Двадцать шестая Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2010 г.

7 класс, группа профи

Преподаватели:
А. В. Пастор, А. С. Трегубов, Л. А. Попов

Конструкции. 04.07.2010

1. Разрезать квадрат со стороной 4 клетки, на прямоугольники сумма периметров которых равна 25.

2. В строку выписаны 13 чисел. Известно, что сумма любых трех подряд положительна. Может ли сумма всех быть отрицательная?

3. Тюрьма имеет вид квадрата 6×6, разбитого на камеры-одиночки — единичные квадратики. Все внутренние стенки камер — двери. В камере, находящейся в левом нижнем углу, находится маньяк-паралитик, который при виде живого человека немедленно набрасывается на него, убивает его и убегает, однако немедленно впадает в парализованное состояние, если оказывается в одном помещении с мертвым. Выход из тюрьмы ровно один — из правой верхней камеры. Однажды в распоряжении маньяка оказался ключ-"вездеход", открывающий любую дверь, в том числе и наружную дверь тюрьмы. В результате наутро в 35 камерах были обнаружены трупы заключенных, а маньяк сбежал. Как это ему удалось?

4. Найдите наименьшее число, которое при делении на сумму своих цифр дает в остатке 22.

(Дополнительная задача.)

5. а) Петя разбил клетчатый квадрат 7×7 на прямоугольники по границам клеток, и раскрасил прямоугольники в 3 цвета так, что прямоугольники одного цвета не соприкасались даже углами. Какое наибольшее число прямоугольников могло быть у Пети?

б) Тот же вопрос для квадрата 8×8.

Вступительная олимпиада. 04.07.2010

1. На доске вначале выписаны два числа: 3 и 6. За один ход разрешается увеличить любое число на доске на сумму цифр любого из выписанных (в том числе на сумму цифр его самого). Можно ли добиться того, чтобы каждое число превратилось в 2010?

2. 2010 шариков раскрасили в 7 цветов радуги. На каждом шаре написали общее количество шаров такого же цвета, как и этот (включая данный шарик). Чему может быть равна сумма чисел, обратных к написанным?

3. Каждый из 7 мальчиков имеет не менее 3 братьев среди остальных 6. Докажите, что все мальчики братья.

4. В треугольнике ABC проведена медиана AF. Точка D — середина отрезка AF, E — точка пересечения прямой CD и стороны AB. Известно, что $BD = BF = CF$. Докажите, что $AE = DE$.

5. Число 1047 при делении на A дает остаток 23, а при делении на $A + 1$ — остаток 7. Найдите A.

6. На острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из них есть хотя бы один друг. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды утром каждый житель произнес либо фразу "Все мои друзья — рыцари", либо фразу "Все мои друзья — лжецы", причем каждую из фраз произнесло ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное число пар друзей, один из которых рыцарь, а другой — лжец.

7. Вася поставил на шахматную доску 8×8 31 фишку: 16 на черные поля и 15 на белые. Докажите, что какие-то две фишки стоят на полях, имеющих общую сторону.

Неравенство треугольника. 05.07.2010

Утверждение. (*Неравенство треугольника*) Сумма любых двух сторон треугольника больше его третьей стороны.

0. (*Тривиальное следствие.*) Пусть a, b и c — длины сторон треугольника. Докажите, что $a > |b - c|$.

1. Точка D расположена внутри треугольника ABC. Докажите, что $|AB| + |BC| > |AD| + |DC|$.

2. Внутри квадрата $ABCD$ найдите все такие точки X, что $AX + CX = BX + DX$.

3. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, а m_b — длина его медианы, опущеной на сторону b. Докажите, что а) $m_b < \frac{a+c}{2}$; б) $m_b > \frac{a-b+c}{2}$.

4. На круглом столе лежат 2010 правильно идущих механических часов. Докажите, что в какой-то момент времени сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок будет больше, чем сумма расстояний от центра стола до центров часов.

5. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугоьник.

6. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC берется точка M, отличная от C. Докажите, что сумма ее расстояний до вершин A и B больше, чем сумма расстояний от точки C до этих же вершин.

7. Точку M, лежащую внутри угла отразили симметрично относительно сторон этого угла. В результате этого получились точки M_1 и M_2. Докажите, что внутри угла содержится менее половины отрезка M_1M_2.

Делимость-1. 05.07.2010

1. Найдите последнюю цифру числа а) 2009^{2010}; б) 16^{2010}.

2. а) На сколько нулей оканчивается число 2010! ? б) Какова четность его последней ненулевой цифры? в) Найдите эту цифру.

3. Докажите, что в вершинах любого многогранника можно расставить натуральные числа так, чтобы числа в вершинах, связанных ребром, имели общий делитель больше 1, а в вершинах, не связанных, ребром — не имели.

4. Пусть a — сумма цифр числа 4444^{4444}, а b — сумма цифр числа a. Найдите сумму цифр числа b.

5. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 + b \,\vdots\, b^2 + a$ и $a + b > 2$. Докажите, что $b^2 + a$ — составное число.

6. Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету не отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что число монет без одной делится на число разбойников в шайке.

Разнобой-1. 05.07.2010

1. В комнате было несколько человек. Один сказал: “Нас тут пятеро”, и ушел. После этого каждую минуту кто-то уходил, сказав на прощание: “Все, кто ушел до меня, перед уходом солгали”, пока комната не опустела. Сколько человек, уходя, сказали правду (укажите все возможные ответы)?

2. Имеются три автомата. На вход им подается карточка (a, b). Первый печатает карточку (b, a). Второй — $(a, a+b)$. Третий, при $a > b$, печатает $(a-b, b)$. Возможно ли при помощи этих автоматов получить из карточки $(1, 1)$ карточку $(1000, 2000)$?

3. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E такая, что $\angle EAD = \angle EDA = 15°$. Докажите, что $\angle BEC = 60°$.

4. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 5 разных видов, причем количество ключей разных видов различно. Все 40 ключей оказались заперты в комнатах, так, что в каждой комнате заперт один ключ, которым эту комнату открыть нельзя. Сторож Сергеев имеет дубликат ключа от одной из комнат. Докажите, что он может открыть все комнаты.

5. Могут ли сумма, разность (положительная), произведение и частное двух натуральных чисел при сложении дать 2010?

6. Натуральные числа k и n больше 1. В группе из kn человек каждый знаком более, чем с $(k-1)n$ из остальных. Докажите, что можно выбрать $k+1$ человека так, что все они знакомы друг с другом.

7. Двое по очереди отмечают по одной вершине правильного а) 54-угольника; б) 108-угольника, причем дважды отмечать одну вершину нельзя. Проигрывает тот, после хода которого впервые окажутся отмеченными все вершины какого-либо правильного многоугольника. Кто выиграет при правильной игре?

