XXXIII Кировская Летняя многопредметная школа
Вишкиль, 3–28 июля 2017 года

Материалы занятий

7 класс ПРОФИ

Д. А. Белов
Р. С. Ефремов
Ж. В. Зосимова

Дорогие Алина, Варя, Маша, Полина, Розалина, Даша, Марина, Гера, Данила, Артем, Арсений, Саша, Кирилл, Дима, Ваня, Вова, Паша, Рома, Ваня, Коля!

Спасибо за ваши старания и интерес к учебе. Нам было очень приятно с вами работать. Надеемся, что занятия не прошли зря и уже скоро мы встретимся на олимпиадах и турнирах. А кроме +50 к знаниям вы получили +20 к социализации. Смена прошла плодотворно и для нас. Благодаря вам мы взглянули на старые вещи под новым углом.

Эта книга содержит сборник материалов нашей группы. Используйте ее с умом. Продуктивной подготовки к предстоящему зачету. Без булдырабыз!

До встречи через год! И да пребудут с вами графы.

Искренне Ваши,

Дмитрий Алексеевич,

Руслан Сергеевич,

Жанна Владиславовна.

Оглавление

1. Вступительное занятие 5
2. Вступительная добавочка 5
3. Вступительная олимпиада 6
4. Серия 1, трудности перевода 6
5. Серия 2, геометрические неравенства 8
6. Серия 3, но разнобой–1 9
7. Серия 4, разлагай(ся) 10
8. Серия 5, движение 11
9. Серия 6, разнобой–2 12
10. Серия 7, увидеть граф и умереть 14
11. Серия 8, ГМТ 15
12. Серия 9, разнобой–3 16
13. Серия 10, вокруг остатки 16
14. Серия 11, обратно в геометрию 17
15. Серия 12, вокруг графы 19
16. Серия 13, алгоритмы вслепую 20
17. Серия 14, порядочная 21
18. Серия 15, вокруг остатки–2 22
19. Серия 16, четвертый признак 23
20. Серия 17, граф всегда с тобой 24
21. Серия 18, раскрытие скобочек 24
22. Внутренний математический бой 25
23. Серия 19, непорядочная 26
24. Серия 20, алгоритм Евклида 27
25. Серия 21, дополнительная 28

26. Серия 22, вырезать их всех! 29
27. Серия 23, движение–2 30
28. Серия 24, плоская 31
29. Серия 25, линейные представления 32
30. Серия 26, средняя 34
31. Серия 27, спасем свинью! 35
32. Матбой. 6 vs 7 Профи 35
33. Матбой. 7 Профи vs 8 Полупрофи 36
34. Матбой. 7 Профи vs 8 Профи 37
35. Серия 28, 2Пик 38
36. Серия 29, КТО это начал? 40
37. Серия 30, за клетчатой решеткой 41
38. Серия 31, построенная 42
39. Серия 32, КТО это закончит? 43
40. Серия 33, количество информации 43
41. Серия 34, построения–2 44
42. Серия 35, кооперативная 45

1. Вступительное занятие *4 июля*

Добро пожаловать в ЛМШ!

Алиса и Боб нашли клад, состоящий из нескольких монет, возможно, разного достоинства. Они решили поделить его следующим способом. Сначала Боб выкладывает все монеты в ряд в том порядке, который ему по душе. Затем Алиса и Боб (Алиса первая) берут себе по одной монете из этого ряда, при этом каждый раз можно брать только одну из двух крайних монет: либо первую, либо последнюю. И Алиса, и Боб желают получить как можно большую сумму денег.

1. Пусть всего 101 монета. Докажите, что Боб может заполучить любые 50 из них. Что это означает?

Дальше будет идти речь только про случай с четным количеством монет.

2. Пусть клад состоит всего из 4 монет разного достоинства. Могут ли номиналы монет быть таковы, что Боб сможет получить не меньше Алисы вне зависимости от ее действий?

3. Докажите, что Алиса всегда может, вне зависимости от действий Боба, заполучить понравившуюся ей монету.

4. Пусть Алиса на каждом шаге забирает из двух крайних монеток ту, что больше. Верно ли, что так она получит наибольшую возможную сумму?

5. Докажите, что Алиса всегда может, вне зависимости от действий Боба, получить не меньше Боба.

6. Пусть есть монеты пяти разных номиналов и каждого номинала одинаковое количество. Кто наберет больше и на сколько при наилучших действиях сторон?

7. Пусть при некоторых номиналах монет при правильных действиях сторон Алиса получает больше на a рублей. Теперь они нашли клад, в котором номинал каждой монетки на c рублей больше. Кто наберет больше и на сколько после дележа нового клада?

2. Вступительная добавочка *4 июля*

8. Пусть при некоторых номиналах монет при правильных действиях сторон Алиса получает больше на a рублей. Они вновь нашли такой же клад, но правила игры изменились: теперь каждый игрок берет монетку не себе, а отдает сопернику. Кто получит больше и на сколько после такого дележа клада?

9. Пусть клад состоит из шести монет стоимостью 1, 2, 11, 13, 101, 104. Как действовать Бобу, чтобы гарантированно получить денег не меньше, чем Алиса?

10. Пусть все монеты либо бронзовые, либо медные, монет каждого вида одинаковое количество, суммарная стоимость бронзовых не больше, чем суммарная стоимость медных. Докажите, что Боб может получить не меньше, чем суммарная стоимость бронзовых монет. Что это означает для общей задачи?

3. Вступительная олимпиада *4 июля*

1. Есть коробка с красными, синими, белыми и зелеными шариками. Известно, что красных шариков в 4 раза меньше, чем синих, белых и зеленых вместе взятых. Кроме того, синих шариков в 6 раз меньше, чем красных, белых и зеленых шариков вместе взятых. Докажите, что общее количество шариков делится на 35.

2. Сравните числа $(20^2)!$ и $(20!)^2$. (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

3. Таблица 4×4 заполнена числами. Петя переставил её столбцы так, что никакой столбец не остался на месте. В получившейся таблице Вася переставил строки так, что никакая строка не осталась на месте. В итоге получилась исходная таблица. Каково наибольшее возможное количество различных чисел в ней?

4. На диагонали BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка E. Известно, что $AB = CE$, $\angle ABD = \angle BCE = \angle ECD$ и $\angle DAB = \angle ABC$. Докажите, что треугольник BCD равнобедренный.

5. В коробке лежат карандаши 100 цветов. Известно, что если не глядя взять 100 карандашей, то среди них обязательно найдутся карандаши 7 разных цветов. Какое наибольшее количество карандашей могло быть в коробке?

6. Двое ходят по очереди на доске 8×8, каждый своим ферзём. Вначале ферзи стоят на полях c1 и c8, а все остальные поля заполнены пешками. Каждым ходом ферзь должен что-нибудь съесть — пешку или ферзя противника (ферзь ходит по вертикали, горизонтали, диагонали на любое расстояние, но через занятые поля не перепрыгивает). Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто из игроков может выиграть независимо от игры другого?

4. Серия 1, трудности перевода *5 июля*

Рәхим итегез!

1. В ряд стоят m мальчиков и d девочек в каком-то порядке. Каждого мальчика спросили, сколько справа от него стоит девочек, а каждую девочку — сколько слева от нее стоит мальчиков. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.

2. На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.

3. В ряд стоят m мальчиков и d девочек в каком-то порядке. Каждого ребенка спросили, сколько слева от него стоит детей другого пола. Чему равна сумма чисел, названных детьми?

4. В клетчатом квадрате 10×10, вначале пустом, Жанна закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку количество граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток. Чему будет равна сумма все чисел в квадрате, когда будут закрашены все клетки?

5. Тридцать четыре ребенка — двадцать четыре мальчика и десять девочек — встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка — сколько детей стоит слева от нее. Пусть в сумме у мальчиков получилось M, а у девочек — D. Найдите, чему может равняться $M - D$.

6. В куче 1001 камень. Ее произвольно делят на две кучи, подсчитывают количества камней в них и записывают произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделывают ту же операцию: делят на две и записывают произведение количеств камней в двух вновь образованных кучах. Затем ту же операцию повторяем с одной из трех полученных куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равна сумма 1000 записанных произведений?

7. Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень. Сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается. Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. Если Сизиф не может расплатиться, то Зевс позволяет ему перетаскивать в долг. В некоторый момент оказалось, что в каждой куче содержится то же число камней, что и изначально. Каков наибольший возможный заработок Сизифа на этот момент?

8. Есть много одинаковых единичных бумажных квадратов, в которых проведены обе диагонали. Квадратами оклеили куб $100 \times 100 \times 100$ без щелей и наложений (при этом, возможно, перегибая квадраты через рёбра и располагая косо). Жучка посадили в одну из вершин куба и разрешили ползать только по диагоналям квадратов. Докажите, что он может добраться в какую-то другую вершину куба.

5. Серия 2, геометрические неравенства *5 июля*

Упр. 1. Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ X таких, что $AX > BX > CX$.

1. Точка O — середина отрезка MK. Известно, что $AM < BM$ и $AK < BK$. Докажите, что $AO < BO$.

2. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит большая диагональ.

3. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место точек X, для которых $AX + BX = CX + DX$.

Упр. 2. В треугольнике напротив максимальной стороны угол равен $60°$. Чему равны два других угла?

4. На продолжении наибольшей стороны AB треугольника ABC отложен отрезок BD за точку B, равный стороне BC. Докажите, что угол ACD тупой.

5. Отрезки AA_1 и BB_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что

(a) $AB_1 < AB$; **(b)** $A_1B_1 < AB$.

6. Точки A', B', C' выбраны на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Известно, что $AC' = BA' = CB'$ и $\angle AC'B' = \angle BA'C' = \angle CB'A'$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

Упр. 3. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше полупериметра и меньше периметра.

7. В треугольнике ABC отмечена некая точка T. Докажите, что $AT+BT+CT$ больше полупериметра и меньше периметра треугольника ABC.

8. Докажите, что шесть ребер любого тетраэдра можно разбить на три пары (a, b), (c, d), (e, f) так, чтобы из отрезков длин $a + b$, $c + d$, $e + f$ можно было составить треугольник.

9. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$, сторона которого равна 1, отмечены точки K, L, M и N соответственно. Докажите, что периметр четырехугольника $KLMN$ **(a)** больше двух; **(b)** не меньше, чем $2\sqrt{2}$.

Упр. 4. Докажите, что медиана меньше полусуммы сторон, между которыми она заключена.

10. Сторону AB треугольника ABC разбили точками D и E на три равные части. Докажите, что $AC + BC > CD + CE$.

11. Даны n точек $A_1, \ldots, A_n$ и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку M так, что $MA_1 + \ldots + MA_n \geqslant n$.

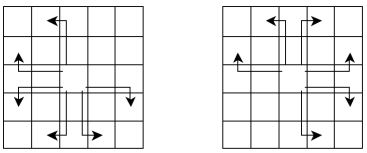
12. На круглом столе лежат 2017 правильно идущих механических часов. Докажите, что в какой-то момент времени сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок будет больше, чем сумма расстояний от центра стола до центров часов.

