16 июля. Шары и перегородки.

1. Сколькими способами можно разрезать полоску 1×20 на 4 прямоугольника из трёх клеток и 8 квадратов 1×1?

2. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 фигурок Супермэна, 5 фигурок Бэтмэна и 5 фигурок Флэша так, чтобы никакие две фигурки Флэша не стояли рядом.

3. а) Докажите, что уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ имеет C_{k-1}^{n-1} решений в натуральных числах.

б) А сколько решений в целых неотрицательных числах?

4. Сколько решений имеет уравнение $x + y + z = 100$ в целых числах от 1 до 60?

5. Найдите количество

а) всех композиций числа n (то есть разбиений n в сумму натуральных слагаемых с учетом порядка слагаемых);

б) композиций n, в которых четное количество четных слагаемых.

6. а) На полке стоят n книг. Сколькими способами можно выбрать k книг так, чтобы никакие две выбранные книги не стояли рядом?

б) За круглым столом короля Артура сидят n рыцарей. Каждый из них враждует со своими соседями. Король хочет составить отряд из k рыцарей. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы в этом отряде не было врагов?

7. На первый этап Олимпиады по закрытию скобочек пришло 2016 участников. Согласно новому Порядку, если на второй этап прошли a участников, на третий – b участников, а на четвертый – с участников, то $a-b$ должно равняться $b-c$. Поскольку участник очередного этапа должен быть участником и предыдущего, $a \geqslant b \geqslant c$. Сколькими способами жюри олимпиады может выбрать участников этапов согласно новому Порядку? Варианты считаются различными, если они отличаются составом участников хотя бы на одном этапе.