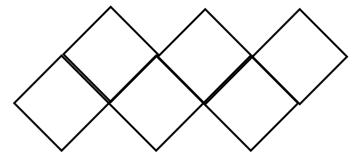
Вступительная олимпиада, 4 июля

1. На рисунке изображен зигзаг из 6 квадратиков 1 см $\times$ 1 см. Его периметр равен 14 см. Чему равен периметр аналогичного зигзага, состоящего из 2011 квадратиков?



2. На доске было написано несколько чисел, среднее арифметическое которых равно 20. После того, как Ваня стер одно из чисел, среднее арифметическое стало равно 19. А если бы Ваня, вместо того, чтобы стирать, дописал бы число, равное стертому, то среднее арифметическое чисел на доске было бы равно 20,5. Сколько чисел написано на доске и какое число стер Ваня?

3. В треугольнике *ABC* угол $\angle A$ больше угла $\angle B$. Докажите, что длина стороны *BC* больше половины длины стороны *AB*.

4. Стоимость книги составляла 1000 руб. Во время кризиса магазин несколько раз повышал цену на 10%, а если спроса не было, то снижал на 10%. Могла ли книга в итоге стоить 561 руб.33 коп?

5. Для положительных *m*, *n* введем обозначение $m \circ n = \dfrac{m+n}{mn+4}$. Найдите значение выражения $(\ldots((2011 \circ 2010) \circ 2009) \circ \ldots \circ 2) \circ 1$

6. В клетках квадрата 13×13 расставлены 0 и 1. Оказалась, что сумма чисел в любом квадрате 2×2 четна, а в любом кресте из 5 клеток – нечетна. Докажите, что сумма чисел в углах квадрата 13×13 делится на 4.

7. Биссектрисы треугольника *ABC* пересекаются в точке *I*. Известно, что *AI*+*AC* = *BC*¸ Докажите, что $\angle CAB = 2\angle ABC$.

8. В компании 100 человек. Оказалось, что любых 98 из них можно разбить на 49 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании?

ИГРЫ В БИЛЬЯРД, 5 июля

1. В домике недалеко от моря живет влюбленный метеоролог, а его девушка живет в другом домике. Метеоролог собирается зайти к ней, но долг зовет его выйти на берег моря, чтобы посмотреть на погоду. Как бы ему пройти поскорее?.(*Перевод на математический*: Есть точки A и B по одну сторону от прямой. Надо найти точку C на этой прямой так, чтобы сумма длин отрезков AC и BC была наименьшей).
2. Есть два города, между которыми течет река с параллельными берегами. Нужно проложить самую короткую дорогу из одного города в другой. Ах да, есть условие – мост должен быть перпендикулярен берегам.
3. Шатающийся человек выходит из бара и идет домой. При этом он какое-то время идет по отрезку прямой, потом резко поворачивает, и так несколько раз. К утру он пришел домой. Докажите, что если бы он не шатался, а шел домой по прямой, он пришел бы быстрее (*Перевод на математический:* Докажите, что длина любой ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего начало и конец).
4. На треугольном мысе живет работящий метеоролог. Утром он выходит на один берег, потом на другой, а потом идет домой пить чай. Как ему сделать свою работу побыстрее, если а) мыс представляет собой острый угол; б) мыс – это прямой угол; в) мыс – это тупой угол. (*Перевод на математический:* постройте треугольник наименьшего периметра, одна вершина которого лежит в данной точке, а две другие – на сторонах угла).
5. А теперь та же задача про влюбленного метеоролога, девушка которого живет на том же мысе.
6. Дан угол ABC и точка D внутри него. Постройте отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находится в точке D.
7. а) Диагонали; б) углы выпуклого пятиугольника равны a, b, c, d и e. Всегда ли из этих пяти чисел можно выбрать три так, чтобы они были длинами сторон некоторого треугольника?
8. Бильярд имеет форму прямоугольника. В произвольной точке преподаватель ставит шар. А лмшонок, имеющий абсолютное зрение и умение делать точные удары, должен выполнить некую задачу. Всегда ли он сможет:

а) загнать шар в любую лузу? (лузы располагаются в углах прямоугольника и в серединах длинных сторон);

б) загнать шар в любую лузу так, чтобы он предварительно отразился от одной из стенок?

в) ударить шар так, чтобы он, ударившись об одну стенку, вернулся на исходное место?

г) ударить шар так, чтобы он, ударившись о ВСЕ стенки, вернулся на исходное место?

д) сколько решений имеют пункты а)-г)?

9. Бильярд имеет форму прямоугольника. В произвольной точке преподаватель ставит шар, а другую точку отмечает красным. Лмшонок Зиновий, имеющий абсолютное зрение и умение делать точные удары, должен бить шар так, чтобы он прошел через красную точку

а) ударившись об одну стенку; б) ударившись о все стенки.

Сможет ли Зиновий выполнить непосильную задачу? Сколько способов выполнить эти дурацкие требования имеет Зиновий в каждом из случаев?

Комбинаторика традиционная и разная, 5 июля 2011 г.

1. В ЛМШ проживает некоторое количество людей, в том числе 100500 детей. Обитатели лагеря по-разному относятся к зарядке. Известно, что мальчиков в 2 раза больше, чем девочек. При этом среди ненавистников зарядки одинаковое число взрослых и девочек. Зная, что девочек, не любящих зарядку в 9 раз больше, чем её обожающих, найдите число взрослых, не любящих физкультуру.

2. Для обеспечения питьевого режима необходимо выбрать трех дежурных из 10 ничего не подозревающих детей отряда М7. Также необходимо выбрать 7 игроков для игры в водный футбол (на раздевание) из тех же 10 школьников отряда. В каком случае выбор больше и во сколько раз?

3. Для обеспечения питьевого режима необходимо выбрать трех дежурных из 10 ничего не подозревающих детей отряда М7. Также необходимо выбрать семерых школьников, которые отнесут воду в другие отряды (один физикам, другой биологам, третий химикам, а также нужны водонесущие для М6, М8, М9, М10) из тех же 10 школьников отряда. В каком случае выбор больше и во сколько раз?

4. В коридоре пока висят 10 целых лампочек. Сколько имеется различных способов хулиганам П., У. и Л. разбить несколько лампочек?

5. Назовем натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только а) нечетные цифры; б) цифры меньше 5. Сколько существует четырехзначных «симпатичных» чисел?

6. А) Сколькими способами можно расставить k ладей на доске $N\times N$? Б) Сколькими способами можно расставить k ладей на доске $N\times N$ так, чтобы они не били друг друга? В) То же самое, поле зубчатое (см. рисунок внизу).

7. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в именах ГРИША? МАША? КЛАРИССА?

8. В хоровод встало 66 человек и 11 преподавателей. Сколькими способами это можно сделать, чтобы а) Будин и Рубанов стояли рядом; б) Будин и Рубанов не стояли рядом?

9. Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999.

а) Сколько номеров, у которых есть хоть одна нечётная цифра?
б) Сколько номеров содержат цифру 7?
в) Сколько номеров, не содержащих цифр 7 и 0?
г) Сколько номеров, содержащих цифру 7 и не содержащих цифры 0?

10. У Сан Саныча есть лимонники и ватрушки, в сумме 13, кроме того, лимонников больше. Он хочет в перерыве накормить детей своей группы, в надежде, что они начнут решать задачи. Оказалось, что есть 143 способа сделать это. Сколько ватрушек у Сан Саныча? Или он просто ошибся?

В сумме мы все вполне средние, 6 июля.

1. Коля и Вася за январь получили по 20 оценок, причём Коля получил пятерок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, троек столько же, сколько Вася двоек, и двоек столько же, сколько Вася - пятёрок. При этом средний балл за январь у них одинаковый. Сколько двоек за январь получил Коля?

2. У нас есть 13 яблок и весы, на которых можно взвесить ровно по два яблока. Можно ли найти суммарный вес всех яблок? Можно ли найти вес каждого яблока в отшим количеством взвешиваний.

3. В записи 7,*,*,*,*,*,*,2 замените звездочки числами так, чтобы сумма любых трех соседних чисел равнялась 20.

4. По кругу расставлены цифры 1, 2, 3,…, 9 в произвольном порядке. Каждые четыре цифры, идущие подряд по часовой стрелке, образуют четырехзначное число. Найти сумму всех таких чисел.

5. Даны цифры, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Аня записала с их помощью все возможные четырехзначные числа.

а) Найдите сумму всех чисел, которые записала Аня.

б) Таня записала с их помощью все четырехзначные числа, но с условием, что цифры в них не повторялись. Найдите сумму всех чисел, которые записала Таня.

6. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 записали в вершинах куба, а на его ребрах написали двузначные числа, которые получаются с помощью цифр на концах ребер. Найдите сумму чисел на ребрах.

7. Дети выписывают на полу корпуса числа, причем с условием, что сумма любых семи подряд идущих чисел отрицательна, а сумма любых одиннадцати подряд идущих положительна. Понятно, что безобразие не может продолжаться долго. А сколько пола можно попортить, если каждое число занимает 0,5 м коридора?