6. Серия 3, но разнобой–1

5 июля

1. 15 команд играют турнир в один круг. Докажите, что в некотором матче встретятся команды, сыгравшие перед этим в сумме нечетное число матчей.

2. Двум коням запретили ходы по двум направлениям из восьми, оставив каждому по шесть разрешённых (см. рис.). Коней выставили на доску. После нескольких ходов кони поменялись местами, ещё после нескольких они снова поменялись местами. Докажите, что после какого-то хода кони были на одной диагонали.



3. По окружности расставлены 9 натуральных чисел a, b, c, $\ldots$, i. Все числа $a + b^c$, $b + c^d$, $\ldots$, $i + a^b$ — простые. Какое наибольшее количество различных чисел среди a, b, c, $\ldots$, i может быть?

4. Комплект для игры в лото содержит 90 бочонков, пронумерованных числами от 1 до 90. Бочонки каким-то образом разложены по нескольким мешкам (в каждом мешке больше одного бочонка). Назовём мешок хорошим, если номер одного из бочонков в нём равен произведению номеров остальных бочонков того же мешка. Каково наибольшее возможное количество хороших мешков?

5. У каждого депутата в парламенте не более трёх врагов (вражда обоюдна). Парламент разбит на 2 палаты. Каждый день один из депутатов, обнаружив в своей палате не менее двух врагов, переходит в другую палату. Докажите, что рано или поздно переходы прекратятся.

6. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них лежит один или несколько шариков. Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик на предыдущем ходу. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

7. Десять гномов вместе выпивают ведро молока за минуту. Каждый гном пьет молоко с некоторой постоянной скоростью, но скорости у разных гномов могут быть разные. Докажите, что если разлить молоко поровну в 10 бутылок, то гномы тоже смогут управиться с ним за минуту. (Из каждой бутылки в каждый момент может пить только один гном, но разрешается любое число раз обмениваться бутылками, обмен происходит мгновенно. Гномы пьют каждый со своей скоростью).

8. Написано $2^{n+1} - 1$ натуральных чисел. Докажите, что можно выбрать ровно 2^n из них так, чтобы сумма выбранных чисел делилась на 2^n.

9. Дан прямоугольник $ABCD$, точка M — середина стороны CD, точка H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую AM. Докажите, что треугольник BCH — равнобедренный.

10. Петя и Вася по очереди ставят ладьи на крайние клетки доски размером 9×9 так, чтобы каждая выставленная ладья оказалась под боем чётного количества ладей, начинает Петя. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

7. Серия 4, разлагай(ся)

6 июля

Упр. 1. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$.

1. Два натуральных числа a и b друг на друга не делятся, при этом их $\text{НОД}(a, b) = 50$, а $\text{НОК}(a, b) = 1000$. Найдите эти числа.

2. Можно ли расставить по кругу 333 различных натуральных числа так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

3. Докажите равенство $abc = \text{НОК}(a, b, c) \cdot \text{НОД}(ab, ac, bc)$.

4. Существуют ли такие 16 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел?

5. Докажите, что уравнение $a! \cdot b! = c!$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах, больших 10.

6. Можно ли вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 56!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

7. Про натуральные числа a, b, c известно, что ab делится на $2c$, bc делится на $3a$, а ac делится на $5b$. Найдите наименьшее возможное значение их произведения abc.

8. В произведении $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ разрешается приписать некоторым сомножителям восклицательный знак (при этом сомножитель k заменяется на $k!$). При каких n в результате можно получить точный квадрат?

9. Докажите, что в вершинах любого графа можно расставить натуральные числа так, чтобы любые два числа, соединенные ребром, имели $\text{НОД} > 1$, а числа, не соединенные ребром, были взаимно просты.

10. Дана возрастающая арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Известно, что у каждого числа ровно два различных простых делителя, причём для всех членов прогрессии эта пара одна и та же. Каково наибольшее возможное количество членов в такой прогрессии?

8. Серия 5, движение

6 июля

Упр. 1. Пароход и плот вышли одновременно из Нижнего Новгорода вниз по Волге. Пароход дошел до Астрахани за 5 суток и сразу же поплыл обратно. Через сколько суток он встретит плот?

1. Пловец плыл против течения и под мостом потерял мяч. Через 20 минут он заметил это, развернулся и, плывя с той же скоростью, догнал мяч в 2 км от моста. Найдите скорость течения.

2. Колонна спортсменов длиной 50 м бежит по дороге со скоростью 20 км/ч, а навстречу им идет тренер со скоростью 5 км/ч. Добежав до тренера, спортсмен разворачивается и бежит назад с той же скоростью. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

3. Из одного пункта по одному шоссе выезжают одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними выезжает третий (скорости автомобилей постоянны). Ещё через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в полтора раза, а между третьим и вторым — в два раза. Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго, если третий автомобиль не обгонял первые два?

4. Павел Сергеевич, идя домой вверх вдоль ручья со скоростью, в полтора раза большей скорости течения, по рассеянности бросил в ручей шляпу. Вскоре он заметил ошибку, бросил в ручей палку и побежал назад со скоростью вдвое большей, чем шёл вперед. Догнав плывущую шляпу, он схватил её, повернулся и пошёл вверх с первоначальной скоростью. Через 10 минут после этого он встретил плывущую по ручью палку. На сколько раньше он пришёл бы домой, если бы не заметил ошибку?

5. Из пункта А в пункт В в 7:00 вышел пешеход, а через некоторое время из В в А выехал всадник. Пешеход пришел в В через 10 часов после выезда оттуда всадника. Всадник приехал в А в 12:00 того же дня. Скорости пешехода и всадника постоянны. Какую долю пути из А в В прошел пешеход до его встречи со всадником?

6. Одновременно из деревень А и Б навстречу друг другу вышли Аня и Боря (их скорости постоянны, но не обязательно одинаковы). Если бы Аня вышла на 30 минут раньше, то они встретились бы на 2 км ближе к деревне Б. Если бы Боря вышел на 30 минут раньше, то встреча состоялась бы ближе к деревне А. На сколько?

7. Три бегуна стартовали одновременно и бегут каждый со своей постоянной скоростью. Вслед им выехал через некоторое время тренер на мотороллере, догнал переднего бегуна, развернулся, доехал до заднего бегуна, развернулся и еще раз догнал переднего бегуна. Таким образом, тренер трижды проезжал

мимо среднего бегуна, и по 2 раза был возле остальных бегунов. Скорость мотороллера была постоянной. Известно, что в первый раз время тренера на езду от среднего бегуна до переднего равно времени от разворота возле заднего бегуна до обгона среднего. Докажите, что тренер обгонял (встречал) среднего бегуна через равные промежутки времени.

8. По шоссе в одну сторону движутся пешеход и велосипедист, в другую сторону — телега и машина. Все участники движутся с постоянными скоростями (каждый со своей). Велосипедист сначала обогнал пешехода, потом через некоторое время встретил телегу, а потом еще через такое же время встретил машину. Машина сначала встретила велосипедиста, потом через некоторое время встретила пешехода, и потом еще через такое же время обогнала телегу. Велосипедист обогнал пешехода в 10 часов, а пешеход встретил машину в 11 часов. Когда пешеход встретил телегу?

9. Велосипедист путешествует по кольцевой дороге, двигаясь в одном направлении. Каждый день он проезжает 71 км и останавливается ночевать на обочине. На дороге есть аномальная зона длины 71 км. Если велосипедист останавливается в ней на ночлег на расстоянии y км от одной границы зоны, просыпается он в противоположном месте зоны, на расстоянии y км от другой ее границы. Докажите, что в каком бы месте велосипедист ни начал свое путешествие, рано или поздно он остановится в нем на ночлег.

9. Серия 6, разнобой–2

6 июля

1. По кругу расставлено $2n$ целых чисел, любые два соседних числа отличаются не более, чем на 1. Между каждыми двумя соседними числами написали их среднее арифметическое. Докажите, что среди $4n$ чисел найдутся два равных противоположных.

2. В пещере лежали в ряд 100 мешков массами 1 кг и 2 кг. В некоторых разбойники хранили золото, в остальных — серебро. Рядом с каждым двухкилограммовым мешком лежали два мешка с серебром, а рядом с каждым килограммовым — хотя бы один мешок с серебром. Али-Баба унёс из пещеры всё золото. Какое наибольшее количество золота ему могло достаться?

3. В год выборов на (в) стране У. все города подняли над ратушами флаги — синие либо оранжевые. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км. Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.

4. Купившему головку сыра весом 3 кг магазин предлагает призовую игру. Покупатель режет головку на 4 куска, а продавец выбирает из этих кусков

один или несколько и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счет магазина добавить призовой кусок сыра, уравновешивающий чаши. Продавец старается сделать приз поменьше, а покупатель — побольше. Найдите вес призового куска при наилучших действиях сторон.

5. Имеется n разбойников, которые делят клад. Делёж производится так: разбойники встают в очередь, после чего каждый из них по очереди вносит свое предложение, как стоит поделить клад. Если за предложение проголосует хотя бы половина всех (живых) разбойников, то предложение принимается. Если нет, то того, кто предлагал, убивают. Каждый разбойник руководствуется двумя правилами жизни:

Правило 1-е. Получить как можно больше!

Правило 2-е. Если в каких-то ситуациях получается одинаковое количество добычи, выбрать тот вариант, при котором останется в живых большее число разбойников.

Как будет поделен клад?

6. AD — биссектриса треугольника ABC, DE — биссектриса треугольника ADC. Оказалось, что $CD = AB$, $AD = CE$. Докажите, что $\angle CDA < 120°$.

7. В треугольнике ABC высота CH равна половине AB, а $\angle A = 75°$. Найдите $\angle B$.

8. Есть 20 неокрашенных кубиков. Каждым ходом Петя выбирает цвет (красный или синий), а Вася красит в этот цвет одну из ещё не окрашенных граней на любом кубике. Игра заканчивается, когда все кубики полностью покрашены. Петя получает от Васи столько рублей, сколько сможет выбрать по-разному окрашенных кубиков. Какое наибольшее число рублей он может наверняка получить, как бы ни играл Вася?

9. Квадратная таблица 100×100 заполняется числами 1 и 2. Сколько существует различных расстановок, в которых сумма в каждой строке и в каждом столбце нечетна?

10. По кругу очень быстро вращаются 4 бочонка. В каждом из них селедка, повернутая головой вверх или головой вниз. Ян Арнольдович может за ход засунуть руки в два бочонка, пощупать, как в них лежит селедка, и, если захочет, перевернуть селедку в одном или обоих этих бочонках. После этого круг продолжает вращаться, и Ян Арнольдович уже не успевает уследить, в какие бочонки он только что совал свои руки. Если в какой-то момент селедка во всех бочонках будет смотреть в одну сторону (все вниз или все вверх), то Ян Арнольдович попадет в профи. Как Яну Арнольдовичу попасть в профи?

