Разнобой. 06 июля

1. Три простых числа таковы, что квадрат суммы любых двух даёт остаток единицу при делении на третье. Докажите, что какие-то два из чисел равны.
2. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.
3. На день рождения к Арсению пришли 12 друзей и расселись за круглым столом в ожидании вкусного угощения. После этого перед ними разложили в каком-то порядке карточки с их именами (все имена различны). Докажите, что Арсений может повернуть стол так, чтобы хотя бы двум гостям достались карточки с их собственными именами.
4. Решите в целых числах уравнение $6x + 7y = xy - 1$.
5. Рассмотрим все треугольники с вершинами в вершинах выпуклого 2016-угольника. Докажите, что любая точка, не лежащая на сторонах таких треугольников, покрыта четным числом из них.
6. На бесконечном клетчатом листе двое играют в крестики-нолики по следующим правилам: первый игрок своим ходом может поставить два крестика, а второй своим ходом один нолик. Первый игрок выигрывает, если поставит 100 крестиков подряд. Может ли второй игрок ему помешать?
7. Для натурального n введем обозначение
$$\alpha(n) = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+20)}{\text{НОК}(n+1, n+2, \ldots, n+20)}.$$
Докажите, что существуют различные $m, n > 1000$, для которых $\alpha(m) = \alpha(n)$.

Кировская ЛМШ 2016 год *7 класс. Группа ПРОФИ.*

Разнобой. 06 июля

1. Три простых числа таковы, что квадрат суммы любых двух даёт остаток единицу при делении на третье. Докажите, что какие-то два из чисел равны.
2. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.
3. На день рождения к Арсению пришли 12 друзей и расселись за круглым столом в ожидании вкусного угощения. После этого перед ними разложили в каком-то порядке карточки с их именами (все имена различны). Докажите, что Арсений может повернуть стол так, чтобы хотя бы двум гостям достались карточки с их собственными именами.
4. Решите в целых числах уравнение $6x + 7y = xy - 1$.
5. Рассмотрим все треугольники с вершинами в вершинах выпуклого 2016-угольника. Докажите, что любая точка, не лежащая на сторонах таких треугольников, покрыта четным числом из них.
6. На бесконечном клетчатом листе двое играют в крестики-нолики по следующим правилам: первый игрок своим ходом может поставить два крестика, а второй своим ходом один нолик. Первый игрок выигрывает, если поставит 100 крестиков подряд. Может ли второй игрок ему помешать?
7. Для натурального n введем обозначение
$$\alpha(n) = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+20)}{\text{НОК}(n+1, n+2, \ldots, n+20)}.$$
Докажите, что существуют различные $m, n > 1000$, для которых $\alpha(m) = \alpha(n)$.