*Двадцать четвертая Летняя многопредметная школа Кировской области*
*Вишкиль, 3–28 июля 2008 года*

8 класс, группа профи

# МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Павел Затицкий
Александр Лузгарев
Алексей Трегубов

Что знаешь, то и считай, что знаешь; что не знаешь, то и считай, что не знаешь. Это-то и есть знание.

Луньюй, гл. Вэйчжэн.

**Дорогой читатель!**

В этой брошюре Вы найдете материалы нашей работы в профи-группе восьмого класса Летней многопредметной школы Кировской области 2008 года. Основное содержание ее составляют задачи, которые решались и разбирались на занятиях. Конечно, сия книжечка не может адекватно отразить обсуждения и беседы с учениками; живой диалог, происходивший на занятиях, невозможно переложить на бумагу. Мы надеемся, что некоторые из включенных сюда задач принесут Вам немало удовольствия и после окончания школы.

Главная цель, которую преследовали наши занятия — не натренировать школьников на решение олимпиадных задач, не рассказать как можно больше сложных теорем за как можно меньшее время, а дать почувствовать красоту математики, ее единство и универсальное значение. Мы надеемся, что отблеск этой красоты нам удалось донести и передать ученикам.

Отдельного упоминания заслуживает работа Леонида Самойлова, который в качестве приглашенного преподавателя провел несколько занятий; их материалы также включены в брошюру.

Огромное спасибо всем ученикам профи-группы за интересное общение и неизменную радость, которой сопровождались наши встречи.

Искренне Ваши,

Павел,

Александр,

Алексей.

# Множества 4 июля

**Задача 1.** Пусть дана окружность. Рассмотрим касательную к ней и ту из двух заданных этой касательной полуплоскостей, в которой лежит окружность. Найдите пересечение всех таких полуплоскостей.

**Задача 2.** По плоскости со скоростью $u$ км/ч прямолинейно движется зараженная точка. Каждая точка, через которую прошла зараженная, тоже заражается, и от каждой зараженной точки зараза распространяется во все стороны со скоростью $v < u$ км/ч. Как будет выглядеть множество всех зараженных точек через час после начала процесса?

### Для самостоятельного решения

**Задача 3.** Даны четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Найдите все окружности, равноудаленные от этих точек. Расстояние от точки до окружности — это расстояние от нее до ближайшей точки окружности.

**Задача 4.** Дана окружность. Найдите: а) объединение всех ее хорд данной длины; б) пересечение всех вписанных в нее правильных многоугольников.

# Вступительная олимпиада — 4 июля

**1.** Найдите 127 целых чисел, идущих подряд, сумма которых делится на 2008.

**2.** Имеется 19 гирек весом $1, 2, \ldots, 19$ г, среди них 9 железных, 9 бронзовых и 1 золотая. Известно, что суммарный вес всех железных гирек на 90 г больше суммарного веса всех бронзовых. Найдите вес золотой гирьки (укажите все варианты и докажите, что других нет).

**3.** Может ли пятизначное число равняться произведению своих цифр?

**4.** Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $\angle DAC = \angle DBE$, $\angle ACE = \angle BEC$. Докажите, что если $AC < BE$, то $AD < BD$.

**5.** В отряде 8 класса 47 человек. Известно, что среди любых четверых найдется хотя бы один человек, знакомый с тремя остальными. Сколько человек могут знать всех в отряде? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

**6.** Для простого числа $p > 3$ рассмотрим множество $M$, состоящее из натуральных чисел вида $p - n^2$ ($n$ — целое). Докажите, что можно выбрать два числа из множества $M$ таких, что одно из них делится на другое.

# Отображения — 5 июля

**Наивное определение. Отображением** из множества $X$ в множество $Y$ называется *правило* или *закон*, по которому каждому элементу множества $X$ ставится в соответствие единственный элемент множества $Y$, называемый его **образом**. Обозначения: $f\colon X \to Y$ — отображение, $f(x)$ — образ элемента $x$ при этом отображении, $X$ — **область определения**, $Y$ — **область значений**.

**Способы задания отображений:** таблица, график, формула (пример: $x \mapsto (x+1)/(x-1)$).

На самом деле, недостаточно указать «правило»: важно знать, *что* и *куда* отображается. Таким образом, на самом деле отображение — это *тройка*: множество $X$, множество $Y$ и закон. С точки зрения теории множеств закон удобно трактовать как **график** отображения

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

**Примеры отображений.** Какие из следующих правил задают отображения? Каковы области определения и значений этих отображений? а) мать, отец, сын, старший сын; б) год рождения, в) абсцисса, ордината, точка с заданными координатами; г) сумма цифр, остаток от деления на $k$; д) тождественное отображение, постоянное отображение, вложение; е) целая часть, дробная часть; ж) бесконечная последовательность чисел (например, числа Фибоначчи); з) движение плоскости; и) синус и косинус; к) характеристическая функция подмножества.

**Упражнение 1.** Найдутся ли такие множества X и Y и такое отображение , что а) во множестве X найдется элемент, не имеющий образа; б) во множестве X найдется элемент, имеющий несколько образов; в) во множестве Y найдется элемент, не имеющий прообраза; г) во множестве Y найдется элемент, имеющий несколько прообразов?

**Упражнение 2.** Перечислите все отображения из двухэлементного множества в себя.

**Задача 3.** а) Сколько существует отображений из $k$-элементного множества в $n$-элементное? ($k, n \in \mathbb{N}$); б) а если $k = 0$ или $n = 0$? в) **Коан:** сколько существует отображений из пустого множества в пустое множество?

**Определение.** Отображение $f\colon X \to Y$ называется **сюръективным**, если для каждого $y \in Y$ существует хотя бы один элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$, **инъективным**, если для каждого $y \in Y$ существует не более одного элемента $x \in X$ такого, что $y = f(x)$, **биективным**, если оно сюръективно и инъективно.

**Упражнение 4.** Правило «возведение в квадрат» ($x \mapsto x^2$) задает четыре следующих отображения: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Какие из этих отображений являются инъективными? сюръективными? биективными?

**Определение.** Пусть заданы отображения $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$. Определим **композицию** $h = g \circ f$ формулой $h(a) = g(f(a))$.

**Упражнение 5.** Опишите композиции отображений, рассмотренных выше.

**Задача 6.** Докажите, что а) $f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$; б) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

**Определение.** Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение. Тогда $f$ называется **обратимым слева**, если существует такое $g\colon Y \to X$, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (любое такое $g$ называется **левым обратным** к $f$). Аналогично, $f$ называется **обратимым справа**, если существует такое $g\colon Y \to X$, что $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ (любое такое $g$ называется **правым обратным** к $f$). Отображение $f$ называется **обратимым** (или **двусторонне обратимым**), если оно обратимо как справа, так и слева.

**Упражнение 7.** Докажите, что у обратимого отображения $f$ левое обратное совпадает с правым обратным. Это обратное отображение обозначается через $f^{-1}$.

**Определение.** Отображение $f\colon X \to Y$ называется **мономорфизмом**, если на $f$ можно **сокращать слева**, то есть, для любых двух отображений $g_1, g_2\colon Z \to X$ из равенства $f \circ g_1 = f \circ g_2$ вытекает, что $g_1 = g_2$.

**Задача 8.** Докажите, что для любого отображения $f\colon X \to Y$ следующие утверждения эквивалентны:

- $f$ инъективно;
- $f$ мономорфзим;
- $f$ обратимо слева.

**Задача 9.** Дайте определение отображения, на которое можно **сокращать справа** (такое отображение называется **эпиморфизмом**). Сформулируйте и докажите аналог предыдущей задачи.

**Задача 10.** Докажите, что отображение биективно тогда и только тогда, когда оно двусторонне обратимо.

**Задача 11.** Докажите, что если $f$ обратимо, то и $f^{-1}$ обратимо, и обратным к нему является отображение $f$.

**Задача 12.** Докажите, что если отображения $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ обратимы, то обратима и их композиция, причем $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

**Задача 13.** Докажите, что а) если $g \circ f$ инъективно, то $f$ инъективно; б) если $g \circ f$ сюръективно, то $g$ сюръективно.

**Задача 14.** Докажите, что инъективность отображения $f\colon A \to B$ эквивалентна тому, что для любых $A, B \subseteq X$ имеет место равенство $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$. Убедитесь, что достаточно даже накладывать это требование только на такие пары, что $B \subseteq A$.

**Задача 15.** Пусть $|X| = n$, $|Y| = m$. а) Сколько существует инъективных отображений из $X$ в $Y$? б) Сколько существует биективных отображений из $X$ в $Y$? в) Сколько существует сюръективных отображений из $X$ в $Y$?

**Задача 16.** Придумайте задачу о подсчете числа отображений, где ответом было бы число сочетаний из $n$ по $k$.

**Задача 17.** Докажите, что для любого множества $X$ отображение $X \to 2^X$, $x \mapsto \{x\}$, инъективно. Может ли оно быть сюръективным?

**Задача 18.** Пусть $s$ — отображение, сопоставляющее натуральному числу его сумму цифр, а $\mathrm{res}_k$ — отображение, сопоставляющее натуральному числу остаток от деления его на $k$. а) Докажите, что $s \circ \mathrm{res}_3 = \mathrm{res}_3 \circ s$. Как Вы формулировали этот факт ранее? б) Для каких $k$ выполнено равенство $s \circ \mathrm{res}_k = \mathrm{res}_k \circ s$.

**Задача 19.** Установите биективное соответствие между клетками бесконечной (во все стороны) шахматной доски и натуральным рядом.

**Задача 20.** Докажите, что разбиений числа $n$ на не более чем $k$ слагаемых столько же, сколько разбиений числа $n + \dfrac{k(k+1)}{2}$ на $k$ попарно различных слагаемых.

**Задача 21.** Докажите, что количество способов представить натуральное число $n$ в виде суммы нескольких идущих подряд натуральных чисел равно количеству нечетных делителей $n$.

# Векторы

5 июля

**1.** а) Докажите, что а) если $M$ — середина отрезка $AB$, то для любой точки $O$ плоскости выполняется равенство $\overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OA} + \overline{OB})$; б) если $M$ делит отрезок $AB$ в отношении $m : n$, то для любой точки $O$ плоскости выполняется равенство $\overline{OM} = \dfrac{n}{m+n} \cdot \overline{OA} + \dfrac{m}{m+n} \cdot \overline{OB}$.

**2.** Пусть $M$, $N$, $P$, $Q$ — середины сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $DE$ выпуклого пятиугольника $ABCDE$; $F$ — середина $MP$, $G$ — середина $NQ$. Докажите, что отрезок $FG$ параллелен отрезку $AE$ и имеет вчетверо меньшую длину

**3.** Докажите, что а) точка $X$ принадлежит прямой $AB$ тогда и только тогда, когда существует такое $t$, что для любой точки $O$ плоскости $\overline{OX} = t \cdot \overline{OA} + (1-t) \cdot \overline{OB}$; б) точка $X$ принадлежит отрезку $AB$ тогда и только тогда, когда существует такое $t$, $0 < t < 1$, что для любой точки $O$ плоскости $\overline{OX} = t \cdot \overline{OA} + (1-t) \cdot \overline{OB}$.

**4.** Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного $n$-угольника в его вершины, равна $\overline{0}$.

**5.** Докажите, что если векторы $\overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$ перпендикулярны, то $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

**6.** В четырехугольнике $ABCD$ точка $M$ — середина $BC$, $N$ — середина $AD$. Докажите, что $\overline{MN} = \dfrac{\overline{BA} + \overline{CD}}{2}$.

**7.** Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — два неколлинеарных вектора. Докажите, что любой вектор $\overline{c}$ можно единственным образом представить в виде $\overline{c} = u\overline{a} + v\overline{b}$, где $u$ и $v$ — вещественные числа.

**8.** На прямой лежит одиннадцать точек $M_1, \ldots, M_{11}$. Вне прямой дана точка $F$. Можно ли на отрезках $FM_1, \ldots, FM_{11}$ расставить стрелки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна $\overline{0}$?

**9.** Пусть точка $M$ делит медиану $AA_1$ треугольника $ABC$ в отношении $2 : 1$, считая от вершины $A$. Докажите, что для любой точки $O$ выполнено равенство $\overline{OM} = \dfrac{\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}}{3}$. Выведите отсюда теорему о пересечении медиан треугольника.

**10.** У выпуклого пятиугольника отметили середины сторон, а потом стерли все, кроме отмеченных точек. Восстановите пятиугольник.

**11.** Дано $n$ попарно неколлинеарных векторов $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$ ($n \geq 3$) такие, что $\overline{a_1} + \dots + \overline{a_n} = \overline{0}$. а) Докажите, что существует выпуклый $n$-угольник $A_1 \dots A_n$ такой, что набор векторов $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_nA_1}$ совпадает с набором $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$. б) Сколько существует различных многоугольников, удовлетворяющих условию а)?

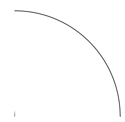
**12.** а) Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник. б) Докажите, что это можно сделать при помощи параллельных переносов медиан. в) Найдите отношение площади получившегося треугольника к площади исходного.

**13.** На окружности радиуса 1 с центром $O$ дано $2n+1$ точек $P_1, \dots, P_{2n+1}$, лежащих по одну сторону от некоторого диаметра. Докажите, что $\left|\overline{OP_1} + \ldots + \overline{OP_{2n+1}}\right| \geq 1$.

**14.** На плоскости дано 2000 векторов, причем среди них есть не коллинеарные. Известно, что сумма любых 1999 векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 2000 векторов равна нулевому вектору.

# Движения 6 июля

**1.** Фигура **инь** получается, если из полукруга вырезать полукруг вдвое меньшего радиуса и приставить его к получившейся фигуре, повернув на $180^\circ$ вокруг центра круга (см. рис.). Докажите, что два иня, полученных из полукругов равных радиусов, равны.



