны n попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$; n чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таких, что $0 \le r_i \le m_i - 1$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $m = m_1 m_2 \ldots m_n$.

9-1. Если $0 \le N_1 \le m-1$, $0 \le N_2 \le m-1$, $N_1 \equiv r_i \pmod{m_i}$ и $N_2 \equiv r_i \pmod{m_i}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то $N_1 = N_2$.

9-2. Количество различных наборов чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таких, что $0 \le r_i \le m_i - 1$, равно m.

9-3 (**Китайская теорема об остатках**). Существует единственное число N такое, что $0 \le N \le m-1$ и $N \equiv r_i \pmod{m_i}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

9-4. N взаимно просто с $m \Leftrightarrow N$ взаимно просто с m_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

9-5. Докажите, что $\varphi(m) = \varphi(m_1)\varphi(m2)\ldots\varphi(m_n)$.

Теорема 10. Если $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$, то

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Зад11. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

Для самостоятельного решения

Теорема 12. Для любых попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и остатков $r_1, r_2, \ldots, r_n$ по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$ найдутся n последовательных чисел $a, a+1, \ldots, a+n-1$ таких, что $a \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $a+1 \equiv r_2 \pmod{m_2}, \ldots, a+n-1 \equiv r_n \pmod{m_n}$.

Зад13. Пятнадцать простых чисел образуют арифметическую прогрессию с разностью d. Докажите, что $d > 30000$.

Зад14. Докажите, что среди а) любых десяти; б) любых шестнадцати последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

Зад15. Существует ли в сутках момент, когда расположенные на общей оси часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в $120°$?

19 июля

Построения

Схема решения задач на построение

1. Анализ. Предположив, что объект уже построен, выявите его свойства.

2. Построение. При построении используются (идеальные) циркуль и линейка, результаты анализа, стандартные приемы построения.

3. Доказательство. Докажите, что построенный объект удовлетворяет условиям задачи.

4. Исследование. Исследуйте, сколько решений у задачи при разных исходных данных.

Что мы уже умеем?

1. Отложить на прямой отрезок, равный данному.

2. Отложить угол, равный данному.

3. Опустить перпендикуляр из точки на прямую, а также восстановить его по точке на прямой.

4. Разделить угол на две равные части, то бишь провести биссектрису.

5. Разделить отрезок на две равные части.

6. Провести через точку прямую, параллельную данной.

7. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними, стороне и двум прилежащим к ней углам, трём сторонам.

Задачи на построения

1. Постройте центр данной окружности.

2. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне.

3. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

4. Постройте треугольник по стороне и опущенным на нее высоте и медиане.

5. Восстановите треугольник циркулем и линейкой по серединам его сторон.

6. Дан угол и точка внутри него. Построить отрезок с концами на сторонах угла и серединой в этой точке.

7. Разделите отрезок на n равных частей.

8 (уши Чебурашки). Дан отрезок. Постройте ГМТ, из которых отрезок виден под данным углом.

Построения с ограниченными возможностями

9. Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. С помощью одной линейки разделите его пополам.

10. На плоскости нарисована окружность с диаметром. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр на диаметр из данной точки, если эта точка находится а) внутри окружности, б) вне окружности, в)* на окружности.

11. Через данную точку построить прямую, параллельную данной, проведя только три линии (третья линия уже должна быть необходимой прямой).

12. С помощью короткой линейки с делениями и циркуля построить отрезок, соединяющий две удаленные точки. А можно ли сделать то же самое, если а)* у циркуля фиксированный раствор ножек, б)** без циркуля?

Для самостоятельного решения

13. Постройте треугольник по стороне, высоте и биссектрисе, опущенными из одной вершины, принадлежащей данной стороне.

14. Постройте треугольник по трём медианам.

15. а) Дан угол, равный $19°$. Постройте угол, равный $17°$.

б) Дан угол, равный $31°$. Постройте угол, равный $193°$.

16. Сергей Геннадьевич нарисовал на доске треугольник ABC. После этого он отметил точки K, L, M на сторонах AB, BC, CA соответственно, так, что $\frac{AK}{KB} = \frac{4}{9}$, $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$, $CM = AM$. После этого в библиотеку прибежал злой Данил Павлович и стёр всё, кроме точек K, L, M. Как Александру Юрьевичу восстановить чертёж Сергея Геннадьевича?

