XXIX Летняя Многопредметная Школа Кировской области.
7 класс. Обычные группы.
Материалы занятий.

Баева Л.В. Бачев Р.А. Зенцов А.Г. Иванушкина Н.В.
Оскорбин Д.Н. Телешева О.Д.

3-28 июля 2013

Введение.

В этой книге собраны серии задач, предлагавшиеся учащимся обычных групп параллели 7 класса Летней Многопредметной школы.

Для удобства работы с книгой мы упорядочили серии по темам. У каждой серии осталась указана дата, так что любопытствующему читателю не составит труда восстановить хронологический порядок.

Мы выражаем благодарность детям, с которыми мы работали, преподавателям группы Профи нашей параллели, без помощи которых эта книжка не получилась бы, а также всей Летней Многопредметной Школе.

Глава 1

Геометрия общая.

1 Касательная. 5 июля.

Теорема 1. Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны.

Теорема 2. Суммы противолежащих сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равны.

Опорная задача 1. Прямые AB и AC — касательные в точках B и C к окружности с центром в точке O. Через произвольную точку X дуги BC проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что периметр $\triangle\ AMP$ и величина $\angle MOP$ не зависят от выбора точки X.

Опорная задача 2a. В $\triangle\ ABC$ со сторонами a, b и c вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K. Найти длину отрезка AK.

Опорная задача 2b. Найти длину отрезка касательной AK, если K — точка касания вневписанной окружности со стороной AB $\triangle\ ABC$.

1. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c.

2. Стороны пятиугольника в порядке обхода равны 5, 6, 10, 7, 8. Доказать, что в этот пятиугольник нельзя вписать окружность.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ $AD = DC$, $AB = 3$, $BC = 5$. Окружности, вписанные в $\triangle\ ABD$ и $\triangle\ CBD$ касаются отрезка BD в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN.

4. Биссектрисы углов A, B и C выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в одной точке. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи BC и AD в точке F. Докажите, что у невыпуклого четырёхугольника $AECF$ суммы длин противоположных сторон равны.

5. В четырёхугольнике $ABCD$ расположены две окружности: первая окружность касается сторон AB, BC и AD, а вторая – сторон BC, CD и AD. На сторонах BC и AD взяты точки E и F соответственно так, что отрезок EF касается обеих окружностей, а периметр четырёхугольника $ABEF$ на $2p$ больше периметра четырёхугольника $ECDF$. Найти AB, если $CD = a$.

6. В $\triangle\ ABC$ со сторонами a, b и c на стороне BC отмечена точка D так, что окружности, вписанные в $\triangle\ ABD$ и $\triangle\ ACD$, касаются отрезка AD в одной точке. Найти длину отрезка BD.

Задачи для уединенного размышления.

7. Точки касания вписанной и вневписанной окружности со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны. Докажите.

8. В пятиугольник $ABCDE$ вписана окружность, P — точка касания этой окружности стороны BC. Найдите длину отрезка BP, если известно, что длины всех сторон пятиугольника — целые числа, $AB = 1$, $CD = 3$.

9. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Окружности, вписанные в $\triangle\ ABD$ и $\triangle\ CBD$ имеют радиусы R и r соответственно. Найти расстояние между центрами этих окружностей.

10. Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника $\triangle\ ABC$, проведенная из вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в $\triangle\ ACH$, $\triangle\ BCH$ и $\triangle\ ABC$, равна CH.

2 Геометрическое место точек. Построения. 17 июля.

Идеальные инструменты:

- С помощью идеальной линейки мы можем:
  - провести произвольную прямую на плоскости;
  - провести произвольную прямую проходящую через заданную точку;
  - провести прямую через две заданные точки.
- С помощью идеального циркуля мы можем:

– провести окружность произвольного радиуса с произвольным центром;
– провести окружность произвольного радиуса с заданным центром;
– провести окружность заданного радиуса с произвольным центром;
– провести окружность заданного радиуса с заданным центром.

Простейшие построения:

- на прямой отложить от данной точки отрезок заданной длины;
- отложить от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному углу;
- построить серединный перпендикуляр к данному отрезку;
- разделить данный угол пополам;
- из данной точки прямой восставить перпендикуляр к данной прямой;
- из данной точки вне прямой опустить на эту прямую перпендикуляр;
- построить треугольник по трем сторонам.

1. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек (ГМТ) M таких, что
a) $AM > MB$;
b) $AM + MB = AB$.
2. Найдите ГМТ, равноудаленных от двух данных прямых.
3. Найдите ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.
4. Нарисована окружность. Циркулем и линейкой постройте ее центр.
5. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

Задачи для уединенного размышления.

6. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне.

7. Дана прямая и точка A на ней. Восставьте из точки A перпендикуляр к данной прямой, проведя не более трех линий (т.е. третья проведенная линия должна быть искомым перпендикуляром).
8. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек (ГМТ) M таких, что треугольник AMB равнобедренный.

3 Геометрические неравенства – 1. 19 июля.

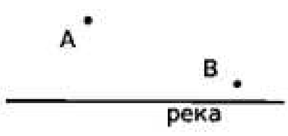
Основные факты:

- Свойство ломаной: сумма длин звеньев любой ломаной не меньше, чем расстояние между ее концами.
- Неравенство треугольника: для любых трех точек A, B и C на плоскости выполнено неравенство: $AB + BC \geq AC$. Причем, $AB + BC = AC$ тогда и только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC.
- В любом треугольнике любая сторона больше модуля разности двух других сторон.

0. Докажите утверждение, обратное неравенству треугольника: если для положительных чисел a, b, c выполнены неравенства:

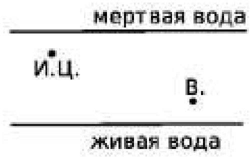
$$a + b > c, a + c > b \text{ и } b + c > a$$

то существует треугольник со сторонами a, b, c.
1. Внутри выпуклого четырёхугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин четырёхугольника наименьшая.
2. Один треугольник лежит внутри другого. Доказать, что периметр внутреннего треугольника меньше периметра внешнего: a) если треугольники имеют общую сторону и угол; b) если треугольники имеют общий угол; c) если треугольники имеют общую сторону; d) в общем случае.



3. a) Паша направляется из пункта A в пункт B, но по пути он хочет успеть искупаться в речке. Какой маршрут ему следует выбрать, чтобы как можно скорее добраться до пункта B?

b) Волк спешит на помощь к Ивану-Царевичу. Но чтобы спасти его, волку нужно набрать сначала живой, а потом мертвой воды. Как ему следует бежать?



4. Муха сидит в вершине A деревянного куба. Как ей переползти в противоположную вершину куба B, двигаясь по самому короткому пути? Найдите длину этого пути, если ребро куба равно 1.

Задачи для уединенного размышления.

5. Найдите наименьший периметр четырёхугольника, вершины которого лежат на сторонах прямоугольника с диагональю d.

6. Один выпуклый многоугольник лежит внутри другого. Доказать, что периметр у внутреннего многоугольника меньше, чем у внешнего.

7. Тарантул сидит на внутренней стенке аквариума в форме прямоугольного параллелепипеда. Однажды забывчивый хозяин оставил аквариум открытым. Тогда тарантул решил выползти из аквариума и переползти в какую-нибудь точку на внешней стороне a) этой же; b) соседней; c) противоположной стенки. Какова кратчайшая траектория, по которой следует ползти тарантулу?

8. В вершине A единичного квадрата $ABCD$ сидит муравей. Ему надо добраться до точки C, где находится вход в муравейник. Точки A и C разделяет вертикальная стена, имеющая вид равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой DB. Найти длину кратчайшего пути, который надо преодолеть муравью, чтобы попасть в муравейник.

4 Теорема Чевы. 21 июля.

1. В $\triangle\ ABC$ выбрана точка M так, что $S_{ABM} = 1$, $S_{BCM} = 2$, $S_{ACM} = 3$. BM пересекает AC в точке K. Докажите, что M — середина BK.

2. (Лемма о ласточкином хвосте) В $\triangle\ ABC$ точка M принадлежит стороне AB, точка K — отрезку CM, причём $AM : MB = n : m$. Докажите, что $S_{ACM} : S_{BCM} = S_{AKM} : S_{BKM} = S_{ACK} : S_{BCK} = n : m$

3. В $\triangle\ ABC$ точка M принадлежит стороне AB, точка K — стороне AC. Отрезки CM и BK пересекаются в точке P, $BM : MA = 5 : 3$, $AK : KC = 7 : 10$. Найдите, в каком отношении луч AP делит сторону BC.

4. Теорема Чевы. На сторонах AB, BC и CA $\triangle$ ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда
$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

5. (Свойство биссектрисы треугольника) Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Задачи для уединенного размышления.

6. Используя теорему Чевы, докажите, что в произвольном треугольнике пересекаются в одной точке:

a) медианы (и, кроме того, точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины);

b) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности (точка Жергонна);

c) прямые, проходящие через вершины и делящие периметр треугольника пополам;

d) прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей со сторонами (точка Нагеля);

e) биссектрисы.

7. Внутри данного $\triangle$ ABC найдите такую точку O, чтобы площади $\triangle$ AOB, $\triangle$ BOC, $\triangle$ COA относились как $2:3:4$.

8. Теорема Менелая. Дан $\triangle$ ABC. Точки C_1, A_1, B_1 выбраны на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC соответственно. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

9. На сторонах AB и BC $\triangle$ ABC расположены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = 3 : 5$, $BN : NC = 1 : 4$. Прямые CM и AN пересекаются в точке O. Луч BO пересекает сторону AC в точке K. Найдите отношения $OA : ON$, $OM : OC$ и $AK : KC$.

5 Геометрические неравенства – 2. 22 июля.

1. Выведите из неравенства треугольника, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла — большая сторона.

Указание: отложите на большей стороне отрезок, равный меньшей стороне.

2. Докажите что при двух фиксированных сторонах треугольника третья сторона увеличивается при увеличении угла между фиксированными сторонами.

Указание: совместите треугольники так, чтобы совпала одна пара фиксированных сторон.

3. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, $a \leqslant b \leqslant c$. Докажите, что если $a^2+b^2 < c^2$, то треугольник тупоугольный, а если $a^2+b^2 > c^2$, то остроугольный.

4. Докажите, что из внутренних точек круга его диаметр виден под тупым углом, а из точек, не принадлежащих кругу — под острым (точки не лежат на прямой, содержащей диаметр).

