Разнобой-5.

1. На плоскости в вершинах выпуклого 2016-угольника расположены 2016 фишек. За один ход можно разбить их на две группы и к фишкам первой группы применить гомотетию с произвольным центром и произвольным коэффициентом (за один ход только один центр и один коэффициент), а остальные фишки оставить на месте. Может ли случиться, что после 9 ходов все фишки окажутся на одной прямой?

2т. Дан ориентированный граф G. Докажите, что его вершины можно разбить на несколько множеств (возможно, одно) так, чтобы из любой вершины можно было добраться до любой вершины того же множества, а для любых двух множеств M_1 и M_2 можно добираться либо только из вершин M_1 в вершины множества M_2, либо наоборот.

3т. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$.
а) Чему равно количество делителей числа n?
б) Докажите, что сумма делителей числа n равна

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}.$$

4т. a) Внутри окружности выбрана точка X, и через нее проведены две прямые; одна из них пересекает окружность в точках A и B, а другая – в точках C и D. Докажите, что величина угла AXC равна полусумме дуг AC и BD. b) Снаружи окружности выбрана точка X, и через нее проведены две прямые; одна из них пересекает окружность в точках A и B (B лежит между X и A), а другая – в точках C и D (D лежит между X и C). Докажите, что величина угла AXC равна полуразности дуг AC и BD.

5. В волейбольном турнире сыграли 521 команд, каждая с каждой по одному разу. Докажите, что можно выбрать 10 команд и пронумеровать их числами от 1 до 10 так, что в любой паре пронумерованных команд команда с меньшим номером выиграла у команды с большим номером (в волейболе ничьих не бывает).

6. На столе лежат 2016 спичек. За один ход можно взять из кучи 1, 10 или 11 спичек. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре?

7т. Пусть $p = 4k+3$ — простое число. Натуральные числа a и b таковы, что a^2+b^2 делится на p. Докажите, что и a, и b делятся на p.

8т. Нечётные простые числа p и q таковы, что $a^p - 1$ делится на q. Докажите, что $q-1$ делится на $2p$.