**2.** Какие вы знаете преобразования плоскости? Являются ли они движениями?

**3.** Фигура образована пересечением трех квадратов с общим центром. Через этот центр проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что они делят фигуру на равновеликие части.

**4.** а) Докажите, что всякое движение переводит прямую в прямую, параллельные прямые — в параллельные, полуплоскость — в полуплоскость, луч — в луч, отрезок — в отрезок, угол — в угол, окружность — в окружность того же радиуса. б) Докажите, что при движении равные векторы переходят в равные, сумма векторов — в сумму их образов, а произведение вектора на число — в произведение его образа на то же число.

**5.** Опишите, что происходит с векторами при параллельном переносе? повороте? центральной симметрии?

**6.** Докажите, что если при движении всякая прямая переходит в себя или параллельную прямую, то это движение — параллельный перенос или центральная симметрия.

**7.** Даны точка $A$ и прямая $l$. Рассмотрим всевозможные правильные треугольники $ABC$, у которых $B \in l$. Найдите множество всех возможных положений точки $C$.

**8.** В окружность вписаны два несовпадающих равносторонних треугольника. Докажите, что а) их пересечение является равносторонним шестиугольником; б) диагонали этого шестиугольника пересекаются в одной точке.

## Для самостоятельного решения

**9.** Точка $B$ лежит на отрезке $AC$. Правильные треугольники $ABM$ и $BCN$ находятся по одну сторону от прямой $AB$. Точки $P$, $Q$ — середины отрезков $AN$, $MC$. Докажите, что треугольник $BPQ$ — правильный.

**10.** На сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники. Докажите, что их центры — вершины правильного треугольника.

**11.** Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников $AOB$ и $COD$, касаются друг друга.

**12.** $O$ — точка квадрата $ABCD$. Через точку $A$ провели прямую $a$, перпендикулярную $BO$, через $B$ — прямую $b$, перпендикулярную $CO$, через $C$ — прямую $c$, перпендикулярную DO, через $D$ — прямую $d$, перпендикулярную $AO$. Докажите, что прямые $a$, $b$, $c$, $d$ пересекаются в одной точке.

**13.** На сторонах $AB$, $BC$, $CA$ треугольника $ABC$ построены квадраты с центрами $O_1$, $O_2$, $O_3$ соответственно. Докажите, что отрезки $O_1O_2$ и $O_3B$ равны и перпендикулярны.

# Неравенства 6 июля

**1.** Докажите, что а) $a^2+b^2 \geq 2ab$ для любых чисел $a$ и $b$; б) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.

**2.** а) Для любого положительного числа $x$ докажите неравенство $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$. б) Какое наименьшее значение может принимать выражение $ax+\dfrac{b}{x}$ при $x>0$ $(a,b>0)$?

**3.** а) Докажите, что для любых положительных чисел $a,b,c$ выполняется неравенство

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9;$$

б) придумайте и докажите аналогичное неравенство для $n$ положительных чисел $x_1,\ldots,x_n$.

**4.** Докажите, что $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ $(a,b,c>0)$.

**5.** Докажите, что $a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$ $(a,b,c,d>0)$.

**6.** Докажите, что если $x$, $y$ и $z$ — длины сторон треугольника, то

$$xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(x+z-y).$$

*Указание: сведите эту задачу к задаче* 4.

**5.** Числа $x$ и $y$ больше нуля, но меньше единицы. Докажите, что

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}<1.$$

**6.** а) При $n>2$ докажите неравенство $2^n>2n+1$; б) **(Неравенство Бернулли)** При $n>1$, $\alpha>-1$ докажите неравенство $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$.

**7.** Докажите, что $7a+5b \geq ab+35$, если $a,b \in [5,7]$.

**8.** Докажите *неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим* для положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

**9. (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)** а) Докажите, что для любых вещественных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ справедливо неравенство

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2.$$

б) При каких значениях переменных достигается равенство?

# Многочлены 7 июля

**Что такое многочлен?** Наивное определение: **многочленом** называется выражение вида $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, где $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ — вещественные числа.

**Определение. Многочленом** (над $\mathbb{R}$) называется бесконечная последовательность вещественных чисел $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$, в которой начиная с некоторого места все числа равны 0. **Степенью** этого многочлена называется наибольшее $n$ такое, что $a_n \neq 0$.

Действительно, в такую последовательность можно «подставить число» и получить значение; их можно складывать, умножать на число и перемножать:

**Задача 1.** Сформулируйте точные определения суммы, произведения многочленов и вычисления значения в точке $x \in \mathbb{R}$.

**Задача 2.** Дан многочлен $(x^8 + x^5 + 1)^{20}$. Найдите его коэффициент при а) $x^{17}$; б) $x^{18}$.

**Обозначения.** Множество всех многочленов над $\mathbb{R}$ мы будем обозначать через $\mathbb{R}[x]$. Число, получающееся в результате вычисления значения многочлена $f$ в точке $a \in \mathbb{R}$ —через $f(a)$. С каждым многочленом $f \in \mathbb{R}[x]$ связана функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto f(a)$, которую мы будем обозначать той же буквой $f$. Кроме того, для фиксированной точки $a \in \mathbb{R}$ можно рассмотреть отображение **эвалюоации** $\mathrm{ev}_a(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(a)$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{ev}_a(f+g) = \mathrm{ev}_a(f) + \mathrm{ev}_a(g)$, $\mathrm{ev}_a(fg) = \mathrm{ev}_a(f)\,\mathrm{ev}_a(g)$, $\mathrm{ev}_a(kf) = k\,\mathrm{ev}_a(f)$ для $k \in \mathbb{R}$.

**Определение. Корнем** многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ называется число $a$ такое, что $f(a) = 0$.

Как и целые числа, многочлены можно делить с остатком, «в столбик», пока степень остатка не станет меньше степени делителя. Если остаток от деления многочлена $f$ на многочлен $g$ равен нулю (а что такое нулевой многочлен?), говорят, что $f$ **делится на** $g$.

**Упражнение 3.** Разделите с остатком а) $x^2 - x + 1$ на $x - 2/3$; б) $x^6 + 1$ на $x^2 + x$; в) $x^n - 1$ на $x - 1$; г) $x^n + 1$ на $x + 1$.

**Теорема (Безу).** Значение многочлена в точке $c \in \mathbb{R}$ совпадает с остатком от деления его на многочлен $x - c$.

**Задача 4.** Многочлен делится на $x - c$ тогда и только тогда, когда $c$ является его корнем.

**Задача 5.** Пусть $c_1, \ldots, c_k$ — различные вещественные числа. Докажите, что многочлен $f$ делится на произведение $(x-c_1)\ldots(x-c_k)$ тогда и только тогда, когда все $c_i$ являются корнями $f$.

**Определение. Кратностью** корня $c$ многочлена $f$ называется наибольшее целое $k$ такое, что $f$ делится на $(x-c)^k$. Обозначение: $\mathrm{mult}_f(c)$.

**Упражнение 6.** Докажите, что а) $\mathrm{mult}_{f+g}(c) \geq \min(\mathrm{mult}_f(c), \mathrm{mult}_g(c))$; б) $\mathrm{mult}_{fg}(c) = \mathrm{mult}_f(c) + \mathrm{mult}_g(c)$.

**Задача 7.** Докажите, что число корней многочлена (с учетом кратности) не превосходит его степени.

**Задача 8.** Докажите, что если многочлены $f$ и $g$ задают одинаковые функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то $f = g$.

## Для самостоятельного решения

**Задача 9.** Найдите все натуральные $n$, при которых число $2n^3 + 3n^2 + 4n + 3$ делится на число $n^2 + 1$.

**Задача 10.** Докажите, что при любых целых неотрицательных $l, m, n$ многочлен $x^{3l+2} + x^{3m+1} + x^{3n}$ делится на $x^2 + x + 1$.

**Задача 11.** Многочлен $f$ дает остаток 2 при делении на $x - 2$ и остаток 5 при делении на $x - 4$. Какой остаток многочлен $f$ дает при делении на $(x-2)(x-3)$?

**Задача 12.** Многочлен $f$ таков, что $f(7) = 11$, а $f(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из его коэффициентов — не целое число.

**Задача 13.** Многочлены $f$ и $g$ с целыми коэффициентами таковы, что $f(k)$ делится на $g(k)$ для каждого целого $k$. Докажите, что $f$ делится на $g$.

# Перестановки 9 июля

**Задача 1.** Пятнадцать восьмиклассников сидят на занятии на пятнадцати пронумерованных стульях. Каждую минуту они пересаживаются по следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 5 & 10 & 8 & 11 & 14 & 15 & 6 & 13 & 1 & 4 & 9 & 7 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Через какое время все восьмиклассники впервые окажутся на своих первоначальных местах?

**Определение. Перестановкой** конечного множества называется биективное отображение этого множества на себя.

**Задача 2.** Докажите, что любая перестановка разбивается на непересекающиеся циклы.

**Задача 3.** Докажите, что любую перестановку можно представить в виде произведения а) транспозиций; б) фундаментальных транспозиций.

**Определение.** Пусть $|X| = n$, $f\colon X \to X$ — перестановка, в которой $m$ циклов. Разность $\operatorname{decr}(f) = n - m$ называется **декрементом** перестановки $f$. Четность этой разности $\operatorname{sgn}(f) = (-1)^{\operatorname{decr}(f)}$ называется **знаком** перестановки $f$. Перестановка $f$ называется **четной**, если $\operatorname{sgn}(f) = 1$, и **нечетной**, если $\operatorname{sgn}(f) = -1$.

**Задача 4.** Докажите, что если перестановка $f$ является произведением $k$ транспозиций, то $(-1)^k = \operatorname{sgn}(f)$

**Теорема 5.** Знак произведения перестановок равен произведению знаков: $\operatorname{sgn}(g \circ f) = \operatorname{sgn}(g)\operatorname{sgn}(f)$.

**Упражнение 6.** Чему равна четность цикла длины $n$?

**Задача 7.** Каких перестановок больше: четных или нечетных?

**Определение.** Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $f$ — перестановка на множестве $X$. Говорят, что пара $(i, j)$, где $1 \le i, j \le n$, образует **беспорядок** для перестановки $f$, если $i < j$, но $f(i) > f(j)$. Обозначим через $\operatorname{inv}(f)$ общее число беспорядков перестановки $f$.

**Задача 8.** Докажите, что $(-1)^{\operatorname{inv}(f)} = \operatorname{sgn}(f)$ для любой перестановки $f$.

### Для самостоятельного решения

**Задача 9.** Назовите *две* перестановки, композициями которых можно получить любую перестановку $n$-элементного множества.

**Задача 10.** Докажите, что любую четную перестановку можно представить в виде композиции нескольких циклов длины 3.

**Задача 11 (игра в 15).** В квадратной коробочке размера $4 \times 4$ размещены 15 квадратных фишек размера $1 \times 1$ с номерами $1, 2, \ldots, 15$, а одно место осталось свободным. Первоначально фишки расставлены следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & * \end{bmatrix}.$$

Можно ли, последовательно сдвигая фишки на свободное место, получить следующую расстановку:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 14 & * \end{bmatrix}?$$

*Указание:* рассмотрите сначала **игру в 3** в квадрате $2 \times 2$.

## Степень точки и радикальная ось 9 июля

**Определение. Степенью** точки $X$ относительно окружности $\omega$ с центром $O$ и радиусом $r$ называется число $\deg_\omega(X) = |XO|^2 - r^2$.

**Упражнение 1.** Прямая $l$ пересекает окружность $\omega$ в точках $A$ и $B$; точка $X \in l$. Докажите, что $\deg_\omega(X) = |XA| \cdot |XB|$, если $X$ лежит вне $\omega$ и $\deg_\omega(X) = -|XA| \cdot |XB|$, если $X$ лежит внутри $\omega$.

**Упражнение-определение 2.** На плоскости даны две неконцентрические окружности $\omega_1$ и $\omega_2$. Докажите, что множество точек $X$, для которых $\deg_{\omega_1}(X) = \deg_{\omega_2}(X)$, является прямой. Эта прямая называется **радикальной осью** окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$.

**Задача 3.** На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что прямые, содержащие три общие хорды этих окружностей, пересекаются в одной точке либо параллельны.

**Задача 4.** Дана окружность $\omega$ и точка $A$ вне нее. Рассматриваются всевозможные окружности $\psi$, проходящие через $A$ и касающиеся данной. Пусть $B$ — точка касания окружностей $\omega$ и $\psi$, и касательные к окружности $\psi$ в точках $A$ и $B$ пересекаются в точке $X$. Найдите геометрическое место таких точек $X$.

**Задача 5.** Докажите, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

**Задача 6.** На прямых $AB$ и $AC$ взяты точки $M$ и $N$ соответственно. Докажите, что общая хорда окружностей с диаметрами $CM$ и $BN$ проходит через точку пересечения высот треугольника $ABC$.

### Для самостоятельного решения

**Задача 7.** а) Через точку $P$, лежащую на общей хорде $AB$ двух пересекающихся окружностей, проведены хорда $A_1B_1$ первой окружности и хорда $A_2B_2$ второй окружности. Докажите, что четырехугольник $A_1A_2B_1B_2$ вписанный. б) **(Лемма о бабочке).** Через середину $P$ хорды $AB$ окружности проведены секущие $A_1B_1$ и $A_2B_2$. Хорды $A_1A_2$ и $B_1B_2$ пересекают хорду $AB$ в точках $M$ и $N$. Докажите, что $PM = PN$.

**Задача 8.** Даны две неконцентрические окружности. Докажите, что множеством центров окружностей, пересекающих обе этих окружности под прямым углом, является их радикальная ось.

