Китайская теорема об остатках.

1. Пусть $m_1, \ldots, m_k$ — попарно взаимно простые числа.

(a) Докажите, что существует число x такое, что

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1} \\ x \equiv 0 \pmod{m_2} \\ x \equiv 0 \pmod{m_3} \\ \qquad\qquad\ldots \\ x \equiv 0 \pmod{m_k} \end{cases}$$

Указание. Найдите решение в виде $x = (m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_k)^t$. Что можно выбрать в качестве t?

(b) *(Китайская теорема об остатках.)* Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — произвольные натуральные числа. Докажите, что существует число x такое, что

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}, \qquad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Более того, такое число единственно по модулю $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$.

Указание. Воспользуйтесь пунктом **(a)**.

2. *(Другое доказательство китайской теоремы об остатках.)* Пусть снова $m_1, \ldots, m_k$ — попарно взаимно простые, $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$. Докажите, что:

(a) Количество различных наборов $(a_1, \ldots, a_k)$ таких, что $0 \leqslant a_i \leqslant m_i - 1$, равно M.

(b) Если $0 \leqslant N_1, N_2 \leqslant M - 1$ и $N_1 \equiv N_2 \pmod{m_i}$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$, то $N_1 = N_2$.

(c) Докажите собственно китайскую теорему об остатках.

3. Найдите остаток от деления **(a)** 19^{14} на 70; **(b)** 17^9 на 48.

4. При каких целых n число $n^2 + 3n + 1$ делится на 55?

5. Докажите, что для любого n найдутся n подряд идущих натуральных чисел, делителем каждого из которых является квадрат простого числа.

6. Сколько четырехзначных чисел удовлетворяют уравнению $x^2 \equiv x \pmod{10000}$?

7. Даны попарно взаимно простые числа $m_1, ..., m_n$. Докажите, что любую правильную дробь вида $\dfrac{c}{m_1 ... m_n}$, где $c \in \mathbb{Z}$, можно представить в виде алгебраической суммы правильных дробей вида $\dfrac{n_i}{m_i}, n_i \in \mathbb{Z}$.

8. Докажите, что числа натурального ряда можно переставить местами так, чтобы сумма любых n первых чисел делилась на n.