Вписанные углы

Вспомним, что было

Определение. Угол из центра окружности, опирающийся на дугу, называется *центральным*, а его величина называется *угловой величиной дуги.*

1. В окружности даны хорды AB и BC. Точка O — центр окружности. Докажите, что $\angle ABC$ равен половине угловой величины дуги BC или же $\frac{1}{2}\angle AOC$, если точка O лежит

(a) на AB;

(b) внутри треугольника ABC;

(c) вне угла ABC.

Определение. Углы с вершиной на окружности и опирающиеся на дугу окружности называются *вписанными.*

Вопрос. Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр?

2. (a) Докажите, что угол между хордой и касательной в одном из её концов равен половине отсекаемой дуги.

(b) Докажите, что если угол между прямой и хордой, проведённой через точку пересечения прямой и окружности, равен половине угловой величины дуги, отсекаемой хордой, то эта прямая является касательной.

3. Докажите, что параллельные хорды, высекают между собой равные дуги.

Определение. Многоугольник называется *вписанным*, если существует окружность, проходящая через все его вершины.

4. (a) У вписанного четырёхугольника сумма противоположных углов равна $180°$.

(b) Если у четырёхугольника сумма противоположных углов равна $180°$, то он вписанный.

5. Замените в предыдущей задаче «сумма противоположных углов равна $180°$» на «углы при диагоналях, опирающиеся на общую сторону равны».

Задачи

6. Дана окружность с диаметром AB. На одной и той же дуге AB взяли точки C и D. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC в точке Q. Докажите, что AB перпендикулярно PQ.

7. Четырёхугольник, диагонали которого взаимноперпендикулярны, вписан в окружность. Докажите, что продолжение перпендикуляра из точки пересечения диагоналей к одной из сторон делит противоположную сторону пополам.

8. O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Из вершины A опустили высоту AH. Докажите, что $\angle CAH = \angle BAO$.

9. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. Биссектрисы AK и CL пересекаются в точке I. Докажите, что $IK = IL$.

10. Точки E и F — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и BC. Прямая EF пересекается с биссектрисой угла A в точке X. Докажите, что угол BXA прямой.

11. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взяли произвольную точку P. Докажите, что $AP = BP + CP$.

12. *(Лемма Архимеда)* Две окружности касаются внутренним образом в точке S. Хорда AB большей окружности касается меньшей в точке P. Докажите, что луч SP делит угол ASB пополам.

13. AB и CD – диаметры одной и той же окружности. Из точки M, лежащей на той же окружности, опустили перпендикуляры MP и MQ на AB и CD соответственно. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от расположения точки M на окружности.