19 июля

Теория чисел и все-все-все

Зад1. Решите в простых числах уравнение: $x^2 - 2y^2 = 1$.

Зад2. Натуральные числа a и b таковы, что число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что тогда это число делится на 441.

Зад3. Докажите, что из пяти последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно, взаимно простое с остальными.

Зад4. Докажите, что последняя ненулевая цифра числа 100! четна.

Зад5. x, y – натуральные числа, $x^2 = y^3$. Докажите, что xy – пятая степень натурального числа.

Зад6. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + ab + 1$ делится на $b^2 + ab + 1$. Докажите, что $a = b$.

Зад7. Докажите, что найдутся n подряд идущих натуральных чисел, среди которых ровно одно простое.

Зад8. Произведение 25 натуральных чисел оканчивается на 25. Докажите, что среди них найдется 3 числа, произведение которых тоже оканчивается на 25.

Зад9. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ задана правилами: $x_1 = 2$, x_{n+1} – наибольший простой делитель числа $x_1 x_2 \ldots x_n + 1$ при всех $n \geq 1$. Докажите, что $x_n \neq 5$ ни при каком натуральном n.

Зад10. В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ провели диагональ. Через сколько клеток она прошла?

20 июля

Графы на разный вкус

Турниры

В волейбольном турнире каждая из N команд сыграла с каждой по одной игре.

1. Докажите, что команды можно так расположить в итоговом протоколе, что каждая команда выиграла у следующей за ней.

2. Команда A считает себя *круче* команды B, если A выиграла у B или A выиграла у команды, которая выиграла у B. Докажите, что в турнире есть команда, считающая себя круче любой другой.

Штучки Рамсея

3. В полном графе на 6 вершинах, все рёбра которого раскрашены в два цвета, най-дется треугольник либо первого, либо второго цвета.

4. В полном графе на 17 вершинах, все рёбра которого раскрашены в три цвета, най-дется одноцветный треугольник.

5. В полном графе на 18 вершинах, все рёбра которого раскрашены в два цвета, най-дется полный одноцветный подграф на четырёх вершинах.

6. Какое наибольшее число рёбер может быть в графе на 30 вершинах без треугольников?

Паросочетания и чередующиеся пути

Определение паросочетания, чередующегося пути, свободной вершины.

7. Докажите, что паросочетание в графе является максимальным тогда и только тогда, когда в нём нет свободных вершин, между которыми есть чередующийся путь.

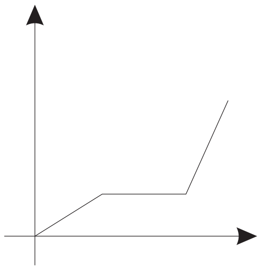
8. В государстве из каждого города выходят три железные дороги в другие города. Докажите, что все дороги можно продать двум компаниям так, чтобы из каждого города выходили дороги обеих компаний.

Гамильтонов путь

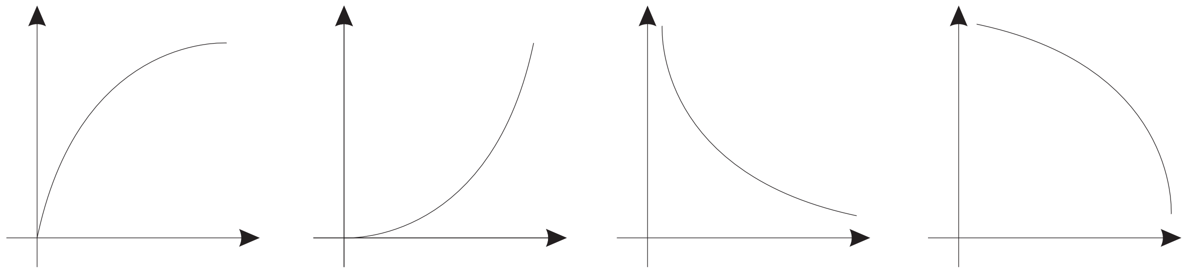
9 (Теорема Дирака). В графе N вершин. Степень каждой не менее $\frac{N}{2}$. Докажите, что в графе существует путь, проходящий по всем вершинам по одному разу.

