XXIX Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 3–28 июля 2013 г.

7 КЛАСС. ГРУППА ПРОФИ

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Сухов К.А.
Антропов А.В.
Матушкин А.Д.

Делимость. 4 июля.

1. Докажите, что число $1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2$ — составное.

2. Напомним, что натуральные числа a и b называются *взаимно простыми*, если единственный их общий делитель — единица.
a) Докажите, что два последовательных натуральных числа взаимно просты.
b) Докажите, что среди любых трех подряд идущих натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.
c) Докажите то же самое для четырех чисел.
d**) Для какого еще количества чисел вы сможете доказать утверждение пункта b)?

3. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на семь?

4. Решите уравнение $x^2 = y^2 + 19$ a) в натуральных;   b) в целых числах.

5. Число, записываемое n единицами, — простое. Докажите, что само число n тоже простое. Верно ли обратное утверждение (то есть верно ли, что при простом n число из n единиц также будет простым)?

6. Каждое из натуральных чисел a, b, c и d делится на натуральное число $ab - cd$. Докажите, что $ab - cd = 1$.

7. Можно ли числа 1, 2, 3, …, 20 так расставить в вершинах и серединах ребер куба так, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

Вступительная олимпиада. 4 июля.

1. Дано 10 целых чисел. Может ли так оказаться, что произведение любых 8 из них отрицательно?

2. В классе 21 человек. Никакие две девочки не дружат с одинаковым количеством мальчиков. Какое наибольшее количество девочек может быть в классе?

3. На гранях куба расставлены различные натуральные числа, не превышающие n, причём числа на гранях, имеющих общее ребро, отличаются не менее, чем на 1004. При каком наименьшем n это возможно?

4. Докажите, что произведение всех ненулевых цифр, встретившихся в записи натуральных чисел от 1 до 2013 включительно — не точный квадрат.

5. Несколько школьников ходили за грибами. Школьник, набравший наибольшее количество грибов, собрал $1/98$ общего количества грибов, а школьник, набравший наименьшее количество грибов, собрал $1/100$ часть от общего количества. Сколько было школьников?

6. Точка F — середина медианы BD треугольника ABC. Точка E на стороне BC такова, что $DE \perp BC$. Докажите, что если $AB = AE$, то $\angle AFD = \angle FED$.

7. На плоскости расположены 1985 точек красного, синего и зеленого цветов так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек разного цвета соединены отрезками, причем оказалось, что изо всех точек выходит одно и то же число отрезков. Докажите, что найдется красная точка, соединенная отрезками и с синей, и с зеленой точками.

Площади. 5 июля.

Определение. Каждой фигуре M на плоскости ставится в соответствие число S_M, называемое *площадью*, такое, что выполнены следующие свойства:

1) $S_M \geqslant 0$;

2) Площади равных фигур равны;

3) Если фигура M состоит из фигур A и B, не имеющих общих внутренних точек, то $S_M = S_A + S_B$;

4) Площадь прямоугольника $a \times b$ равна ab.

1. a) Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

b) Докажите, что площадь остроугольного треугольника равна половине произведения произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту.

c) Докажите, что площадь тупоугольника треугольника равна половине произведения произвольной его стороны на опущенную на эту сторону

высоту.
d) Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту.

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что $AD \parallel BC$ тогда и только тогда, когда $S_{ABD} = S_{ACD}$.

3. Докажите, что медиана делит треугольник на два треугольника равной площади.

4. a) Докажите, что $S \leqslant ab/2$, где S — площадь треугольника, a и b — две его стороны. b) В произвольном четырехугольнике (a, b, c и d — стороны по порядку) докажите неравенство $S \leqslant \frac{ab+cd}{2}$.

5. a) В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D. Докажите, что

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{AB}{AD}.$$

b) Угол A треугольника ABC равен углу A' треугольника $A'B'C'$. Докажите, что

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}.$$

c) В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Докажите формулу:

$$AB : AC = BL : CL.$$

6. *(Пифагор)* В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

7. В выпуклом четырехугольнике соединили середины противоположных сторон, и получившиеся части раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных частей равна сумме площадей белых.

8. Существует ли такой треугольник, что
a) все его стороны больше 1 км, а площадь меньше 1 см^2;
b) все его высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 км^2;
c) все стороны треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 1 см^2?

Задачи для самостоятельного решения.

9. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и D прямые, а стороны AB и BC равны. Длина перпендикуляра, опущенного из точки B на сторону AD, равна 1. Найдите S_{ABCD}.

10. Внутри равностороннего треугольника взята точка. Докажите, что сумма расстояний от этой точки до сторон не зависит от выбора точки.

11. a) Угол A треугольника ABC дополняет угол A' треугольника $A'B'C'$ до $180°$. Докажите, что

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}.$$

b) В треугольнике ABC проведена биссектриса внешнего угла A, которая пересекает продолжение стороны BC в точке L. Докажите формулу:

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BL}{LC}.$$

12. Каждую сторону четырехугольника разделили на 4 равные части, соединили соответственные точки на противоположных сторонах, и 16 полученных частей раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных частей равна сумме площадей белых.

Сравнения по модулю. 5 июля.

1. Найдите последнюю цифру числа a) 23^{23}; b) $77^{77^{77}}$.

2. Найдите две последние цифры числа 199^{200}.

3. Известно, что $a + 2c$ и $b + 3d$ делятся на 7. Докажите, что $ab - 6cd$ делится на 7.

4. Докажите, что a) число дает тот же остаток при делении на 9, что и его сумма цифр; b) число дает тот же остаток при делении на 11, что и его знакопеременная сумма цифр (знакопеременная сумма цифр числа 2013 — это $-2 + 0 - 1 + 3 = 0$, а числа 239 — $2 - 3 + 9 = 8$).

5. Докажите, что $23^{43} + 43^{23}$ делится на 66.

6. Докажите что $3^{100} - 2^{100}$ делится на $2^{10} + 3^{10}$.

7. Докажите, что $(3^n + 1)^n - 2$ делится на $3^n - 2$.

8. Докажите, что если число $2^n - 1$ вдруг, случайно, оказалось простым, то и число n также чудесным образом простое.

9. В натуральном числе A переставили цифры, получив число B. Известно, что $A - B = \underbrace{11\ldots1}_{N \text{единиц}}$. Найдите наименьшее возможное значение N.

Задачи для самостоятельного решения.

10. Дана последовательность натуральных чисел, в которой первые два числа $x_1 = x_2 = 1$, а каждое следующее получается так: $x_{n+1} = x_n x_{n-1} + 1$. Докажите, что $x_n - 3$ не является простым числом при $n > 100$.

11. Пусть a и n — натуральные числа. Докажите, что $a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}$ делится на $a^2 - a + 1$.

12. Докажите, пожалуйста, что для любого натурального n число $2^{2n-1} + 3n + 4$ делится на 9.

Разнобой–1. 5 июля.

1. Несколько семиклассниц собрали поровну шишек. Время от времени какие-то семиклассницы раздают каждой из остальных поровну из своих шишек. После многократного повторения такой процедуры у Гертруды осталось 23 шишки, а у Нинели — 6 шишек. Сколько было семиклассниц?

2. Докажите, что при нечетных m и n число $1^n + 2^n + \ldots + (m-1)^n$ делится на m.

3. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 2500.

4. В начале игры в углу шахматной доски стоит король. Двое по очереди делают им ходы по шахматным правилам. При этом запрещается ставить короля на клетку, где он уже стоял раньше. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его противник?

5. Даны 17 натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$. Известно, что ${a_1}^{a_2} = {a_2}^{a_3} = \ldots = a_{17}^{a_1}$. Докажите, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_{16} = a_{17}$.

6. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными из этого же угла.

7. В стране 100 городов, из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы попрежнему из каждого города выходило не менее одной дороги и при этом по крайней мере из 67 городов выходило ровно по одной дороге.

Графы. 6 июля.

Определение. Будем говорить, что задан граф, если задано множество его вершин и про любую пару различных вершин сказано, связаны они ребром или нет. Граф называется конечным, если число вершин в нем конечно.

