

Разнобой с мотивами планарности

Определение: Граф называется *планарным*, если его можно без самопересечений изобразить на плоскости.

Изображение графа на плоскости без самопересечений называется *плоским* графом.

Картой называется связный плоский граф. Части, на которые карта разбивает плоскость, называются *гранями* (или *странами*).

1т. (Формула Эйлера.) Докажите, что в карте с V вершинами, E ребрами и F странами $V - E + F = 2$ а) для карты, образованной деревом; б) для произвольной карты; в) как будет выглядеть эта формула в случае произвольного плоского графа?

Замечание: Эта формула верна, в том числе и для карты, содержащей петли и кратные ребра. Однако во всех последующих задачах мы будем рассматривать карты без петель и кратных ребер.

2т. Дана карта с V вершинами и E ребрами, причем $V > 2$. Докажите, что $E \leq 3V - 6$.

3т. а) Докажите, что K_5 (полный граф на 5 вершинах) не является планарным.

б) При каких m и n граф $K_{m,n}$ (т.е. полный двудольный граф, в одной доле которого m , а в другой — n вершин) является планарным?

в) Докажите, что если рисовать граф $K_{3,3}$ не на плоскости, а на поверхности в форме бублика, то можно сделать это без самопересечений.

4. Дана карта, степени всех вершин которой четны. Докажите, что ее страны можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две страны, имеющие общее ребро, были покрашены в разные цвета.

5. Докажите, что грани карты можно правильно раскрасить в а) шесть цветов;

б) пять цветов.

6. (Принимаются только доказательства по индукции) Пусть k и n — натуральные числа, большие 1. В группе из kn человек каждый знаком более, чем с $(k - 1)n$ из остальных. Докажите, что можно выбрать $k + 1$ человека так, что все они знакомы друг с другом.

7. На вечеринку пришло а) 19 гостей; б) 21 гость, причем среди любых трех из них есть двое знакомых. Докажите, что гости могут разбиться на 5 групп, в каждой из которых все попарно знакомы.

8. В группе из $2n + 1$ человека для любых n найдется еще один, знакомый с ними всеми. Докажите, что кто-то знаком с остальными $2n$.