10. Серия 7, увидеть граф и умереть *7 июля*

1. Из спичек сложена шахматная доска 8×8, сторона каждой клетки равна длине спички. Жук хочет, чтобы с любой клетки можно было дойти до любой другой, не переползая через спички и не выползая за пределы доски. Какое наименьшее число спичек придется для этого убрать,

(a) если граничные спички убирать нельзя?

(b) если граничные спички можно, и жук может выползать за пределы доски (но жук хочет только иметь возможность посещать все 64 клетки)?

2. Нарисован выпуклый многоугольник, разбитый непересекающимися диагоналями на треугольники. Можно ли стороны и диагонали раскрасить в жёлтый и красный цвета так, чтобы жук мог проползти из каждой вершины в любую другую по жёлтым отрезкам, а клоп — по красным?

3. Имеется 10 различных гирь. За одно взвешивание на чашечных весах можно сравнить две гири. За какое наименьшее количество взвешиваний можно определить одну из двух самых легких гирь?

4. План замка — многоугольник, разделенный на 10 одинаковых комнат в форме правильного треугольника со стороной 1 (из каждой комнаты можно попасть в любую другую). Каков наибольший возможный периметр замка?

5. Куб со стороной $n \geqslant 3$ разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

6. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется хорошей, если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?

7. В каждую из n одинаковых пробирок налито не более половины пробирки раствора разной концентрации. Химик знает, где что, и может перелить из одной пробирки в другую любое нужное ему количество раствора (лишь бы пробирка не переполнилась). За какое наименьшее число переливаний он гарантированно может добиться, чтобы раствор в каждой пробирке был одинаковой концентрации (при этом некоторые пробирки, возможно, опустеют)?

8. В классе 30 школьников. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурили двое. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

11. Серия 8, ГМТ

7 июля

Определение 1. *Геометрическое место точек (ГМТ)*, обладающих данным свойством — это множество, состоящее из тех и только тех точек, которые обладают данным свойством.

1. **(a)** Докажите, что ГМТ, равноудаленных от сторон данного угла и лежащих внутри данного угла, есть биссектриса данного угла.

(b) Докажите, что биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка называется *центром вписанной окружности.*

2. Найдите ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

3. **(a)** Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ M, лежащих внутри треугольника ABC таких, что $S_{AMB} = S_{AMC}$.

(b) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

(c) А если M из пункта **(a)** лежит вне треугольника?

4. В четырёхугольнике $ABCD$ $BC = AD$. M — середина AD, N — середина BC. Серединные перпендикуляры к AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN.

5. Докажите, что у любого треугольника есть три вневписанных окружности.

6. Найдите ГМТ середин хорд длины d в данной окружности.

7. Дан треугольник ABC. Внутри него взяли точку M и соединили ее с вершинами. Получилось три треугольника. Найдите ГМТ M, для которых сумма площадей двух из этих треугольников будет равна площади третьего.

8. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и высота BH. Оказалось, что серединный перпендикуляр к отрезку LH пересекает сторону AB в её середине. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

9. Из точек A и B, лежащих на разных сторонах угла, восставлены перпендикуляры к сторонам, пересекающие биссектрису угла в точках C и D. Докажите, что середина отрезка CD равноудалена от точек A и B.

10. AD и BE — биссектрисы треугольника ABC. Оказалось, что DE — биссектриса угла ADC. Найдите угол A.

11. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.

12. Стороны AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ площади S не параллельны. Найдите геометрическое место точек X, лежащих внутри четырёхугольника, для которых $S(ABX) + S(CDX) = S/2$.

12. Серия 9, разнобой–3

7 июля

1. По прямой в одном направлении на некотором расстоянии друг от друга движутся 5 одинаковых шариков, а навстречу им движутся 5 других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдет между шариками?

2. Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число $N > 1$ написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1. При любом ли натуральном $N > 1$ Саша сможет написать на доске в какой-то момент число 2017? Сообщаем, что число 0 ненатурально.

3. В фирме 1111 сотрудников, каждый из которых обязан отработать в году подряд 7 дней на уборке территории (а больше работать, конечно же, не будет). Докажите, что в году существовало как минимум 7 дней, когда на уборке территории работало нечетное число сотрудников.

4. За круглым столом сидит 1000 представителей нескольких стран. Известно, что любые 500 подряд сидящих человек представляют не более 250 стран. Какое наибольшее число стран может быть представлено? Разумеется, один человек представляет одну страну.

5. Существуют ли натуральные a и b, для которых выполнено равенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{31}$?

13. Серия 10, вокруг остатки

9 июля

1. Кузнечик прыгает по вершинами правильного 100-угольника. За один ход он может сместиться на 7 вершин по часовой стрелке или против часовой стрелки. За какое наименьшее количество прыжков он сможет попасть в вершину, отстоящую на три от начальной?

2. Даны натуральные n и $k < n - 1$. Имеются красные и синие бусинки. Составляется круговое ожерелье из n бусинок. Оно называется *счастливым*, если в нем нет двух красных бусинок, между которыми ровно $k - 1$ бусинок. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть в счастливом ожерелье? **(a)** $n = 15$, $k = 6$; **(b)** $n = 19$, $k = 4$; **(c)** общий случай.

3. По кругу расположены 16 луночек, одна из которых отмечена. Петя и Вася играют в следующую игру. В начале игры Вася кладет шарик в одну из луночек. Далее за каждый ход Петя называет натуральные число k (числа k

могут отличаться на разных ходах), а Вася перемещает шарик из луночки, в которой он находится, на k луночек по часовой либо против часовой стрелки на свой выбор. Сможет ли Петя играть так, чтобы через несколько ходов шарик гарантированно попал в отмеченную луночку?

4. Окружность разделена точками на n равных дуг (длину одной дуги примем за 1). Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает последовательно $n-1$ прыжков: на 1, на 2, ..., на $n-1$ по часовой стрелке. При каких n кузнечик посетит все отмеченные точки?

5. Двенадцать собеседников совещались за круглым столом. После перерыва они вновь сели за этот стол, но в другом порядке. Верно ли, что найдутся два собеседника, сидящие на одинаковом расстоянии (считая по дуге по часовой стрелке) до того места, где они сидели в первый раз?

6. Двадцать девять собеседников совещались за круглым столом. После перерыва они вновь сели за этот стол, но в другом порядке. Верно ли, что найдутся два таких собеседника, что между ними (считая от первого ко второму по часовой стрелке) во второй раз окажется столько же собеседников, что и в первый раз?

7. На доске нарисован правильный 1001-угольник, вершины которого занумерованы числами 1, 2, ..., 1001. Из картона вырезали такой же правильный 1001-угольник. Докажите, что в вершинах картонного 1001-угольника можно поставить числа 1, ..., 1001 (каждое число — по одному разу) так, чтобы при любом наложении 1001-угольников в какой-то вершине оказались равные числа (картонный многоугольник можно переворачивать).

8. Петя как-то занумеровал вершины правильного

(a) 1001-угольника числами от 1 до 1001;

(b) 2017-угольника числами от 1 до 2017.

Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины A в вершину B, если между ними не больше 9 других вершин и число в B больше числа в A. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины?

14. Серия 11, обратно в геометрию *09 июля*

1. Через вершины A и B треугольника ABC проведены две прямые, которые разбивают его на четыре фигуры (три треугольника и один четырёхугольник). Известно, что три из этих фигур имеют одинаковую площадь. Докажите, что одна из этих фигур — четырёхугольник.

2. Внутри квадрата $ABCD$ дана точка O, причем $\angle OAB = \angle OBA = 15°$. Докажите, что треугольник OCD — равносторонний.

3. В треугольнике ABC проведены высоты AM и CN. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN делит сторону AC пополам.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AB, а N — точка пересечения биссектрисы угла ABC со стороной CD. Докажите, что отрезки CM и BN перпендикулярны тогда и только тогда, когда прямая AN является биссектрисой угла DAB.

Упр. 1. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что $S(ABO) = S(CDO)$ тогда и только тогда, когда $AD \parallel BC$.

5. Пусть $ABCD$ трапеция, M и N — середины сторон AD и BC соответственно, O — точка пересечения диагоналей, P — точка пересечения лучей AB и DC.

(a) Докажите, что P, M и N лежат на одной прямой.

(b) Докажите, что P, M, N и O лежат на одной прямой.

6. Пусть $ABCD$ выпуклый четырехугольник, M и N — середины сторон AD и BC соответственно, O — точка пересечения диагоналей, P — точка пересечения лучей AB и DC. Известно, что

(a) P, M и N лежат на одной прямой;

(b) P, M и O лежат на одной прямой;

(c) P, N и O лежат на одной прямой;

(d) N, M и O лежат на одной прямой;

Докажите, что $AD \parallel BC$.

7. На стороне BC квадрата $ABCD$ во внешнюю сторону построен равнобедренный треугольник BEC с основанием BC. Угол $\angle EAD = 75°$. Найдите $\angle BEC$.

8. В треугольнике ABC проведена медиана BD, а на продолжении стороны BC за точку B отмечена точка F. Прямая FD пересекает сторону AB в точке E, причем площади треугольников FBE и AED оказались равными. Докажите, что равны площади треугольников FEC и AEC.

9. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек — обозначим их A, B и C, после чего на плоскости отмечалась точка D, симметричная A относительно серединного перпендикуляра к BC. Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой.

10. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пешеход Петя выходит из вершины A, идёт по стороне AB и далее по контуру четырёхугольника. Пешеход Вася выходит из вершины A одновременно с Петей, идёт по диагонали AC и

одновременно с Петей приходит в C. Пешеход Толя выходит из вершины B в тот момент, когда её проходит Петя, идёт по диагонали BD и одновременно с Петей приходит в D. Скорости пешеходов постоянны. Могли ли Вася и Толя прийти в точку пересечения диагоналей O одновременно?

15. Серия 12, вокруг графы *10 июля*

1. Мышка грызет куб сыра $3 \times 3 \times 3$, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб кроме центрального кубика?

2. На доске 9×9 угловые клетки черные. Какое наибольшее количество клеток может посетить хромой чернопольный слон, если нельзя проходить через одну клетку дважды?

3. Шахматный король обошёл всю доску 8×8, побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов.

4. На шахматной доске стоят ферзь, две ладьи и два коня так, что каждая фигура бьет ровно одну фигуру и побита ровно одной фигурой. Докажите, что ферзь бьет ладью по диагонали.

5. На клетчатой доске 5×5 расставили максимальное число шахматных коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка единственная.

6. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

7. На шахматной доске 8×8 стоят черная и белая хромые ладьи. За один ход можно сделать ход одной из ладей. Можно ли делать ходы таким образом, чтобы все возможные позиции на доске встретились ровно по разу?

8. Какое наибольшее число коней, каждый из которых бьет ровно одного другого, можно расставить на доске 8×8?

9. Сколькими способами на доске 100×100 можно расставить максимальное количество попарно не бьющих друг друга коней?

10. Кузнечик умеет прыгать по клетчатой полоске шириной в 1 клетку на 8, 9 или 10 клеток в любую сторону. (Прыжок на k клеток означает, что между начальным и конечным положениями прыжка находятся $k - 1$ клеток.) Будем называть натуральное число n пропрыгиваемым, если кузнечик может, начав с

некоторой клетки, обойти полоску длины n, побывав на каждой клетке ровно один раз. Докажите, что 62 — непропрыгиваемое.