8. В записи 7,*,*,*,*,*,*,2 замените звездочки числами так, чтобы каждое число, кроме двух крайних, равнялось а) сумме; б) полусумме двух соседних с ним чисел.

9. У каждого трехзначного числа нашли произведение его цифр. Получилось 900 произведений: от $1\times0\times0$ до $9\times9\times9$. Чему равна их сумма?

10. Обозначим $s(n)$ разность между суммой четных и суммой нечетных цифр числа n (если соответствующих цифр в десятичной записи n нет, то их сумма считается равной 0). Найдите сумму $s(1)+s(2)+\ldots+s(2011)$.

Комбинаторика дополнительная и новая, 6 июля

1. Ольга Сергеевна хочет вывести на вечернюю линейку 5 Миш и 4 Ань. При этом нельзя, чтобы дети с одинаковыми именами стояли рядом. Сколькими способами она сможет это сделать? (все Миши и Ани имеют разные фамилии, и вообще они не похожи).

2. Требуется составить расписание отправления поездов на различные дни недели. При этом необходимо, чтобы 3 дня отправлялось по 2 поезда в день, два дня по одному, и два дня по три. Сколько можно составить различных расписаний?

3. Сколько существует а) восьмизначных; б) четырёхзначных натуральных чисел, в которых цифры идут в порядке возрастания?

4. Куб с ребром длины 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1\times20\times20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоев.

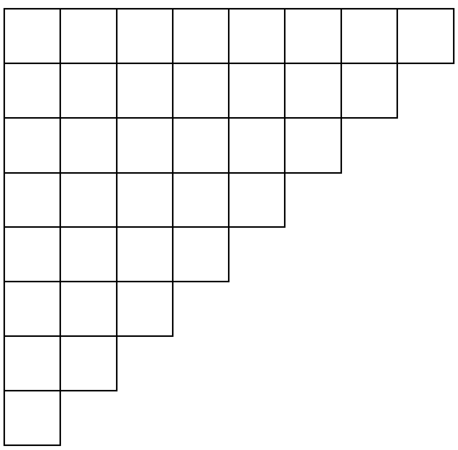
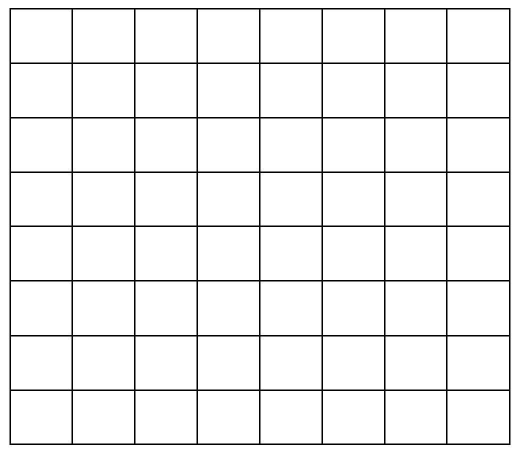


Рисунок 2



5. Король идёт по клетчатому полю $N\times N$ из левого верхнего угла в правый нижний, перемещаясь за ход на 1 шаг вправо или на 1 шаг вниз. Сколькими способами он может добраться?

6. Король из предыдущей задачи идёт по урезанному полю (рис. 2). Пронумеруем конечные клетки на диагонали с левой нижней до правой верхней.

А)Докажите, что число способов добраться до одной из клеток с нечётным номером и число способов добраться до одной из клеток с чётным номером совпадают. Б)Найдите, чему равна сумма этих чисел.

ЗАПАС КАРМАН НЕ ТЯНЕТ, 6 июля

1. Дан остроугольный треугольник ABC.

а) докажите, что сумма его медиан меньше его периметра.

б) докажите, что сумма его высот меньше его периметра.

в) докажите, что сумма его биссектрис меньше его периметра.

2. Бильярд имеет форму прямоугольного треугольника, один из острых углов которого равен 30^o. Из этого угла по медиане противоположной стороны выпущен шар (материальная точка).Доказать, что после восьми отражений (угол падения равен углу отражения) он попадёт в лузу, находящуюся в вершине угла 60^o.

3. Докажите, что среди треугольников с заданным основанием и площадью наименьший периметр имеет равнобедренный.

4. Бильярд имеет форму остроугольного треугольника. Нужно поставить на любую его сторону шар и затем построить такую траекторию, двигаясь по которой шар, ударившись о каждую из оставшихся сторон по разу, окажется в начальной точке.

5. В остроугольном треугольнике на каждой из сторон поставлено по точке. Затем эти точки соединяются, образуя треугольник. Необходимо из всех таких треугольников найти треугольник с наименьшим периметром.

6. В бильярде формы равностороннего треугольника отмечена точка. Шар, катаясь по бильярду, проехал по этой точке 7 раз. Докажите, что он проедет по ней и восьмой раз.

Марш по площади! 7 июля.

Определение (умное, непонятное, обязательно попросите преподавателей повторить). Каждой фигуре *M* на плоскости ставится в соответствие число S_M, называемое площадью, такое, что выполнены следующие свойства:

1) $S_M \geq 0$;

2)Площади равных фигур равны;

3)Если фигура *M* состоит из фигур *A* и *B*, не имеющих общих внутренних точек, то $S_M = S_A + S_B$;

Комментарий от НОС: неужели ни один из детей не захочет задать вопрос?

4)Площадь квадрата 1×1 равна 1.

ОПс.. А теперь задачи…

0. а) Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

б) Докажите, что площадь остроугольного треугольника равна половине произведения произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту.

в) Докажите то же самое утверждение для произвольного треугольника.

г) Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту.

д) Докажите, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

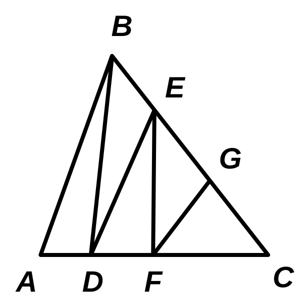
1. Диагонали трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* пересекаются в точке *O*. Докажите, что $S_{AOB} = S_{COD}$

2. а) Из точки, лежащей внутри правильного треугольника, опустили перпендикуляры на стороны. Докажите, что сумма этих трех длин не зависит от выбора точки.

б) Для каких еще многоугольников верен этот факт?

3. Точку, лежащую внутри правильного шестиугольника соединили со всеми его вершинами. Докажите, что суммы площадей получившихся треугольников, взятых через один, равны.

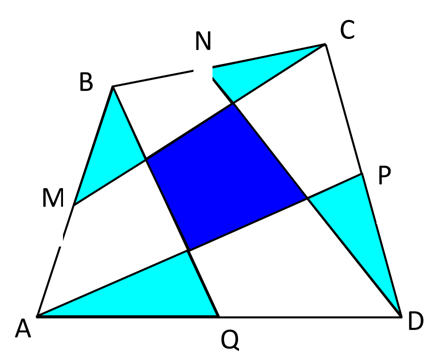
4. а) Докажите, что медиана делит треугольник на два равновеликих. б) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины, и делят треугольник на 6 равновеликих



5. Как в треугольнике *ABC* провести ломаную, чтобы все пять полученных треугольников имели одинаковую площадь?

6. Через точку *D*, лежащую на стороне *BC* треугольника *ABC*, проведены прямые параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны *AB* и *AC* соответственно в точках *E* и *F*. Докажите, что треугольники *CDE* и *BDF* равновелики.

7. Дан треугольник *ABC*. Найдите геометрическое место точек *M*, таких, что $S_{MAB}<S_{ABC}$, $S_{MBC}<S_{ABC}$, $S_{MAC}<S_{ABC}$.



8. В выпуклом четырёхугольнике отметили середины сторон и соединили их с вершинами так, как показано на рисунке. Докажите, что площади серой и черной частей равны.

9. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разделил его на два четырехугольника, имеющих равные площади. Докажите, что эти стороны параллельны.

10. Внутри правильного *n*-угольника взята точка, проекции которой на все стороны попадают во внутренние точки сторон. Этими точками стороны разделяются на 2*n* отрезков. Занумеруем их подряд: 1, 2, 3, ..., 2*n*. Доказать, что сумма длин отрезков с чётными номерами равна сумме длин отрезков с нечётными номерами.

11. ТРУДНАЯ, но НЕ ОЧЕНЬ

*Учитель продиктовал классу задание, которое каждый ученик выполнил в своей тетради. Вот это задание: "Нарисуйте две концентрические окружности радиусов 1 и 10. К малой окружности проведите три касательных так, чтобы точки их пересечения A, B и C лежали внутри большой окружности. Измерьте площадь S треугольника ABC и площади S_1, S_2 и S_3 трёх образовавшихся "секторов" с вершинами в точках A, B и C. Найдите $S_1+S_2+S_3-S$." Доказать, что у всех учеников (если они правильно выполнили задание) получились одинаковые результаты.