**Задача 9.** Продолжения сторон $AB$ и $CD$ четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $F$; продолжения оставшихся сторон — в точке $E$. Докажите, что а) окружности с диаметрами $AC$, $BD$ и $EF$ имеют общую радикальную ось; б) ортоцентры треугольников $ABE$, $CDE$, $ADF$, $BCF$ лежат на этой оси; в) середины отрезков $AC$, $BD$ и $EF$ лежат на одной прямой **(прямая Гаусса).**

# Функция Эйлера — 9 июля

**1.** Следующие условия эквивалентны:
(i) $(a, m) = 1$;
(ii) $\{0, 1, \dots, m-1\} = \{0a, 1a, \dots, (m-1)a\}$;
(iii) $a$ – *обратим* по модулю $m$, то есть $ab \equiv 1 \pmod m$ для некоторого $b$ (отсюда следует, что $b$ определен однозначно).

**2.** Если простое число $p$ является делителем числа вида $a^2 + b^2$ ($a, b$ не делятся на $p$), то $p$ является делителем числа вида $c^2 + 1$.

**Опр.** Функция Эйлера $\varphi(m)$ равна количеству натуральных чисел, не превосходящих $m$, и взаимно простых с $m$ ($\Longleftrightarrow$ обратимых по модулю $m$).

**Теорема Эйлера.** Если $(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

**3.** Дано число $2^{2008}$. Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

**4.** Рассмотрим ряд $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, \frac{m}{m}$.
а) Докажите, что при $m > 2$ $\varphi(m)$ – четно.
б) Докажите, что $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_s) = m$, где суммирование ведется по всем делителям числа $m$.

**5.** а) Докажите, что при $(a,b)=1$ $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ (*мультипликативность*);
б) Найдите $\varphi(p^n)$ ($p$ – простое) и выведите общую формулу для $\varphi(m)$.

**Замечание.** Положим $L(p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}) = HOK(\varphi(p_1^{\alpha_1}),\dots,\varphi(p_k^{\alpha_k})) \leq \varphi(p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k})$. Докажите,что в теореме Эйлера можно вместо $\varphi(m)$ брать $L(m)$.

### Для самостоятельного решения

**6.** Докажите, что некоторая степень числа 7 оканчивается на 0000000000000000001.

**7.** Окружность разделена $n$ точками на равные дуги. Сколько существует замкнутых $n$-звенных ломаных с вершинами в отмеченных точках со звеньями равной длины?

**8.** Докажите мультипликативность функции $\sigma_k(m)=\sum_{d|m} d^k$ и выведите явную формулу для нее.

**9.** Докажите, что для каждого $n$ существует число с суммой цифр $n$, делящееся на $n$.

**10.** Между двумя единицами пишется двойка, затем между любыми двумя соседними числами пишется их сумма и т.д. Докажите, что число $n$ в итоге будет выписано ровно $\varphi(n)$ раз.

## Отношения эквивалентности и группы преобразований

10 июля

Одиноко брожу средь толпы я
И не вижу мне равного в ней.
До чего же все люди тупые,
До чего же их всех я умней.

Все другие гораздо тупее,
Нет такого, чтоб равен был мне.
Лишь один себе равен в толпе я.
Лишь один. Да и то не вполне.

Игорь Иртеньев

**Наивное определение.** Говорят, что на множестве $X$ задано **отношение эквивалентности** $\sim$, если для некоторых пар $a,b\in X$ указано, что $a\sim b$ (говорят: *$a$ находится в отношении $\sim$ с $b$*), причем выполняются следующие свойства:

- **(рефлексивность)** для всех $a\in X$ выполнено $a\sim a$;
- **(симметричность)** если $a\sim b$, то $b\sim a$;
- **(транзитивность)** если $a\sim b$, и $b\sim c$, то $b\sim a$;

По аналогии с графиком отображения определяется **график отношения:**

$$\Gamma(\sim)=\{(a,b)\in X\times X \mid a\sim b\}.$$

Как и в случае отображения, правильное определение отношения эквивалентности дается именно с помощью графика: задать отношение эквивалентности — значит, задать подмножество $R\subseteq X\times Y$ такое, что…

Если отказаться от условий рефлексивности, симметричности и транзитивности, получится более широкое понятие **отношения** — это просто другое название для *произвольного* подмножества $R\subseteq X\times X$. Иногда удобно представлять отношение в виде (ориентированного) графа, вершины которого соответствуют элементам множества $X$. Симметричное отношение в таком случае приводит к неориентированному графу.

**Упражнение 1.** а) Докажите, что для любого $X$ а) множество $\Delta(X)=\{(a,a)\in X\times X \mid a\in X\}$ задает отношение эквивалентности (оно называется **тождественным**); б) множество $X\times X$ задает отношение эквивалентности (оно называется **тотальным** или **полным**);

**Упражнение 2.** Являются ли отношениями эквивалентности следующие отношения: а) сравнимость по модулю $m$; б) отношение «$a$ делится на $b$» на множестве $\mathbb{N}$; в) параллельность прямых на плоскости; г) перпендикулярность прямых на плоскости; д) отношение «быть братом» на множестве всех людей; е) отношение «больше» на множестве $\mathbb{N}$; ж) отношение равенства плоских фигур; з) отношение подобия на множестве плоских фигур; и) рассмотрим какое-то множество $X$ множеств, например, $X = 2^Z$ для некоторого фиксированного множества $Z$, и определим $A \sim B \Leftrightarrow$ существует биекция между $A$ и $B$?

**Определение.** Для каждого элемента $x \in X$ определим множество $\overline{x} = \{t \in X \mid x \sim t\}$ — **класс эквивалентности** элемента $x$. Элемент $x$ при этом называется **представителем** класса эквивалентности $\overline{x}$.

**Задача 3.** Докажите, что для любых элементов $x, y \in X$ их классы эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают; то есть, либо $\overline{x} = \overline{y}$, либо $\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$.

**Теорема 4.** Любое отношение эквивалентности $\sim$ определяет разбиение на классы: множество $X$ можно разбить на непересекающиеся подмножества $X_i$ такие, что два элемента лежат в одном подмножестве тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

**Замечание.** Очевидно, существует и обратный путь: если задано разбиение множества $X$, то можно определить отношение эквивалентности на $X$ следующим образом: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x$ и $y$ лежат в одном множестве разбиения.

**Переформулировка теоремы.** Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности. Тогда существует множество $X/\sim$ и сюръективное отображение $\pi\colon X \to X/\sim$ такое, что $\pi(x) = \pi(y)$ тогда и только тогда, когда $x \sim y$. Такое множество $X/\sim$ называется **фактор-множеством** множества $X$ по отношению $\sim$, а отображение $\pi$ — **канонической проекцией** $X$ на $X/\sim$.

**Замечание.** Философский смысл $X/\sim$ состоит в том, что в этом множестве *отождествляются* элементы, которые раньше были всего лишь *эквивалентными*.

**Упражнение 5.** Как выглядит граф, соответствующий отношению эквивалентности?

**Упражнение 6.** Опишите фактор-множества по отношениям эквивалентности, приведенным в упражнении 2.

**Определение.** Будем называть **преобразованием** множества биективное отображение этого множества на себя. Напомним, что *перестановка* — это преобразование конечного множества. Пусть $G$ — некоторый набор преобразований множества $M$. Будем говорить, что элемент $x \in M$ **сравним** с элементом $y \in M$ **по модулю** $G$, если существует преобразование $f \in G$, переводящее $x$ в $y$. Элементы, сравнимые с $x$ по модулю $G$, образуют **орбиту** элемента $x$ относительно $G$.

**Задача 7.** Назовем *сдвигом на число $a$* преобразование множества $\mathbb{R}$ или множества $\mathbb{Z}$, переводящее каждое число $x$ в число $x + a$. Пусть $G_1$ — совокупность сдвигов множества $\mathbb{R}$ на всевозможные положительные числа, $G_2$ — совокупность сдвигов множества $\mathbb{R}$ на всевозможные неотрицательные числа, $G_3$ — совокупность сдвигов множества $\mathbb{R}$ на всевозможные целые числа, $G_4$ — совокупность сдвигов множества $\mathbb{Z}$ на всевозможные числа, кратные данному целому числу $m$. Что означает сравнимость двух вещественных чисел по модулю $G_1$? Модулю $G_2$? Модулю $G_3$? Сравнимость двух целых чисел по модулю $G_4$? Как выглядят орбиты чисел относительно этих наборов?

**Определение.** Непустой набор $G$ преобразований множества $M$ называется **группой преобразований**, если он обладает следующими двумя свойствами:

- если $f, g \in G$, то и $g \circ f \in G$;
- если $f \in G$, то и $f^{-1} \in G$;

**Задача 8.** Докажите, что любая группа преобразований содержит тождественное преобразование $\mathrm{id}_M$.

**Теорема 9.** Сравнимость элементов множества по модулю группы его преобразований является отношением эквивалентности. Иными словами, группа преобразований множества разбивает все его элементы на непустые непересекающиеся орбиты.

**Задача 10.** Какими группами преобразований порождены следующие отношения эквивалентности: а) равенство остатков целых чисел от деления на данное число $m$; б) равенство плоских фигур; в) параллельность прямых на плоскости; г) равенство направленных отрезков?

**Задача 11.** Опишите орбиты, возникающие при действии на плоскости: а) группы всех переносов на векторы, кратные данному ненулевому вектору $a$; б) группы всех поворотов вокруг данной точки на углы, кратные $60^\circ$; в) группы всех самосовмещений правильного треугольника (то есть движений, переводящих треугольник в себя).

**Задача 12.** Придумайте группы преобразований плоскости, орбитами которых были бы: а) окружности с данным центром; б) вершины правильных $k$-угольников с данным центром; в) лучи с данным началом (не включая само начало); г) спирали, исходящие из данной точки (не включая саму эту точку).

**Задача 13.** Докажите, что это отношения эквивалентности и опишите фактор-множества по ним: а) отношение на $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, при котором $(m,n) \sim (m',n') \Leftrightarrow m+n' = m'+n$; б) отношение на $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$, при котором $(m,n) \sim (m',n') \Leftrightarrow mn' = m'n$; в) отношение на вершинах графа, при котором $v \sim v'$, если существует путь между $v$ и $v'$.

# Скалярное произведение — 10 июля

**Определение. Скалярным произведением** двух ненулевых векторов $\overline{u}$ и $\overline{v}$ называется число $|u| \cdot |v| \cdot \cos(\widehat{\overline{u},\overline{v}})$. В случае, если хотя бы один из векторов $\overline{u}$ или $\overline{v}$ равен $\overline{0}$, их скалярное произведение также считается равным 0. Скалярное произведение векторов $\overline{u}$ и $\overline{v}$ обозначается через $(\overline{u},\overline{v})$ или $\overline{u} \cdot \overline{v}$.

**Задача 1.** Для произвольных точек пространства $A$, $B$, $C$ и $D$ докажите формулу $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$.

**Задача 2.** Точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой. Найдите геометрическое место точек $M$ таких, что $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MB} \cdot \overline{MC} = \overline{MC} \cdot \overline{MA}$.

**Задача 3.** Правильный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписан в окружность радиуса $R$ с центром в $O$; $X$ — произвольная точка. Докажите, что $|A_1X|^2 + \cdots + |A_nX|^2 = n(R^2+d^2)$, где $d = |OX|$.

**Задача 4.** Пусть $O$ — центр описанной окружности, $H$ — ортоцентр треугольника $ABC$, $M$ — точка пересечения медиан этого треугольника. Докажите, что а) $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$; б) точки $M$, $H$, $O$ лежат на одной прямой **(прямая Эйлера)**, причем $MH = 2OM$; в) $OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$.

**Задача 5.** Даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ с координатами $(x_1,y_1)$ и $(x_2,y_2)$ соответственно. Докажите, что $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

**Задача 6.** Пусть $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — углы остроугольного треугольника $ABC$. Докажите, что а) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2}$; б) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$.

## Для самостоятельного решения

**Задача 7.** Вещественные числа $a$, $b$, $c$ и $d$ таковы, что $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$. Найдите $ab+cd$.

**Задача 8 (Формула Стюарта).** В треугольнике $ABC$ проведен отрезок $AA_1$, где точка $A_1$ делит сторону $BC$ в отношении $\frac{p}{q}$, считая от $B$. Докажите, что $AA_1^2 = \frac{p}{p+q}AC^2 + \frac{q}{p+q}AB^2 - \frac{pq}{(p+q)^2}BC^2$.

**Задача 9.** Диагонали некоторого четырехугольника перпендикулярны. Доказать, что диагонали любого другого четырехугольника с соответственно равными сторонами также перпендикулярны.

**Задача 10.** Точки $A, B, C, D$ таковы, что для любой точки $M$ числа $(\overline{MA},\overline{MB})$ и $(\overline{MC},\overline{MD})$ различны. Докажите, что $\overline{AC} = \overline{DB}$.

**Задача 11.** Докажите, что в выпуклом $k$-угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до сторон постоянна тогда и только тогда, когда сумма векторов единичных внешних нормалей к сторонам многоугольника равна нулю.

**Задача 12.** В выпуклом четырехугольнике сумма расстояний от вершины до сторон одна и та же для всех вершин. Докажите, что этот четырехугольник является параллелограммом.

**Задача 13.** Даны точки $A, B, C, D$. Докажите, что $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geqslant AC^2 + BD^2$, причем равенство достигается, только если $ABCD$ — параллелограмм.

**Задача 14.** Точки $P$ и $Q$ — середины диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$.

**Задача 15.** Дано восемь вещественных чисел $a, b, c, d, e, f, g, h$. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd, ae + bf, ag + bh, ce + df, cg + dh, eg + fh$ неотрицательно.

# Сильная связность ориентированных графов

11 июля

**Определения.** Пусть $G$ — ориентированный граф. Множество вершин графа мы будем обозначать через $V(G)$. Вершины $a$ и $b$ ориентированного графа $G$ назовем **связанными**, если в графе $G$ существуют пути из $a$ в $b$ и из $b$ в $a$.