Индукция. 06.07.2010

Пусть требуется доказать некоторое утверждение для любого натурального n. Метод *математической индукции* заключается в следующих двух шагах:

1. **(база индукции)** Проверка утверждения для $n = 1$.
2. **(индукционный переход)** Доказательство того, что из справедливости утверждения для n следует его справедливость для $n+1$.

1. На плоскости нарисован многоугольник, у которого наружу растут волосы. Внутри многоугольника проведено несколько диагоналей, на каждой из которых в одну из сторон растут волосы. Диагонали делят многоугольник на несколько частей. Докажите, что есть часть, внутри которой нет волос.

2. В стране дураков имеют хождение монеты достоинством $1, 2, 4, \ldots, 2^n$ тугриков. Докажите, что, имея по одной монете каждого достоинства, можно уплатить любую сумму, не превышающую $2^{n+1}-1$ тугриков.

3. а) Докажите, что $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. б) Докажите, что $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4. а) При $n>2$ докажите неравенство $2^n>2n+1$.

б) **(Неравенство Бернулли.)** При $n>1$, $\alpha>-1$ докажите неравенство $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$.

5. Известно, что $x+\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$. Докажите, что $x^n+\frac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}$ для любого натурального n.

6. а) На сколько частей разбивают плоскость n прямых общего положения? (Никакие две из них не параллельны, никакие три из них не проходят через одну точку.)

б) На сколько частей разбивают пространство n плоскостей общего положения? (Никакие две из них не параллельны, никакие три не проходят через одну прямую, и никакие четыре — одну точку.)

7. Плоскость разбита на части несколькими а) прямыми; б) окружностями. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета правильным образом (т.е. так, чтобы никакие две области одного цвета не имели общей границы).

Геометрия-2. Равенство треугольников. 06.07.2010

1. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен правильный треугольник CDN, вершина N которого лежит вне квадрата, а на диагонали AC — правильный треугольник ACM, внутри которого лежит точка D. Докажите, что MN равно стороне квадрата.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD равны, а серединный перпендикуляр к стороне BC проходит через середину стороны AD. Докажите, что $AB=CD$.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B=\angle C=120^\circ$, а $BC+CD=AB$. Докажите, что $AC=AD$.

4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Докажите, что либо эти треугольники равны, либо $\angle C + \angle C_1 = 180°$.

5. Пусть BB_1 — биссектриса неравнобедренного треугольника ABC с углом $\angle B = 48°$. Из точки O, лежащей на луче BB_1, опустили перпендикуляр OH на сторону AC. Оказалось, что $AH = HC$. Найдите угол $\angle OAC$.

6. Дана трапеция $ABCD$ такая, что $AD \parallel BC$, $AB = BC$, $AC = CD$ и $AD = BC + CD$. Найдите ее углы.

7. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена точка D. Известно, что $\angle DAC = 30°$, $\angle DCA = 10°$ и $\angle ABC = 80°$. Найдите $\angle BDC$.

Разнобой-2. 06.07.2010

1. Точка M взята на стороне AC равностороннего треугольника ABC, а на продолжении стороны BC за вершину C отмечена точка N так, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

2. Решите в натуральных числах уравнение $a(a + 1) = b(b + 2)$.

3. Даны полоска 1×1000 и n фишек. Два игрока ходят по очереди. Первый своим ходом может взять не более 17 фишек (как из кучи, так и с клеток полоски) и поставить их на любые свободные клетки. Второй своим ходом может снять любое количество стоящих подряд фишек, и положить их обратно в кучу. Первый игрок выигрывает, если поставит все n фишек в ряд без пробелов. Докажите, что если а) $n \leq 89$; б) $n \leq 98$, то первый игрок сможет выиграть. Докажите, что если в) $n > 324$; г) $n > 305$; д) $n > 98$, то второй игрок может помешать первому выиграть.

4. Докажите, что среди билетов с номерами от 000000 до 999999 количество счастливых не превосходит $1/11$ от общего количества билетов.

5. Из девяти монет одна фальшивая и весит меньше других. В нашем распоряжении имеются двое весов, однако, одни из них (неизвестно какие именно) недостаточно точны и не могут обнаружить разницу между фальшивой и настоящей монетами. Как за три взвешивания найти фальшивую?

6. Имеется n дискеток и n этикеток, раскрашенные в несколько цветов. Дубль — это дискета, к которой приклеена этикетка того же цвета. Докажите, что можно добиться того, что все дубли будут одного цвета.

(Вполне возможно, что, например, количество черных дискеток отличается от количества черных этикеток.)

Графы. 07.07.2010

1. Можно ли все ребра и диагонали правильного 55-угольника раскрасить в 54 цвета так, чтобы ребра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

2. В государстве 2010 городов. Из столицы выходит 239 дорог, из города Тьмутараканьска — одна дорога, а из всех остальных городов — по 20 дорог. Докажите, что из из столицы можно проехать в Тьмутараканьск.

3. а) Докажите, что среди любых 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Докажите, что среди любых б) 10; в) 9 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых.

4. Назовем человека *малообщительным*, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека *чудаком*, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что малообщительных людей не меньше, чем чудаков.

5. В стране любые два города соединены либо шоссе, либо железной дорогой. а) Докажите, что найдется такой вид транспорта, которым можно из любого города добраться до любого другого. б) Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, что от любого города до любого другого можно добраться сделав не более двух пересадок.

6. В графе с $2n$ вершинами n^2+1 ребер. Докажите, что в нем есть треугольник (то есть цикл из трех ребер).

7. На планете 10000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 200 дорог. Докажите, что на планете меньше 100 столиц.

Геометрические неравенства. 07.07.2010

Теорема о внешнем угле. Внешний угол треугольника больше любого из несмежных с ним внутренних углов.

Замечание. На самом деле, внешний угол треугольника равен сумме несмежных с ним внутренних углов. Однако для его доказательства требуется аксиома о параллельных, а предыдущую теорему можно доказать не используя данную аксиому.

В частности, в задачах 1, 2 не разрешается пользоваться фактом про сумму углов треугольника и другими следствиями аксиомы о параллельных.

1. а) Докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол. б) Докажите, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. в) В треугольнике два угла равны. Докажите, что он равнобедренный.

2. а) Докажите, что перпендикуляр короче наклонной. б) Докажите, что из двух наклонных короче та, которая ближе к перпендикуляру.

3. (Неравенство треугольника.) Докажите, что в треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей стороны.

4. а) На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что отрезок AD меньше как минимум одной из сторон AB или AC.