И опять о разных суммах, сегодня уже 7 июля

11. В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14 слонов). Найдите вес каждого из 15 слонов.

12. Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

13. У Алеши есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алеша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Сережа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос - и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Сережа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алешей равно количеству различных чисел среди записанных Сережей.

14. Алексей Игоревич хитро перенумеровал всех 66 семиклассников, присвоив каждому какой-то уникальный номер. Он выдал тайну, что сумма ЛЮБЫХ а) 29; б) 12 чисел делится на номер отряда, то есть на 7. Можно ли утверждать, что сумма всех чисел (то есть всего отряда) делится на 7?

15. Рената Ринатовна создала новую игру “Триминошка». Правила её еще никому неизвестны, но уже почти изготовлены сами триминошки. Триминошка представляет собой три квадратика вместе (как доминошка – два), на каждом квадратике от 0 до 6 точек. При этом неважно, в каком порядке идут квадратики (например, триминошка 023 и 203 – одна и та же). Сколько всего разных триминошек в этой игре?

16. Теперь профи решили усовершенствовать эту игру, сказав, что квадратик в центре ведь отличается от квадратиков по краям. Например, триминошка 102 и 201 – одна и та же, а 012 от них отличается. Сколько тринимошек в игре «Профи-триминошка»?

17. Сколькими способами можно представить число 1 000 000 в виде а) двух натуральных сомножителей; б) трех натуральных сомножителей, если способы, отличающиеся порядком, считаются разными. Ну и та же задача, в) два сомножителя; г) три сомножителя, при этом порядок сомножителей не важен.

18. В клетках таблицы 10×10 записаны числа от 0 до 99 (первая горизонталь нумеруется слева направо числами от 0 до 9, вторая от 10 до 19 и т. д.). Перед некоторыми числами поставлены плюсы, перед остальными - минусы, так что в каждой горизонтали и в каждой вертикали по 5 плюсов и по 5 минусов. Докажите, что сумма всех чисел равна 0.

Абака, 7 июля.

	10	**20**	**30**
Геометрия	(10)Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M. При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35°$, $\angle CAM = 15°$. Найдите углы треугольника.	Два угла треугольника равны 10° и 70°.Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины третьего угла треугольника.	Какое наибольшее число острых внутренних углов может иметь выпуклый 2011-угольник?
Числа	Найдите наибольший общий делитель всех четырехзначных чисел, записанных при помощи цифр 3, 4, 5, 6.	Число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести на последнее место, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите наименьшее число с таким свойством.	Столько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^2y^3 = 6^{12}$
Комбинаторика	На прямой отмечено 100 синих и n красных точек, причем между двумя одноцветными точками есть точка другого цвета. Чему может быть равно n? Укажите все варианты.(	Даны 2011 чисел. Какое наибольшее количество попарных сумм этих чисел может быть нечётными числами?	В клетчатом квадрате 4×4 отмечены все 25 узлов сетки. Сколько существует различных прямых, каждая из которых проходит хотя бы через три отмеченные точки?

	10	20	30
Логика	Кем является мне жена мужа сестры брата моей мамы?	Таня задумала число. Одно из следующих утверждений о нем неверно, а три верно: оно двузначное, оно простое, оно является квадратом натурального числа, оно делится на 5. Какое число было задумано?	Разговаривают 2011 попугаев: Первый: второй попугай – оранжевый Второй: третий попугай – оранжевый; …. 2009й попугай: 2010й попугай – оранжевый; 2010й попугай: 2011й попугай – голубой бегемот. 2011й попугай: я не голубой бегемот! Известно, что все оранжевые попугаи и только они лгут. Какие попугаи оранжевые?
Конструкции	На какое наибольшее количество различных прямоугольников можно разрезать (без остатка) по линиям сетки клетчатый квадрат 7×7	У мальчика и девочки было N карточек с числами от 1 до N. Девочка взяла 5 карточек и перемножила числа на них, после мальчик взял 5 карточек из оставшихся и сделал то же самое. Полученные числа оказались равны. Какое наименьшее возможное значение N и как делить карточки?	Какое наименьшее число клеток можно вырезать из шахматной доски так, чтобы на оставшейся части нельзя было сделать хода конем?
Часы	Часы с боем делают 3 удара за 4 секунды. За сколько секунд они сделают 9 ударов?	Сколько времени за сутки высвечивается на электронных часах цифра 3?	Коля отправился за грибами между восемью и девятью часами утра в момент, когда часовая и минутная стрелки его часов были совмещены. Домой он вернулся между двумя и тремя часами дня, при этом стрелки его часов были направлены в противоположные стороны. Сколько продолжалась Колина прогулка?

	40	50	60
Геометрия	В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB* = *BC*) на стороне *BC* взяли точки *K* и *M* (*K* ближе к *B*, чем *M*) такие, что *KM* = *AM* и углы *MAC* и *KAB* равны. Чему равен угол *BAM*?	В треугольнике *ABC* сторона *AC* – наибольшая. На ней отложены отрезки *AK* = *AB* и *CM* = *CB*. Угол *MBK* равен 20°. Найдите угол *ABC*.	Внутри квадрата отмечены 2011 точек. Некоторые из них соединены с вершинами квадрата и между собой так, что квадрат разбился на треугольники. При этом все отмеченные точки оказались вершинами этих треугольников. Найдите число треугольников.
Числа	Найти все девятизначные числа в десятичной записи которых есть все цифры кроме 0, и которые после умножения на 8 дают девятизначное число, составленное из тех же цифр.	Какое наименьшее натуральное число имеет более 12 натуральных делителей?	Составьте из цифр 1, 2, 3, 4, 5 одно двухзначное и одно трехзначное число, так чтобы второе делилось на первое. Каждая цифра должна быть использована ровно один раз, найдите все ответы.
Комбинаторика	На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?	Есть десять шариков трех цветов. Известно, что существует ровно 360 способов поставить их в ряд. Сколько шариков каждого цвета может быть?	Футбольная команда «Урук-Хай», выступающая в чемпионате ЛМШ-2011, состоит из 15 преподавателей. Среди них – два вратаря, три защитника, три полузащитника и шесть нападающих, а Иван Андреевич может сыграть на любой позиции, кроме вратарской. На игру с командой «Фумигатор» тренер «Урук-Хая» собирается выставить состав из 1 вратаря, 2 защитников, 2 полузащитников и 1 нападающего. Сколькими способами он может он это сделать?

	40	50	60
Логика	Найдите ***все*** натуральные числа *n*, 980≤*n*≤1000, для которых истинно ***одно и только одно*** из следующих утверждений: 1) *n* делится на 2; 2) *n* делится на 3; 3) *n* делится на 6; 4) *n* делится на 2, но не делится на 3; 5) *n* делится на 3, но не делится на 2; 6) *n* не делится ни на 3, ни на 2; 7) *n* делится на 5.	Даны некоторые числа в системе записи, которая использовалась в русской письменности до начала XVIII века: ФЛВ = 532, ФМД = 544, РКВ = 122, ТЛЕ = 335, ХМЕ = 645. Определите, каким числам соответствовали записи ХКД, СЛВ, ТЛГ.	Даны некоторые числа и их обозначения в системе знаменитого индийского математика *Ариабхаты*. Заполните пропуски. 2 – кха, 214 – дхакхи, 1423 – ?, 2311 – таби, 20011 – такху, 111400 – дхиту, 141102 – кхатидху, 230023 – бабу, 230211 – **?**, 2401 – кабхи, 10012 – тхаку, **?** – бхатхи, **?** – даки.
Конструкции	14 одинаковых кусков бикфордова шнура связали и уложили в виде квадрата 6×6. Четыре запала нужно разместить так, чтобы после их одновременного возгорания весь шнур сгорел за наименьшее время. Чему равно это время, если сторона маленького квадратика сгорает за одну секунду?	Какое наибольшее трёхзначное число можно получить, поставив несколько плюсов в записи **1 2 3 4 5 6 7 8 9?** В ответе укажите также расстановку знаков.	Представьте число 1 в виде суммы 10 различных дробей с числителем 1.
Часы	Петя проснулся в восьмом часу утра и заметил, что часовая стрелка его будильника делит пополам угол между минутной стрелкой и стрелкой звонка, показывающей на цифру 8. Через какое время должен прозвенеть будильник?	Сколько существует положений стрелок, по которым нельзя определить время, если не знать, какая стрелка часовая, а какая минутная? (Считается, что положение каждой из стрелок можно определить точно, но следить за тем, как стрелки двигаются, нельзя.)	В Италии выпускают часы, в которых часовая стрелка делает в сутки один оборот, а минутная - 24 оборота, причем, как обычно, минутная стрелка длиннее часовой (в обычных часах часовая стрелка делает в сутки два оборота, а минутная - 24). Рассмотрим все положения двух стрелок и нулевого деления, которые встречаются и на итальянских часах, и на обычных. Сколько существует таких положений? (Нулевое деление отмечает 24 часа в итальянских часах и 12 часов в обычных часах).