Лемма о рукопожатиях. В графе число нечетных вершин четно.

1. Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек? А если девочек 10, а мальчиков 9?

2. Каждый из 102 кроликов имеет не менее 68 знакомых. Докажите, что найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

3. У каждого пациента спецлечебницы №239 ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что их можно разделить на две нейтральные палаты.

4. Каждая из девочек после отбоя не более двух раз поболтала по телефону. Докажите, что их можно разбить на три группы так, чтобы в каждой группе не было болтавших девочек.

Определение. Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами есть путь по ребрам.

5. В стране 25 городов, каждый город соединен дорогой не менее чем с 12 другими городами. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого. Обобщите эту задачу на случай n городов.

6. Каждый из 750 народных любимцев оскорбил ровно одного из коллег за цвет верхней одежды. Докажите, что можно выбрать 250 любимцев, среди которых никто никого не оскорблял.

7. a) Если степени всех вершин связного графа равны 4, то после удаления любого ребра граф останется связным. b) В графстве Джентельменское из усадьбы каждого джентльмена выходит ровно 10 дорог к другим усадьбам. При этом каждый джентльмен может доехать по дорогам до любого другого. Однажды одну из дорог перекопали, и по ней стало невозможно проехать. Докажите, что любой джентльмен по–прежнему может нанести визит вежливости любому другому коллеге.

Определение. Связный подграф (часть графа), такой, что никакая вершина не из этого подграфа не соединена с ним, называется *компонентой связности.*

8. В Город ведет 101 дорога, из Деревни — всего три, а из всех остальных городов выходят 10 дорог. Докажите, что из Деревни можно доехать до Города.

Задачи для самостоятельного решения.

9. В некоторой стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что:
a) одним из этих двух видов транспорта можно добраться из любого города в любой другой;
b) для каждого города можно выбрать свой вид транспорта так, чтобы при помощи него можно было бы добраться до любого другого города не более чем с одной пересадкой;
c) одним из этих двух видов транспорта можно добраться из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

10. В стране несколько городов, некоторые соединены авиарейсами одной из N авиакомпаний так, что из каждого города ведет ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из каждого города можно добраться до любого другого. Однажды был закрыт ровно $N-1$ авиарейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по–прежнему из каждого города можно добраться до любого другого.

11. У Владимира В.Ж. на НаРаботе 1000 коллег. Любые два либо дружат, либо враждуют, либо незнакомы. Коллеги разговаривают только с друзьями. К тому же у каждого коллеги любые два друга враждуют, а любые два врага дружат. Докажите, что для того, чтобы все коллеги узнали о предстоящем референдуме, Владимир должен сообщить о нем не менее, чем 200 коллегам.

Разнобой–2. 6 июля.

1. Докажите, что кратчайшая ломаная с вершинами в данных точках не имеет самопересечений.

2. Через клетчатый квадрат 1000×1000 проведено по линиям сетки несколько прямых. Образовавшиеся при этом прямоугольные части раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета. Докажите, что количество черных клеточек четно.

3. На доске написаны числа от 1 до $2009^{12}+1$. Разрешается любые два числа заменять на модуль их разности. В конце на доске осталось одно число. Докажите, что оно не равно 0.

4. Докажите, что $2009!!+2010!!$ делится на 2011, где $n!!=n(n-2)(n-4)\ldots$.

5. В кружке прикладного прикалывания 14 человек прикалываются кнопками, 13 — значками и 13 —- булавками. Всего в кружке 20 прикалистов и каждый из них прикалывается не менее чем двумя предметами.

Сколько кружковцев прикалываются кнопками, булавками и значками одновременно?

6. Вдоль шестидесятой параллели растут деревья одинаковой высоты. Если все они упадут на запад, то общая длина участков шестидесятой параллели, заваленнных более чем пятью деревьями составить 100 км. Докажите, что если все деревья упадут на восток, то общая длина более чем пятикратно заваленнных участков шестидесятой параллели тоже составит 100 км.

7. На гипотенузе AB прямоугольного ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что CO – биссектриса угла C.

Параллельность и теорема Фалеса. 7 июля.

1. На плоскости даны семь прямых, никакие две из которых не параллельны. Доказать, что найдутся две из них такие, что угол между ними меньше $26°$.

2. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Y соответственно, причем $\angle XCB = \angle YAD$. Докажите, что прямые CX и AY параллельны.

3. Докажите, что четырехугольник является параллелограммом

a) тогда и только тогда, когда каждая диагональ делит его на две равновеликих части.

b) В трапеции одна из диагоналей делится другой пополам. Доказать, что трапеция — параллелограмм.

4. a) Докажите, что средняя линия треугольника параллельна его основанию.

b) Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

5. a) Точка B_1 лежит на стороне OB угла AOB. Докажите, что

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOB_1}} = \frac{OB}{OB_1}.$$

b) Две параллельные прямые высекают на сторонах угла с вершиной O отрезки A_1A_2 и B_1B_2. Докажите, что треугольники OA_1B_2 и OA_2B_1 равновелики.

Докажите теорему Фалеса c) для случая двух параллельных прямых

Две параллельные прямые высекают на сторонах угла с вершиной O

отрезки A_1A_2 и B_1B_2. Докажите, что

$$\frac{OA_1}{A_1A_2} = \frac{OB_1}{B_1B_2}.$$

d) В общем случае

Три параллельные прямые высекают на одной стороне угла отрезки A_1B_1 и B_1C_1, а на другой стороне угла — отрезки A_2B_2 и B_2C_2. Докажите, что если отрезки A_1B_1 и B_1C_1 находятся в данном отношении, то отрезки A_2B_2 и B_2C_2 находятся в том же отношении.

Задачи для самостоятельного решения.

6. *(Теорема Вариньона).* Докажите, что a) фигура, образованная путем последовательного соединения середин сторон четырехугольника, является параллелограммом, и

b) если четырехугольник был выпуклым, то площадь этого параллелограмма равна половине площади четырехугольника.

7. В параллелограмме $ABCD$ $\angle CAB + \angle DBC = 90°$. Докажите, что он ромб или прямоугольник.

8. a) Докажите, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда диагонали делят его на четыре равновеликих части.

b) Докажите, что параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

9. Точка на стороне AB треугольника ABC начала двигаться параллельно AC до BC, потом параллельно AB до AC, потом параллельно BC до AB и т.д. Докажите, что через несколько шагов она вернется на исходное место, и найдите это число шагов в зависимости от положения точки на AB.

10. Разделите данный отрезок на n равных частей с помощью циркуля и линейки.

Сочетания и перестановки. 7 июля.

0. В магазине “Все для современной молодежи” есть 5 видов значков, 7 видов челок и 10 видов розовых шнурков. Сколькими способами прогрессивная молодая леди может купить себе три самых необходимых предмета.

1. У Васи есть n гаджетов и k девайсов. Сколькими способами он может выбрать a) 3 предмета современного быта; b) комплект из двух принципиально разных предметов.

2. a) Пусть A_n^k количество способов из n предметов выбрать k с учетом порядка. Найдите формулу для A_n^k через факториалы.

b) Пусть C_n^k это количество способов выбора без учета порядка. Сделайте аналогичное действие.

3. Сколькими способами можно переставить буквы в слове

a) ПРИВЕТ; b) ПРЕВЕД; c) МЕТАМАТЕМАТИКА ?

4. У нефтяной компании есть n цистерн. Сколькими способами можно составить k составов для отправки буржуям a) с учетом порядка цистерн, при том, что каждый состав должен быть не пуст? b) А если составы могут быть пустыми? c) Составы без учета порядка цистерн и могут быть пустыми? (Составы считаются разными, поэтому обмен двух составов местами порождает новый способ.)

5. Докажите комбинаторно формулы: a) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ b) $n \cdot C_{n-1}^{k-1} = k \cdot C_n^k$.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Докажите комбинаторно, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

7. Сколькими способами из n–элементного множества можно выбрать a) подмножество; b) непересекающиеся подмножества A и B; c) подмножества A и B такие, что A содержится в B?

Разнобой–3. 7 июля.