Указание: Соедините точку с центром круга и сравните угол с вписанным прямым углом.

5. Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ углы A и C тупые, то диагональ AC меньше диагонали BD.

6. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы его сторон, выходящих из той же вершины.

7. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике сумма длин диагоналей меньше периметра, но больше полупериметра.

Задачи для уединенного размышления.

8. На сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырёхугольник.

9. В прямоугольном $\triangle\ ABC$, $\angle B = 90^\circ$ отмечены проведена высота BH. Точки M, N лежат внутри $\triangle\ ABH$ и $\triangle\ CBH$ соответственно. Докажите, что $AM^2 + MN^2 + NC^2 < AC^2$.

10. Существует ли выпуклый многоугольник, в котором сумма длин диагоналей равна периметру?

Глава 2

Геометрия о площадях.

1 Свойства площадей. 6 июля.

- Площадь многоугольника, разбитого на несколько многоугольников, равна сумме площадей частей.
- Равные многоугольники имеют равные площади.
- Площадь квадрата со стороной 1 равна 1.
- Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.

1. Дан прямоугольник $ABCD$.

a) На BC взята точка K. Докажите, что $S_{ABCD} = 2S_{AKD}$;

b) На BC взяты точки K и L. Докажите, что $S_{AKD} = S_{ALD}$;

c) Будут ли верны эти результаты, если точки K и L взять на прямой BC?

d) На прямой BC взята точка K, а на прямой AD взята точка L. Докажите, что $S_{AKD} = S_{BLC}$;

Теорема 1. Даны две параллельные прямые AB и c. Площадь $\triangle$ ABC не зависит от выбора точки C, находящейся на прямой c.

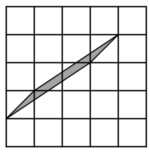
2. В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC через точку B проведена прямая, параллельная CD и пересекающая диагональ AC в точке E. Сравните площади $\triangle$ ABC и $\triangle$ DEC.

3. Доказать, что в трапеции с проведенными диагоналями треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

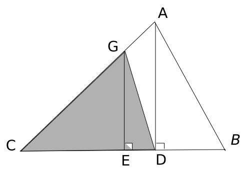
4. $ABCD$ – трапеция, MN – ее средняя линия. Площади $\triangle$ MCN и $\triangle$ AMN равновелики. Докажите.

5. Через точку D, лежащую на стороне BC $\triangle$ ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны

AB и AC соответственно в точках E и F. Докажите, что $\triangle\ CDE$ и $\triangle\ BDF$ равновелики.



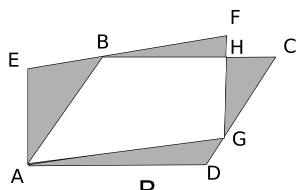
6. Докажите, что площадь параллелограмма на рисунке равна площади одной клеточки клетчатой бумаги.



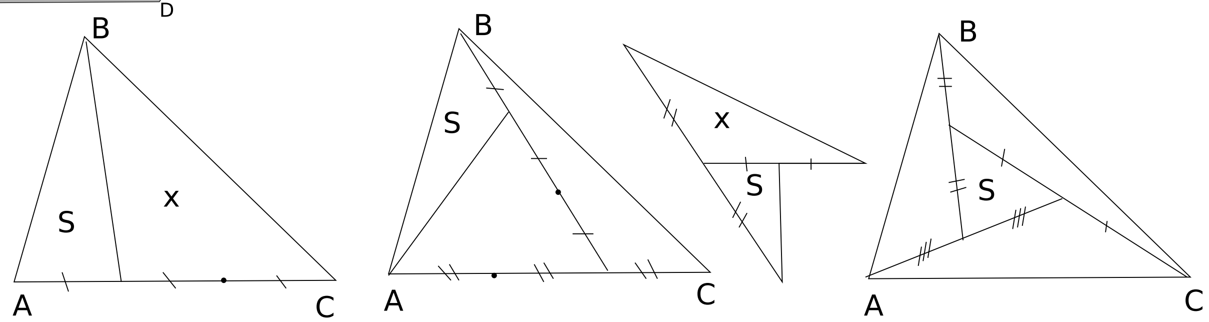
7. Докажите, что равновелики $\triangle\ CGD$ и четырехугольник $DGAB$, где E — середина BC.

8. Выразите X через S. ($X = S_{ABC}$)

9. Докажите, что медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих.



10. Два параллелограмма $ABCD$ и $AEFG$ расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что $S_{ABE} + S_{BFH} = S_{HGC} + S_{AGD}$.



Задачи для уединенного размышления.

11. Точки M и K — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что площадь четырехугольника $AMCK$ равна половине площади четырехугольника $ABCD$.

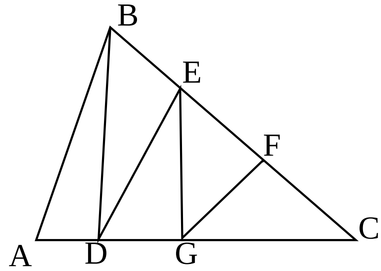
12. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Через середину G диагонали BD проведена прямая, параллельная диагонали AC, пересекающая сторону DC в точке H. Докажите, что отрезок AH делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам.

13. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки E и F, причём отрезок EF параллелен диагонали BD. Докажите, что площади $\triangle\ BCE$ и $\triangle\ CDF$ равны.

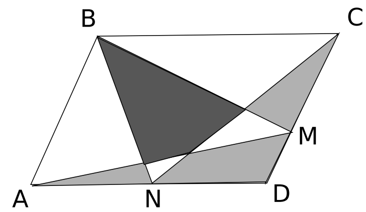
14. На сторонах AC и BC ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $MN \parallel AB$. На стороне AC отмечена точка K так, что $CK = AM$. Отрезки AN и BK пересекаются в точке F. Докажите, что площади $\triangle\ ABF$ и четырёхугольника $KFNC$ равны.

2 Площадь-2. 7 июля.

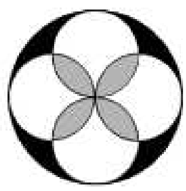
1. Разделите a) треугольник, b) параллелограмм двумя прямыми, проходящими через вершину, на три равновеликие части.
2. Точка K делит сторону AC $\triangle\ ABC$ на отрезки $AK = a$ и $KC = b$. Найдите отношение площадей $\triangle\ ABK$ и $\triangle\ BKC$.
3. Как в треугольнике $\triangle\ ABC$ провести ломаную, чтобы все пять полученных треугольников имели одинаковую площадь?



4. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на 4 части, площади которых, взятые последовательно, равны S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.
5. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь $ABCD$, если $S_{ABD} = 10$ см^2, $S_{ACD} = 9$ см^2, $S_{AOD} = 6$ см^2.
6. Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике с проведенными диагоналями треугольники, прилежащие к противоположным сторонам, равновелики, то четырехугольник – трапеция.
7. Дан $\triangle\ ABC$. Найдите геометрическое место точек M, таких, что $S_{MAB} < S_{ABC}$, $S_{MBC} < S_{ABC}$, $S_{MAC} < S_{ABC}$.
8. Если пол в комнате площадью S надо покрыть линолеумом общей площадью также S так, чтобы не было участков, покрытых более чем в два слоя, то площадь пола, покрытая дважды, равна площади пола, не покрытой ни разу. Докажите.
9. Какая часть площади параллелограмма больше: черная или серая?



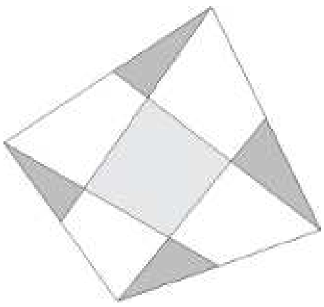
10. Через центр окружности проведены ещё четыре окружности, касающиеся данных. Сравните пощади серой и черной фигуры. Докажите, что площадь черной области равна площади серой.



11. В $\triangle\ ABC$ точки A_1, B_1, C_1 отмечены на сторонах BC, AC и AB так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2 : 1$. C_0 — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1, A_0 — BB_1 и CC_1, B_0 — CC_1 и AA_1. Доказать, что $S_{A_0B_0C_0} = S_{AB_1C_0} + S_{BC_1A_0} + S_{CA_1B_0}$.

Задачи для уединенного размышления.

12. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разделил его на два четырехугольника, имеющих равные площади. Докажите, что эти стороны параллельны.



13. В выпуклом четырёхугольнике отметили середины сторон и соединили их с вершинами так, как показано на рисунке. Докажите, что площади серой и черной частей равны.

14. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Сторона AB точками M и N разделена на три равные части, сторона CD разделена точками K и L также на три равные части. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника $KLMN$ в три раза меньше площади четырехугольника $ABCD$.

15. Сторону AB $\triangle$ ABC разделили на n равных частей (точки деления $B_0 = A$, B_1, B_2, $B_n = B$), а сторону AC этого треугольника разделили на $(n+1)$ равных частей (точки деления $C_0 = A$, C_1, C_2, $C_{n+1} = C$). Закрасили треугольники $C_iB_iC_{i+1}$. Какая часть площади треугольника закрашена?

3 Разрезания и теорема Пифагора. 9 июля.

Определение. Перекроить – разрезать на части и сложить из них.

1. Разбить прямоугольник на две равные трапеции.

2. Разделить квадрат на 4 равных треугольника и один квадрат так, чтобы из них получилось три квадрата.

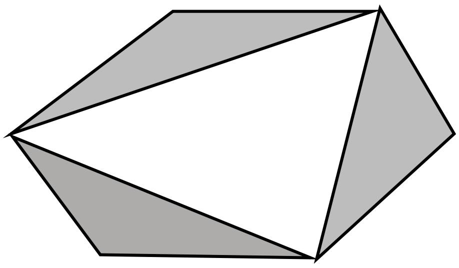
3. Перекроить квадрат в прямоугольный треугольник, сделав лишь один разрез.

4. Прямоугольник перекроить в параллелограмм, сделав только один разрез.

5. Перекроить остроугольный равнобедренный треугольник в тупоугольный, сделав один разрез.

6. С помощью одного разреза перекроить параллелограмм в прямоугольник.

7. Перекроить прямоугольник в трапецию с помощью одного разреза.



8. Противоположные стороны шестиугольника равны и параллельны. Его вершины соединены диагоналями через одну, как показано на рисунке. Площадь какой части больше, белой или чёрной?

