Заключительная олимпиада. 24 июля
Краткие решения

1. В классе учатся менее 50 человек. Если выгнать старшего ученика, то средний возраст оставшихся будет $13\frac{5}{7}$. Если выгнать младшего ученика, то средний возраст оставшихся будет $13\frac{3}{4}$ (возраст любого человека считается целым). Сколько человек может быть в классе?

Решение Пусть в классе $n+1$ учеников. Тогда из первого и второго условий следует, что $13\frac{3}{4}n = \frac{55}{4}n$ и $13\frac{5}{7}n = \frac{96}{7}n$–целые (эти числа – суммы возрастов n учеников с целыми возрастами). Значит, то n должно делится на 4 и на 7, а так как 4 и 7 взаимно просты, то n должно делиться и на $7 \cdot 4 = 28$. Из условия $0 \leq n \leq 50$, получаем, что $n = 28$ и в классе 29 человек.

Ответ:29.

2. Все 9 значные числа, десятичная запись которых содержит цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу, выписали в ряд в порядке возрастания. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее из них и стирают. Какие два числа будут стерты последними?

Решение Чисел, начинающихся на 1 и на 9, на 2 и на 8, на 3 и на 7, на 4 и на 6 поровну (каждого вида по 8!). Значит сначала сотрут все числа начинающиеся на 1 и 9, потом все числа начинающиеся на 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6 и останутся числа начинающееся на 5. Чисел начинающихся на 5 и со вторым разрядом 1 и 9, 2 и 8, 3 и 7, 4 и 6 поровну (по 7! каждого вида). Значит в итоге осталось число начинающееся на 54 и 56 причем первое наибольшее среди начинающихся на 54, а второе наименьшее среди начинающихся на 56.

Ответ:549876321 и 561234789.

3. Петя и Вася по очереди закрашивают по две клетки на полоске 1×2010. Петя хочет, чтобы расстояния между двумя отмеченными им за один ход клетками не повторялись. Сможет ли Вася ему помешать? (первым ходит Петя, игра заканчивается когда все клетки полоски закрашены)

Решение Пусть Петя каждым своим ходом будет отмечать самое большое из расстояний которое он может отметить (самую левую и самую правую из еще не отмеченных клеток). Через ход Васи максимальное расстояние которое может отметить Петя уменьшится, а значит все его отмеченные расстояния строго убывают, а следовательно различны.

Ответ: не сможет.

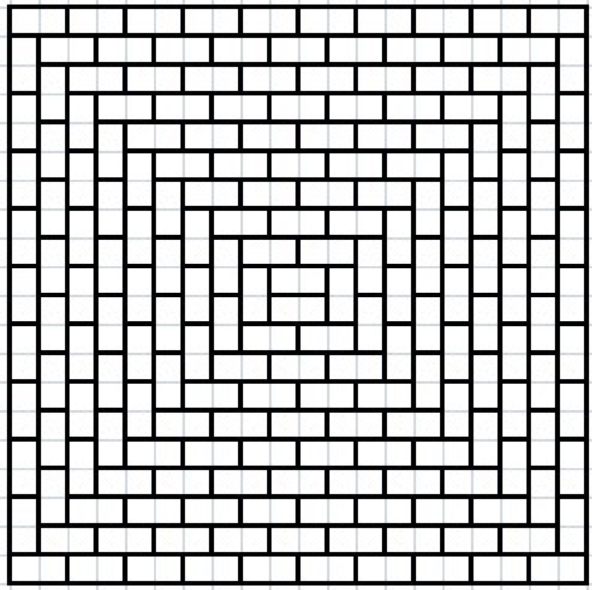
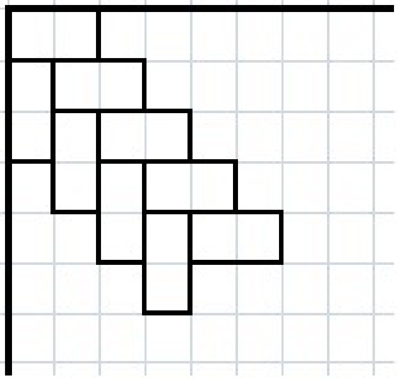
4. На плоском ровном поле растут 4 дерева: А, Б, В и Г. По полю проходит прямая дорога. Землеустроитель установил на дороге 8 столбов и на каждом прикрепил табличку, на которой перечислены имена деревьев, причем первым указано ближайшее, вторым - второе по удаленности и т.д. Докажите, что найдутся два столба с одинаковыми табличками.

Решение Для каждой пары деревьев рассмотрим их серединный перпендикуляр, всего получится 6 прямых. Каждая из них пересекает дорогу не более чем в одной точке, таким образом этими точками пересечения дорога разбивается на не более чем 7 участков (не более 5 отрезков и пара лучей). По принципу Дирихле какие-то 2 столба попадут в один участок. Покажем, что таблички на них совпадают. Действительно они одновременно лежат в одной полуплоскости относительно любого из рассматриваемых серединных перпендикуляров. Значит для любой пары деревьев ближайшим к столбам будет одно и то же из этих двух(так как рассматриваемые полуплоскости являются ГМТ, таких что до одного из деревьев ближе чем до другого). Тогда на первом месте в табличках написано одно и то же, аналогично на втором, третьем и четвертом тоже.

