Тридцать вторая
Летняя Многопредметная Школа
Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2016 г.

8 класс, группа профи

Преподаватели:
Е. А. Исаак, А. В. Пастор, Е. Н. Симарова

Вступительная олимпиада. 04.07.2016

1. Даны три попарно различных числа. Квадрат первого из них равен сумме квадратов второго и третьего, а квадрат второго равен квадрату суммы первого и третьего. Чему может быть равна сумма чисел, написанных на доске?

2. Прямоугольник называется длинным, если его стороны относятся как 1:3. Докажите, что для любого натурального $n > 5$ квадрат можно разрезать на n длинных прямоугольников.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$), угол B — тупой. На продолжении стороны AB за точку A отмечена точка D такая, что $AB = AD$. На продолжении стороны BC за точку B отмечена точка E такая, что $ED \perp AC$ и $AE \perp AB$. Найдите углы треугольника ABC.

4. Какое наибольшее число различных прямых можно провести на плоскости так, чтобы среди любых 2016 из них нашлись две, образующие угол 40°?

5. Каждый ученик ЛМШ записал на листочке несколько (не менее двух) натуральных чисел. Известно, что любые трое имеют общее число, которое записали они все. Докажите, что можно объявить некоторые натуральные числа *хорошими* так, чтобы у каждого ученика на листочке были как хорошие, так и плохие числа.

6. Вася выписывает на доску натуральные числа. Первое число 1, а каждое следующее число больше предыдущего либо на 1, либо в 2 раза. Может ли в какой-то момент времени сумма всех выписанных чисел оказаться равной 2009?

Квадратные трехчлены. 04.07.2016

Разминка.

1. У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на единицу. Эту операцию повторили четыре раза. Приведите пример такого исходного уравнения, что у каждого из пяти полученных уравнений корни были бы целыми числами.

2. Все коэффициенты квадратного трехчлена нечетны. Докажите, что он не имеет целых корней.

3. Любые два из тысячи квадратных трехчленов имеют общий корень. Верно ли что все они имеют общий корень?

4. Любые два из тысячи квадратных трехчленов имеют общий корень. Может ли разность любых двух из них оказаться нестрого знакопостоянной?

Задачи.

1. Даны числа $a_1, \ldots, a_{10}$. Известно, что у каждого из десяти квадратных трехчленов $x^2-a_1x+a_2$, $x^2-a_2x+a_3$, $\ldots$, $x^2-a_9x+a_{10}$, $x^2-a_{10}x+a_1$ не больше одного корня. Докажите, что все числа a_i не превосходят 4.

2. Квадратный трехчлен таков, что если заменить любой из его коэффициентов на 1, то у получившегося многочлена будет хотя бы один корень. Докажите, что исходный многочлен не всюду положителен.

3. Даны 2008 квадратных трехчленов вида $x^2 - a_kx + b_k = 0$, где a_k и b_k — числа из набора от 1 до 4016 (все по разу). На вещественной прямой отметили корни этих многочленов. Докажите, что два из них находятся на расстоянии менее $1/250$.

4. Учитель написал на доске квадратный трёхчлен x^2+px+q с целыми коэффициентами. Каждую минуту к доске подходит ученик и вычисляет корни одного из написанных на доске трёхчленов. Если они оказываются целыми, он выписывает на доску один из трёхчленов $x^2 + ax + b$ или $x^2 + bx + a$, где a и b — только что найденные им корни.

а) При каких p и q первый выписанный учеником трёхчлен может совпасть с исходным?

б) Учитель запретил использовать любой трёхчлен для получения корней больше одного раза. Может ли в таком случае первый выписанный учеником трёхчлен не совпасть с исходным, а второй — совпасть?

в) Может ли учитель подобрать p и q так, чтобы ученик смог добиться того, чтобы в какой-то момент на доске оказались 2011 различных трёхчленов?

5. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в 2007 раз больше корней квадратного уравнения $cx^2 + dx + a = 0$. Докажите, что $b^2 = d^2$.

6. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2+bx+c$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение $f(2x+1)+f(3x+2) = 0$ имеет ровно один корень. Найдите b/c.

7. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что уравнение $(f(x))^5 - f(x) = 0$ имеет ровно три вещественных решения. Найдите ординату (т. е. координату по оси y) вершины графика этого трехчлена.

