8 класс, лемма Холла, 21 июля

Определение. Правильной раскраской называется такая раскраска вершин графа, при котором любое ребро соединяет вершины разного цвета.
Определение. Двудольным графом называется граф, который можно правильно раскрасить в два цвета.
1. Докажите ***критерий двудольности графа.*** Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в графе – четной длины.

Вопросы.

- Можно ли определить, что такое трехдольный граф? *N*- дольный граф?
- Верно ли, что в трехдольном графе все циклы – длины, кратной трем?

2. 20 юношей и 20 девушек пришли на дискотеку. Каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка – с двумя юношами. Докажите, что они могут разбиться на пары для танца, чтобы каждый был знаком со своей парой.

Условие разнообразия. Преподаватели выбирают группу из k юношей. Каждый юноша из выбранной группы дарит по цветочку всем своим знакомым девушкам (невыбранные юноши тихо грустят). Известно, что какую бы группу из k человек не выбрали, всего цветы получат не менее k девочек (для любого k от 1 до n, n – количество юношей).
Лемма Холла (лемма о свадьбах). Есть n юношей и несколько девушек. Все юноши могут выбрать себе девушку на танец из числа своих знакомых тогда и только тогда, когда выполнено условие разнообразия.

Определение. ***Паросочетание*** *– набор ребер, не имеющих общих вершин.*
Максимальное паросочетание – это такое паросочетание , которое не содержится ни в каком другом паросочетании этого графа, то есть к нему невозможно добавить ни одно ребро, которое бы являлось несмежным ко всем ребрам паросочетания.
Наибольшее паросочетание – это паросочетание с наибольшим количеством ребер
Вопросы.

- Всегда ли существует хоть какое-то паросочетание?
- Всегда ли существует максимальное паросочетание?
- Всегда ли существует наибольшее паросочетание?
- Верно ли, что любое наибольшее паросочетание является максимальным?
- Верно ли, что любое максимальное паросочетание является наибольшим?

Математическая формулировка леммы Холла. Пусть в двудольном графе в одной доле n вершин и выполнено условие разнообразия. Тогда в наибольшем паросочетании ровно n ребер.
Вопрос. Почему нет условия на вторую долю графа?

Доказательства леммы Холла.

(Лёгкая часть). Докажите, что условие разнообразия необходимо для выбора невест.

(Обратно, способ 1 – мы не ищем ~~простых~~ плохих путей).

Определение. Назовем незамкнутый путь ***плохим*** для данного паросочетания, если для него верно, что из любых двух соседних ребер пути одно принадлежит нашему паросочетанию, а другое – нет, а из начальной и конечной точек пути не выходят ребра паросочетания.

Докажите, что паросочетание наибольшее тогда и только тогда, когда для него нет плохих путей.

1. Докажите, что если есть плохой путь, то можно увеличить количество ребер в паросочетании.

2. В обратную сторону – от противного. Пусть плохих путей нет, но есть паросочетание с большим количеством ребер M_1. Нарисуем на листе слева граф с паросочетанием M, а справа – с паросочетанием M_1. Пусть ребра из паросочетания – красные. Забудем про ребра, одинаковые на обоих рисунках.

- Справа есть хотя бы одно красное ребро. Слева это ребро – синее.
- Слева с этим синим ребром граничит красное (почему?). Значит, справа оно – синее.
- Граф разбивается на чередующиеся циклы и цепи. Докажите, что есть нечетная цепь.
- Найдите плохой пусть слева и придите к противоречию.

Доказательство леммы Холла.

Пусть выбрано наибольшее паросочетание, но при этом остался одинокий юноша *A*. Рассмотрим все пути с началом в А, у которых ребра из паросочетания и не из паросочетания строго чередуются. Рассмотрим множество *Y*, куда входят все юноши из этих путей, и множество *X*, куда входят все девушки из этих путей. Докажите:

- оба эти множества не пусты;
- все рассмотренные пути заканчиваются в множестве *Y*;
- число элементов в множестве *Y* на 1 больше, чем в множестве *X*;
- юноши из *Y* имеют знакомых только из множества *X*.

Полученное противоречие (с чем именно) доказывает лемму Холла.

(Обратно, способ 2 – по индукции).

- Докажите, что лемма Холла верна при n=1, 2.
- Докажите, что если условие разнообразия выполняется для некоторого множества юношей, то оно выполняется и для любого его подмножества.

Назовем множество ***критическим,*** если этому множеству из k юношей соответствует ровно k девушек. Возьмем наименьшее критическое подмножество, пусть в нем k элементов.

- Докажите, что если критического подмножества нет, то «лишних» девушек можно удалить.
- Докажите, что если $k<n$, то критическое подмножество можно удалить и применить индукцию.
- Докажите, что если $k=n$, то можно образовать любую возможную пару и применить индукцию.

Задачи по лемме Холла

3. В каждой строке и в каждом столбце шахматной доски стоят по три ладьи. Докажите, что можно выбрать 8 ладей, не бьющих друг друга.

4. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

5. В множестве A 2016 элементов. Докажите, что ко всем 1001-элементным подмножествам добавить по одному элементу так, чтобы все получившиеся 1002-элементные подмножества были бы различны.

6. Прямоугольный лист бумаги разбит на n фигур одинаковой площади с одной стороны и на n других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот лист можно проткнуть n иголками так, что каждая из $2n$ фигур будет проткнута по разу.

7. Табло состоит из 2016 лампочек. Двое играют в следующую игру. Ход игрока состоит в том, что он изменяет состояние одной лампочки (т.е. выключает или включает её), при этом нельзя повторять позицию, которая уже встречалась на табло. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Докажите, что ребра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k, можно правильно раскрасить в k цветов так, чтобы в каждом цвете получилась правильная раскраска.