9. Разрежьте квадрат на равные треугольники и составьте из них два а) одинаковых квадрата; б) разных.

10. Разрежьте квадрат 7×7 на

а) квадраты 4×4, квадрат 3×3 и 4 равных прямоугольных треугольника;

b) один квадрат и 4 прямоугольных треугольника, равных треугольникам из (a);

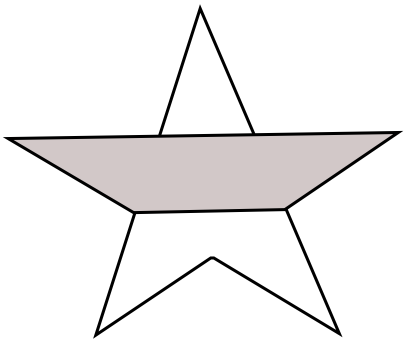
c) Найдите размер квадрата в п. b).

11. Даны 4 прямоугольных треугольника с катетами a, b и гипотенузой c. Докажите, что добавив к ним a) один квадрат со стороной c; b) два квадрата со сторонами a и b, можно будет составить квадрат со стороной $a + b$.

12. Теорема Пифагора. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах. $a^2 + b^2 = c^2$.

Задачи для уединенного размышления.

13. Разрежьте прямоугольник 1×5 на 5 частей и сложите из них квадрат.



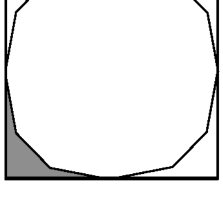
14. Докажите, что у правильной звезды закрашена ровно половина площади.

15. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна:

а) произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей;

b) удвоенному произведению стороны на среднюю диагональ.

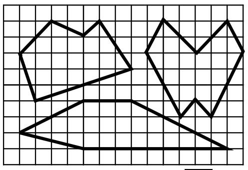
16°. Разрежьте 5-клеточный крест на части и сложите из них квадрат.



17. Четыре вершины правильного двенадцатиугольника расположены в серединах сторон квадрата. Докажите, что площадь закрашенной части в 12 раз меньше площади двенадцатиугольника.

4 Формула Пика. 11 июля.

1. Найдите площади многоугольников, изображенных на рисунке.



Теорема 1. Вершины многоугольника (не обязательно выпуклого) расположены в узлах клетчатой бумаги. Внутри него лежит n узлов, а на границе m узлов. Площадь этого многоугольника равна $n + \frac{m}{2} - 1$ (Формула Пика).

2. Убедитесь в справедливости формулы Пика для многоугольников, изображенных на том же рисунке.

3. Докажите формулу Пика, разбив доказательство на ряд шагов:

a) Проверьте формулу Пика для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки.

b) Докажите формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки.

c) Докажите формулу Пика для многоугольника, составленного из двух многоугольников, для которых формула Пика уже доказана.

d) Пусть многоугольник, для которого формула Пика уже проверена, составлен из двух многоугольников. Докажите, что если формула Пика выполняется для одного из них, то она выполняется и для другого.

e) Докажите формулу Пика для произвольного треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги, отрезав для этого от прямоугольника несколько прямоугольных треугольников.

f) Докажите, что всякий выпуклый многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники.

Теорема 2. Любой (не обязательно выпуклый) многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники.

g) Докажите формулу Пика для произвольного многоугольника с вершинами в узлах сетки.

4. Нарисуйте треугольник площади 1, у которого все стороны больше 5, а вершины лежат в узлах сетки.

5. Замкнутая несамопересекающаяся ломаная идет по линиям сетки и проходит по одному разу через все узлы клетчатого квадрата 7×7. Найдите площадь фигуры, ограниченной этой ломаной.

6. Шахматный король обошел доску 4×4 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, последовательно соединяющая центры полей, не имеет самопересечений.

a) Нарисуйте такую ломаную;

b) найдите площадь фигуры, ограниченную этой ломаной;

c) какое наибольшее число ходов по диагонали может сделать король?

7. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, последовательно соединяющая центры полей, не имеет самопересечений. Какое наибольшее число ходов по диагонали может сделать король?

5 Теорема Бойяи - Гервина. 15 июля.

Определение. Два многоугольника назовем равносоставленными, если один из них можно перекроить в другой (то есть разрезать на части, переложив которые, можно получить другой).

Ясно, что любые два равносоставленных многоугольника равновелики.

Наша цель - доказать обратное утверждение.

1. Если один многоугольник можно перекроить во второй, а второй в третий, то первый можно перекроить в третий.

2. Докажите, что a) прямоугольный; b) остроугольный; c) тупоугольный треугольник можно перекроить в прямоугольник.

3. Любой прямоугольник можно перекроить в прямоугольник со стороной, большей 1.

4. Прямоугольник со стороной, большей 1, можно перекроить в параллелограмм со стороной 1.

5. Параллелограмм со стороной 1 можно перекроить в параллелограмм со стороной 1, у которого высота падает внутрь этой стороны, а не на ее продолжение.

6. Параллелограмм со стороной 1, у которого высота, опущенная на эту сторону, падает внутрь этой стороны, а не на ее продолжение, можно перекроить в прямоугольник со стороной 1.

7. Любой многоугольник можно перекроить в прямоугольник со стороной 1.

8. Теорема Бойяи-Гервина. Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Задачи для уединенного размышления.

9. Разбейте квадраты, построенных на катетах прямоугольного треугольника, на пять частей и составьте квадрат, построенный на его гипотенузе. Разбиение не должно зависеть от отношения катетов.

Глава 3

Комбинаторика.

1 Свойства C_n^k. 14 июля.

1. Сколько различных строк можно получить, а) переставляя буквы в слове “КОТЕЛЬНИЧ”; б) составляя девятизначное число из цифр от 1 до 9, используя все цифры.

Определение. Обозначим количество способов расставить n различных предметов в ряд P_n. Эта величина называется количеством перестановок из n элементов. Докажите, что $P_n = n!$.

2. Сколько различных строк можно получить, переставляя буквы в словах а) “ВИШКИЛЬ”; б) “МАТЕМАТИКА”. А сколько различных пятибуквенных слов можно получить из букв слова “КОТЕЛЬНИЧ”?

Определение. Количество способов составить ряд из k предметов, выбирая их из n различных предметов, обозначим A_n^k. Эта величина называется количеством размещений из n по k элементов. Докажите, что $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

3. Есть 12 шариков различных цветов. a) Сколькими способами можно выложить ряд из трех шариков? b) Сколькими способами можно выбрать три шарика без учета порядка?

Определение. Количество способов выбрать k предметов n различных обозначим C_n^k. Эта величина называется количеством выборок из n по k элементов. Докажите, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

4. Расположите C_n^k в виде таблицы, имеющей вид равнобедренного треугольника (в верхней строке одно число, под ним два, затем три и т.п.) Выпишите полученный вами *треугольник Паскаля* до восьмой строки включительно.

5. Имеется 10 различных предметов, необходимых для жизни на необитаемом острове и еще занавеска. a) Сколько существует способов выбрать 7 предметов, не выбирая занавеску? b) А сколько существует способов выбрать 7 предметов, если занавеску обязательно выбирать? c) Докажите, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

6. Найдите сумму всех чисел n-ой строки треугольника Паскаля.

7. Сколькими способами можно выбрать произвольное непустое подмножество из множества, содержащего n элементов?

8. Имеется 8 различных предметов, необходимых для похода. Вася решает, какой комплект из них понесет он. a) Сколько существует способов выбрать этот комплект? b) Сколько подмножеств у множества из n объектов? c) Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

9. Вася позвал в поход своего друга Петю. Они составили список из n вещей, которые собираются взять с собой и определили, что Вася понесет k из них. Когда Вася стал считать, сколько у него есть способов выбрать себе комплект вещей, то обнаружил, что выбор слишком сложен — целых M вариантов! Тогда он предоставил выбор Пете. a) Докажите, что у Пети ровно такое же количество способов выбрать себе набор из $n-k$ предметов. b) Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Задачи для уединенного размышления.

10. Докажите, что для любого простого числа p число C_p^k делится на p при всех k, кроме $k = 0$ и $k = p$.

11. Докажите, что произведение n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.

12. На окружности отмечены 5 красных, 7 желтых и 9 зеленых точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках, у которых все вершины a) зеленые; b) одноцветные; c) все разноцветные; d) не все одноцветные?

13. Сколькими способами можно расставить k ладей на доске $N \times N$ так, чтобы они не били друг друга?

14. В каждой клетке квадрата 8×8 напишите количество кратчайших путей “хромой ладьи” из левой нижней клетки квадрата в эту клетку. (Хромая ладья ходит только на одну клетку вправо либо на одну клетку вверх). Какое число будет записано в правой верхней клетке?

2 Бином Ньютона. 15 июля.

1. Раскройте скобки в выражениях: a) $(a+1)\cdot(b+1)$; b) $(a+b)\cdot(c+d)$; c) $(a+b)\cdot(a+b)$; d) $(a+b)^3$;

2. Сколько всего слагаемых получится после раскрытия скобок в выражении $(1+x)^n$

а) без приведения подобных слагаемых;

б) после приведения подобных слагаемых?

3. a) Сколькими способами можно представить x^k в виде произведения n множителей, каждый из которых равен 1 или x?

b) Сколько слагаемых вида a^5 получится до приведения подобных слагаемых при раскрытии скобок в выражении $(a+b)^5$?

c) Сколько слагаемых вида a^3b^{14} получится до приведения подобных слагаемых при раскрытии скобок в выражении $(a+b)^{17}$?

d) Сколько различных слагаемых получится при раскрытии скобок в выражении $(a+b)^{23}$?

e) Какой коэффициент получится при слагаемом вида ab^7 при раскрытии скобок в выражении $(a+b)^8$?

f) Какой коэффициент получится при слагаемом вида ab^7 при раскрытии скобок в выражении $(a+b)^{11}$?

g) Какой коэффициент получится при слагаемом вида a^3b^4 при раскрытии скобок в выражении $(a+b)^7$?

h) Какой коэффициент получится при слагаемом вида a^kb^{n-k} при раскрытии скобок в выражении $(a+b)^n$?

i) Докажите формулу Бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^{n-2}a^2b^{n-2}+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n.$$

Задачи для уединенного размышления.

4. Докажите методом математической индукции формулу бинома Ньютона.