16. Серия 13, алгоритмы вслепую *10 июля*

1. **(a)** Аня и Боря играют в игру. Аня загадывает 1 или 2. Своим ходом Боря называет любое число. Если оно совпадает с числом Ани, то Боря победил. Если же нет, то Аня прибавляет к своему числу 10, возводит в сотую степень и умножает на 1729. Как Боре победить?

(b) А если Аня загадывает 1, 2 или 3?

(c) А если Аня загадывает натуральное число от 1 до 10?

2. В одном из расположенных в ряд 100 окопов спрятался вражеский робот. В каком — неизвестно. Ваша задача — уничтожить робота. У вас есть пушка, которую можно навести на любой окоп и произвести выстрел. Если робот находился в этом окопе, задача выполнена. Если же робот был в другом окопе, то он, пока дым от выстрела не рассеялся, незаметно от нас обязательно перебегает в один из соседних окопов. Можно ли выполнить боевую задачу?

(a) Сначала решите задачу, если известно, что в начале робот прячется в окопе с нечетным номером.

(b) Решите исходную задачу.

3. Ёжик стоит в левой нижней клетке поля 8×8. А в какой-то другой клетке пасётся Лошадка. На поле стоит туман, ничего не видно, но Ёжику надо найти Лошадку. Лошадка каждую минуту переходит на соседнюю по стороне клетку и говорит, куда она перешла (влево, вправо, вверх или вниз). Ёжик тоже может сделать шаг в одну из соседних по стороне или диагонали клеток, как только услышит Лошадку. Ёжик найдёт Лошадку, если окажется с ней на одной клетке. Что же делать Ёжику?

4. Назовем лабиринтом шахматную доску 8×8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Петя пишет программу — конечную последовательность указанных команд, и дает ее Васе, после чего Вася выбирает лабиринт и помещает в него ладью на любое поле. Докажите, что Петя может написать такую программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе Васи.

5. В городе М. вдоль дороги стоит **(a)** 99; **(b)** 100 пронумерованных подряд столбов, как-то покрашенных в три цвета. Мэр С. столбов не видит. Он может назвать пару номеров, и если столбы разного цвета, их перекрасят в третий цвет,

а если одинакового — то так и оставляют. В любом случае мэру С., конечно, ничего не докладывают. Если в какой-то момент все столбы станут одного цвета, президент П. наградит мэра С. Сможет ли мэр С. гарантированно получить награду?

6. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуксу. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока он не скажет «стоп».

(a) Может ли Фукс добиться того, чтобы после «стопа» каждая карта наверняка оказалась не там, где была вначале?

(b) Может ли Фукс добиться того, чтобы после «стопа» рядом со свободным местом наверняка не было туза пик?

7. Состав из конечного числа одинаковых вагонов замкнут в кольцо. Вас с куском мела поместили в один из вагонов. Вы можете свободно ходить по составу и делать любые пометки на стенах вагонов. В любой момент Вы можете сказать, сколько вагонов в поезде. Если угадаете, то Вас выпустят. Учтите, однако, что до Вас уже многие пытались пройти это испытание. Возможно, они оставляли на стенах какие-то пометки. Опишите алгоритм, который точно поможет спастись.

17. Серия 14, порядочная *10 июля*

1. Есть 100 камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение: «Любые пять камней вместе тяжелее любых трех»?

2. На столе лежат несколько яблок, самое большое весит b граммов. Два школьника по очереди съедают по яблоку, пока не съедят всё. Докажите, что при наилучших действиях первый школьник сможет объесть второго не более, чем на b граммов.

3. На недавней дискотеке n юношей танцевали с n девушками. В каждой паре юноша был выше девушки, но не более, чем на 10 см. Докажите, что если поставить танцевать самого высокого юношу с самой высокой девушкой, второго по росту — со второй, и т. д., то по прежнему в каждой паре юноша будет выше девушки и опять же не более, чем на 10 см.

4. В ряд стоят 30 детей. Массы любых двух соседних детей отличаются не более, чем на 10 кг. Докажите, что если упорядочить детей по убыванию массы, то массы любых двух соседних снова будут отличаться не более, чем на 10 кг.

5. В ряд стоят 30 детей. Массы любых двух соседних детей отличаются не более, чем на 10 кг. Во время учебной пожарной тревоги преподавателю нужно построить детей парами в ряд так, чтобы массы любых двух полученных соседних пар тоже отличались не более, чем на 10 кг. Докажите, что преподаватель сможет это сделать.

6. Есть 15 баков разного веса с компотом. Докажите, что можно разлить один бак на два новых так, чтобы полученные 16 баков можно было раздать двум параллелям, и при этом каждая параллель получила бы поровну баков и поровну компота.

7. Есть 100 попарно различных чисел. Всегда ли их можно расставить в вершинах и серединах сторон 50-угольника так, чтобы суммы чисел на каждой стороне также были попарно различны?

8. В куче лежит 100 палочек длин 1, 2, ..., 100. Петя и Вася по очереди берут из кучи по три палочки и складывают из них треугольники, начинает Петя. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

9. В ряд лежат 30 апельсинов, веса соседних отличаются не более чем на 10 г. Докажите, что их можно разложить по три штуки в пакет и положить пакеты в ряд так, чтобы веса каждых двух соседних пакетов отличались не более чем на 10 г.

18. Серия 15, вокруг остатки–2 *11 июля*

1. Даны натуральные n и k. На фирме работают n сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым k сотрудникам. Сможет ли он наверняка сделать все зарплаты равными?

(a) $n = 10$, $k = 5$; **(b)** $n = 10$; $k = 7$, **(c)** любые n и $k < n$.

2. Дан прямоугольный бильярд $p \times q$, где p и q — целые числа. В вершинах его расположены лунки. От борта на расстоянии 1 от лунки выпустили шар под углом 45° к борту. При каких p и q шар попадет в лузу?

3. **(a)** Докажите, что из любых n чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на n.

(b) Дано множество K из $k \leqslant n$ чисел, взаимно простых с n. Докажите, что существуют k подмножеств K, суммы элементов в которых дают различные остатки от деления на n.

(c) Даны n целых чисел, взаимно простых с n. Докажите, что для любого $t \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ можно выбрать несколько из данных чисел, сумма которых дает остаток t при делении на n.

4. Петя расставил числа от 1 до 2000 в ряд. Вася выписал 2000 сумм нескольких первых чисел (одного, первых двух, первых трех, ..., всех 2000). Докажите, что среди остатков от деления Васиных сумм на 2001 найдется хотя бы 44 различных.

5. Дано множество $\{0, 1, 2, \ldots, 99\}$. 41-элементное подмножество этого множества называется *удачным*, если сумма всех элементов делится на 100. Найдите количество удачных подмножеств.

19. Серия 16, четвертый признак *11 июля*

Равны ли треугольники по двум сторонам и углу **не** *между ними?*

Упр. 1. Четвёртый признак равенства треугольников. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Тогда либо $\angle BCA = \angle B'C'A'$ (и треугольники равны), либо $\angle BCA + \angle B'C'A' = 180°$.

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) провели биссектрису AD. На стороне AB нашлась точка E такая, что $CD = DE = EB$. Найдите углы треугольника.

2. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что $IB_1 = IA_1$. Докажите, что либо $CB = CA$, либо $\angle ACB = 60°$.

3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята такая точка P, что $AP = AB$. На стороне AB взята такая точка Q, что $PQ = PB$. Докажите, что $AQ = CP$.

4. На биссектрисе BD треугольника ABC взята точка P, для которой выполнено $2\angle PCB = 3\angle PCA$. Прямая PC пересекает сторону AB в точке E. Оказалось, что $PC = CD = DE$. Найдите углы треугольника ABC.

5. Угол A треугольника ABC равен $120°$. Докажите, что из отрезков с длинами AC, BC и $AB + AC$ можно сложить треугольник с углом $60°$.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD выбраны точки K и M соответственно. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD.

7. На стороне AB равностороннего треугольника ABC выбрана точка D. Нашлась точка E такая, что $DE \parallel AC$, $BE = CD$ и точки E и C лежат по разные стороны от AB. Докажите, что $AD = DE$.

20. Серия 17, граф всегда с тобой *11 июля*

1. В квадрате 9×9 выбрали k клеток и разрезали их по обеим диагоналям. При каком наибольшем k квадрат может при этом не распасться на части?

2. В ряд выписаны n различных чисел. За одну операцию разрешается поменять местами любые два числа. За какое наименьшее количество операций гарантированно удастся расположить числа по возрастанию?

3. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?

(a) $p = 10$; $q = 11$.

(b) p и q — взаимно простые числа.

4. Есть $2n$ болельщиков: n из них болеют за «Реал», а остальные n — за «Барселону». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

5. Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

21. Серия 18, раскрытие скобочек *12 июля*

Упр. 1. Сколько слагаемых будет после раскрытия скобок, но до приведения подобных в

(a) $(a + b + c + \ldots + i + j)(k + l + \ldots + y + z)$;

(b) $(a + b)^{10}$?

Упр. 2. На гранях куба записали натуральные числа. Затем в каждую вершину записали произведение чисел на трёх прилегающих к ней гранях. Сумма чисел в вершинах равна 1001. Чему равна сумма чисел на гранях?

Упр. 3. Сколько слагаемых будет после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении

(c) $(x^2 + x + 1)^{10}$?

(d) $(a + b)^n$?

(e) $(x - a)(x - b) \ldots (x - z)$?

Теорема. Бином Ньютона. Докажите, что

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

1. На какую наибольшую степень двойки делится число $10^{20} - 2^{20}$?

2. Найдите число нулей, на которое оканчивается число $11^{100} - 1$.

3. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Как выглядят формулы для количества и суммы делителей числа n?

4. Сумма цифр натурального числа n равна 100. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться 1000000?

Определение 1. Обозначим через $a^{\underline{n}}$ *убывающую степень* числа a, то есть произведение $a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)$.

5. Докажите, что

(a) $(a+b)^{\underline{2}} = a^{\underline{2}} + 2ab + b^{\underline{2}}$;

(b) $(a+b)^{\underline{3}} = a^{\underline{3}} + 3a^{\underline{2}}b + 3ab^{\underline{2}} + b^{\underline{3}}$;

(c) $(a+b)^{\underline{n}} = a^{\underline{n}} + C_n^1 a^{\underline{n-1}} b + C_n^2 a^{\underline{n-2}} b^{\underline{2}} + \ldots + C_n^{n-1} a b^{\underline{n-1}} + b^{\underline{n}}$.

6. Пусть $M = 99\ldots9^{2009}$ (2017 девяток), $N = 99\ldots9^{2009}$ (2013 девяток). Докажите, что из десятичной записи числа M можно вычеркнуть несколько цифр так, что получится десятичная запись числа N.

