## Разнобой

**1.** Докажите, что $n^{1105} - n$ делится на 1105 при любом целом $n$.

**2.** Пусть $p$ — простое число. Докажите, что оно входит в разложение числа $n!$ на простые множители в степени равной $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$

**3.** Выпуклый $n$-угольник разбили непересекающимися диагоналями на треугольники. За один ход можно взять два треугольника с общей стороной, и сменить диагональ получившегося четырёхугольника на другую. Докажите, что такими операциями можно получить любую другую триангуляцию.

**4.** Докажите, что число $1,000001$ в некоторой степени больше миллиона.

**5.** Докажите, что сумма номеров всех счастливых шестизначных билетов делится на 13.

**6.** Малыш и Карлсон играют в такую игру: они берут шоколадку $n \times n$ и по очереди выкусывают из нее (по клеточкам) кусочки: Малыш — $1 \times 1$, а Карлсон — $2 \times 2$. Малыш начинает. Если Карлсон не может сделать ход, тот весь остаток шоколадки доедает Малыш. Выигрывает тот, кто съест больше шоколада. Кто выигрывает при правильной игре?

**7.** Вписанная в окружность $ABC$ окружность касается сторон $AB$, $BC$ и $AC$ в точках $C_1$, $A_1$ и $B_1$. Точки $I_a$, $I_b$, $I_c$ – центры вневписанных окружностей. Докажите, что $I_aA_1$, $I_bB_1$, $I_cC_1$ пересекаются в одной точке.

**8.** В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что нет трех городов, попарно соединенных дорогами. Кроме того, для любых $n$ дорог найдется город, из которого выходят хотя бы две из них. Докажите, что города можно так разбить на $n$ округов, чтобы любая дорога соединяла города из различных округов.