Треугольники и перпендикуляры.

1. Теорема Карно. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, или на их продолжениях, отмечены точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. В этих точках проведены перпендикуляры к соответствующим сторонам треугольника.

a) Эти перпендикуляры пересекаются в одной точке. Докажите, что $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2$.

b) Докажите обратное утверждение: если $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2$, то перпендикуляры пересекаются в одной точке.

2. Теорема Карно. На плоскости дан треугольник ABC и произвольные точки A_1, B_1 и C_1. Через точки A_1, B_1 и C_1 провели прямые, перпендикулярные сторонам BC, AC и AB соответственно. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2$.

3. Теорема Штейнера. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на прямые BC, AC, AB соответственно, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на прямые B_1C_1, A_1C_1, B_1C_1 соответственно, пересекаются в одной точке.

4. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 таковы, что $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые BC, CA и AB, пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей на соответственные стороны треугольника, пересекаются в одной точке.

6. Опустим из вершин A, B и C треугольника ABC соответственно перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 на произвольную прямую ℓ. Докажите, что перпендикуляр из точки A_1 на прямую BC, перпендикуляр из точки B_1 на прямую AC и перпендикуляр из точки C_1 на прямую AB пересекаются в одной точке.

7. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Докажите, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку.

8. a) Квадраты $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ имеют общую вершину A (вершины перечислены против часовой стрелки). Докажите, что прямые BB_1 и DD_1 перпендикулярны.

b) На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты$ABFE$ и $ACGT$. Докажите, что точка P пересечения прямых CF и BG лежит на высоте AA_1.