Двадцать седьмая Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2011 г.

7 КЛАСС, ГРУППА ПРОФИ

Преподаватели:
А. Л. Глазман, В. А. Брагин, С. Ю. Лобастов

Геометрические неравенства. 05.07.2011

Факт (Неравенство треугольника). Сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны.

0. Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника, то $a > |b - c|$.

1. Докажите, что длина любой ломаной не меньше расстояния между её концами.

2. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, а m_b — длина его медианы, опущенной на сторону b. Докажите, что а) $m_b < \frac{a+c}{2}$; б) $m_b > \frac{a-b+c}{2}$.

3. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника а) больше его полупериметра; б) меньше периметра.

4. Дан треугольник ABC, точка D внутри него. Докажите, что а) $AD + DC < AB + BC$; б) $AD + BD + CD < AB + BC + CA$; в) $2(AD + BD + CD) > AB + BC + CA$.

5. Докажите, что из каких-то трех диагоналей выпуклого пятиугольника можно сложить треугольник.

6. Деревни A и B расположены а) по разные стороны; б) по одну сторону от прямолинейной железной дороги. Где нужно построить станцию, чтобы суммарный путь от A и B до нее был минимальным?

7. Докажите, что в равнобедренном треугольнике с углом при вершине $20°$ боковая сторона а) меньше утроенного основания; б) больше удвоенного.

8. Внутри треугольника ABC отмечена точка M, так что при этом $\angle BAM = \angle ABC$, $\angle AMB = 100°$, $\angle ACB = 70°$. Докажите, что $BM < AC$.

Теория чисел. 05.07.2011

1. а) На сколько нулей оканчивается число $20^{50} \cdot 50^{20}$? б) Найдите последнюю ненулевую цифру этого числа.

2. а) Найдите все простые p, для которых $p^3 + 2p^2 + 1$ — степень четвёрки. б) Найдите все простые p, для которых p^3+2p+1 — степень двойки.

3. При каком наименьшем n найдутся такие натуральные x и y, что $(x, y) = 999$ и $[x, y] = n!$?

4. Дано натуральное число A. В нём как-то переставили цифры и получили число B. Известно, что число $A-B$ записывается k единицами. Найдите наименьшее возможное значение k.

5. На какое количество нулей может заканчиваться выражение $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$?

6. Докажите, что $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}, но не делится на 3^{n+2}.

7. Можно ли квадрат представить в виде суммы 17 квадратов?

8. Может ли число $m^3 + n^3 + 4$ быть точным кубом?

Комбинаторика. 05.07.2011

1. Занятие в лагере продолжается 4 часа, и все это время Паша и Максим усиленно решают задачи. Это заключается в том, что каждые пятнадцать минут один из мальчиков плюет в потолок. Известно, что за время всего занятие они плюнули в потолок одинаковое число раз. Докажите, что за некоторые два часа они также плюнули в потолок одинаковое число раз.

2. Журнал «Юный диверсант» выходит нерегулярно – два или три раза в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: №1 – 2001, №2 – 2001, №3 – 2002,... Докажите, что если редакцию не поймают, то рано или поздно выйдет номер, где два числа на обложке совпадут.

3. На плоскости отмечено n красных и n синих точек общего положения. Докажите, что можно провести n непересекающихся отрезков, каждый из которых соединяет красную точку с синей.

4. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

5. На плоскости отмечены точки A_1, A_2, $\ldots$, A_{2012} общего положения (то есть никакие три из них не лежат на одной прямой). Рассматриваются прямые, проходящие через A_1 и произвольную из оставшихся отмеченных точек. Докажите, что по обе стороны от какой-то из них находится по 1005 отмеченных точек.

6. Узнику в тюрьме дано 100 монет, из которых половина — фальшивые, а половина — настоящие, причем внешне и по весу они не различимы. Каждое утро он раскладывает монет на две кучки, и если оказывается, что в них поровну фальшивых или поровну настоящих, то он выходит на свободу. Докажите, что он может заведомо освободиться за 25 дней (то есть после не более, чем 25 проверок).

7. По кругу стоят а) 2^n; б) $k \not\vdots 3$ хамелеонов красного и синего цвета. Каждую минуту все хамелеоны, у которых соседи разного цвета, одновременно от испуга перекрашиваются в другой цвет: синие — в красный, красные — в синий. Остальные хамелеоны цвета не меняют. Докажите, что рано или поздно все хамелеоны одновременно вернут себе первоначальный цвет.

Графы. 06.07.2011

1. На вечеринку пришло а) 19 гостей; б) 21 гость, причем среди любых трех из них есть двое знакомых. Докажите, что гости могут разбиться на 5 групп, в каждой из которых все попарно знакомы.

2. Несколько школьников построились в шеренгу. Оказалось, что у каждого школьника, кроме двух крайних, поровну знакомых слева и справа от него. Докажите, что у двух крайних школьников поровну знакомых.

3. Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?

4. У каждого из 25 толстяков есть сестра. Каждая из этих сестер вышла замуж за какого-то другого из толстяков. За год каждый толстяк потолстел на вдвое большее число килограммов, чем похудела его сестра и при этом на восемь килограммов больше, чем похудела его жена. На какое наибольшее число килограммов могла похудеть какая-то из сестер толстяков?

5. В стране Конкуренции 2010 городов, некоторые из которых соединены прямыми авиарейсами (в обе стороны). Докажите, что можно распределить эти рейсы между 1005 авиакомпаниями так, чтобы ни одна авиакомпания не могла предоставить своим пассажирам кольцевой маршрут более чем по двум городам.

6. В какое минимальное количество цветов надо покрасить диагонали, стороны и вершины правильного 2011-угольника, чтобы выполнялись следующие условия: 1) отрезки одного цвета не должны иметь общих вершин; 2) цвет вершины должен отличаться от цвета исходящих из нее отрезков?

Определение. Граф называется *планарным*, если его можно без самопересечений изобразить на плоскости.

Изображение графа на плоскости без самопересечений называется *плоским* графом.

Картой называется связный плоский граф. Части, на которые карта разбивает плоскость, называются *гранями* (или *странами*).

7. (Формула Эйлера.) Докажите, что в карте с V вершинами, E ребрами и F странами $V - E + F = 2$ а) для карты, образованной деревом; б) для произвольной карты.

8. а) Дана карта с V вершинами, E ребрами и F странами. Докажите, что $E \leq 3V - 6$. б) Пусть карта из предыдущего пункта является двудольным графом. Докажите, что тогда $E \leq 2V - 4$.

Площади. 06.07.2011

Определение. Каждой фигуре M на плоскости ставится в соответствие число S_M, называемое *площадью*, такое, что выполнены следующие свойства:

1) $S_M \geq 0$;

2) Площади равных фигур равны;

3) Если фигура M состоит из фигур A и B, не имеющих общих внутренних точек, то $S_M = S_A + S_B$;

4) Площадь прямоугольника $m \times n$ равна mn.

1. а) Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. б) Докажите, что площадь остроугольного треугольника равна половине произведения произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту. в) Докажите то же самое утверждение для произвольного треугольника. г) Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту. д) Докажите, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

2. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{AOB} = S_{COD}$.