1. Может ли $5^n - 1$ делиться на $4^n - 1$ при натуральном n?

2. Докажите, что существуют такие различные натуральные числа a, b, c, что $a^2 - 1 \,\vdots\, b$, $b^2 - 1 \,\vdots\, c$, $c^2 - 1 \,\vdots\, a$ и $a + b + c > 2003$.

3. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два узла клетчатой бумаги, и не лежащий на этой прямой узел, такой, что расстояние между ними меньше $\frac{1}{2009}$.

4. На клетчатой плоскости изображен неравнобедренный треугольник ABC с вершинами в узлах клетчатой сетки (сторона клеточки равна 1). Докажите, что $|AB - AC| > \frac{1}{P_{ABC}}$.

5. В десятичной записи квадрата некоторого числа, содержащей более одного знака, число десятков равно 7. Какой цифрой оканчивается квадрат этого числа?

6. Каждый ученик класса занимается в двух кружках, и для каждых трех учеников есть кружок, в который они ходят вместе. Докажите, что имеется кружок, в котором занимаются все ученики.

7. Квадратный материк разделен на 19 стран в форме выпуклых многоугольников, причем нет точек, в которых сходились бы границы четырех или больше стран. Из всяких трех границ, сходящихся в одной точке, одна закрыта, а две открыты для проезда. Докажите, что невозможно объехать все эти страны, побывав в каждой по одному разу, и вернуться в исходную страну.

Разнобой. 9 июля.

1. Докажите, что для любого четного n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323.

2. Докажите, что если $x + \frac{1}{x}$ — целое, то $x^n + \frac{1}{x^n}$ — тоже целое.

3. Докажите, что число, состоящее из 3^n единиц, делится на 3^n.

4. *(Бином Ньютона)* Докажите, что

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

a) по индукции; b) комбинаторно.

5. С помощью бинома Ньютона докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

6. *(Неравенство Бернулли)* Докажите, что при всех натуральных n и при $x > -1$ выполняется неравенство $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

7. В однокруговом турнире по волейболу участвовало n команд. Докажите, что их можно занумеровать числами от 1 до n так, что первая команда выиграла у второй, вторая у третьей, ..., $(n-1)$–я команда у n–й.

8. Найдите сумму $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$
a) с помощью бинома; b) комбинаторно, построив биекцию между четными и нечетными наборами α) для нечетного n; β) для четного n.

9. a) Чему равна сумма четных биномиальных коэффициентов $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}$
?
b) А нечетных $\sum\limits_{k=1}^{[(n+1)/2]} C_n^{2k-1}$?

Задачи для самостоятельного решения.

10. На плоскости проведены n прямых общего положения. Докажите, что они разбивают плоскость на $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ частей.

11. Докажите при любом натуральном n равенство $1^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

12. Пусть p_n — n–е простое число. Например, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, и т.д. Докажите, что при $n > 12$ выполнено неравенство $p_n > 3n$.

13. Докажите, что число $\sqrt{10}\left((1+\sqrt{10})^{10} - (1-\sqrt{10})^{10}\right)$ – целое.

14. Найдите первые 1000 цифр после запятой в числе: $(\sqrt{5}+2)^{2013}$.

Алгоритм Евклида, НОД. 9 июля.

Определение: *Наибольшим общим делителем (НОД)* чисел a и b называется наибольшее натуральное число d такое, что a и b делятся на d. Обозначение: $d = (a, b)$.

0. Докажите, что a) $(a, b) = (a-b, b)$; b) $(ac, bc) = c \cdot (a, b)$.

0. Теорема о линейном разложении НОД. Для любых целых a и b найдутся x и y такие, что $ax + by = (a, b)$

0. Найдите a) $(99!+100!, 101!)$; b) $(\underbrace{11\dots1}_{51}, \underbrace{11\dots1}_{81})$.

0. На какие натуральные числа может быть сократима дробь $\frac{13n+8}{8n+5}$?

1. Докажите, что $(a^m-1,\ a^n-1)=a^{(m,n)}-1$.

2. По бесконечной шахматной доске ходит (m,n)–мамонт, который может за один ход сдвинуться на m клеток по горизонтали или вертикали, а затем — на n клеток в перпендикулярном направлении. При каких m и n (m,n)–мамонт сможет попасть из любой клетки доски на любую другую?

3. Известно, что $(m,\ n)=1$. Каково наибольшее возможное значение $(m+2013n,\ n+2013m)$?

4. Племя Упс–ГУ решило выпустить в обращение денежные купюры достоинством 65 упсов и 999 упсов.
a) Докажите, что этими купюрами можно заплатить любую сумму денег (возможно, со сдачей).
b) Докажите, что любую сумму, большую 1000000 упсов, можно заплатить этими купюрами без сдачи.

5. Докажите, что ни при каком натуральном m число 1978^m-1 не делится на 1000^m-1.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Докажите, что a) $(f_m,\ f_n)=1$, где $f_k=2^{2^k}+1$ — числа Ферма;
b) число $2^{2^n}-1$ имеет по крайней мере n различных простых делителей. Следовательно, простых чисел бесконечно много.

7. Из угла стола $m\times n$ выпускают шар по биссектрисе угла. Ударяясь в стенку, шар отражается так, что угол падения равен углу отражения. Докажите, что рано или поздно шар прилетит в угол. Как найти количество ударов о борта, которые произойдут до этого момента?

8. a) Докажите, что если для некоторых натуральных a и b верно, что НОК$(a,a+5)=$ НОК$(b,b+5)$, то $a=b$. b) Может ли при различных натуральных a, b и c выполняться равенство НОК$(a,b)=$ НОК$(a+c,b+c)$?

ГМТ. 10 июля.

Определение. *Геометрическое место точек (ГМТ)*, обладающих данным свойством — это фигура, состоящая из тех и только тех точек, которые обладают этим свойством.

Упр.1 ГМТ, равноудаленных от сторон данного угла и лежащих внутри данного угла, есть биссектриса данного угла.

Упр.2 Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, и это центр вписанной окружности.

1. У треугольника есть три вневписанных окружности.

Упр.3 Найдите ГМТ, равноудаленных от трех данных прямых.

Упр.4 Даны две параллельные прямые. Найдите ГМТ, расстояние от которых до первой прямой в два раза больше, чем до второй.

Упр.5 Дан отрезок AB. Найдите ГМТ M таких, что a) $AM + MB = AB$; b) $AM - MB = AB$.

2. Пожарный решил забраться на лестницу, приставленную к стене. Едва он успел добраться до середины, лестница съехала на пол. Какова траектория пожарного до удара об пол?

Упр.6 Пусть O лежит на отрезке AB. Найдите ГМТ M таких, что $\angle MOB = 2\angle MAB$.

3. Найдите ГМТ середин хорд данной длины в данной окружности.

4. a) Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ M таких, что $S_{AMB} = S_{AMC}$. b) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

5. Загон для козла имеет форму квадрата. Из каких точек плоскости козел увидит меньше половины загона?

6. Дан квадрат. Найдите все точки такие, что сумма расстояний от каждой из них до двух противоположных сторон квадрата равна сумме расстояний до двух других сторон (под расстоянием от точки до стороны квадрата в этой задаче понимается расстояние до прямой, содержащей сторону).

7. Даны точки A и B. Найдите ГМТ M для которых треугольник AMB a) прямоугольный; b) остроугольный; c) тупоугольный.

8. Дан треугольник ABC. Внутри него взяли точку M и соединили ее с вершинами. Получилось три треугольника. Найдите ГМТ M, для которых сумма площадей двух из этих треугольников будет равна площади третьего.

Инвариант и прочее. 10 июля.

1. Вдоль прямой прыгает кузнечик. Сначала на 1см в какую-то сторону, потом на 2см, потом на 3см и так далее. Может ли он после 2009 прыжка оказаться в той же точке, где начал?

2. В углу квадрата a) 4×4; b) 3×3 стоит минус, в остальных клетках — плюсы. Разрешается заменять все знаки в любом столбце или в любой строке на противоположные. Можно ли получить таблицу из одних плюсов?