8. Дима задумал три числа a, b и c и обнаружил, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет два различных ненулевых корня: 1 и s. Саша изменил значение одного из коэффициентов a, b или c. В результате получился трехчлен, у которого тоже два различных корня: 2 и $3s$. Чему может быть равно s? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

9. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2+px+q$, где $p, q > 0$, имеющий два различных вещественных корня. Натуральные числа a и b таковы, что $f(a) < f(b) < 1{,}001 f(a)$. Докажите, что $f(b) - f(a) > 4001$.

10. В квадратный трехчлен подставили последовательно 4 числа и получили значения: 2, 3, 5, 8. Потом эти же числа в том же порядке подставили в другой трехчлен и получили 16, 15, 13, x. Найдите x.

11. Компьютер загадал квадратный трехчлен $F(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, а Вася может называть две точки (необязательно различные), после чего компьютер сообщает ему произведение значений F в этих точках. Как Васе всего за три вопроса отгадать F?

Паросочетания и Теорема Холла

Лемма о девушках. *Дано n юношей и несколько девушек. Известно, что для любого $k \leq n$ и любой группы из k юношей есть не менее k девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из этих k юношей. Тогда все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых так, что ни одна девушка не будет выбрана двумя юношами.*

Теперь давайте сформулируем эту лемму на языке теории графов. Для этого введем несколько определений.

Определение 1. Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два множества, называемых *долями* так, чтобы любое ребро графа соединяло вершины из разных долей.

Определение 2. *Паросочетанием* графа называется набор его ребер, не имеющих общих концов. Паросочетание называется *совершенным*, если любая вершина графа является концом одного из ребер паросочетания.

Теорема 1 (Теорема Холла)**.** *Двудольный граф G с долями A и B удовлетворяет следующему условию: для любого подмножества $M \subset A$ в доле B найдется не менее $|M|$ вершин, смежных хотя бы с одной из вершин множества M. Тогда в графе G есть паросочетание, при котором каждая вершина доли A является концом одного из его ребер.*

Докажем теорему Холла двумя способами.

1. (*Метод чередующихся цепей*). Рассмотрим произвольное паросочетание в графе, удовлетворяющем условию теоремы Холла. Пусть нашлась вершина доли A, не являющаяся концом ни одного из ребер паросочетания. Докажите, что тогда существует паросочетание с большим числом ребер, и выведете из этого теорему Холла.

2. (*Индукция*). Двудольный граф G с долями A и B удовлетворяет условию теоремы Холла.

а) Пусть подмножество $M \subset A$ таково, что ровно $|M|$ вершин доли B смежны хотя бы с одной вершиной множества M. Докажите, что если удалить из G все вершины множества M, а также все смежные с ними вершины, то получившейся граф также будет удовлетворять условию теоремы Холла.

б) Докажите теорему Холла индукцией по числу вершин графа.

3. Все вершины двудольного графа имеют степень k.

а) Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

б) Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в k цветов правильным образом (то есть так, чтобы никакие два одноцветных ребра не имели общей вершины).

4. Степени всех вершин графа равны 3. Верно ли, что в нем есть совершенное паросочетание? (Внимание, граф не обязательно двудольный!)

5. (Теорема Холла для арабских стран.) Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

6. Конечное множество разбито на m подмножеств с одинаковым количеством элементов, и это же множество разбито на m^2 подмножеств с одинаковым числом элементов. Докажите, что можно выбрать m^2 различных элементов так, что каждое из множеств первого разбиения содержит ровно m выбранных элементов, а каждое из множеств второго разбиения содержит ровно один выбранный элемент.

Определение 3. Граф называется k-регулярным, если степени всех его вершин равны k.

Определение 4. Подграф H графа G называется k-фактором, если он k-регулярен и содержит все вершины графа G. (Соответственно, совершенное паросочетание графа является его 1-фактором.)

7. Докажите, что в регулярном графе степени $2n$ есть 2-фактор.

Векторы. 05.07.2016

Определение 1. *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$

Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *эквивалентными*, если $ABDC$ — параллелограмм (возможно, вырожденный).

Теорема 1. *Эквивалентность направленных отрезков является отношением эквивалентности.*

Определение 2. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами.* Словосочетание "вектор AB" означает класс эквивалентности, содержащий направленный отрезок $\overline{AB}$.