5. Найдите коэффициент при x^4 в разложении $(1+x)^{10}$.

6. С помощью бинома Ньютона докажите, что $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n = 2^n$.

7. Докажите, что a) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots \pm C_n^n = 0$; b) из n предметов четное число предметов можно выбрать 2^{n-1} способами.

8. В куче лежит n синих и n красных шариков. Докажите, что количество способов взять из кучи ровно n шариков равно $C_n^0C_n^n + C_n^1C_n^{n-1} + \ldots + C_n^nC_n^0$.

9. Чему равен коэффициент при x^n, который получается после раскрытия скобок

a) в выражении $(1+x)^{2n}$?

b) в выражении $(C_n^0 + C_n^1x^1 + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n)^2$.

10. В разложении $(x+y)^n$ по формуле бинома Ньютона второй член оказался равен 240, третий — 720, а четвертый — 1080. Найдите x, y и n.
11. Найдите число нулей, на которое оканчивается число $11^{100}-1$
12. Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2013?
13. Не встречается ли в 2014-й строке треугольника Паскаля число $1+2+3+\ldots+2012+2013$?
14. Докажите, что если р – простое число, то $(a+b)^p-a^p-b^p$ делится на p при любых целых a и b.
15. Имеется куб размером $10\times10\times10$, состоящий из маленьких единичных кубиков. В центре O одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Он может прыгать в центр кубика, имеющего общую грань с тем, в котором кузнечик находится в данный момент, причем так, чтобы расстояние до точки О увеличивалось (то есть, либо вверх, либо вправо, либо вперед). Сколькими способами кузнечик может допрыгать до кубика, противоположного исходному?

3 Шары и перегородки. 20 июля.

0. a) Сколькими способами мама может раздать четырем детям 20 разных конфет?

b) Сколькими способами мама может раздать четырем детям 20 разных конфет так, чтобы каждому хоть что-то досталось?

c) Сколькими способами мама может разделить между четырьмя детьми 20 одинаковых конфет?

d) Сколькими способами мама может разделить между четырьмя детьми 20 одинаковых конфет так, чтобы каждому хоть что-то досталось?

1. Сколько решений имеет уравнение $x+y+z=2000$ a) в натуральных числах; b) в целых неотрицательных числах; c) в натуральных числах, не превосходящих 800?

Задачи для уединенного размышления.

2. Сколько различных чисел можно записать, используя 6 единиц и 24 двойки?
3. Сколько различных чисел можно записать из 6 единиц и 31 двойки, если единицы не должны стоять ни на первом месте, ни на последнем, ни две подряд?

4. Бабушка купила для троих внуков 10 одинаковых апельсинов и хочет раздать их так, чтобы младшему досталось не меньше, чем среднему, среднему – не меньше, чем старшему, а старшему досталось хоть что-нибудь. Сколько вариантов дележа возможно?
5. Доктор Ватсон 31 июня подарил Шерлоку Холмсу две дюжины романов Дарьи Донцовой. Сколькими способами сыщик может расставить их на имеющихся у него семи книжных полках (возможно, некоторые полки останутся пустыми, порядок книг на полке роли не играет)?
6. Малыш способен съесть не более 10 тефтелек, Бимбо – не более 20, а Карлсон – не более 50. Сколькими способами они могут поделить по-братски 70 тефтелек? (По-братски – значит, чтобы каждому хоть что-то досталось).
7. Сколько решений в нечетных натуральных числах имеет уравнение $x+y+z+t=2000$?
8. Для проведения вступительной олимпиады преподаватели разбивают 70 школьников следующим образом: список в алфавитном порядке разбивается на 4 части, первая идет в первую аудиторию, вторая – во вторую и т. д. При этом в каждую аудиторию отправляется хотя бы один школьник. Сколькими способами можно произвести распределение?
9. Преподаватели снова делят 70 школьников на 4 аудитории, но в этот раз без учета алфавитного порядка. Найдите число способов.

Глава 4

Теория графов.

1 Графы-1. 7 июля.

1. В верхних углах доски 3×3 стоят чёрные кони, а в нижних - белые. Как поменять их местами и сколько ходов для этого необходимо?

2. В верхних углах доски 3×3 стоят чёрные кони, а в нижних - белые. Можно ли разместить коней одного цвета в противоположных клетках доски?

3. Из доски 4×4 вырезаны все угловые клетки. Может ли шахматный конь обойти всю доску и вернуться на исходную клетку, побывав в каждой клетке ровно один раз?

4. Сытый марсианский кот Васька поймал 6 марсианских треххвостых мышек и связал их хвостами так, что свободных хвостов не осталось. Сколько узелков ему пришлось завязать? Васька поймал еще одну мышку и решил, развязав некоторые из узелков, связать эту мышку со всеми остальными. Сможет ли он это сделать так, чтобы по-прежнему не было свободных хвостов?

5. Существует ли 8-вершинный граф, степени вершин которого равны

a) 8, 6, 6, 5, 3, 2, 1, 1;

b) 7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1;

c) 7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1;

d) 7, 5, 5, 5, 4, 3, 2, 2?

6. В графе с 8 вершинами и степени вершин равны 6, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 4. Сколько в нем ребер?

Утверждение. Количество рёбер в графе равно полусумме степеней всех его вершин.

7. Докажите, что в любом графе:

a) сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер (и следовательно, четна);

b) число вершин нечетной степени четно.

8. Докажите, что не существует 25-звенной ломаной, которая пересекает каждое свое звено ровно 3 раза.

9. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, у которых поровну знакомых в этой компании.

10. В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно 3 улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.

11. Каждое из ребер полного графа с 17 вершинами покрашено в один из трех цветов. Докажите, что есть три вершины, все ребра между которыми - одного цвета.

12. В городе проводилось совещание врачей. От каждой поликлиники на совещание было приглашено по пять врачей. Оказалось, что каждый из приглашенных работал в двух поликлиниках, поэтому на совещании представлял обе поликлиники. Кроме того, для любых двух поликлиник города среди участников совещания можно было найти врача, который в них работает. Сколько в городе поликлиник и сколько врачей принимало участие в совещании?

13. У каждого семиклассника есть ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что их можно разбить на две учебные группы так, чтобы в каждой группе не было ни друзей, ни врагов.

14. Можно ли на окружности расположить числа $1, 2, \ldots, 9$ так, чтобы сумма любых двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

15. Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети? (Укажите все решения.)

2 Графы-2. 10 июля.

Определение. Циклом в графе называется замкнутый путь, не проходящий ни по какому ребру графа два раза подряд.

Определение. Деревом называется связный граф без циклов.

Эквивалентные определения:

- Граф является деревом тогда и только тогда, когда любые две его вершины соединены ровно одним простым (т.е. не проходящим два раза через одну и ту же вершину) путем.
- Граф является деревом тогда и только тогда, когда он связный, но при выкидывании любого ребра перестает быть связным.

Определение. Висячей вершиной в графе называется вершина степени 1.

1. Докажите, что в дереве, в котором не меньше двух вершин, есть a) хотя бы одна; b) хотя бы две висячие вершины.

- **2.** a) Докажите, что в дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребро.

  b) Докажите, что любой связный граф с n вершинами, в котором ровно $n-1$ ребро, является деревом.

3. Нарисуйте всевозможные деревья с шестью вершинами.

4. В некоторой стране 19 городов и всего 18 дорог, причем из каждого города можно проехать в любой другой. На всех дорогах ввели одностороннее движение. Докажите, что теперь, выехав из какого-нибудь города невозможно вернуться в него обратно.

5. Докажите, что если в графе с n вершинами меньше, чем $n-1$ ребро, то он не связен, а если в нем больше, чем $n-1$ ребро, то в нём есть циклы.

6. Волейбольная сетка представляет собой прямоугольник 20×300 (т.е. 21×301 узел). Сетку начинают резать не в узлах. Какое наибольшее количество разрезов можно сделать прежде, чем сетка распадется на части?

Определение. Остовным деревом графа называется подграф, содержащий все его вершины и являющийся деревом.

7. Докажите, что в связном графе существует остовное дерево.

Задачи для уединенного размышления.

8. В Австралии 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом из любого города можно доехать в любой (возможно, с пересадками) только одним способом. Сколько в этой стране дорог?

9. В доску вбито 2013 гвоздей. Дима и Андрей играют в игру, делая ходы по очереди. За ход можно соединить два еще не соединенных между собой гвоздя ниткой. Начинает Дима. Кто выиграет при правильной игре, если получивший замкнутую цепь a) проигрывает; b) выигрывает?

10. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более 196 перелетов.
11. Раскрашенный в чёрный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу. Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?

3 Формула Эйлера. 12 июля.

Определение. Граф называется планарным, если его можно нарисовать на плоскости без пересечения ребер.

Определение. Говорят, что граф укладывается на некоторой поверхности, если его можно на ней нарисовать без пересечения ребер. Плоский граф — граф, уложенный на плоскость.

Определение. Гранью плоского графа называется часть плоскости, ограниченная ребрами.

Определение. В качестве грани можно рассматривать и часть плоскости, расположенную “вне” плоского представления графа. Эту часть плоскости называют “бесконечной” гранью.

Для связных плоских графов выполняется **формула Эйлера** В+Г−Р=2, где В — количество вершин в графе, Р — количество рёбер, Г — количество граней, включая “бесконечную грань”. Далее мы будем считать, что в плоском графе нет петель и любые две вершины соединены не более чем одним ребром.
1. a) Докажите формулу Эйлера для дерева.

b) Докажите, что если при выкидывании из плоского связного графа какого-либо ребра он остаётся связным, то количество частей, на которые он делит плоскость, уменьшается на 1.

c) Докажите формулу Эйлера для произвольного связного плоского графа.
2. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

3. Докажите, что для связного плоского графа, в котором хотя бы 3 вершины, справедливо неравенство 2Р⩾3Г.
4. Докажите, что для связного плоского графа, в котором хотя бы 3 вершины, справедливо неравенство Р⩽3В−6.
5. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?
6. Правительство одной страны приказало соединить скоростными автобанами пять столичных городов так, чтобы каждый был соединен с каждым, и, кроме того, они не пересекались (дабы избежать аварий). Докажите, что бюрократам придется позаботиться о строительстве мостов или тоннелей.
7. Каждое ребро полного графа с 11 вершинами покрашено в один из двух цветов: красный или не красный. Докажите, что либо “красный”, либо “не красный” граф не является планарным.