НОД И НОК, 9 июля

0. Точка D лежит на стороне AC правильного треугольника ABC, со стороной равной 75, причем CD =40. Из вершины E параллельно BC выпрыгивает паучок. За собой он тянет след паутины. Когда паучок натыкается на стенку или на паутинку, он отталкивается от неё по принципу бильярдного шарика. Когда пучок натыкается на узел (точку, в которой пересекаются нити паутины либо паутина крепится к стенке), он останавливается. Найдите расстояние, которое пролетел паучок от последнего отталкивания до остановки.

1. От прямоугольника 49×105 одним разрезом отрезают квадрат. То же проделывают с получившимся прямоугольником. Так делают до тех пор, пока очередной прямоугольник не окажется квадратом. Найдите сторону полученного квадрата.

2. Найдите минимальный размер стороны квадрата, который можно замостить прямоугольниками 21×56.

3. Даны сосуды объёмов 24 и 66 литров. Разрешается переливать воду из одного в другой, до тех пор, пока сосуд, в который переливают, не заполнится полностью. Также можно опорожнять сосуды и наполнять доверху. Какой минимальный объём воды можно получить в одном из сосудов?

4. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A, AC = 225, AD = 162. Из вершины C вдоль стороны BC выпускается бильярдный шар. Найдите расстояние до ближайшей точки на стороне AD, в которой побывает шар (а шар не устает и носится по бильярду бесконечно долго).

5. Покажите, что $(a, b) = (|a - b|, b)$ и найдите, чему равно (504, 1024)

6. а) Докажите, что $[a, b]\cdot(a, b) = ab$; б) Пусть даны числа c и d. Известно, что они являются соответственно НОД и НОК для некоторых a и b. Выразите a и b через c и d.

7. Лесная ведьма взвешивала 66 заточенных у неё в подвале детей, чтобы узнать, насколько они поправились. Выяснилось, что сумма любых а) 29; б) 12 весов делится на 7 – любимое число ведьмы. Можно ли утверждать, что сумма всех весов делится на 7?

8. Среди 66 семиклассников некоторые хотят участвовать в чемпионате отряда по настольному теннису. Степан Юрьевич хочет составить первый тур, там должно быть четное число игроков. Для этой цели он ведет себя странно: собирает 17 детей и узнает, четно или нечетно среди этой группы количество теннисистов. За какое наименьшее число собраний Степан Юрьевич узнает, может ли он провести первый тур турнира, никого при этом не обидев?

9. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Докажите, что он сможет прискакать в любую клетку.

10. Назовем суперконем фигуру, которая прыгает почти как конь, но на p клеток в одну сторону и на q клеток в перпендикулярном направлении. Например, обыкновенный конь является суперконем типа (1, 2). Исследуйте, на какие клетки может попасть суперконь при различных значениях p и q.

НОД и НОК наносят ответный удар, 9 июля

11. Дан параллелограмм *ABCD* с углом 60° при вершине *A*, *AC* = 225, *AD*=162. Из вершины *A* выползает жук. При этом он может двигаться только под углом 60° к любой из сторон параллелограмма. Жук движется по прямой, пока не достигнет стороны параллелограмма (либо вершины, при движении по стороне). Может ли он остановиться в точке *F* на *AC*, такой, что
а) *AF*=10; б) *AF*=9*k*.

12. Докажите, что если (a, b)=d, то найдутся такие целые *m* и *n*, что $d = ma + nb$.

13. а)Докажите, что числа 13*n*+21 и 8*n*+13 взаимно просты при любом целом *n*.
б) Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ – несократима при любом натуральном *n*.

14. На бесконечной ленте два автомата каждую секунду делают отметки, начиная от края ленты: 1-ый автомат – через 16 см красным цветом, 2-ой автомат – через 25 см синим цветом. Через какое время красная и синяя отметки впервые окажутся на расстоянии 1 см друг от друга?

15. Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, m > n. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает взявший последнюю спичку в одной из кучек. Докажите, что если m > 2n, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.

16. Найдите а) (2^{140}–1, 2^{120}–1); б) $(\underbrace{11...1}_{51},\underbrace{11...1}_{81})$.

17. Докажите, что в вершинах любого графа можно расставить натуральные числа так, что любые два числа, соединенные ребром имеют НОД>1, а числа, не соединенные ребром, взаимно просты.

18. В государстве имеют хождение монеты достоинством *a* и *b* золотых, где *a* и *b* – взаимно простые натуральные числа.а) Докажите, что такими монетами можно набрать (без сдачи) любую сумму, начиная с 2*ab* золотых.б) Найдите наибольшее число золотых, которое нельзя набрать такими монетами.

19. Пусть *a* и *b* – взаимно простые натуральные числа. В доме есть лифт с двумя кнопками, одна из которых поднимает лифт на *a* этажей вверх, а вторая опускает на *b* этажей вниз, если это возможно (например, на последнем этаже первая кнопка не работает). Докажите, что на этом лифте можно попасть с любого этажа на любой другой, если высота дома не меньше
а) 2*ab*; б) *a* + *b*.

20. а) На прямой 8x–13y+6=0 найдите число целых точек, лежащих между прямыми $x = -100$ и $x = 50$.
б) Найдите то же самое для прямой 6x–15y+3=0.

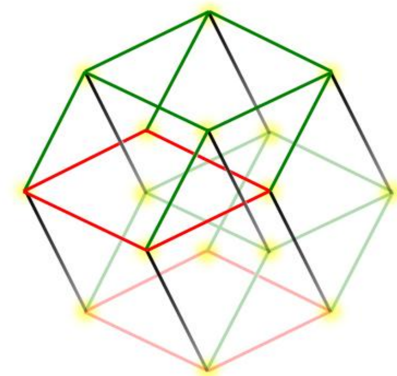
21. Числа *a*, *b* и *c* взаимно простые в совокупности целые числа, то есть НОД(*a*, *b*, *c*) = 1. Докажите, что любое целое число *d* линейно представимо через *a*, *b* и *c*, то есть любого *d* существуют целые *x*, *y* и *z* такие, что *d = ax + by + cz*.

22. Даны три сосуда с емкостями 12, 9, и 5 литров соответственно. Изначально первый сосуд полон, а остальные два пусты.

а) Требуется с помощью правильных переливаний разделить жидкость на две равные части.

б) Покажите в трилинейных координатах решение пункта а).

ГиперКуб, 9 июля



1. Расставьте на шахматной доске несколько коней, чтобы каждый бил а)3, б)4 других. Причем здесь гиперкуб?
2. Выберем какую-нибудь вершину в гиперкубе и запишем в строчку количество вершин удаленных от нее на 0, 1, 2 и т.д. ребер. Например, для трехмерного куба будет последовательность 1, 3, 3, 1; а для куба нарисованного справа: 1, 4, 6, 4, 1. Получились строчки треугольника Паскаля, почему? Вершины гиперкуба можно обозначить последовательностями из нулей и единиц. Зная это, вычислите элементы треугольника Паскаля.
3. Тридцать три буквы русского алфавита кодируются последовательностями из нулей и единиц длины *n*. При каком наименьшем *n* кодирование можно выбрать однозначным (т.е. разным буквам соответствуют разные коды)?
4. Пусть в предыдущей задаче при передаче сообщения возможна ошибка не более чем в одном разряде. Как это можно описать в терминах гиперкуба? Хватит ли *n* = 8?
5. Имеется множество билетов с номерами от 1 до 33 (номера могут повторяться). Каждый из учеников вытянул один билет. Учитель может произвести следующую операцию: прочитать список из нескольких (возможно - одного) номеров и попросить их владельцев поднять руки. Сколько раз он должен проделать такую операцию, чтобы узнать номер каждого ученика? Предостережение: учеников не обязательно 33.
6. Имеется табло с горящими лампочками. Каждый выключатель может быть подсоединен к некоторым лампочкам. При нажатии на кнопку выключателя соединенные с ними лампочки меняют свое состояние: горящие тухнут, а негорящие зажигаются. Какое наименьшее число выключателей необходимо, чтобы можно было зажечь любой набор лампочек.

Обязательно надо делиться! 11 июля

0. В М7 приехали 66 учеников. Во время первого занятия каждый из них решил РАЗНЫЙ набор задач (т.е. для любых двух лмшат есть задача, которую один из них решил, а другой нет). Какое наименьшее количество задач было предложено?