**Упражнение 1.** Покажите, что отношение связанности является отношением эквивалентности на множестве $V(G)$,

**Определение.** Классы эквивалентности относительно этого отношения называются **компонентами сильной связности**. Ориентированный граф $G$ называется **сильно связным**, если любые две его вершины связаны, то есть у него ровно одна компонента сильной связности. Построим для нашего ориентированного графа $G$ **граф компонент сильной связности** $C(G)$, вершины которого соответствуют компонентам сильной связности ориентированного графа $G$. Проведем в графе $C(G)$ ребро $V_i \to V_j$ тогда и только тогда, когда в графе $G$ есть хотя бы одно ребро, направленное от одной из вершин компоненты $V_i$ к одной из вершин компоненты $V_j$.

**Упражнение 2.** Для любого ориентированного графа $G$ выполняются следующие утверждения.

а) В графе $C(G)$ нет циклов.

б) Для любой компоненты сильной связности $V_i$ граф $G(V_i)$ на вершинах множества $V_i$ с ребрами графа $G$ между этими вершинами сильно связен.

**Определение.** Пусть $V_i$ — компонента сильной связности ориентированного графа $G$. Назовем эту компоненту **промежуточной**, если в графе $C(G)$ существует ребро, входящее в $V_i$, и существует ребро, выходящее из $V_i$. В противном случае назовем компоненту $V_i$ **крайней**.

**Задача 3.** В ориентированном графе 200 вершин, из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно добавить не более 100 новых ориентированных ребер так, чтобы этот граф стал сильно связным. (Между двумя вершинами может быть проведено несколько ребер.)

**Задача 4.** Для сильно связного ориентированного графа $G$ на $n$ вершинах выполняются следующие утверждения.

а) Существует сильно связный остовный подграф графа $G$, в котором не более $2n - 2$ ребер.

б) Если в графе $G$ между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра, то существует сильно связный остовный подграф графа $G$, в котором не более $2n - 3$ ребер.

**Упражнение 5.** Для всех $n \geq 3$ постройте примеры графов, для которых оценки из предыдущей задачи являются точными.

**Задача 6.** а) В полном ориентированном графе существует **гамильтонов путь** (т. е. путь, проходящий по каждой вершине ровно один раз). б) В полном сильно связном ориентированном графе существует **гамильтонов цикл** (т. е. цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз).

**Задача 7.** В сильно связном полном ориентированном графе с четырьмя и более вершинами существует вершина, удаление которой не нарушает сильной связности графа.

**Упражнение 8.** Покажите, что для $n = 5$ утверждение предыдущей задачи неверно.

**Задача 9.** Структура компонент сильной связности полного ориентированного графа представляет собой цепь $V_1V_2 \ldots V_m$, в которой для любых двух различных компонент $V_i$ и $V_j$, где $i < j$, все ребра графа ориентированы от $V_i$ к $V_j$.

**Задача 10.** Дан полный ориентированный граф $G$ с $n \geq 7$ вершинами. Докажите, что в этом графе можно выбрать вершину $v$ и поменять направление всех ребер с концами в $v$ так, чтобы получился сильно связный ориентированный граф.

**Упражнение 11.** Докажите, что все полные ориентированные граф на 3 и 5 вершинах удовлетворяют утверждению предыдущей задачи. Найдите все полные ориентированные графы на $2, 4$ и 6 вершинах, для которых это утверждение неверно.

---

# Основная теорема арифметики для многочленов 11 июля

**Определение.** Пусть $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Многочлен $d \in R[x]$ называется **общим делителем** многочленов $f$ и $g$, если $f \,\vdots\, d$ и $g \,\vdots\, d$. Многочлен $d$ называется **наибольшим общим делителем** $f$ и $g$, если его степень не меньше степени любого другого общего делителя $f$ и $g$. Обозначение: $d = (f, g)$.

**Задача 1.** Вспомните **алгоритм Евклида** для целых чисел и попробуйте применить его к многочленам.

**Задача 2.** Пусть $f, g, d \in \mathbb{R}[x]$. Докажите, что следующие три утверждения равносильны:

• а) $d = (f, g)$;

• б) результатом работы алгоритма Евклида для многочленов $f$ и $g$ является многочлен, отличающийся от $d$ домножением на константу;

• в) любой общий делитель многочленов $f$ и $g$ делит многочлен $d$.

**Задача 3.** Докажите, что а) $(x^m - 1, x^n - 1) = x^{(m,n)} - 1$; б) $(x^{2^m} + 1, x^{2^n} + 1) = 1$ при $m \neq n$.

**Задача 4 (линейное представление НОД).** Докажите, что для любых двух многочленов $f$ и $g$ существуют многочлены $u$ и $v$ такие, что $fu + gv = (f, g)$.

**Задача 5.** Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{6\alpha^3 + 7\alpha^2 - 2\alpha - 1}$, где $\alpha$ — корень многочлена $2x^2 + x - 2$.

**Определение.** Многочлен $f \neq 0$ называется **неприводимым**, если его нельзя представить в виде $f = gh$, где $\deg g > 0$, $\deg h > 0$.

**Задача 6.** Докажите, что если $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$ таковы, что $fg \,\vdots\, h$ и $(f, h) = 1$, то $g \,\vdots\, h$

**Теорема 7 (основная теорема арифметики).** Любой ненулевой многочлен может быть единственным образом представлен в виде произведения неприводимых сомножителей с точностью до перестановки и домножения этих сомножителей на константы.

**Задача 8.** Докажите, что любой общий делитель двух многочленов делит их НОД.

**Задача 9.** Пусть $f, g \in \mathbb{Q}[x]$. Докажите, что $(f, g) \in \mathbb{Q}[x]$.

**Задача 10.** Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $f(b) - f(a)$ делится на $b - a$.

**Определение.** Отношение двух многочленов называется **алгебраической дробью**. Алгебраическая дробь, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, называется **правильной.**

**Замечание.** Конечно, *на самом деле* отношение двух многочленов — это лишь `способ записи` алгебраической дроби: так, $(x^2+x)/(x^2+2x+1)$ и $x/(x+1)$ — это одна и та же дробь. Ситуация напоминает нашу возню с `направленными отрезками` и `векторами`, но еще драматичнее: указанные отношения определяют даже *разные функции*, поскольку их области определения (множества, где знаменатель не обращается в 0) различны.

**Задача 11.** Попытайтесь дать (чуть более) *правильное* определение алгебраической дроби. **Указание:** посмотрите на задачу 13б из листочка *Отношения эквивалентности и группы преобразований.*

**Задача 12.** а) Рассмотрим алгебраическую дробь $\dfrac{f}{g_1g_2}$, где $(g_1, g_2) = 1$. Докажите, что эту дробь можно представить в виде суммы двух дробей со знаменателями $g_1$ и $g_2$. б) У правильной алгебраической дроби знаменатель имеет степень $n$ и $n$ различных вещественных корней. Докажите, что эту дробь можно представить в виде суммы алгебраических дробей, числители которых равны константам.

# Десятичные дроби (по школьному учебнику 6 класса) 11 июля

Изучаем длины периодов и предпериодов десятичных записей дробей $\frac{a}{b}$. Ясно, что все сводится к случаю $0 < a < b$, $(a, b) = 1$.

**1.** Дробь является *конечной* $\iff$ $b$ имеет вид $2^n5^m$.
*В дальнейшем считаем, что* $b \neq 2^n5^m$.

**Алгоритм деления столбиком** при правильном взгляде на вещи состоит в следующем. Полагаем $r_0 = a$ и считаем рекуррентно $10 \cdot r_{i-1} = bq_i + r_i$ (деление с остатком). При этом $q_i$ – $i$-тая цифра после запятой в равенстве $\frac{a}{b} = 0,q_1q_2q_3\ldots$

**2.** а) Докажите, что получается периодическая дробь с периодом не более $b - 1$.
б) и даже сумма длин периода и предпериода не более $b - 1$.

**Еще одно понимание алгоритма деления столбиком** состоит в следующем. Делим с остатком: $a \cdot 10^k = bQ_k + r_k$. Тогда $Q_k$ – число, образованное первыми $k$ цифрами после запятой, $r_k$ – то же самое, что ранее (тем самым $r_k$ оказывается остатком при делении $a \cdot 10^k$ на $b$).

................................ Случай $(b, 10) = 1$ ................................

**3.** а) Докажите, что $(r_i, b) = 1$.
б) Докажите, что длина периода не превосходит $\varphi(b)$.

**4.** Докажите, что зацикливание происходит без предпериода. При этом длина периода не зависит от $a$ и равна наименьшему $t$, для которого $10^t - 1 \,\vdots\, b$.

**5.** Пусть наименьший период некоторой последовательности равен $l$, а $L$ – некоторый другой период. Докажите, что $L \,\vdots\, l$.

**Теорема 1**. Пусть $a < b$, $(a, b) = 1$, $(b, 10) = 1$. Тогда дробь $\frac{a}{b}$ не имеет предпериода. Длина периода есть наименьшее $t$, для которого $10^t - 1 \,\vdots\, b$. Это $t$ является делителем $\varphi(b)$ и не зависит от $a$.

**Замечание.** На самом деле $t$ является делителем $L(b)$.

**Замечание.** Период дроби $1/b$ ($(b, 10) = 1$) может равняться $b - 1$ только для простых $b$. Множество таких простых чисел предположительно бесконечно.

................................ $(b, 10)$ – произвольно ................................

**6.** Дробь $0,RTTT\ldots$ ($R$ – из $k$ цифр, $T$ – из $t$ цифр) равна $\frac{R}{10^k} + \frac{T}{10^k(10^t-1)}$.

**7.** Если $(b, 10) \neq 1$, то в десятичной записи $\frac{a}{b}$ обязательно есть предпериод.

**Теорема 2**. Пусть $a < b$, $(a, b) = 1$, $b = 2^x5^yb'$, $l = \max\{x, y\}$. Тогда период дроби $\frac{a}{b}$ равен периоду дроби $\frac{1}{b'}$, а предпериод в точности равен $l$, и не может быть меньше.

**8.** Каково наибольшее значение длины предпериода среди всех несократимых дробей со знаменателем $\leq 2008$?

**9.** Найдите длину периода суммы (разности) двух дробей из задачи 6 с одинаковыми $k$ и $t$.

**10.** Приведите пример дробей с предпериодами, при сложении которых предпериод исчезает, а период меньше, чем оба периода слагаемых.

**Теорема 3.** Период суммы(разности) двух дробей явяется делителем НОКа периодов, а предпериод не превосходит максимума периодов.

## Для самостоятельного решения

**11.** $p > 5$ – простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби $1/p$ равна $2n$. Докажите, что если этот период разбить на два $n$-значных куска, то сумма чисел в этих кусках равна $99\ldots9$ ($n$ девяток). Например, $1/7 = 0.(142857)$, $142 + 857 = 999$.

# Геометрия масс 12 июля

### Определение центра масс и его свойства

Пусть $M$ — некоторая точка плоскости и $m$ — ненулевое число. **Материальной точкой (м. т.)** называется пара $(M, m)$, и это число называется **массой** материальной точки $M$ (считая, что она может быть и отрицательной), а сама точка $M$ — **носителем** этой м. т. Мы часто будем писать $mM$ вместо $(M, m)$. **Центром масс** материальных точек $m_1M_1, m_2M_2, \ldots, m_nM_n$ называется такая точка $Z$, для которой имеет место равенство

$$m_1\overline{ZM_1} + m_2\overline{ZM_2} + \cdots + m_n\overline{ZM_n} = \overline{0}.$$

**Теорема 1 (Основная теорема).** а) Если точка $Z$ служит центром масс системы м. т. $m_1M_1$, $m_2M_2, \ldots, m_nM_n$, причем $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \neq 0$, то при любом выборе на плоскости точки $O$ справедливо равенство

$$\overline{OZ} = \frac{m_1\overline{OM_1} + m_2\overline{OM_2} + \cdots + m_n\overline{OM_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

б) Обратно, если хотя бы для одной точки $O$ выполняется это равенство, то точка $Z$ — центр масс данной системы м. т.

**Следствие.** Для конечной системы м. т. с ненулевой суммой масс центр масс существует и определяется однозначно.

Далее везде, говоря о системе материальных точек, будем предполагать, что сумма масс ее точек отлична от нуля.

**Теорема 2 (Правило рычага).** Центр масс $Z$ двух м. т. $m_1A$ и $m_2B$ с неотрицательными массами расположен на отрезке $AB$, причем $m_1|AZ| = m_2|BZ|$.

**Теорема 3 (Правило группировки).** Пусть в системе м. т. $m_1M_1$, $m_2M_2$, $\ldots$, $m_nM_n$ отмечены $k$ материальных точек $m_1M_1, m_2M_2, \ldots, m_kM_k$ и пусть $C$ — центр масс отмеченных м. т. Если всю массу отмеченных м. т. сосредоточить в их центре масс $C$, то от этого положение центра масс всей системы не изменится. Иначе говоря, система $m_1M_1, m_2M_2, \ldots, m_nM_n$ имеет тот же центр масс, что и система м. т. $(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)C, m_{k+1}M_{k+1}, \ldots, m_nM_n$.

### Задачи

**Задача 4.** В треугольнике $ABC$ проведена медиана $AM$, точка $P$ — ее середина. Прямая $BP$ пересекает сторону $AC$ в точке $E$. Найдите, в каком отношении точка $E$ делит $AC$.

**Задача 5.** Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, $K, L, M, N$ — середины сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Доказать, что точка пересечения отрезков $KM$ и $LN$ является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей $AC$ и $BD$.