б) Докажите, что максимальный отрезок содержащийся в треугольнике есть его наибольшая сторона.

5. Точка D — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Установите, какой из отрезков BF или BE длиннее.

6. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$, сторона которого равна 1, отмечены точки K, L, M и N соответственно. Докажите, что периметр четырехугольника $KLMN$ а) больше двух; б) не меньше, чем $2\sqrt{2}$.

7. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно таким образом, что $\angle BED = 20°$, $\angle ACB = 40°$. Докажите, что $AC + EC > AD$.

Биномиальные коэффициенты. Бином Ньютона. 09.07.2010

1. В лагерь на k дней поехало n детей. Каждый день кто-то из них должен убирать класс. а) Сколькими способами можно составить график уборки класса? б) Сколькими способами можно составить справедливый (никто не убирает дважды) график уборки класса?

в) Найдите количество способов выбрать k дежурных в классе из n учеников. (Это количество обозначается через C_n^k.)

2. Докажите, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ а) подсчетом; б) не используя формулу для C_n^k.

3. Докажите, что $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ а) подсчетом; б) не используя формулу для C_n^k.

4. (**Бином Ньютона**) Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

а) при помощи метода математической индукции; б) комбинаторным путем.

5. Найдите сумму $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ а) алгебраически; б) комбинаторно.

6. Найдите сумму $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n$ а) алгебраически; б) комбинаторно.

7. Найдите сумму $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+k}^k$.

Площади. 09.07.2010

Определение. Каждой фигуре M на плоскости ставится в соответствие число S_M, называемое *площадью*, такое, что выполнены следующие свойства:

1) $S_M \geq 0$;

2) Площади равных фигур равны;

3) Если фигура M состоит из фигур A и B, не имеющих общих внутренних точек, то $S_M = S_A + S_B$;

4) Площадь прямоугольника $a \times b$ равна ab.

1. а) Докажите, что площадь треугольника равна произведению произвольной стороны на половину опущенной на нее высоты. б) Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту. в) Докажите, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

2. а) Точка B_1 лежит на луче OB угла AOB. Докажите, что

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOB_1}} = \frac{OB}{OB_1}.$$

б) Докажите, что площади треугольников с равным углом относятся как произведения сторон, заключающих этот угол. Т.е. если $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$, то

$$\frac{S_{A_1O_1B_1}}{S_{A_2O_2B_2}} = \frac{O_1A_1 \cdot O_1B_1}{O_2A_2 \cdot O_2B_2}.$$

в) Докажите, то же утверждение для треугольников с углами, дополняющими друг друга до $180°$. Т.е. если $\angle A_1O_1B_1 + \angle A_2O_2B_2 = 180°$, то

$$\frac{S_{A_1O_1B_1}}{S_{A_2O_2B_2}} = \frac{O_1A_1 \cdot O_1B_1}{O_2A_2 \cdot O_2B_2}.$$

3. Про треугольник известно, что все его высоты не превосходят 1. Какую наибольшую площадь он может иметь?

4. а) Докажите, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные заключающим ее сторонам (т. е. если AD — биссектриса $\triangle ABC$ и точка D лежит на прямой BC, то $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$). б) Докажите то же утверждение для биссектрисы внешнего угла (т. е. если AF — биссектриса внешнего угла треугольника ABC и точка F лежит на прямой BC, то $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$).

5. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике одна из средних линий делит его площадь пополам, то этот четырех угольник — трапеция или параллелограмм.

6. Точку M, лежащую внутри треугольника, соединили со всеми его вершинами. Оказалось, что площади образовавшихся треугольников равны. Докажите, что M — точка пересечения медиан.

7. Точку K, лежащую внутри правильного шестиугольника, соединили со всеми его вершинами. Докажите, что суммы площадей образовавшихся треугольников, взятых через один, равны.

Графы-2. 10.07.2010

Определение. *Деревом* называется связный граф, не содержащий простых циклов. Вершина графа называется *висячей*, если ее степень равна 1.

1. Докажите, что количество висячих вершин в дереве не меньше, чем максимальная из степеней его вершин.

2. Докажите, что в дереве с n вершинами содержится ровно $n - 1$ ребро.

3. Докажите, что а) из любого связного графа можно выделить дерево, содержащее все его вершины (*остовное дерево*); б) в связном графе с n вершинами содержится как минимум $n-1$ ребро.

в) Докажите, что в любом связном графе есть вершина, при удалении которой граф остается связным.

4. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в два цвета правильным образом тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных циклов.

5. а) Докажите, что в связном графе существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз (*Эйлеров цикл*), тогда и только тогда, когда степени всех вершин данного графа четны; б) докажите, что в связном графе существует путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз (*Эйлеров путь*), тогда и только тогда, когда в данном графе есть не более двух вершин нечетной степени.

6. В однокруговом турнире по волейболу участвовало n команд. Докажите, что их можно занумеровать числами от 1 до n так, что первая команда выиграла у второй, вторая у третьей, $\ldots$, $(n-1)$-я у n-й.

Теория чисел-2. Алгоритм Евклида и прочее. 11.07.2010

1. Найдите $(\underbrace{11\ldots1}_{m}, \underbrace{11\ldots1}_{n})$.

2. Найдите а) $(2^m-1, 2^n-1)$; б) $(2^{2^m}+1, 2^{2^n}+1)$.

в) При помощи пункта б) докажите, что простых чисел бесконечно много.

3. У фальшивомонетчика Пети имеется неограниченный запас 1993-рублевых купюр. Жетон метро стоит n рублей, где $n < 1993$, а в кассе есть всего 1 рубль сдачи. Докажите, что не смотря на это Петя сможет куить несколько (менее 1993) жетонов в данной кассе.

4. Обозначим через $n?$ (“n вопросиал”) произведение всех простых чисел, меньших n (для натуральных $n \geq 3$). Найдите все натуральные n такие, что $n? \leq n$.

5. Докажите, что простых чисел вида $4k+3$ бесконечно много.

6. Докажите, что найдутся 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 7 простых.

Разнобой-3. 11.07.2010

1. Посылку (куб) зашили на почте в мешковину (в форме куба). Играют двое (получившие посылку). За один ход разрешается сделать разрез вдоль любого ребра куба (по которому еще не делался разрез). Проигрывает тот, после хода которого мешковина распадается на две части. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Имеются три автомата. На вход им подается карточка (a, b). Первый печатает карточку (b, a). Второй — $(a, a + b)$. Третий, при $a > b$, печатает $(a - b, b)$. Возможно ли при помощи этих автоматов получить из карточки $(1, 1)$ карточку $(1001, 2015)$?