20 июля

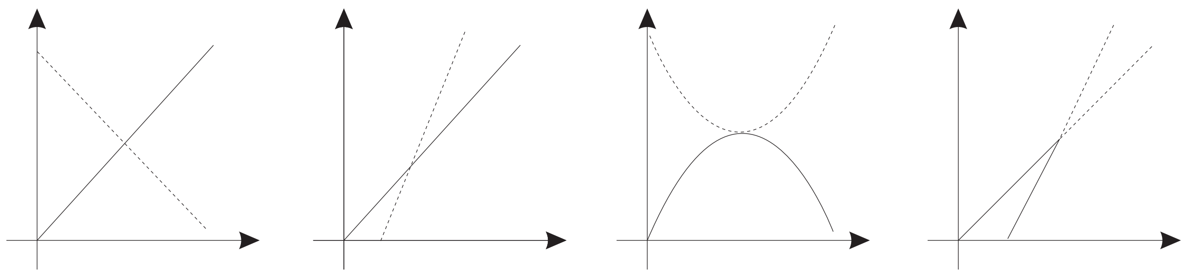
Задачи на движение



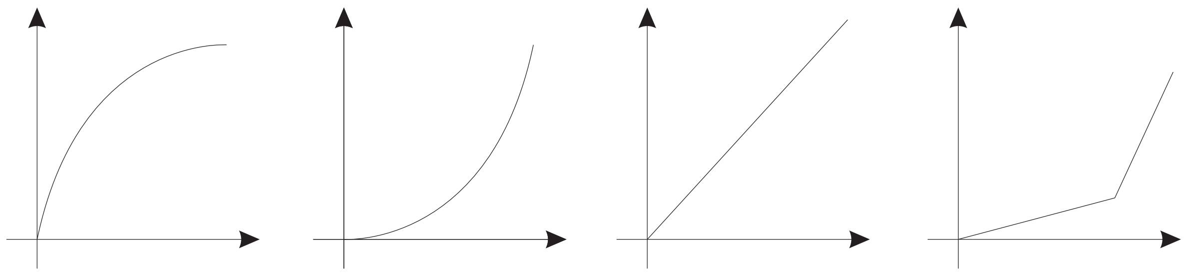
1. На графике изображено движение автобуса, сделавшего на пути остановку. Когда автобус ехал быстрее – до или после остановки?



2. На каких графиках машина ускоряется (увеличивает скорость), а на каких – замедляется?



3. Движение одной машины пунктиром, второй – сплошной линией. Что происходило на дороге?



4. На графиках показана зависимость высоты бочки от времени. Вода вливается в бочку с постоянной скоростью. Нарисовать примерную форму бочки.

5. Машина проехала половину времени со скоростью v, а половину времени – со скоростью w. Какова её средняя скорость?

6. Машина проехала половину пути со скоростью v, а половину пути – со скоростью w. Какова её средняя скорость?

7. Бассейн разделён перегородками на две равные части, к каждой из которых ведёт своя труба. Первая половина заполняется за t часов, вторая – за u часов. За сколько времени наполнят бассейн обе трубы, если перегородку снять?

8. Идя навстречу трамваям, пешеход встречал их каждые 5 минут, идя в одну с ними сторону – каждые 7. Как часто он будет их встречать, стоя на месте? (Трамваи движутся с постоянной скоростью и с одинаковыми интервалами. Скорость пешехода также постоянна.)

Для самостоятельного решения

9. Два пешехода вышли навстречу друг другу одновременно из пунктов A и B. Каждый из них идёт с постоянной скоростью, и дойдя до конца дороги, поворачивает обратно. Первый раз они встретились через час после начала движения. Когда они встретятся во второй раз?

10. Вода выливается из цилиндрической бочки через дырку в дне. Нарисовать примерный график зависимости высоты воды от времени.

11. Альпинист начал подъём в 8 часов и поднялся на вершину к 19 часам. Назавтра он начал спуск в 8 часов и закончил его в 19 часов. Доказать, что как бы неравномерно он ни двигался при подъёме и спуске, найдётся точка, которую он проходил при подъёме и спуске в одно и тоже время (с разницей ровно в сутки).

12. Машина двигалась в одном направлении, причём за любой промежуток в один час она перемещалась на 60 км. Могла ли она за 2,5 часа проехать больше 150 км?

13. По шоссе в одном направлении, с постоянной скоростью и с равными интервалами. Идут автобусы. Однажды человек прошёл по шоссе 4 км, и его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошёл (с той же скоростью) 6 км и его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошёл 17 км. Сколько автобусов его обогнали?