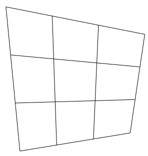
**Задача 6 (Теорема Чевы)** Дан треугольник $ABC$, точки $A_1, B_1, C_1$ лежат на прямых $BC$, $CA$, $AB$ соответственно. Доказать, что прямые $AA_1, BB_1, CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1.$$

**Задача 7.** Пусть вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AB$, $BC$, $CA$ в точках $C_1$, $A_1$, $B_1$ соответственно. Доказать, что прямые $AA_1, BB_1, CC_1$ пересекаются в одной точке **(точка Жергонна).**

**Задача 8.** В окружность вписан четырехугольник $ABCD$; $M$ — точка пересечения его диагоналей, $Q$ — середина стороны $CD$. Вычислить, в каком отношении делит прямая $MQ$ сторону $AB$, если известно, что $AD = a, BC = b$.

**Задача 9.** Точки, разбивающие каждую из сторон четырехугольника на три равные части, соединены так, как показано на рисунке. Докажите, что а) каждый из полученных отрезков также разбивается точками пересечения на три равные части; б) площадь среднего четырехугольничка в девять раз меньше площади исходного четырехугольника; в) сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для «сетки» $(2m+1) \times (2n+1)$.



## Для самостоятельного решения

**Задача 10.** На сторонах $AB, BC, CD, DA$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки $K$, $L$, $M$, $N$ соответственно, причем $AK : KB = DM : MC = a$ и $BL : LC = AN : ND = b$. Пусть $P$ — точка пересечения отрезков $KM$ и $LN$. Доказать, что $NP : PL = a$ и $KP : PM = b$.

**Задача 11 (Теорема Менелая)** Дан треугольник $ABC$, точки $A_1, B_1, C_1$ лежат на прямых $BC$, $CA$, $AB$ соответственно. Доказать, что точки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

**Задача 12 (Ван-Обель).** Через точку $M$ проведены три прямые $AA_1, BB_1, CC_1$ (точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на сторонах треугольника $ABC$ или на их продолжениях). Доказать, что

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} + \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MA_1}}.$$

**Задача 13.** На окружности дано $n$ точек. Через центр масс $n-2$ точек проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две оставшиеся точки. Доказать, что все такие прямые пересекаются в одной точке.

**Задача 14.** Высоты треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Докажите, что прямые Эйлера треугольников $ABC$, $HBC$, $AHC$ и $ABH$ пересекаются в одной точке.

# Внутренний математический бой 12 июля

**1.** В селе Вишкиль живет больше 100 человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Вишкиле найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя.

**2.** Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения медиан двух противоположных треугольников, перпендикулярна прямой, соединяющей ортоцентры двух других треугольников.

**3.** Можно ли при любой раскраске плоскости в два цвета выбрать один из них, точками которого реализуются все расстояния?

**4.** На доске написано произвольное простое число. Каждую минуту Вася приписывает к нему справа по цифре, отличной от 3. Может ли он делать это так, чтобы все время получались простые числа?

**5.** Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ задана правилами: $x_1 = 2$, $x_{n+1}$ — наибольший простой делитель числа $x_1 x_2 \ldots x_n + 1$ при всех $n \geq 1$. Докажите, что $x_n \neq 5$ ни при каком натуральном $n$.

**6.** Пусть $\{a_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ — последовательность различных натуральных чисел. Докажите, что выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

**7.** Пусть $n$ — натуральное число. Найдите все вещественные $x$, $y$ такие, что $(x+y)^n = x^n + y^n$.

**8.** Точка $D$ лежит на стороне $BC$ треугольника $ABC$. Оказалось, что $AD = BC$, $\angle DAB = \angle ADB = 40^\circ$. Найдите $\angle ACB$.

# Сопряженные преобразования и все такое 14 июля

«Да, *сопрягать надо, сопрягать надо!*» — с внутренним восторгом повторил себе Пьер, чувствуя, что этими именно, и только этими словами выражается то, что он хотел выразить, и разрешается весь мучащий его вопрос.
— Да, сопрягать надо, пора сопрягать.

Лев Толстой. *Война и мир*, т. III, ч. III, IX.

**Задача 1.** Докажите, что движение полностью определяется образами трех точек.

**Задача 2.** Докажите, что любое движение можно представить в виде композиции осевых симметрий.

**Определение.** Пусть $G$ — некоторая группа преобразований множества $M$, и преобразования $g$, $h$ лежат в $G$. Преобразование ${}^h g = h \circ g \circ h^{-1}$ называется **сопряженным к $g$ при помощи $h$ слева**. Два элемента $f, g \in G$ называются **сопряженными в $G$**, если найдется такое $h \in G$, что $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Аналогично, элемент $g^h = h^{-1} \circ g \circ h$ называется **сопряженным к $g$ при помощи $h$ справа**.

**Упражнение 3.** Докажите, что

- если $g = f^h$, то $f = g^{h^{-1}}$;  если $g = {}^h f$, то $f = {}^{h^{-1}} g$;
- $x^{h \circ g} = (x^h)^g$;  ${}^{h \circ g} x = {}^h({}^g x)$;
- $(x \circ y)^g = x^g y^g$;  ${}^g(x \circ y) = {}^g x \circ {}^g y$;
- $(x^{-1})^g = (x^g)^{-1}$;  ${}^g(x^{-1}) = ({}^g x)^{-1}$;
- $g^h = {}^{h^{-1}} g$.

**Задача 4.** Докажите, что сопряженность в $G$ является отношением эквивалентности.

**Обозначения:** $T_{\bar{a}}$ — параллельный перенос на вектор $\bar{a}$, $R_O^\alpha$ — поворот на угол $\alpha$ (против часовой стрелки) вокруг точки $O$, $S_l$ — осевая симметрия относительно прямой $l$.

**Задача 5.** Пусть $f$ —движение. Докажите, что а) ${}^f(T_{\bar{a}}) = T_{\tilde{f}(\bar{a})}$; б) ${}^f(S_l) = S_{f(l)}$; в) ${}^f(R_O^\alpha) = R_{f(O)}^{\pm\alpha}$, где при $\alpha$ стоит знак «+» тогда и только тогда, когда $f$ сохраняет ориентацию.

**Определение.** Пусть $f$ — преобразование множества $M$. Преобразование $f$ называется **самосовмещением** подмножества $\Phi$ множества $M$, если множество $\Phi$ переходит в себя при этом преобразовании, то есть $f(\Phi) = \Phi$.

**Упражнение 6.** Докажите, что если $\Phi \subseteq M$, то все самосовмещения подмножества $\Phi$ образуют группу преобразований.

**Определение.** Пусть $G$ — группа преобразований множества $M$. Подмножество $H \subseteq G$ называется **подгруппой** $G$ (обозначение: $H \leq G$), если оно само является группой преобразований.

Часто мы будем рассматривать следующую ситуацию: $G$ — группа всех движений плоскости, $\Phi$ — некоторая плоская фигура. В этом случае группа самосовмещений фигуры $\Phi$ называется **группой симметрий** $\Phi$; она является подгруппой в $G$.

**Задача 7.** Сколько элементов в группе симметрий а) правильного треугольника; б) прямоугольника, не являющегося квадратом; в) квадрата; г) правильного пятиугольника; д) правильного $n$-угольника?

Часто рассматриваются группы не *всех* самосовмещений фигуры, а только тех, которые сохраняют `что-нибудь`.

**Упражнение 8.** Сколько элементов в группе симметрий правильного $n$-угольника, сохраняющих ориентацию?

## Для самостоятельного решения

**Задача 9.** Докажите, что если $f$ является самосовмещением подмножества $\Phi$, а $h$ — любое преобразование множества $M$, то ${}^hf$ является самосовмещением подмножества $h(\Phi)$.

**Задача 10.** Рассмотрим группу преобразований $G$ конечного множества $M$, состоящую из всех его перестановок. а) Пусть $f, h \in G$. Докажите, что $f$ и ${}^hf$ имеют один и тот же цикленный тип. б) Докажите, что для любых двух перестановок $f, g \in G$, имеющих одинаковый цикленный тип, найдется перестановка $h \in G$ такая, что $g = {}^hf$. в) Верно ли утверждение пункта б, если $G$ — группа преобразований, состоящая не из всех перестановок, а только из четных?

**Задача 11.** Докажите, что любое движение можно представить в виде композиции не более чем трех осевых симметрий.

# Многочлены над $\mathbb{Z}$ 14 июля

**Воспоминания.** Отныне мы будем рассматривать многочлены с коэффициентами не только в $\mathbb{R}$, но и в других числовых системах, например, в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$. Пусть $K$ — такая числовая система; через $K[x]$ мы будем обозначать множество всех многочленов с коэффициентами из $K$. Конечно, любой многочлен из $K[x]$ является и многочленом над $\mathbb{R}$, то есть $K[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$. Но другие понятия, например, `неприводимость`, могут измениться при переходе от $\mathbb{R}$ к $K$: многочлен называется **неприводимым над** $K$, если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов степени выше нулевой с коэффициентами из $K$.

**Задача 1.** Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$. Докажите, что для любых целых $a \neq b$ число $f(b) - f(a)$ делится на $b - a$.

**Задача 2.** Пусть $f(x) = a_nx^n + \dots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если $f$ имеет рациональный корень $p/q$ (здесь $p/q$ — несократимая дробь), то а) $a_0 \vdots p$ и $a_n \vdots q$; б) многочлен $f$ можно представить в виде $f = (qx - p)g$, где $g \in \mathbb{Z}[x]$.

**Задача 3.** Пусть $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ и $f = gh$. Известно, что не все коэффициенты $g$ четны и не все коэффициенты $h$ четны. Докажите, что не все коэффициенты $f$ четны.

**Определение. Содержанием** многочлена $f \in Z[x]$ называется наибольший общий делитель его коэффициентов (обозначение: $c(f)$). Многочлен называется **примитивным**, если его содержание равно 1.

**Упражнение 4.** Любой многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ можно представить в виде $f = c(f)f_1$, где $f_1$ — примитивный многочлен.

**Задача 5 (Лемма Гаусса).** Произведение примитивных многочленов примитивно.

**Следствие.** $c(fg) = c(f)c(g)$.

**Теорема 6.** Если многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим над $\mathbb{Q}$.

**Теорема 7 (критерий Эйзенштейна).** Пусть все коэффициенты многочлена над $\mathbb{Z}$, кроме старшего, делятся на простое число $p$ и свободный член не делится на $p^2$. Докажите, что этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

## Для самостоятельного решения

**Задача 8.** Докажите, что многочлен $x^{p-1}+\cdots+x+1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ (здесь $p$ — простое число).

**Задача 9.** Пусть $f\in\mathbb{Z}[x]$ принимает целые значения $\pm1$ при двух различных целых значениях $a,b$. Докажите, что а) если $|b-a|>2$, то $f$ не имеет рациональных корней; б) если $|b-a|\le 2$, то рациональным корнем может быть лишь $(b+a)/2$.

**Задача 10.** Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n$ — различные целые числа. Докажите, что многочлены

а) $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$;

б) $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$

неприводимы над $\mathbb{Z}$.

# Наследственное свойство и теорема Турана — 15 июля

**Определение.** Свойство $P$ называется **наследственным**, если для любого обладающего свойством $P$ графа $G$ любой подграф графа $G$ также обладает свойством $P$.

**Задача 1.** а) Пусть $P(n)$ — наибольшее количество ребер в графе с $n$ вершинами, обладающим наследственным свойством $P$. Докажите, что

$$P(n)\le\frac{n}{n-2}P(n-1).$$

Найдите при помощи пункта а) наибольшее количество ребер в графе на $n$ вершинах без

б) треугольника;

в) полного графа на 4 вершинах;

г) полного графа на 4 вершинах без одного ребра.

д) **(Теорема Турана)** Докажите, что в графе на $n$ вершинах без полного подграфа на $k+1$ вершине не более чем

$$C_s^2(m+1)^2+C_{k-s}^2m^2+s(k-s)m(m+1)=\frac{1}{2}\cdot(s^2-2sm-s+m^2k^2-m^2k+2smk)$$

ребер, где $m$ и $s$ — соответственно неполное частное и остаток от деления $n$ на $k$. Приведите пример графа, для которого оценка является точной.

# Варьирование — 15 июля

**Задача 1.** Дан треугольник $ABC$. Построить квадрат, одна сторона которого лежит на прямой $BC$, а две противоположные вершины — на сторонах $AB$ и $AC$.

**Задача 2.** Внутри треугольника расположен отрезок. Докажите, что его длина не превосходит длины наибольшей стороны треугольника.

**Задача 3.** Внутри параллелограмма расположен треугольник. Докажите, что его площадь не превосходит половины площади параллелограмма.

**Задача 4.** Постройте треугольник, у которого $m_A>10l_A>100h_A$, где $m_a,l_A,h_A$ — соответственно медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины $A$.

**Задача 5.** а) Докажите, что если сумма двух положительных чисел постоянна, то их произведение будет наибольшим, когда эти числа равны. б) Докажите, что если сумма $n$ положительных чисел постоянна, то их произведение будет наибольшим, когда эти числа равны. в) Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

**Задача 6.** Треугольники $ABC_1$ и $ABC_2$ имеют общее основание $AB$ и $\angle AC_1B = \angle AC_2B$. Докажите, что если $|AC_1 - C_1B| < |AC_2 - C_2B|$, то: а) площадь треугольника $ABC_1$ больше площади треугольника $ABC_2$; б) периметр треугольника $ABC_1$ больше периметра треугольника $ABC_2$.

**Задача 7.** Докажите, что а) среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный; б) среди всех $n$-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный; в) среди всех $n$-угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный.

**Задача 8.** На плоскости дано $n$ красных и $n$ синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести $n$ отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.