1. В М7 приехали 66 учеников. Во время первого занятия каждый из них решил ровно 3 задачи из предложенных. Известно, что для любых двух лмшат есть задача, которую один из них решил, а другой нет. Какое наименьшее количество задач могло быть предложено?
2. На клетчатой бумаге построены несколько прямоугольников со сторонами, параллельными линиям сетки и общим центром О в одном из узлов сетки. За один вопрос можно про любой из узлов узнать, у скольких прямоугольников он лежит внутри. Как за четыре вопроса узнать, сколько прямоугольников содержат только один узел О?
3. Имеется сеть дорог в виде квадратной сетки. Из бара в левой нижней точке вышло 2048 человек. Дойдя до первого перекрестка, группа разделилась – половина пошла вверх, половина – направо. На следующем перекрестке каждая группа опять разделилась ровно пополам, и половина пошла вверх, половина – направо. Все идут равномерно с одной скоростью. Сколько человек встретиться на правой верхней точке квадрата 10×10?
4. Из ресторана вышла толпа в 4096 человека. Ровно половина из них пошла направо, а половина – налево. Через полчаса каждая группа разделилась пополам – половина пошла дальше, а половина повернулась обратно. Так происходило каждые полчаса. Найдите, сколько народу будет в каждой точке дороги через 4 часа (все идут с одинаковой скоростью, 2 км/ч)
5. Не раскрывая скобок в выражениях, скажите, чему равно количество одночленов ПОСЛЕ раскрытия скобок, до приведения подобных и после приведения подобных: а) $(a+b)(c+d)$; б) $(x+1)^3$; в)$(a+b+c)^5$
6. Все слова иератического языка племени М7 состоят из 10 букв Ъ или Й. Можно ли так разбить все эти слова на две группы, условно именуемые приличными и неприличными словами, так, чтобы любые два слова в одной группе отличались не менее чем а) в двух, б) в трех местах?
7. ***Будущее. 3011 год.*** Корпуса в Вишкиле пронумерованы следующим образом – в номере корпуса будет ровно 7 разрядов, в любом разряде используются цифры от 1 до 9. Например, наш корпус будет иметь номер 1456629. Или какой-нибудь другой. Так как отрядов ОЧЕНЬ много, в итоге использованы все номера. Чтобы хоть как-то различать корпуса, директор распорядился те корпуса, которые отличаются РОВНО одной цифрой, красить в разные цвета. Завхоз купил краски, обойдясь минимумом цветов. Сколько цветов купил завхоз?
8. Можно ли разбить все девятизначные числа, составленные из цифр от 1 до 9 (по одному разу), на две группы так, чтобы никакие два слова в одной группе не отличались бы перестановкой ровно двух цифр?
9. * В М7 приехали 66 учеников, и часть из них попали в группу профи. На вступительной олимпиаде предлагалось 8 задач, причем для любых двух учеников профи А и В есть задача, которую решил А. но не решил В, и есть задача, которую решил В, но не решил А. Какое наибольшее количество учеников пошло в профи ?

ВНУТРЕННИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ, 12.07.2011

1. Алекс и Боб сидят в темнице. Им предстоит испытание: есть 12 стаканов с водой, стоящих в ряд, причем 5 из них отравлены. Узники будут по очереди (начиная с Алекса) выпивать один из стаканов, и если они смогут выпить все неотравленные стаканы с водой, то их отпустят. В начале испытания знакомый стражник сможет сообщить Алексу, в каких стаканах яд, но передать эту информацию Бобу уже не удастся. Пока испытание не началось, узники хотят придумать стратегию по спасению обоих. Как им это сделать?

2. На бесконечной доске стоят две ладьи и конь. Первый ходит двумя ладьями(одновременно), а второй – конем. Если второй не может сделать ход, не попав под бой ладьи, первый выигрывает. Докажите, что при правильной игре первый выигрывает.

3. P и Q — середины сторон BC и AD прямоугольника $ABCD$. R — точка пересечения диагоналей прямоугольника $PQCD$. Докажите, что $\angle PAR = \angle BRP$.

4. Известно, что прямоугольник можно разрезать на несколько прямоугольников 2×3 и полоску 1×5 . Докажите, что его можно разрезать на несколько полосок 1×6 и одну полоску 1×5.

5. Имеются четыре таймера. У одного промежуток между сигналами -- 1 час, у другого -- 2 часа, у третьего -- 3 часа, у четвертого -- 5 часов. Таймеры включили в случайно выбранные моменты (у каждого свой). Кот Васька уснул сразу после первого сигнала одночасового таймера и спал сутки, просыпаясь (и сразу засыпая снова) после каждого сигнала. Докажите, что ему не меньше шести раз удалось беспробудно проспать целый час.

6. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ AB параллельна CF, CD параллельна BE и EF параллельна AD. Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.

7. a, b, c, n — натуральные числа такие, что $(a+4b)(b+4a) = 5^n$. Докажите, что n четно.

8. Набор гирь называют полным, если им можно отвесить любое

натуральное число килограммов от 1 до суммы весов всех гирь (гири можно класть на обе чашки). Из полного набора выкинули гирю наибольшего веса. Докажите, что он остался полным.

НОД и НОК наносят ответный удар, 14 июля

23. Дан параллелограмм *ABCD* с углом 60° при вершине *A*, *AC* = 225, *AD*=162. Из вершины *A* выползает жук. При этом он может двигаться только под углом 60° к любой из сторон параллелограмма. Жук движется по прямой, пока не достигнет стороны параллелограмма (либо вершины, при движении по стороне). Может ли он остановиться в точке *F* на *AC*, такой, что а) *AF*=10; б) *AF*=9*k*.

24. Докажите, что если (a, b)=d, то найдутся такие целые *m* и *n*, что $d = ma + nb$.

25. а)Докажите, что числа 13*n*+21 и 8*n*+13 взаимно просты при любом целом *n*. б) Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ – несократима при любом натуральном *n*.

26. На бесконечной ленте два автомата каждую секунду делают отметки, начиная от края ленты: 1-ый автомат – через 16 см красным цветом, 2-ой автомат – через 25 см синим цветом. Через какое время красная и синяя отметки впервые окажутся на расстоянии 1 см друг от друга?

27. Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, m > n. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает взявший последнюю спичку в одной из кучек. Докажите, что если m > 2n, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.

28. Найдите а) $(2^{140}–1, 2^{120}–1)$; б) $(\underbrace{11...1}_{51}, \underbrace{11...1}_{81})$.

29. Докажите, что в вершинах любого графа можно расставить натуральные числа так, что любые два числа, соединенные ребром имеют НОД>1, а числа, не соединенные ребром, взаимно просты.

30. В государстве имеют хождение монеты достоинством *a* и *b* золотых, где *a* и *b* – взаимно простые натуральные числа.а) Докажите, что такими монетами можно набрать (без сдачи) любую сумму, начиная с 2*ab* золотых.б) Найдите наибольшее число золотых, которое нельзя набрать такими монетами.

31. Пусть *a* и *b* – взаимно простые натуральные числа. В доме есть лифт с двумя кнопками, одна из которых поднимает лифт на *a* этажей вверх, а вторая опускает на *b* этажей вниз, если это возможно (например, на последнем этаже первая кнопка не работает). Докажите, что на этом лифте можно попасть с любого этажа на любой другой, если высота дома не меньше а) 2*ab*; б) *a* + *b*.

32. а) На прямой 8x–13y+6=0 найдите число целых точек, лежащих между прямыми $x = -100$ и $x = 50$.
б) Найдите то же самое для прямой 6x–15y+3=0.

33. Числа *a*, *b* и *c* взаимно простые в совокупности целые числа, то есть НОД(*a*, *b*, *c*) = 1. Докажите, что любое целое число *d* линейно представимо через *a*, *b* и *c*, то есть любого *d* существуют целые *x*, *y* и *z* такие, что *d* = *ax* + *by* + *cz*.

34. Даны три сосуда с емкостями 12, 9, и 5 литров соответственно. Изначально первый сосуд полон, а остальные два пусты.

а) Требуется с помощью правильных переливаний разделить жидкость на две равные части.

б) Покажите в трилинейных координатах решение пункта а).

Однозначность разложения на двоичные, 15 июля

1. Имеется цепочка из 100500 звеньев, каждое из которых весит по 1 г. На какие куски надо разделить цепочку, чтобы полученными кусками можно было бы составить любой вес от 1 г до 100500 г. При этом хочется не сильно утруждаться, то есть распилить цепочку на НАИМЕНЬШЕЕ количество кусочков.
2. Та же задача, но есть ДВЕ цепочки и условие, что цепочки надо пилить одинаково, то есть должен получиться одинаковый набор кусочков.
3. В наборе имеются гири массой 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, ... , причём среди гирь могут быть одинаковые. На две чашки весов положили гири так, чтобы наступило равновесие. Известно, что на левой чашке все гири различны. Докажите, что на правой чашке не меньше гирь, чем на левой.
4. В холле 18 корпуса есть две доски (пофантазируем!). Ученик, приходящий на занятия, записывает на левой доске количество учеников, которое он застал, придя на урок. А когда он уходит с занятия, он записывает на ПРАВОЙ доске количество учеников, которое осталось, когда он уходил. Во время линейки и во время обеда учеников в 18 корпусе нет. Докажите, что за учебный день на обеих досках появится один и тот же набор чисел (только, возможно, в разном порядке). Замечание: наши дети приходят на занятия в разном порядке и уходят, когда хотят, хотя преподы против!
5. Имеется множество билетов с номерами от 1 до 30 (номера могут повторяться). Каждый из учеников вытянул один билет. Учитель может произвести следующую операцию: прочитать список из нескольких (возможно - одного) номеров и попросить их владельцев поднять руки. Сколько раз он должен проделать такую операцию, чтобы узнать номер каждого ученика? (Укажите число и докажите, что оно минимальное.) Предостережение: учеников не обязательно 30.
6. Есть три кучки камней, в каждой по 32 камня. Играют двое. Они по очереди берут любое число камней из ОДНОЙ из кучек. Выигрывает тот, кто берет последний камень. Кто выигрывает при правильной игре?
7. Есть три кучки камней, в одной 32 камня, во второй – 48, в третьей – 16 камней. Играют двое. Они по очереди берут любое число камней из ОДНОЙ из кучек. Выигрывает тот, кто берет последний камень. Кто выигрывает при правильной игре?
8. 30 учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать несколько посещений, и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Покажите, что для того, чтобы все побывали в гостях у всех,

   а) четырёх вечеров недостаточно,
   б) пяти вечеров также недостаточно,
   в) а десяти вечеров достаточно,
   г) и даже семи вечеров тоже достаточно.

