

Дискретная непрерывность.

1. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары — черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

2. В линейной связке сосисок — 100 говяжьих и 200 свиных вперемешку. Какое наименьшее количество разрезов достаточно сделать, чтобы можно было разложить сосиски на две кучки, в каждой из которых по 50 говяжьих и 100 свиных?

3. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу прибавляется любая из его ненулевых цифр. Докажите, что в некоторый момент на доске будет написано четное число.

4. На плоскости отмечено 100 точек. Докажите, что можно провести прямую так, чтобы по обе стороны от нее лежало поровну точек.

5. За круглым столом равномерно посажены 100 дедов, причем у любых двух соседей количество волос в бородах отличается не больше, чем на 100. Докажите, что найдется пара дедов, сидящих напротив друг друга, у которых количество волос в бородах также отличается не больше, чем на 100.

6. На клетчатой доске 100×100 стоит 1000 шашек. Докажите, доску можно разрезать по границам клеток на две равные части с равным количеством шашек.

7. В ряд стоят n шаров, известно, что среди этих шаров могут быть шары только двух цветов: чёрного и белого. Если в автомат отправить запрос (a, b) , то он проверит шары на местах с номерами a и b и если первый чёрный, а второй — белый, то поменяет их местами. Паша утверждает, что может, не зная исходного набора, написать такой список запросов, что потом на двух, известных ему позициях, будут шары одного цвета. Докажите, что Паша хвастается безосновательно.

8. Дано натуральное число. Разрешается расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12345 + 6 + 789 = 13140$). С полученным числом снова разрешается выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций.