Степень точки и радикальная ось.

Определение. Дана окружность S с центром O и радиусом r. Для произвольной точки плоскости M пусть $|OM| = d$. Тогда *степенью точки* M относительно окружности S называется величина $d^2 - r^2$.

1. Дана окружность S и точка M на плоскости. Проведены 2 прямые через M, которые пересекают окружность S в точках A, B и C, D соответственно. Докажите, что $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

2. Дана окружность S и точка M вне этой окружности. Через M провели касательную к S длиной d. Также проведена секущая к S, которая пересекает S в точках A и B. Докажите, что $MA \cdot MB = d^2$.

3. Даны точки $A \neq B$ на окружности S. На прямой AB отмечена точка M. Докажите, что степень M относительно окружности S равна:

(a) $-AM \cdot BM$, если M внутри S;

(b) $AM \cdot BM$, в ином случае.

Теперь у нас есть 2 окружности (причем в основном мы будем рассматривать неконцентрические окружности).

Далее все окружности неконцентрические, если не оговорено иное.

Определение. *Радикальной осью* называют ГМТ точек таких, что степени точек относительно 2 окружностей равны.

Вопрос на понимание: почему у концентрических неравных окружностей ГМТ состоит из пустого множества точек? А какое ГМТ будет у совпадающих?

4. Докажите, что

(a) для 2 окружностей радикальная ось является прямой.

(b) радикальная ось перпендикулярна прямой, содержащей центры 2 окружностей.

План доказательства:

O_0, O_1 — центры двух окружностей.

1) Проводим через центры ось OX. Для удобства можно считать, что O_0 это $(0, 0)$. Пусть O_1 имеет координату $(c_1, 0)$. c_1 НЕ РАВНО 0. Соответствующие радиусы пусть будут равны r_0, r_1.

2) Тогда условие того, что на O_0O_1 лежит точка $(x, 0)$ на радикальной оси будет таким: $x^2 - r_0^2 = (x - c_1)^2 - r_1^2$.

3) Откуда получаем: $-r_0^2 = -2xc_1 + c_1^2 - r_1^2$. Сразу же понимаем, что $x = \dfrac{r_0^2 - r_1^2 + c_1^2}{2c_1}$ — здесь важно, что c_1 не равно 0. Значит существует единственная точка на прямой, содержащей центры, степени точки которой относительно 2 окружностей равны.

4) Теперь пусть наша точка — M. Также пусть N такая, что $NM \perp O_0O_1$ Тогда N тоже лежит на радикальной оси. (Теорема Пифагора величайший ваш помощник).

5) Теперь предположим, что существует точка N, что NM не перпендикулярно O_0O_1. Тогда опустим перпендикуляр из N на O_0O_1 — M'. Выводим из теоремы Пифагора, что M' лежит на радикальной оси. ПОЙМИТЕ, где противоречие.

5. Докажите, что для 2 пересекающихся окружностей радикальная ось проходит через точки пересечения окружностей. Как будет располагаться радикальная ось относительно 2 непересекающихся окружностей? Рассмотрите все случаи.

Задачи.

1. Через точку P, лежащую на общей хорде AB двух пересекающихся окружностей, проведена хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — вписанный.

2. Даны 2 окружности. К ним были проведены все общие касательные. Докажите, что середины этих касательных лежат на одной прямой.

3. Теорема о радикальном центре. Даны 3 окружности. Докажите, что 3 радикальных оси этих окружностей пересекаются в одной точке или параллельны.

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD проведены диагонали AC и BD, пересекающиеся в точке M. Описанные окружности около ABM и CMD пересекаются в точке $N \neq M$. Так случилось, что Юрий Николаевич сказал Даниле Михайловичу: "Точка пересечения боковых сторон лежит на NM!". А Данила Михайлович сказал ему в ответ: "Трапеция равнобедренная!". Прав ли Данила Михайлович при условии, что Юрий Николаевич всегда прав?

5. Пусть есть две окружности с отмеченными центрами. Как построить их радикальную ось?

6. В угол вписаны две окружности. Одна окружность касается одной стороны угла в точке A, вторая окружность касается другой стороны угла в точке B. Докажите, что прямая AB высекает на окружностях равные хорды.

7. Прямые AB, AC — касательные к окружности ω. Точки M, N — середины отрезков AB и AC. Точка P — произвольная точка на прямой MN. Докажите, что $PA = PD$, где PD — касательная из точки P к окружности ω.

8. Дан остроугольный треугольник ABC. К стороне AB проведен серединный перпендикуляр, который пересекает AC и BC в точках K и E соответственно. К стороне BC проведен серединный перпендикуляр, который пересекает AC и AB в точках M и F соответственно. Окружности, описанные около треугольников EKC и FAM пересекаются в различных точках P и Q. Докажите, что

(a) центр описанной окружности лежит на PQ.

(b) точка B лежит на PQ.

9. На сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в ортоцентре треугольника ABC.