Замечание. Вектор можно отложить от любой точки плоскости, то есть, если даны точка O и вектор $\overline{u}$, то найдётся единственная точка P, что $\overline{OP} = \overline{u}$.

Определение 3. Векторы называются *коллинеарными*, если направленные отрезки, соответствующие этим векторам, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой. Если они при этом лежат на одном луче исходящем из этой точки, то они называются *сонаправленными.* Если на разных — то *противоположно направленными.*

1. Можно ли расположить на плоскости три вектора так, чтобы модуль суммы каждых двух из них был равен 1, а сумма всех трёх была равна нулевому вектору?

2. Пусть A_1, B_1, C_1 — соответственно середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC, а O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$

3. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина BC, N — середина AD. Докажите, что $|MN| \leqslant \frac{|BA|+|CD|}{2}$. Когда достигается равенство?

4. Докажите, что сумма векторов, ведущих из центра правильного n-угольника в его вершины, равна $\overrightarrow{0}$.

6. На сторонах многоугольника, вписанного в окружность диаметра 1, расставлены стрелки. Докажите, что длина суммы полученных векторов не превосходит 2.

7. На окружности радиуса 1 с центром O дано $2n+1$ точек $P_1, \ldots, P_{2n+1}$, лежащих по одну сторону от некоторого диаметра. Докажите, что $|\overrightarrow{OP}_1 + \ldots + \overrightarrow{OP}_{2n+1}| \geq 1$.

Многочлены. 06.07.2016

1. Дан многочлен $(x^7 + x^5 + 1)^{20}$. Найдите его коэффициент при а) x^{18}; б) x^{17}.

2. Найдите а) сумму коэффициентов; б) сумму коэффициентов при четных степенях многочлена $(1 - 3x + 2x^2)^{743} \cdot (1 + 3x - 2x^2)^{744}$.

3. Докажите, что при любых целых неотрицательных l, m, n выражение $x^{3l+2} + x^{3m+1} + x^{3n}$ делится на $x^2 + x + 1$.

4. (**Теорема Безу.**) а) Докажите, что остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен $f(a)$. б) Докажите, что $f(x) \vdots x - a$ тогда и только тогда, когда $f(a) = 0$.

5. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любых различных целых чисел a и b число $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.

6. Докажите, что у многочлена степени n может быть не более n различных корней.

7. В выражении $(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2016}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получится отрицательный коэффициент.

Степень точки. 06.07.2016

Определение 1. Степенью точки A относительно окружности ω с центром O и радиусом R называется величина $AO^2 - R^2$.

Утверждение. *Если A лежит вне окружности, на продолжении хорды BC, то степень A относительно ω равняется $AB \cdot AC$, а если внутри окружности на хорде BC, то её степень относительно ω равна $-AB \cdot AC$.*

1. На прямой ℓ отмечены точки A и B. Кроме того, дано некоторое число c. Докажите, что на прямой существует ровно одна точка X, что $AX^2 - BX^2 = c$

2. На плоскости даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что геометрическое место точек, для которых степень относительно S_1 равна степени относительно S_2 — прямая.

Определение 2. Прямая из задачи 2 называется *радикальная ось*.

3. а) Докажите, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой. б) Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

4. Даны три окружности, центры которых не совпадают и не лежат на одной прямой. Найдите ГМТ точек, степени которых относительно этих окружностей одинаковы. (Это ГМТ называется *радикальным центром* трёх окружностей.)

5. Докажите, понятно каким способом, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

6. В треугольнике ABC на стороне AB выбрали точки X, Y, на стороне BC — точки Z, T, на стороне AC — точки U, V. Оказалось, что четырехугольники $XYZT$, $ZTVU$ и $XYVU$ вписанные. Докажите, что шестиугольник $XYZTUV$ тоже вписанный.

7. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в ортоцентре треугольника ABC.

Упражнения по теме “Многочлены”. 06.07.2016

1. Найдите наибольший общий делитель многочленов и его линейное представление. а) $f(x) = x^5 - x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 15$ и $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$; б) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 23x + 34$ и $g(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 6$.

Многочлены-2. 07.07.2016

1. Найдите наибольший общий делитель следующих многочленов: а) $x^n - 1$ и $x^m - 1$; б) $x^{2^n} + 1$ и $x^{2^m} + 1$, где m и n — различные натуральные числа.

