8 класс, 10 июля, пожмем руку Эйлеру

1. В рамках многоборья каждый участник сыграл по три партии с другими. Все, кроме Савелия, сыграли по одной партии в шахматы, го и настольный теннис. Докажите, что Савелий тоже сыграл по одной партии в шахматы, го и настольный теннис.

2. В школе учится 100 мальчиков и 100 девочек. Каждый мальчик знаком хотя бы с одной девочкой, а каждая девочка — хотя бы с одним мальчиком. Один раз каждая девочка сказала: «Среди знакомых мне мальчиков не менее двух третей — рыжие!» А каждый мальчик ответил: «Среди знакомых мне девочек не менее половины — блондинки!» Все они сказали правду, но среди мальчиков только десять являются рыжими. А какое наименьшее количество блондинок может быть среди девочек?

3. Можно ли разбить треугольник на выпуклые четырёхугольники так, чтобы среди вершин четырёхугольников никакие три не лежали на одной прямой?

4. В вершинах выпуклого многогранника расставлены числа ± 1 таким образом, что произведение чисел, соседних с любой вершиной, отрицательно. Чему может быть равно произведение чисел во всех вершинах?

5. Можно ли разбить треугольник на выпуклые четырёхугольники так, чтобы среди вершин четырёхугольников никакие три не лежали на одной прямой?

6. Докажите, что если в графе 200 нечетных вершин, то его можно представить как объединение непересекающихся циклов и 100 несамопересекающихся путей.

7. а) Турист вышел с вокзала и отправился гулять по городу. Докажите, что если он будет гулять достаточно долго, то сможет вернуться на вокзал, пройдя по каждой из улиц города ровно дважды, если с самого начала задастся такой целью; **б)** Он сможет так сделать, если задастся такой целью в любой момент прогулки, когда он ещё не прошёл ни по какой улице больше двух раз.

8. В *«современном»* домино в состав входят все кости, которые можно составить из чисел от 0 до 2016 (0-0, 0-1, 0-2, …, 0-2016, 1-1, 1-2, ….., 2016-2016). Докажите, что все кости комплекта домино-2016 можно выложить так, чтобы получилось одно или несколько колец.

9. а) Докажите, что если все кости *«современного»* домино выложены так, что получилось несколько колец, то какие-то два из этих колец можно (предварительно как-то разорвав каждое из них) соединить в одно. **б)** Докажите, что все кости *«современного»* домино можно выложить так, чтобы получилось одно кольцо.

10. В связном графе степень каждой вершины равна 20. Докажите, что на каждом ребре можно поставить стрелку так, чтобы по стрелкам можно было добраться от любой вершины до любой другой.

11. В стране каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Движение на каждой дороге одностороннее, причём из каждого города можно выехать ровно по двум дорогам и въехать в него можно тоже ровно по двум дорогам. Докажите, что если от города А до города Б можно добраться по дорогам с нарушением правил, то можно добраться и без нарушения правил.

12. Имеется несколько городов, некоторые из них соединены автобусными маршрутами (без остановок в пути). Из любого города можно проехать в любой (возможно, с пересадками). Иванов купил по одному билету на каждый маршрут (то есть может проехать по нему один раз всё равно в какую сторону). Петров купил N билетов на каждый маршрут. Иванов и Петров выехали из города A. Иванов использовал все свои билеты, новых не покупал и оказался в другом городе B. Петров некоторое время ездил по купленным билетам, оказался в городе X и не может из него выехать, не купив новый билет. Докажите, что X - это либо A, либо B.

8 класс, 11 июля, пожмем руку Эйлеру

13. Все грани выпуклого многогранника являются треугольниками. Докажите, что каждое ребро этого многогранника можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы в итоге из любой его вершины можно было попасть в любую другую, двигаясь только по красным ребрам, а также только по синим.

14. В одной стране каждая пара городов соединена только одним транспортным маршрутом: или железнодорожным, или автобусным. Докажите, что существует вид транспорта, которым можно доехать из любого города страны в любой другой (возможно с пересадками).

15. Каждый из учеников 7"а" класса дружит не менее, чем с половиной учеников 7"б" класса, а каждый из учеников 7"б" класса дружит не более, чем с половиной учеников 7"а" класса. Докажите, что каждый из учеников 7"а" класса дружит ровно с половиной учеников 7"б" класса, а каждый из учеников 7"б" класса дружит ровно с половиной учеников 7"а" класса.

16. Известно, что в компании каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми.

17. В каждой из трех школ учится по 300 человек. Любой ученик имеет в сумме 301 знакомого из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы выбранные ученики были знакомы между собой.

18. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки. Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

19. В стране N городов. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придется поменять вид транспорта не более одного раза.

20. В компании из 10 человек, где каждый дружил с каждым, произошло 14 попарных ссор. Докажите, что все равно можно составить компанию из трех друзей.

21. В зоопарке у каждых двух мартышек ровно пять общих друзей-мартышек. Докажите, что количество пар друзей-мартышек делится на 3.

22. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с четырьмя другими, и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки. а) Докажите, что городов не может быть 17 или более. Б) Докажите, что если городов 16, то каждая вершина входит в единственный цикл длины 4. в) Докажите, что 16 городов быть не может (рассмотрите циклы длины 4 как новые вершины и постройте новый граф).

23. В полном графе ребра покрашены в три цвета. Известно, что из любой вершины выходят ребра не более чем двух цветов, и не существует одноцветного цикла из трех вершин. Найти максимально возможное число вершин в этом графе.

8 класс, 10-11 июля, графы в затруднении

24. В некотором государстве 1000 городов, из каждого из которых выходит не более девяти дорог, и от любого города можно добраться по дорогам до любого другого. Докажите, что можно выбрать 222 города так, чтобы любой замкнутый маршрут, проходящий только по этим городам, имел четную длину.

25. В графе между любыми двумя вершинами существует простой путь четной длины. Доказать, что между любыми двумя вершинами существует простой путь нечетной длины.

26. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые -нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых, на котором знакомит их друг с другом. После того, как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека еще не познакомились. Докажите, что на следующем ужине им тоже не удастся познакомиться.

27. В государстве некоторые пары городов соединены беспосадочными (двусторонними) авиарейсами. Новый министр авиации решил раз в месяц перестраивать маршрутную сеть по следующему принципу: в следующем месяце будут соединены рейсами те и только те пары городов, для которых сейчас существует маршрут ровно с одной пересадкой. Через полгода выяснилось, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что если реорганизация будет продолжаться, то и через год можно будет из любого города долететь до любого другого

28. В стране 100 городов, и из каждого в другие выходит не менее 80 дорог. Каждая дорога соединяет ровно два города и каждые два города соединены не более, чем одной дорогой. Страну разбили на m частей так, что любая дорога соединяет два города из разных частей. Докажите, что $m \geq 6$.

29. В стране 100 дорог (каждая дорога соединяет ровно 2 города, на всех дорогах двустороннее движение) и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

30. В графе любое ребро входит в нечетное число треугольников. Докажите, что степени всех вершин в этом графе четны.