И снова о прекрасном…. 16 июля

1. Докажите, что в любом прямоугольном треугольнике сумма длин биссектрисы и высоты, проведенных из вершины прямого угла, не превосходит длины гипотенузы этого треугольника.
2. *AD и CE* — биссектрисы неравнобедренного треугольника *ABC,* в котором сторона *AC* — наибольшая. Докажите, что $AE+CD < AC$.
3. Сколько существует различных треугольников, длины сторон которых принимают значения 8, 9, 10, 12, 13, 14 см?
4. Сколько среди них равнобедренных?
5. На пальме 15 листьев. Докажите, что можно сорвать 8 их них так, что оставшиеся будут давать не менее 7/15 исходной тени.
6. Треугольник разрезан на два треугольника. Длины сторон новых треугольников принимают только два различных значения. Найдите углы исходного треугольника
7. Дана прямая, на которой лежит биссектриса угла *A* треугольника *ABC*. По разные стороны от этой прямой даны две точки – основания а) медиан; б) высот, проведенных из вершин *B* и *C*. Восстановите треугольник *ABC*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ, 17 ИЮЛЯ. 7 класс- 7 класс

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали равны, а серединный перпендикуляр к стороне BC проходит через середину AD. Докажите, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

2. Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 – перестановки натуральных чисел от 1 до 5. Докажите, что среди чисел a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4, a_5b_5 по крайней мере два имеют одинаковые остатки при делении на 5.

3. В очереди стояло 2011 человек. Касса сломалась, и все перешли в соседнюю, только что открывшуюся кассу. Сколькими способами они могут выстроиться в очередь так, чтобы для каждого число людей между ним и кассой изменилось (в ту или другую сторону) не более чем на k человек, где k – его номер в старой очереди?

4. Натуральное число назовем тормозом, если в его десятичной записи найдутся две одинаковые цифры рядом. Найдите наибольшее натуральное число, которое нельзя представить как сумму двух тормозов.

5. У Диего есть 1000 одинаковых с виду шаров, один из которых радиоактивен. Детектор может за 1 песо проверить группу из любого количества шаров и выяснить, есть ли среди них радиоактивный; при этом, если он есть, то все шары в группе становятся радиоактивными. За каждый шар, про который можно с уверенностью сказать, что он нерадиоактивный, Диего получает 1 песо. Докажите, что Диего может обеспечить себе прибыль не менее 950 песо.

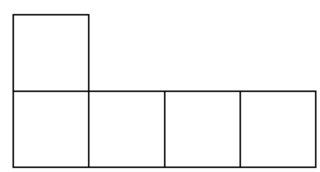
6. На клетчатой плоскости отмечены клетки, центры которых образуют квадратную решетку со стороной 3. Отмеченные клетки покрыты доминошками. Одна доминошка покрывает ровно две соседние по стороне клетки. Докажите, что оставшуюся часть плоскости можно полностью (без разрывов и наложений) покрыть доминошками.

7. Мудрецу С. сообщили сумму трёх натуральных чисел, а мудрецу П. - их произведение. - Если бы я знал - сказал С., - что твоё число больше, чем моё, я бы сразу назвал три искомых числа. - Мое число меньше, чем твоё - ответил П., а искомые числа ..., ... и ... . Какие числа назвал П.?

8. Существует ли на плоскости 6 точек таких, что их можно двумя различными способами разбить на две группы по три точки так, что точки в каждой группе являются вершинами равностороннего треугольника?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ, 17 ИЮЛЯ. 6 класс- 7 класс

1. На отрезке длиной 10 см закрашено несколько отрезков, причем расстояние между любыми двумя точками закрашенных отрезков не равно 1. Докажите, что сумма длин закрашенных отрезков не превосходит 5.
2. На сосне в ДООЦ «Вишкиля» висит доска. 2011×11002. Аня и Яна играют в дурацкую игру. За ход закрашивается квадрат $n \times n$, причем закрашивать закрашенные клетки уже нельзя. Выигрывает тот, кто закрашивает последнюю клетку. Кто выиграет при правильной игре?
3. У Диего есть 1000 одинаковых с виду шаров, один из которых радиоактивен. Детектор может за 1 песо проверить группу из любого количества шаров и выяснить, есть ли среди них радиоактивный; при этом, если он есть, то все шары в группе становятся радиоактивными. За каждый шар, про который можно с уверенностью сказать, что он нерадиоактивный, Диего получает 1 песо. Какую наибольшую прибыль может себе гарантировать Диего?.
4. Три бегуна - *X*, *Y* и *Z* - участвуют в забеге. *Z* задержался на старте и выбежал последним, а *Y* выбежал вторым. *Z* во время забега менялся местами с другими участниками 6 раз, а *X* - 5 раз. Известно, что *Y* финишировал раньше *X*. В каком порядке они финишировали?
5. В ряд выписано *n* (*n*>50) единиц. Докажите, что между ними можно поставить 7 плюсов так, чтобы значение полученного выражения делилось на 7.
6. Назовем число «удачным», если его цифры идут слева направо в невозрастающем порядке и каждая цифра равна количеству цифр этого числа, меньших её. Сколько всего «удачных» десятизначных чисел?
7. У Вовы и Гриши было два одинаковых прямоугольника. Вова разрезал свой прямоугольник на фигурки вида «Г» (см. рис.), а Гриша – на прямоугольники вида 2×3. Какую наименьшую длину могла иметь большая сторона исходного прямоугольника? Длина стороны маленького квадратика равна 1.



8. Расстояние между любыми двумя городами на острове Гдетотам не меньше 100 км (каждый город – это точка). Часть острова, удаленная от какого-либо города более чем на 10 км, считается провинцией. На данный момент провинция составляет более 90% площади острова. Может ли оказаться так, что после основания еще одного города провинция будет занимать менее 10% площади острова?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ, 17 июня. 7 класс- 8 класс

1. Пусть каждое из натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя.
2. В Вишкильской школе есть несколько классов, все разного возраста. Каждый ученик знаком ровно с тремя или четырьмя учениками в каждом из более старших классов и с одним или двумя в каждом из более младшего класса. Какое наибольшее количество классов может быть в этой школе?
3. Универсальное число $U(n)$ — это минимальное натуральное число, из которого вычеркиванием цифр можно получить любое число от 1 до n (например, $U(11) = 10123456789$). Докажите, что каждая цифра входит в $U(n)$ столько раз, сколько она входит в какое-то из чисел от 1 до n.
4. На окружности отмечены 2000 точек. Сначала Петя проводит N хорд с концами в этих точках. Затем Валя красит половину отмеченных точек в один цвет, а остальные – в другой. Петя выигрывает, если найдется хорда с концами разного цвета. При каком наименьшем N Валя не сможет ему помешать?
5. Дано натуральное число $n > 1$. Докажите неравенство $n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.
6. В прямоугольнике $ABCD$ точки P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Оказалось, что AP перпендикулярно BD. Докажите, что $\angle PAQ > 30^\circ$.
7. Из бумаги вырезан треугольник с углами 20°, 20°, 140°. Он разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника. Затем один из образовавшихся треугольников также разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, и так далее. Докажите, что ни на каком шагу нельзя получить треугольник, подобный исходному.
8. В 10 мешках в сумме лежат 1000 орехов, причем во всех мешках количество орехов разное. Далее многократно выполняется следующая операция: из мешка, в котором больше всего орехов, вытаскивается 9 орехов и раскладывается по одному в каждый из остальных мешков. Докажите, что рано ли поздно наступит момент, когда в каких-то двух мешках орехов станет поровну.