### Для самостоятельного решения

**Задача 9.** Пусть $k, n$ — натуральные числа. Для произвольных положительных чисел $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{kn}$ докажите неравенство

$$(a_{11}^k + a_{12}^k + \dots + a_{1n}^k)\dots(a_{k1}^k + a_{k2}^k + \dots + a_{kn}^k) \geq (a_{11}a_{21}\dots a_{k1} + \dots + a_{1n}a_{2n}\dots a_{kn})^k.$$

**Задача 10.** На плоскости даны 2008 точек и 2008 прямых. Докажите, что прямые и точки можно занумеровать числами от 1 до 2008 так, чтобы перпендикуляры, опущенные из $i$-ой точки на $i$-ую прямую, не пересекались.

## Китайская теорема об остатках 15 июля

**Теорема.** Пусть $m_1, m_2, \dots, m_k$ — попарно взаимно простые числа, $0 \leq r_i < m_i$ — некоторый набор остатков по модулям $m_i$. Существует число $N$, дающее остаток $r_i$ при делении на $m_i$ для всех $i = 1, \dots, k$, причем любые два таких числа сравнимы по модулю $m = m_1 \dots m_k$.

**План доказательства:**

• Докажите, что любые два таких числа сравнимы по модулю $m$.

• Рассмотрим отображение $\pi\colon \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_k}$, сопоставляющее остатку $A$ по модулю $m$ набор остатков $(A \bmod m_1, \dots, A \bmod m_k)$ по модулям $m_i$. Предыдущий пункт гласит, что это отображение инъективно. Сравните мощности области определения и области значений $\pi$ и сделайте вывод, что оно биективно.

• **Бонус:** Докажите, что при отображении $\pi$ обратимые остатки в $\mathbb{Z}_m$ соответствуют наборам остатков по модулям $\mathbb{Z}_i$, в которых все остатки обратимы. Выведите отсюда еще одно доказательство мультипликативности функции Эйлера.

Это доказательство хорошо всем, кроме того, что оно не дает возможности для прямой конструкции числа $N$.

**Второе доказательство:** индукция по $k$ сводит все к случаю $k = 2$, и тут помогает линейное представление НОД.

### Для самостоятельного решения

**Упражнение 0.** Найдите все натуральные $x$, такие что $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 5 \pmod{7}$, $x \equiv 7 \pmod{143}$.

**Задача 1 (третье доказательство китайской теоремы об остатках).** Пусть $M_i = m/m_i$, а $x_i$ — остаток, обратный к остатку $M_i$ по модулю $m_i$. Докажите, что число $N = \sum_{i=1}^k M_i x_i r_i$ дает остаток $r_i$ по модулю $m_i$ для всех $i = 1, \dots, k$.

**Задача 2.** Для попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \dots, m_k$ докажите, что любую правильную дробь вида $\dfrac{c}{m_1 m_2 \dots m_k}$ можно записать в виде алгебраической суммы (с учетом знака) правильных дробей вида $n_i/m_i$ $(i = 1, \dots, k)$.

**Задача 3.** При каких натуральных $n$ существует число, которое при делении на числа $1, 2, \ldots, n$ дает ровно $n-3$ различных остатка?

**Задача 4.** Число называется **свободным от квадратов**, если оно не делится на квадрат натурального числа, большего 1. При каких $n$ найдется $n$ последовательных чисел, не свободных от квадратов.

**Задача 5.** Для какого наибольшего $n$ найдется $n$ последовательных натуральных чисел таких, что сумма цифр первого делится на 1, сумма цифр второго делится на 2, …, сумма цифр $n$-го делится на $n$?

## Раскраски графов и теорема Брукса 16 июля

**Задача 1.** Степень любой вершины графа не превосходит $d$. Докажите, что его вершины можно покрасить в $d+1$ цвет правильным образом.

**Задача 2.** Дан ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более $d$ ребер. Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в $2d+1$ цвет.

**Задача 3.** Степень любой вершины графа не превосходит $d$. Докажите, что его вершины можно раскрасить в $d^2+1$ цвет таким образом, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами одинакового цвета было более двух ребер.

**Задача 4.** Степени всех вершин связного графа не превосходят $d$. Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в $d$ цветов, если

а) есть вершина, имеющая степень меньше, чем $d$;

б) есть вершина, при удалении которой граф теряет связность;

в) $d > 2$ и есть две вершины такие, что при удалении их обоих граф теряет связность;

г) есть три вершины $u$, $v$ и $w$ такие, что $u$ смежна с $v$ и $w$, вершины $v$ и $w$ не смежны и при удалении вершин $v$ и $w$ связность не нарушается.

д) **(Теорема Брукса)** Степени всех вершин связного графа, не являющегося нечетным циклом и полным графом из $d+1$ вершины, не превосходят $d$. Докажите, что его вершины можно раскрасить в $d$ цветов правильным образом.

## Гомотетия 16 июля

**Определение. Гомотетией** с центром в точке $O$ и коэффициентом $k$ называется преобразование плоскости $H_O^k$, которое каждую точку $M$ переводит в точку $M' = H_O^k(M)$, для которой выполнено равенство $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$. Будем говорить, что две фигуры **гомотетичны**, если существует гомотетия, переводящая одну в другую.

**Упражнение 1.** Докажите, что преобразование векторов плоскости, индуцированное гомотетией, состоит в умножении на $k$.

**Упражнение 2.** Докажите, что при гомотетии прямые переходят в параллельные прямые, окружности — в окружности.

**Задача 3.** а) Какое преобразование является обратным к $H_O^k$? б) Чем является композиция $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$?

**Упражнение 4 (прямая Эйлера возвращается).** С помощью гомотетии докажите, что ортоцентр, центр описанной окружности и точка пересечения медиан треугольника лежат на одной прямой.

**Задача 5 (теорема о трех колпаках).** Общие внешние касательные к парам окружностей $S_1$ и $S_2$, $S_2$ и $S_3$, $S_3$ и $S_1$ пересекаются в точках $A$, $B$ и $C$ соответственно. Докажите, что точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой.

**Задача 6 (лемма Архимеда).** В окружности $\Omega$ проведена хорда $AB$. Окружность $\omega$ касается хорды $AB$ в точке $P$ и окружности $\Omega$ в точке $Q$. Докажите, что $PQ$ проходит через середину дуги $AB$, не содержащей точки $Q$.

## Для самостоятельного решения

**Задача 7.** Пусть $R$ — радиус описанной окружности треугольника $ABC$, а $r$ — радиус вписанной. Докажите, что $R \geq 2r$. В каких случаях достигается равенство?

**Задача 8.** Отрезок $AB$ пересекает две равные окружности и параллелен прямой, проходящей через их центры, причем все точки пересечения отрезка с окружностями лежат между $A$ и $B$. Через точку $A$ проводятся касательные к окружности, ближайшей к $A$, через точку $B$ — касательные к окружности, ближайшей к $B$. Оказалось, что эти четыре касательные образуют четырехугольник, содержащий внутри себя обе окружности. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

**Задача 9.** Вписанная окружность $\omega$ треугольника $ABC$ касается стороны $BC$ в точке $X$. Точка $Y$ окружности $\omega$ диаметрально противоположна точке $X$. Прямая $AY$ пересекает сторону $BC$ в точке $Z$. Докажите, что $BZ = CX$.

**Задача 10.** Докажите, что в любой выпуклый многоугольник можно поместить два многоугольника, подобных исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$ так, чтобы они не имели общих внутренних точек.

**Задача 11.** Три окружности одинаковых радиусов вписаны в углы $A$, $B$, $C$ треугольника $ABC$. Четвертая окружность касается внешним образом всех этих трех окружностей. Докажите, что ее центр лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника $ABC$.

**Задача 12.** Пусть $M$ — центр масс $n$-угольника $A_1 \ldots A_n$; для каждого $k$ пусть точка $M_k$ — центр масс $(n-1)$-угольника, полученного из этого $n$-угольника выбрасыванием вершины $A_k$. Докажите, что многоугольники $A_1 \ldots A_n$ и $M_1 \ldots M_n$ гомотетичны.

# Математический бой профи-7 — профи-8 17 июля

**1.** В однокруговом волейбольном турнире участвовали 14 команд. *Интересной* назовем команду, выигравшую нечетное число матчей, а *особенной* — команду, выигравшую нечетное число матчей у интересных. Докажите, что число особенных команд четно. (Напомним, что в волейболе ничьих не бывает).

**2.** Найдите все решения в натуральных числах уравнения $\text{НОК}(x, y) = x + y + 24$.

**3.** Точка $D$ лежит на основании $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$. Точки $E$ и $F$ таковы, что середина отрезка $DE$ лежит на отрезке $AB$, середина отрезка $DF$ лежит на отрезке $BC$ и $\angle EDA = \angle FDC$. Середина отрезка $EF$ точка $K$ лежит внутри треугольника $ABC$. Докажите, что $\angle ABD = \angle CBK$.

**4.** Дорожки парка идут вдоль краев двух квадратных газонов с одной общей стороной. Вокруг газонов (каждый вокруг своего) против часовой стрелки гуляют с постоянными скоростями Ватсон и на 20% быстрее него Холмс. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий — через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз?

**5.** Многоугольник (не обязательно выпуклый) удалось разрезать на 20 меньших равных многоугольников, подобных исходному. Обязательно ли исходный многоугольник — параллелограмм?

**6.** Назовем кирпичом прямоугольный параллелепипед, у которого длина, ширина и высота различны. Можно ли поверхность какого-нибудь кирпича оклеить без перекрытий пятью бумажными квадратами? (Квадраты можно перегибать через ребра, размеры их не обязательно одинаковы).

**7.** Число $N$ равно произведению первых $k$ простых чисел. Докажите, что любое натуральное число, меньшее $N$, может быть представлено как сумма нескольких различных натуральных делителей $N$.

**8.** На клетчатой доске $8 \times 8$, вначале пустой, Ося и Киса ходят по очереди. Своим ходом Ося отмечает от 1 до 9 полей крестиками. Киса своим ходом выбирает любой составленный из отмеченных полей прямоугольник, и стирает в нем все крестики. Ося выиграет, если в какой-то момент будет отмечено крестиками $N$ полей. При каком наибольшем $N$ Киса не сможет ему помешать?

**9.** Даны 9 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ $(i \neq j)$ как минимум 29 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_9$ — целые.

**10.** Разложите на два непостоянных множителя: $1 + x^{10} + (1+x)^{10}$.

## Математический бой профи-8 — профи-9 17 июля

**1.** Пусть $P$ — точка, лежащая внутри треугольника $ABC$, а $D, E, F$ — ее ортогональные проекции на прямые $BC, CA$ и $AB$ соответственно. Найти все точки $P$, для которых сумма

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

минимальна.

**2.** Дан многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что если для натуральных чисел $a$ и $b$ числа $f(a)$ и $f(b)$ взаимно просты, то $a$ и $b$ также взаимно просты. Докажите, что либо $f(0) = 0$, либо существует такое натуральное число $d > 1$, что $f(n) \vdots d$ при всех натуральных $n$.

**3.** Назовем словом любую конечную последовательность букв А и Б. Есть две операции над словами: первая — вставить в любом месте слова букву А, а в конце слова — Б; вторая — вставить в любом месте слова АБ. Докажите, что множество слов, которые можно получить из слова АБ с помощью первой операции совпадает с множеством слов, которые можно получить из слова АБ с помощью второй операции.

**4.** Пусть $G$—граф, все степени вершин которого не меньше двух и не больше 100. Докажите, что его вершины можно раскрасить правильным образом в 104 цвета так, чтобы не было вершины, все соседи которой одного цвета.

**5.** Пусть $n, p, q$ — натуральные числа и $n > p + q$. Рассмотрим целые числа $x_1, \ldots, x_n$, такие, что $x_0 = x_n = 0$ и $x_{i+1} - x_i$ равно либо $p$, либо $-q$ для любого $i$. Докажите, что существует пара $(i, j), i < j$, отличная от $(0, n)$, такая, что $x_i = x_j$.

**6.** В окружности проведены перпендикулярные диаметры $AB$ и $CD$. Из точки $M$, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую $AB$ в точках $E$ и $H$, а также прямые $MC$ и $MD$, пересекающие прямую $AB$ в точках $F$ и $K$. Докажите, что $EF = KH$.

**7.** Сумма положительных чисел $x, y$ и $z$ равна 1. Докажите, что

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

**8.** Имеется квадрат клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток и связная фигура неизвестной формы, состоящая из $n-1$ клетки. Докажите, что из этого квадрата можно с гарантией вырезать четыре таких фигуры. Фигура, составленная из клеток, называется связной, если любые две её клетки можно соединить цепочкой её клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.

**9.** На плоскости выбрано 2008 точек. Докажите, что среди попарных расстояний между ними хотя бы 40 различных.

**10.** Кенгуру прыгает по узлам клечатой сетки так, что все его прыжки имеют одинаковую длину. Может ли он вернуться в исходную точку через 239 прыжков?

# Квадратичные вычеты 19 июля

Далее везде $p$ — *нечетное* простое число.

**Определение.** Число $a$, не делящееся на $p$, называется **квадратичным вычетом** по модулю $p$, если существует $x \in \mathbb{Z}$ такое, что $a \equiv x^2 \pmod p$. В противном случае число $a$ называется **квадратичным невычетом** по модулю $p$.

**Упражнение 0.** Пусть $x^2 \equiv 1 \pmod p$. Докажите, что либо $x \equiv 1 \pmod p$, либо $x \equiv -1 \pmod p$.

**Задача 1.** Докажите, что если $p$ — нечетное простое число, то по модулю $p$ существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов.

**Задача 2.** Докажите, что для данного модуля $p$ а) произведение двух квадратичных вычетов — вычет; б) произведение вычета на невычет — невычет; в) произведение двух невычетов — вычет.

**Задача 3.** Докажите, что а) если $a$ — квадратичный вычет по модулю $p$, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$; б) если $a$ — квадратичный невычет по модулю $p$, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$.