Задачи для уединенного размышления.

8. Докажите, что в любом связном плоском графе существует вершина степени не более чем пять.
9. Докажите, что для плоского графа выполняется
В+Г−Р=К+1, где К — количество компонент связности.
10. a) Докажите, что вершины плоского графа можно раскрасить в 6 цветов так, чтобы вершины, соединенные ребром, имели разный цвет.

b) Докажите, что конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.

4 Формула Эйлера через формулу Пика. 16 июля.

1. Найти минимальную площадь треугольника с вершинами в узлах сетки, используя формулу Пика.
2. Дан связный плоский граф (плоская карта) с вершинами в узлах сетки без висячих вершин, все ребра которого являются отрезками. Пусть V — количество вершин в этом графе, E — количество ребер, F — количество граней.

a) Докажите, что сумма площадей граней графа равна

$$I + X + B/2 + S/2 - (F - 1),$$

где I — количество внутренних узлов всех граней, X — количество узлов на внутренних ребрах (не включая вершины), B — количество узлов на внешних ребрах (не включая вершины графа), S - сумма количеств сторон внутренних граней.

b) Докажите, что $S + K = 2E$, где K – количество ребер, принадлежащих внешней грани.

c) Докажите, что площадь дополнения внешней грани равна

$$(I + X + V - K) + (B + K)/2 - 1.$$

d) Докажите формулу Эйлера: $V - E + F = 2$.

3. a) Докажите, что для любого многоугольника с вершинами в узлах сетки отношение его площади к квадрату любой стороны рационально.

b) Найдите площадь правильного треугольника со стороной a.

c) Докажите, что не существует правильного треугольника с вершинами в узлах сетки.

4. a) Найдите геометрическое место точек M внутри $\triangle\, ABC$ таких, что $\triangle\, ABM$ и $\triangle\, CBM$ равновелики.

b) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

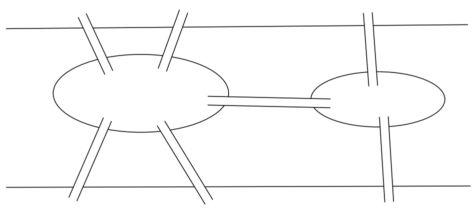
c) Вершины треугольника лежат в узлах сетки, причем на его сторонах других узлов нет, а внутри лежит ровно один узел. Доказать, что этот узел совпадает с точкой пересечения медиан треугольника.

5. Докажите, что если вершины выпуклого n-угольника лежат в узлах клетчатой бумаги, а внутри и на его сторонах других узлов нет, то $n < 5$.

6. Квадрат $n \times n$ произвольным образом нарисован на клетчатой бумаге. Докажите, что он покрывает не более $(n + 1)^2$ узлов сетки.

5 Эйлеров цикл. 19 июля.

1. На схеме представлена карта г. Кёнигсберга с изображением островов и мостов между ними во времена Эйлера.



a) Можно ли обойти все мосты, проходя по каждому не более одного раза?

b) какое наименьшее количество мостов нужно добавить, чтобы стало возможным их обойти?

c) пункт b), но обойти и вернуться назад?

Определение. Путь, проходящий по каждому ребру графа ровно один раз (не обязательно замкнутый), называется эйлеровым. Если эйлеров путь замкнут, то его называют эйлеровым циклом.

2. На плоскости нарисованы несколько окружностей, образующих связную фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

3. Критерий наличия эйлерова пути. Докажите, что в связном графе существует эйлеров путь тогда и только тогда, когда не более двух вершин графа имеют нечетную степень.

4. Критерий наличия эйлерова цикла. Докажите, что в связном графе существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степень каждой вершины четна.

5. Можно ли составить разлинованный квадрат 4×4

a) из 5 ломаных длины 8?

b) из 8 ломаных длины 5?

6. Во время соревнований по автогонкам некоторые автомобили сталкивались между собой. Оказалось, что их можно разделить на две группы так, что автомобили, вошедшие в одну группу, друг с другом не сталкивались. Докажите, что суммарное количество вмятин у автомобилей первой группы равно суммарному количеству вмятин у автомобилей второй группы.

Определение. Граф называется двудольным, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета.

Упражнение. Сформулируйте результат задачи 6 на языке теории графов.

7. Какое наибольшее число ребер может быть в двудольном графе с

a) w белыми и b черными вершинами?

b) с $2k$ вершинами?

c) с $2k+1$ вершиной?

8. В тусовке у каждых двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на 3.

9. На плоскости даны 10 точек: несколько из них белые, а остальные — черные. Некоторые точки соединены отрезками. Назовем точку *мистической,* если более половины соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Каждым ходом выбирается одна из мистических точек (если такие есть) и перекрашивается в противоположный цвет. Докажите, что через несколько ходов не останется ни одной мистической точки.

10. Можно ли выписать все трёхзначные числа, не оканчивающиеся нулями, в строчку так, чтобы последняя цифра каждого числа была равна первой цифре следующего за ним?

Глава 5

Теория чисел.

1 Сравнения. 5 июля.

Определение. Если два числа дают одинаковые остатки при делении на число n, то говорят, что они сравнимы по модулю m. Записывают это так: $a \underset{m}{\equiv} b$ или $a \equiv b\,(mod\,m)$.

Важные факты:

- Если числа сравнимы по модулю m, то их разность сравнима с нулем по модулю m, т. е. делится на m.
- Если разность двух чисел сравнима с нулем по модулю m, то эти числа сравнимы по модулю m.
- Свойства сравнений:

a) если $a \underset{m}{\equiv} b$, $b \underset{m}{\equiv} c$, то $a \underset{m}{\equiv} c$; b) $a \underset{m}{\equiv} a + km$, где k — целое число;
c) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a + c \underset{m}{\equiv} b + c$; d) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $a + c \underset{m}{\equiv} b + d$;
e) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $ac \underset{m}{\equiv} bc$; f) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $ac \underset{m}{\equiv} bd$;
g) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a^k \underset{m}{\equiv} b^k$, где k — натуральное число;
h) привести пример, когда $ac \underset{m}{\equiv} bc$, но не выполняется $a \underset{m}{\equiv} b$.

i) сформулируйте, когда можно сокращать на одно и то же число обе части сравнения, и докажите это свойство.

Задачи для уединенного размышления.

1. Найдите остаток от деления: 14^{2013} на 13; 36^{2013} на 37.
2. Докажите, что число $7^{2012} + 9^{2013}$ делится на 10.
3. Найдите остаток при делении $9^{121} + 13^{121}$ на 11.
4. Докажите, что число $2006 \cdot 2007 \cdot 2008 \cdot 2009 - 24$ делится a) на 2005; b) на 2010.

5. Докажите, что a) $2^{100} \underset{5}{\equiv} 3^{100}$; b) $2^{100} \underset{13}{\equiv} 3^{100}$; c) по какому ещё простому модулю сравнимы 2^{100} и 3^{100} (найдите хотя бы один)?
6. На очень длинной доске записали число 2013^{2013} в десятичной записи. Потом вместо этого числа записали сумму его цифр. Затем снова вместо получившегося числа записали его сумму цифр. Этот процесс продолжался до тех пор, пока не осталось однозначное число. Какое число осталось?
7. Пусть A — произведение всех нечетных чисел от 1 до 2009, B — произведение всех четных чисел от 2 до 2010. Докажите, что $A+B$ делится на 2011.
8. Докажите, что число $(3^n-1)^n-4$ делится на 3^n-4 при любом натуральном n.
9. Докажите, что при любом натуральном n число $3^{6n}-2^{6n}$ делится на 35.
10. Докажите, что для любых целых a и b

a) a^n-b^n делится на $a-b$ при любом натуральном n;

b) a^n+b^n делится на $a+b$ при любом нечётном натуральном n.

11. a) Найдите все k, для которых 2^k-1 делится на 7;

b) Докажите, что если 2^k-1 делится на 11, то оно делится на 31.

12. Докажите, что ни при каком натуральном k число 3^k+5^k не является квадратом натурального числа.
13. Докажите, что $19\cdot 8^n+17$ является составным при любом натуральном n.
14. Последовательность задана следующим образом: $a_1=a_2=1$,
$a_{n+2}=a_n\cdot a_{n+1}+1$. Докажите, что a_n-3 — составное число при $n\geqslant 7$.

2 НОД. Алгоритм Евклида. 6 июля.

1. На доске написаны числа 4800 и 3003. Витя вычисляет разность чисел на доске и заменяет любое из чисел на эту разность.

a) Может ли он с помощью таких операций получить числа 18 и 10?

b) Какое наименьшее положительное число он может получить?

2. На доске написаны числа a и b. Витя вычисляет разность чисел на доске и заменяет любое из чисел на эту разность.

a) Докажите, что все общие делители чисел на доске всегда одни и те же;

b) Докажите, что Витя не сможет получить натуральное число, меньшее (a, b);

c) Докажите, что после какого-нибудь хода на доске окажется 0;

d) Докажите, что вместе с нулем на доске присутствует (a, b).

3. Докажите, что

a) Если $a \geqslant b$, то $(a, b) = (b, a - b)$;

b) Если $a = kb + r$, то $(a, b) = (b, r)$;

c) Если $a \vdots b$, то $(a, b) = b$.

4. Найдите

a) $(12751, 10537)$;

b) $(546, 452)$.

Задачи для уединенного размышления.

5. На прямой сидит лягушка, которая может прыгать на 5 см или 7 см вправо или влево. Сможет ли она сместиться после нескольких прыжков вправо на 3 см от начального положения? Если сможет, то как она должна прыгать?

6. Найдите какие-нибудь целые x и y, для которых:

a) $12x - 5y = 1$;

b) $12x + 5y = 19$.

7. От прямоугольника 2013×35 по прямой отрезают квадраты. Каждый раз получается прямоугольник, и от него можно отрезать квадрат со стороной равной меньшей из сторон прямоугольника. Так делают, пока не останется квадрат. Чему равна сторона оставшегося квадрата?

8. Найдите $(2^{140} - 1, 2^{120} - 1)$.

9. Докажите, что для каждого натурального n дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

10. Натуральные числа a и b взаимно просты. Доказать, что $(a + b; a^2 + b^2)$ равен 1 или 2.

