

Гомотетия. Возвращение.

1. (Окружность 9 точек) С использованием гомотетии докажите, что (а) основания трёх высот произвольного треугольника, середины трёх его сторон и середины трёх отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат все на одной окружности. (Указание: Вспомните задачу 1а и 1б из листка "трезубец Симсона").

(б) центр окружности 9 точек является серединой отрезка $ОН$ (Так это же прямая Эйлера!).

2. На каждой из сторон треугольника ABC построено по прямоугольнику так, что они попарно касаются вершинами (см. рис. 1). Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с соответствующими вершинами треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в 1 точке.

3. На плоскости даны точки A и B и прямая l . По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC , если точка C движется по прямой l (не забудьте про случай точки пересечения l и AB)?

4. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$ и $AD > BC$), в которой на основаниях выбраны точки K и L так, что AB, CD и KL пересекаются в 1 точке. На отрезке KL выбраны точки P и Q , что $\angle AQD = \angle ABC$ и $\angle BPC = \angle BAD$. Докажите, что $ABPQ$ вписанный.

5. Каждая из окружностей S_1, S_2 и S_3 касается внешним образом окружности S (в точках A_1, B_1, C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC (см. рис. 2). Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в 1 точке.

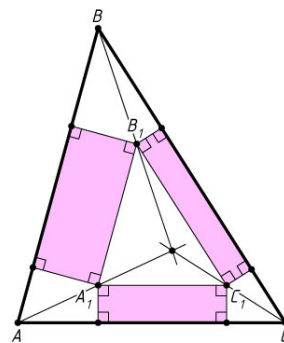


Рис. 1

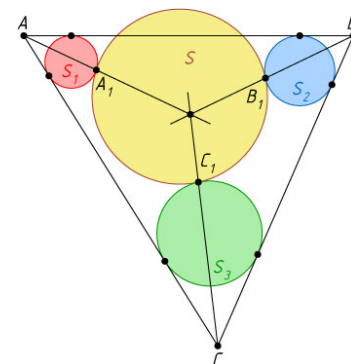


Рис. 2

Гомотетия. Возвращение.

1. (Окружность 9 точек) С использованием гомотетии докажите, что (а) основания трёх высот произвольного треугольника, середины трёх его сторон и середины трёх отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат все на одной окружности. (Указание: Вспомните задачу 1а и 1б из листка "трезубец Симсона").

(б) центр окружности 9 точек является серединой отрезка $ОН$ (Так это же прямая Эйлера!).

2. На каждой из сторон треугольника ABC построено по прямоугольнику так, что они попарно касаются вершинами (см. рис. 1). Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с соответствующими вершинами треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в 1 точке.

3. На плоскости даны точки A и B и прямая l . По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC , если точка C движется по прямой l (не забудьте про случай точки пересечения l и AB)?

4. Дана трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$ и $AD > BC$), в которой на основаниях выбраны точки K и L так, что AB, CD и KL пересекаются в 1 точке. На отрезке KL выбраны точки P и Q , что $\angle AQD = \angle ABC$ и $\angle BPC = \angle BAD$. Докажите, что $ABPQ$ вписанный.

5. Каждая из окружностей S_1, S_2 и S_3 касается внешним образом окружности S (в точках A_1, B_1, C_1 соответственно) и двух сторон треугольника ABC (см. рис. 2). Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в 1 точке.

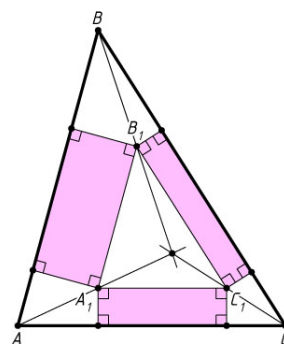


Рис. 1

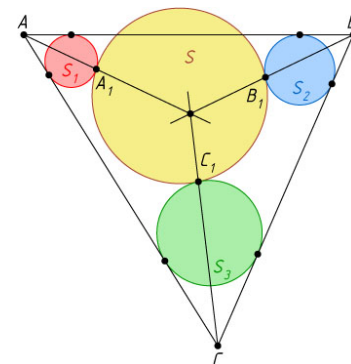


Рис. 2