3. Докажите, что если p – простое и $ab \,\vdots\, p$, то либо $a \,\vdots\, p$, либо $b \,\vdots\, p$.

Определение. *Деревом* называется связный граф без циклов.

4. a) Докажите, что в дереве есть вершина степени 1.
b) Докажите, что в дереве с n вершинами содержится ровно $n-1$ ребро.

5. a) Докажите, что для простого $p > k > 0$ число C_p^k кратно p.
b) Докажите для целых чисел a и b, что $(a+b)^p \underset{p}{\equiv} a^p + b^p$.
c) Для простого p и натурального n выполнено $n^p - n \underset{p}{\equiv} 0$

6. Докажите тождество $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n2^{n-1}$.

7. В алфавите племени ЫЫ всего две буквы — Ъ и Ы. Смысл слова не меняется от следующих замен: ЫЪЫ $\leftrightarrow$ ЪЪ, ЫЪЪ $\leftrightarrow$ ЪЫ, ЪЪЫ $\leftrightarrow$ ЫЪ, ЪЪЪ $\leftrightarrow$ ЫЫ. Можно ли утверждать, что слова ЫЪЪ и ЪЫЫ являются синонимами?

8. На доске написали число 1. После этого каждую минуту к написанному числу прибавляют сумму его цифр. Докажите, что на доске никогда не появится число 123456.

9. Докажите, что a) из любого связного графа можно выделить дерево, содержащее все его вершины (*остовное дерево*);
b) в связном графе с n вершинами содержится как минимум $n-1$ ребро.

Задачи для самостоятельного решения.

10. Какие тождества для биномиальных коэффициентов можно вывести, исходя из равенства $(x+y)^{m+n} = (x+y)^m \cdot (x+y)^n$?

11. Найдите все такие n, для которых все биномиальные коэффициенты C_n^k нечетны.

12. На доске написаны числа от 1 до 20. Можно пару чисел $(x,\ y)$ заменить на $x+y+xy$. Какое число останется после 19 операций?

Планарные графы, теорема Эйлера. 11 июля.

Формула Эйлера. На плоскости изображен связный граф (с петлями и кратными ребрами!) с V вершинами и E ребрами, разбивающий плоскость на F областей(граней). Тогда $V - E + F = 2$.

0. В квадрате отметили 10 точек (или n точек), а затем соединили их и вершины квадрата непересекающимися отрезками так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

0. Докажите, что $6V - 12 \geqslant 2E \geqslant 3F$, если нет кратных ребер, петель и граф связен.

1. Докажите, что граф K_5 не планарен. Получается ли так доказать непланарность $K_{3,3}$?

2. Докажите, что граф $K_{3,3}$ (три домика и три колодца) не планарен.

3. Каждое ребро полного графа на 11 вершинах раскрасили в синий или красный цвет. Могут ли и синий, и красный графы оказаться планарными?

4. Пятиугольник разрезан на несколько многоугольников так, что все стороны пятиугольника остались неразрезанными. Докажите, что если число многоугольников не меньше пяти, то в одном из них найдется угол, который больше или равен $72°$.

5. В выпуклом многограннике все грани — пятиугольники или шестиугольники. В каждой вершине сходятся 3 ребра. Сколько всего пятиугольных граней?

6. На плоскости нарисовано n точек. Двое по очереди соединяют их линиями так, чтобы линии не пересекались. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

7. На плоскости нарисованы 5 кругов. Оказалось, что любые два из них пересекаются. Докажите, что какие-то три из них пересекаются.

Ферма, Вильсон и другие. 11 июля.

1. Найдите остаток от деления натурального числа на 30, если известно, что остаток от деления его на 15 равен 7, а остаток от деления на 6 равен 4.

2. На доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается стереть два числа a и b и записать вместо них числа a) $\frac{3a-b}{2}$ и $\frac{3b-a}{2}$; b) $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$; c) $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$; d) ab и $\frac{ab}{a+b-1}$. Можно ли за несколько таких операций получить числа 7, 8, 9?

3. Докажите, что в любом связном графе есть вершина, при удалении которой граф остается связным.

4. Пусть целое число a не делится на простое число p. Докажите, что тогда a) числа $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$ дают попарно различные остатки по модулю p; b) числа $(p-1)!$ и $a^{p-1}(p-1)!$ сравнимы по модулю p; c) $a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$.

5. a) Пусть целое число a не делится на простое число p. Докажите, что найдется число b такое, что $ab \underset{p}{\equiv} 1$.

b) *(Теорема Вильсона)* Натуральное число $p > 1$ является простым тогда и только тогда, когда $(p-1)! + 1 \,\vdots\, p$.

6. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в два цвета правильным образом тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных циклов.

7. Маньяк Петр по одной перерезает веревочки волейбольной сетки, имеющей вид прямоугольника $m \times n$. Какое наибольшее число веревочек может он разрезать до того, как сетка распадется на куски?

8. a) По кругу растут 42 дерева, и на каждом из них сидит чиж. Время от времени какие–то 2 чижа перелетают на соседние деревья — один по часовой стрелке, а другой — против. Могут ли все чижи собраться на одном дереве? b) А если 44 дерева?

Задачи для самостоятельного решения.

9. На плоскости дан правильный 29–угольник. Постройте с помощью циркуля и линейки правильный 87–угольник.

10. В произвольном четырехугольнике (a, b, c, d — стороны по порядку) докажите неравенство: $S \leqslant \frac{ac+bd}{2}$.

11. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

Матбой–междусобой. 12 июля.

1. Пусть p_n — n–е простое число, а $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n. Докажите, что каждое натуральное число представляется ровно в одном из видов $n + p_n - 1$ или $n + \pi(n)$.

2. Из натуральных чисел от 1 до 2013 выбрали 1002 числа. Докажите, что из этих 1002 чисел можно выбрать три различных a, b, c такие, что число c не кратно НОД(a, b).

3. Какую наименьшую сумму цифр может иметь число вида $3n^2+n+1$ при натуральном n?

4. Прямоугольник площади 19 пересекают 20 попарно параллельных прямых, расстояние между соседними из которых равно 1. Докажите, что сумма длин отрезков, высекаемых прямоугольником на прямых, не больше 20.

5. На плоскости лежат 100 точек. Всегда ли можно разбить эти точки на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, попарно пересекались?

6. На доске 100×100 стоят 2500 не бьющих друг друга королей. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?

7. Найдите все натуральные числа a, обладающие следующим свойством: к a можно приписать справа три цифры и получить a^3.

8. В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, $2\angle C = 180^\circ + \angle B$, $\angle AMC = 45^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

Вписанные углы. 14 июля.

0. Докажите, что угол, вписанный в окружность равен 1/2 дуги, на которую он опирается, в случае, когда центр окружности лежит: на стороне угла; внутри угла; вне угла. (Дуга окружности измеряется величиной опирающегося на нее центрального угла.)

0. Докажите, что a) у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма двух противоположных углов равна 180°; b) четырехугольник, сумма двух противоположных углов которого равна 180° можно вписать в окружность.

c) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ACB = \angle ADB$ тогда и только тогда, когда он вписанный.

1. На сторонах треугольника ABC взяли по точке и соединили их с точкой P внутри треугольника. Докажите, что если два из трех получившихся четырехугольников — вписанные, то третий — тоже вписанный.

2. Из точки P на биссектрисе угла с вершиной O опущены перпендикуляры PA и PB на его стороны. Докажите, что $\angle POA = \angle ABP$.

3. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны, а три его главные диагонали равны. Докажите, что этот шестиугольник — вписанный.

4. На гипотенузе прямоугольного треугольника ABC внешним образом построен квадрат $ABDE$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что луч CO — биссектриса угла C.

5. a) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется ортоцентром. Ортоцентр треугольника отразили относительно b) середины одной из сторон; c) самой стороны. А не кажется ли Вам, что полученная точка лежит на описанной окружности треугольника? А не могли бы Вы это доказать?

6. a) Докажите, что в треугольнике ABC биссектриса угла A и срединный перпендикуляр к стороне BC пересекаются на описанной окружности.

b) *Лемма о трезубце.* Прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M. Докажите, что треугольники BOM и COM равнобедренные.