УГАДАЛКА 19 июля

1. Ярик загадывает два натуральных числа от 1 до 10 – одно чётное и одно нечётное. Помогите Сан Санычу угадать оба этих числа за 5 вопросов.
2. Юра может отвечать на вопросы «да», «нет» или «не знаю». Он загадал число – 1, 2 или 3. Придумайте вопрос, ответ на который позволит Софье Сергеевна угадать это число.
3. Есть 2011 внешне одинаковых коробок, в каждой разное число конфет, от 1 до 2011. Господин Робот знает, в какой коробке сколько конфет, а бедный ученик – нет. За один вопрос ученик может указать три коробки, а Господин Робот сообщит, в какой из трех коробок конфет больше всего, а в какой – меньше. За какое наименьшее число вопросов бедный ученик сможет а) найти самую большую коробку; б) найти самую среднюю коробку.
4. 9 монет лежат в ряд, одна фальшивая. Можно указать на какую-нибудь монету, ответом будет один из вариантов: «эта фальшивая», «фальшивая – одна из соседних с этой», «фальшивая слева от этой», «фальшивая справа от этой». Найдите минимальное количество вопросов, за которые можно установить фальшивую.
5. В условиях предыдущей задачи сначала все вопросы записываются на листочках и отдаются роботу, затем робот отвечает на каждый из вопросов. Найдите минимальное число вопросов, услышав ответы на которые можно гарантированно указать фальшивую монету.
6. Есть 12 коробок, в одной приз. Ведущий знает, где приз. Зритель может один раз послать ведущему пачку записок с вопросами, требующих ответа "да" или "нет". Ведущий вытаскивает записки из пачки в произвольном порядке, и, не оглашая вслух вопроса, честно отвечает. Какое наименьшее число записок нужно послать, чтобы наверняка узнать, где приз?
7. В клетчатом квадрате 8×8 закрашено 25 клеток, образующих квадрат 5×5. Разрешается выбрать любую клетку квадрата 8×8 и спросить, закрашена ли она. За какое наименьшее число таких вопросов можно наверняка определить, какие клетки закрашены?
8. ***Фокус.*** У фокусника имеется ассистент. Фокусник выходит из зала, а зритель выкладывает в ряд 6 монет произвольным образом. После этого ассистент фокусника закрывает некоторые монеты бумажками так, что не видно, лежат они вверх решками или орлами. В итоге фокусник заходит и угадывает, как выглядит весь ряд. Какое наибольшее число монет может закрыть ассистент? (это количество объявляется зрителям до начала конкурса).
9. По кругу лежат 9 одинаковых с виду котлет. Известно, что среди них семь одинаковых, а в две не доложено мясо, и они лежат рядом. При этом лёгкие котлеты не обязательно равны друг другу. Как найти их двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь?
10. В наборе из 17 внешне одинаковых монет две фальшивых, отличающихся от остальных по весу. Известно, что суммарный вес двух фальшивых монет вдвое больше веса настоящей. Можно ли наверняка определить обе фальшивых монеты, совершив 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? Определять, какая из фальшивых монет тяжелее, не требуется.

19 июля

СТРОЙСЯ!
Хорошо бы понять, что такое Г….М…..Т……..

1. Найдите ГМТ

   а) равноудаленных от двух различных прямых
   б) равноудаленных от трех различных прямых
2. Даны две точки A и B. Найти геометрическое место точек M, таких, что

   а) $AM = BM$
   б) $AM<AB$ и $BM \geq AB$
   в) $AM = BM = CM$; $AM<BM$и $AM<CM,$ точка C не лежит на прямой AB
3. Если в треугольнике отметить точку P и соединить ее с вершинами, то треугольник разобьется на три меньших треугольника. Найдите ГМТ P, для которых сумма площадей двух из этих треугольников будет равна площади третьего.
4. Дан угол $ABC.$Найдите геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат на
   а) прямыхABиBC
   б) на сторонах угла ABC
5. Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ Mтаких, что $S_{ABM} = S_{AMC}$.
6. Даны точкиA и B. Найдите ГМТ, M таких, что точки A, B и M являются вершинами равнобедренного треугольника.
7. а) Докажите, что медиана в прямоугольном треугольнике, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы;

   б) Найти ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом.
8. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники $A_1BC,$ AB_1C и ABC_1. Докажите, что $AA_1=BB_1=CC_1$.
9. Дан квадрат $ABCD$. Найдите ГМТ таких, что сумма расстояний от каждой из них до прямых AB и CD равна сумме расстояний до прямых BC и AD.
10. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите ГМТ, сумма расстояний от каждой из которых до прямых AB и CD равна сумме расстояний до прямых BC и AD.
11. Постройте четырехугольник $ABCD$ по углам A, B, C, D и длинам сторон $AB=a$ и $CD=d.$
12. Через точку Y на стороне AB правильного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Z, а продолжение стороны CA – в точке X. Известно, что $XY=YZ$ и $AY=BZ$. Докажите, что XZ и BC перпендикулярны.

Совсем другая геометрия, 20 июля

Геометрия – это скучно, я читал.

0. Дана точка О внутри четырехугольника площади S. Ее отразили от середин сторон четырех угольника и получили другой четырех угольник. Найдите его площадь, если а) О – точка пересечении диагоналей, б) О – произвольная точка.

Принцип Дирихле в геометрии: «Пусть фигуры Φ_1, Φ_2, …, Φ_k содержатся в фигуре Ф, и сумма их площадей больше площади Ф. Тогда какие-то две из Φ_i пересекаются по внутренней точке».

1. Внутри квадрата со стороной 1 помещена фигура, площадь которой больше ½. Докажите, что эта фигура содержит две точки, симметричные относительна центра квадрата.

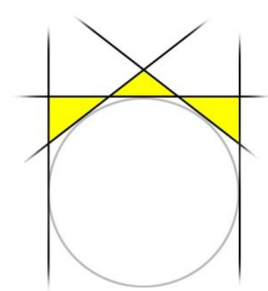
2. На сфере имеется пятно, площадь которого больше половины площади сферы. Докажите, что это пятно покрывает пару диаметрально противоположных точек сферы.

3. В квадрат со стороной 1 поместили несколько квадратов, стороны которых параллельны сторонам квадрата. Оказалось, что сумма их периметров равна 13. Докажите, что есть вертикальная прямая пересекающая не менее 4 квадратов.

---

4. На плоскости проведено 3000 прямых, причем никакие три из них не пересекаются в одной точке, и никакие две не параллельны. По этим прямым плоскость разрезали на куски, докажите, что среди этих частей найдется не менее а)1000, б) 2000 треугольников.

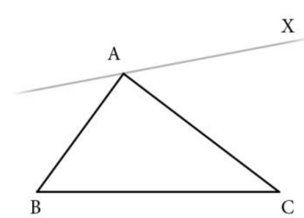
Подсказка: можно ли для каждой прямой найти треугольник, в котором она будет стороной? А два таких треугольника?



5. Как насчет 3000 треугольников? Всегда ли они есть? *Подсказка* на рисунке.

6. Внутри выпуклого 20110-угольника взята точка, которая не попадает ни на одну из диагоналей многоугольника. Докажите, что она лежит внутри четного числа треугольников с вершинами в вершинах исходного многоугольника.

Упражнение. Если мы будем двигать вершину А вдоль прямой АХ, то площадь треугольника АВС будет уменьшаться или увеличиваться?



7. На сторонах параллелограмма выбраны три точки не лежащие на одной прямой. Докажите, что площадь полученного треугольника не превосходит половины площади параллелограмма.

8. В выпуклом пятиугольнике каждая диагональ отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей треугольников больше площади пятиугольника.

Немножко о кроликах

1. Классическая формулировка задачи Фибоначчи о кроликах выглядит так: Фибоначчи приобрел пару кроликов. Природа кроликов такова, что каждая пара кроликов раз в месяц производит на свет еще пару кроликов, а новорожденные приносят первое потомство уже через два месяца после рождения. Сколько пар кроликов будет у Фибоначчи через год?
2. И вот количество этих кроликов и назвали числами Фибоначчи.. Задача не для сдачи - посчитайте 12 чисел Фибоначчи…
3. Сделаем формальную запись задачи о кроликах. Будем обозначать зрелую пару кроликов за 1, а молодую за 0, тогда за каждый месяц из каждой 1 получится 10, а из 0 – 1. Например, получаем 1, 1, 10, 101, 10110, 10110101, …Будем называть каждое такое число кроличьим числом порядка *n* и обозначать его f_n. А теперь

a. Докажите, что количество цифр в кроличьем числе – всегда число Фибоначчи.

b. Докажите, что количество единичек в кроличьем числе – всегда число Фибоначчи.

c. Докажите, что количество ноликов в кроличьем числе – всегда число Фибоначчи.

d. Интересно, а бывает ли так, что $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ (здесь + означает приписывание одной строки к другой)?

