Матбой М8-М9.

1. Антон задумал натуральное число n, не большее 144. Ему можно задавать вопросы типа «верно ли, что $n < a$?». Загадавший даёт ответы с задержкой: ответ на каждый вопрос, кроме последнего, следует лишь после того, как задан следующий вопрос. Ответ на последний вопрос даётся сразу. Можно ли отгадать число Антона за 10 вопросов?

2. В коробке 2016 конфет. Двое по очереди вынимают их из коробки. Первый вынимает одну конфету. После этого, если какой-то игрок вынул на предыдущем ходе k конфет, то следующим ходом его противник имеет право вынуть от 1 до $k+1$ конфет. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто из игроков может выиграть независимо от игры соперника?

3. Двое играют в следующую игру на клетчатой доске 11×11. Сначала в центре доски стоит фишка. Первый своим ходом сдвигает фишку на одну клетку по горизонтали или вертикали. Второй своим ходом ставит перегородку на одну границу любой клетки. Первый не может двигать фишку через перегородку. Если первый может сойти с доски, то он выиграет, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

4. На плоскости нарисованы 2016 точек. Докажите, что их можно раскрасить в синий и красный цвета так, чтобы на каждой вертикальной и каждой горизонтальной прямой количества синих и красных точек отличались бы не более чем на 1.

5. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что числа $ab+cd$ и $ab+a+b-cd-c-d$ делятся на $a+b+c+d+2$. Докажите, что $a+b+c+d+2$ — составное число.

6. Обозначим через $s(k)$ сумму всех натуральных делителей числа k, включая само это число. Известно, что $s(N)+s(3N) = s(4N)$. Докажите, что число N чётное.

7. Пусть треугольник ABC — остроугольный, а точка D — основание высоты, проведенной из вершины C. Биссектриса угла B пересекает CD в точке E, а описанную окружность ω треугольника ADE вторично пересекает в точке F. Известно, что угол ADF равен $45°$. Докажите, что CF — касательная к окружности ω.

8. Три круга касаются друг друга (внешним образом). Их центры лежат на окружности радиуса R. Докажите, что суммарная площадь кругов не превышает $4\pi R^2$.