3. Точку, лежащую внутри правильного шестиугольника соединили со всеми его вершинами. Докажите, что суммы площадей получившихся треугольников, взятых через один, равны.

4. а) Докажите, что медиана делит треугольник на два равновеликих. б) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины, и делят треугольник на 6 равновеликих

5. Дан треугольник ABC. На луче BC взята точка C_1. а) Докажите, что $\frac{S_{ABC_1}}{S_{ABC}} = \frac{|BC_1|}{|BC|}$. б) Пусть, кроме того, на луче BA взята точка A_1. Докажите, что $\frac{S_{A_1BC_1}}{S_{ABC}} = \frac{|BA_1|\cdot|BC_1|}{|BA|\cdot|BC|}$

Вывод: площади треугольников с общим углом относятся, как произведения сторон, этот угол заключающих

в) Докажите, что это верно и в случае, когда углы не равны, а дополняют друг друга до $180°$.

6. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Отрезки KM и LN пересекаются в точке O. Докажите, что:
а) $S_{NAKO} + S_{LCMO} = S_{KBLO} + S_{MDNO}$;
б) если $S_{AKMD} = S_{BKMC}$, то $AB \parallel CD$.

7. а) Две параллельные прямые пересекают стороны угла с вершиной O в точках A, B и A_1, B_1 соответственно. Докажите, что $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$.
б) (**Теорема Фалеса**) Три параллельные прямые пересекают стороны угла с вершиной O в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|}$.

8. (**Теорема Чевы**) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1, соответственно. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и тогда, когда выполнено

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

.

Геометрия. 07.07.2011

1. Дан угол с вершиной O. На одной стороне этого угла лежат точки A и B, а на другой — C и D, причем $OA = OC$ и $AB = CD$. Отрезки AD и BC пересекаются в точке X. Докажите, что а) $\angle OAD = \angle OCB$; б) $BX = DX$; в) OX — биссектриса угла.

2. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрали точку D такую, что $BC = CD$. На катете BC выбрали такую точку E, что $DE = CE$. Докажите, что $AD + BE = DE$.

3. Медиана CM, биссектриса BL и высота AK треугольника ABC пересеклись в точке O такой, что $AO = BO$. Докажите, что треугольник ABC правильный.

4. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $\angle CAD = \angle DBE$, $\angle BEC = \angle ACE$ и $AC = BE$. Докажите, что $AD = BD$.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 120°$, а $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$.

6. В треугольнике ABC $AB < AC$. Прямая, проходящая через вершину B параллельно AC, пересекает биссектрису внешнего угла A в точке D. Прямая, проходящая через вершину C параллельно AB, пересекает эту биссектрису в точке E. На стороне AC выбрана точка F так, что $FC = AB$. Доказать, что $DF = FE$.

7. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Докажите, что либо эти треугольники равны, либо $\angle C + \angle C_1 = 180°$.

Разнобой. 07.07.2011

1. На столе лежат 2011 правильно идущих механических часов. Докажите, что для любой точки O на столе в какой-то момент времени сумма расстояний от O до концов минутных стрелок будет больше, чем сумма расстояний от O до центров циферблатов.

2. На доску выписаны 10 различных натуральных чисел, и все возможные суммы нескольких из них (всего выписано 1023 числа). Может ли так быть, что ровно 512 из этих чисел делится на 2011?

3. Может ли сумма точного квадрата и точного куба быть точной пятой степенью?

4. Найдите $(\underbrace{11\ldots1}_{m}, \underbrace{11\ldots1}_{n})$.

5. Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

6. Пусть $S(n)$ — сумма цифр числа n, а $T(n)$ — сумма всех чисел, получаемых отбрасыванием у числа n одной, двух, и так далее цифр справа. Докажите, что $n = S(n) + 9T(n)$.

7. Рассмотрим все треугольники с вершинами в вершинах выпуклого 2010-угольника. Докажите, что любая точка, не лежащая на сторонах таких треугольников, покрыта четным числом из них.

Внутренний матбой. Группа профи. 12.07.2011

1. В начале игры на доске написаны 100 различных простых чисел. Два игрока ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок записывает на доске еще одно число, равное произведению двух уже написанных. Выигрывает тот, кто первым напишет точный квадрат. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 + x^3 = 2^y + 16$.

3. Берутся всевозможные непустые подмножества из множества натуральных чисел от 1 до N. Для каждого подмножества берётся величина, обратная к произведению всех его чисел. Найдите сумму всех таких обратных величин.

4. Перенумеруем делители данного натурального числа n в порядке убывания: $d_0, d_1, \ldots$, начав с $d_0 = n$. Назовем число n *восхитительным*, если $d_1 = d_2 + d_5$. Сколько существует восхитительных чисел, меньших 2009?

5. В таблице $2n \times 2n$ расставлено k звёздочек. При каком наибольшем k заведомо можно вычеркнуть n столбцов и n строк так, чтобы все звёздочки были вычеркнуты?

6. Имеются четыре таймера. У одного промежуток между сигналами – 1 час, у другого – 2 часа, у третьего – 3 часа, у четвертого – 5 часов. Таймеры включили в случайно выбранные моменты (у каждого свой). Кот Васька уснул сразу после первого сигнала одночасового таймера и спал сутки, просыпаясь (и сразу засыпая снова) после каждого сигнала. Докажите, что ему не меньше шести раз удалось беспробудно проспать целый час.

7. В группе из 100 человек некоторые знакомы. Причем среди любых 50 найдется человек, знакомый с остальными 49. Докажите, что найдутся 52 человека, попарно знакомых между собой.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка F является серединой стороны BC. Оказалось, что $\angle AFD = 120°$. Докажите, что $AB + BF + CD \geqslant AD$.

9. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство:

$$\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

10. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла B выбрана точка D. Серединный перпендикуляр к BD пересекает стороны AB и BC в точках X и Y, а лучи AD и CD — в точках K и L соответственно. Оказалось, что $LX \cdot KY = BX^2$. Докажите, что D — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

Внутренний матбой. Половинка на половинку. 12.07.2011

1. Различные натуральные числа x, y и z удовлетворяют условию

$$\text{НОК}(x, y) - \text{НОК}(x, z) = y - z.$$

Докажите, что y и z делятся на x.

2. Берутся всевозможные непустые подмножества из множества натуральных чисел от 1 до N. Для каждого подмножества берётся величина, обратная к произведению всех его чисел. Найдите сумму всех таких обратных величин.

3. Натуральное число n называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих собственных делителей. Верно ли, что любое натуральное число может быть делителем некоторого совершенного?

4. Имеются четыре таймера. У одного промежуток между сигналами – 1 час, у другого – 2 часа, у третьего – 3 часа, у четвертого – 5 часов. Таймеры включили в случайно выбранные моменты (у каждого свой). Кот Васька уснул сразу после первого сигнала одночасового таймера и спал сутки, просыпаясь (и сразу засыпая снова) после каждого сигнала. Докажите, что ему не меньше шести раз удалось беспробудно проспать целый час.