2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{6\alpha^3+7\alpha^2-2\alpha-1}$, где α — корень многочлена $x^5 - x - 1$.

3. У многочленов $p(x)$ и $q(x)$ — один и тот же набор целых коэффициентов (но их порядок может быть различен). Докажите, что $p(2015) - q(2015) \vdots 1007$.

4. Докажите, что если степень многочлена $p(x)$ больше чем степень многочлена $q(x)$, то начиная с некоторого места $|p(x)| > |q(x)|$.

5. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — взаимно простые многочлены, все коэффициенты которых — целые числа. Докажите, что существует натуральное M такое, что для всех натуральных n справедливо неравенство $(f(n), g(n)) < M$.

6. а) Пусть $p(x)$ — многочлен ненулевой степени с целыми коэффициентами. Могут ли все числа $p(1)$, $p(2)$, $p(3), \ldots$ быть простыми?

б) Докажите, что не существует многочлена степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом.

7. Докажите, что при любом натуральном n найдётся ненулевой многочлен $P(x)$ с коэффициентами, равными $0, -1, 1$, степени не больше 2^n, который делится на $(x-1)^n$.

8. Дан многочлен $p(x)$ с вещественными коэффициентами. Бесконечная последовательность различных натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что $p(a_1) = 0$ и $p(a_n) = a_{n-1}$ для $n \geq 1$. Какую степень может иметь $p(x)$?

Разнобой-1. 07.07.2016

1. Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$ число $[(2+\sqrt{3})^n]$ — нечётно.

2. На сторонах BC и AC остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1; ℓ — прямая, проходящая через общие точки окружностей с диаметрами AA_1 и BB_1. Докажите, что а) прямая ℓ проходит через точку H пересечения высот треугольника ABC; б) прямая ℓ проходит через точку C тогда и только тогда, когда $AB_1 : AC = BA_1 : BC$.

3. Даны две бесконечные возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, состоящие из различных натуральных чисел. Их разности различны и взаимно-просты. Оказалось, что в каждой из них бесконечное число палиндромов. Обязательно ли найдётся такое n, что оба числа a_n, b_n — палиндромы?

4. Мальчиков, учащихся в школе, можно разбить на 10 групп так, что в каждой группе все друг с другом знакомы. Девочек тоже можно разбить на 10 групп таким же образом. Но всех учеников нельзя разбить на 19 групп, в каждой из которых все друг с другом знакомы. Докажите, что найдется 10 девочек, каждая из которых не знакома хотя бы с 10 мальчиками.

5. К натуральному числу каждую минуту прибавляют квадрат его произведения цифр. Верно ли, что рано или поздно получится число с нулём в записи (и процесс стабилизируется)?

6. Докажите, что для положительных a, b, c таких, что $abc = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}.$$

7. В одной из клеток квадрата $n \times n$ лежат n^2 фишек. Разрешается снять 2 фишки из какой-то клетки и переложить по одной в две клетки, симметричные относительно этой, и имеющие с ней хотя бы одну общую точку. Докажите, что если через несколько таких ходов в каждой клетке стало по одной фишке, то диагональных ходов влево-вниз/вправо-вверх было столько же, сколько диагональных ходов влево-вверх/вправо-вниз.

Гамильтоновы пути и циклы. 09.07.2011

Определение 1. Множества вершин и ребер графа G обозначаются $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Степень вершины v графа G обозначается $d_G(v)$. Наименьшая из степеней вершин графа G обозначается $\delta(G)$.

Определение 2. *Простым путем* в графе называется путь, не имеющий самопересечений по вершинам (то есть никакая вершина не встречается в нем дважды). Аналогично, *простым циклом* называется цикл, не имеющий самопересечений по вершинам. *Длиной* пути (цикла) называется количество его ребер.

1. Пусть $\delta(G) \geq 2$. Докажите, что а) в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$; б) в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G)+1$.

2. Дан граф G такой, что $e(G) \geqslant t \cdot v(G)$, $t \in \mathbb{N}$ (через $v(G)$ и $e(G)$ обозначены количество вершин и ребер графа G соответственно).

а) Докажите, что существует такой подграф H графа G, что $\delta(H) \geq t+1$.

б) Докажите, что в графе G есть простой путь длины хотя бы $t+1$ и простой цикл длины хотя бы $t+2$.