3. Какие из перечисленных ниже признаков равенства двух треугольников являются верными? (перечисляются соответственно равные элементы, обозначения стандартные): а) a, β, $b+c$; б) a, β, $b-c$; в) S, h_a; г) a, b, h_a.

4. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = 7(z^2 + t^2)$.

5. В строчку выписаны n натуральных чисел. Разрешается взять любые два числа a и b такие, что a стоит левее b и $b \not\vdots\, a$, и заменить a на (a, b), а b, — на $[a, b]$. Докажите, что а) такие операции не могут продолжаться бесконечно долго; б) при любой последовательности операций в конце будет получаться одна и та же последовательность чисел.

6. а) **(Лемма о диагонали)** Докажите, что у любого многоугольника есть диагональ, целиком лежащая внутри него. б) Найдите сумму внутренних углов и сумму внешних углов произвольного n-угольника.

Площади-2. 12.07.2010

1. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники AMB_1, CMB_1, CMA_1, BMA_1, BMC_1, AMC_1 равновелики (т.е. имеют одинаковую площадь).

2. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{ABO} = S_{CDO} \Leftrightarrow AD \parallel BC$.

3. Две параллельные прямые высекают на сторонах угла с вершиной O отрезки A_1A_2 и B_1B_2. Докажите, что треугольники OA_1B_2 и OA_2B_1 равновелики.

Внутренний матбой. 12.07.2010

1. Существуют ли 16 прямоугольников с целыми сторонами, из которых можно сложить любой прямоугольник с целыми сторонами, не превосходящими 15?

2. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка E, такая, что $AB = AE$. Прямая AE пересекает сторону BC в точке K, а прямая BE сторону CD в точке L. Докажите, что $BK > 2CL$.

3. Из точки на гипотенузе прямоугольного треугольника в направлении, перпендикулярном гипотенузе, вылетает бильярдный шарик. Он отражается сначала от одного, а потом от другого из катетов по принципу “угол падения равен углу отражения”, после чего снова попадает на гипотенузу. Докажите, что расстояние, которое при этом пролетел шарик, не зависит от точки, из которой он вылетел.

4. Дана куча из n спичек. Два игрока играют в следующую игру: каждый из них своим ходом может взять из кучи 4^k спичек, где $k \geq 0$. Проигрывает не имеющий хода. При каких n игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе победу независимо от игры второго.

5. Пусть числа $p \in \mathbb{P}$ и $a, n \in \mathbb{N}$ таковы, что $2^p + 3^p = a^n$. Докажите, что $n = 1$.

6. Найдите все вещественные решения системы уравнений: $a_1 + a_2 = a_3$, $a_2 + a_3 = a_4$, ..., $a_{n-1} + a_n = a_1$, $a_n + a_1 = a_2$, и докажите, что других нет.

7. Дан полный граф на 2010 вершинах. Каждую минуту в нем выбирают цикл длины 4 и удаляют одно из ребер этого цикла. Какое наименьшее число ребер может остаться в графе в результате таких операций?

8. В городе $n > 2$ улиц идут с запада на восток и n улиц идут с севера на юг. Всего n^2 перекрестков. Каким наименьшим количеством автобусных маршрутов можно обойтись, чтобы от любого перекрестка до любого другого можно было бы доехать (возможно, с пересадками), а каждый маршрут шел по границе некоторого прямоугольника?

9. Докажите, что для любых натуральных чисел n и k (где $n > k$) существует натуральное число, которое при делении на числа 1, 2, ..., n дает ровно k различных остатков.

10. На острове Рыцарей и Лжецов стоит замок. В третьей по величине комнате (после тронного зала и подвала) стоит круглый стол. За этим столом сидят 16 аборигенов разного возраста и звания. На вопрос: “Не считая вас и двух ваших соседей, кто все остальные?”, каждый сидящий ответил: "Все они лжецы". Сколько лжецов сидит за столом?

Графы-3. Пути и циклы. 14.07.2010

По мотивам проблем, выявленных на предыдущем занятии по графам...

Определение 1. *Маршрутом* (или *путем*) в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$, такая, что при $1 \leq i \leq k$ вершины v_{i-1} и v_i являются концами ребра e_i.

Вершина v_0 называется *началом*, а вершина v_k — *концом* маршрута $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$. Остальные вершины, входящие в данный маршрут, называются *внутренними*.

Длиной маршрута называется количество содержащихся в нем ребер (при этом каждое ребро считается столько раз, сколько оно встречается в данном маршруте).

Маршрут $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ однозначно задается последовательностью вершин $v_0, v_1, \ldots, v_k$, в которой любые две соседние вершины *смежны* (то есть соединены ребром).

Определение 2. Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны, и *простой цепью* (или *простым путем*), если все его вершины различны.

Замкнутая цепь (то есть цепь, начало которой совпадает с концом) называется *циклом*. Цикл называется *простым*, если все его вершины различны (при этом, начало и конец соответствующей цепи считаются за одну вершину).

1. а) Докажите, что если в графе есть путь из вершины u в вершину v, то есть и простой путь из u в v. б) Докажите, что если в графе есть цикл, то в нем есть и простой цикл. в) Докажите, что если в графе есть нечетный цикл, то в нем есть и нечетный простой цикл.

2. Докажите, что граф является деревом тогда и только тогда, когда любые две его вершины соединены единственным простым путем.

3. Степени всех вершин графа не меньше d. Докажите, что в нем есть простой цикл длины не менее $d + 1$.

4. В графе между любыми двумя вершинами существует простой путь четной длины. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует простой путь нечетной длины.

Определение 3. *Расстоянием* между вершинами u и v графа G называется величина $d(u, v)$, равная длинне кратчайшего пути между u и v.

Определение 4. *Диаметром* $d(G)$ графа G называется наибольшее расстояние между его вершинами.

Эксцентриситетом $e(v)$ вершины v называется наибольшее из расстояний между вершиной v и другими вершинами графа G.

Радиусом $r(G)$ графа G называется наименьший из эксцентриситетов его вершин.

5. а) Докажите, что $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$.

б) Докажите, что в связном графе любые два простых пути максимальной длины имеют общую вершину.

Определение 5. *Центром* графа называется вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа (то есть найдется вершина, расстояние от которой до данной равно радиусу).

6. Докажите, что у дерева может быть не более двух центров.

Малая теорема Ферма и теорема Вильсона. 15.07.2010

1. а) Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$ и $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p+b^p \pmod p$. б) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

2. Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{P}$ и $a \not\vdots P$. Рассмотрим следующий граф: вершины графа — числа от 1 до $p-1$; из числа x ведет ориентированное ребро в число y, если $ax \equiv y \pmod p$.

а) Докажите, что этот граф является объединением нескольких циклов одинаковой длины.

