

20 июля. Степень точки и радикальная ось.

0. 1. Точка X лежит внутри окружности. Секущая, проведенная из точки X , пересекает окружность в точках A и B . Докажите, что $XA \cdot XB$ не зависит от выбора секущей.

0. 2. Точка X лежит вне окружности. Докажите то же утверждение, что и в упражнении 0.1.

1. Пусть расстояние от точки X до центра O окружности радиуса r равно d . Докажите, что степень точки X относительно этой окружности равна

а) $d^2 - r^2$, если X лежит вне окружности;

б) $r^2 - d^2$, если X лежит внутри окружности.

2. Даны две неконцентрические окружности (т.е. с разными центрами). Найдите ГМТ на плоскости, степени которых относительно этих окружностей одинаковы.

Определение. Это ГМТ называется *радикальной осью* двух окружностей.

3. Даны три окружности, центры которых не совпадают и не лежат на одной прямой. (т.е. с разными центрами). Найдите ГМТ на плоскости, степени которых относительно этих окружностей одинаковы.

Определение. Это ГМТ называется *радикальным центром* трех окружностей.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B . Докажите, что прямая AB делит отрезок общей касательной к окружностям пополам.

5. Две непересекающиеся окружности имеют четыре общие касательные. Докажите, что середины четырех полученных отрезков касательных лежат на одной прямой.

6. В угол вписаны две окружности. Одна окружность касается одной стороны угла в точке A , вторая окружность касается другой стороны угла в точке B . Докажите, что прямая AB отсекает на окружностях равные хорды.

7. Прямые AB , AC — касательные к окружности ω . Точки M , N — середины отрезков AB и AC . Точка P — произвольная точка на прямой MN . Докажите, что $PA = PD$, где PD — касательная из точки P к окружности ω .

8. Дана окружность S и точки P и K вне ее. Через точку проводится секущая PAB (A и B — точки пересечения с окружностью). Построим описанную окружность треугольника KAB . Докажите, что все такие окружности имеют общую точку, отличную от K .

9. Точки A и P лежат вне прямой ℓ . Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники ABC с гипотенузой, лежащей на ℓ . Докажите, что окружности описанные около треугольников PBC имеют общую точку, отличную от P .

10. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC выбраны точки X, Y, Z, T и U, V соответственно. Оказалось, что четырехугольники $XYZT$, $ZTVU$ и $XYVU$ вписанные. Докажите, что шестиугольник $XYZTUV$ тоже вписанный.

20 июля. Степень точки и радикальная ось.

0. 1. Точка X лежит внутри окружности. Секущая, проведенная из точки X , пересекает окружность в точках A и B . Докажите, что $XA \cdot XB$ не зависит от выбора секущей.

0. 2. Точка X лежит вне окружности. Докажите то же утверждение, что и в упражнении 0.1.

1. Пусть расстояние от точки X до центра O окружности радиуса r равно d . Докажите, что степень точки X относительно этой окружности равна

а) $d^2 - r^2$, если X лежит вне окружности;

б) $r^2 - d^2$, если X лежит внутри окружности.

2. Даны две неконцентрические окружности (т.е. с разными центрами). Найдите ГМТ на плоскости, степени которых относительно этих окружностей одинаковы.

Определение. Это ГМТ называется *радикальной осью* двух окружностей.

3. Даны три окружности, центры которых не совпадают и не лежат на одной прямой. (т.е. с разными центрами). Найдите ГМТ на плоскости, степени которых относительно этих окружностей одинаковы.

Определение. Это ГМТ называется *радикальным центром* трех окружностей.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B . Докажите, что прямая AB делит отрезок общей касательной к окружностям пополам.

5. Две непересекающиеся окружности имеют четыре общие касательные. Докажите, что середины четырех полученных отрезков касательных лежат на одной прямой.

6. В угол вписаны две окружности. Одна окружность касается одной стороны угла в точке A , вторая окружность касается другой стороны угла в точке B . Докажите, что прямая AB отсекает на окружностях равные хорды.

7. Прямые AB , AC — касательные к окружности ω . Точки M , N — середины отрезков AB и AC . Точка P — произвольная точка на прямой MN . Докажите, что $PA = PD$, где PD — касательная из точки P к окружности ω .

8. Дана окружность S и точки P и K вне ее. Через точку проводится секущая PAB (A и B — точки пересечения с окружностью). Построим описанную окружность треугольника KAB . Докажите, что все такие окружности имеют общую точку, отличную от K .

9. Точки A и P лежат вне прямой ℓ . Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники ABC с гипотенузой, лежащей на ℓ . Докажите, что окружности описанные около треугольников PBC имеют общую точку, отличную от P .

10. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC выбраны точки X, Y, Z, T и U, V соответственно. Оказалось, что четырехугольники $XYZT$, $ZTVU$ и $XYVU$ вписанные. Докажите, что шестиугольник $XYZTUV$ тоже вписанный.