8 класс, математический бой, 12 июля. Вариант «Веранда»

1. Петя имеет множество проволочных заготовок в виде квадратика со стороной 1 без одно стороны. Он хочет сложить из них квадрат $n\times n$, разлинованный на квадратики 1×1, без пропусков и наложений. При каких натуральных n Петя сможет спаять из этих заготовок квадрат со стороной n, разграфленный на квадраты со стороной 1? Заготовки не могут накладываться друг на друга.

2. Из точки M на основании BC равнобедренного треугольника ABC проведены прямые, параллельные боковым сторонам, и пересекающие стороны AB и AC в точках P и Q. Прямые PQ и BC пересекаются в точке N. Докажите, что $NB+NC \geq 2MN$.

3. Натуральные числа m и n таковы, что 7^m+16^n делится на 101. Докажите, что число 7^n+16^m тоже делится на 101.

4. При игре в «Морской бой» кораблем могут являться только прямоугольники, у которых одна сторона равна 1, а другая – 1, 2, 3 или 4. Корабли не могут соприкасаться сторонами и даже углами. Какое наименьшее количество могут занять корабли на доске 10×10, если к ним нельзя добавить ни одного корабля без нарушения правил?

5. $a, b, c \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} \leq a \leq 1, \frac{1}{2} \leq b \leq 1, \frac{1}{2} \leq c \leq 1$. Докажите неравенство $2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \leq 3$.

6. Существуют ли такие функции f и g, определенные для всех действительных x, что $f(g(x)) = x+1$ при всех x, а $g(f(x))$ не равно $x + 1$ ни при каких x?

7. В клетке доски $n\times n$ стоит король. Он делает произвольный первый ход и продолжает ходить по следующему правилу: если очередной ход короля был по вертикали или горизонтали, то следующий должен быть по диагонали, и наоборот. При каких n можно так выбрать начальную позицию и последовательность ходов, чтобы король побывал во всех клетках доски по одному разу? (Начальная клетка считается посещенной. Возвращаться на исходную клетку не обязательно.)

8. Пусть $M = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. Найдите количество биекций f: $M \to M$ таких, что если x делится на y, то и $f(x)$ делится на $f(y)$.

9. Боря и Вася договорились показать Ане фокус, состоящий в следующем. Аня выкладывает в ряд карточки с числами от 1 до $2n$ в произвольном порядке числом вверх. Боря, посмотрев на них, либо меняет две карточки местами, либо не делает ничего. Затем карточки (с сохранением порядка) переворачиваются числом вниз, и в комнату входит Вася. Аня называет ему число от 1 до $2n$, и он по одной переворачивает карточки с целью перевернуть карточку со сказанным числом. Как Боре и Васе договориться так, чтобы он гарантированно нашёл карточку не более, чем за n переворачиваний?

10. Точка M лежит на меньшей дуге CD описанной окружности квадрата $ABCD$. Прямые MB и CD пересекаются в точке в точке S, прямые AM и BD пересекаются в точке P, прямые AC и BM пересекаются в точке Q, прямые AM и CD пересекаются в точке R. Докажите, что PS перпендикулярно RQ.

8 класс, математический бой, 12 июля.

Вариант «Правая беседка»

1. Бабушка отмечает день рождения в один день с внуком, и вот уже шестой день рождения подряд её возраст оказывается кратным возрасту внука. Сотый день рождения бабушка ещё не отмечала. Сколько ей лет?

2. Из точки M на основании BC равнобедренного треугольника ABC проведены прямые, параллельные боковым сторонам, и пересекающие стороны AB и AC в точках P и Q. Прямые PQ и BC пересекаются в точке N. Докажите, что $NB+NC \geq 2MN$.

3. Натуральные числа a и b таковы, что натуральное число $a–b$ делится на натуральное число $2b–a$. Докажите, что число $2b–a$ является наибольшим общим делителем чисел a и b.

4. При игре в «Морской бой» кораблем могут являться только прямоугольники, у которых одна сторона равна 1, а другая – 1, 2, 3 или 4. Корабли не могут соприкасаться сторонами и даже углами. Какое наименьшее количество могут занять корабли на доске 9×9, если к ним нельзя добавить ни одного корабля без нарушения правил?

5. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \geq \frac{1}{2}, b \geq \frac{1}{2}, c \geq \frac{1}{2}$. Докажите неравенство $2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b}$.

6. В полном графе на 100 вершин стерли 50 ребер. Докажите, что в оставшемся графе можно выбрать 50 вершин, из которых каждая с каждой соединены ребрами.

7. В клетке доски $n \times n$ стоит король. Он делает произвольный первый ход и продолжает ходить по следующему правилу: если очередной ход короля был по вертикали или горизонтали, то следующий должен быть по диагонали, и наоборот. При каких n можно так выбрать начальную позицию и последовательность ходов, чтобы король побывал во всех клетках доски по одному разу? (Начальная клетка считается посещенной. Возвращаться на исходную клетку не обязательно.)

8. В 100 одинаковых стаканов налит сок. За одну операцию повар может перелить из одного стакана в другой любое количество сока, но так, чтобы другой стакан не переполнился. У повара идеальный глазомер. Докажите, что за 99 переливаний он может уравнять количество сока во всех стаканах.