5. Квадратная страна 2000×2000 км разбита на прямоугольные области 100×200 км. Области объявили независимость, и каждая пара областей, имеющих общий участок границы, построила на двоих одну таможню. Какое наибольшее число таможен могло быть построено?

Решение Вместо данного объекта рассмотрим квадратик 20×20 с границей из единичных спичек разбитый на доминошки 1×2 спичками-перегородками. Число таможен равно количеству соседств между доминошками. Но количество соседств не превосходит числа спичек внутри. Если внутрь каждой доминошки добавить по спичке то он получится квадрат разбитый на единичные квадратики, в котором $2 \cdot (20 \cdot 19) = 760$ спичек. Число добавленных спичек равно числу доминошек, то есть оно равно $\frac{20 \cdot 20}{2} = 200$, значит, вначале было $760 - 200 = 560$ спичек. Значит всего не менее 560 таможен. Причем равенство достигается в случае когда любая граница является спичкой.

Заметим, что в квадрате разбитом на доминошки есть всегда квадратик 2×2 из двух доминошек. В самом деле, предположим, что это не так, тогда рассмотрим доминошку в верхнем левом угле, тогда дольше однозначно определяется покрытие главной диагонали содержащей этот угол; получим противоречие с покрытием нижнего правого угла). Значит таможен хотя бы на одну меньше числа спичек внутри, так как две доминошки граничат по двум спичкам а не по одной, то есть таможен не больше 559. Пример на 559 ниже.

6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ точки K, L, M, N, O являются серединами сторон AB, BC, CD, DE и EA соответственно. Докажите, что длина замкнутой ломаной $KMOLNK$ меньше, чем длина ломаной $ACEBDA$.

Решение Рассмотрим пять аналогичных неравенств треугольника $KL + LM > KM, LM + MN > LN, MN + NO > MO, NO + OK > NK, OK + KL > OL$. Сложив их, получим $2KL+2LM+2MN+2NO+2OK > KM+MO+OL+LN+NK$. Рассмотрим треугольник ABC. В нем KL –средняя линия, и значит 2KL=AC. Аналогично получаем $2LM = BD, 2MN = CE, 2NO = AD, 2OK = EB$. Подставляя эти пять равенств в предыдущее неравенство получим $AC + BD + CE + AD + EB > KM + MO + OL + LN + NK$– что и требовалось доказать.

7. В лагерь приехали 100 школьников. Известно, что любую группу из 6 школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что в каждой комнате все школьники знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть среди школьников?

Решение Построим следующий граф. Вершинами будут школьники. Две вершины соединим ребром, если соответствующие им школьники не знакомы. Нам надо узнать какое максимальное количество ребер может быть в этом графе.

Приведем пример при котором в этом графе 100 ребер, а именно рассмотрим граф в виде цикла длины 100. Отметим любые 6 вершин и разобьем их на тройки так, что в каждой будут идущие через одну в цикле, тогда никакие две из одной тройки не соединены ребром.

Докажем, что в нашем графе не может быть более 100 ребер. В нашем графе нет вершины степени больше трех. Иначе рассмотрим следующую шестерку вершин-школьников A, четырех ее соседей B, C, D, E и произвольную K. Тогда по построению графа школьник A может жить в одной комнате только с K, что противоречит возможности поселить их по три человека знакомых друг с другом. Пусть есть вершина X степени 3, её соседей обозначим через U, V, Y. Если есть еще две вершины P и Q отличные от этих четырех соединенные ребром, то рассмотрим эту шестерку школьников. X может жить только с P и Q, которые не могут жить вместе. Значит все ребра имеют одной из своих вершин одну из четырех X, U, V, Y, а так как степень по доказанному выше у каждой не больше трех то всего получается ребер не больше $12<100$. Если же из каждой вершины выходит не больше двух ребер тогда их всего не больше $\frac{100 \cdot 2}{2} = 100$.

Мы доказали, что незнакомств максимум 100, тогда знакомств минимум $\frac{100 \cdot 99}{2} - 100 = 4950 - 100 = 4850$.

8. Докажите, что существует множество из 1000 натуральных чисел такое, что для любых чисел a и b из этого множества a делится на $a - b$?

Решение Будем строить такой набор последовательно. Заметим, что если добавить к любому набору $a_1, ..., a_n$ число $a_{n+1} = 0$, то условия делимости по-прежнему будут выполняться. Осталось как-то подправить получившийся набор, чтобы числа в нём стали положительны. Попробуем увеличить все a_i на некоторое число A. Тогда условия делимости примут вид $(a_i+A) \vdots (a_i-a_j)$. Так как $a_i \vdots (a_i - a_j)$, достаточно, чтобы A делилось на все разности $a_i - a_j$ (для $i \neq j$). Поэтому в качестве A можно взять, например, произведение всех этих разностей.

Тем самым, построение можно начать, например, с двух чисел 1 и 2, а потом повторить 31 раз следующую процедуру: 1) добавить число 0; 2) увеличить все числа набора на $A = \prod_{i<j} |(a_j - a_j)|$.