

**Геометрические неравенства. 05 июля.**

1. (тестовая, на знание двух теорем) На стороне  $AB$  четырёхугольника  $ABCD$  отмечена точка  $E$  такая, что  $\angle DEA + \angle DBA = 180^\circ$ . Докажите, что  $BC + DE > CD$ .

*Теоретические*

2. В треугольнике напротив наибольшей стороны угол равен  $60^\circ$ . Чему равны два других угла?
3. На плоскости отмечены точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , где  $n \geq 3$ . Докажите, что  $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$ . Когда достигается равенство?
4. Отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются. Докажите, что  $AB + CD < AC + BD$ .
5. а) Точки  $M$  и  $N$  расположены по одну сторону от прямой  $\ell$ . Постройте на прямой  $\ell$  такую точку  $K$ , чтобы сумма  $MK + NK$  была наименьшей.  
б) Точки  $M$  и  $N$  расположены по разные стороны от пары параллельных прямых. Постройте на прямых точки  $A$  и  $B$ , так чтобы отрезок  $AB$  был перпендикулярен прямым, а сумма отрезков  $MA$ ,  $AB$  и  $BK$  была наименьшей.  
в) Точка  $M$  лежит внутри острого угла. Постройте на сторонах этого угла точки  $A$  и  $B$ , для которых периметр треугольника  $AMB$  был бы наименьшим.
6. а) В треугольнике  $ABC$  отмечена точка  $T$ . Докажите, что  $AT + CT < AB + CB$ .  
б) Внутри треугольника  $ABC$  расположен треугольник  $A_1B_1C_1$ . Докажите, что его периметр меньше периметра треугольника  $ABC$ .  
в) Внутри выпуклого многоугольника  $A_1A_2\dots A_n$  расположен выпуклый многоугольник  $B_1B_2\dots B_m$ . Докажите, что периметр внутреннего многоугольника меньше периметра наружного.
7. В треугольнике  $ABC$  отмечена произвольная точка  $T$ . Докажите, что  $AT + BT + CT$  больше полупериметра и меньше периметра треугольника  $ABC$ .
- Более сложные геометрические неравенства*
8. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  отмечена такая точка  $D$ , что  $AB = CD$ . Докажите, что  $BC > AD$ .
9. Пусть  $a, b, c$  — длины сторон треугольника,  $m_a, m_b, m_c$  — длины опущенных на эти стороны медиан и  $p = \frac{a+b+c}{2}$  — полупериметр данного треугольника. Докажите, что  $m_a + m_b + m_c > p$ .
10. На основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  отметили точку  $D$ , а на продолжении стороны  $AC$  за точку  $C$  — точку  $E$  таким образом, что  $AD = CE$ . Докажите, что  $BD + BE > BA + BC$ .
11. Отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  — биссектрисы треугольника  $ABC$ . Докажите, что а)  $AB_1 < AB$ ; б)  $A_1B_1 < AB$ .
12. В треугольнике  $ABC$  провели биссектрису  $CK$ , а в треугольнике  $CKB$  провели биссектрису  $KL$ . Прямые  $KL$  и  $AC$  пересеклись в точке  $M$ . Известно, что  $\angle CAB > \angle BCA$ . Докажите, что  $AK + KC > AM$ .