

Скрытый граф

1. Шах разбил свой квадратный одноэтажный дворец на 64 одинаковые квадратные комнаты, разделил комнаты на семь квартир (проделав двери в некоторых перегородках между комнатами) и в каждой квартире поселил по жене. Жены могут ходить по всем комнатам своей квартиры, не заходя к другим. Какое наименьшее число дверей пришлось проделать во внутренних стенах?

2. Выписаны 1000 целых чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

3. Клетчатая плоскость раскрашена в 10 цветов. (Каждая клетка окрашена в один цвет.) Любые две соседние клетки окрашены в разные цвета. Назовём пару цветов *хорошей*, если есть две соседние клетки, окрашенные в эти цвета. Какое наименьшее количество хороших пар?

4. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

5. Клетки связной клетчатой фигуры покрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета. Известно, что черных клеток в фигуре ровно k . Какое наибольшее количество белых клеток может быть?

6. Дан клетчатый квадрат 20×20 . M его клеток окрашены в чёрный цвет, остальные в белый. Если в какой-то момент 3 из 4-х клеток, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата, окрашены в чёрный цвет, то через минуту и четвёртая клетка тоже перекрашивается в чёрный. При каком наименьшем M может так оказаться, что через некоторое время весь квадрат станет чёрным?

7. Хозяйка испекла для гостей пирог. К ней может прийти либо p , либо q человек (p и q взаимно просты). На какое наименьшее число кусков ей нужно заранее разрезать пирог так, чтобы его можно было поделить поровну как между p , так и между q гостями?

8. В прямоугольной таблице расставлены вещественные, но нецелые числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке целая. Всегда ли можно округлить каждое число (то есть заменить на одно из двух ближайших целых чисел) так, чтобы сумма чисел в каждой строчке и каждом столбце не изменилась?