б) Выведите из этого малую теорему Ферма.

3. а) Барабан Поля чудес разбит на p одинаковых секторов (где $p \in \mathbb{P}$). Сколькими способами можно раскрасить эти сектора в n цветов? Барабан может вращаться, поэтому раскраски, получающиеся друг из друга поворотом барабана, считаются одинаковыми. б) Выведете из пункта а) малую теорему Ферма.

4. Простое число p больше пяти. Докажите, что число из $p-1$ единицы делится на p.

Определение. Вычет b называется *обратным* к вычету a, если $ab \equiv 1 \pmod m$.

5. Пусть p — простое число. а) Докажите, что для любого a от 1 до $p-1$, существует ровно один обратный вычет. б) Докажите, что если $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, то $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$. в) **(Теорема Вильсона.)** Докажите, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. г) Докажите, что если для $m > 1$ имеет место сравнение $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$, то m — простое.

6. а) Пусть p — простое число вида $4k+3$. Докажите, что для любого целого n число n^2+1 не делится на p.

б) Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.

7. Докажите, что существует бесконечно много таких пар различных натуральных чисел $k, n > 1$, что а) $(k!+1, n!+1) > 1$; б) $(k!-1, n!-1) > 1$.

Теорема Фалеса. 15.07.2010

1. (**Теорема Фалеса**) На одной из сторон угла с вершиной O отмечены точки A_1, B_1, C_1 а на другой — точки A_2, B_2, C_2 такие, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$. Докажите, что а) если $A_1B_1 = B_1C_1$, то $A_2B_2 = B_2C_2$; б) если $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$, то $\frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \frac{m}{n}$; в) $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$, не зависимо от того, рационально ли отношение $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

Указание к задаче 1в: воспользуйтесь свойствами отношений площадей.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки B_1 и C_1 соответственно, такие, что $B_1C_1 \parallel BC$. Докажите, что $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$.

3. На одной из сторон угла с вершиной O отмечены точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ а на другой — точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ такие, что $\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$. Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel \ldots \parallel A_nB_n$.

4. а) При помощи циркуля и линейки разбейте данный отрезок на n равных частей. б) При помощи циркуля и линейки постройте треугольник ABC, если известны длины его сторон AB и BC, а также длина отрезка AL, где L — основание биссектрисы угла B.

5. Из точки на стороне AB треугольника ABC выползает жучок Кирюша. Сначала он ползет по прямой, параллельной AC, пока не достигнет стороны BC. Потом по прямой, параллельной AB, пока не достигнет AC. Потом по прямой, параллельной BC, пока не достигнет AB. И т. д. до тех пор, пока он не вернется в исходную точку. Докажите, что такой момент рано или поздно наступит.

6. Прямая ℓ пересекает стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ в точках E и F соответственно, а диагональ AC — в точке G. Докажите, что $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=\frac{AC}{AG}$.

Раскраски графов. 16.07.2010

1. Степени всех вершин графа не превосходят d. Докажите, что а) его вершины можно правильным образом раскрасить в $d+1$ цвет; б) его вершины можно правильным образом раскрасить в d^2+1 цвет так, чтобы одноцветные вершины не имели общих соседей.

2. Степени всех вершин связного графа не превосходят d. При этом степень как минимум одной его вершины меньше d. Докажите, что вершины этого графа можно правильным образом раскрасить в d цветов.

3. В ориентированном графе из каждой вершины выходит не более d исходящих ребер. Докажите, что его вершины можно раскрасить в $2d+1$ цвет правильным образом.

4. На вечеринку пришло а) 13; б) 14 гостей, причем среди любых трех из них есть двое знакомых. Докажите, что гости могут разбиться на 4 группы, в каждой из которых все попарно знакомы.

5. В парламенте у каждого депутата есть не более трех врагов. Докажите, что депутаты могут разделиться на две фракции так, чтобы у каждого депутата в его фракции было не более одного врага.

6. В связном графе 1000 вершин, причем степень каждой из них не более 9. Докажите, что из него можно выбрать 222 вершины так, чтобы не было нечетного цикла, проходящего только по выбранным вершинам.

Подобие. 16.07.2010

Определение. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *подобными*, если $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$. Число $k=\frac{AB}{A_1B_1}$ называтся *коэффициентом подобия.*

Признаки подобия. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если выполнено одно из следующих условий.

1. $\angle A=\angle A_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$.
2. $\angle A=\angle A_1$ и $\angle B=\angle B_1$.
3. $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$.

Утверждение. *Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом k (т. е. $\frac{AB}{A_1B_1} = k$). Тогда $\frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = k^2$.*

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$.

2. На стороны BC и CD параллелограмма $ABCD$ (или на их продолжения) опущены перпендикуляры AM и AN. Докажите, что треугольник MAN подобен треугольнику ABC.

3. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.

4. а) Докажите, что середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

б) Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ из 4 точек: середин сторон AB и CD, точки пересечения диагоналей, а также продолжений сторон BC и AD какие-то 3 лежат на одной прямой, то AB параллельна CD.

5. Диагонали трапеции с основаниями a и b пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, параллельная основаниям трапеции и пересекающая ее боковые стороны в точках X и Y. Найдите длину отрезка XY.

6. На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC взяты точки D, E и F соответственно такие, что $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Докажите, что $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{AED} \cdot S_{EFC}}$.

7. Дан треугольник ABC такой, что $\angle A = 2\angle B$. Докажите, что $a^2 = b^2 + bc$.

Разнобой-4. 17.07.2010

1. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ — составное.

2. (**Формула Пика.**) Рассмотрим многоугольник с вершинами в узлах клетчатого листа (площадь клетки равна 1). Пусть на границе многоугольника находится g узлов клетчатой сетки, а внутри — v узлов. Тогда площадь этого многоугольника равняется $v + \frac{g}{2} - 1$.

Докажите формулу Пика а) для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям клетчатой сетки; б) для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки; в) для произвольного треугольника; г) для произвольного многоугольника.

3. Дан квадрат $ABCD$ и произвольная точка O. Докажите, что $OA < OB + OC + OD$.

4. На трёх полках стоит в беспорядке многотомная энциклопедия "Всё о насекомых". Самым левым на верхней полке стоит том "Комары". Каждое утро библиотекарь меняет местами два тома с соседними номерами, стоящие на разных полках. В один прекрасный день все тома вернулись на свои полки. Докажите, что "Комары" по-прежнему стоят слева на верхней полке.

5. В группе людей некоторые знакомы. Если выбрать нескольких из них так, что каждый из оставшихся знаком хотя бы с одним из выбранных, то окажется, что выбрано не менее 10 человек. Докажите, что из этой группы можно выбрать 10 попарно незнакомых людей.