22. Внутренний математический бой *12 июля*

1. В турнире принимали участие несколько шахматистов, каждые двое сыграли друг с другом не более одной партии. Перед началом турнира у каждого из них был некоторый рейтинг — целое число, причём все рейтинги были различны. После окончания турнира рейтинг каждого шахматиста увеличили на количество его побед и уменьшили на количество поражений. При этом все рейтинги снова оказались различными, но шли уже в обратном порядке (т. е. первый стал последним, второй — предпоследним и т. д.). Докажите, что каждые два шахматиста сыграли партию на турнире.

2. Дана доска $m \times n$, разбитая на единичные клетки. Сначала в $(m-1)(n-1)+1$ клеток ставится по фишке. Пусть в некоторый момент на доске нашлись такие четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски, что ровно в одной из этих клеток стоит фишка; тогда эту фишку можно снять. Докажите, что хотя бы одну фишку не удастся снять с доски, проделывая только описанные операции.

3. Алфавит племени Багманов состоит из 300 букв. Десять букв слова можно одновременно заменить на следующие за ними по алфавиту, и от этого смысл

слова не меняется (следующая за последней буквой алфавита — первая). Сколько в языке племени различных по смыслу 100-буквенных слов?

4. На бесконечной шахматной доске стоят ферзь и невидимый король. Известно, что ферзь дал шах по горизонтали, и король ушел из под шаха. Докажите, что ферзь может ходить так, чтобы король наверняка еще раз попал под шах.

5. Последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ различных клеток доски $n \times n$ назовем *циклом*, если $k \geqslant 4$ и клетки a_i и a_{i+1} имеют общую сторону при всех $i = 1, 2, \ldots, k$, где $a_{k+1} = a_1$. Множество X клеток доски назовем *потрясающим*, если любой цикл содержит хотя бы одну клетку множества X.

Найдите все положительные C, для которых выполнено следующее условие: для каждого натурального $n \geqslant 2$ на доске $n \times n$ существует потрясающее множество из не более чем Cn^2 клеток.

6. В прямоугольном треугольнике ABC катет AB меньше катета AC. На стороне AC нашлась точка D такая, что $\angle ACB = \angle ABD$. Точка E — основание высоты DE треугольника BCD. Найдите углы ABC и ACB, если известно, что $AC = BD + DE$.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Внутри треугольника взята точка M такая, что $\angle ACM = 10^\circ$, $\angle MBC = 20^\circ$. Докажите, что $CM = AB$.

8. На тараканьих бегах пять тараканов выбегают друг за другом с интервалом в 1 минуту и бегут с постоянными скоростями. Через минуту после своего старта каждый последующий таракан догоняет предыдущего. Через сколько секунд после своего старта последний таракан догнал первого?

23. Серия 19, непорядочная *14 июля*

Воспоминание. В одной из предыдущих серий мы решали задачу про двух жадных детей и для доказательства делили яблоки на пары двумя способами.

1. Есть 99 свиней. Набор из 50 свиней назовём *откормленным*, если его вес больше половины общего веса свиней. Докажите, что откормленных наборов не менее 2^{49}.

2. Каждая из 100 свиней состоит из сала и мяса. Докажите, что можно так выбрать 51 свинью на шашлыки, что в них суммарно окажется не менее половины всего сала и не менее половины всего мяса.

3. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. Докажите, что

(a) найдутся по крайней мере 200 яблок одинакового веса;

(b) есть раскладка, в которой по крайней мере 3 пакета весят одинаково;

(c) есть раскладка, в которой по крайней мере 6 пакетов весят одинаково;

(d) нельзя разложить часть яблок в 10 пакетов так, чтобы в пакетах было поровну яблок, но все веса были различны;

(e) найдутся по крайней мере 350 яблок одинакового веса.

(f) При каком наибольшем k можно заведомо утверждать, что найдутся k яблок одинакового веса?

4. Есть 100 яблок. Назовем натуральное число $k < 100$ хорошим, если найдется k яблок, чей вес равен ровно половине общего веса. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел?

5. Есть n пакетов, в каждом — яблоко и груша общим весом 1 фунт. Докажите, что можно съесть по одному фрукту из каждого пакета так, чтобы общий вес оставшихся каждого наименования был не более $(n+1)/4$ фунтов.

6. Каждая из 100 свиней состоит из сала и мяса. В каждой свинье не более s кг сала и не более m кг мяса. Докажите, что можно так разбить свиней на 2 группы по 50 свиней, чтобы по суммарному весу сала группы различались не более чем на s кг, а по суммарному весу мяса они различались не более чем на m кг.

7. Каждая из 100 свиней состоит из сала, мяса и костей. Докажите, что можно так выбрать 51 свинью на шашлыки, что в них суммарно окажется не менее половины всего сала, не менее половины всего мяса и не менее половины всех костей.

24. Серия 20, алгоритм Евклида *14 июля*

Определение 1. Наибольшим общим делителем (НОД) чисел a и b называется наибольшее натуральное число d такое, что a и b делятся на d. Обозначение: $d = (a, b)$.

Упр. 1. Докажите, что а) $(a, b) = (a - b, b)$; б) $(ac, bc) = c \cdot (a, b)$.

Упр. 2. Колесо длины 19, в обод которого вбит гвоздь, достаточно долго едет по колесу длины 102. На сколько частей поделят большее колесо отметины от гвоздя?

Упр. 3. Теорема о линейном разложении НОД. Для любых целых a и b найдутся x и y такие, что $ax + by = (a, b)$.

Упр. 4. Найдите **(a)** $(99! + 100!, 101!)$; **(b)** $(\underbrace{11\ldots1}_{51}, \underbrace{11\ldots1}_{81})$.

1. На какие натуральные числа может быть сократима дробь $\frac{13n+8}{8n+5}$?

2. На прямой сидит блоха, которая может прыгать либо на 15 сантиметров влево, либо на 21 сантиметр вправо. В каких точках прямой она может побывать?

3. Найдите с помощью алгоритма Евклида линейное представление НОД чисел 37 и 11.

4. По бесконечной шахматной доске ходит (m, n)-пегас, который может за один ход сдвинуться на m клеток по горизонтали или вертикали, а затем — на n клеток в перпендикулярном направлении. При каких m и n (m, n)-пегас сможет попасть из любой клетки доски на любую другую?

5. Известно, что НОД$(m, n) = 1$. Какое наибольшее значение может принимать НОД$(m + 2017n,\ n + 2017m)$?

6. **(a)** Докажите, что если для некоторых натуральных a и b верно, что НОК$(a, a + 5) =$ НОК$(b, b + 5)$, то $a = b$.

(b) Существуют ли натуральные a, b и c, для которых выполняется равенство НОК$(a, b) =$ НОК$(a + c, b + c)$?

7. Какое наибольшее значение может иметь наибольший общий делитель чисел $n^2 + 20$ и $(n + 1)^2 + 20$ для натуральных n?

8. Пусть A и B такие два слова, что $AB = BA$ (вы же понимаете, что это значит?). Докажите, что для некоторого слова X и натуральных n и m верно $A = X^n$ и $B = X^m$.

25. Серия 21, дополнительная *14 июля*

1. На сторонах треугольника ABC внешним образом построили параллелограммы $ABKL$, $BCMN$ и $CAPQ$. Докажите, что из отрезков KN, MQ и PL можно составить треугольник.

2. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что существует выпуклый четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC, стороны которого равны AM, BM, CM, DM.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали некоторую точку P. Докажите, что $AP < BP + CP + DP$.

4. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причём $\angle AOC = 60°$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

5. Пусть K и M — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $KM \leqslant (BC + AD)/2$, причем равенство достигается, только если $BC \parallel AD$.

6. Докажите, что середины сторон правильного многоугольника образуют правильный многоугольник.

7. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC$ и $\angle ABC = 20^\circ$. Докажите, что $3AC > AB$.

8. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

9. В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина гипотенузы AC. На отрезке AB взята точка M, а на отрезке BC — точка N, причём угол MON — прямой. Докажите, что $AM^2 + CN^2 = MN^2$.

10. Внутри квадрата $ABCD$ расположен квадрат $KMXY$ (вершины идут в обоих квадратах по часовой стрелке). Докажите, что середины отрезков AK, BM, CX и DY также являются вершинами квадрата.

11. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Докажите, что $AB + AC \leqslant 2BC$.

26. Серия 22, вырезать их всех! *15 июля*

Теорема. Любой многоугольник можно разрезать на треугольники. Да и не абы как, а диагоналями! Это называется *триангуляцией* многоугольника.

1. Докажите, что любой многоугольник можно разрезать на

(a) прямоугольные треугольники;

(b) равнобедренные треугольники;

(c) тупоугольные треугольники;

(d) остроугольные треугольники.

2. Докажите, что любой многоугольник с вершинами в целых точках можно разрезать на треугольники с вершинами в целых точках, внутри и на границе которых целых точек не будет.

3. Как можно равносторонний треугольник разрезать на

(a) 8 равных треугольников;

(b) 12 равных треугольников;

(c) 3 равные трапеции;

(d) 3 равных пятиугольника?

4. На какое наименьшее число тупоугольных треугольников можно разрезать квадрат?

5. Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на равнобедренные треугольники с углом 75° при основании?

6. Выпуклый многоугольник разрезан на треугольники. Докажите, что среди этих треугольников найдется хотя бы один, на границе которого нет вершин других треугольников.

7. Можно ли какой-нибудь выпуклый многоугольник разрезать на конечное число невыпуклых четырехугольников?

27. Серия 23, движение–2 *15 июля*

1. Петя на мотороллере выезжает из Кирова в Вишкиль и, поняв, что делать ему там нечего, тут же возвращается обратно, двигаясь всё время с постоянной скоростью. Через час после выезда Петя был на расстоянии 80 км от Вишкиля, а ещё через 3 часа — в 80 км от Кирова. Чему может равняться расстояние от Кирова до Вишкиля?

2. По дороге из пункта А в пункт Б и обратно ходят пять автобусов. Они идут без остановок с постоянными (не обязательно равными) скоростями, и каждый из них, дойдя до конца маршрута, разворачивается и идёт обратно. Однажды Вася, не застав автобус в пункте А, отправился в пункт Б пешком. При этом он 20 раз встретил автобус, идущий ему навстречу. Сколько раз автобусы обгоняли Васю, если, придя в пункт Б, Вася не застал там ни одного автобуса?

3. Два пловца стартовали одновременно по соседним дорожкам в 50-метровом бассейне на дистанции 1 км. Каждый плыл со своей постоянной скоростью. Первый пловец, завершив заплыв, вышел из бассейна. Второй продолжал плыть по дистанции. Всего пловцы встретились 16 раз (когда первый нагоняет второго — это тоже встреча; момент старта встречей не считается).

(a) Сколько раз пловцы встречались у бортика?

(b) Во сколько раз первый пловец плыл быстрее второго?

4. На тараканьих бегах 20 тараканов выбегают друг за другом с интервалом в 1 минуту и бегут с постоянными скоростями. Второй догнал первого через 2 минуты после своего старта, третий второго — через 3 минуты после своего старта, ..., двадцатый девятнадцатого — через 20 минут после своего старта. Через сколько минут после своего старта двадцатый таракан догнал первого?