Задачи для самостоятельного решения.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагонали пересекаются в точке K. При этом дуга AB равна 25°, а дуга CD равна 45°. Найдите, пожалуйста, градусную меру $\angle AKB$?

8. У выпуклого семиугольника, вписанного в окружность, 3 угла равны 120°. Будьте любезны доказать, что какие–то две стороны тоже равны.

9. По разные стороны от прямой l даны точки A и B. Найдите на l точку O такую, что l — биссектриса угла AOB.

10. Описанную окружность отразили относительно трех сторон треугольника. Докажите, что три полученные окружности пересекаются в одной точке.

11. В окружность с диаметром AB вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что длины проекций отрезков AC и BD на прямую CD равны.

Китайская. 14 июля.

1. Докажите, что дерево можно покрасить в два цвета правильным образом.

2. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

3. Докажите, что если $p > 5$ — простое, то число $\underbrace{11\ldots1}_{p-1}$ делится на p.

4. На острове есть 17 серых, 18 бурых и 19 малиновых хамелеонов. Когда встречаются 2 хамелеона разного цвета, они одновременно перекрашиваются в третий. Могут ли они все стать одноцветными?

5. Три кузнечика сидят на плоскости в точках с координатами (0, 0), (0, 1), (1, 0). Каждую минуту один из них перепрыгивает через другого, прыгая в точку, симметричную относительно него. Могут ли они попасть в точки с координатами a) (0, 1), (1, 0), (1, 1); b) (0, 0), (0, 3), (3, 0); c) (0, 0), (2, 1), (1, 2).

6. Докажите, что выпуклый 17–угольник нельзя разрезать на 14 треугольников.

7. Числа a и b взаимно просты. a) Оказалось, что при делении на a чисел m и n остатки совпали, и совпали остатки от деления чисел m и n на b. Докажите, что $m - n$ кратно ab. b) Докажите, что при делении чисел от 1 до ab на a и на b получаются все возможные пары остатков.

8. В строке в беспорядке записаны числа 1, 2, ..., 100. Петя находит пару рядом стоящих чисел, где правое меньше левого, и меняет их местами. a) Докажите, что рано или поздно числа расположатся по порядку 1, 2, ..., 100.
b) Какое наибольшее число ходов могут продолжаться перестановки?

9. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары — черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

10. Матч "Бавария" – "Спартак" закончился со счетом 5 : 8. Муж (болеющий за "Баварию") и жена (болеющая за "Спартак") собираются посмотреть этот матч в записи по очереди, уже зная итоговый счет: сначала смотрит муж (а жена сидит с ребенком), а в некоторый момент они меняются. Докажите, что они смогут поменяться так, чтобы увидеть поровну мячей, забитых любимой командой.

Задачи для самостоятельного решения.

11. a) В планарном графе любые две грани имеют не более одного общего ребра. Докажите, что в нем найдется грань, в которой не больше 5 ребер. b) в любой карте найдется либо вершина степени не более, чем 3, либо страна, ограниченная тремя ребрами. c) Докажите, что планарный граф можно покрасить правильным образом в 5 цветов.

12. В государстве некоторые пары городов соединены беспосадочными (двусторонними) авиарейсами. Раз в день происходит реорганизация: соединяются рейсами те и только те пары городов, для которых накануне существовал маршрут ровно с одной пересадкой. Через 6 дней выяснилось, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что если реорганизация будет продолжаться, то и через год можно будет из любого города долететь до любого другого.

13. На плоскости дано 100 красных и 100 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с разноцветными концами.

Теорема Эйлера и разное. 15 июля.

Определение. Набор чисел называется *полной системой вычетов* по модулю m, если в нем встречаются все возможные остатки от деления на m ровно по одному разу.

Определение. Набор чисел называется *приведенной системой вычетов* по модулю m, если в нем встречаются все возможные взаимно простые с m остатки от деления ровно по одному разу.

Определение. $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Выражение $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера.*

1. Докажите, что если $n > 2$, то $\varphi(n) \vdots 2$.

2. *(Теорема Эйлера)* Пусть n — натуральное число, a — целое число, взаимно простое с n. Докажите, что $a^{\varphi(n)} \underset{n}{\equiv} 1$.

3. Число n нечетно. Докажите, что $2^{n!} - 1$ делится на n.

4. Пусть p — простое число. Докажите, что $(2p-1)! - p$ делится на p^2.

5. Докажите, что простых чисел вида $4k+3$ бесконечно много.

Определение. Множество $I \subset \mathbb{Z}$ состоящее из целых чисел будем называть *идеалом* если выполняются два условия:
1) если a и b принадлежат I то $a + b \in I$.
2) если $a \in I$ и $c \in \mathbb{Z}$, то $ac \in I$

6. Докажите, что для любого идеала I найдется такое число m, что I состоит в точности из целых чисел, делящихся на m. (*Указание:* возьмите наименьший по модулю элемент I).

7. Докажите, что множество линейных комбинаций чисел a и b (а именно $ax + by$) является идеалом.

Задачи для самостоятельного решения.

8. Докажите свойство мультипликативности функции Эйлера. Если m и n взаимно просты, то $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$. *Указание:* нарисуйте все остатки по модулю mn виде таблицы $m \times n$ и посмотрите где находятся взаимно простые с m и n числа.

9. Докажите, что если для чисел m и n выполняется свойство мульпликативности, то они взаимно просты.

10. Докажите, что если у числа n есть два различных нечетных простых делителя, то для числа a взаимно простого с n верно, что $a^{\varphi(n)/2} \underset{n}{\equiv} 1$.

11. Найдите a) $\varphi(p^k)$, b) $\varphi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s})$.

Комбинаторные доказательства. 15 июля.

1. На плоскости есть 100 точек. Можно ли провести прямую так, чтобы по одну сторону от нее лежало 30 точек, а по другую 70?

2. Натуральное число n не делится на 17. Докажите, что либо $n^8 + 1$, либо $n^8 - 1$ делится на 17.

3. *Число Кармайкла.* Докажите, что $a^{561} - a$ всегда делится на 561 для любого целого a.

4. *(МТФ)* Есть неограниченное количество бусинок a различных цветов. А сколько различных круглых бус из p бусинок можно составить из них?

5. *(Вильсон)* Сколько различных замкнутых ломаных можно провести через вершины p–угольника, если считать, что ломаные, получаемые поворотом друг из друга, одинаковы?

6. Есть 13 гирь с целыми весами. Любые 12 из них можно разбить на 2 кучки равного веса по 6 гирь в каждой. Докажите, что все гири имеют одинаковый вес.

7. На доске написано число -100. Раз в минуту Вася дописывает новое число, отличающееся от предыдущего менее чем на 1. Через некоторое время на доске оказалось написано число 2013,17. Докажите, что был момент, когда на доске было написано число по модулю меньше $1/2$.

8. В ряд выписаны числа $1, 2, \ldots, n$. За один ход можно переставить a) два соседних; b) любые два из них. Может ли так оказаться, что через 2013 ходов получится исходная расстановка?

9. Последовательность целых чисел 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 42, 63, 94, ... начинается с двойки, а каждое следующее число получается из предыдущего умножением на $3/2$ и округлением вниз. Докажите, что в этой последовательности есть целое шестизначное число.

Задачи для самостоятельного решения.

10. На доске записаны числа от 1 до 100. Разрешается стереть с нее любые два числа и записать вместо них их сумму, а на другой доске записать их произведение. Какова будет сумма чисел, написанных на второй доске, когда на первой доске останется всего одно число?

11. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ — составное.

12. Может ли так быть, чтобы доходы компании за любые пять подряд идущих месяцев 2013 года превышали расходы, но расходы за весь 2013 год превышали доходы?

13. Можно ли из произведения $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!$ вычеркнуть один сомножитель так, что произведение оставшихся будет полным квадратом?

... теорема об остатках. 16 июля.

1. Докажите, что последовательные числа Фибоначчи взаимно просты.

2. a) Решите в целых числах уравнение $10x+8 = 11y+10$. b) Найдите все числа, дающие при делении на 10 остаток 8, а при делении на 11 остаток 10.

c) Найдите все числа, дающие при делении на 8 остаток 2, а при делении на 13 остаток 11.

3. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \underset{pq}{\equiv} p+q$.

4. В таблице 4×4 в одной клетке на краю (но не в углу) стоит минус, а во всех остальных стоят плюсы. Разрешается поменять знаки в любой строке, любом столбце или в любой диагонали, состоящей из 1, 2, 3 или 4 клеток. Можно ли такими действиями получить таблицу со всеми плюсами?

5. В различных пунктах кольцевого автодрома в одно и то же время в одном направлениии стартовали 25 автомобилей. Автомобили финишировали одновременно в тех же пунктах, что и стартовали. Докажите, что во время гонки было четное число обгонов.

6. Докажите, что $\text{НОД}(a,b) \cdot \text{НОК}(a,b) = ab$.

7. Докажите, что не существует натуральных чисел x, y, k таких, что $x^3 + y^3 = 7 \cdot 8^k$.

8. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = 7(z^2 + t^2)$ не имеет ненулевых решений в целых числах.

9. *(Китайская теорема об остатках)* Пусть у нас есть набор попарно взаимно простых модулей m_1, m_2, …, m_n и произвольные числа a_1, a_2, …, a_n. Докажите, что существует число N такое, что $N \underset{m_i}{\equiv} a_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ a) для $n = 2$; b) докажите методом математической индукции это утверждение для произвольного n. c) Пусть существуют такие числа N_1 и N_2, удовлетворяющие системе сравнений. Докажите, что $N_1 - N_2 \; \vdots \; m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$. d) Докажите КТО следующим образом: рассмотрим все числа от 1 до $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$ и объясним, что они в каком-то смысле “разные”.

10. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

Задачи для самостоятельного решения.

11. Докажите, что уравнение $x^2 + 5 = y^3$ не имеет решений в целых числах.

12. Во дворе стоят несколько столбов, некоторые пары соединены проводами. Всего протянуто mn проводов, и эти провода раскрашены в n цветов, причем ни от какого столба не отходят провода одинакового цвета. Докажите, что можно перекрасить эти провода так, чтобы проводов всех цветов было поровну и по–прежнему ни от какого столба не отходили два провода одного цвета.

13. Степени всех вершин графа не превосходят d. Докажите, что a) его вершины можно правильным образом раскрасить в $d + 1$ цвет; b) его вершины можно раскрасить в $d^2 + 1$ цветов так, чтобы одноцветные вершины не имели общих соседей.

14. Правильный 1001–угольник разбили непересекающимися диагоналями на 999 треугольников. Докажите, что среди этих треугольников по крайней мере три равнобедренных.

Периодичность. 16 июля.

1. Найдите сотую цифру после запятой числа $28/270$.

2. Один преподаватель оставил на дверях всех комнат записки следующего содержания: “Я в комнате номер …” и исчез в неизвестном направлении. (Разные записки могут сообщать разную информацию). Некоторый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.

3. Жители страны Пуп Мира очень гордятся тем, что у них президентская форма правления: каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. ПупМировские социологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен "Актом о демократии", в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью определяется партийностью предыдущих десяти. Докажите, что последовательность партийностей президентов зациклится, и оцените как-нибудь длину периода.

4. Докажите, что некоторая степень числа 7 оканчивается в точности на цифры 0000000000000000001.

5. Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ найдется число, делящееся на 2013.

6. В последовательности $200796\ldots$ каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предшествующих цифр. Докажите, что в этой последовательности снова встретится четверка 2007.

Задачи для самостоятельного решения.

7. Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями: $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, причем $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$. Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая a) в том b) и только в том случае, если x_1 рационально.

8. Последовательность a_n задается условиями $a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-2}$, а $a_{2n+1} = 10a_{2n} - 9a_{2n-1}$. Докажите, что она периодична по любому модулю.

Линейные уравнения. 17 июля.

Теория

Теорема. Пусть a и b – взаимно простые числа. Тогда уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечно много целочисленных решений, причем все они имеют вид $\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at \end{cases}$, где t — произвольное целое число, а (x_0, y_0) — одно из решений уравнения $ax + by = c$.

Для того, чтобы решить в целых числах линейное уравнение $ax + by = c$; $(a, b \neq 0)$, необходимо действовать в соответствии со следующим *алгоритмом*:

1. Находим $d = \text{НОД}(a, b)$.

2. Проверяем, делится ли c на d. Если нет, то уравнение не имеет решений; если да, то делим обе части на d, переходя к равносильному уравнению $a'x + b'y = c'$ со взаимно простыми $a' = \frac{a}{d}$, и $b' = \frac{b}{d}$ и правой частью $c' = \frac{c}{d}$.

3. Находим частное решение $(x_0,\ y_0)$ уравнения $a'x + b'y = c'$ (если получается — подбором, если нет — с помощью алгоритма Евклида).

4. Записываем общее решение уравнения $a'x+b'y = c'$ в виде $\begin{cases} x = x_0 + b't, \\ y = y_0 - a't \end{cases}$, $t \in \mathbb{Z}$.

Задачи.

1. Решите в целых числах уравнение: $7x - 5y = 6$.

2. Решите в целых числах уравнение: $234x + 432y = 180$.

3. Антоша задумал натуральное число, умножил его на 51, затем поделил с остатком на 544 и получил в остатке 13. Могло ли такое произойти?

4. Найдите две обыкновенные дроби — одну со знаменателем 8, другую со знаменателем 13, чтобы они не были равны, но разность между большей и меньшей из них была как можно меньше.

5. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что уравнение $ax + by = ab$ не имеет решений в натуральных числах.

6. В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ провели диагональ. Сколько клеток она пересекла а) если $(m, n) = 1$; b) в общем случае?

7. 175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев. Докажите, что на трех шалтаев и одного болтая рубля не хватит. (Они стоят целое число копеек).

Задачи для самостоятельного решения.

8. Найдите все целочисленные решения уравнений: а) $2x+3y+5z = 11$; b) $12x + 15y + 20z = 4$.

9. Сформулируйте алгоритм решения в целых числах уравнений вида $ax + by + cz = d$.

10. Натуральные числа a, b, c таковы, что $ab + bc = ca$. Докажите, что

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(b, c) = \text{НОК}(c, a).$$

11. Последовательность $x_1,\ x_2,\ \ldots$ задана правилами: $x_1 = 2$, x_{n+1} — наибольший простой делитель числа $x_1x_2\ldots x_n + 1$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что $x_n \neq 5$ ни при каком натуральном n.

Матбой Профи 6 – Профи 7. 17 июля.

1. На свободные поля шахматной доски по одной выставляются ладьи. Каждый раз записывается число побитых ладьей пустых клеток. Какова наибольшая возможная сумма 64 выписанных чисел? Будем считать, что ладья сквозь ладью не бьёт.

2. Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Докажите, что его можно разбить прямыми, параллельными сторонам, и на 392 равных квадрата.

3. Докажите, что из 3^8 натуральных делителей числа 3^8 можно выбрать несколько (быть может, один) не обязательно различных делителей с суммой, равной 3^8.

4. Какое наибольшее количество фигурок $1 \times 2 \times 2$ можно вырезать из куба $3 \times 3 \times 3$?

5. По кругу расставлены 37 различных чисел. Докажите, что среди всевозможных сумм 12 чисел, стоящих подряд, есть хотя бы 6 различных.

6. Вася и Петя играют в игру. На пяти клавиатурах есть 100, 101, 102, 103 и 104 клавиши соответственно. За ход можно выломать по одной клавише из двух разных клавиатур. Петя ходит первым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7. В ряду чисел 1, 251, 376, 188, 94, … каждое число, кроме первого, равно либо половине предыдущего, если предыдущее четно, либо половине предыдущего числа, увеличенного на 501, в противном случае. Верно ли, что в этом ряду встретятся все числа от 1 до 500?

8. Казначей Матвей положил в каждую клетку прямоугольника 3×6 по одной монете. Он утверждает, что суммарный вес всех монет в каждой линии (строчки и столбцы), кроме одной, одинаков. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить, в какой именно линии вес отличается от остальных?

