Разнобой по теории чисел.

1. а) Докажите, что среди любых n чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на n.
б) Набор из $n-1$ числа таков, что никакая сумма никакого набора из них не делится на n. Обязательно ли все эти числа дают равные остатки?

2. На доске написано 11 чисел. Докажите, что можно перед каждым числом написать $-$, $+$ или $0\cdot$ так, чтобы полученное выражение делилось на 2017. (Подразумевается, что все на ноль умножить нельзя.)

3. Вася выписывает подряд без пробелов натуральные числа. Докажите, что однажды, приписав очередную цифру одного из чисел, получится число, кратное 2017^{2017}.

4. На доске написаны натуральные числа $a_1, \ldots, a_k$ такие, что НОД$(a_1, \ldots, a_k) = 1$. Разрешается взять два числа и из большего вычесть меньшее. Докажите, что такими операциями можно получить число 1.

5. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что $(2p-1)! \equiv p \pmod{p^2}$.

6. Для каких натуральных n число $(n-1)!+1$ является точной степенью n?

7. Какой остаток даёт число 2016^{60} при делении на 1001?

8. Числа a и b таковы, что $a-b$ делится на p. Докажите, что $a^p - b^p$ делится на p^2. *А теперь вспомните задачу из листа про теорему Эйлера.*

9. а) Докажите, что число a^3+b^3+4 никогда не бывает кубом при натуральных a, b.
б) Докажите, что число $a^5+b^5+c^5+5$ никогда не бывает пятой степенью натурального числа.

10. Существуют ли такие простое число p и натуральные x, y, z, для которых $(12x+5)(12y+7) = p^z$?

11. Докажите, что для любого натурального n, и для любых $0 < k < l < n$ числа C_n^k и C_n^l не взаимно простые.