**Определение. Символом Лежандра** называется выражение, обозначаемое $\left(\frac{a}{p}\right)$, равное 1, если $a$ — квадратичный вычет по модулю $p$; $-1$, если $a$ — невычет по модулю $p$ и 0, если $a$ кратно $p$. Из задачи 3 следует, что

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p.$$

**Задача 4.** Докажите, что $-1$ является квадратичным вычетом по модулю $p$ тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod 4$.

**Задача 5 (теорема Жирара).** Простое число $p \equiv 3 \pmod 4$, а целые числа $x$ и $y$ таковы, что $x^2 + y^2 \,\vdots\, p$. Докажите, что $x, y \,\vdots\, p$.

**Задача 6.** Докажите, что простых чисел а) вида $4k+3$; б) вида $4k+1$ бесконечно много.

**Задача 7.** Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ не имеет решений в натуральных числах, но имеет бесконечно много решений в целых числах.

## Для самостоятельного решения

**Задача 8.** Решите в целых числах уравнение $x^3 + 7 = y^2$.

**Задача 9.** Пусть $x_1 = 1, y_1 = 100,\ x_{n+1} = x_n^{237} + y_n,\ y_{n+1} = y_n^{237} + x_n$. Докажите, что $x_n y_n$ не делится на 239 ни при каком натуральном $n$.

**Задача 10.** Пусть $(a, p) = 1$. Рассмотрим отображение $\pi\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, задаваемое правилом $\pi(x) = ax \mod p$. Докажите, что $\operatorname{sgn} \pi = \left(\frac{a}{p}\right)$.

**Задача 11.** Пусть $a, b, c$ — вычеты по модулю $p$, причем $a \not\equiv 0 \pmod p$, а $D = b^2 - 4ac$. Докажите, что если $D$ — квадратичный вычет по модулю $p$, то сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$ имеет два корня, если $D$ — квадратичный невычет по модулю $p$, то сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$ не имеет корней, а если $D \equiv 0 \pmod p$, то это сравнение имеет один корень.

**Задача 12.** Пусть $F_n$ — $n$-ое число Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ для $k \geq 2$. Пусть $F_n \,\vdots\, 239$. Докажите, что $n$ четно.

# Лемма [не] Бернсайда 20 июля

**Задача 1.** Сколько различных слов можно получить перестановками букв из слова ВЫСОКОПРЕВОСХОДИТЕЛЬСТВО?

**Задача 2.** Сколькими способами можно покрасить вершины правильного $n$-угольника в $n$ различных цветов? Способы, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми.

**Задача 3.** а) Сколькими способами можно раскрасить грани куба а) в шесть разных цветов; б) в два цвета; в) в три цвета?

**Задача 4.** а) Сколькими способами можно раскрасить грани тетраэдра а) в четыре разных цвета; б) в два цвета; в) в три цвета?

**Задача 5.** Сколько различных ожерелий из 10 бусинок можно составить, если имеется 2 бусинки синего цвета, 3 — зеленого и 5 — красного?

**Определение.** Пусть $G$ — группа преобразований множества $X$, $x \in X$. **Стабилизатором** точки $x$ называется множество преобразований $g \in G$ таких, что $gx = x$ (обозначение: $\mathrm{Stab}(x)$). Для $g \in G$ **множеством неподвижных элементов** называется множество точек $x \in X$, для которых $gx = x$ (обозначение: $\mathrm{Fix}(g)$).

Далее везде предполагается, что $|X| < \infty$ (а значит, и $|G| < \infty$).

**Задача 6.** Докажите, что а) стабилизаторы любых двух точек одной орбиты сопряжены (стало быть, в них поровну элементов); б) если $x, y \in X$ лежат в одной орбите, то количество преобразований, переводящих $x$ в $y$ равно $|\mathrm{Stab}(x)|$; в) сумма мощностей стабилизаторов точек одной орбиты равна $|G|$; г) сумма мощностей стабилизаторов всех точек множества $X$ в $|G|$ раз больше, чем количество орбит; д) сумма мощностей стабилизаторов всех точек равна сумме мощностей множеств неподвижных элементов всех преобразований из $G$: $\sum_{x\in X} \mathrm{Stab}(x) = \sum_{g\in G} \mathrm{Fix}(g)$.

**Лемма [не] Бернсайда (`not Burnside lemma`).** Пусть $G$ — группа преобразований множества $M$. Число орбит, на которые множество $M$ разбивается под действием группы $G$, равно

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Fix}(g).$$

# Многочлены над $\mathbb{Z}_p$ и первообразные корни

20 июля

**Задача 1.** Докажите, что степень произведения многочленов по простому модулю есть сумма степеней сомножителей. Приведите пример, показывающий, что для составного модуля это неверно.

**Задача 2.** Сформулируйте и докажите для многочленов по модулю а) теорему о делении с остатком; б) теорему Безу для многочленов.

**Задача 3.** Докажите, что у многочлена степени $n$ по простому модулю не может быть более $n$ корней. Покажите, что для составного модуля это не так.

**Определение.** Назовем два многочлена по модулю $p$ **эквивалентными,** если они задают одну и ту же функцию $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, то есть, их значения совпадают во всех точках $x \in \mathbb{Z}_p$.

**Задача 4.** а) Докажите, что многочлен $x^p - x$ эквивалентен нулевому по модулю $p$; б) Докажите, что если многочлены $f$ и $g$ по модулю $p$ эквивалентны, то $f - g$ делится на $x^p - x$.

**Упражнение 5.** Сколько существует а) функций из $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{Z}_p$; б) многочленов по модулю $p$ степени не выше $p - 1$?

**Задача 6.** Докажите, что *любая* функция $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ задается некоторым многочленом.

**Задача 7.** а) Докажите, что если многочлен неприводим как многочлен по модулю, то он неприводим и как многочлен с целыми коэффициентами. б) Приведите пример неприводимого многочлена с целыми коэффициентами, приводимого как многочлен по модулю. в) Выведите отсюда **критерий Эйзенштейна**.

**Определение.** Говорят, что остаток $x \in \mathbb{Z}_p$ **принадлежит показателю** $m$ по модулю $p$, если $m$ — наименьшее натуральное число, для которого $x^m \equiv 1 \pmod p$.

**Задача 8.** Если $a$ принадлежит показателю $m$ по модулю $p$, то а) числа $1 = a^0, a^1, ..., a^{m-1}$ не сравнимы по модулю $p$; б) $a^{m_1} \equiv a^{m_2} \pmod p \Leftrightarrow m_1 \equiv m_2 \pmod m$; в) $m$ — делитель $p-1$; г) для любого делителя $d$ числа $m$ число $a^d$ принадлежит показателю $m/d$; д) если $b$ принадлежит показателю $n$ и $(m,n)=1$, то $ab$ принадлежит показателю $mn$.

**Определение.** Остаток $x \in \mathbb{Z}_p$ называется **первообразным корнем** по модулю $p$, если он принадлежит показателю $p-1$.

**Теорема 9.** Первообразные корни по модулю $p$ существуют, и их ровно $\varphi(p-1)$ штук.

## Для самостоятельного решения

**Упражнение 10.** Докажите, что если $p-1 \vdots m$, то многочлен $x^m - 1$ имеет ровно $m$ корней по модулю $p$.

**Задача 11 (=теорема 9 one more time).** а) Докажите, что если $p-1 \vdots m$ и $m$ — простое, то существует ровно $\varphi(m) = m-1$ элементов, принадлежащих показателю $m$. б) Докажите индукцией по $m$, что для всякого $m$ такого, что $p-1 \vdots m$, существует ровно $\varphi(m)$ элементов, принадлежащих показателю $m$. **Указание:** вспомните, что $\sum_{d|m} \varphi(d) = m$.

**Задача 12.** Докажите, что многочлен $(x^2-13)(x^2-17)(x^2-221)$ имеет корни по любому наперед заданному простому модулю $p$.

**Задача 13.** Пусть $p$ — простое. Докажите, что натуральные числа от 1 до $p-1$ можно расставить по кругу так, чтобы для любых трех подряд идущих $a, b, c$ выполнялось $b^2 - ac \vdots p$.

**Задача 14.** Докажите, что для всякого простого числа $p$ найдется простое число $q$ такое, что $n^p - p$ не делится на $q$ ни при каком натуральном $n$.

# Группы 21 июля

**Определение.** Пусть $X$ — множество. Отображение $\varphi\colon X \to X$ называется **бинарной операцией** на $X$; часто пишут $x\varphi y$ вместо $\varphi(x,y)$ для $x, y \in X$, например, $x+y$, $x \cdot y$, $x \bullet y$.

**Примеры.** Являются ли бинарными операциями следующие операции: а) операции сложения, умножения, вычитания, деления на множествах натуральных, целых, рациональных, вещественных, неотрицательных вещественных чисел; б) операции сложения, умножения, вычитания, деления на множестве остатков по модулю $n$; в) операции возведения в степень, извлечения корня на множестве вещественных чисел; г) композиция преобразований на данной группе преобразований некоторого множества; д) композиция перестановок на множестве $S_n$ всех перестановок $n$-элементного множества; е) композиция движений на множестве всех движений плоскости? Приведите другие примеры бинарных операций.

**Определение.** Бинарная операция $\bullet$ называется **ассоциативной**, если для любых $x, y, z \in X$ выполнено равенство $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$ (иными словами, операция $\varphi$ ассоциативна, если $\varphi(\varphi(x,y),z) = \varphi(x, \varphi(y,z))$). Операция $\bullet$ называется **коммутативной**, если $x \bullet y = y \bullet x$ для всех пар элементов $x, y \in X$. Говорят, что $e \in X$ — **нейтральный элемент** относительно операции $\bullet$, если $e \bullet x = x \bullet e = x$ для всех $x \in X$. Если операция $\bullet$ обладает нейтральным элементом $e$ и для $x \in X$ найдется элемент $y \in X$ такой, что $x \bullet y = e$, то такой $y$ называется **обратным** к элементу $x$ и обозначается через $x^{-1}$.

**Упражнение 1.** Какие из перечисленных выше операций ассоциативны? коммутативны? обладают нейтральным элементом? К каким из элементов этих множеств с операциями существуют обратные?

**Задача 2.** Докажите, что из ассоциативности операции следует ее **обобщенная ассоциативность:** в выражении любой длины результат не зависит от расстановки скобок.

**Определение.** Множество $G$, на котором задана бинарная операция $\bullet$, называется **группой**, если $\bullet$ ассоциативна, обладает нейтральным элементом и у каждого $g \in G$ существует обратный элемент относительно операции $\bullet$. Если, кроме того, операция $\bullet$ коммутативна, группа $G$ называется **абелевой.** Мощность $|G|$ множества $G$ называется **порядком** группы $G$.

**Замечание.** Далее мы часто будем записывать операцию в группе **мультипликативно**, то есть писать $x \cdot y$ или даже $xy$ вместо $x \bullet y$, $x^2$ вместо $x \bullet x$ и т. д.

**Упражнение 3.** Какие из перечисленных выше множеств с операциями являются группами?

**Упражнение 4.** Докажите, что в $G$ ровно один нейтральный элемент

**Упражнение 5.** Нарисуйте `таблицы умножения` каких-нибудь групп порядка а) 2; б) 3; 4.

**Определение.** Группы $G_1$ и $G_2$ называются **изоморфными**, если существует биекция $f\colon G_1 \to G_2$, *сохраняющая операции*, то есть, для всех $x, y \in G_1$ выполнено $f(x \bullet_1 y) = f(x) \bullet_2 f(y)$. Здесь мы обозначили операцию в $G_1$ через $\bullet_1$, а операцию в $G_2$ — через $\bullet_2$. Если $G_1$ изоморфна $G_2$, пишут $G_1 \simeq G_2$, и называют такую биекцию $f$ **изоморфизмом**.

**Задача 6.** Сколько существует групп порядка 4 (с точностью до изоморфизма)?

**Определение-упражнение.** Пусть $G, H$ — две группы. На декартовом произведении $G \times H$ множеств $G$ и $H$ можно ввести операцию следующим образом: положим $(g_1, h_1) \bullet (g_2, h_2) = (g_1 \bullet g_2, h_1 \bullet h_2)$. Докажите, что эта операция превращает множество $G \times H$ в группу (она называется **декартовым произведением** групп $G$ и $H$).

**Определение.** Пусть $H \subseteq G$. Говорят, что $H$ является **подгруппой** $G$ и пишут $H \leq G$, если подмножество $H$ само является группой относительно операции $\bullet$, индуцированной с множества $G$. Иными словами, для любых $g, h \in H$ должно выполняться $g \bullet h \in H$ и $g^{-1} \in H$ (отсюда следует, что и $e \in H$).

**Задача 7.** Найдите неабелеву группу наименьшего порядка.

# Направленные углы `21 июля`

**Определение.** Пусть $l$, $m$ — две прямые. **Направленным углом** между прямыми $l$ и $m$ называется угол $\angle(l, m)$, на который нужно повернуть прямую $l$ против часовой стрелки, чтобы получилась прямая, параллельная прямой $m$.

**Замечание.** Направленный угол рассматривается как число `по модулю` $\pi$.

**Свойства.** а) $\angle(l, l) = 0$; б) $\angle(l, m) = -\angle(m, l)$; в) $\angle(l, m) + \angle(m, n) = \angle(l, n)$.

**Задача 1.** Докажите, что а) точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат на одной прямой или на одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$; б) прямая $AD$ является касательной к окружности, проходящей через точки $A$, $B$ и $C$ тогда и только тогда, когда $\angle(AD, AC) = \angle(AB, BC)$; в) $AB \parallel CD$ тогда и только тогда, когда $\angle(AB, CD) = 0$.

**Задача 2.** Две окружности пересекаются в точках $M$ и $K$. Через $M$ и $K$ проведены прямые $AB$ и $CD$ соответственно, пересекающие первую окружность в точках $A$ и $C$, вторую — в точках $B$ и $D$. Докажите, что $AC \parallel BD$.