11. Доказать, что ($m, n > 0$ — натуральные числа и $n < m$)

a) $(2^n - 1; 2^m - 1) = 2^{(n;m)} - 1$;

b) $(10^n - 1; 10^m - 1) = 10^{(n;m)} - 1$;

c) Найти $(\underbrace{22\ldots22}_{n\text{ двоек}}; \underbrace{88\ldots88}_{m\text{ восьмерок}})$;

d) Найти $(\underbrace{88\ldots88}_{n\text{ восьмерок}}; \underbrace{22\ldots22}_{m\text{ двоек}})$.

12. Найдите $(11! - 20; 10! - 20)$.
13. Числа Фибоначчи определяются так: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Докажите, что $(F_n, F_{n-1}) = 1$.
14. Докажите, что дробь $\frac{n^4+3n^2+1}{n^3+2n}$ несократима при всех натуральных n.
15. Какие значения может принимать $(3n + 2; 10n + 23)$?

3 Линейное представление. 9 июля.

1. Докажите, что все остатки $r_1, r_2, \ldots, r_n$, получающиеся в процессе выполнения алгоритма Евклида, можно представить в виде $ma+nb$, где m и n целые.
Теорема 1. Если $(a, b) = d$, то найдутся такие целые m и n, что $d = ma + nb$.
2. Найдите такие m и n для $(2013; 11285)$.
3. Хулиганы Ваня и Саня сорвали стенную газету и стали рвать ее на мелкие кусочки. Ваня разрывал каждый кусочек, который попадает ему в руки, на 5 частей, а Саня на 10. Могло ли в некоторый момент получиться 1998 обрывков?
4. Решите в целых числах уравнение $5x - 7y = 3$

a) найдите какое-нибудь одно решение;

b) найдите какие-нибудь три решения;

c) если выполнены равенства $5x_1 - 7y_1 = 3$ и $5x_2 - 7y_2 = 3$, то рассмотрите их разность;

d) найдите все решения уравнения $5x - 7y = 3$ в целых числах.

5. В лифте действуют две кнопки: одна, позволяющая подниматься на a этажей вверх, и другая, позволяющая спускаться на b этажей вниз. Мы говорим, что лифтом можно пользоваться, если с его помощью можно попасть с любого этажа на любой другой.

a) Докажите, что при $(a, b) > 1$ пользоваться лифтом нельзя.

b) Докажите, что при $(a, b) = 1$ существует такое N (зависящее от a и b), что в доме высотой по крайней мере в N этажей пользоваться лифтом можно.

c) Пусть $(a, b) = 1$. Найдите наименьшее N, для которого имеет место утверждение пункта b).

Задачи для уединенного размышления.

6. Решите в целых числах уравнения:

a) $3x + 5y = 13$;
b) $10x + 15y = -5$;
c) $-6x + 21y = 18$.

7. Найдите какие-нибудь целые числа A и B такие, что $\frac{A}{999} + \frac{B}{1001} = \frac{1}{999999}$.

8. Верно ли, что для любых натуральных a и b найдутся такие натуральные p и q, что при любом натуральном n числа $p + an$ и $q + bn$ взаимно просты?

9. На берегу моря стоит большая пустая цистерна с краном, и две разных канистры емкостью 16 и 25 литров. Можно ли налить в эту цистерну ровно 1998 литров воды?

10. Пусть m и n— натуральные числа. Доказать, что
a) $(2^{2^n} + 1; 2^{2^m} + 1) = 1$;
b) $(a^{2^n} + 1; a^{2^m} + 1) = \begin{cases} 1, \text{если } a \text{ четно} \\ 2, \text{если } a \text{ нечетно} \end{cases}$
c) $(a^{2^n} - 1, a^{2^m} - 1) = 1$.

11. Мы хотим разрезать прямоугольник $M \times N$ на одинаковые квадраты. Какой максимальный размер таких квадратов может получиться?

12. Назовем “MN-конем” фигуру, которая ходит на M клеток в одном направлении и на N клеток в другом, перпендикулярном первому. При каких M и N такой MN-конь может доскакать до любой клетки бесконечной шахматной доски?

13. Решите в целых числах уравнение $2000x + 513y = 329$.

14. Решите в целых числах уравнения:
a) $-7x + 4y + 9z = 89$;
b) $10x + 13y + 8z = 143$.
c) сколько решений в целых числах может иметь уравнение $ax + by + cz = d$?

4 Малая теорема Ферма. 11 июля

1. Составьте таблицу умножения ненулевых остатков по модулю 4, 5, 6, 7. Почему в одних таблицах встречаются нули, а в других – нет?

2. Докажите, что если модуль — простой, то в каждой строке и в каждом столбце таблицы умножения остатков все числа различны.(То есть, каждая строка таблицы содержит все ненулевые остатки, переставленные в другом порядке.)

3. Пусть a — целое число, которое не делится на простое число p. Докажите, что:

a) числа a, $2a$, $3a$, $\ldots$, $(p-1)a$ дают различные остатки по модулю p.

b) $a \times 2a \times 3a \times \ldots \times (p-1)a \underset{p}{\equiv} (p-1)!$

c) (Малая теорема Ферма) Докажите, что если p — простое число и a не делится на p, то $a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$.

Определение. Графом умножения на остаток n по модулю m называется ориентированный граф, вершинами которого служат остатки от деления на m, а из каждой вершины k единственное ребро ведет в вершину kn.

4. a) Постройте графы умножения на 2, 3 и 5 по модулю 10, на 3 по модулю 9, на 1, 2, 3, 4, 5, 6 по модулю 7.

b) Докажите, что граф умножения на ненулевой остаток по простому модулю разлагается на циклы равной длины.

c) Используя результат п. b), докажите малую теорему Ферма.

Задачи для уединенного размышления.

5. Найдите остаток от деления 8^{900} на 31.

6. Докажите, что $16^{2n+1} + (2n+1)^{16}$ делится на 17, если $(2n+1)$ на 17 не делится.

7. Докажите, что число $30^{121} + 121^{30}$ — составное число.

8. Докажите, что $n^7 - n$ делится на 42 при любом n.

9. Докажите, что если n — натуральное число не кратное 17, то одно из чисел n^8+1, n^4+1, n^2+1, $n+1$, $n-1$ делится на 17.

10. Математические хулиганы Гриша и Вова катаются на лифте 17-этажного дома. Они садятся в лифт на этаже с номером n, $(n \neq 17)$ и едут на этаж, номер которого равен остатку от деления n^2 на 17. После этого они умножают на n номер этажа, на котором оказались, и едут на этаж с номером, равным остатку от деления на 17 полученного произведения. На каком этаже может закончиться пятнадцатая поездка?

11. Вове и Грише надоело вспоминать, с какого этажа они начали путешествие, и теперь они просто возводят в квадрат номер этажа, на котором находятся, и едут на этаж с номером, равным остатку от деления результата на 17. Сколько поездок удастся им совершить таким способом?

12. Пусть p — простое число, большее 5. Докажите, что:

a) $\underbrace{11111\ldots11}_{p\text{ единиц}}$ не делится на p.

b) $\underbrace{11111\ldots11}_{p-1\text{ единица}}$ делится на p.

13. Дана последовательность $a_n = 1 + 2^n + \ldots + 5^n$. Существуют ли 5 идущих подряд её членов, делящихся на 2005?

14. Пусть p — простое число. Докажите, что $(a+b)^p \underset{p}{\equiv} a^p + b^p$ для любых натуральных a и b.

15. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \underset{pq}{\equiv} p + q$.

16. Пусть p — простое число. Напишем сначала p единиц, затем p двоек, p троек, p четвёрок, p пятёрок, p шестёрок, p семёрок, p восьмёрок и p девяток. Докажите, что полученное таким образом число при делении на p даёт такой же остаток, что и число 123 456 789.

17. Докажите, что $m^{61}n - n^{61}m$ кратно 56786730 при любых целых m и n.

18. Найдите все такие простые числа p, что $5^{p^2} - 1$ кратно p.

19. Пусть p и $p+2$ — простые числа. Докажите, что $2p(p+1)(p+2)$ является общим делителем чисел $p^{p+2} - p$ и $(p+2)^p - p - 2$.

5 Алгебра. 22 июля.

1. Докажите тождество: a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$; b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

2. Докажите, что число 7999973 – составное.

3. Вычислите: $70 \cdot (71^9 + 71^8 + \ldots + 71^2 + 72) + 1$.

4. Упростите: $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$.

5. Рома утверждает, что если к любому двузначному числу приписать справа число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получим четырехзначное число, делящееся на 11 без остатка. Прав ли он?

6. Докажите, что $20000013^2 + 20000013^2 \cdot 20000014^2 + 20000014^2$ — точный квадрат.

7. Найдите знакочередующуюся сумму $502 \cdot 500 - 503 \cdot 499 + 504 \cdot 498 - 505 \cdot 497 + \ldots + 1000 \cdot 2 - 1001 \cdot 1$.

8. Верно ли, что число $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 \cdot 2016 + 1$ является полным квадратом?

9. Представьте выражение $2x^2 + 2y^2$ в виде суммы двух квадратов.

10. Покажите, что любое нечётное число можно представить в виде разности квадратов двух чисел.

11. Покажите, что любое число, кратное 4, можно представить в виде разности квадратов двух чисел.

12. Разложить на множители: a) $a^4 + 4$; b) $a^4 + a^2 + 1$; c) $a^8 + a^4 + 1$; d) $81a^4 + 4$.

13. Докажите, что число является полным квадратом. a) $\underbrace{44\ldots4}_{200\text{ раз}} - \underbrace{88\ldots8}_{100\text{ раз}}$;

b) $\underbrace{44\ldots4}_{2n} + \underbrace{22\ldots2}_{n+1} + \underbrace{88\ldots}_{n} + 7$; c) $\underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n}$.

14. Про нечётные натуральные числа a, b и c известно, что число $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Доказать, что и число $ab + ac + bc$ тоже делится на $a + b + c$.

15. Докажите, что $3^{40} + 6^{20} + 2^{38}$ — полный квадрат.

16. Является ли число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ простым?

17. Докажите тождество: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

18. При каких целых n число $3n^4 - 8n^2 - 3$ будет простым? Найти это простое число.

Глава 6

Разное.

1 Разнобой – 1. 16 июля.

1. Обозначим через $\Pi(x)$ произведение цифр числа x. В ряд выписаны числа $\Pi(1885)$, $\Pi(1886)$, $\Pi(1887)$, $\ldots$. Какое наибольшее количество чисел, записанных подряд, могут оказаться последовательными натуральными числами?