14. В пятидесятиметровом бассейне тренируются два пловца. Они стартуют одновременно с одного бортика и плывут по соседним дорожкам с постоянными, но различными скоростями. Доплыв до бортика, пловец немедленно поворачивает и плывет назад, а проплыв километр – заканчивает тренировку и уходит в раздевалку. Известно, что за время тренировки пловцы встречались 13 раз (если один пловец догнал другого – это тоже встреча; момент старта встречей не считается). Во сколько раз "быстрый" пловец плывет быстрее "медленного"? Найдите все возможности.

15 (Улитка Васильева?) Несколько биологов наблюдали улитку в течении 6 часов, причем каждый ровно по часу. Ни в какой момент улитка не оставалась без наблюдения. Каждый биолог отметил, что улитка проползла 1 метр. Какое расстояние она могла проползти за 6 часов?

16 (Возы Константинова) По двум дорогам, идущим из пункта A в пункт B, удалось проехать двум машинам, привязанным друг к другу веревкой длины 20 м. Докажи-те, что если по этим дорогам поедут навстречу друг другу два воза с сеном, каждый радиуса 10 м, то обязательно столкнутся.

Вписанные углы

Центральным углом в окружности называется любой угол с вершиной в центре этой окружности.

Градусной мерой дуги окружности называется величина соответствующего центрального угла.

Вписанным углом окружности называется угол, вершина которого расположена на окружности, а стороны пересекают окружность.

Теорема 1. Вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается.

Следствие 1'. Все вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

Упр2

2-1. Две хорды AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что величина угла AMC равна полусумме дуг AC и BD.

2-2. Через точку A, не лежащую внутри круга, проведены прямые BC и DE, пересекающие окружность в точках B, C и D, E соответственно. При этом точка C лежит на отрезке AB, а точка E – на отрезке AD. Докажите, что $\angle BAD$ равен полуразности дуг D и CE.

Зад3. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Докажите, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

Четырёхугольник называется *вписанным*, если существует окружность, проходящая через все его вершины.

Теорема 4. Четырёхугольник является вписанным тогда и только тогда, когда сумма его противолежащих углов равна $180°$.

Теорема 5. Четырёхугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $\angle ABD = \angle ACD$.

Упр6. Окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую в точках B и D. Докажите, что $AC \parallel BD$.

Упр7. Из точки M, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и AC. Из точки A опущен перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

Зад8. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

Зад9. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Докажите, что если $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, то $AC = BC$.

Теорема 10. Угол между хордой и касательной к окружности, проведенной через конец хорды, равен половине дуги, заключенной внутри этого угла.

Зад11. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB и AC в точках D и E. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ADE, лежит на первой окружности.

Для самостоятельного решения

Зад12.

12-1. Докажите, что основание D высоты AD треугольника ABC лежит на окружности, проведенной через середины сторон треугольника.

12-2. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. P – середина AH. Докажите, что P лежит на окружности, проведенной через середины сторон треугольника.

12-3 (окружность девяти точек). Докажите, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности.

Зад13. На описанной окружности треугольника ABC на дуге AB взята точка M. На стороны AB и AC опущены перпендикуляры MF и ME. Доказать, что $\angle BMC = \angle EMF$.

Зад14. Продолжение биссектрисы угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M. O – центр вписанной окружности, OB – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Докажите, что точки A, C, O и OB лежат на окружности с центром M. (Вневписанная окружность касается одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон)

Зад 15 (IMO). Пусть ABC – остроугольный треугольник, в котором AB не равно AC.Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Пусть O – середина BC. Биссектрисы углов $\angle BAC$ и $\angle MON$ пересекаются в точке R. Докажите,что описанные окружности треугольников BMR и CNR пересекаются в точке, лежащей на стороне BC.

21 июля

Конструктивы

1. Можно ли целые числа от 1 до 17 выписать в строчку так, что сумма любых двух соседних чисел будет простым числом?

2. Костя задумал четырехзначное число и написал остатки от деления на 2, на 3, …, на 101 (всего 100 остатков). Возможно ли, чтобы среди выписанных чисел оказалось не менее 20 семерок?

3. Есть ли среди натуральных чисел такое, что при умножении суммы его цифр на произведение его цифр получится 2004?

4. Разрежьте какой-либо треугольник на пять тупоугольных треугольников с равными тупыми углами.

5. Можно ли из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \cdots \cdot 100!$ вычеркнуть один сомножитель так, что произведение оставшихся будет полным квадратом?

