Квадратные трехчлены. 04.07.2016

Разминка.

1. У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами.

2. Все коэффициенты квадратного трехчлена нечетны. Докажите, что он не имеет целых корней.

3. Любые два из тысячи квадратных трехчленов имеют общий корень. Верно ли что все они имеют общий корень?

4. Любые два из тысячи квадратных трехчленов имеют общий корень. Может ли разность любых двух из них оказаться нестрого знакопостоянной?

Задачи.

1. Даны числа $a_1, \ldots, a_{10}$. Известно, что у каждого из десяти квадратных трехчленов $x^2 - a_1x + a_2$, $x^2 - a_2x + a_3$, $\ldots$, $x^2 - a_9x + a_{10}$, $x^2 - a_{10}x + a_1$ не больше одного корня. Докажите, что все числа a_i не превосходят 4.

2. Квадратный трехчлен таков, что если заменить любой из его коэффициентов на 1, то у получившегося многочлена будет хотя бы один корень. Докажите, что исходный многочлен не всюду положителен.

3. Даны 2008 квадратных трехчленов вида $x^2 - a_kx + b_k = 0$, где a_k и b_k — числа из набора от 1 до 4016 (все по разу). На вещественной прямой отметили корни этих многочленов. Докажите, что два их них находятся на расстоянии менее $1/250$.

4. Учитель написал на доске квадратный трёхчлен x^2+px+q с целыми коэффициентами. Каждую минуту к доске подходит ученик и вычисляет корни одного из написанных на доске трёхчленов. Если они оказываются целыми, он выписывает на доску один из трёхчленов $x^2 + ax + b$ или $x^2 + bx + a$, где a и b — только что найденные им корни.

а) При каких p и q первый выписанный учеником трёхчлен может совпасть с исходным?

б) Учитель запретил использовать любой трёхчлен для получения корней больше одного раза. Может ли в таком случае первый выписанный учеником трёхчлен не совпасть с исходным, а второй — совпасть?

в) Может ли учитель подобрать p и q так, чтобы ученик смог добиться того, чтобы в какой-то момент на доске оказались 2011 различных трёхчленов?

5. Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c = 0$ в 2007 раз больше корней квадратного уравнения $cx^2 + dx + a = 0$. Докажите, что $b^2 = d^2$.

6. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение $f(2x + 1) + f(3x + 2) = 0$ имеет ровно один корень. Найдите b/c.

7. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что уравнение $(f(x))^5 - f(x) = 0$ имеет ровно три вещественных решения. Найдите ординату (т. е. координату по оси y) вершины графика этого трехчлена.

8. Дима задумал три числа a, b и c и обнаружил, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных ненулевых корня: 1 и s. Саша изменил значение одного из коэффициентов a, b или c. В результате получился трехчлен, у которого тоже два различных корня: 2 и $3s$. Чему может быть равно s? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

9. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2+px+q$, где $p, q > 0$, имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа a и b таковы, что $f(a) < f(b) < 1,001f(a)$. Докажите, что $f(b) - f(a) > 4001$.

10. В квадратный трехчлен подставили последовательно 4 числа и получили значения: 2, 3, 5, 8. Потом эти же числа в том же порядке подставили в другой трехчлен и получили 16, 15, 13, x. Найдите x.

11. Компьютер загадал квадратный трехчлен $F(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, а Вася может называть две точки (необязательно различные), после чего компьютер сообщает ему произведение значений F в этих точках. Как Васе всего за три вопроса отгадать F?

Квадратные трехчлены. 04.07.2016

Разминка.

1. У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами.

2. Все коэффициенты квадратного трехчлена нечетны. Докажите, что он не имеет целых корней.

3. Любые два из тысячи квадратных трехчленов имеют общий корень. Верно ли что все они имеют общий корень?

4. Любые два из тысячи квадратных трехчленов имеют общий корень. Может ли разность любых двух из них оказаться нестрого знакопостоянной?

Задачи.

1. Даны числа $a_1, \ldots, a_{10}$. Известно, что у каждого из десяти квадратных трехчленов $x^2 - a_1x + a_2$, $x^2 - a_2x + a_3$, $\ldots$, $x^2 - a_9x + a_{10}$, $x^2 - a_{10}x + a_1$ не больше одного корня. Докажите, что все числа a_i не превосходят 4.

2. Квадратный трехчлен таков, что если заменить любой из его коэффициентов на 1, то у получившегося многочлена будет хотя бы один корень. Докажите, что исходный многочлен не всюду положителен.

3. Даны 2008 квадратных трехчленов вида $x^2 - a_kx + b_k = 0$, где a_k и b_k — числа из набора от 1 до 4016 (все по разу). На вещественной прямой отметили корни этих многочленов. Докажите, что два их них находятся на расстоянии менее $1/250$.

4. Учитель написал на доске квадратный трёхчлен x^2+px+q с целыми коэффициентами. Каждую минуту к доске подходит ученик и вычисляет корни одного из написанных на доске трёхчленов. Если они оказываются целыми, он выписывает на доску один из трёхчленов $x^2 + ax + b$ или $x^2 + bx + a$, где a и b — только что найденные им корни.

а) При каких p и q первый выписанный учеником трёхчлен может совпасть с исходным?

б) Учитель запретил использовать любой трёхчлен для получения корней больше одного раза. Может ли в таком случае первый выписанный учеником трёхчлен не совпасть с исходным, а второй — совпасть?

в) Может ли учитель подобрать p и q так, чтобы ученик смог добиться того, чтобы в какой-то момент на доске оказались 2011 различных трёхчленов?

5. Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c = 0$ в 2007 раз больше корней квадратного уравнения $cx^2 + dx + a = 0$. Докажите, что $b^2 = d^2$.

6. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение $f(2x + 1) + f(3x + 2) = 0$ имеет ровно один корень. Найдите b/c.

7. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что уравнение $(f(x))^5 - f(x) = 0$ имеет ровно три вещественных решения. Найдите ординату (т. е. координату по оси y) вершины графика этого трехчлена.

8. Дима задумал три числа a, b и c и обнаружил, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных ненулевых корня: 1 и s. Саша изменил значение одного из коэффициентов a, b или c. В результате получился трехчлен, у которого тоже два различных корня: 2 и $3s$. Чему может быть равно s? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

9. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2+px+q$, где $p, q > 0$, имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа a и b таковы, что $f(a) < f(b) < 1{,}001f(a)$. Докажите, что $f(b) - f(a) > 4001$.

10. В квадратный трехчлен подставили последовательно 4 числа и получили значения: 2, 3, 5, 8. Потом эти же числа в том же порядке подставили в другой трехчлен и получили 16, 15, 13, x. Найдите x.

11. Компьютер загадал квадратный трехчлен $F(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, а Вася может называть две точки (необязательно различные), после чего компьютер сообщает ему произведение значений F в этих точках. Как Васе всего за три вопроса отгадать F?