# *8 класс, перестановки - теория, 17 июля*

**0.** В ряд выписаны числа 1, 2, 3, ..., *n*. За один ход разрешается поменять местами любые два числа. Может ли после 2015 таких операций порядок чисел оказаться исходным?

**1**. На утренней линейке отряд построился в одну шеренгу. Но вожатый предполагает, что кое-кто при этом проспал. Для того, чтобы проверить свои догадки, он хочет выстроить весь отряд по алфавиту, но при этом он может менять местами только двух соседних детей. Докажите, что вожатый сможет добиться своей цели.

**2**. В ряд стоит рота солдат. По уставу можно менять местами любых двух солдат, между которыми стоят ровно двое. Всегда ли можно выстроить солдат по росту?

**3**. Двоечник Федя написал на карточках числа от 1 до *n* и разложил карточки в некотором порядке. Он умеет менять местами две самые левые карточки, а также переставлять самую правую карточку в левый конец. Всегда ли он сможет выставить карточки в порядке возрастания?

*Определение*. ***Перестановкой*** *называется биективное отображение конечного множества (часто это множество {1, ..., n}) на себя.*

*Определение. Циклом называется перестановка, которая переводит некий элемент* $a_1$ *в* $a_2$*,* $a_2$ *в* $a_3$*, ...,* $a_{k-1}$ *в* $a_k$*,* $a_k$ *в* $a_1$*, а остальные оставляет на месте. Транспозицией называется цикл длины 2.*

**4.** Соединим каждое число стрелочкой с его образом. Получается, что перестановка определяет ориентированный граф. Докажите, что граф перестановки состоит из нескольких непересекающихся циклов. А как выглядит граф цикла?

*Определение. Произведение перестановок – это когда мы сделали сначала первую перестановку, а потом - вторую. То есть произведение перестановок – это просто композиция соответствующих функций.*

**5.** Верно ли, что всегда *ab=ba?*

*Определение. Порядком перестановки a называется наименьшее число d, такое, что* $a^d$ *– тождественная перестановка (догадайтесь, что это такое).*

**6.** Докажите, что порядок перестановки всегда существует и конечен.

**7.** К собранному кубику Рубика применили последовательность поворотов. Доказать, что, применив ее несколько раз, можно привести кубик в начальное состояние.

**Минутка формализма.** Общепринятое представление перестановки такое:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Здесь $a_1, a_2, \dots a_n$ – переставленный местами набор чисел от 1 до n. Возьмите какие-нибудь две перестановки, представленные в таком виде, и найдите их композицию.

**8.** Докажите, что каждая перестановка представляет собой композицию непересекающихся циклов (поймем, как это связано с задачей 4)

**9.** Докажите, что каждая перестановка представляется в виде композиции транспозиций.

**10**. Найдите две перестановки, в виде композиции которых (каждая из них, возможно, берется несколько раз) можно представить любую перестановку.

*Определение. Рассмотрим перестановку s множества {1, ..., n}. Будем говорить, что пара (i,j), для которой i < j, но s(i) > s(j) образует* ***инверсию (или беспорядок)****. Перестановка называется чётной, если число её инверсий чётно.*

**11.** Докажите, что произведение четной перестановки и транспозиции нечетно, а нечетной перестановки и транспозиции четно.

**12**. Каких перестановок больше: четных или нечетных?

**13**. Докажите, что любая четная перестановка представляется в виде композиции циклов длины 3.

# *8 класс, перестановки - задачи*

**14.** На прямой стоят две фишки. Слева –- красная, справа –- синяя. Разрешается проводить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю –- слева?

***15.*** *Игра в 15.* Докажите, что, сдвигая фишки на свободное место, из исходной расстановки в игре в 15 нельзя получить расстановку, где 14 и 15 поменялись местами:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | |

**16**. В некотором городе разрешены только тройные обмены (семья А переезжает в квартиру Б, семья Б переезжает в квартиру С, семья С переезжает в квартиру А). Несколько семей договорились об обменах. Любой ли обмен можно осуществить по правилам?

**17**. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня. (Предполагается, что при любых обменах каждая семья как до, так и после обмена занимает одну квартиру, и что семьи при этом сохраняются).

**18.** Испанский король решил перевесить по-своему портреты своих предшественников в круглой башне замка. Однако он хочет, чтобы за один раз меняли местами только два портрета, висящие рядом, причём это не должны быть портреты двух королей, один из которых царствовал сразу после другого. Кроме того, ему важно лишь взаимное расположение портретов, и два расположения, отличающиеся поворотом круга, он считает одинаковыми. Доказать, что как бы сначала ни висели портреты, король может по этим правилам добиться любого нового их расположения.

**19**. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он может рассадить всех на свои места?

**20. НАПОМИНАНИЕ** В очереди к стоматологу стоят 30 ребят: мальчиков и девочек. Часы на стене показывают 8:00. Как только начинается новая минута, каждый мальчик, за которым стоит девочка, пропускает ее вперед. Докажите, что перестановки в очереди закончатся до 8:30, когда откроется дверь кабинета.

**21.** Несколько населённых пунктов соединены дорогами с городом, а между ними дорог нет. Автомобиль отправляется из города с грузами сразу для всех населённых пунктов. Стоимость каждой поездки равна произведению веса всех грузов в кузове на расстояние. Докажите, что если вес каждого груза численно равен расстоянию от города до пункта назначения, то общая стоимость перевозки не зависит от порядка, в котором объезжаются пункты.

**22**. $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$ – такая перестановка чисел $2, 3, \ldots, 102$, что $a_k$ делится на $k$ при каждом $k$. Найти все такие перестановки.

**23.** За круглым столом сидят $n$ человек. Разрешается любых двух людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?

**24**. Имеется 100-значное число, состоящее из единиц и двоек. Разрешается в любых десяти последовательных цифрах поменять местами первые пять с пятью следующими. Два таких числа называются *похожими*, если одно из них получается из другого несколькими такими операциями. Какое наибольшее количество попарно непохожих чисел можно выбрать?