Матбой Профи7 – Профи8. 17 июля.

1. На стороне BC треугольника ABC отмечены такие точки M и N, что $CM = MN = NB$. К стороне BC в точке N построен перпендикуляр, пересекающий сторону AB в точке K. Оказалось, что площадь треугольника AMK в 4,5 раза меньше площади исходного треугольника. Докажите, что исходный треугольник равнобедренный.

2. Пусть S — сумма четырех натуральных чисел a, b, c, d. Докажите, что если $ab - cd$ делится на S, то S — составное.

3. Докажите, что из 3^n натуральных делителей числа 3^n можно выбрать несколько (быть может, один) не обязательно различных делителей с суммой равной 3^n.

4. Может ли куб оканчиваться на 2009 единиц?

5. Астроном пронаблюдал 50 звезд и вычислил сумму S попарных расстояний между ними. Облако заслонило 25 звезд. Доказать, что сумма попарных расстояний между оставшимися звездами меньше $S/2$.

6. В треугольнике ABC углы B и C равны по $40°$; BD — биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.

7. На свободные поля шахматной доски по одной выставляются ладьи. Каждый раз записывается число побитых ладьей пустых клеток. Какова наибольшая возможная сумма 64 выписанных чисел?

8. Вася положила в каждую клетку прямоугольника 3×6 по одной монете. Она утверждает, что суммарный вес всех монет в каждой линии (строчки и столбцы), кроме одной, одинаков. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить, в какой именно линии вес другой?

Гомотетия. 19 июля.

Определение. *Гомотетия* с положительным коэффициентом k и центром O — это преобразование плоскости с отмеченной точкой O, которое переводит каждую точку X в точку X', лежащую на луче OX, такую, что $OX' = k \cdot OX$.

Упражнение 1. Определите гомотетию с отрицательным k.

Свойство 1. Гомотетия переводит прямую в параллельную ей.

Свойство 2. Гомотетия с коэффициентом k изменяет расстояние в k раз, а площадь в k^2 раз.

Свойство 3. Прямая, соединяющая точку и ее образ при гомотетии, проходит через центр этой гомотетии.

1. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а диагонали в точке O. Докажите, что прямая PO делит основания трапеции пополам.

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB||A_1B_1$, $BC||B_1C_1$ и $CA||C_1A_1$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

3. a) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

b) Найдите центр гомотетии, переводящей треугольник в его серединный треугольник. c) (*Прямая Эйлера*) Докажите, что точка пересечения медиан треугольника лежит на одной прямой с ортоцентром и центром описанной окружности (причем между ними). В каком отношении она делит отрезок между ними?

Свойство 3. Гомотетия переводит окружность в окружность, а касательную к окружности в касательную к окружности.

4. Общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются в точке K, а общие внутренние в точке L. Докажите, что прямая KL проходит через центры окружностей.

5. Окружности ω_1 и ω_2 касаются сторон угла с вершиной O в точках A, B и C, D (A и B на одной стороне угла). Прямая, проходящая через точку O, пересекает окружность ω_1 последовательно в точках X_1 и Y_1, а окружность ω_2 последовательно в точках X_2 и Y_2. Докажите, что $AX_1||BX_2$.

6. Окружность ω касается окружности Ω в точке P, а хорды AB окружности Ω в точке Q. Докажите, что прямая PQ делит дугу AB окружности Ω, не пересекающуюся с окружностью ω, пополам.

Задачи для самостоятельного решения.

7. Внутри угла дана точка M. Постройте окружность, вписанную в этот угол и проходящую через точку M.

Полуинвариант и остальное. 19 июля.

1. a) На шахматной доске 100×100 королю разрешено ходить вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Какое наибольшее число ходов он может сделать? b) Королю разрешили еще ходить вправо–вниз по диагонали. Докажите, что он может сделать лишь конечное число ходов.

2. В клетках таблицы 99×99 расставлены числа (не обязательно целые). Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из рядов будет неотрицательной.

3. По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, а с оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности будут равны.

4. a) Докажите, что в любой группе из 6 человек найдутся либо три попарно знакомых человека, либо три попарно незнакомых человека.
b) Докажите, что в любой группе из 9 человек найдутся либо трое попарно незнакомых, либо четверо попарно знакомых.

5. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. a) Сколько натуральных делителей у числа n?
b) Чему равна сумма делителей числа n?

6. Докажите, что найдется сто чисел подряд, среди которых ровно 3 простых.

7. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

8. a) Вася загадал число от 0 до 60 и сказал, что при делении на 5 оно даёт остаток 3, при делении на 4 даёт 2 и делится на 3. Петя уверен, что точно знает загаданное число. Прав ли он? b) А если задумано число от 1 до 180?

9. Пусть p — простое число. Докажите, что уравнение $x^3+py^3+p^2z^3=0$ не имеет нетривиальных решений в целых числах.

10. Докажите, что если для взаимно простых натуральных x, y, z выполнено $x^2+y^2=z^2$, то существуют натуральные u, v, такие, что либо $x=u^2-v^2$, $y=2uv$, либо наоборот, $z=u^2+v^2$.

Задачи для самостоятельного решения.

11. Дана карта, степени всех вершин которой четны. Докажите, что ее страны можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две страны, имеющие общее ребро, были покрашены в разные цвета.

12. Пусть мы хотим избавится от условия взаимной простоты в КТО. Понятно, что если у двух чисел m_i и m_j есть общий делитель d_{ij} такой, что a_i и a_j не сравнимы по этому модулю d, то такого числа N не существует. a) Докажите эту очевидность. b) Докажите, что если в системе сравнений нет такой внутренней противоречивости, а именно $a_i \underset{d_{ij}}{\equiv} a_j$, где $d_{ij}=(m_i,\ m_j)$, то существует такое N, удовлетворяющее той самой системе сравнений.

13. a) Докажите, что для любых простого p и натуральных k и l найдется такое n, что $C_n^k \,\vdots\, p^l$, но $C_n^k \not\vdots\, p^{l+1}$, то есть делится в точности на p^l; b) для любого m найдется n такое, что $C_n^k \,\vdots\, m$, а $\frac{C_n^k}{m}$ взаимно просто с m.

4-ый признак равенства треугольников. 20 июля.

1. Каждую минуту к числу прибавляется его наибольший простой делитель. Докажите, что в последовательности встретится число, кратное любому наперед заданному.

2. *Четвертый признак равенства треугольников.* Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что $AB=A'B'$, $BC=B'C'$ и $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

Тогда либо $\angle BCA = \angle B'C'A'$ (и треугольники ABC и $A'B'C'$ равны), либо $\angle BCA + \angle B'C'A' = 180°$.

3. Угол A треугольника ABC равен $120°$. Докажите, что из отрезков с длинами AC, BC и $AB + AC$ можно сложить треугольник с углом $60°$.

4. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое количество пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k–ой и $(k+1)$–ой, приходят к выводу, что они мешают друг другу и переселяются соответственно в $(k-1)$–ю и $(k+2)$–ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

5. Представьте, что мы хотим найти либо полный подграф из 100 вершин, или пустой подграф из 100 вершин. Докажите, что если в графе достаточно много вершин, то всегда получится это сделать.

6. Многоугольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что все эти треугольники можно покрасить в два цвета так, чтобы никакие два треугольника одного цвета не имели общих сторон.

7. Дана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что для любого натурального числа n, взаимно простого с числом 10, можно указать такую группу стоящих подряд цифр последовательности, что записываемое этими цифрами число делится на n.

8. Докажите, что

$$\frac{\text{НОД}(a,b)\text{НОД}(b,c)\text{НОД}(c,a)}{\text{НОД}(a,b,c)^2} = \frac{\text{НОК}(a,b)\text{НОК}(b,c)\text{НОК}(c,a)}{\text{НОК}(a,b,c)^2}.$$

9. Докажите, что среди любых 100 чисел найдется несколько, сумма которых делится на 100.

Задачи для самостоятельного решения.

