Китайская теорема об остатках.

Пусть $m_1, m_2, \dots m_n$ попарно взаимно простые натуральные числа. *Китайская теорема об остатках* утверждает, что для любых целых чисел $a_1, a_2 \dots a_n$ существует такое натуральное x, что $x \equiv a_i \,(mod\, m_i)$. Более того, такое x единственное с точностью до добавления кратного $M = m_1 m_2 \dots m_n$.

1. Пусть $(m, n) = 1$. Каждое число от 1 до mn поделим с остатком на m и n.
а) Сколько пар остатков может в принципе получиться?
б) А могли ли разные числа дать одни и те же пары?
в) Докажите, используя эти соображения, КТО для двух чисел.

2. *(По мотивам вчерашего разбора.)* а) Научитесь решать задачу в случае, если один из остатков равен 1, а другой — нулю.
б) Выведите отсюда Китайскую теорему об остатках для двух чисел.

3. Докажите Китайскую теорему об остатках для любого n.

4. а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.
б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 делителей.

5. Докажите, что существует миллион последовательных чисел, ни одно из которых не является точной степенью.

6. Пусть n — натуральное число, у которого ровно k различных простых делителей.
а) Сколько существует попарно несравнимых по модулю n целых a таких, что $a^2 - a$ делится на n?
б) Докажите, что существует такое натуральное число a, что $1 < a < \frac{n}{k} + 10$ и $a^2 - a$ делится на n.

7. Пусть $k_1, k_2, \dots k_n$ — попарно взаимно простые числа. Докажите, что уравнение $x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \dots + x_{n-1}^{k_{n-1}} = x_n^{k_n}$ имеет решение в натуральных числах.

8. Докажите, что для любого натурального n существуют такие натуральные x, y, что $4x^2 + 9y^2 - 1$ делится на n.

9. Число называется плохим, если оно не делится на 2,3,5,7,11,13,17. Число называется хорошим, если делится на 2 или больше из этих чисел. Какое наибольшее количество плохих чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых двух из них была хорошим числом?