Векторы.

Определение. *Направленным отрезком* называют упорядоченную пару точек (A, B) (A — начало, B — конец, сам отрезок задаёт направление).

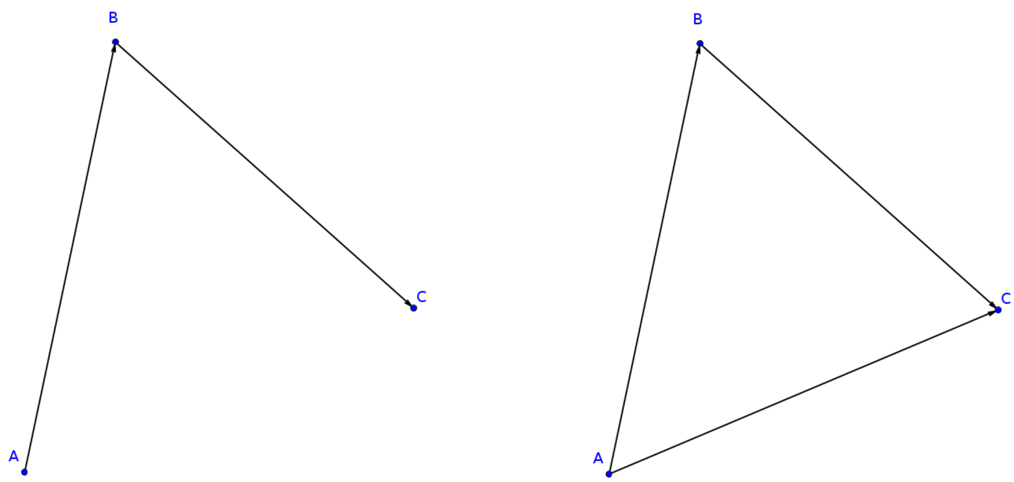
Определение. Два направленных отрезка являются *эквивалентными*, если у них совпадают направление и длина.

Определение. Все эквивалентные между собой отрезки называют *вектором*.

Определение. Два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ на плоскости являются *коллинеарными* или *линейно зависимыми*, если существуют k, m такие, что $(k, m) \neq (0, 0)$ и $k\overrightarrow{a} + m\overrightarrow{b} = 0$.

Комментарий. Что делать с нулевым вектором?

Сложение векторов: **правило треугольника.**



Откладываем $\overrightarrow{a}$ как $\overrightarrow{AB}$, а $\overrightarrow{b}$, как $\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$.

Правило параллелограмма: Дан параллелограмм $ABCD$, тогда $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. (Поймите, почему это действительно верно).

1. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.

2. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC, которые пересекаются в точке M. Докажите, что

(a) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$.

(b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

3. Пусть точки M, M_1 делят отрезки AB и A_1B_1 в отношении $k : m$, считая от точек A и A_1 соответственно. Выразите $\overrightarrow{MM_1}$ через векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

4. Докажите, что векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ имеют равную длину тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ перпендикулярны.

5. Во внешние стороны треугольника ABC построены параллелограммы ABB_1A_2, ACC_2A_1, BCC_1B_2. Докажите, что $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{B_2B_1} = \overrightarrow{0}$.

6. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда докажите, что для любой точки O плоскости верно, что $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$.

7. * Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, где O — центр описанной окружности, а H — точка пересечения высот. (*Подсказка:* сделайте это через факт (но сначала докажите его), что расстояние от ортоцентра до вершины в 2 раза больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противоположной вершине стороны).
Комментарий. Из предыдущих 2 задач следует (поймите почему), что O, H, M лежат на одной прямой. Такая прямая называется *прямой Эйлера*. В каком отношении делит точка M отрезок OH?

8. Стороны одного треугольника параллельны медианам второго треугольника. Докажите, что медианы первого параллельны сторонам второго треугольника.

9. Дан четырёхугольник $MNPQ$ ($MN \nparallel PQ$) такой, что E и F — середины сторон MN и PQ. A, B, C, D — середины сторон EP, FN, EQ, MF соответственно. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

10. Дано n векторов. Сумма любых $n-1$ коллинеарна оставшемуся. Докажите, что или сумма всех векторов равна $\overrightarrow{0}$, или все векторы коллинеарны друг другу.

11. Сумма n векторов равна $\overrightarrow{0}$. Докажите, что эти векторы являются сторонами какого-то выпуклого многоугольника.