

Инвариант и не только. 06 июля

Часть первая.

1. Все клетки доски 8×8 окрашены в белый цвет. Петя перекрасил одну клетку в чёрный. Вася может поменять цвет всех клеток одной строки или столбца. Сможет ли Вася снова сделать всю доску белой?

2. На доске написаны числа 1, 5, 10. Каждую минуту можно любое из чисел заменить на разность суммы двух других и этого числа. Можно ли через некоторое время получить на доске тройку 2013, 2016, 2023?

3. За один ход можно заменить упорядоченную тройку целых чисел (p, q, r) на тройку $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. Существует ли целое число k , для которого из тройки (1, 6, 7) можно за конечное число шагов получить тройку $(k, k + 1, k + 2)$?

4. В квадрате 4×4 одна крайняя неугловая клетка закрашена в чёрный цвет, а остальные клетки белые. За одну операцию разрешается поменять цвета всех клеток одной линии (будь то строка, столбец или диагональ). Удастся ли сделать доску одноцветной?

5. По кругу растут n деревьев. На каждом дереве сидит сова. Каждую минуту какие-то две совы перелетают на соседние деревья, причём одна из них по часовой стрелке, а другая — против часовой. При каких n все совы смогут оказаться на одном дереве?

Часть вторая.

6. На доске написаны числа от 1, 2, ..., 100. Вася каждую минуту стирает два числа a и b и заменяет их на а) $a + b$; б) ab ; в) $\sqrt{a^2 + b^2}$; г) $\frac{ab-1}{a+b+2}$. Докажите, что число, которое останется последним, не зависит от порядка действий.

7. С написанными на доске положительными числами разрешается выполнить одну из двух следующих операций: 1) стереть произвольное число x и записать два раза число $\sqrt{x+1} - 1$; 2) стереть два произвольных числа x и y и записать число $x + y + xy$. Изначально на доске написано число a . Через несколько операций на доске оказалось написано одно число. Докажите, что оно равно a .

8. Петя выписал на доске числа от 1 до 100. Каждую минуту Вася стирает с доски два числа, пишет на доску их сумму, а себе в блокнот пишет их произведение.

а) Докажите, что сумма чисел на блокноте после 99 операций не зависит от порядка Васиных действий.

б) Чему равна эта сумма?

9. В квадрате 10×10 расставлены числа от 1 до 100 следующим образом: в первой строке (слева направо по порядку) 1, 2, ..., 10, во второй — 11, 12, ..., 20, ..., в десятой — 91, 92, ..., 100. Разрешается взять любой прямоугольник 1×3 и сделать следующую операцию: прибавить к крайним числам по 1, а из среднего отнять 2, или сделать обратную операцию. Через некоторое время оказалось, что в квадрате опять присутствуют все числа от 1 до 100. Докажите, что они расположены на первоначальных местах.