

Гомотетия.

Определение. Гомотетия с положительным коэффициентом k и центром O — это преобразование плоскости с отмеченной точкой O , которое переводит каждую точку X в точку X' , лежащую на луче OX , такую, что $OX' = k \cdot OX$.

Упражнение. Определите гомотетию с отрицательным коэффициентом.

0. Докажите, что все прямые вида AA' пересекаются в одной точке.

1. Точки A , B и C лежат на одной прямой. Докажите, что точки A' , B' и C' также лежат на одной прямой.

2. Точки A , B , C и D лежат на одной окружности. Докажите, что точки A' , B' , C' и D' также лежат на одной окружности.

3. а) Докажите, что если $AB \cap CD \neq \emptyset$, то и $A'B' \cap C'D' \neq \emptyset$. б) Докажите, что если $A'B' \cap C'D' \neq \emptyset$, то и $AB \cap CD \neq \emptyset$.

4. Докажите, что если окружность (ABC) касается прямой DE , то и окружность $(A'B'C')$ касается прямой $D'E'$.

5. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ и $CA \parallel C_1A_1$. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

6. С помощью гомотетии, докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

7. **Прямая Эйлера.** Предположим, что вы знаете, что медианы треугольника пересекаются в точке G , высоты — в точке H , а серединные перпендикуляры — в точке O . а) Докажите, что точки G , H и O лежат на одной прямой. б) Найдите отношение GH/GO .

Задачи для самостоятельного решения.

1. Гомотетия с коэффициентом k изменяет расстояние в k раз, а площадь в k^2 раз.

2. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P , а диагонали в точке O . Докажите, что прямая PO делит основания трапеции пополам.

3. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали пересекаются в точке O . а) Перпендикуляры, проведенные из точек B и C соответственно на AC и BD , пересекаются в точке M , а перпендикуляры из A и D соответственно на BD и AC — в точке K . Доказать, что точки M , K и O лежат на одной прямой.

б) Перпендикуляры, проведенные к диагоналям AC и BD в точках C и B соответственно, пересекаются в точке P , а перпендикуляры к ним в точках A и D пересекаются в точке N . Доказать, что точки P , N и O лежат на одной прямой.

4. Внутри угла дана точка M . Постройте окружность, вписанную в этот угол, и проходящую через точку M .

5. Общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются в точке K , а общие внутренние в точке L . Докажите, что прямая KL проходит через центры окружностей.

6. Окружности ω_1 и ω_2 касаются сторон угла с вершиной O в точках A , B и C , D (A и B на одной стороне угла). Прямая, проходящая через точку O , пересекает окружность

ω_1 последовательно в точках X_1 и Y_1 , а окружность ω_2 последовательно в точках X_2 и Y_2 . Докажите, что $AX_1 \parallel BX_2$.

7. Лемма Архимеда. Окружность ω касается окружности Ω в точке P , а хорды AB окружности Ω в точке Q . Докажите, что прямая PQ делит дугу AB окружности Ω , не пересекающуюся с окружностью ω , пополам.