5. Два племянника живут в посёлках, расстояние между которыми по прямому шоссе 90 км, а дядя — ровно посередине между ними. Дядя пригласил племянников в гости. У дяди есть мотороллер, скорость которого 40 км/ч, а с пассажиром — всего 30 км/ч. Для экономии времени все стартуют одновременно: ребята выходят пешком со скоростью 5 км/ч, а дядя выезжает на мотороллере, по очереди подбирает племянников на дороге и подвозит к себе домой. Могут ли все собраться у дяди за 4 часа?

6. На черепашьих бегах черепахи выползают друг за другом с интервалом в 1 минуту и ползут с постоянными скоростями. Каждой из черепах, кроме первой, удалось догнать предыдущую, причём второй для этого понадобилось на минуту меньше, чем третьей, третьей — на минуту меньше, чем четвёртой,

и т. д. Последняя черепаха догнала первую через 5 минут после своего старта. Через сколько минут после своего старта 64-я черепаха догнала 16-ю?

7. Дорожки парка идут вдоль краев двух квадратных газонов с одной общей стороной. Вокруг газонов (каждый вокруг своего) против часовой стрелки гуляют с постоянными скоростями Ватсон и на 20% быстрее него Холмс. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий — через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз?

8. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

28. Серия 24, плоская

16 июля

Определение 1. Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы ребра не пересекались.

Определение 2. Такое изображение графа называется *плоским*.

Упр. 1. Является ли планарным граф квадрата, в котором проведены обе диагонали?

Замечание. Вообще, плоское изображение планарного графа может отличаться весьма существенно (приведите пример). Поэтому в задачах мы работаем именно с плоским изображением, а не абстрактным графом.

Самое важное, что мы уже наверняка знаем про планарные графы, это

Формула Эйлера. Докажите, что в связном плоском графе с V вершинами, E ребрами и F гранями выполнено равенство $V - E + F = 2$.

Доказывается эта формула постепенным удалением ребер, пока не получится дерево.

Упр. 2. Докажите, что для плоского графа хотя бы с двумя ребрами справедливо неравенство $2E \geqslant 3F$.

Упр. 3. Докажите, что для плоского графа хотя бы с двумя ребрами справедливо неравенство $E \leqslant 3V - 6$.

Замечание. Предыдущие два неравенства верны в том числе для несвязного графа.

Упр. 4. Докажите, что полный граф на 5 вершинах не планарен. Такой граф называется *кликой* на 5 вершинах и обозначается K_5.

Упр. 5. Докажите, что полный двудольный граф с 3 вершинами в каждой доле не планарен. Такой граф обозначается через $K_{3,3}$.

Разумеется, формулу можно обобщить для k компонент связности, тогда получится $V - E + F = k + 1$.

Сразу применим эту формулу для разбора следующей задачи:

17.1 В квадрате 9×9 выбрали k клеток и разрезали их по обеим диагоналям. При каком наибольшем k квадрат может при этом не распасться на части?

Решите следующие задачи, пользуясь формулой Эйлера.

1. Для двудольного графа неравенства $2E \geqslant 3F$ и $E \leqslant 3V - 6$ можно усилить. Сделайте это, пожалуйста.

2. 17.5 Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

3. Внутри квадрата отметили 20 точек так, что никакие три из 24 точек (отмеченных и вершин квадрата) не лежат на одной прямой. Затем некоторые точки соединили отрезками так, что квадрат разбился на треугольники. Какое количество треугольников при этом могло получиться?

4. Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники, причём так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.

5. Набор домино выложили на клетчатую плоскость так, чтобы доминошка занимала две клеточки. Цифру назовем *обворожительной*, если множество клеток, на которых она написана, связно по стороне. Какое максимальное количество обворожительных цифр может быть?

6. На плоскости отметили 6 точек так, что никакие три не лежат на одной прямой. Затем все пары точек соединили отрезками. Какое наименьшее количество точек пересечения этих отрезков могло получиться? Концы отрезков при этом не учитываются.

29. Серия 25, линейные представления *16 июля*

Упр. 1. Фома умеет печатать 7-рублевки, а Ерёма – 13-рублёвки.

(a) Может ли Фома заплатить Ерёме 100 рублей (со сдачей)?

(b) Может ли Ерёма заплатить Фоме 100 рублей (со сдачей)?

(c) В каждом случае, когда можно, какое наименьшее число купюр им придётся напечатать?

Упр. 2. Фома и Ерёма объединились. Могут ли они заплатить в магазине без сдачи

(a) 999 рублей? **(b)** 58 рублей?

(c) Какое наибольшее натуральное число рублей они не могут заплатить без сдачи?

(d) Сколькими способами они могут заплатить без сдачи 2017 рублей?

1. Даны взаимно простые m и n. Есть неограниченное число m-рублевок и n-рублевок.

(a) Докажите, что ими можно без сдачи заплатить любую целую сумму, не меньшую mn.

(b) Докажите, что наибольшее целое число рублей, которое нельзя заплатить без сдачи, равно $mn - m - n$.

2. Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить угол 53° на 53 равных части?

3. В лифте действуют две кнопки: одна позволяет подниматься на a этажей вверх, а другая позволяет спускаться на b этажей вниз (числа a и b взаимно просты). Мы говорим, что лифтом *можно пользоваться*, если с его помощью можно попасть с любого этажа на любой другой.

(a) Докажите, что существует такое N (зависящее от a и b), что в доме высотой по крайней мере в N этажей пользоваться лифтом можно.

(b) Найдите наименьшее N, для которого имеет место утверждение пункта **(a)**.

4. **(a)** Найдите наименьшее натуральное число, которое ровно двумя способами можно представить в виде $3x + 4y$, где x и y — натуральные числа.

(b) Найдите наименьшее c, при котором уравнение $7x+9y = c$ имеет ровно 6 натуральных решений.

(c) Пусть числа a и b взаимно просты. Докажите, что для того, чтобы $ax+by = c$ имело ровно n натуральных решений, значение c должно находиться между $(n-1)ab + a + b \leqslant c \leqslant (n+1)ab$.

5. Найдите, пожалуйста, наибольшее натуральное число N, для которого уравнение $99x + 100y + 101z = N$ имеет единственное решение в натуральных числах x, y и z.

6. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов, причём Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну — не членам. Оказалось, что существует **(a)** лишь один способ **(b)** ровно n способов такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера? (Предполагается, что каждому из пришедших достался хотя бы один слон.)

7. При изготовлении елочной гирлянды электрик Петров сделал на куске провода отметки, делящие его на 113 одинаковых кусков, и ушел сами знаете куда. В это время электрик Иванов разметил тот же провод на 137 одинаковых кусков и пошел туда же. В это время вернувшийся из магазина электрик Сидоров быстро разрезал провод по всем отметкам. Куски какого размера у него получились, и сколько получилось кусков каждого вида?

8. Отметим на прямой красным цветом все точки вида $81x+100y$, где x, y — натуральные, и синим цветом — остальные целые точки. Найдите на прямой такую точку, что любые симметричные относительно нее целые точки закрашены в разные цвета.

30. Серия 26, средняя *16 июля*

Упр. 1. Вспомните, что существуют следующие прекрасные объекты: **(a)** средняя линия треугольника **(b)** медиана прямоугольного треугольника.

Упр. 2. Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

1. В выпуклом четырехугольнике средняя линия образует равные углы с диагоналями. Докажите, что диагонали равны.

2. В треугольнике ABC высота AH проходит через середину медианы BM. Докажите, что в треугольнике BMC также одна из высот проходит через середину одной из медиан.

3. На стороне AB треугольника ABC отметили точки K и L так, что $KL = BC$ и $AK = LB$. Докажите, что отрезок KL виден из середины M стороны AC под прямым углом.

4. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, точка P лежит на стороне BC. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что $BO = BP$. Найдите отношение $OM : PC$.

5. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка P, что $AP = 2PB$, а на стороне AC — её середина, точка Q. Известно, что $CP = 2PQ$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

6. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCP и CDQ. Докажите, что треугольник APQ правильный.

7. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

8. Точки P и Q — середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$. Отрезки AP и AQ делят диагональ BD на 3 равные части. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

9. На медиану BM треугольника ABC опустили перпендикуляр AL и перпендикуляр DK из некоторой точки D на стороне AB (L и K — различные точки, лежащие внутри BM). Оказалось, что $BK = LM$. Докажите, что $CD = BD + AB$.

31. Серия 27, спасем свинью! *17 июля*

Сюжет. Свинья находится где-то внутри свинарника, имеющего форму n-угольника (возможно, невыпуклого). Необходимо расставить в этом свинарнике как можно меньше охранников, умеющих глядеть на все $360°$, но не сквозь стены, так, чтобы свинья всегда была на виду. Каким числом охранников можно заведомо обойтись?

1. Приведите пример свинарника, для которой не хватит $[n/3]-1$ охранников.

2. Рассмотрим триангуляцию диагоналями нашего свинарника. Получился граф, вершины которого совпадают с вершинами многоугольника, а ребра суть стороны и диагонали. Покажите, что его вершины можно окрасить в три цвета так, чтобы любые две соседние вершины были разноцветны.

3. Завершите решение задачи.

4. Докажите, что если в свинарнике найдется точка, из которой свинья видит весь свинарник целиком, то из каждой точки плоскости хотя бы одна сторона свинарника видна полностью.

5. Обозначим через F множество точек внутри свинарника, из которых свинья видит все стороны свинарника. Докажите, что это множество либо пусто, либо является внутренностью выпуклого m-угольника, причем $m \leqslant n$.

32. Матбой. 6 vs 7 Профи *17 июля*

1. 14 школьников пришли на дискотеку. Среди них была Настя. В какой-то момент она решила пойти порешать задачи и попрощалась с 10 своими друзьями. После этого она вспомнила, что попрощалась не со всеми, поэтому решила вернуться, и снова попрощалась с 10 друзьями. Так продолжалось несколько раз, пока Настя не попрощалась с каждым из друзей хотя бы по одному разу. На следующий день Настя поняла, что попрощалась с каждым из 13 друзей разное количество раз. Какое наименьшее число раз Настя могла возвращаться на дискотеку?

2. Несколько хамелеонов двух цветов — красного и синего — стоят по кругу. Каждую минуту все хамелеоны, оба соседа которых того же цвета, что и сам хамелеон, меняют свой цвет. Известно, что перекрашивания продолжались

ровно 2014 минут, после чего прекратились. Какое минимальное количество хамелеонов могло стоять в круге?

3. Турнир по волейболу назовём *транзитивным*, если в нём выполняется следующее условие: если команда A выиграла у B, а B выиграла у C, то A выиграла у C. Для какого наибольшего k в любом закончившемся однокруговом турнире с 8 командами можно выбрать k команд, образующих между собой транзитивный турнир?

4. Артур разделил некоторое натуральное число на 333 и обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Тимур разделил то же самое число на 777 и тоже обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Найдите исходное число.