3. Пусть $n > 2$, $v_1 \dots v_n$ — максимальный простой путь в графе G, причем $d_G(v_1) + d_G(v_n) \geq n$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины n.

Определение 3. *Гамильтоновым путем* называется путь, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз. *Гамильтоновым циклом* называется цикл, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз.

4. (Теорема Оре.) В графе n вершин. а) Сумма степеней любых двух несмежных вершин больше либо равна $n-1$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь. б) Сумма степеней любых двух несмежных вершин больше либо равна n. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.

5. (Теорема Дирака.) В графе n вершин. Докажите, что а) если степени всех вершин не меньше $\frac{n-1}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов путь; б) если степени всех вершин не меньше $\frac{n}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов цикл.

6. Пусть $ab \notin E(G)$, $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$, а в графе $G + ab$ (т. е. графе, отличающемся от G добавлением ребра ab) есть гамильтонов цикл. Докажите, что в графе G также есть гамильтонов цикл.

7. (Теорема Хватала.)

а) Пусть $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ — степени вершин графа G, причём для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполняется неравенство $d_i + d_{n-i} \geq n$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.

б) Пусть $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ — степени вершин графа G, причём для любого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ выполняется неравенство $d_i + d_{n-i} \geq n-1$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов путь.

Неравенства о средних и метод Штурма.

1. (**Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.**) Для произвольных положительных чисел $a_1, \dots, a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

а) Докажите, что если неравенство о средних выполняется для k чисел, то оно выполняется и для $2k$ чисел. б) Докажите, что если неравенство о средних выполняется для k чисел, то оно выполняется и для $k-1$ числа.

в) Докажите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом при помощи метода Штурма.

2. а) (**Неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом.**) Докажите, что для произвольных положительных чисел $a_1, \dots, a_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

б) (**Неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном.**) Докажите, что для произвольных вещественных чисел $a_1, \dots, a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

3. Найдите минимальное значение выражения $\frac{a^6+b^3+c^2}{abc}$ при положительных a, b, c.

4. Сумма положительных чисел a_i равна 1. Докажите неравенство

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} \leq \frac{n-1}{4}.$$

5. Найдите максимум выражения $x_1 + \ldots + x_n - x_1 x_2 - x_2 x_3 - \ldots - x_n x_1$ для $x_i \in [0,1]$.

6. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Докажите неравенство $a+b+c+\frac{3}{ab+bc+ca} \geqslant 4$.

7. Пусть $x, y, z > 0$. Докажите, что $\sqrt{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}} \geq \sqrt[32]{xyz}$.

8. Произведение положительных чисел a, b, c равно 1. Докажите неравенство

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Многочлены-3. 10.07.2016

1. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — различные вещественные числа.

а) Докажите, что существует единственный многочлен f такой, что $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$ и $\deg f \leq n$.

б) Пусть $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Докажите, что существует единственный многочлен f такой, что $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, …, $f(x_n) = y_n$ и $\deg f \leq n$.

Определение. Построение многочлена, принимающего в данных точках данные значения, называется *интерполяцией*, а сам многочлен — *интерполяционным многочленом.*

2. Известно, что некоторый многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.

3. Многочлен $p(x)$ степени n таков, что $p(k) = \frac{1}{C_{n+1}^k}$ для всех целых k таких, что $0 \leq k \leq n$. Найдите $p(n+1)$.

4. Многочлен $f(x)$ степени n таков, что в любой целой точке принимает целое значение. Докажите, что $n! \cdot f(x)$ является многочленом, все коэффициенты которого целые.

5. Докажите, что сумма кубов трех корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами есть целое число, делящееся на 3.

6. Известно, что целые числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+b+c = 0$. Докажите, что $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ — квадрат целого числа.

7. Многочлен p таков, что для любого вещественного x выполнено равенство $p(x) = p(a-x)$. Докажите, что существует такой многочлен g, что $p(x) = g((x-\frac{a}{2})^2)$.

8. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — 2 многочлена с вещественными коэффициентами. Оказалось, что они принимают целые числа в одних и тех же точках (т. е. в случае если $f(a)$ целое, то и $g(a)$ целое и наоборот). Докажите, что либо сумма, либо разность этих многочленов тождественно равна константе.