Матбой ПРОФИ–7 — ПРОФИ–8. 17.07.2010

1. Пусть ℓ — биссектриса внешнего угла C треугольника ABC. Прямая, параллельная ℓ и проходящая через середину K стороны AB, пересекает сторону AC в точке E. Найти CE, если $AC = b$ и $CB = a$.

2. В связном графе 2010 вершин и 3014 ребер. Докажите, что из него можно удалить два ребра, имеющих общую вершину, так, чтобы связность сохранилась.

3. Натуральные числа a и b таковы, что число $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что $(a, b) \leq \sqrt{a+b}$.

4. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$. Докажите, что число $a + b + c + d$ — составное.

5. Натуральное число называется *палиндромом*, если его запись читается одинаково слева направо и справа налево (например, 1043401). Все палиндромы выписали в ряд в порядке возрастания. Найдите все простые числа, которые могут быть делителями разности двух соседних чисел этого ряда.

6. В клетках прямоугольника 5×9 лежат 33 шишки. За ход можно одновременно сдвинуть все шишки на соседние по стороне клетки. При этом запрещается ставить две шишки на одну клетку (в том числе и в начале). Кроме того, если шишка ходила по горизонтали, то в следующий ход она должна ходить по вертикали, и наоборот. Докажите, что нельзя сделать подряд 100 ходов.

7. В ряд стоят 14 гномов, у каждого не менее 5 орехов. Каждую минуту один из гномов может передать орех гному, стоящему справа, если у того больше орехов. Через некоторое время все орехи собрались у одного гнома. Какое наименьшее число орехов могло быть у гномов?

8. По кругу стоят числа от 1 до 30. Вася каждую минуту меняет местами два соседних числа. Через некоторое время все числа оказались на диаметрально противоположных местах. Докажите, что в какой-то момент Вася поменял местами два числа, дающих в сумме 31.

9. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. На стороне AB выбраны такие точки K и L, что $AK = BL$, а отрезки KM и LN пересекаются и равны. Докажите, что $AC = BC$.

10. Про вещественные числа a, b и c известно, что сумма дробей $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ и $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ равна единице. Докажите, что из трех данных дробей две равны 1, а одна равна -1.

Матбой ГАЛ-6-1 — профи-7-1. 17.07.2010

1. В клетках прямоугольника 5×9 стоят 33 фишки. Ход состоит в том, что все фишки одновременно сдвигаются так, чтобы каждая фишка оказалась на клетке, соседней с исходной. При этом запрещается ставить две фишки на одну клетку (в том числе и в начальной позиции). Кроме того, если какая-то фишка передвинулась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвигаться по вертикали, и наоборот. Докажите, что по этим правилам невозможно сделать подряд 100 ходов.

2. Делится ли на 5 количество упорядоченных пятерок натуральных чисел $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{1}{67}$?

3. По кругу стоят числа от 1 до 30. Вася каждую минуту меняет местами два соседних числа. Через некоторое время все числа оказались на диаметрально противоположных местах. Докажите, что в какой-то момент Вася поменял местами два числа, дающих в сумме 31.

4. Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел, не превосходящих n. Докажите, что $\pi(2n) - \pi(n) \geq \pi(n! + 2n) - \pi(n! + n)$.

5. В однокруговом футбольном турнире участвуют n команд (любые две команды сыграли ровно один матч между собой). При каких n турнир мог закончиться так, что у каждой команды количество ничьих равно количеству поражений?

6. Разрежьте правильный треугольник на следующие выпуклые многоугольники: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник.

7. По дороге шла толпа людей. Более трети из них повернули направо, более 30% — налево, а все остальные, которых оказалось более 4/11, — развернулись и пошли обратно. Докажите, что в толпе было не менее 173 человек.

8. В акционерном обществе “Елки-палки” 1994 акционера. Любые 1000 из них вместе обладают не менее, чем 50% акций общества. Какую наибольшую долю акций может иметь один акционер?

Матбой ГАЛ-6-2 — профи-7-2 . 17.07.2010

1. В клетках прямоугольника 5×9 стоят 33 фишки. Ход состоит в том, что все фишки одновременно сдвигаются так, чтобы каждая фишка оказалась на клетке, соседней с исходной. При этом запрещается ставить две фишки на одну клетку (в том числе и в начальной позиции). Кроме того, если какая-то фишка передвинулась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвигаться по вертикали, и наоборот. Докажите, что по этим правилам невозможно сделать подряд 100 ходов.

2. Делится ли на 5 количество упорядоченных пятерок натуральных чисел $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{1}{67}$?

3. Найдите все натуральные числа $100 < m < 200$, для которых существует натуральное n такое, что mn — квадрат целого числа, а $m - n$ — простое число.

4. Каждый из 38 попугаев завязал на удаве по одному узлу. Если сложить удава вдвое или втрое, то каждый узел попадет ровно на один другой. Докажите, что если удава сложить вшестеро, то какой-то узел попадет на сгиб.

5. В однокруговом футбольном турнире участвуют n команд (любые две команды сыграли ровно один матч между собой). При каких n турнир мог закончиться так, что у каждой команды количество ничьих равно количеству поражений?

6. При каком наименьшем k полоску клетчатой бумаги шириной 2 и длиной k клеточек можно без остатка разрезать на 7 клетчатых прямоугольников, среди которых нет одинаковых?

7. По дороге шла толпа людей. Более трети из них повернули направо, более 30% — налево, а все остальные, которых оказалось более 4/11, — развернулись и пошли обратно. Докажите, что в толпе было не менее 173 человек.

8. Суммарный возраст 33 одноклассников составляет 430 лет. Доказать, что из них можно выбрать 20 так, что их суммарный возраст составит более 260 лет.

Планарные графы. 19.07.2010

Определение. Граф называется *планарным*, если его можно без самопересечений изобразить на плоскости.

Изображение графа на плоскости без самопересечений называется *плоским* графом.

Картой называется связный плоский граф. Части, на которые карта разбивает плоскость, называются *гранями* (или *странами*).

1. (Формула Эйлера.) Докажите, что в карте с V вершинами, E ребрами и F странами $V - E + F = 2$ а) для карты, образованной деревом; б) для произвольной карты.

Эта формула верна, в том числе и для карты, содержащей петли и кратные ребра. Однако во всех последующих задачах мы будем рассматривать карты без петель и кратных ребер.

2. а) Дана карта с V вершинами, E ребрами и F странами, причем $V > 2$. Докажите, что $E \leq 3V - 6$. б) Пусть карта из предыдущего пункта является двудольным графом. Докажите, что тогда $E \leq 2V - 4$.

