Теорема Эйлера и не только.

Упр 1. А правда ли, что малая теорема Ферма верна и для составных чисел?

Упр 2. Пусть p и q различные нечётные простые числа. Пусть $(a, pq) = 1$.
а) Докажите, что $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{pq}$.
б) Можно ли доказать подобный факт для какой-то меньшей степени?

Упр 3т. Мы хотим доказать аналог малой теоремы Ферма для составных чисел. Построим такой же граф, как во втором вчерашнем доказательстве. Будет ли он состоять из объединения циклов? Может быть можно выкинуть какие-то вершины, чтобы это исправить?

1т. а) Пусть $a \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N}$ a не делится на p. При помощи метода математической индукции докажите, что $a^{\varphi(p^k)} \equiv 1 \pmod{p^k}$.
б) Из предыдущего пункта выведите *теорему Эйлера*: пусть a, n — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
в) Докажите, что если у числа n есть два различных нечетных простых делителя, то для числа a взаимно простого с n верно, что $a^{\varphi(n)/2} \equiv 1 \pmod{m}$.

2т. Обозначим за $\varphi(n)$ количество натуральных чисел, не больших n и взаимно простых с n.
а) Докажите, что для любых взаимно простых a, b выполняется равенство $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
б) Пусть $p \in \mathbb{P}, k \in \mathbb{N}$. Найдите $\varphi(p^k)$.
в) Выразите $\varphi(n)$ через каноническое разложение числа n (т.е. через разложение вида $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$).

3. Докажите, что $5^{6^7} - 1$ делится на 2016.

4. а) Докажите, что $n^{84} - n^4$ делится на 20400 для любого натурального n.
б) Можно ли вместо 20400 доказать для какого-то большего числа?

5. Докажите, что $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$ для всех чётных n.

6. Даны натуральные числа m и n. Артём пишет на блокноте числа n, n^n, n^{n^n}, $n^{n^{n^n}}$ и так далее (каждое новое число получается возведением числа n в степень предыдущего числа). Докажите, что рано или поздно остатки при делении на m у чисел Артёма будут одни и те же.

7. а) Докажите, что $2^{3^k} + 1$ делится на 3^{k+1}.
б) Сколько различных остатков могут принимать степени двойки при делении на 3^k?

8. Докажите, что в последовательности чисел $2^n - 3$, где $n = 1, 2, \ldots$, существует набор из 2016 попарно взаимно простых чисел.

9. Пусть $n > 3$ — нечётное число. Докажите, что у числа $2^{\varphi(n)} - 1$ есть простой делитель, которого нет у числа n.