

## Упорядочивание и принцип крайнего.

1. На плоскости отметили некоторые точки. Известно, что любая отмеченная точка является серединой некоторого отрезка с концами в отмеченных точках. Докажите, что отмеченных точек не может быть конечное число.

2. В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причём в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

3. На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

4. На клетчатой доске  $100 \times 100$  стоит несколько ладей. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы ладьи одного цвета друг друга не били.

5. В графе 200 вершин, степень каждой хотя 100. Докажите, что в нем можно выбрать

- а) гамильтонов путь (путь, проходящий по все вершинам ровно один раз)
- б) гамильтонов цикл (цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз)

6. Докажите, что в полном ориентированном сильно связном графе есть гамильтонов цикл.

7. На плоскости синим и красным цветом окрашено несколько точек так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой (точек каждого цвета не менее трех). Докажите, что можно найти треугольник с одноцветными вершинами, на трех сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.

**8т. (Теорема Сильвестра)** а) На плоскости дано конечное число точек, причём такое, что любая прямая, проходящая через две из данных точек, содержит еще одну данную точку. Докажите, что все данные точки лежат на одной прямой.

б) На плоскости дано конечное число прямых, причем такое, что через точку пересечения любых двух данных прямых проходит еще хотя бы одна данная прямая. Докажите, что все данные прямые проходят через одну точку.