5. Членами клуба являются 10 джентльменов. За неделю каждый из них встретился с каждым ровно по одному разу, и при встрече каждый просил другого передавать приветы всем, кого тот еще увидит. Сколько было передано приветов?

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка F является серединой стороны BC. Оказалось, что $\angle AFD = 120°$. Докажите, что $AB + BF + CD \geqslant AD$.

7. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство:

$$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2.$$

8. Известно, что прямоугольник можно разрезать на несколько прямоугольников 2×3 и полоску 1×5. Докажите, что его можно разрезать на несколько полосок 1×6 и одну полоску 1×5.

Графы планарные и не только. 09.07.2011

1. Можно ли рёбра правильного 11-угольника раскрасить в два цвета так, чтобы граф каждого из цветов был бы планарным.

2. Докажите, что а) в любом планарном графе есть вершина степени не более, чем 5; б) в любой карте найдется либо вершина степени не более, чем 3, либо страна, ограниченная тремя ребрами.

3. Докажите, что вершины любого планарного графа можно правильным образом раскрасить а) в 6; б) в 5 цветов.

4. Выпуклый многогранник составлен из пяти- и шестиугольников, причем в каждой вершине сходится ровно три грани. Докажите, что пятиугольных граней ровно 12.

5. Докажите, что грани планарного графа можно покрасить в два цвета так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета, тогда и только тогда, когда степень каждой вершины чётна.

6. Дан ориентированный граф G (то есть, на каждом ребре графа указано направление, проходить ребро в противоположном направлении запрещается). Докажите, что либо из любой вершины графа G можно попасть в любую другую, либо все вершины графа можно разбить на два множества V_1 и V_2 так, что ни одно ребро не ориентировано из V_2 в V_1.

Определение Ориентированный граф G называется *сильно связным*, если от любой его вершины можно добраться до любой другой.

7. Пусть G — ориентированный сильно связный граф на n вершинах. а) Докажите, что можно выкинуть из G все ребра кроме $2n-2$ таким образом, чтобы оставшийся граф был тоже сильно связен. б) Пусть известно, что в G есть такие вершины u и v, что $uv \in A(G)$, но $vu \notin A(G)$. Докажите, что в таком случае можно оставить и $2n-3$ ребра.

Биномиальные коэффициенты. 09.07.2011

Напоминание 1. Число способов выбрать из n учеников k дежурных равно $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ и обозначается C_n^k.

Напоминание 2 (Бином Ньютона). Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Замечание. По этой причине числа C_n^k называются биномиальными коэффициентами.

1. Найдите сумму $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ а) алгебраически; б) комбинаторно.

2. Найдите сумму $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n$ а) алгебраически; б) комбинаторно.

3. Найдите сумму $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+k}^k$.

4. Пусть различные $k, \ell \in \mathbb{N}$ меньше n. Докажите, что $\left(C_n^k, C_n^\ell\right) > 1$.

5. Последовательность (x_n) задана условиями $x_1 = 2$, $nx_n = 2(2n-1)x_{n-1}$ при $n > 1$. Докажите, что x_n — целое при всех натуральных n.

6. Формула включений и исключений. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – подмножества конечного множества A. Тогда

$$|A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)| = |A| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| -$$

$$- \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n|.$$

Подобие и теорема Фалеса. 10.07.2011

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Докажите, что а) $CH^2 = AH \cdot BH$; б) $AC^2 = AH \cdot AB$.

2. В трапеции $ABCD$ через точку O пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям, которая пересекает AB и CD в точках K и L. Известно, что $AD = a$, $BC = b$. Найдите величину отрезка KL.

3. а) Докажите, что в трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, лежат на одной прямой. б) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отмечены 4 точки: K — точка пересечения прямых AB и CD, L — середина BC, M — точка пересечения диагоналей, N — середина AD. Докажите, что если какие-то три из них лежат на одной прямой, то $AD \parallel BC$.

4. Прямая ℓ пересекает стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ в точках E и F, а диагональ AC в точке G. Докажите, что $\frac{|AB|}{|AE|}+\frac{|AD|}{|AF|}=\frac{|AC|}{|GA|}$.

5. На сторонах AB, и AC треугольника ABC выбраны такие точки C_1, B_1 и A_1 соответственно, что $AC_1 = 2C_1B$, $BA_1 = 2A_1C$ и $CB_1 = 2B_1A$. а) Найдите $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}$. б) Точки A, B и C стёрли, оставив лишь точки C_1, B_1 и A_1. Можно ли по ним с помощью циркуля и линейки восстановить исходный треугольник?

6. На стороне BC треугольника ABC отмечены такие точки M и N, что $CM = MN = NB$. К стороне BC в точке N построен перпендикуляр, пересекающий сторону AB в точке K. Оказалось, что площадь треугольника AMK в 4,5 раза меньше площади исходного треугольника. Докажите, что исходный треугольник равнобедренный.

7. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ отмечена такая точка M, что $\triangle ABM$ — а) равносторонний; б) произвольный. Докажите, что на прямой AB есть такая точка N, что $\triangle DCN$ подобен $\triangle ABM$.

Теоремы Ферма, Эйлера и Вильсона. 10.07.2011

1. а) Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$ и $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$. б) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

2. Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{P}$ и $a \not\vdots P$. Рассмотрим следующий граф: вершины графа — числа от 1 до $p-1$; из числа x ведет ориентированное ребро в число y, если $ax \equiv y \pmod{p}$.

а) Докажите, что этот граф является объединением нескольких циклов одинаковой длины.

б) Выведите из этого малую теорему Ферма.

3. а) Барабан Поля чудес разбит на p одинаковых секторов (где $p \in \mathbb{P}$). Сколькими способами можно раскрасить эти сектора в n цветов? Барабан может вращаться, поэтому раскраски, получающиеся друг из друга поворотом барабана, считаются одинаковыми. б) Выведете из пункта а) малую теорему Ферма.

Утверждение. Пусть $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, причем $(a, m) = 1$. Тогда приведенная система вычетов по модулю m, умноженная на a, является приведенной системой вычетов по модулю m.

4. Докажите теорему Эйлера с помощью этого утверждения.

5. Докажите, что для любого натурального n выполнено: а) $n^{561} \equiv n \pmod{561}$; б) $n^{20} \equiv n^4 \pmod{4080}$.

Определение. Вычет b называется *обратным* к вычету a, если $ab \equiv 1 \pmod{m}$.

6. Пусть p — простое число. а) Докажите, что для любого a от 1 до $p-1$, существует ровно один обратный вычет. б) Докажите, что если $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, то $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$. в) **(Теорема Вильсона.)** Докажите, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. г) Докажите, что если для $m > 1$ имеет место сравнение $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$, то m — простое.

7. Дано простое число p. Докажите, что $2^{2^p} - 4$ делится на $2^p - 1$.

8. Докажите, что существует бесконечно много таких пар различных натуральных чисел $k, n > 1$, что а) $(k! + 1, n! + 1) > 1$; б) $(k! - 1, n! - 1) > 1$.

