

## Путешествие по состояниям. Зацикливание.

1. Петя выписывает последовательность цифр по следующему правилу: сначала он выписывает какую-то цифру, а после цифры  $a$  выписывает последнюю цифру числа  $a^2 + 7$ . Докажите, что с какого-то момента последовательность цифр будет периодической.

2. Один преподаватель оставил на дверях всех комнат записки следующего содержания: “Я в комнате номер . . . ” и исчез в неизвестном направлении (записки на разных дверях могут сообщать разную информацию). Настойчивый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.

3. Кубик Рубика вывели из исходного состояния некоторой последовательностью поворотов граней. Докажите, что если повторять эту последовательность поворотов достаточно долго, то кубик в конце концов вернется в исходное состояние.

4т. а) Найдите сотую цифру после запятой числа  $\frac{3}{7}$ .

б) Докажите, что всякая обыкновенная дробь представляется в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

в) Докажите, что если натуральное число  $n$  не делится ни на 2, ни на 5, то десятичное разложение дроби  $1/n$  не имеет предпериода (то есть зацикливание начинается с первого же знака после запятой).

*А что будет состоянием в следующих задачах?*

5. Докажите, что существует число Фибоначчи, большее 10000, последние четыре цифры которого а) 0005; б) 0000.

6. Метеорологическая служба Вишкиля следит за погодой уже 100 лет. Они подразделяют погоду на дождливую или солнечную. Метеорологи утверждают, что погода на следующий день однозначно определяется погодой в предыдущие 7 дней. Последняя неделя в Вишкиле была полностью дождливая. Докажите, что такое уже было и ещё будет.

7. В стране каждая дорога соединяет два перекрестка, а на каждом перекрестке сходятся 3 дороги. Рыцарь едет по стране, поворачивая на перекрестках по очереди то направо, то налево. Докажите, что он когда-нибудь вернется в начало пути.

8. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан "периодический" текст, например: ...мамамыларамумамамылараму...

9. Есть неограниченное число чёрных и белых кубиков. Нужно построить из них башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик граничил с чётным числом белых, а каждый белый – с нечётным числом чёрных. При любом ли нижнем заданном слое кубиков такую башню конечной высоты можно построить?