5. Есть шоколадка 3333×3333 долек. Малыш и Карлсон играют в такую игру: ход состоит в том, что один из имеющихся прямоугольных кусков шоколада разламывают по границам долек на две прямоугольные части, одну из которых можно после этого сразу же съесть (а можно и не есть). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Карлсон. Кто выиграет при правильной игре?

6. Записали 5-значное число без нулей в записи и все числа, получающиеся перестановками его цифр. У каждого из них нашли остаток при делении на 11. Докажите, что есть остаток, который не встречается среди полученных ни разу.

7. Квадрат 9×9 разрезан на квадраты 2×2 и «уголки» из трех клеток. Какое наибольшее количество квадратов 2×2 могло при этом получиться?

8. *Лазерная* ладья бьет все клетки своей вертикали и горизонтали, даже через другие фигуры. Какое наибольшее количество лазерных ладей, каждая из которых бьет ровно 4 другие, может стоять на доске 99×99?

33. Матбой. 7 Профи vs 8 Полупрофи *17 июля*

1. Несколько хамелеонов двух цветов — красного и синего — стоят по кругу. Каждую минуту все хамелеоны, оба соседа которых того же цвета, что и сам хамелеон, меняют свой цвет. Известно, что перекрашивания продолжались ровно 2014 минут, после чего прекратились. Какое минимальное количество хамелеонов могло стоять в круге?

2. Докажите, что для любого натурального числа n существуют попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $a_n! = a_{n-1}!a_{n-2}! \ldots a_1!$.

3. На серединных перпендикулярах к сторонам AB и BC треугольника ABC отмечены точки E и F соответственно. Оказалось, что $AEFC$ — параллелограмм. Докажите, что отрезок AE равен радиусу описанной окружности.

4. Назовем *полосой* ширины w множество всех точек между двумя параллельными прямыми на расстоянии w, включая сами прямые. На плоскости дано конечное множество точек, любые три из которых можно покрыть полосой ширины 1. Докажите, что это множество можно покрыть полосой ширины 2.

5. *Лазерная* ладья бьет все клетки своей вертикали и горизонтали, даже через другие фигуры. Какое наибольшее количество лазерных ладей, каждая из которых бьет ровно 10 других, может стоять на доске 99×99?

6. Найдите все положительные десятичные дроби (как конечные, так и бесконечные, возможно, непериодические), которые при вычеркивании первой цифры после запятой увеличиваются ровно в 3 раза.

7. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$, а I — его точка пересечения биссектрис. На стороне AB выбрана точка M такая, что $IM \parallel AC$. На стороне BC выбрана точка K такая, что $\angle BMK = \angle IBM$. Чему равно отношение BK/BC?

8. В языке некоторого племени только две буквы: А и Б. Кроме того, сочетания Б и АБББ означают одно и то же и в любом слове их можно менять друг на друга. Есть слово, состоящее из 33 букв А и 67 букв Б, записанных в каком-то порядке. Докажите, что существует единственная циклическая перестановка букв этого слова, которую можно несколькими такими заменами привести к слову Б.

9. Мальчиков, учащихся в школе, можно разбить на 10 групп так, что в каждой группе все друг с другом знакомы. Девочек тоже можно разбить на 10 групп таким же образом. Но всех учеников нельзя разбить на 19 групп, в каждой из которых все друг с другом знакомы. Докажите, что найдется 10 девочек, каждая из которых не знакома хотя бы с 10 мальчиками.

10. Рассмотрим натуральные a, b и n, большие 1, удовлетворяющие равенству $2^n - 1 = ab$. Пусть 2^d — максимальная степень двойки, которая делит число $(a+1)(b-1)$. Докажите, что d четно.

34. Матбой. 7 Профи vs 8 Профи *17 июля*

1. Червяк называется *взрослым*, если его длина составляет 1 метр. За одну операцию можно совершить разрезание *взрослого* червяка на две (возможно, не равные) части, каждая из которых сразу становится червяком и начинает расти со скоростью 1м/час и останавливает рост, набрав один метр. За какое минимальное время можно из одного взрослого червяка получить n взрослых червяков? Разрешается проводить разрезание нескольких взрослых червяков одновременно.

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, обладающих следующим свойством: сумма всех натуральных делителей n больше $2n$, причём число $2n$ нельзя представить в виде суммы различных делителей числа n.

3. На серединных перпендикулярах к сторонам AB и BC треугольника ABC отмечены точки E и F соответственно. Оказалось, что $AEFC$ — параллелограмм. Докажите, что отрезок AE равен радиусу описанной окружности.

4. Назовем *полосой* ширины w множество всех точек между двумя параллельными прямыми на расстоянии w, включая сами прямые. На плоскости дано конечное множество точек, любые три из которых можно покрыть полосой ширины 1. Докажите, что это множество можно покрыть полосой ширины 2.

5. *Лазерная* ладья бьет все клетки своей вертикали и горизонтали, даже через другие фигуры. Какое наибольшее количество лазерных ладей, каждая из которых бьет ровно 10 других, может стоять на доске 99×99?

6. Найдите все положительные десятичные дроби (как конечные, так и бесконечные, возможно, непериодические), которые при вычеркивании первой цифры после запятой увеличиваются ровно в 3 раза.

7. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$, а I — его точка пересечения биссектрис. На стороне AB выбрана точка M такая, что $IM \parallel AC$. На стороне BC выбрана точка K такая, что $\angle BMK = \angle IBM$. Чему равно отношение BK/BC?

8. В языке некоторого племени только две буквы: А и Б. Кроме того, сочетания Б и АБББ означают одно и то же и в любом слове их можно менять друг на друга. Есть слово, состоящее из 33 букв А и 67 букв Б, записанных в каком-то порядке. Докажите, что существует единственная циклическая перестановка букв этого слова, которую можно несколькими такими заменами привести к слову Б.

9. Мальчиков, учащихся в школе, можно разбить на 10 групп так, что в каждой группе все друг с другом знакомы. Девочек тоже можно разбить на 10 групп таким же образом. Но всех учеников нельзя разбить на 19 групп, в каждой из которых все друг с другом знакомы. Докажите, что найдется 10 девочек, каждая из которых не знакома хотя бы с 10 мальчиками.

10. Рассмотрим натуральные a, b и n, большие 1, удовлетворяющие равенству $2^n - 1 = ab$. Пусть 2^d — максимальная степень двойки, которая делит число $(a+1)(b-1)$. Докажите, что d четно.

35. Серия 28, 2Пик

19 июля

Рассмотрим координатную плоскость.

Определение 1. *Узлом* или *целой точкой* клетчатой плоскости называется точка, обе координаты которой целые.

Определение 2. Многоугольник назовем *целым*, если его вершины лежат в узлах.

1. На клетчатой плоскости нарисован клетчатый прямоугольник. На его диагонали помимо ее концов ровно 4 целые точки. Могут ли линии сетки разбивать эту диагональ на 48 частей?

2. Дан отрезок AD с концами в целых точках. На этом отрезке нашлись целые точки B и C такие, что $AB : BC : CD = 5 : 2 : 7$. Какое наименьшее количество целых точек могло быть на отрезке AD?

Утверждение. Площадь целого треугольника без точек внутри и на границе равна $\dfrac{1}{2}$.

Определение 3. Такой треугольник называется *примитивным*.

Доказательство. Впишем треугольник в клетчатый прямоугольник P.

(a) Сперва докажем, что площадь треугольника *полуцелая*, т. е. равна половине целого числа.

(b) Затем разобьем прямоугольник P на примитивные треугольники, один из которых будет исходным, и покажем, что если площадь хотя бы одного из примитивных треугольников больше $\frac{1}{2}$, то что-то не сойдется.

3. Дан целый треугольник, на границе которого нет целых точек, а строго внутри лежит ровно одна целая точка. Докажите, что это точка пересечения медиан.

4. Формула Пика. Докажите, что площадь целого многоугольника, внутри которого лежит V целых точек, а на границе — E целых точек, равна $V + \frac{E}{2} - 1$. Для этого рассмотрите разбиение этого многоугольника на примитивные треугольники.

5. Король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле по разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей в пути короля, не имеет самопересечений. Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

6. Внутри некоторого треугольника с вершинами в узлах лежит ровно два узла (возможно, какие-то еще узлы лежат на его сторонах). Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.

7. Дан клетчатый квадрат 10×10. Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.

8. **(a)** Существует ли целый треугольник, на границе которого целых точек нет, а строго внутри ровно 100 целых точек? **(b)** А если все стороны такого треугольника должны быть больше 1000?

36. Серия 29, КТО это начал? *19 июля*

1. Докажите, что для взаимно простых чисел a и b и любой пары остатков $n < a$ и $k < b$ найдется число c такое, что при делении на a число c даёт в остатке n, а при делении на b даёт в остатке k.

Подсказка. Решите ребус: Лагерь — Детское Учреждение.

2. Пусть числа a и b взаимно просты. Докажите, что при делении чисел от 1 до ab на a и на b получаются все возможные пары остатков.

3. Докажите, что в первой задаче такое число c единственно на отрезке от 1 до ab.

4. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Какое наименьшее число солдат могло быть у генерала?

5. Найдите наименьшее натуральное число, дающее остаток 2 при делении на 3, остаток 3 при делении на 4, остаток 4 при делении на 5, остаток 5 при делении на 6 и остаток 6 при делении на 7.

6. Диме выдали натуральное число N. Он разделил его на 101 и получил в остатке $m > 0$. Затем Дима разделил N на m и получил в остатке p. Найдите наибольшее значение p, которое могло получиться, а затем — наименьшее N, при котором это значение p достигается.

7. Числа a и b взаимно просты. Докажите, что любую правильную дробь со знаменателем ab можно получить как алгебраическую сумму двух правильных дробей со знаменателями a и b (иначе говоря, для любого натурального $k < ab$ найдутся такие целые неотрицательные $m < a$ и $n < b$, что $\frac{k}{ab} = \pm\frac{m}{a} \pm \frac{n}{b}$).

8. Пятнадцать простых чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью d. Докажите, что $d > 30000$.

9. Докажите, что натуральные n, для которых n^n+1 делится на 30, образуют арифметическую прогрессию.

10. Существует ли в сутках момент, когда часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в $120°$?

37. Серия 30, за клетчатой решеткой *20 июля*

1. (a) Рассмотрим прямую, проходящую через две целые точки A и B. Докажите, что существует целая точка P, ближайшая к этой прямой.

(b) Проведем через каждую целую точку плоскости прямую, параллельную AB. Докажите, что полученные прямые будут проходить через равные промежутки.

(c) Докажите, что множество прямых из предыдущего пункта можно дополнить до сетки из единичных параллелограммов.

Упр. 1. Докажите, что параллелограммы из предыдущей задачи можно сделать со сторонами, большими 1000.

2. Докажите, что существует целый треугольник без точек на границе со сторонами, большими 1000, внутри которого лежит ровно 100 целых точек, воспользовавшись **Упр. 1**.

3. Прямая ℓ проходит через начало координат и точку $(3, 5)$. Через каждый узел прямоугольника 9×17 провели прямую, параллельную ℓ. Сколько различных прямых получилось?