Векторы-2. 10.07.2016

Определение. *Умножение на число*: вектором $k\overrightarrow{a}$ называется вектор $\overrightarrow{b}$, такой что $|\overrightarrow{b}| = |k||\overrightarrow{a}|$, и вектор $\overrightarrow{b}$ сонаправлен с $\overrightarrow{a}$, если $k > 0$ и противоположно направлен при $k < 0$.

Отношением двух коллинеарных векторов называется отношение их модулей, взятая со знаком плюс, если векторы сонаправлены и со знаком минус, если они направлены противоположно.

1. (**Разложение по базису.**) На плоскости дано два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$. Докажите, что любой вектор $\overrightarrow{w}$ единственным образом представляется в виде суммы $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, где a, b — какие-то вещественные числа.

2. На прямой лежат 2015 точек $M_1, \ldots, M_{2015}$. Вне прямой дана точка F. Можно ли на отрезках $FM_1, \ldots, FM_{2015}$ расставить стрелки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна $\overrightarrow{0}$?

3. В пятиугольнике $ABCDE$ точки M, N, K, L — середины сторон AB, BC, CD, DE соответственно, P и Q — середины отрезков MK и NL соответственно. Докажите, что $PQ \parallel AE$ и найдите отношение $\frac{PQ}{AE}$.

4. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Точка O — центр его описанной окружности, M — точка пересечения его медиан. Докажите, что а) $3 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; б) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

в) (**Прямая Эйлера.**) Выведите из предыдущих пунктов, что точки O, M, H лежат на одной прямой и найдите отношение $\frac{\overrightarrow{MH}}{\overrightarrow{MO}}$.

5. На стороне AB треугольника ABC с углом B равным β расположена точка K, причём $AK = BC$. Пусть P — середина BK, M — середина AC. Найдите угол APM.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Пусть H_a — ортоцентр треугольника BCD, M_a — середина отрезка AH_a; точки M_b, M_c и M_d определяются аналогично. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c и M_d совпадают.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Пусть S_a — окружность радиуса R с центром в ортоцентре треугольника BCD; окружности S_b, S_c, S_d определяются аналогично. Докажите, что эти четыре окружности пересекаются в одной точке.

Радикальная ось между окружностью и точкой. 11.07.2016

1. Пусть AB и AC — касательные к окружности ω, M и N — середины отрезков AB и AC, P — произвольная точка прямой MN. Докажите, что $PA = PD$, где PD — касательная к окружности ω.

2. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$, а углы A и C — прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.

3. Дана окружность ω и фиксированная точка A вне окружности. Через точку A проводятся окружности ω', которые касаются окружности ω в точке B. Касательные, проведённые в точках A и B к окружности ω' пересекаются в точке M. Докажите, что все такие точки M лежат на одной прямой.

4. В треугольник ABC вписана окружность с центром I. Она касается сторон AB, BC, AC в точках C_0, A_0, B_0 соответственно. Прямая BI пересекает отрезок A_0C_0 в точке K. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BKB_0, лежит на прямой AC.

5. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку I перпендикулярно прямой BI, пересекает прямую AC в точке B_1. Аналогично определяются точки A_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках Z и Y соответственно. Прямые BY и CZ пересекаются в точке G. Точки R и S выбираются так, что четырёхугольники $BCYR$ и $BCSZ$ — параллелограммы. Докажите, что $GR = GS$.

Разнобой-2. 11.07.2016

1. Пусть B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB. На продолжениях сторон AB, AC за точки B и C отметили точки X, Y соответственно, так, что $C_1X = B_1Y = BC$. Докажите, что середины отрезков C_1X, B_1Y, BC лежат на одной прямой.

2. Все вершины графа G имеют степень 3, a — одна из них. Известно, что вершины графа G можно покрасить в три цвета правильным образом. Докажите, что эту покраску можно произвести так, чтобы соседи вершины a не были одноцветными.

3. Вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют условию $0 \leq a_i \leq 1$ при всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Докажите неравенство

$$(1 - a_1^n)(1 - a_2^n) \ldots (1 - a_n^n) \leq (1 - a_1 a_2 \ldots a_n)^n.$$

4. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в любых двух соседних вершинах были различными.

5. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$?

6. На доске написаны три числа. Разрешается заменять пару чисел a, b на пару $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$, $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Докажите, что если изначально были записаны числа 2, 3 и 9, то на доске никогда не появится число, меньшее 1.

