

### Подвешивание графа.

1. В графе степени всех вершин равны 3 и между любыми двумя вершинами существует путь длиной не более 2. Какое наибольшее число вершин может быть в этом графе?

2. Докажите, что вершины графа можно правильно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных циклов.

3. В стране Фалкерсонии некоторые города соединены авиалиниями, причем из города А в город В нельзя попасть, сделав менее десяти пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из А в В будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 компаниям.

4. В стране 2000 городов. Некоторые из них соединены дорогами так, что между любыми двумя городами есть единственный путь, причем он проходит не более чем по восьми дорогам. Город называется захолустным, если из него выходит не более восьми дорог. Докажите, что в стране найдется город, соединенный дорогами как минимум с восьми захолустными.

5. В стране 120 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы три дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящие не более, чем из 11 городов.

6. Есть несколько точек, некоторые из которых соединены дугами так, что из любой точки в любую другую можно добраться по этим дугам. Докажите, что на любой дуге можно поставить синюю и красную стрелки в противоположных направлениях так, чтобы из любой точки в любую можно было пройти таким путем, на котором цвет стрелки меняется не более одного раза. Идти при этом разрешается только в направлении, указываемом стрелкой какого-либо цвета.

7. В стране 1993 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из каждого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками. (Дорога соединяет между собой два города.)

8. (Где-то вы это уже видели) Пусть  $G$  — ориентированный сильно связный граф (от любой вершины можно добраться до любой другой) на  $n$  вершинах. И известно, что в  $G$  есть такие вершины  $u$  и  $v$ , между ними есть ребро ровно в одну сторону. Докажите, что в таком случае можно оставить и  $2n - 3$  ребра.