Матбой

1. Прямоугольник размером $1 \times k$ при всяком натуральном k будем называть полоской. При каких натуральных n прямоугольник размером $2017 \times n$ можно разрезать на попарно различные полоски?

2. В треугольнике ΔABC $\angle B = 20^\circ$, $AB = BC$. На стороне AB выбрана точка M, а на стороне BC точка N так, что $\angle MCA = 60^\circ$, $\angle NAC = 50^\circ$. Чему равен угол $\angle NMC$?

3. Последовательность (x_n) задана условиями $x_1 = 2, \quad nx_n = 2(2n-1)x_{n-1}$ при $n > 1$. Докажите, что x_n — целое при всех натуральных n.

4. В Цветочном городе любые два коротышки либо дружат, либо враждуют. Каждое утро ровно один из коротышек может начать новую жизнь: подружиться со всеми врагами и поссориться со всеми друзьями. Оказалось, что любые трое коротышек могут подружиться. Докажите, что все коротышки могут подружиться.

5. Пусть $n > 3$ — натуральное число. Докажите, что если в записи числа A в системе счисления с основанием n каждая цифра встречается ровно один раз, то A — составное.

6. Докажите, что для любых $x, y, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$ число $x^n - y^n$ не является степенью двойки.

7. Сколькими способами можно расставить плюсы и минусы в клетках таблицы 2016×2016 так, чтобы в каждом квадрате, составленном из клеток таблицы, количества плюсов и минусов отличались не более, чем на 1?

8. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC взяты точки D и E такие, что $AD = BE$. Отрезки CD и AE пересекаются в точке O. Серединный перпендикуляр к отрезку CO пересекает прямую AO в точке K. Докажите, что BK и CO параллельны.