Геометрический разнобой. 11.07.2011

1. а) Докажите, что площадь треугольника со сторонами a и b не превосходит $\frac{ab}{2}$. б) Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника с диагоналями p и q не превосходит $\frac{pq}{2}$.
Докажите, что площадь четырёхугольника со сторонами a, b, c и d не превосходит в) $\frac{ab+cd}{2}$; г) $\frac{ac+bd}{2}$.

2. а) В треугольнике ABC провели биссектрису AL. Докажите, что $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BL|}{|LC|}$. б) Докажите аналогичное утверждение для биссектрисы внешнего угла.

3. а) Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. б) В треугольнике ABC точка I — точка пересечения биссектрис. Докажите, что $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$.

4. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F основания перпендикуляров из точки A на прямые CB и CD. Докажите, что треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle EAF$ подобны.

5. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC выбрана точка D, а на продолжении AC точка E так, что $CE = AD$. Докажите, что $BE + BD > BC + BA$.

6. В треугольнике ABC $\angle A = 2\angle B$. Докажите, что $BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB$.

Шары, перегородки и гиперкуб. 11.07.2011

0. (*Упражнение, которое не нужно сдавать, но лучше сделать.*) Сколькими способами в книжку из 48 листов можно положить 5 закладок?

1. Ольга Сергеевна и Александр Львович играли в русский бильярд и забили на двоих 15 шаров. а) Сколько возможных вариантов расположения шаров в лузах могло получиться, если известно, что в каждой лузе лежит хотя бы один шар? б) А если в некоторые лузы они, возможно, так ни одного шара и не забили? в) А если бы они играли не в русский бильярд, а в пул? Напомним, что в пуле кроме битка на столе находится по 7 полосатых и сплошных шаров, а также один черный, и по завершении игры в лузах оказываются все шары кроме битка.

2. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ а) в натуральных числах; б) в целых неотрицательных числах?

3. а) На полке стоят n книг. Сколькими способами можно выбрать с полки k книг так, чтобы никакие две выбранные книги не стояли рядом?

б) За круглым столом короля Артура сидят n рыцарей. Каждый из них враждует со своими соседями. Король хочет составить отряд из k рыцарей. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы в этом отряде не было врагов?

4. Сколько есть решений уравнения $x + y + z = 100$ в натуральных числах от 1 до 60?

5. Тридцать три буквы русского алфавита кодируются последовательностями из нулей и единиц длины n. а) При каком наименьшем n кодирование можно выбрать однозначным (т.е. разным буквам соответствуют разные коды)? б) А хватит ли $n = 8$, если при передаче кода возможна ошибка в одном знаке?

6. Имеется табло с n горящими лампочками и несколько выключателей. Каждый выключатель может быть подсоединен к некоторым лампочкам. При нажатии на кнопку выключателя соединенные с ними лампочки меняют свое состояние: горящие тухнут, а негорящие зажигаются. Какое наименьшее число выключателей необходимо, чтобы можно было зажечь любой набор лампочек?

7. В М7 приехали 66 учеников, и часть из них попали в группу профи. На вступительной олимпиаде предлагалось 7 задач, причем для любых двух учеников профи A и B есть задача, которую решил A, но не решил B, и есть задача, которую решил B, но не решил A. Какое наибольшее количество учеников пошло в профи?

Числа. 12.07.2011

1. Докажите, что $(2^{2^m}+1, 2^{2^n}+1) = 1$ при $m \neq n$.

2. Обозначим через $F(n)$ наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$. Докажите, что существуют 100 таких различных натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{100}$, что $F(n_1) = F(n_2) = \ldots = F(n_{100})$.

3. а) Докажите, что функция Эйлера мультипликативна. б) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Чему равно $\varphi(n)$?

4. Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите, что $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] \geqslant na_1$.

5. Докажите, что а) простых чисел вида $4k+3$ бесконечно много; б) если n^2+1 делится на p, где $p \in \mathbb{P}$, то $p \equiv 1 \pmod 4$; в) простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.

Профи-7-1 — Профи-8-1. 17.07.2011

1. 16 команд участвуют в футбольном первенстве. Оно проходит в несколько этапов. На каждом этапе какие-то 6 команд играют между собой однокруговой турнир. Могло ли оказаться, что после нескольких таких этапов все команды сыграют друг с другом по 2 раза?

2. Каждая сторона правильного треугольника поделена на 15 равных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате этого получили разбиение треугольника на маленькие треугольнички. После этого в каждый из маленьких треугольничков записали $+1$ или -1. Известно, что число в каждом треугольничке равно произведению чисел в тех треугольничках, которые имеют с ним общую сторону. Докажите, что в каждом из маленьких треугольничков, прилегающих к серединам сторон большого треугольника, стоит число $+1$.

3. На шахматной доске 20×20 стоят несколько ладей, а на всех полях, которые ими не бьются, стоят кони. Никакие фигуры не бьют друг друга. Какое наибольшее количество фигур может быть на доске?

4. Натуральные числа a, b и c таковы, что $ab + 9b + 81$ и $bc + 9c + 81$ делятся на 101. Докажите, что $ac + 9a + 81$ тоже делится на 101.

5. Положительные числа x, y таковы, что $y^3 + y \leqslant x - x^3$. Докажите, что $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена биссектриса BL. Точка K на гипотенузе BC такова, что $\angle BLK = 90°$. Оказалось, что $3CK = 2(BC - AB)$. Найдите $\angle C$.

7. В отрезке находится несколько меньших отрезков, покрывающих его. У каждого из них отбросили половину — левую или правую. Докажите, что оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

8. В выпуклом шестиугольнике главные диагонали равны, и каждая из них делит его на две равновеликие части. Докажите, что длины его противоположных сторон равны.

9. В классе из 20 детей, некоторые из которых враждуют. Причем известно, что нет троих попарно враждующих. После обеда некоторые помирились, а некоторые поссорились. Оказалось, что все равно нет троих попарно враждующих. Докажите, что найдется не менее 15 пар детей, которые были друзьями до обеда и остались после.

10. Красные, синие и зеленые дети встали в круг. Когда учительница попросила поднять руку красных детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 20 человек. А когда она попросила поднять руку синих детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку стоит сразу два зеленых ребенка.

Профи-7-2 — Профи-8-2. 17.07.2011

1. На симпозиум приехали 100 человек. Из них 15 французов, каждый из которых знаком хотя бы с 70 участниками симпозиума, и 85 немцев, каждый из которых знаком не более чем с десятью участниками. Их расселили в 21 комнату. Докажите, что в какой-то из комнат нет ни одной пары знакомых.

2. Каждая сторона правильного треугольника поделена на 15 равных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате этого получили разбиение треугольника на маленькие треугольнички. После этого в каждый из маленьких треугольничков записали $+1$ или -1. Известно, что число в каждом треугольничке равно произведению чисел в тех треугольничках, которые имеют с ним общую сторону. Докажите, что в каждом из маленьких треугольничков, прилегающих к серединам сторон большого треугольника, стоит число $+1$.

3. На шахматной доске 20×20 стоят несколько ладей, а на всех полях, которые ими не бьются, стоят кони. Никакие фигуры не бьют друг друга. Какое наименьшее количество ладей может быть на доске?

