Подсчет числа способов. Треугольник Паскаля. 07 июля.

0. a) Имеется m белых и n черных шаров, причем $m > n$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?
b) Сколькими способами можно рассадить m разноцветных попугаев по n клеткам так, чтобы в каждой сидели один или два попугая?
c) Сколькими способами можно выбрать k различных подмножеств n-элементного множества?
d) Сколькими способами можно выбрать k непересекающихся множеств из n элементного множества?

Напоминание. Число способов выбрать из n предметов произвольные k равно $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ и обозначается C_n^k.

1. Докажите следующие равенства:
a) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$
b) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;
c) $C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}$

2. (**Бином Ньютона**) Докажите формулу

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

(коэффициенты C_n^k называются *биномиальными.*)

3. Найдите следующие суммы

$$a) \sum_{k=0}^{n} C_n^k; \quad b) \sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k; \quad c) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k; \quad d) \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$$

4. Дана клетчатая доска размера $n \times m$, в левом нижнем углу которой стоит фишка. За один ход можно переместить фишку на одну клетку вверх или вправо. Сколькими способами можно добраться до правого верхнего угла доски?

Опр. *Треугольник Паскаля* — бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел.

5. Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число a (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).

6. Дан треугольник Паскаля из n строк. Найдите сумму всех его элементов.

7. *Диагональю* треугольника Паскаля называется множество чисел, расположенных на прямой, параллельной его стороне. Найдите сумму чисел, стоящих на k-ой диагонали треугольника из n строк.

8. Докажите равенство: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = C_{k+1}^2 + 2(C_k^2 + C_{k-1}^2 + \ldots + C_2^2)$.

9. Докажите, что не существует таких натуральных чисел x, y, z, k, что $x^k + y^k = z^k$ при условии $x < k, y < k$.

10. В левом столбце и нижней строке таблицы 11×11 лежат фишки — всего 2^{15} фишек. За один ход разрешается выбрать две граничащие по углу клетки, снять с них по фишке и добавить фишку в клетку, имеющую общую сторону с выбранными. Можно ли добиться того, чтобы хотя бы одна фишка попала в правый верхний угол?