4. Бесконечная дорожка разрезана на квадратики. Перед первым из квадратиков стоит лягушка, которая умеет прыгать прыжками двух типов --- длинным и коротким. Коротким прыжком лягушка перепрыгивает на соседний квадратик, а длинным перепрыгивает через квадратик. Найдите число различных маршрутов, которыми лягушка может допрыгать до десятого квадрата; до пятнадцатого квадрата.
5. Длины 12 отрезков являются натуральными числами, меньшими 140. Докажите, что среди них найдутся три отрезка, из которых можно сложить треугольник.
6. Требуется сделать набор гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 грамма до 55 граммов включительно даже в том случае, если некоторые гирьки потеряны (гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес - на другую). Необходимо подобрать 10 гирек, из которых может быть потеряна любая одна. Подберите набор гирек.
7. **Числа Фибоначчи и треугольник Паскаля.** Докажите равенство $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + ... = F_{n+1}$. (то есть сумма элементов в треугольнике Паскаля по диагонали – число Фибоначчи)
8. **Трижды кроличьи числа.** Давайте возьмем забытое кроличье число и запишем его три раза друг за другом (например, возьмем число 101 и напишем 101101101). Докажите, что такой кусочек обязательно встретится в другом (возможно, очень большом) кроличьем числе.
9. *Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. Если вы получите ответ «да», то вы платите 2 рубля, за ответ «нет» – 1 рубль. Зато за угаданное число вы получите БОЛЬШОЙ ПРИЗ. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число?

Сплошные равенств, 21 июля

1. а) Сколькими способами из n человек можно выбрать капитана и команду из k человек?

   б) А если сначала выбрать команду, а потом капитана?

   в) Докажите, что $nC_{n-1}^{k} = (n-k)C_n^k$.
2. а) Есть в отряде М7 Рубанов и еще 64 ребенка. Преподаватели составляют команду из 11 человек и думают, брать Рубанова (сколько у них вариантов?) и еще 10 человек или НЕ брать Рубанова (сколько у них вариантов?). Впрочем, это не важно. Важно, сколькими способами можно выбрать команду. Сколькими же?

   б) Докажите, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.
3. а) Два Мегатренера хотят набрать футбольную команду, состоящую из 11 человек и волейбольную из 6 человек из учеников отряда М7, в котором 65 человек. Первый сначала выделяет способных к футболу, а затем из оставшихся набирает детей для волейбола. Второй поступает мудрее: он выделяет всех спортивных детей из общей серой массы, а затем делит их на две команды. Сколько способов воплотить свои чаяния у каждого из тренеров?

   б) Докажите, что $C_n^{m+k} C_{m+k}^{k} = C_n^m C_{n-m}^{k}$.
4. а) Гномный король бредёт по клетчатому полю из вершины (0, 0) в вершину (n, n), но с непременным условием забрать волшебный эликсир, который находится в клетке (k, n-k). Сколькими способами он может пройти?

   б) В клетках диагонали (0, n), (1, n-1),…,(n, 0) оказались n волшебных эликсиров. В клетке (n,n) находится выход из шахматного зала. Сколькими способами король может выйти из зала, прихватив по дороге какой-нибудь из эликсиров?

   в) Докажите, что $(C_n^0)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.
5. а) В отряде есть 30 детей, которые ведут себя хорошо, и 35 непослушных. На новогодний утренник надо выбрать команду из 7 человек. При этом состав участников не важен, то есть туда можно брать только послушных, или одного непослушного, или даже двух непослушных и 7 хороших… Впрочем, можно даже всех хулиганов.. Сколько способов выбрать команду на утренник?

   б) Докажите, что $C_{m+n}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \cdots + C_n^k C_m^0$.
6. а) Иван Андреевич хочет набрать дежурных из числа учеников отряда. В зависимости от поведения детей и настроения Ивана Андреевича, под раздачу может не попасть никто, а может и весь отряд. Сколько вариантов заработать дежурство у детей?

   б) Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$;
7. а) Докажите, что количество способов выбрать из отряда в 65 лмшат чётное число детей столько же, сколько способов выбрать из этой группы нечётное число детей

   б) $C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$;
8. Докажите, что $C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$.
9. а) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + \cdots + C_{k-1}^{k-1}$;
10. Чему равен коэффициент при одночлене а) $a^5b^7c^9$; б) $a^5b^7c^{1999}$ при разложении $(a+b+c)^{2011}$ и приведения подобных?
11. * (те, кто понимает – вспомните задачу про отравленное вино) Найдите, чему равно $C_{2011}^0 + 2C_{2011}^1 + 2^2 C_{2011}^2 + \cdots + 2^{2011} C_{2011}^{2011}$.
12. * Чему равна сумма $C_{n-1}^{k-1} + \cdots + C_{n-m}^{k-1}$?

Безнадежные игрушечки напоследок, 22 июля

1. Двое играющих наперегонки едят яблоки. Вначале первый выбирает яблоко, затем второй – любое из оставшихся яблок, и они одновременно начинают есть. Они едят с одинаковой скоростью, и тот, кто доел, берет следующее яблоко. Кто из них сможет съесть больше и на сколько при любых действиях другого, если вначале есть 4 яблока весами 200 г, 150 г, 100 г и 80 г?
2. Игра «крестики – нолики» играется на доске $n\times n$. Выигрывает тот, кто поставит в один ряд k своих знаков. Докажите, что вне зависимости от n и k у второго игрока нет выигрышной стратегии.
3. 100 карточек в стопке пронумерованы числами от 1 до 100 сверху вниз. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или несколько карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение всех чисел на карточках станет кратно 1000000. Может ли кто-то из игроков всегда выигрывать независимо от игры противника?
4. Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, $m > n$. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает взявший последнюю спичку в одной из кучек. Докажите, что если $m > 2n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.
5. От клетчатой доски $m\times n$ ($m>2$, $n>2$) осталась только рамка шириной 1. За один ход можно выпилить одну или несколько клеток, образующих прямоугольник, лишь бы при этом оставшая часть не распалась на два куска. Кто не может сделать хода – проигрывает. Кто из игроков может выигрывать независимо от игры противника?
6. Двое игроков по очереди выписывают натуральные числа. Первое число должно быть однозначным, каждое следующее – кратно предыдущему, больше него, но менее чем в 10 раз. Проигрывает тот, кто первым напишет число больше триллиона. Кто из игроков может выигрывать независимо от игры противника?

ЭТО ФИНАЛ !!!!!

АДЫН. Является ли квадратом натурального числа 12345678987654321?

2^3–1. На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* взята точка *X*; *M* и *N* – ее проекции на катеты *AC* и *BC*. При каком положении точки *X* длина отрезка *MN* будет наименьшей?

3!. Имеются два сосуда ёмкостью 1 л и 2 л. Из содержимого приготовили 0,5 л смеси, содержащей 40% яблочного сока, и 2,5 л смеси, содержащей 88% яблочного сока. Каково процентное содержание яблочного сока в сосудах?

Пятое Кроличье число. Для каждого простого *p* решите в натуральных числах уравнение $\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

10_2. Имеется набор правильных треугольников и квадратов со стороной 1. Из них сложили выпуклый многоугольник (без пропусков внутри, отдельные фигуры не накладываются друг на друга). Сколько сторон может иметь такой многоугольник?

$[\pi]$ Какое а) наибольшее; б) наименьшее количество шашек можно поставить на шахматную доску, чтобы в каждом квадрате 3×3 стояло по 3 шашки?

C_5^3 На поле для игры в «Морской бой» (10×10) Петя расставляет корабли 1×3, а Вася – корабли 1×4 (каждый на своем поле). Кто из мальчиков сможет расставить больше кораблей? Корабли не могут соприкасаться даже углами.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА, 24 ИЮЛЯ 2011 г.

1. Есть несколько натуральных чисел, все цифры (во всех числах) которых имеют одинаковую четность. Сумма этих чисел равна 2011. Какое наименьшее количество чисел могло быть? Приведите пример и докажите, что меньше быть не могло.

2. К началу дискотеки пришли разные лмшата. Когда дежурный преподаватель пересчитал детей, то сказал, что он точно может выбрать из них либо 15 человек из какого-то одного отряда, либо 8 человек из восьми разных отрядов. Дежурный преподаватель в лицо детей не знает, но никогда не ошибается. Какое наименьшее число детей могло прийти к началу дискотеки?

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E, а на биссектрисе BD – точка F так, что EF параллельно AC и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.

4. Иван Андреевич выдал Мише пять разных палочек и попросил выбрать из них три так, чтобы составить из них прямоугольный треугольник. Оказалось, что Миша умеет делать это четырьмя различными способами. Найдите отношение квадратов длин самой длинной и самой короткой палочек.

5. На клетчатой доске размером 100×100 двое по очереди расставляют цифры: первый –- единицы, второй – нули. После того, как вся доска заполняется, считают суммы цифр по столбцам и по строкам. Если хотя бы две из этих сумм нечетны, побеждает первый игрок, в противном случае – второй. Кто выиграет при правильной игре?

---

6. Натуральные числа m и n таковы, что m^2+n^2+m делится на mn. Докажите, что m – квадрат натурального числа.

7. На планете 10000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 200 дорог. Докажите, что на планете не больше 100 столиц.

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ площади 1/2 выполнено неравенство $AB+BD+DC \leq 2$. Чему может быть равен угол между диагоналями этого четырёхугольника?