3. Докажите, что а) в любом планарном графе есть вершина степени не более, чем 5; б) в любой карте, степени всех вершин которой не меньше трех, есть страна ограниченная не более, чем 5 ребрами; в) в любой карте найдется либо вершина степени не более, чем 3, либо страна, ограниченная тремя ребрами.

4. а) Докажите, что на плоскости нельзя изобразить без самопересечений полный граф с 5 вершинами. б) На плоскости расположено три дома и три колодца. Можно ли их так соединить тропинками, чтобы от каждого домика вела тропинка к каждому колодцу, и тропинки не пересекались?

5. Докажите, что вершины любого планарного графа можно правильным образом раскрасить в 6 цветов.

6. Выпуклый многогранник составлен из пяти- и шестиугольников, причем в каждой вершине сходится ровно три грани. Сколько в нем может быть пятиугольных граней? Приведите пример такого многогранника.

7. Дана карта, степени всех вершин которой четны. Докажите, что ее страны можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две страны, имеющие общее ребро, были покрашены в разные цвета.

Геометрия. Окружности. 19.07.2010

Определение. Прямая называется *касательной* к окружности, если она имеет ровно одну точку пересечения с данной окружностью.

Утверждение. *1) Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, соединяющему центр с точкой касания.*

2) Отрезки касательных, проведенных к окружности из данной точки, равны.

Определение. Угол называется *вписанным* в окружность, если его вершина лежит на окружности и обе его стороны пересекают окружность в точках, отличных от вершины.

Определение. Величиной дуги окружности называется величина угла с вершиной в центре окружности и сторонами, проходящими через концы дуги. При этом всегда рассматривается угол, содержащий данную дугу, даже если он больше $180°$.

1. а) Докажите, что угол, вписанный в окружность, равен половине дуги, на которую он опирается. б) Вершина угла находится внутри круга. Докажите, что величина угла измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла. в) Пусть вершина угла находится вне круга и стороны угла пересекают окружность. Докажите, что величина угла измеряется полуразностью дуг, высекаемых его сторонами на окружности и расположенных внутри угла. г) Пусть AB — хорда окружности, ℓ — касательная к окружности (A — точка касания). Докажите, что каждый из двух углов между AB и ℓ измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри рассматриваемого угла.

2. Докажите, что для любого треугольника существует *описанная* окружность (т. е. окружность, проходящая через все его вершины), причем такая окружность единственна. В какой точке находится ее центр?

3. а) Докажите, что для любого треугольника существует *вписанная* окружность (т. е. окружность, касающаяся всех его сторон), причем такая окружность единственна. В какой точке находится ее центр? б) Докажите, что для любой стороны треугольника существует вневписанная окружность (т. е. окружность, касающаяся данной стороны треугольника и продолжений двух других сторон), причем такая окружность единственна. В какой точке находится ее центр?

4. Найдите геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом $\alpha < 180°$.

5. а) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $AB_1 = AC_1 = p - a$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника. б) Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_2. Докажите, что $BA_2 = p - c$ и $CA_2 = p - b$.

6. Докажите, что в треугольнике а) $S = pr$; б) $S = (p - a)r_a$. (Через r обозначается радиус вписанной окружности треугольника, а через r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a и продолжения двух других сторон.)

7. Из точки O, лежащей вне окружности ω, проведены секущая, пересекающая ω в точках A и B, а также касательная, касающаяся ω в точке C. Докажите, что $|OC|^2 = |OA| \cdot |OB|$.

Шары и перегородки. 20.07.2010

0. (*Упражнение, которое не нужно сдавать, но лучше сделать.*) Сколькими способами в книжку из 48 листов можно положить 5 закладок?

1. Сколькими способами можно разложить 48 яиц по 6 пронумерованным корзинам а) чтобы пустых корзин не осталось; б) корзины можно оставлять пустыми?

2. На складе есть много бананов, апельсинов, лимонов и папайя. Сколькими способами можно выбрать k фруктов?

3. Сколькими способами можно расположить в 9 лузах 7 белых и 2 черных шара? Часть луз может быть пустой, а лузы считаются различными.

4. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ а) в натуральных числах; б) в целых неотрицательных числах?

5. а) На полке стоят n книг. Сколькими способами можно выбрать с полки k книг так, чтобы никакие две выбранные книги не стояли рядом?

б) За круглым столом короля Артура сидят n рыцарей. Каждый из них враждует со своими соседями. Король хочет составить отряд из k рыцарей. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы в этом отряде не было врагов?

6. Сколько есть решений уравнения $x + y + z = 100$ в натуральных числах от 1 до 60?

Разнобой-5. 20.07.2010

1. Докажите, что при $n > 2 \quad \varphi(n) \,\vdots\, 2$.

2. Докажите, что *совершенное* число (т.е. число, равное сумме всех своих натуральных делителей, за исключением его самого) не может быть точным квадратом.

Определение. Ребро связного графа называется *мостом*, если при его удалении граф теряет связность. Вершина связного графа называется *точкой сочленения*, если при ее удалении граф теряет связность.

3. (Частный случай **теоремы Менгера**.) а) Несмежные вершины a и b графа G таковы, что для любой вершины c существует путь из a в b, не проходящий через c. Докажите, что между вершинами a и b есть два пути, не имеющие общих внутренних вершин.

б) В графе, имеющем хотя бы три вершины, нет точек сочленения. Докажите, что между любыми двумя вершинами данного графа существуют два пути, не имеющие общих внутренних вершин.

4. а) На клетчатом листе бумаги отмечены 5 узлов клетчатой сетки. Докажите, что середина одного из соединяющих их отрезков также является узлом клетчатой сетки.

б) Дан выпуклый пятиугольник с вершинами в узлах клетчатой сетки. Докажите, что внутри него есть хотя бы один узел.

5. Докажите, что для любого натурального n найдутся n последовательных натуральных чисел, не свободных от квадратов (то есть каждое из этих чисел делится на точный квадрат, больший единицы).

6. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Определение. Точка пересечения высот треугольника называется его *ортоцентром.*

7. Пусть BH — высота и O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\angle ABH = \angle CBO$.

Двусвязность и блоки. 21.07.2010

Определение 1. Ребро связного графа называется *мостом*, если при его удалении граф теряет связность. Вершина связного графа называется *точкой сочленения*, если при ее удалении граф теряет связность.

1. В графе, степени всех вершин которого равны 3 есть точка сочленения. Докажите, что в этом графе есть мост.

Определение 2. Связный граф называется *двусвязным*, если при удалении любой его вершины (и всех выходящих из нее ребер) получается связный граф.

