Сравнения. 06 июля

Определение. Говорят, что целые числа a, b сравнимы по модулю n (n – натуральное число), если $a - b$ делится на n. Обозначается как $a \equiv b(mod \quad n)$

Свойства. Пусть $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Если $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d (\mathrm{mod}\ n)$, то:

1) $a + c \equiv b + d \pmod{n}$, $ae \equiv be \pmod{n}$;

2) $ac \equiv bd \pmod{n}$, $a^m \equiv b^m \pmod{n}$.

3) Если k и m взаимно простые и $ka \equiv kb \quad (mod \quad m)$, то $a \equiv b \quad (mod \quad n)$. (Для доказательства этого свойства пока что ссылаемся на основную теорему арифметики.)

4) Целые числа a, b сравнимы по модулю n тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый остаток при делении на n (это не очевидный факт).

О работе со сравнениями, как с уравнениями

1. Решите сравнения:
   а) $5x \equiv 2 \quad (mod \quad 3)$;
   б) $3x \equiv 2 \quad (mod \quad 11)$;
   в) $6x \equiv 1 \quad (mod \quad 13)$;

2. а) Пусть $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq k - 1$, n взаимно просто с k. Докажите, что существует единственное $m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq k - 1$, такое, что $nm \equiv 1 \pmod{k}$.

   б) Пусть $p \in \mathbb{P}, x \in \mathbb{Z}$. Докажите, что если $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, то либо $x \equiv 1 \pmod{p}$, либо $x \equiv -1 \pmod{p}$.

   в) (**Теорема Вильсона**) Докажите, что если $p \in \mathbb{P}$, то $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

3. Даны натуральные числа a, b и c такие, что $ab + 9b + 81$ и $bc + 9c + 81$ делятся на 101. Докажите, что тогда и $ca + 9a + 81$ тоже делится на 101.

Перемножаем, складываем.

4. Натуральные числа a и b таковы, что $ab + 1$ делится на $b + 2$. Докажите, что $2a > b$.

5. Пусть a, b, c, d и n — натуральные числа, причем $a+b$ и $c+d$ делятся на n. Докажите, что $ac-bd$ делится на n.

6. а) Докажите, что $a^n - b^n$ делится на $a - b$.
   б) Докажите, что при нечётном n $a^n + b^n$ делится на $a + b$.

7. Докажите, что $(2^n - 1)^n - 3$ делится на $2^n - 3$.

8. Вася выписал в тетрадку числа вида $100\ldots01$ (иными словами, числа вида $10^k + 1$), меньшие 10^{2015}. Докажите, что простых из них не более 1% от общего числа.

9. Натуральные числа a и b таковы, что $a^{16} + b^{16}$ и $a^{125} + b^{125}$ делятся на 101. Докажите, что $a^{2016} + b^{2016}$ делится на 101.

10. Число $1\underbrace{33...33}_{k}$ – простое. Докажите, что k – нечетное.

Добавочка.

11. Дано четное число a. Докажите, что существует бесконечно много нечетных натуральных чисел n таких, что $a^n + n$ — составное число.

12. В ряду чисел $1, 501, 751, 876, 438, \ldots$ каждое число, кроме первого, равно половине предыдущего, если предыдущее четно, и половине предыдущего числа, увеличенного на 1001, в противном случае. Верно ли, что в этом ряду встретятся все натуральные числа от 1 до 1000?