Полуинвариант.

1. На доске написаны числа от 1 до 100. За один ход можно заменить два числа a и b на
а) 3 и $\frac{ab}{2}$; б) $\frac{a-b}{2}$ и $\frac{a+b}{2}$. Докажите, что первоначальная ситуация больше никогда не повторится.

2. На доске написаны числа 1, 2, . . . , 2016. Разрешается заменять любое число на произведение его цифр или любые два числа на их сумму. Можно ли такими заменами добиться, чтобы среди чисел на доске появилось 3 000 000?

3. Когда в Московском метрополитене только ввели магнитные карты, существовала такая лазейка в системе: когда подносишь к считывателю стопку из карточек, с карточки с наибольшим оставшимся количеством поездок снималась одна поездка, но на остальных карточках становится столько же поездок. Это позволяет владельцу нескольких карточек увеличивать суммарное количество оставшихся поездок. Докажите, что тем не менее, сколько бы изначально карточек не было у человека, рано или поздно все поездки закончатся.

4. На планете Эмсемь находятся государства двух политических строев: демократические и авторитарные. Раз в год в каком-нибудь одном государстве происходит революция: имеющийся в нем политический строй становится таким, как в большинстве соседних с ним государств, если он от них, конечно, отличается (если соседей каждого вида поровну, революции не случается). Докажите, что рано или поздно на всей планете наступит мир, и революции прекратятся.

Если процесс не задан, то его иногда надо придумать.

5. В клетках доски 99×99 расставлены действительные числа 1 или -1. Докажите, что можно поменять знаки в некоторых линиях (полностью), чтобы в каждой линии сумма стала положительной.

6. На плоскости отмечены 200 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Половину из них покрасили в синий цвет, остальные в красный цвет. Докажите, что можно разбить точки на пары разноцветных так, чтобы отрезки, соединяющие точки из одной пары, не пересекались.

7. а) Дан граф, степени всех вершин не превосходят $a + b + 1$. Докажите, что этот граф можно разбить на два подграфа (возможно, пустых) таким образом, чтобы степени всех вершин в первом подграфе были не более, чем a, а степени всех вершин во втором подграфе не превосходили b.
б) (**Теорема Ловаса**) Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для разбиения на n подграфов.

Добавка

8. На доске выписаны натуральные числа $a_1, a_2 \dots a_n$ За ход разрешается взять пару чисел, ни одно из которых не делится на второе, и заменить их на их НОД и НОК.
а) Докажите, что как бы мы ни действовали, мы не сможем проворачивать эту операцию бесконечно много раз.
б) Докажите, что как бы мы ни действовали, мы закончим одним и тем же множеством чисел.

9. Петя выписал на доске n действительных чисел. Затем Вася каждую минуту мысленно разбивает все числа на две группы так, чтобы разность сумм в группах была наименьшей из возможных (группа может быть и пустой, тогда её сумма равна 0). После чего ко всем числам из первой группы добавляет 1, а из всех чисел второй группы вычитает 1. Докажите, что однажды на доске появится число, большее $\frac{n}{2}$.

10. Вдоль бесконечного в обе стороны коридора, расположены комнаты, занумерованные целыми числами. В этих комнатах живут пианисты (их конечное число). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (n и $n + 1$) решают, что мешают друг другу и разъезжаются, то есть переселяются в комнаты $n - 1$ и $n + 2$. (При этом несколько пианистов могут жить в одной комнате.)
а) Докажите, что пианисты не смогут расселяться неограниченно далеко.
б) Докажите, что когда-нибудь переселения прекратятся.