2. а) Ребра e_1, e_2 и e_3 графа G таковы, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_2, и существует простой цикл, проходящий через e_2 и e_3. Докажите, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_3. б) Докажите, что в двусвязном графе любые два ребра лежат на общем простом цикле.

3. В двусвязном графе есть цикл нечетной длины. Докажите, что в этом графе есть простой цикл нечетной длины, проходящий через данную вершину v.

Определение 3. *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению двусвязный подграф графа G.

4. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков B_1 и B_2 либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

Определение 4. Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — все блоки связного графа G, а $a_1, \ldots, a_m$ — все точки сочленения графа G. Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, \ldots, B_n, a_1, \ldots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i является одной из вершин блока B_j.

5. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причем все его висячие вершины соответствуют блокам.

Определение 5. Связный граф G называется *кактусом*, если каждое ребро графа G принадлежит ровно одному простому циклу.

6. а) Докажите, что все блоки кактуса — простые циклы. б) Докажите, что если в графе без мостов все циклы нечетны, то это — кактус.

7. В стране 100 городов, соединенных друг с другом дорогами так, что даже если любой город А закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города А). Докажите, что страну можно разбить на два суверенных государства, по 50 городов в каждом, так, что в обоих государствах из любого города можно проехать в любой другой.

Окружности-2. 21.07.2010

Определение. Четырехугольник называется *вписанным*, если вокруг него можно описать окружность (т. е. существует окружность, проходящая через все его вершины). Четырехугольник называется *описанным*, если в него можно вписать окружность (т. е. существует окружность, касающаяся всех его сторон).

1. а) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $\angle A + \angle C = 180^\circ$. б) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.

2. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты и H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Докажите, что а) четырехугольник AB_1HC_1 вписанный; б) $\angle BAH = \angle HB_1C_1$; в) A_1A, B_1B, C_1C — биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.

3. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру а) остроугольного; б) произвольного треугольника относительно его стороны лежит на описнннной окружности.

в) Докажите, что точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно середины его стороны лежит на описанной окружности и диаметрально противоположна третьей вершине треугольника.

4. Каждая из двух паралельных прямых пересекает окружность в двух точках. Докажите, что дуги окружности, заключенные между этими прямыми, равны.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ окружности, вписанные в треугольники ABC и CDA, касаются. Докажите, что вписанные окружности треугольников ABD и DBC тоже касаются.

6. (Лемма Мансиона) Докажите, что середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащая вершину B, а) равноудалена от точек A, C и I (где I — центр вписанной окружности треугольника ABC); б) равноудалена от точек A, C, I и I_b (где I_b — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC).

7. Высоты A_1A и B_1B остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть R — радиус описанной окружности треугольника ABC, r_1 — радиус описанной окружности четырехугольника AB_1A_1B, и r_2 — радиус описанной окружности четырехугольника HA_1CB_1. Докажите, что $R^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Неравенства. 22.07.2010

1. а) Найдите среди всех прямоугольников с данной площадью прямоугольник с наменьшим периметром. б) Найдите среди всех прямоугольников с данным периметром прямоугольник наибольшей площади.

2. Что больше а) $1,01^{1000}$ или 10; б) $1,01^{1000}$ или 1000?

3. а) Докажите, что для положительных чисел a и b выполнены неравенства

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

При каких a и b в этих неравенствах достигается равенство?

б) Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнены неравенства

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \geq \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}.$$

При каких a, b, c, d в этих неравенствах достигается равенство?

4. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите неравенства а) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$; б) $ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$.

5. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство: $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$.

6. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d, e выполнено неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$.

7. Докажите, что если $a, b \in [3; 7]$, то $3a + 7b \geq ab + 21$.

Разнобой-6. 22.07.2010

1. Решите в вещественных числах уравнение $a^4 + b^2 = a^8 + b^{2010} = 1$.

2. У алхимика есть 25 пробирок объемом 1, 2, 3, ..., 25 мililитров соответственно. Он хочет выбрать из них 10 пробирок так, чтобы при помощи любых двух из них можно было отмерить 1 мililитр вещества (запас которого неограничен). Сколькими способами он может это сделать?

3. На доске написано несколько чисел. Каждую минуту Света выбирает два из них (x и y) и заменяет их на $x - 2$ и $y + 1$. Докажите, что рано или поздно на доске появится отрицательное число.

4. На плоскости отмечены n синих и n красных точек. Докажите, что их можно разбить на пары точек разного цвета и соединить пары отрезками так, чтобы отрезки не пересекались.

5. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2010. Каждую минуту два числа x, y можно заменить на число $xy + x + y$. Эти операции производятся до тех пор, пока на доске не останется ровно одно число. Чему оно может быть равно?

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Описанная окружность треугольника BCD пересекает сторону AB в точке E, а описанная окружность треугольника ABD пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что $AE = CF$.

Заключительная олимпиада. 24.07.2010

1. В классе учатся менее 50 человек. Если выгнать старшего ученика, то средний возраст оставшихся будет $13\frac{5}{7}$. Если выгнать младшего ученика, то средний возраст оставшихся будет $13\frac{3}{4}$ (возраст любого человека считается целым). Сколько человек может быть в классе?

2. Все девятизначные числа, десятичная запись которых содержит цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу, выписали в ряд в порядке возрастания. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее из них и стирают. Какие два числа будут стерты последними?

3. Петя и Вася по очереди закрашивают по две клетки на полоске 1×2010. Петя хочет, чтобы расстояния между двумя отмеченными им за один ход клетками не повторялись. Сможет ли Вася ему помешать? (Первым ходит Петя, игра заканчивается когда все клетки полоски закрашены).

4. На плоском ровном поле растут 4 дерева: А, Б, В и Г. По полю проходит прямая дорога. Землеустроитель установил на дороге 8 столбов и на каждом прикрепил табличку, на которой перечислены имена деревьев, причем первым указано ближайшее, вторым — второе по удаленности и т. д. Докажите, что найдутся два столба с одинаковыми табличками.

5. Квадратная страна 2000×2000 км разбита на прямоугольные области 100×200 км. Области объявили независимость, и каждая пара областей, имеющих общий участок границы, построила на двоих одну таможню. Какое наибольшее число таможен могло быть построено?

. . . .

Вывод

6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ точки K, L, M, N, O являются серединами сторон AB, BC, CD, DE и EA соответственно. Докажите, что длина замкнутой ломаной $KMOLNK$ меньше, чем длина ломаной $ACEBDA$.

7. В лагерь приехали 100 школьников. Известно, что любую группу из 6 школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что в каждой комнате все школьники знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть среди школьников?

8. Докажите, что существует множество из 1000 натуральных чисел такое, что для любых чисел a и b из этого множества a делится на $a - b$?