6. Составьте из первых 12 натуральных чисел, использовав каждое по одному разу, шесть правильных дробей, сумма которых – целое число.

7. Докажите, что на плоскости можно отметить конечный набор точек так, что для каждой отмеченной точки найдутся хотя бы 100 отмеченных точек на расстоянии 1 от нее.

23 июля

Заключительная олимпиада

Довывод

1. Гриша купил на базаре 10 шариков: красных и синих. Если бы он купил 10 красных шариков, то потратил бы на 21 рубль меньше; если бы купил 10 синих шариков, то на 9 рублей больше. На сколько синий шарик дороже красного?

2. Семь монет расположены по кругу. Известно, что какие-то четыре из них, идущие подряд, – фальшивые (легче настоящих). Объясните, как найти две фальшивые монеты с помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь.

3. Известно, что $a = x + y + \sqrt{xy}$; $b = y + z + \sqrt{yz}$; $c = z + x + \sqrt{zx}$, где $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Докажите, что $a + b + \sqrt{ab} > c$.

4. Каких натуральных чисел от 1 до 1000000 включительно больше: чётных с нечётной суммой цифр или нечётных с чётной суммой цифр?

5. Сколько существует таких групп из девяти последовательных четырехзначных чисел, что первое число делится на 10, второе делится на 9, третье – на 8, ..., девятое – на 2?

Вывод

6. Бильярдный стол имеет форму прямоугольного треугольника. Из точки на гипотенузе перпендикулярно ей выпустили шар, который ударился о два борта и вернулся на гипотенузу. Докажите, что длина такого пути не зависит от точки старта. (Шар отражается от бортов по закону: “угол падения равен углу отражения”.)

7. Какое максимальное количество чисел можно выписать в строку так, чтобы сумма любых трех идущих подряд была положительна, а сумма любых пяти идущих подряд – отрицательна?

8. В однокруговом турнире (каждая команда должна сыграть с каждой ровно по одному разу) участвует 8 команд. После того, как некоторые игры турнира были проведены, оказалось, что среди любых четырех команд было сыграно не более двух игр. Докажите, что жюри может составить расписание на 5 туров вперед так, чтобы в каждом туре играли все команды, и чтобы все игры проводились между командами, которые до этого друг с другом не встречались.

Послевывод

9. Прямоугольный стол размером 1×2 требуется покрыть в два слоя пятью одинаковыми квадратными салфетками площади $\frac{4}{5}$. Как это сделать? (Салфетки разрешается перегибать).

ПРОГРАММА ЗАЧЕТА

или

Сколько веревочка ни вейся, а конец все равно будет

Теория чисел. Основные свойства сравнений по модулю. Теорема Евклида. НОД и НОК. Алгоритм Евклида и линейное представление НОД. Решение линейных диофантовых уравнений. Доказательство основной теоремы арифметики с помощью линейного представления НОД. Граф умножения по модулю, зацикливание. Первое и второе доказательства Малой теоремы Ферма. Теорема Вильсона. Функция Эйлера: определение, простейшие свойства. Формула включения и исключения. Китайская теорема об остатках. Мультипликативность функции Эйлера. Подсчет показателей в разложении факториала на простые множители.

Графы. Основные определения. Термины. Примеры. Лемма о рукопожатиях. Определение, свойства и эквивалентные определения дерева. Подсчет числа ребер в дереве на n вершинах. Остовное дерево, теорема о выбрасывании вершины из связного графа. Изоморфизм. Плоские графы и многогранники. Формула Эйлера, классификация платоновых тел. Раскраска планарного графа в 6, 5, 4 цвета.

Комбинаторика. Число размещений, число сочетаний, формулы для них. Убывающие степени. Идея соответствий в подсчете. Четвертое доказательство Малой теоремы Ферма. Шары и перегородки. Бином Ньютона. Доказательства свойств для биномиальных коэффициентов (алгебраическое и комбинаторное). Возведение в степень p, где p – простое число. Третье доказательство Малой теоремы Ферма.

Площади. Определение. Площади простейших геометрических фигур. Доказательство теоремы о медианах методом площадей.

Окружности и ГМТ. Основные геометрические места точек. Построения: понятие об идеальных инструментах, простейшие построения. Касательная к окружности и ее свойства. Уши Чебурашки. Вписанные углы, измерение угла, стороны которого пересекают окружность. Два критерия вписанности четырехугольника.