НОД. Алгоритм Евклида. 09 Июля.

Определение 1. *Алгоритм Евклида.*

Пусть a и b — целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел $a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \cdots > r_n$ определена тем, что каждое r_k – это остаток от деления предпредыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, то есть
$a = bq_0 + r_1$
$b = r_1q_1 + r_2$
$r_1 = r_2q_2 + r_3$
$\ldots$
$r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + r_k$
$\ldots$
$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$
$r_{n-1} = r_nq_n$
Тогда $(a, b) = r_n$.

0т. а) Докажите, что для любых целых a, b, k выполнено $(a, b) = (b, a - kb)$.
б) Докажите, что алгоритм Евклида действительно выдаёт наибольший общий делитель двух чисел.

1. При каких n дробь $\frac{n^2+2n+4}{n^2+n+3}$ несократима?

2. Докажите, что $(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$.

3. Какое наибольшее значение может принимать $(15a + 16b, 16a - 15b)$?

4. а) Найдите (f_n, f_m), где $f_k = 2^{2^k} + 1$ - числа Ферма.
b) Докажите, что число $2^{2^k} - 1$ имеет хотя бы k различных простых делителей.
c) Из этого докажите, что простых чисел бесконечно много.

5т. Теорема о линейном представлении НОД. Докажите, что существуют такие целые x и y , что $xa + yb = (a, b)$

6. Пусть ab делится на c, $(a, c) = 1$. Докажите, что b делится на c. (Основной теоремой арифметики, разумеется, пользоваться нельзя.)

7т. Основная теорема арифметики. Докажите, что каждое натуральное число $n > 1$ можно единственным способом представить в виде $n = p_1^{d_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{d_k}$, где $p_1 < \cdots < p_k$ — простые числа, а $d_1 \cdot \cdots \cdot d_k$ - натуральные числа.

8. По бесконечной шахматной доске ходит (m, n)-мамонт, который за один ход может сдвинуться на m клеток по горизонтали или вертикали, а затем - на n клеток в перпендикулярном направлении. При каких m, n (m, n)-мамонт сможет из любой клетки доски попасть в любую другую?

9. Аня нашла себе интересное занятие. Она написала на доске две единички, потом между ними написала их сумму. Ее это так захватило, что она продолжила: брала ряд чисел, который у нее получился на предыдущем шаге, и между двумя соседними числами писала их сумму (старые числа при этом не стирала). Докажите, что любое $n > 1$ она написала ровно $\varphi(n)$ раз. Напомним, что $\varphi(n)$ – это количество чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.