

Заключительная олимпиада. 24 июля
Довывод

1. В классе учатся менее 50 человек. Если выгнать старшего ученика, то средний возраст оставшихся будет $13\frac{5}{7}$. Если выгнать младшего ученика, то средний возраст оставшихся будет $13\frac{3}{4}$ (возраст любого человека считается целым). Сколько человек может быть в классе?

2. Все девятизначные числа, десятичная запись которых содержит цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу, выписали в ряд в порядке возрастания. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее из них и стирают. Какие два числа будут стерты последними?

3. Петя и Вася по очереди закрашивают по две клетки на полоске 1×2010 . Петя хочет, чтобы расстояния между двумя отмеченными им за один ход клетками не повторялись. Сможет ли Вася ему помешать? (Первым ходит Петя, игра заканчивается когда все клетки полоски закрашены).

4. На плоском ровном поле растут 4 дерева: А, Б, В и Г. По полю проходит прямая дорога. Землеустроитель установил на дороге 8 столбов и на каждом прикрепил табличку, на которой перечислены имена деревьев, причем первым указано ближайшее, вторым - второе по удаленности и т.д. Докажите, что найдутся два столба с одинаковыми табличками.

5. Квадратная страна 2000×2000 км разбита на прямоугольные области 100×200 км. Области объявили независимость, и каждая пара областей, имеющих общий участок границы, построила на двоих одну таможню. Какое наибольшее число таможен могло быть построено?

Вывод

6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ точки K, L, M, N, O являются серединами сторон AB, BC, CD, DE и EA соответственно. Докажите, что длина замкнутой ломаной $KMOLNK$ меньше, чем длина ломаной $ACEBDA$.

7. В лагерь приехали 100 школьников. Известно, что любую группу из 6 школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что в каждой комнате все школьники знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть среди школьников?

8. Докажите, что существует множество из 1000 натуральных чисел такое, что для любых чисел a и b из этого множества a делится на $a - b$?