Упр. 2. Отрезок соединяет точки с координатами (a, b) и (p, q). При каком условии на координаты концов на этом отрезке найдется еще хотя бы одна целая точка?

4. На плоскости дан выпуклый пятиугольник с вершинами в целых точках. Докажите, что внутри него или на его границе найдется целая точка, отличная от вершин.

5. Можно ли отметить три целые точки на плоскости так, чтобы получился правильный треугольник?

6. На клетчатой плоскости нарисован целый выпуклый многоугольник F. Ни одна из его сторон не идёт по вертикали или горизонтали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключённых внутри F, равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки внутри F.

7. Дан целый выпуклый многоугольник. Внутри него лежит хотя бы $n^2 + 1$ узел. Докажите, что хотя бы $n + 1$ из этих узлов лежат на одной прямой.

8. На клетчатой плоскости отмечены узлы клетчатого прямоугольника 50×100 (всего отмечено 51×101 узлов). Множество параллельных прямых называется *удачным*, если на каждой из прямых этого множества лежит хотя бы один отмеченный узел и каждый отмеченный узел лежит на прямой этого множества. Дано удачное множество из 2399 прямых, параллельных некоторой прямой ℓ. Найдите количество элементов в множестве удачных прямых, перпендикулярных ℓ.

38. Серия 31, построенная

20 июля

Упр. 1. Вспомните, что мы уже умеем делать с помощью циркуля и линейки:

- откладывать равные отрезки;
- откладывать равные углы;
- опускать перпендикуляр из точки на прямую.

Упр. 2. **(a)** Как построить серединный перпендикуляр к отрезку?

(b) Как опустить или восстановить перпендикуляр из данной точки на данную прямую?

(c) Как провести через данную точку прямую, параллельную данной?

(d) Как построить биссектрису данного угла?

Упр. 3. **(a)** Постройте прямоугольный треугольник по длинам гипотенузы и одного из катетов.

(b) Постройте остроугольный равнобедренный треугольник по боковой стороне и проведенной к ней высоте.

1. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проведенной к ней высоте.

2. Постройте параллелограмм по углу и двум высотам.

3. Точка M находится внутри угла с вершиной в точке O. Проведите через данную точку прямую, пересекающую стороны угла в таких точках A и B, что $OA = OB$.

4. Постройте треугольник по двум его углам и периметру.

5. Точка M лежит внутри круга. Проведите через нее хорду так, чтобы точка M делила ее пополам.

6. Даны окружность, хорда AB этой окружности и прямая l. Постройте хорду этой окружности, параллельную данной прямой, так, чтобы она делилась хордой AB пополам.

7. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по трем медианам.

8. Дан угол величиной 54°. Пользуясь только циркулем, разделите его на три равные части.

9. Циркулем и линейкой разбейте данный треугольник на два меньших треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

10. Разделите циркулем и линейкой отрезок на 6 равных частей, проведя не более 8 линий (прямых, окружностей).

39. Серия 32, КТО это закончит? *21 июля*

1. Китайская теорема об остатках. Пусть числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Тогда для любых целых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ найдется целое число x такое, что $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ для всех i. Более того, x определен однозначно с точностью до прибавления кратного $M = m_1 m_2 \ldots m_n$.

2. Существует ли такое целое n кратное 4, что $n+4$ кратно 9, а $n+9$ кратно 25?

3. **(a)** Сколько четырёхзначных чисел удовлетворяет сравнению $x^2 \equiv x \pmod{10000}$?

(b) Сколько чисел от 1 до n удовлетворяет сравнению $x^2 \equiv x \pmod{n}$?

4. Докажите, что для каждого натурального n существуют натуральные a и b такие, что $4a^2 + 9b^2 - 1$ делится на n.

5. Докажите, что для каждого натурального n существуют n попарно взаимно простых чисел k_1, k_2, …, k_n, больших 1, таких, что число $k_1 k_2 \ldots k_n - 1$ представляется как произведение двух последовательных натуральных чисел.

6. *Полезное следствие.* Докажите, что для любых попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и остатков $r_1, r_2, \ldots, r_n$ по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$ найдутся n последовательных чисел $a+1, a+2, \ldots, a+n$ таких, что $a + i \equiv r_i \pmod{m_i}$.

7. Назовем число *хорошим*, если оно делится на квадрат натурального числа >1. При каких N найдется N последовательных хороших чисел? (Пример для $N = 3$: 48, 49, 50).

8. Докажите, что найдутся 1000 последовательных чисел, каждое из которых не является

(a) простым числом или степенью простого числа;

(b) степенью (не ниже второй) натурального числа.

9. Докажите, что числа натурального ряда можно переставить местами так, чтобы для всех n сумма n первых чисел делилась на n.

40. Серия 33, количество информации *21 июля*

1. На доске **(a)** 4×4; **(b)** 5×5 одна из клеток закрашена невидимыми чернилами. Разрешается выделить любой прямоугольник и спросить, есть ли в нем выделенная клетка. За какое минимальное число вопросов можно найти выделенную клетку?

2. Имеется 5 с виду одинаковых шаров, два из которых радиоактивны. Дозиметром можно проверить, есть ли хотя бы один радиоактивный шар в

произвольной группе. За какое наименьшее число проверок можно выявить оба радиоактивных шара?

3. По кругу лежат 20 монет, из которых ровно три — фальшивые, которые лежат рядом и весят одинаково, причем тяжелее, чем настоящие. За какое наименьшее количество взвешиваний можно найти все три фальшивые монеты?

4. Петя приехал в Default City. В нем есть 5 различных небоскребов, каждый из которых виден из любой части города. Может ли Петя сделать несколько фотографий в некоторых местах этого города так, чтобы каждая последовательность небоскребов на фотографиях встречалась? Разумеется, Петя не может стоять на одной прямой ни с какими двумя небоскребами.

5. За какое минимальное число взвешиваний на чашечных весах можно упорядочить пять гирь с попарно различными массами по возрастанию масс? За одно взвешивание можно сравнивать только две гири.

6. Секретный код ФБР — это натуральное число от 1 до 900. Двое шпионов узнали по одному коду каждый и решили обменяться информацией. Согласовав заранее свои действия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала первый шпион кинул в воду несколько камней, потом — второй кинул в воду несколько камней, потом — первый и т. д. до тех пор, пока камни не кончились. Как могла быть передана информация?

7. Имеется 6 с виду одинаковых шаров, два из которых радиоактивны. Дозиметром можно проверить на радиоактивность любую группу шаров. За какое наименьшее число проверок можно выявить оба радиоактивных шара?

8. В финале телевикторины ведущий загадывает целое число от 1 до 144, после чего ему разрешается задавать только вопросы с ответом «Да» или «Нет». Однако по правилам финала, за ответ «Да» нужно заплатить 1 рубль, тогда как за ответ «Нет» 2 рубля. Какое наименьшее количество денег необходимо потратить, чтобы выиграть в финале телевикторины?

9. В городе есть 200-этажное здание. Петя хочет узнать, начиная с какого этажа, если бросить оттуда кокосовый орех, он непременно разобьется (считается, что если орех разбивается при падении с какого-то этажа, то он разбивается и при падении с более высоких). У Пети есть **(a)** два; **(b)** три кокосовых ореха, которыми он готов пожертвовать. Какое минимальное количество бросков нужно совершить Пете, чтобы гарантированно узнать ответ на свой вопрос?

41. Серия 34, построения–2 *22 июля*

1. Постройте отрезок заданной длины a, параллельный данной прямой c, концы которого лежат на данной прямой m и на данной окружности с центром O.

2. Постройте отрезок с серединой в данной точке O и концами на двух заданных окружностях S_1 и S_2.

3. Постройте равносторонний треугольник с вершиной в данной точке так, чтобы две другие вершины принадлежали данным прямым.

4. Постройте треугольник по серединам двух его сторон и прямой, содержащей биссектрису, проведенную к третьей стороне.

5. Постройте правильный треугольник, вершины которого принадлежат трем заданным параллельным прямым.

6. Постройте параллелограмм $ABCD$ по двум заданным вершинам A и B, если две другие его вершины принадлежат данной окружности.

7. Постройте ромб с центром в данной точке и тремя вершинами, лежащими на трех заданных прямых.

8. Постройте квадрат с центром в данной точке так, чтобы середины двух его соседних сторон принадлежали двум заданным прямым.

9. Постройте квадрат, три вершины которого принадлежат трем заданным параллельным прямым.

10. Постройте равносторонний треугольник с центром в данной точке так, чтобы две его вершины принадлежали двум заданным фигурам.

11. Постройте треугольник ABC, если даны прямая, на которой лежит сторона AB, и серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC.

42. Серия 35, кооперативная *22 июля*

1. Три карты лежат рубашками вверх. Зритель переворачивает одну из карт, после чего помощник фокусника переворачивает одну из оставшихся. Затем приходит фокусник и безошибочно отгадывает, кем какая карта перевернута. Как ему это удается?

2. Зритель берет два числа из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Помощник фокусника берет еще одно число (не взятое зрителем). После чего приходит фокусник, смотрит на два оставшихся числа и безошибочно называет, какие числа кем взяты. Как ему это удается?

Если решить задачку сходу не удается, поговорите сами с собой на следующие темы:

(a) Сколько вариантов у зрителя взять два числа?

(b) Сколько различных множеств чисел может увидеть фокусник?

(c) Что нужно сделать помощнику, чтобы фокусник смог определить, какие два взятых зрителем числа соответствуют оставшимся двум числам перед фокусником?

(d) Представьте пары взятых зрителем чисел как вершины графа и постройте соответствие.

3. Три мудреца должны будут сесть по кругу так, что каждый будет видеть двух остальных. На лоб каждому будет приклеена черная или белая метка. Мудрецам запрещено как-либо обмениваться информацией друг с другом. По сигналу каждый из них должен будет одновременно либо сказать цвет метки (черный или белый), либо сказать «пас». Мудрецам будет сохранена жизнь только в том случае, если хотя бы один из них НЕ скажет «пас», и при этом все назвавшие цвет назовут его правильно, т. е. угадают цвет своей метки.

(a) Как мудрецам выжить с вероятностью $3/4$?

(b) * Могут ли мудрецы спастись с вероятностью, большей $3/4$?

4. Два зрителя по очереди берут по одному числу из множества $\{1, 2, \ldots, 7\}$. Затем помощник фокусника берет одно число себе. После чего приходит фокусник, смотрит на оставшиеся числа и называет, какие числа кем взяты. Всегда ли фокус удастся?

5. Король выстраивает **(a)** 3; **(b)** 100 мудрецов в колонну по одному и надевает каждому колпак одного из двух цветов. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из двух цветов (каждый мудрец выкрикивает цвет один раз). После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака. Как договориться, чтобы минимизировать число казненных?

6. 10 мудрецам пишут на лбы натуральные числа от 1 до 10 (не обязательно различные). Каждый видит все числа, кроме своего. По сигналу Короля каждый мудрец должен записать на бумажке предсказание числа, которое написано на лбу у него самого. Если хотя бы один из мудрецов предскажет правильно — все спасены, иначе всех казнят. Как спастись мудрецам?