Окружности и касательные.

Лемма. Из точки X проведены касательные XA и XB к окружности s. Тогда $XA = XB$.

1. a) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что $AB_1 = AC_1 = p - a$.

b) Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_1. Докажите, что $BA_1 = p - c$, $CA_1 = p - b$.

2. a) Пусть X является точкой касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Докажите, что вписанные окружности треугольников ABX и ACX касаются.

b) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для вневписанных окружностей.

3. a) Докажите, что если в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то $AB + CD = AD + BC$.

b) Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ выполнено равенство $AB + CD = AD + BC$, то в него можно вписать окружность.

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что окружности, вписанные в треугольники ABC и CDA, касаются друг друга.

a) Докажите, что четырехугольник описанный.

b) Докажите, что вписанные окружности треугольников ABD и BCD касаются.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи BC и AD — в точке F. Докажите, что

a) Если четырехугольник $ABCD$ — описанный, то $AE + CF = AF + CE$;

b) то $BE + BF = DE + DF$;

c) обратно, из *любого* из этих равенств следует описанность $ABCD$.

6. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности. К ним проведена общая касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Докажите, что длина отрезка AK не зависит от выбора точки D.