Площади. 07 июля.

Определение. Каждой фигуре M на плоскости ставится в соответствие число S_M, называемое *площадью*, такое, что выполнены следующие свойства:
1) $S_M \geq 0$;
2) Площади равных фигур равны;
3) Если фигура M состоит из фигур A и B, не имеющих общих внутренних точек, то $S_M = S_A + S_B$;
4) Площадь квадрата со стороной x равна x^2.

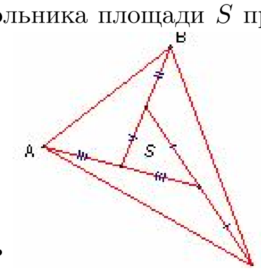
1. Из того, что площадь квадрата со стороной x равна x^2 выведите, что площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.

2. а) Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.
б) Докажите, что площадь остроугольного треугольника равна половине произведения произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту.
в) Докажите то же самое утверждение для произвольного треугольника.
г) Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту.
д) Докажите, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

3. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{AOB} = S_{COD}$.

4. а) Докажите, что медиана делит треугольник на два равновеликих.
б) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины, и делят треугольник на 6 равновеликих.

5. Каждую сторону треугольника площади S продлили на её длину (см. рисунок). Чему равна площадь



большого треугольника?

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. На лучах AB, BC, CD и DA выбраны такие точки A_1, B_1, C_1 и $_1$, что $AB = A_1B$, $BC = B_1C$, $CD = C_1D$ и $DA = D_1A$. Найдите отношение $S(A_1B_1C_1D_1)/S(ABCD)$.

7. Дан треугольник ABC. На луче BC взята точка C_1.
а) Докажите, что $\frac{S_{ABC_1}}{S_{ABC}} = \frac{|BC_1|}{|BC|}$.
б) Пусть, кроме того, на луче BA взята точка A_1. Докажите, что $\frac{S_{A_1BC_1}}{S_{ABC}} = \frac{|BA_1|\cdot|BC_1|}{|BA|\cdot|BC|}$

Вывод: площади треугольников с общим углом относятся, как произведения сторон, этот угол заключающих

в) Докажите, что это верно и в случае, когда углы не равны, а дополняют друг друга до $180°$.

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Докажите, что $\frac{|AL|}{|CL|} = \frac{|AB|}{|CB|}$.

9. а) Две параллельные прямые пересекают стороны угла с вершиной O в точках A, B и A_1, B_1 соответственно. Докажите, что $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$.
б) (**Теорема Фалеса**) Три параллельные прямые пересекают стороны угла с вершиной O в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|}$.
в) (**Обратная теорема Фалеса**) Две прямые пересекли стороны угла с вершиной O в точках A_1, B_1 и A_2, B_2 соответственно. Оказалось, что $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$. Докажите, что эти прямые параллельны.