Комбинаторика разрезаний. Теорема Бойяи–Гервина.

1. Выпуклый n-угольник непересекающимися диагоналями разрезали на треугольники. Докажите, что треугольников ровно $n-2$.

Теорема 1. *Любой многоугольник диагоналями можно разрезать на треугольники и их будет на 2 меньше, чем вершин.*

Это теоремой пользуемся без доказательства. Из неё следует, что *сумма внутренних углов n-угольника равна* $180°(n-2)$.

Назовём два многоугольника *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на несколько частей, из которых можно сложить второй многоугольник.

Очевидно, что у равностоставленных многоугольников равная площадь.

Оказывается верно и орбатное. **Теорема Бойяи — Гервина** гласит, что *любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.*

Для доказательства этой введём вспомогательное определение. Назовём параллелограмм с фиксированным основанием *устойчивым*, если хотя бы одна из высот попадает на основание, а не на его продолжение.

2. Пусть многоугольник P равносоставлен многоугольнику Q, а многоугольник Q равносоставлен многоугольнику R, тогда многоугольник P равносоставлен R.

3т. а) Докажите, что любой треугольник равносоставлен некоторому параллелограмму.
б) Докажите, что устойчивый параллелограмм равносоставлен прямоуогольнику с тем же основанием (и той же высотой конечно!)
в) Докажите, что любой параллелограмм можно разрезать на устойчивые с тем же основанием.
г) Докажите, что любые два параллелограмма с одним и тем основанием равносоставлены (одинаковая высота подразумевается, иначе о чём разговор вообще).
д) Докажите, что любой параллелограмм равносоставлен некоторому прямоугольнику со стороной 1.
е) Завершите доказательство теоремы Бойяи – Гервина.

4. Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на миллион частей, из которых можно сложить квадрат?

5. Внутри квадрата отметили 100 точек и соединили их друг с другом и с вершинами квадрата непересекающимися отрезками. В результате квадрат оказался разбитым на треугольники. а) Сколько таких треугольников получилось? б) Докажите, что хотя бы у одного из них все углы не превосходят $120°$

6. Докажите, что квадрат нельзя разрезать на невыпуклые четырехугольники.

7. Внутри квадрата (не на сторонах!) отмечено несколько точек. Вершины квадрата также отмечены. Никакие три отмеченные точки не лежат на одной прямой. Некоторые пары отмеченных точек соединены непересекающимися отрезками так, что квадрат разбился на n выпуклых многоугольников, не содержащих отмеченных точек внутри. Докажите, что при $n>2$ количество проведенных отрезков не превосходит $3n-6$.