2. У Васи было 2005 настоящих монет. Одну из них заменили на фальшивую. Васе хочется за одно взвешивание на чашечных весах без гирь найти как можно больше настоящих монет. Что он должен сделать и сколько настоящих монет он сможет найти?

3. Рома шел по дороге и встретил трактор, тащивший за собой длинную трубу. Рома решил измерить длину трубы. Для этого он прошел вдоль нее "против движения трактора" и насчитал 20 шагов. После этого он прошел вдоль трубы "по движению трактора" и насчитал 140 шагов. Зная, что его шаг равен 1 м, Рома смог найти длину трубы. Чему она равна?

4. Вася, Петя и еще 2009 человек встали в круг, при этом Вася и Петя находятся не рядом. После этого Вася выбирает любого из двух своих соседей и "пятнает" его (хлопает по плечу). Потом это делает Петя, потом снова Вася и т.д. Тот, кого запятнали, выходит из круга (и круг сужается). Тот из двух игроков, который запятнает другого, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

5. В стране чудаков на часах часовая стрелка движется так, как она движется на обычных часах со стрелками, а минутная — в обратном направлении. В остальном часы в стране чудаков ничем не отличаются от обычных часов. Путешественник в стране чудаков посмотрел на уличные часы и увидел, что минутная и часовая стрелка совпадают и расположены между 4 и 5 часами. В какой момент времени путешественник посмотрел на часы?

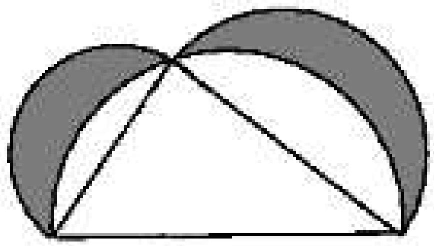
6. На доске написаны числа от 1 до 100. Вася и Петя по очереди вычеркивают написанные числа, начинает Вася. Тот, после чьего хода все оставшиеся числа будут одновременно делиться на натуральное число, большее 1, либо не вычеркнутым останется ровно одно число, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

7. Перпендикуляры, опущенные из внутренней точки равностороннего треугольника на его стороны, и отрезки, соединяющие эту точку с вершинами, разбивают треугольник на шесть прямоугольных треугольников. Докажите, что сумма площадей трёх из них, взятых через один, равна сумме площадей трёх остальных.

8. Имеются числа 1, 2, 3, ..., 10. Сколькими способами их можно расставить в ряд так, что сумма чисел, стоящих на четных местах, была бы больше суммы чисел, стоящих на нечетных?

2 Разнобой – 2. 20 июля.

1. Полуокружности, построенные на катетах и гипотенузе, как на диаметрах, образуют "луночки". Докажите, что общая площадь этих луночек равна площади треугольника.



2. В гандбольном турнире в один круг (каждая команда сыграла с каждой ровно один раз, за победу дают 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0) приняло участие 16 команд. Все команды набрали разное количество очков, причем команда, занявшая 7 место, набрала 21 очко. Докажите, что победитель хотя бы один раз сыграл вничью.

3. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеточек вырезали 99 квадратиков 2×2 (режут по линиям). Доказать, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.

4. В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. Каждая вершина и каждая точка пересечения диагоналей окрашены в синий цвет. Вася хочет перекрасить эти синие точки в красный цвет. За одну операцию ему разрешается поменять цвет всех окрашенных точек, принадлежащих либо одной из сторон либо одной из диагоналей на противоположный (синие точки становятся красными, а красные – синими). Сможет ли он добиться желаемого, выполнив какое-то количество описанных операций?

5. Двадцать рыцарей надели двадцать плащей, и каждому плащ оказался короток. Тогда рыцари, сняв плащи, выстроились по росту. Самый высокий рыцарь взял себе самый длинный плащ, второй взял себе самый длинный плащ из оставшихся и т.д. Рыцарь самого маленького роста взял себе самый короткий плащ. Докажите, что и в этом случае каждому рыцарю плащ окажется короток.

6. Имеется 3 белых и 2002 черных шара. Два игрока по очереди берут или один, или два шара. Шары рано или поздно заканчиваются, а выигрывает тот, у кого в итоге оказывается четное число белых шаров (0 – четное число). Кто выиграет при правильной игре?

3 Индукция и спуск. 10 июля.

- Метод решения, основанный на сведении к меньшему числу рассматриваемых объектов, называется спуском.

- Метод решения, основанный на поиске наименьшего числа рассматриваемых объектов, для которых условие задачи неверно, с последующим получением противоречия, называется методом минимального контрпримера.

- Метод математической индукции — метод доказательства последовательности утверждений, основанный на доказательстве первого утверждения (базы индукции) и доказательстве того, что из n-ого утверждения следует $(n+1)$-ое утверждение (индукционный переход).

1. Головоломка «Ханойские башни» имеет три стержня. На одном находится пирамидка из нескольких колец (уменьшающихся снизу вверх). Эту пирамидку нужно переложить на другой стержень, соблюдая правила игры: нельзя переносить сразу несколько колец и нельзя класть большее кольцо поверх меньшего. Докажите, что при любом количестве n колец головоломка имеет решение и при этом достаточно $2^n - 1$ перекладываний.

2. Несколько прямых делят плоскость на части. Доказать, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части (имеющие общий отрезок границы) были разного цвета

3. Докажите, что любую сумму, начиная с 8 копеек, можно выплатить монетами по 3 копейки и 5 копеек.

4. Докажите по индукции, что число людей, сделавших сегодня на линейке нечетное число рукопожатий, чётно.

5. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Докажите, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

6. В прямоугольнике $3\times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трех цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.

Задачи для уединенного размышления.

7. Докажите, что квадрат $2^n\times 2^n$ без угловой клетки можно разрезать на уголки из трех клеток.

8. Отряд девочек отправился в поход. После того, как они вернулись, их родителям стало известно, что хотя бы одна из них искупалась в походе без разрешения, и каждый решил высечь свою дочь, если узнает о том, что она купалась. Каждое утро девочки обмениваются слухами о том, кто искупался в походе и кого высекли родители, которые сообщают вечером родителям (исключая информацию о том, купались ли они сами). Через 13 дней несколько отцов, получив очередную порцию информации, догадались о провинности их дочерей и высекли их. Сколько детей получило в этот вечер наказание?

9. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомобилей. Известно, что если весь бензин, находящийся в автомобилях, слить в один из них, то этот автомобиль сможет проехать по всей кольцевой дороге по кругу до места старта. Докажите, что хотя бы один из автомобилей сможет проехать по кольцевой дороге по кругу до места старта, забирая по дороге бензин у других автомобилей.

Глава 7

Математические бои.

1 Математический бой. 12 июля.

1. Известно, что p, q — последовательные простые числа, большие двух. Докажите, что $p + q$ можно представить в виде произведения трех натуральных чисел, больших 1.
2. Докажите, что если p — простое и $a^p \underset{p}{\equiv} b^p$, то $a^p \underset{p^2}{\equiv} b^p$.
3. При каких натуральных n можно замостить доску $n \times n$ доминошками 1×2 , которые разрешается располагать только горизонтально, и прямоугольниками 1×3, которые разрешается располагать только вертикально? (Две стороны доски условно считаются горизонтальными, а две другие - вертикальными.)
4. В городе Че, в котором живет Павел Ч, номер трамвайного билета состоит из 9 цифр, т. е. от 000 000 000 до 999 999 999. Жители города Че называют билет "несчастливым", если 9 цифр его номера можно разбить на 3 группы по 3 цифры таким образом, чтобы суммы цифр в каждой группе были одинаковы. Например, номер 148 953 381 — "несчастливый" $(1 + 8 + 5 = 4 + 9 + 1 = 3 + 3 + 8)$. Докажите, что количество "несчастливых" билетов в городе Че четно.
5. В каждой клетке таблицы 2013×2013 стоит число $+1$ или -1. Может ли сумма произведений по всем строкам и всем столбцам таблицы быть равной нулю?
6. Даны $\triangle\ ABC$ и такие точки D и E, что углы $\angle ADB$ и $\angle CEB$ прямые. Докажите, что длина отрезка DE не больше полупериметра $\triangle\ ABC$.
7. Миссис Хадсон и Доктор Ватсон загадали по натуральному числу. Каждый из них посчитал сумму всех делителей своего числа (включая 1 и само число) и сумму чисел, обратных к делителям. Когда Шерлок Холмс узнал, что и первые, и вторые суммы его друзей сов-

пали, он сразу догадался, что миссис Хадсон и доктор Ватсон загадали одно и то же число. Докажите, что Шерлок Холмс прав.

8. Имеется двадцать одинаковых на вид монет, одна из них весит 9,9 г, две другие - по 9,8 г, а все оставшиеся - по 10 г. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь выявить хотя бы одну десятиграммовую монету?

2 Математический бой. 6-7 класс. 17 июля.

1. В каждой клетке квадрата 5×5 сидит либо рыцарь, либо лжец. Каждый из них заявил: “Ровно половина моих соседей по стороне — рыцари”. Какое наибольшее число рыцарей могло быть в квадрате?

2. В отряде ровно половина детей умеет играть в футбол, две трети – в волейбол, три четверти – в гандбол, четыре пятых – в пионербол. Докажите, что для участия в Универсиаде можно выбрать по 10 человек на каждый вид спорта так, чтобы никто не участвовал в двух видах спорта одновременно.

3. Вася и Петя играют в игру. На пяти клавиатурах есть 100, 101, 102, 103 и 104 клавиши соответственно. За ход можно выломать по одной клавише из двух разных клавиатур. Петя ходит первым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Казначей Матвей положил в каждую клетку прямоугольника 3×6 по одной монете. Он утверждает, что суммарный вес всех монет в каждой линии (строчки и столбцы), кроме одной, одинаков. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить, в какой именно линии вес отличается от остальных?

5. Какое наибольшее количество фигурок $1 \times 2 \times 2$ можно вырезать из куба $3 \times 3 \times 3$?

6. Несколько кроликов построились в ряд. Оказалось, что каждый кролик, кроме двух крайних, имеет поровну друзей слева и справа от него. Докажите, что у двух крайних кроликов поровну друзей.

7. Хромой король может ходить на любую соседнюю по стороне или углу клетку доски, кроме верхней и нижней (не более 6 возможных ходов с каждой клетки). Может ли хромой король обойти все клетки доски 9×9, побывав на каждой клетке по одному разу и вернувшись на исходное поле?

