Гомотетия

Определение. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости H_O^k, которое каждую точку M переводит в точку $M' = H_O^k(M)$, для которой выполнено равенство $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Понимание: Докажите, что гомотетия является инъекцией, сюръекцией. Какое преобразование является обратным к H_O^k? Чем является композиция $H_O^{k_2} \circ H_O^{k_1}$? Почему $k \neq 0$ в определении?

Теорема 1. 1) Две неравных параллельных отрезка гомотетичны дважды: один раз с положительным коэффициентом, один раз – с отрицательным.

2) Два равных несовпадающих отрезка гомотетичны один раз, с коэффициентом -1.

Теорема 2. Два неравных треугольника с параллельными сторонами гомотетичны.

Теорема 3. 1) Две неравные окружности гомотетичны дважды: один раз с положительным коэффициентом, один раз – с отрицательным.

2) Две равные концентрические окружности гомотетичны дважды. Неконцентрические – один раз, с коэффициентом -1.

1. Две окружности касаются в точке K внешним/внутренним образом. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, вторую – в точках C и D. **(a)** Докажите, что $AB \parallel CD$. **(b)** Докажите, что касательные в точках A и C параллельны.

2. Докажите лемму Архимеда при помощи гомотетии.

3. (*Прямая Эйлера*) Докажите, что в любом треугольнике точка ортоцентр H, центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан лежат на одной прямой, причём точка M расположена между точками O и H, и $MH = 2MO$.

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Секущая пересекает окружности в точках M, N, P, Q (в таком порядке). Докажите, что $\angle MAP = \angle NAQ$.

5. Докажите, что в треугольнике ABC вершина B, точка, диаметрально противоположная точке касания вписанной окружности и стороны AC, а также точка касания вневписанной окружности и стороны AC, лежат на одной прямой.

6. Докажите, что три прямые, проведенные через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись точки M и N такие, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA — биссектриса угла MPN.

8. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

9. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 – середины дуг BAC, ABC, ACB описанной окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Гомотетия

Определение. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости H_O^k, которое каждую точку M переводит в точку $M' = H_O^k(M)$, для которой выполнено равенство $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Понимание: Докажите, что гомотетия является инъекцией, сюръекцией. Какое преобразование является обратным к H_O^k? Чем является композиция $H_O^{k_2} \circ H_O^{k_1}$? Почему $k \neq 0$ в определении?

Теорема 1. 1) Две неравных параллельных отрезка гомотетичны дважды: один раз с положительным коэффициентом, один раз – с отрицательным.

2) Два равных несовпадающих отрезка гомотетичны один раз, с коэффициентом -1.

Теорема 2. Два неравных треугольника с параллельными сторонами гомотетичны.

Теорема 3. 1) Две неравные окружности гомотетичны дважды: один раз с положительным коэффициентом, один раз – с отрицательным.

2) Две равные концентрические окружности гомотетичны дважды. Неконцентрические – один раз, с коэффициентом -1.

1. Две окружности касаются в точке K внешним/внутренним образом. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, вторую – в точках C и D. **(a)** Докажите, что $AB \parallel CD$. **(b)** Докажите, что касательные в точках A и C параллельны.

2. Докажите лемму Архимеда при помощи гомотетии.

3. (*Прямая Эйлера*) Докажите, что в любом треугольнике точка ортоцентр H, центр O описанной окружности и точка M пересечения медиан лежат на одной прямой, причём точка M расположена между точками O и H, и $MH = 2MO$.

4. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Секущая пересекает окружности в точках M, N, P, Q (в таком порядке). Докажите, что $\angle MAP = \angle NAQ$.

5. Докажите, что в треугольнике ABC вершина B, точка, диаметрально противоположная точке касания вписанной окружности и стороны AC, а также точка касания вневписанной окружности и стороны AC, лежат на одной прямой.

6. Докажите, что три прямые, проведенные через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись точки M и N такие, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA — биссектриса угла MPN.

8. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

9. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 – середины дуг BAC, ABC, ACB описанной окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.