10. Число $(1+\sqrt{2})^{2008}$ записали в виде $a+b\sqrt{2}$ с целыми a и b. Докажите, что $|a^2 - 2b^2| = 1$.

11. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2 + y^2 = 3z^2$.

12. А теперь найдите все целочисленные решения уравнения $x^4 + 2y^4 + 4z^4 + 8t^4 = s^4$.

Взвешивания. 20 июля.

1. Среди 8 монет, возможно, есть одна легкая ФМ (но ее может и не быть). Как за два взвешивания найти ФМ, если она есть, или доказать, что ее нет?

2. Есть 27 монет, m из которых серебряные, остальные – золотые. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей золотой). Серебряная ФМ легче настоящей серебряной, а золотая ФМ тяжелее чем настоящая золотая. Как найти ФМ за три взвешивания, если a) $m = 13$; b) m — любое число от 1 до 26?

3. Есть 10 монет, среди них ровно две фальшивые. Детектор R7 за одну операцию исследует три монеты и указывает на одну из них. Известно, что детектор не может указать на настоящую монету, если среди тестируемых монет есть хотя бы одна фальшивая. Как за шесть тестов выявить обе фальшивые монеты?

4. a) Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти хотя бы одну настоящую монету? b) Среди 15 монет не более 7 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково (а фальшивые, возможно, нет). Можно ли за 14 взвешиваний найти хотя бы одну из настоящих монет? А за меньшее число взвешиваний?

5. Среди 5 монет ровно одна фальшивая: она отличается по весу от остальных, но неизвестно — легче или тяжелее. Требуется выявить ее на чашечных весах без гирь и узнать, легче она или тяжелее настоящей. Какое наименьшее число взвешиваний для этого наверняка хватит?

Задачи для самостоятельного решения.

6. Есть две золотые монеты и n серебряных. Известно, что среди золотых есть одна фальшивая, и среди серебряных есть одна фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые – тоже, но фальшивые легче настоящих. Есть чашечные весы без гирь. При каком наибольшем n можно наверняка выявить обе фальшивые монеты a) за два взвешивания; b) за три взвешивания?

Формула Пика. 21 июля.

Формула Пика. Рассмотрим многоугольник с вершинами в узлах клетчатого листа (сторона клетки равна 1). Пусть на границе многоугольника находится G узлов клетчатой сетки, а внутри V узлов. Тогда площадь этого многоугольника равняется $V + \frac{G}{2} - 1$.

1. a) Докажите формулу Пика для прямоугольника со сторонами, иду-

щими по линиям сетки.
b) Докажите формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки.
c) Докажите формулу Пика для многоугольника, составленного из двух многоугольников, для которых формула Пика уже доказана.
d) Пусть многоугольник, для которого формула Пика уже проверена, составлен из двух многоугольников. Докажите, что если формула Пика выполняется для одного из них, то она выполняется и для другого.
e) Докажите формулу Пика для произвольного треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги, отрезав для этого от прямоугольника несколько прямоугольных треугольников.

Утверждение. Любой многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники.

2. Шахматный король обошел все клетки доски 8×8 и вернулся на исходную клетку. Оказалось, что его путь не имеет самопересечений. Фигуру какой площади он ограничивает?

3. a) Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах сетки? b) Докажите, что площадь треугольника с вершинами в узлах сетки не меньше $1/2$.

4. На сторонах треугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки нет целых точек. А внутри ровно одна целая точка. Докажите, что эта точка является точкой пересечения медиан.

5. a) Докажите, что для любого многоугольника с вершинами в узлах сетки отношение его площади к квадрату любой стороны рационально.
b) Найдется ли правильный треугольник с вершинами в узлах сетки?

6. На клетчатом листе бумаги отметили пять узлов. Докажите, что на одном из соединяющих их отрезков найдется узел решетки, отличный от концов отрезка.

7. На клетчатой плоскости изображен неравнобедренный треугольник ABC с вершинами в узлах клетчатой сетки (сторона клеточки равна 1). Докажите, что $|AB - AC| > \frac{1}{P_{ABC}}$.

Последний разнобой. 21 июля.

1. a) Сумма ста натуральных чисел, каждое из которых меньше 100, равна 200. Докажите, что сумма нескольких из них равна 100. b) Прямую палку длиной 2 метра распилили на n палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем n можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

2. Докажите, что в вершинах любого многогранника можно расставить натуральные числа так, чтобы числа в вершинах, связанных ребром, имели общий делитель больше 1, а не связанные ребром — не имели.

3. a) Из первых 200 натуральных чисел от 1 до 200 выбрано 101 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдется пара таких, что одно из них делится на другое. b) Выберете из первых 200 натуральных чисел 100 чисел так, чтобы ни одно из них не делилось на другое.

4. Фирма "id Software" плодит монстров. Каждый день монстры мутируют. Если сегодня монстр имеет m ручек и n ножек, то назавтра он будет иметь $2m - n$ ручек и $2n - m$ ножек. Монстр погибает, когда число ручек или ножек становится отрицательным. При каком начальном количестве ручек и ножек монстр сможет жить вечно?

5. Доска $m \times n$ раскрашена в два цвета. Разрешено перекрашивать клетки любого прямоугольника 3×1 в преобладающий (в этом прямоугольнике) цвет. Докажите, что такими операциями можно исходный прямоугольник перекрасить в один цвет.

6. Сколькими способами можно разрезать прямоугольник $2 \times n$ на доминошки?

7. В ряду из 100000 натуральных чисел первое число однозначно, а каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в ряду есть число, начинающееся цифрами 2013.

8. В графе степени всех вершин равны 3. Известно, что между любыми двумя вершинами найдется путь длины не более 2. Какое наибольшее количество вершин может быть в этом графе?

9. Можно ли расставить в клетках таблицы 10×10 числа $+1$, -1 и 0 так, чтобы все 20 сумм в строках и столбцах были различны?

Задачи для самостоятельного решения.

10. Из чисел от 1 до $2n - 1$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что одно из выбранных чисел равно сумме двух других.

11. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$ имеет в целых числах только нулевое решение.

12. Найдите все целочисленные решения уравнения $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.

Игры. 22 июля

1. Имеется 100 камней. За один ход можно брать 2, 3 или 4 камня, но не столько, сколько взял предыдущий. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? А если камней n?

2. Двое играющих ходят по очереди на циферблате с одной стрелкой:

каждым своим ходом игрок переводит стрелку на два или на три часа вперед. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку на 11 часов. Кто выигрывает при правильной игре, если изначально стрелка стоит на 12 часах?

3. Двое по очереди разламывают прямоугольную шоколадку. За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом по любому из имеющихся углублений. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1. Кто выигрывает при правильной игре, если шоколадка имеет размеры a) 10×4; b) 10×5;
c) 5×2013?

4. Двое по очереди стявят шахматных слонов на доску 8×8. Ставить слона на битое поле нельзя. Кто выиграет при правильной игре?

Передача хода: если один из игроков каким–то способом может воспользоваться стратегий другого, то он не проиграет.

5. На доске написано число 2. За ход можно к записанному числу прибавить один из его делителей отличный от самого этого числа. Проигрывает тот, кто получит число большее 1000. Докажите, что у первого игрока есть выигрышная стратегия.

6. Имеется клетчатая шоколадка $m \times n$. За ход можно съесть дольку и все другие дольки, которые находятся не выше и не левее ее. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю клетку (там яд). Кто выигрывает при правильной игре?

7. Дан граф с 2013 вершинами без ребер. Двое по очереди соединяют ребром некоторые 2 вершины. Проигрывает тот игрок, после хода которого граф станет связным. Кто выиграет при правильной игре?

Задачи для самостоятельного решения.

8. На доске написаны числа от 1 до 2007. За ход разрешается вычеркнуть любое число вместе со всеми его делителями. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

9. От клетчатой доски $m \times n$ ($m > 10$, $n > 10$) осталась только рамка ширины 1. За один ход можно выпилить одну или несколько клеток, образующих прямоугольник, лишь бы при этом оставшая часть не распалась на два куска. Кто не может сделать хода — проигрывает. Кто из игроков может выигрывать независимо от игры противника?