4. Написанное на доске число можно умножить или разделить на $\frac{5}{6}$ или $\frac{9}{10}$. Можно ли из 1 получить другое целое число?

5. Пусть a, b, c, d — вещественные числа, причем $a > b > c > d$. Докажите, что

$$c < \frac{cd - ab}{c - a + d - b} < b.$$

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена биссектриса BL. Точка K на гипотенузе BC такова, что $\angle BLK = 90°$. Оказалось, что $3CK = 2(BC - AB)$. Найдите $\angle C$.

7. В отрезке находится несколько меньших отрезков, покрывающих его. У каждого из них отбросили правую половину. Докажите, что оставшиеся половины покрывают не менее половины длины исходного отрезка.

8. В выпуклом шестиугольнике главные диагонали равны, и каждая из них делит его на две равновеликие части. Докажите, что длины его противоположных сторон равны.

9. Найдите все простые p такие, что оба числа $\frac{p+1}{2}$ и $\frac{p^2+1}{2}$ являются точными квадратами.

10. Красные, синие и зеленые дети встали в круг. Когда учительница попросила поднять руку красных детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 20 человек. А когда она попросила поднять руку синих детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку стоит сразу два зеленых ребенка.

Окружности и не только. 14.07.2011

Определение 1. Прямая называется *касательной* к окружности, если она имеет ровно одну точку пересечения с данной окружностью.

1. Из точки A проведена касательная AB. Пусть C — точка на окружности. Докажите, что отрезок AC является касательной к окружности тогда и только тогда, когда $AB = AC$.

2. а) Докажите, что для любого треугольника существует *описанная* окружность (т. е. окружность, проходящая через все его вершины), причем такая окружность единственна. В какой точке находится ее центр? б) Докажите, что для любого треугольника существует *вписанная* окружность (т. е. окружность, касающаяся всех его сторон), причем такая окружность единственна. В какой точке находится ее центр? в) Докажите, что для любой стороны треугольника существует вневписанная окружность (т. е. окружность, касающаяся данной стороны треугольника и продолжений двух других сторон), причем такая окружность единственна. В какой точке находится ее центр?

3. а) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $AB_1 = AC_1 = p - a$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника. б) Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_2. Найдите длины отрезков BA_2 и CA_2.

4. Докажите, что в треугольнике а) $S = pr$; б) $S = (p - a)r_a$. (Через r обозначается радиус вписанной окружности треугольника, а через r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a и продолжения двух других сторон.)

5. Докажите, что в выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда у него суммы противоположных сторон равны.

6. а) Докажите, что угол, вписанный в окружность, равен половине дуги, на которую он опирается. б) Вершина угла находится внутри круга. Докажите, что величина угла измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла. в) Пусть вершина угла находится вне круга и стороны угла пересекают окружность. Докажите, что величина угла измеряется полуразностью дуг, высекаемых его сторонами на окружности и расположенных внутри угла. г) Пусть AB — хорда окружности, ℓ — касательная к окружности (A — точка касания). Докажите, что каждый из двух углов между AB и ℓ измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри рассматриваемого угла.

7. Дан остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). E — точка пересечения перпендикуляра к стороне BC, восставленного в точке B, и перпендикуляра к основанию AC, восставленного в точке C. D — точка пересечения перпендикуляра к стороне AB, восставленного в точке A, с продолжением стороны BC. На продолжении основания AC (за точку C) отметили точку F так, что $CF = AD$. Докажите, что $EF = ED$.

Пути и колодцы. 14.07.2011

1. В графе между любыми двумя вершинами существует простой путь четной длины. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует простой путь нечетной длины.

Определение 1. *Расстоянием* между вершинами u и v графа G называется величина $d(u, v)$, равная длине кратчайшего пути между u и v.

Определение 2. *Диаметром* $d(G)$ графа G называется наибольшее расстояние между его вершинами.

Эксцентриситетом $e(v)$ вершины v называется наибольшее из расстояний между вершиной v и другими вершинами графа G. *Радиусом* $r(G)$ графа G называется наименьший из эксцентриситетов его вершин.

2. а) Докажите, что $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$.

б) Докажите, что в связном графе любые два простых пути максимальной длины имеют общую вершину.

Определение 3. *Центром* графа называется вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа (то есть найдется вершина, расстояние от которой до данной равно радиусу).

3. Докажите, что у дерева может быть не более двух центров.

4. Может ли сумма попарных расстояний между вершинами 25-вершинного дерева быть равна 1225?

Определение 4. Ребро связного графа называется *мостом*, если при его удалении граф теряет связность. Вершина связного графа называется *точкой сочленения*, если при ее удалении граф теряет связность.

5. В графе, степени всех вершин которого равны 3 есть точка сочленения. Докажите, что в этом графе есть мост.

6. (Частный случай **теоремы Менгера**.) а) Несмежные вершины a и b графа G таковы, что для любой вершины c существует путь из a в b, не проходящий через c. Докажите, что между вершинами a и b есть два пути, не имеющие общих внутренних вершин.

б) В графе, имеющем хотя бы три вершины, нет точек сочленения. Докажите, что между любыми двумя вершинами данного графа существуют два пути, не имеющие общих внутренних вершин.

7. а) Докажите, что на плоскости нельзя изобразить без самопересечений полный граф с 5 вершинами. б) На плоскости расположено три дома и три колодца. Можно ли их так соединить тропинками, чтобы от каждого домика вела тропинка к каждому колодцу, и тропинки не пересекались?

Остатки внутреннего матбоя. 14.07.2011

1. Различные натуральные числа x, y и z удовлетворяют условию

$$\text{НОК}(x, y) - \text{НОК}(x, z) = y - z.$$

Докажите, что y и z делятся на x.

2. Натуральное число n называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих собственных делителей. Верно ли, что любое натуральное число может быть делителем некоторого совершенного?

3. Известно, что прямоугольник можно разрезать на несколько прямоугольников 2×3 и полоску 1×5. Докажите, что его можно разрезать на несколько полосок 1×6 и одну полоску 1×5.

4. В таблице $2n \times 2n$ расставлено k звёздочек. При каком наибольшем k заведомо можно вычеркнуть n столбцов и n строк так, чтобы все звёздочки были вычеркнуты?

5. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла B выбрана точка D. Серединный перпендикуляр к BD пересекает стороны AB и BC в точках X и Y, а лучи AD и CD — в точках K и L соответственно. Оказалось, что $LX \cdot KY = BX^2$. Докажите, что D — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

Описанная. 15.07.2011

1. а) Докажите, что четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна $180°$. б) Докажите, что выпуклый четырёхугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда когда какая-то сторона видна из вершин, к которым она не примыкает, под равными углами.

2. Дан отрезок AC и угол α. Найдите геометрическое место точек B таких, что $\angle ABC = \alpha$.

3. Дана окружность и точка вне неё. С помощью циркуля и линейки построить касательные из данной точки к данной окружности.

4. а) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке (называемой *ортоцентром* треугольника). б) Докажите, что точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника лежит на его описанной окружности. в) Пусть высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что A_1A биссектриса угла $\angle B_1A_1C_1$.

5. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Внутри треугольника $\triangle OCD$ выбрана точка P так, что $\angle BPC = \angle APD$. Докажите, что $\angle BPO = \angle PAD$.

6. (**Степень точки**) Дана окружность с центром в точке O и радиусом r. Известно, что $OX = d$. Через точку X, не лежащую на окружности проведены две прямые, пересекающие окружность в точках A, B и C, D соответственно. а) Докажите, что если точка X лежит внутри окружности, то $AX \cdot BX = CX \cdot DX = r^2 - d^2$. б) Докажите, что если точка X лежит вне окружности, то $AX \cdot BX = CX \cdot DX = d^2 - r^2 = XP^2$, где XP — касательная к окружности.

7. Каждая из двух параллельных прямых пересекает окружность в двух точках. Докажите, что дуги окружности, заключенные между этими прямыми, равны.

8. (Лемма Мансиона) Докажите, что середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащая вершину B, а) равноудалена от точек A, C и I (где I — центр вписанной окружности треугольника ABC); б) равноудалена от точек A, C, I и I_b (где I_b — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC).

Разнобой-2. 15.07.2011

1. Внутри квадрата отметили 100 точек и соединили их друг с другом и с вершинами квадрата непересекающимися отрезками. В результате квадрат оказался разбитым на треугольники. а) Сколько таких треугольников получилось? б) Докажите, что хотя бы у одного из них все углы не превосходят $120°$ в) Докажите, что квадрат нельзя разрезать на невыпуклые четырехугольники.

2. а) Пусть $m, n, k \in \mathbb{N}$, причем $m, n \geq k$. Докажите, что $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{m+n}^k$. б) Докажите, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

3. По кругу в вершинах правильного 100-угольника расставлено сто трехзначных чисел. Докажите, что существует диаметр, разность сумм чисел по разные стороны от которого не превосходит по модулю 900.

4. Простое число p больше пяти. Докажите, что найдется число, состоящее из одних единиц, делящееся на p.

5. В квадрате 7×7 клеток разместили 16 плиток 1×3 (плитки не имеют общих клеток). Какая из клеток могла остаться свободной?

6. На острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из них есть хотя бы один друг. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды утром каждый житель произнес либо фразу "Все мои друзья — рыцари", либо фразу "Все мои друзья — лжецы", причем каждую из фраз произнесло ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное число пар друзей, один из которых рыцарь, а другой — лжец.

7. Половина вершин правильного 2000-угольника покрашены красным цветом, а половина — синим. Докажите, что можно найти два равных треугольника: один с красными вершинами, а другой — с синими.

Разнобой-3. 16.07.2011

1. Радиус вписанной в треугольник окружности равен r, радиусы вневписанных равны r_a, r_b и r_c. Докажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

2. Дано натуральное число n. Известно, что $3^{3^n-1} - 1 \vdots (3^n - 1)$. Докажите, что $3^n - 1 \vdots n$.

3. M — середина стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что углы BAD, BMC и CDA равны $60°$. Докажите, что $AB + CD = AM + BC$.

4. У фальшивомонетчика Вани имеется неограниченный запас 2011-рублевых купюр. Жетон метро стоит n рублей, где $n < 2011$, а в кассе есть всего 1 рубль сдачи. Докажите, что несмотря на это Ваня сможет купить несколько (менее 2011) жетонов в данной кассе.

5. а) Имеется бесконечная в обе стороны дорога, на ней полицейский участок. В какой-то момент времени грабитель угнал старую полицейскую машину и скрылся в одном из двух направлений. В какой-то другой момент полицейский обнаружил пропажу и поехал в погоню за грабителем на новой машине. При этом он не знает ни времени угона, ни направления. Но полицейскому известно, что скорость старой машины составляет $0,9$ от скорости новой машины. Сможет ли он поймать грабителя? б) Та же задача, только полицейскому не известно отношение скоростей новой и старой машины, а известно лишь, что оно меньше 1.

6. С написанными на доске положительными числами разрешается выполнить одну из двух следующих операций: 1) стереть произвольное число x и записать два раза число $\sqrt{x+1}-1$; 2) стереть два произвольных числа x и y и записать число $x+y+xy$. Изначально на доске написано число a. Через несколько операций на доске оказалось написано одно число. Докажите, что оно равно a.

7. Садовый кооператив имеет вид квадрата, разделенного 2010 вертикальными и 2010 горизонтальными прямыми на 2011^2 прямоугольных участков. На каждом участке живет лжец или рыцарь. Каждый житель кооператива сказал, что площадь его участка больше, чем площадь участка, занимаемого каждым из его соседей. Какое наибольшее количество рыцарей может жить в кооперативе?

Неравенства. 16.07.2011

1. Положительные числа a и b таковы, что $a \geqslant b$ и $a+b \leqslant 1$. Докажите, что $a^2+3b^2 \leqslant 1$.

2. Сумма положительных чисел a и b равна 1. Докажите, что $a^4+b^4 \geqslant 1/8$.

3. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+bc+ca)$.

4. Положительные числа x и y меньше 4. Докажите, что хотя бы одно из чисел $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}$ и $\frac{1}{y}+\frac{1}{4-x}$ не меньше 1.

5. Докажите, что для любого действительного x выполнено $|x|+2|x-1|+3|x-2|+4|x-3|+5|x-4|+6|x-5| \geqslant 26$.

6. (Неравенство Бернулли.) При $n \in \mathbb{N}$, $x > -1$ докажите неравенство $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

7. а) Докажите, что $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)} < \frac{1}{2}$

б) Докажите, что $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}$

8. Известно, что $x > y > 0$ и $2(x^2+y^2) \geqslant 5xy$. Докажите, что $x \geqslant 2y$.

Веселая комбинаторика. 16.07.2011

1. Имеется 7 с виду одинаковых шаров, из которых два радиоактивные. Дозиметром можно проверить на радиоактивность любую группу шаров. За какое наименьшее число проверок можно выявить оба радиоактивных шара?

2. Имеется 100 попарно различных по весу камня. Как за 105 взвешиваний на чашечных весах без гирь определить самый тяжелый и второй по весу камни?

3. Два фокусника показывают зрителю такой фокус. У зрителя есть 78 карточек, пронумерованных числами от 1 до 78. Он выбирает из них 40 карточек и передает первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 38 карточек и, перемешав, передает эти три карточки второму фокуснику. Как фокусникам договориться, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трех карточек добавил зритель?

4. Гриша нарисовал большой и красивый граф G на 100 вершинах. Потом нарисовал 100 графов на 99 вершинах, полученных из G выкидыванием одной вершины и всех выходящих из нее ребер. Гриша взял 100 листочков бумаги и для каждого из 100 полученных графов выписал на листочек степени его вершин. Потом Гриша передал Егору 100 листочков с числами. Сможет ли Егор узнать степени вершин первоначального графа?

