Деревья. Остовные и не только.

Определение: *Деревом* называется связный граф без циклов. Произвольный (не обязательно связный) граф без циклов называется *лесом.* Вершина графа называется *висячей*, если ее степень равна 1.

Самые главные свойства:

1т. Докажите, что количество висячих вершин в дереве не меньше, чем максимальная из степеней его вершин.

2т. В графе на n вершинах нет циклов. Сколько ребер может быть в этом графе?

3т. Докажите, что

а) из любого связного графа можно выделить дерево, содержащее все его вершины (*остовное дерево*);

б) в связном графе с n вершинами содержится как минимум $n-1$ ребро;

в) в любом связном графе есть вершина, при удалении которой граф остается связным.

Задачки на их применение:

4. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более а) 198 перёлетов; б) 196 перелётов

5. В связном графе n вершин и $2n$ ребер. Докажите, что из этого графа можно выкинуть все ребра некоторого цикла так, чтобы он остался связным.

6т.Пусть G — ориентированный сильно связный граф (от любой вершины можно добраться до любой другой) на n вершинах.

а) Докажите, что можно выкинуть из G все ребра кроме $2n-2$ таким образом, чтобы оставшийся граф был тоже сильно связен.

б) Пусть известно, что в G есть такие вершины u и v, между ними есть ребро ровно в одну сторону. Докажите, что в таком случае можно оставить и $2n-3$ ребра.

7. На Луне n городов, некоторые из которых соединены платными дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость турпоездки из города A в город B – как стоимость проезда из A в B по самому дешевому пути. Докажите, что в прайс-листе лунного турагентства не более $n-1$ различных цен.

8т. Дан связный граф G

а) Может ли в G быть ровно два различных остовных дерева?

б) В дереве T есть хотя бы три висячие вершины, докажите, что можно одно ребро стереть и одно добавить так, чтобы получилось дерево, в котором висячих вершин меньше, чем в T.

в) Докажите, что если в G есть остовные деревья со 100 и 50 висячими вершинами, то в нем есть остовное дерево с 99 или 98 висячими вершинами.

г) Докажите, что если в G есть остовные деревья со 100 и 98 висячими вершинами, то в нем есть остовное дерево с 99 висячими вершинами.

д) Пусть связный граф G имеет остовные деревья с m и n висячими вершинами, $m < n$. Докажите, что для любого натурального k $(m < n < k)$, в G есть остовное дерево ровно с k вершинами.