Серия 4, разлагай(ся)

6 июля

Упр. 1. Докажите, что НОД$(a, b) \cdot$ НОК$(a, b) = ab$.

1. Два натуральных числа a и b друг на друга не делятся, при этом НОД$(a, b) = 50$, а НОК$(a, b) = 1000$. Найдите эти числа.

2. Можно ли расставить по кругу 333 различных натуральных числа так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

3. Докажите равенство $abc =$ НОК$(a, b, c) \cdot$ НОД(ab, ac, bc).

4. Существуют ли такие 16 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел?

5. Докажите, что уравнение $a! \cdot b! = c!$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах, больших 10.

6. Можно ли вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 56!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

7. Про натуральные числа a, b, c известно, что ab делится на $2c$, bc делится на $3a$, а ac делится на $5b$. Найдите наименьшее возможное значение их произведения abc.

8. В произведении $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ разрешается приписать некоторым сомножителям восклицательный знак (при этом сомножитель k заменяется на $k!$). При каких n в результате можно получить точный квадрат?

9. Докажите, что в вершинах любого графа можно расставить натуральные числа так, чтобы любые два числа, соединенные ребром, имели НОД > 1, а числа, не соединенные ребром, были взаимно просты.

10. Дана возрастающая арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Известно, что у каждого числа ровно два различных простых делителя, причём для всех членов прогрессии эта пара одна и та же. Каково наибольшее возможное количество членов в такой прогрессии?