5. У Миши есть весы, показывающие массу взвешиваемого предмета не совсем правильно — либо на один грамм больше настоящего значения, либо на один грамм меньше (каждый раз весы обязательно ошибаются, но неизвестно, в какую сторону). Можно взвешивать любое количество предметов любое количество раз. У Миши есть 100 предметов весом не менее 10 грамм каждый. Обязательно ли Игорь сможет определить массы своих предметов с помощью этих весов?

6. Есть 40 коробок, в одной из них приз. Ведущий знает, где приз. Зритель может послать ведущему несколько записок с вопросами, требующих ответа “да” или “нет”. Ведущий вытаскивает записки из пачки, читает их и сообщает зрителю количество ответов “да”.

а) Зритель может послать ведущему только одну группу записок, и получить на нее ответ. Какое наименьшее число записок нужно послать, чтобы наверняка узнать, где приз?

б) Если после первого ответа ведущего зритель все еще не знает, где приз, он может послать еще одну группу записок на тех же условиях (но только один раз — то есть всего две группы записок). Какое наименьшее число записок нужно послать, чтобы наверняка узнать, где приз?

7. Имеется множество билетов с номерами от 1 до 30 (номера могут повторяться). Каждый из учеников вытянул один билет. Учитель может произвести следующую операцию: прочитать список из нескольких (возможно - одного) номеров и попросить их владельцев поднять руки. Сколько раз он должен проделать такую операцию, чтобы узнать номер каждого ученика?

Четырехугольная. 19.07.2011

1. Треугольник ABC вписан в окружность. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины дуг BC, CA и AB соответственно. Известно, что треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$. Докажите, что треугольник ABC правильный.

2. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты и H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Докажите, что а) четырехугольник AB_1HC_1 вписанный; б) $\angle BAH = \angle HB_1C_1$.

3. Даны окружность S, точки A и B на ней и точка C хорды AB. Для каждой окружности S_0, касающейся хорды AB в точке C и пересекающей окружность S в точках P и Q, рассмотрим точку M пересечения прямых AB и PQ. Докажите, что положение точки M не зависит от выбора окружности S_0.

4. Окружность высекает на всех четырех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что этот четырехугольник описанный.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и L соответственно. Оказалось, что $BL = CK$ и $\angle BKC = \angle CLK$. Кроме того прямая AC касается окружности, описанной около треугольника BCK. Докажите, что AL — биссектриса угла BAC.

6. В разностороннем треугольнике ABC провели биссектрису BD. Точки E и F — основания перпендикуляров, опущенных на прямую BD из точек A и C соответственно, а точка M — основание перпендикуляра, опущенного на прямую BC из точки D. Докажите, что $\angle EMD = \angle DMF$

7. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно такие, что $S(AED) = S(ABF) = \frac{1}{2}S(ABCD)$. Докажите, что прямая EF делит диагональ AC на две равные части.

Двусвязность и блоки. 19.07.2011

Определение 1 *Связный граф называется двусвязным, если при удалении любой его вершины (и всех выходящих из нее ребер) получается связный граф.*

1. а) Ребра e_1, e_2 и e_3 графа G таковы, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_2, и существует простой цикл, проходящий через e_2 и e_3. Докажите, что существует простой цикл, проходящий через e_1 и e_3. б) Докажите, что в двусвязном графе любые два ребра лежат на общем простом цикле.

2. В двусвязном графе есть цикл нечетной длины. Докажите, что в этом графе есть простой цикл нечетной длины, проходящий через данную вершину v.

Определение 2 *Блоком связного графа G называется максимальный по включению двусвязный подграф графа G.*

3. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков B_1 и B_2 либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

Определение 3 *Пусть $B_1, \dots, B_n$ — все блоки связного графа G, а $a_1, \dots, a_m$ — все точки сочленения графа G. Построим дерево блоков и точек сочленения $B(G)$ с вершинами $B_1, \dots, B_n, a_1, \dots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i является одной из вершин блока B_j.*

4. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причем все его висячие вершины соответствуют блокам.

Определение 4 *Связный граф G называется кактусом, если каждое ребро графа G принадлежит ровно одному простому циклу.*

5. а) Докажите, что все блоки кактуса — простые циклы. б) Докажите, что если в графе без мостов все циклы нечетны, то это — кактус.

6. В графе любые две вершины имеют ровно двух общих соседей. Может ли в этом графе быть ровно 100 ребер?

7. В стране, состоящей из двух республик A и B, из городов республики A провели несколько дорог с односторонним движением в города республики B так, что из каждого города республики A выходит хотя бы одна дорога, а в каждый город республики B входит хотя бы одна дорога. В республиках по 100 городов. Докажите, что можно провести не более, чем 100 новых дорог с односторонним движением так, чтобы из любого города можно было проехать в любой другой, не нарушая правил. Разрешается соединять два города несколькими дорогами.

Игрушечная. 19.07.2011

1. На доске написано число 2. Рома и Влад играют в следующую игру. За один ход разрешается к написанному на доске числу прибавить любой его делитель, отличный от самого числа, и записать результат вместо прежнего числа. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее тысячи. Первым ходит Влад. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Двое играющих ходят по очереди на циферблате с одной стрелкой. Каждый своим ходом переводит стрелку на 2 или 3 часа вперед. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку на 11 часов, начиная с положения 12 часов. Кто выигрывает при правильной игре?

3. В кучке изначально n конфет. Ваня и Илья по очереди едят конфет, соблюдая два правила. Во-первых, нельзя первым ходом съесть все конфеты. Во-вторых, нельзя съесть своим ходом больше, чем съел только что соперник. Выигрывает тот, кто съест последнюю конфет. Кто выигрывает при правильной игре?

4. В противоположных углах доски 7×8 стоят белая и черная ладьи, остальные клетки заняты серыми пешками. Двое ходят по очереди — каждый своей ладьей. Каждым ходом игрок обязан кого-нибудь съесть — пешку или ладью противника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Костя и Антон по очереди ставят в свободные ячейки полоски 1×2010 ненулевые цифры. Когда все ячейки заполнены, из цифр, написанных в ячейках, составляют число, записывая их в том же порядке. Костя выигрывает, если оно делится на 13, Антон — в противном случае. Начинает Антон. Кто выигрывает при правильной игре?

6. На бесконечном клетчатом листе двое играют в крестики-нолики по следующим правилам: первый игрок своим ходом может поставить два крестика, а второй своим ходом один нолик. Первый игрок выигрывает, если поставит 100 крестиков подряд. Может ли второй игрок ему помешать?

7. На столе лежит по 2011 монет достоинствами 1, 2, 3, 5, 10, 20, 50 копеек. В кассе имеется неограниченный запас монет всех видов. За один ход разрешается взять любую монету со стола, разменять ее на более мелкие и их положить на стол. Играют двое, и проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Числа. 20.07.2011

1. Докажите, что у каждого шестизначного числа менее 2000 делителей.

2. а) Решите в целых числах уравнение $a^2+b^2+c^2=2^{2011}$. б) Решите в целых числах уравнение $a^2+b^2+c^2+d^2=2^{2011}$.

Определение. *Числами Фибоначчи* называются элементы последовательности, задаваемой следующим правилом: $F_1=F_2=1$ и $F_{i+1}=F_i+F_{i-1}$ при $i>1$.