8. Электронная схема “пожарной сигнализации” состоит из четырёх кнопок. Каждая кнопка управляет своим переключателем: её нажатие переключает его из положения “вкл” в положение “выкл” и обратно. Начальное положение выключателей неизвестно. “Пожарная сигнализация” подаёт сигнал тревоги на неслышимой (ультразвуковой) частоте в тот момент, когда не менее трёх выключателей оказываются в положении “вкл”. За какое наименьшее число нажатий на кнопки можно гарантированно добиться того, чтобы включился сигнал тревоги?

3 Математический бой. 7-8 класс. 17 июля.

1. Двое играют в игру. Первый пишет на доске число 1. Второй прибавляет к нему 1 или 2, и пишет результат на доске. Первый прибавляет к числу на доске 1, 2 или 3, и опять записывает результат. Второй увеличивает число на доске на 1, 2, 3 или 4 и пишет результат и т. д. Побеждает тот, кто напишет число 10 000. Кто выигрывает при правильной игре?

2. В $\triangle\, ABC$ AH — высота, BM — медиана и CL — биссектриса точками пересечения образуют треугольник. Может ли получившийся треугольник быть равносторонним?

3. В квадратной таблице размером 3×3 записаны 9 чисел так, что суммы чисел в строках, столбцах и на каждой из двух диагоналей равны между собой. Сумма всех девяти чисел равна 2001. Какое число может стоять в центральной клетке таблицы?

4. На окружности имеется 24 точки, которые в произвольном порядке занумерованы нечетными числами от 3 до 49. Два числа соединяются хордой в том и только в том случае, если одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся две хорды, пересекающиеся внутри окружности.

5. Назовем раскраску клеток доски 6×6 в черный и белый цвета *хорошей,* если у каждой клетки найдется соседняя по стороне клетка такого же цвета. Существует ли такая хорошая раскраска, которая при замене белого цвета на черный, а черного — на белый в любом столбце или в любой строке становится нехорошей?

6. Дан выпуклый семиугольник. Докажите, что одну из его вершин можно удалить таким образом, чтобы никакие три диагонали, соединяющие оставшиеся вершины, не имели общей внутренней точки.

7. За круглым столом сидят мужчины и женщины, всего 100 человек. Будем называть человека довольным, если его сосед справа — противоположного пола. Известно, что довольных мужчин — 20% (от общего числа мужчин), довольных женщин — 30% (от общего числа женщин). Сколько мужчин сидит за столом? Не забудьте обосновать ответ.

8. Два числа m и n назовем *родственными,* если, во-первых, они имеют одни и те же простые делители, и, во-вторых, числа $m-1$ и $n-1$ обладают таким же свойством. Докажите, что существует бесконечно много пар родственных чисел.

Глава 8

Вопросы к зачету.

I Комбинаторика

1. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове “гипотенуза”?

Сколько можно составить пятизначных чисел из нечетных цифр, используя каждую цифру по разу?

Сколько существует способов выложить n предметов в ряд?

Как называется и обозначается эта величина?

Выведите формулу этой величины.

2. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове “сковородка”?

Сколько можно составить восьмизначных чисел из цифр числа 29072013?

Сколько существует способов выложить в ряд k предметов, выбрав их из n?

Как называется и обозначается эта величина?

Выведите формулу этой величины.

3. Сколько существует способов выбрать, какие два из шести уроков прогулять?

Сколько существует способов выбрать, какими тремя фломастерами из имеющихся 12 рисовать?

Сколько существует способов выбрать k предметов из n?

Как называется и обозначается эта величина?

Выведите формулу этой величины.

4. Объясните, что такое треугольник Паскаля.

Чему равна сумма чисел в $n-$ой строке треугольника Паскаля? Докажите это двумя способами.

5. Перечислите три свойства C_n^k и докажите любые два из них.

6. Докажите, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ комбинаторно и алгебраически.

7. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ двумя способами.

8. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$ двумя способами. Объясните, чем это свойство полезно при выписывании треугольника Паскаля и при раскрытии скобок по формуле Бинома Ньютона.

9. Докажите формулу Бинома Ньютона комбинаторно.

10. Докажите формулу Бинома Ньютона с помощью математической индукции.

11. Докажите, что C_p^k делится на p, если $k \neq 0$, $k \neq p$, $p \in \mathbb{P}$.

12. Что общего между этими двумя задачами:

Сколькими способами мама может разделить между четырьмя детьми 20 одинаковых конфет так, чтобы каждому хоть что-то досталось?

Сколько решений имеет уравнение $x + y + z = 2000$ в натуральных числах?

Расскажите план решения этих задач.

13. Что общего между этими двумя задачами:

Сколькими способами мама может разделить между четырьмя детьми 20 одинаковых конфет?

Сколько решений имеет уравнение $x + y + z = 2000$ в целых неотрицательных числах?

Расскажите план решения этих задач.

14. Что общего между этими двумя задачами:

Малыш способен съесть не более 10 тефтелек, Бимбо – не более 20, а Карлсон – не более 50. Сколькими способами они могут поделить по-братски 70 тефтелек? (По-братски – значит, чтобы каждому хоть что-то досталось).

Сколько решений имеет уравнение $x + y + z = 2000$ в натуральных числах, не превосходящих 800?

Расскажите план решения этих задач.

15. Малая теорема Ферма. Комбинаторное доказательство.

II Графы

16. Доказать, что сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер. Лемма о рукопожатиях.

17. Определение цикла, дерева. Доказать, что граф — дерево $\Leftrightarrow$ любые две его вершины соединены ровно одним простым путем. Доказать, что граф – дерево $\Leftrightarrow$ он связный, но при выкидывании любого ребра перестает быть связным.

18. Доказать, что граф – дерево $\Leftrightarrow$ он связный граф с n вершинами, в котором ровно $n-1$ ребро. Определение остовного дерева. Доказательство существования остовного дерева в связном графе.

19. Определение планарного, плоского графов. Доказательство формулы Эйлера для связного плоского графа.

20. Доказать, что для связного плоского графа, в котором хотя бы три вершины, справедливо $6\text{В}-12 \geqslant 2\text{Р} \geqslant 3\text{Г}$

21. Непланарность полного графа на пяти вершинах, непланарность графа с тремя домиками и тремя колодцами.

22. Лемма о раскраске вершин плоского графа в 6 цветов.

23. Доказательство формулы Эйлера через формулу Пика. Шаги 1 и 2: вывод формулы для площади $I+X+\frac{B}{2}+\frac{S}{2}-(F-1)$ и равенства $S+K=2E$

24. Доказательство формулы Эйлера через формулу Пика. Шаги 3 и 4: вывод формулы для площади $(I+X+V-K)+\frac{B+K}{2}-1$ и формулы Эйлера.

25. Определение эйлерова пути (цикла). Критерий наличия эйлерова цикла.

26. Критерий наличия эйлерова пути. Определение двудольного графа. Максимальное число ребер в двудольном графе с w белыми и b черными вершинами; $2n$ вершинами; $2n+1$ вершинами.

III Геометрия

27. Докажите, что отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки равны.

28. Докажите, что суммы противолежащих сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равны

29. Прямые AB и AC — касательные в точках B и C к окружности с центром в точке O. Через произвольную точку X дуги BC проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что периметр треугольника AMP не зависит от выбора точки X.

30. В $\triangle\ ABC$ со сторонами a, b и c вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K. Найти длину отрезка AK.

31. Дан $\triangle\ ABC$ со сторонами a, b и c. Найти длину отрезка касательной AK, если K — точка касания вневписанной окружности со стороной AB.

32. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c.

33. Даны две параллельные прямые AB и c. Докажите, что площадь $\triangle\ ABC$ не зависит от выбора точки C, находящейся на прямой c.

34. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на 4 части, площади которых, взятые последовательно, равны S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

35. Если пол в комнате площадью S надо покрыть линолеумом общей площадью также S так, чтобы не было участков, покрытых более чем в два слоя, то площадь пола, покрытая дважды, равна площади пола, не покрытой ни разу. Докажите.

36. (Теорема Пифагора) Площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах. $a^2 + b^2 = c^2$.

37. Теорема Бойяи - Гервина. Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены (можно пользоваться планом доказательства).

38. Формула Пика.

39. Найдите ГМ точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

40. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что периметр внутреннего треугольника меньше периметра внешнего.

41. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла - большая сторона. Докажите.

42. При двух фиксированных сторонах треугольника третья сторона увеличивается при увеличении угла между фиксированными сторонами.

43. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

44. Лемма о ласточкином хвосте. Если в $\triangle\ ABC$ точка M принадлежит стороне AB, точка K — отрезку CM, причём $AM : MB = n : m$, то отношение площадей $S_{ACK} : S_{BCK} = n : m$.

45. Дан $\triangle\ ABC$. Найдите ГМТ M таких, что $S_{MBC} = S_{MAB} = S_{MAC}$, и точка M лежит внутри $\triangle\ ABC$.

46. Медианы пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины;

47. Теорема Чевы. Если на сторонах AB, BC и CA $\triangle\ ABC$ взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1, то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

48. Теорема Менелая. Дан $\triangle\ ABC$. Точки C_1, A_1, B_1 выбраны на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC соответственно. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

IV Теория чисел

49. Алгоритм Евклида.

50. Представление $a; b$ в виде $ma + nb$.

51. Критерий разрешимости уравнения $ax+by = 1$ в целых числах.

52. Решение линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными.

53. Свойства сравнений.

54. Малая теорема Ферма. Доказательство через таблицу остатков.

55. Малая теорема Ферма. Доказательство через ориентированные графы остатков.

56. Зацикливание. Период и предпериод.

Оглавление

XXIX Летняя Многопредметная Школа
Кировской области.
Вишкиль. 3-28 июля 2013.
7 класс. Обычные группы.
Редактор
Оскорбин Дмитрий Николаевич
Верстальщик
Иванушкина Нина Владимировна
Корректор
Бачев Роман Андреевич
Иллюстратор
Баева Любовь Владимировна
Муза
Телешева Ольга Дмитриевна
Подписано в печать 27.07.13
Заказ $\log e^{\pi}$
Тираж 60 экз.
Бумага “Снегурочка”, очень хорошая
Формат А5
Издательство “Хакерка”