19 июля. Вписанность и подобные треугольники.

Напоминание. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются подобными, если $A_1B_1/AB = B_1C_1/BC = A_1C_1/AC$ и $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$.

0. 1. По двум сторонам и углу между ними.

0. 2. По двум углам.

0. 3. По трем сторонам.

Определениие. Пусть точки A, B и C лежат на окружности с центром O. Угол $\angle ABC$ называется *вписанным углом*, опирающимся на дугу AC. Угол $\angle AOC$ называется *центральным углом*, опирающимся на ту же дугу AC.

1. Докажите, что угол, вписанный в окружность, равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу. Разберите три случая: центр окружности лежит a) на стороне угла; b) внутри угла; c) вне угла.

Определениие. Дуги окружностей принято измерять в градусах: *градусная мера дуги* равна величине опирающегося на нее центрального угла. Например, мера полуокружности — 180°, а всю окружность можно поделить на 360 равных дуг по 1° каждая. Таким образом, утверждение предыдущей задачи таково: вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

Определение. Говорят, что выпуклый четырехугольник является *вписанным*, если существует окружность, проходящая через все его вершины.

2. Докажите, что:

a) у вписанного четырехугольника сумма любых двух противоположных углов равна 180°;

b) четырехугольник, сумма двух противоположных углов которого равна 180°, является вписанным.

c) выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $\angle ACB = \angle ADB$.

d) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. На продолжении луча AB за точку B отмечена точка K. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $\angle KBC = \angle ADC$.

e) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $EB \cdot EA = EC \cdot ED$.

f) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $AE \cdot EC = BE \cdot ED$.

g) Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle DBC$ и $AD = DC$, то он вписанный.

h) Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ACB + \angle DCB = 180^\circ$ и $AB = BD$, то он вписанный.

3. Ортоцентр треугольника ABC отразили относительно стороны AB. Докажите, что полученная точка попала на описанную окружность.

XXXII Летняя многопредметная школа Кировской области 3 – 28 июля 2016 г

4. Ортоцентр треугольника ABC отразили середины стороны AB. Докажите, что полученная точка попала на описанную окружность.

5. В треугольнике ABC отметили следующие девять точек: A_1, B_1, C_1 — середины сторон; A_2, B_2, C_2 — основания высот; A_3, B_3, C_3 — середины отрезков HA, HB, HC (H — ортоцентр).

Докажите, что указанные 9 точек лежат на одной окружности. Она так и называется — *окружность девяти точек* треугольника ABC. а OH.

6. Высоты остроугольного треугольника AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что $HA \cdot HA_1 = HB \cdot HB_1 = HC \cdot HC_1$.

7. Лемма о трезубце. Прямая, проходящая через точку A и центр I вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M. Докажите, что треугольники BIM и CIM равнобедренные.

8. Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AC = CD$. Докажите, что если $ABCE$ — трапеция, то и $BCDE$ — трапеция или прямоугольник.

9. Хорды AB и CD окружности не пересекаются. Отрезки, соединяющие середину дуги AB с концами хорды CD, пересекают хорду AB в точках A_1 и B_1. Докажите, что четырехугольник A_1B_1CD — вписанный.

10. В окружность с диаметром AB вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что длины проекций отрезков AC и BD на прямую CD равны.

11. Точки B_1 и C_1 на описанной окружности остроугольного треугольника ABC таковы, что $BB_1 \perp AC$ и $CC_1 \perp AB$. Прямая B_1C_1 пересекает сторону AB в точке M, а прямую AC в точке N. Оказалось, что $B_1N = 3$, $NM = 4$ и $MC_1 = 5$. Найдите угол ABC.

19 июля. Вписанность и подобные треугольники.

Напоминание. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются подобными, если $A_1B_1/AB = B_1C_1/BC = A_1C_1/AC$ и $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$.

0. 1. По двум сторонам и углу между ними.

0. 2. По двум углам.

0. 3. По трем сторонам.

Определениие. Пусть точки A, B и C лежат на окружности с центром O. Угол $\angle ABC$ называется *вписанным углом*, опирающимся на дугу AC. Угол $\angle AOC$ называется *центральным углом*, опирающимся на ту же дугу AC.

1. Докажите, что угол, вписанный в окружность, равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу. Разберите три случая: центр окружности лежит a) на стороне угла; b) внутри угла; c) вне угла.

Определениие. Дуги окружностей принято измерять в градусах: *градусная мера дуги* равна величине опирающегося на нее центрального угла. Например, мера полуокружности — 180°, а всю окружность можно поделить на 360 равных дуг по 1° каждая. Таким образом, утверждение предыдущей задачи таково: вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

Определение. Говорят, что выпуклый четырехугольник является *вписанным*, если существует окружность, проходящая через все его вершины.

2. Докажите, что:

a) у вписанного четырехугольника сумма любых двух противоположных углов равна 180°;

b) четырехугольник, сумма двух противоположных углов которого равна 180°, является вписанным.

c) выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $\angle ACB = \angle ADB$.

d) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. На продолжении луча AB за точку B отмечена точка K. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $\angle KBC = \angle ADC$.

e) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $EB \cdot EA = EC \cdot ED$.

f) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $AE \cdot EC = BE \cdot ED$.

g) Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle DBC$ и $AD = DC$, то он вписанный.

h) Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ACB + \angle DCB = 180^\circ$ и $AB = BD$, то он вписанный.

3. Ортоцентр треугольника ABC отразили относительно стороны AB. Докажите, что полученная точка попала на описанную окружность.

XXXII Летняя многопредметная школа Кировской области 3 – 28 июля 2016 г

4. Ортоцентр треугольника ABC отразили середины стороны AB. Докажите, что полученная точка попала на описанную окружность.

5. В треугольнике ABC отметили следующие девять точек: A_1, B_1, C_1 — середины сторон; A_2, B_2, C_2 — основания высот; A_3, B_3, C_3 — середины отрезков HA, HB, HC (H — ортоцентр).

Докажите, что указанные 9 точек лежат на одной окружности. Она так и называется — *окружность девяти точек* треугольника ABC. а OH.

6. Высоты остроугольного треугольника AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что $HA \cdot HA_1 = HB \cdot HB_1 = HC \cdot HC_1$.

7. Лемма о трезубце. Прямая, проходящая через точку A и центр I вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M. Докажите, что треугольники BIM и CIM равнобедренные.

8. Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AC = CD$. Докажите, что если $ABCE$ — трапеция, то и $BCDE$ — трапеция или прямоугольник.

9. Хорды AB и CD окружности не пересекаются. Отрезки, соединяющие середину дуги AB с концами хорды CD, пересекают хорду AB в точках A_1 и B_1. Докажите, что четырехугольник A_1B_1CD — вписанный.

10. В окружность с диаметром AB вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что длины проекций отрезков AC и BD на прямую CD равны.

11. Точки B_1 и C_1 на описанной окружности остроугольного треугольника ABC таковы, что $BB_1 \perp AC$ и $CC_1 \perp AB$. Прямая B_1C_1 пересекает сторону AB в точке M, а прямую AC в точке N. Оказалось, что $B_1N = 3$, $NM = 4$ и $MC_1 = 5$. Найдите угол ABC.