3. Найдите (F_n, F_{n+1}).

4. Целые числа a и b удовлетворяют уравнению $a=a^2+b^2-8b-2ab+16$. Докажите, что a — точный квадрат.

5. Даны два натуральных числа $a<b$. Докажите, что из любых b последовательных натуральных чисел можно выбрать два числа, произведение которых делится на ab.

6. Для любых трех различных элементов a, b, c бесконечного множества A натуральных чисел $(a,b)+(b,c)>(a,c)$. Докажите, что любые два разных элемента A имеют один и тот же наибольший общий делитель.

7. Докажите, что для любого натурального n число $(1+\sqrt{2})^n$ а) представимо в виде $a+b\sqrt{2}$, где $a,b\in\mathbb{N}$; б) такое представление единственно; в) при этом $(a,b)=1$. г) Докажите, что $(1-\sqrt{2})^n=a-b\sqrt{2}$.

Разнобой-4. 20.07.2011

1. а) Бесконечная дорожка разрезана на квадратики. Перед первым из квадратиков стоит лягушка, которая умеет прыгать прыжками двух типов — длинным и коротким. Длинным прыжком лягушка перепрыгивает через квадратик, а коротким — прыгает на соседний. Найдите число различных маршрутов, которыми лягушка может допрыгать до квадратика с номером n. б) Найдите $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots$

2. В графе 2000 вершин и изначально нет ребер. Двое игроков по очереди проводят новые ребра графа (кратные ребра и петли не допускаются). Игрок, после хода которого получается двусвязный граф, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Выпуклый $n-$угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Разрешается проделывать следующее преобразование (перестройку): взяв пару треугольников ABD и BCD с общей стороной, заменить их на треугольники ABC и ACD. Пусть $P(n)$ — наименьшее число перестроек, за которое можно перевести любое разбиение в любое. Докажите, что а) $P(n) \geqslant n-3$; б) $P(n) \leqslant 2n-7$.

4. Решите в вещественных числах уравнение $a^4 + b^2 = a^8 + b^{2010} = 1$.

5. В городе 57 автобусных остановок, через какие-то остановки проходят автобусные маршруты с выполнением следующих условий: 1) любые два маршрута имеют ровно одну общую остановку; 2) любые две остановки соединены маршрутом напрямую; 3) каждый маршрут содержит не меньше трёх остановок. Докажите, что каждый маршрут содержит одинаковое количество остановок.

6. У бедного мальчика Миши всего 29 монет, и к тому же ровно одна из них фальшивая (легче настоящей). У жадного мальчика Никиты есть весы, но за каждое взвешивание он берет с Миши плату: одну конфету, если одна из чашек перевесила, и две конфеты, если весы остались в равновесии. Какое наименьшее количество конфет должен приготовить Миша, чтобы заведомо определить фальшивую монету с помощью Никитиных весов?

7. 16 команд участвуют в футбольном первенстве. Оно проходит в несколько этапов. На каждом этапе какие-то 6 команд играют между собой однокруговой турнир. Могло ли оказаться, что после нескольких таких этапов все команды сыграют друг с другом по 2 раза?

Геометрический разнобой-2. 21.07.2011

1. Из точки P внутри равностороннего треугольника ABC опущены перпендикуляры PK, PL и PM на стороны этого треугольника. Докажите, что периметр треугольника KLM не меньше полупериметра треугольника ABC.

2. В треугольнике ABC стороны BC, CA и AB равны a, b и c соответственно. а) Докажите, что если угол C острый, то $a^2 + b^2 > c^2$. б) Докажите, что если угол C тупой, то $a^2 + b^2 < c^2$.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, а затем проведены биссектрисы LN и LM углов ALB и ALC (точки N и M лежат на отрезках AB и AC). Оказалось, что $LN = LM$. Докажите, что или $AB = AC$, или угол BAC — прямой.

4. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$, K — середина AB, L — середина BC, M - середина CD, N — середина DE, P — середина KM, Q — середина LN. Докажите, что отрезок PQ параллелен стороне AE и равен её четверти.

5. Дан правильный восьмиугольник и точка P на плоскости. Докажите, что проекции точки P на главные диагонали восьмиугольника являются вершинами квадрата.

6. В угол вписаны две окружности. Первая касается одной стороны угла в точк A, а вторая касается другой стороны угла в точке B. Докажите, что эти окружности высекают на прямой AB равные отрезки.

7. На сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбраны точки K и L соответственно таким образом, что $\angle LKA = \angle LBC$. Докажите, что площади треугольников ALB и KLC равны.

Неравенства-2. 21.07.2011

1. Докажите, что $1,01^{1000}$ больше а) 10; б) 1000.

2. Докажите, что для любого M найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} > M$.

3. а) Докажите, что для положительных чисел a и b выполнены неравенства

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

При каких a и b в этих неравенствах достигается равенство?

б) Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнены неравенства

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd} \geqslant \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}.$$

При каких a, b, c, d в этих неравенствах достигается равенство?

4. а) Докажите, что для любых вещественных чисел a, b и c выполнено $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. б) Докажите, что для любых вещественных чисел a, b, c, d и e выполнено неравенство $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqslant a(b+c+d+e)$.

5. Пусть a, b, c и d — такие числа, что $ab = 1$ и $ac+bd = 2$. Докажите, что $cd \leqslant 1$.

6. Известно, что $1 \leqslant a \leqslant 2 \leqslant b, c$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2-abc \geqslant 4$.

7. Докажите для положительных a, b, c, d неравенство $\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{abcd}$.

Заключительная олимпиада. 24.07.2011

1. Имеется n натуральных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность. Сум-ма этих чисел равна 2011. Найдите наименьшее возможное значение n.

2. На лужайке лежали вповалку дети. Когда старший преподаватель увидел это безобразие и пересчитал детей, то сказал, что он точно может выбрать из них либо 15 человек из какого-то одного отряда, либо 10 человек из разных отрядов. Известно, что старший преподаватель в лицо детей не знает, но никогда не ошибается. Какое наименьшее число детей могло валяться на линейке?

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E, а на биссектрисе BD — точка F так, что EF параллельно AC и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.

4. Иван Андреевич выдал Мише Мрыхину пять различных палочек и попросил выбрать из них три так, чтобы составить из них прямоугольный треугольник. Оказалось, что Миша умеет делать это четырьмя различными способами. Найдите отношение длин самой длинной и самой короткой палочек.

5. На клетчатой доске размером 100×100 двое по очереди расставляют цифры: первый — единицы, второй — нули. После того, как вся доска заполняется, считают суммы цифр по столбцам и по строкам. Если хотя бы две из этих сумм нечетны, побеждает первый игрок, в противном случае —второй. Кто выиграет при правильной игре?

6. Натуральные числа m и n таковы, что m^2+n^2+m делится на mn. Докажите, что m — квадрат натурального числа.

7. На планете 10000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 200 дорог. Докажите, что на планете не больше 100 столиц.

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ площади $\frac{1}{2}$ выполнено неравенство $AB+BD+DC \leqslant 2$. Чему может быть равен угол между диагоналями этого четырёхугольника?