**Задача 3.** На стороне $AB$ равнобедренного треугольника $ABC$ ($AB = BC$) выбрана точка $D$. Через точку $D$ провели касательную к описанной окружности треугольника $ADC$. Она пересекла описанную окружность треугольника $BDC$ в точке $M$. Докажите, что $BM \parallel AC$.

**Задача 4.** Точки $A$, $B$, $C$ не лежат на одной прямой. На прямых $AB$, $BC$, $CA$ выбраны точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ соответственно, отличные от точек $A$, $B$, $C$. Точка $P$ не лежит ни на одной из прямых $AB$, $BC$, $CA$. Докажите, что если два из трех четырехугольников $AB_1PC_1$, $BC_1PA_1$, $CA_1PB_1$ являются вписанными, то третий — тоже вписанный.

**Задача 5.** Две окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Описанная окружность треугольника $O_1BO_2$ пересекает вторую окружность в точке $P$, отличной от $B$. Докажите, что точки $O_1$, $A$ и $P$ лежат на одной прямой.

**Задача 6.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведена высота $AH$. В треугольниках $ACH$ и $ABH$ проведены высоты $HM$ и $HN$ соответственно. Докажите, что $\triangle MAN \sim \triangle BAC$.

**Задача 7.** В параллелограмме $ABCD$ на диагонали $AC$ лежит точка $M$ такая, что четырехугольник $BCDM$ — вписанный. Докажите, что прямая $BD$ — общая касательная к описанным окружностям треугольников $ABM$ и $ADM$.

**Задача 8.** Стороны двух углов пересекаются в точках $A$, $B$, $C$, $D$, биссектрисы их взаимно перпендикулярны. Докажите, что $A$, $B$, $C$, $D$ лежат на одной окружности.

**Задача 9.** Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку **(точка Микеля).**

**Задача 10.** Из произвольной точки, лежащей на окружности, описанной около треугольника, опущены перпендикуляры на его стороны (или на продолжения сторон). Докажите, что основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой **(прямая Симсона)**.

# КБШ наносит ответный удар — 21 июля

**Задача 1.** Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

**Задача 2.** Для положительных чисел $x$, $y$, $z$ выполняется равенство $x^2+y^2+z^2=3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq x+y+z.$$

**Задача 3.** а) Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что $a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab$. б) Пусть $a, b, c$ — длины сторон треугольника. Докажите, что $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geq 0$.

**Задача 4.** Даны попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

**Задача 5.** Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1},$$

где $s = a_1 + \ldots + a_n$.

**Задача 6.** Для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите неравенства

$$\text{а) } \frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1+a_2+\ldots+a_n;$$

$$\text{б) } \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \geq (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$

**Задача 7.** Пусть $a, b, c > 0$ и $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

**Задача 8.** Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 2.$$

**Задача 9.** Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

**Задача 10.** Предположим, что $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ и $b_1$, $b_2$, …, $b_n$ — положительные числа, удовлетворяющие условию $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{2}.$$

# Теорема Лагранжа 22 июля

Все группы в этом листочке предполагаются конечными.

**Определение.** Пусть $G$ — группа, $x \in G$. Наименьшая подгруппа $G$, содержащая $x$, называется **подгруппой, порожденной элементом** $x$ и обозначается через $\langle x \rangle$.

**Упражнение 1.** Докажите, что $\langle x \rangle = \{e, x, x^{-1}, x^2, x^{-2}, \ldots, x^n, x^{-n}, \ldots\}$.

**Определение. Порядком** элемента $x \in G$ называется наименьшее натуральное число $n$ такое, что $x^n = e$. Обозначение: $n = \mathrm{ord}(x)$.

**Упражнение 2.** Докажите, что $|\langle x \rangle| = \mathrm{ord}(x)$.

**Определение.** Группа $G$ называется **циклической**, если найдется $x \in G$ такой, что $G = \langle x \rangle$. Циклическая группа порядка $n$ обозначается через $C_n$.

**Задача 3.** Докажите, что любая подгруппа циклической группы является циклической.

**Упражнение 4.** Сколько в $C_n$ элементов $x$ таких, что $\langle x \rangle = C_n$?

**Задача 5.** а) Докажите, что $|G| \,\vdots\, \mathrm{ord}(x)$; б) **(Теорема Лагранжа).** Пусть $H \leq G$. Докажите, что $|G| \,\vdots\, |H|$.

**Задача 6.** Выведите из теоремы Лагранжа а) малую теорему Ферма; б) теорему Эйлера.

**Определение.** Пусть $H \leq G$; назовем два элемента $g_1, g_2 \in G$ **сравнимыми по модулю подгруппы** $H$, если найдется $h \in H$ такой, что $g_1 = g_2 h$.

**Определение-упражнение 7.** Докажите, что сравнение по модулю подгруппы является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности в этом случае называются **смежными классами** группы $G$ по подгруппе $H$: они выглядят как $gH = \{gh \mid h \in H\}$ для $g \in G$. Фактор-множество по этому отношению обозначается через $G/H$.

**Упражнение 8.** Докажите, что $|G/H| = |G|/|H|$.

# Поворотная гомотетия 22 июля

**Задача 1.** Окружности $S_1$ и $S_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. При поворотной гомотетии $P$ с центром $A$, переводящей $S_1$ в $S_2$, точка $M_1$ переходит в $M_2$. Докажите, что $M_1, M_2$ и $B$ лежат на одной прямой.

**Задача 2.** Даны два отрезка $AB$ и $A_1B_1$. Прямые $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $P$. Описанные окружности треугольников $ABP$ и $A_1B_1P$ вторично пересекаются в точке $O$. Докажите, что $O$ является центром поворотной гомотетии, переводящей $AB$ в $A_1B_1$.

**Задача 3.** Окружности $S_1, \ldots, S_n$ проходят через точку $O$. Кузнечик из точки $X_i$ окружности $S_i$ прыгает в точку $X_{i+1}$ окружности $S_{i+1}$ так, что прямая $X_iX_{i+1}$ проходит через точку пересечения окружностей $S_i$ и $S_{i+1}$, отличной от $O$. Докажите, что после $n$ прыжков (с окружности $S_1$ на $S_2$, с $S_2$ на $S_3$, …, с $S_n$ на $S_1$) кузнечик вернется в исходную точку.

**Задача 4.** Даны две неконцентрические окружности $S_1$ и $S_2$. Докажите, что существует ровно две поворотные гомотетии с углом поворота $90°$, переводящие $S_1$ в $S_2$.

**Задача 5.** Дана полуокружность с диаметром $AB$. Для каждой точки $X$ этой полуокружности на луче $XA$ откладывается точка $Y$, так, что $XY = kXB$. Найдите ГМТ $Y$.

**Задача 6.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$, а хорды $AM$ и $AN$ касаются этих окружностей. Треугольник $MAN$ достроен до параллелограмма $MANC$. На отрезках $BN$

и $MC$ выбраны точки $P$ и $Q$ соответственно так, что $BP : PN = MQ : QC$. Докажите, что $\angle APQ = \angle ANC$.

**Задача 7.** На сторонах треугольника $ABC$ внешним образом построены подобные треугольники $\triangle A_1BC \sim \triangle B_1CA \sim \triangle C_1AB$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ совпадают.

**Задача 8.** На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба. Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.

**Задача 9.** Дан квадрат $ABCD$. Точки $P$ и $Q$ на сторонах $AB$ и $BC$ таковы, что $BP = BQ$. Пусть $H$— основание перпендикуляра, опущенного из точки $B$ на $PC$. Докажите, что $\angle DHQ = 90\circ$

## Заключительная олимпиада 23 июля

### Довывод

**1.** В треугольнике $ABC$ сторона $AB > BC$. Биссектриса $BM$ пересекает описанную около треугольника $ABC$ окружность в точке $N$. На стороне $AB$ взята точка $P$ так, что $BP = BC$. Докажите, что точки $A$, $P$, $M$, $N$ лежат на одной окружности.

**2.** Будем обозначать через $\overline{mn}$ двузначное число с первой цифрой $m$ и второй цифрой $n$. Существуют ли такие попарно различные и отличные от 0 цифры $a$, $b$ и $c$, что число $\overline{ab}$ делится на $c$, число $\overline{bc}$ делится на $a$, а число $\overline{ca}$ делится на $b$?

**3.** Докажите, что для любого натурального $n$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\right)$$

**4.** У Насти было 30 гирек с массами 1 г, 2 г, ..., 30 г, которые она хотела разложить на две чашки весов, чтобы общая масса и количество гирек были на чашках одинаковыми, но у нее это никак не получалось. Хулиган Леша стащил у нее 10 гирек с общей массой 155 г. Докажите, что теперь Настя сможет добиться своего с оставшимися гирьками.

**5.** Существуют ли такие натуральные числа $x$, $y$ и $z$ (причем $x$ — нечетное), что выполняется равенство $x^{10} + y^{10} = z^{11}$?

### Вывод

**6.** На пульте находятся 100 светящихся кнопок, расположенных в виде квадрата $10 \times 10$. Табло устроено так, что при нажатии на любую кнопку она и все кнопки одного с ней ряда и все кнопки одного с ней столбца меняют свое состояние: светившиеся — гаснут, а не светившиеся — загораются. Какое наименьшее число кнопок нужно нажать, чтобы все кнопки оказались погашенными, если первоначально все светились?

**7.** Пусть $B_0$ — середина стороны $AC$ остроугольного треугольника $ABC$. Проведем из середины отрезка $AB_0$ перпендикуляр к его стороне $BC$, а из середины отрезка $B_0C$ — перпендикуляр к стороне $AB$. Обозначим точку пересечения этих перпендикуляров через $B'$. Аналогично построим точки $C'$ и $A'$. Докажите, что треугольники $A'B'C'$ и $ABC$ подобны.

**8.** Дан связный граф с четным количеством ребер. Докажите, что можно на каждом ребре нарисовать стрелочку так, чтобы из каждой вершины выходило четное количество стрелочек.

# Программа зачета

Геометрия. Вектор как класс направленных отрезков; операции над ними и их простейшие свойства. Отношение, в котором точка делит отрезок. Характеристическое свойство точки пересечения медиан. Движения, основные свойства. Отображение, индуцированное движением на векторах. Степень точки, радикальные оси. Теорема о трех радикальных осях. Лемма о бабочке. Скалярное произведение, его линейность, связь с проекцией. Характеристическое свойство ортоцентра. Прямая Эйлера. Формула Стюарта. Материальные точки и центр масс. Основная теорема теории центров масс. Правило рычага, правило группировки. Теорема о порождении группы движений осевыми симметриями. Теорема Шаля. Гомотетия: определение и основные свойства. Центр композиции гомотетий. Теорема о трех колпаках. Направленные углы, основные свойства. Поворотная гомотетия, задача о кузнечике.

Теория групп. Перестановки, композиции перестановок. Декремент, знак, четность, количество беспорядков. Теорема о знаке произведения перестановок. Преобразования множества, группы преобразований, сравнимость по ее модулю, орбиты. Теорема о том, что сравнимость по модулю группы преобразований является отношением эквивалентности. Сопряженные преобразования. Сопряжение движений. Группа самосовмещений, циклические и диэдральные группы. Стабилизатор, множество неподвижных точек, связь порядка стабилизатора с мощностью орбиты. Лемма Бернсайда. Бинарные операции, ассоциативность, коммутативность, нейтральный элемент и обратные элементы. Теорема об обобщенной ассоциативности. Группы, подгруппа, порядок группы, изоморфизм. Группы небольшого порядка. Подгруппа, порожденная элементом, связь с порядком элемента. Подгруппы циклической группы. Сравнимость по модулю подгруппы, смежные классы, теорема Лагранжа. Вывод малой теоремы Ферма и теоремы Эйлера из теоремы Лагранжа.

Многочлены. Многочлены: определение, операции над ними: сложение, умножение, эвалюация. Корни, их кратность, делимость многочленов, теорема Безу. Формальное и функциональное равенство многочленов. Делимость многочленов, наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида и линейное представление НОД для многочленов. Неприводимость, основная теорема арифметики. Неприводимость над $\mathbb{Z}$. Содержание и примитивность, лемма Гаусса, критерий Эйзенштейна. Деление с остатком и теорема Безу для многочленов по модулю. Формальное и функциональное равенство многочленов над $\mathbb{Z}_p$.

Графы. Ориентированные графы, компоненты сильной связности, граф компонент, отсутствие в нем циклов. Промежуточные и крайние компоненты. Существование гамильтонова пути и гамильтонова цикла в полных графах. Наследственные свойства графов, оценки на число ребер. Теорема Турана. Раскраски графов: теорема Брукса.

Теория чисел. Обратимость остатков и взаимная простота. Функция Эйлера, теорема Эйлера. Мультипликативность функции Эйлера, суммирование по делителям. Десятичные дроби и деление столбиком. Оценка длин периода и предпериода десятичной дроби. Период и предпериод суммы дробей. Китайская теорема об остатках, три доказательства. Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лежандра, критерий Эйлера, теорема Жирара. Показатели и первообразные корни. Существование первоообразных корней по простому модулю.

Разное. Множества, способы задания, операции над множествами. Количество подмножеств конечного множества. Отображения, область определения, область значений, график. Сюръективные, инъективные и биективные отображения, композиция отображений. Обратимость слева и справа, связь с мономорфностью/эпиморфностью и инъективностью/сюръективностью. Отношение эквивалентности, его график. Класс эквивалентности, представители класса. Теорема о разбиении на классы. Фактор-множество и каноническая проекция. Неравенства: основные приемы, неравенства Бернулли и Коши–Буняковского–Шварца. Варьирование: задача об отрезке в треугольнике и о треугольнике в параллелограмме. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.