7. В королевстве, в котором живут король и 2^n подданных, имеют хождение бумажные купюры по 2^n рублей и золотые монеты по 1, 2, 4, …, 2^{n-1} рублей. У каждого подданного бесконечно много купюр, но общее число монет в королевстве конечно.

Однажды король решил собирать с подданных налог следующим образом. Каждый день ровно в полдень каждый подданный отдаёт какую-то сумму (как-то распределяя её между другими подданными и королём), причем каждый должен отдать ровно на 1 рубль больше, чем получит от других. (Раздаваемые суммы могут быть разными у разных подданных и разными в разные дни). Оказалось, что подданные могут проделывать такую операцию каждый день — до бесконечности! Какое наименьшее количество монет может быть в королевстве?

Упражнения по теме “Комплексные числа”

1. Вычислите а) $(1+i)^{2011}$; б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^{2011}$.

Комплексные числа. 12.07.2016

1. Известно, что $z + z^{-1} = 2\cos\alpha$. Докажите, что $z^n + z^{-n} = 2\cos n\alpha$.

2. а) Докажите, что если комплексное число z является корнем многочлена $f(x)$ с вещественными коэффициентами, то число $\overline{z}$ также является его корнем.

б) Докажите, что любой многочлен с вещественными коэффициентами можно разложить в произведение неприводимых многочленов с вещественными коэффициентами не более, чем второй степени.

3. Многочлен $p(x)$ с вещественными коэффициентами при всех вещественных x принимает только положительные значения. Докажите, что найдутся такие многочлены $a(x)$ и $b(x)$, для которых $p(x) = a(x)^2 + b(x)^2$.

4. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки комплексной плоскости, являющиеся вершинами выпуклого n-угольника. Известно, что точка z удовлетворяет уравнению $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0$. Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.

5. Докажите, что $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

6. Докажите, что
а) $\mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^4 - \mathrm{C}_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4})$;
б) $\mathrm{C}_n^1 - \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^5 - \mathrm{C}_n^7 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\sin(\frac{\pi n}{4})$.
в) Вычислите выражение $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^6 + \ldots$.

7. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — корни многочлена $x^n - 1$ и $k \in \mathbb{N}$. Найдите, чему равно выражение $\xi_1^k + \ldots + \xi_n^k$.

Внутренний матбой. 12.07.2016

1. Положим $f(n) = n!$. Максим выписал на доску число $x = 0,f(1)f(2)\ldots$ (в десятичной записи). Является ли число x рациональным?

2. Костя нарисовал два графа с непересекающимися множествами вершин и обнаружил, что их вершины можно покрасить в 100 цветов *правильным* образом (это значит, что любые две соседние вершины должны быть разного цвета), а в 99 цветов так раскрасить не получается. Потом он провел несколько ребер между вершинами этих графов (концы каждого ребра принадлежат разным графам) и обнаружил, что полученный граф нельзя правильно раскрасить менее чем в 110 цветов. Докажите, что Костя провел не менее 1000 ребер.

3. Можно ли выписать в ряд все натуральные числа, большие 1, так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты?

4. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ проведены биссектрисы углов ACB, ADB, CBD и CAD. Они пересекают стороны четырёхугольника в точках X, Y, Z, T. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.

5. Пусть a, b и c — числа на отрезке $[2, 4]$. Докажите неравенство

$$\frac{c}{a^2b^2+c^2} + \frac{b}{a^2c^2+b^2} + \frac{a}{b^2c^2+a^2} \leq \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2}.$$

6. Дано множество M. Его тремя способами разбили на 12 подмножеств $(A_i)_{1\le i\le 12}$, $(B_i)_{1\le i\le 12}$, $(C_i)_{1\le i\le 12}$ таким образом, что

$$|A_i \cap B_j| + |B_j \cap C_k| + |C_k \cap A_i| \ge 12$$

для всех троек натуральных чисел i, j, k, не превосходящих 12. Какое наименьшее количество элементов могло содержать множество M?

7. Из точки O на плоскости проведено 2016 лучей, никакие два из которых не образуют одну прямую. Для любых двух лучей проведем биссектрису меньшего из образованных ими углов. Какое наименьшее количество разных лучей может быть среди этих биссектрис?

8. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$ таковы, что $a_{k+1} \geqslant a_k^2 + \frac{4}{17}$ для всех $1 \leqslant k \leqslant 17$. Докажите, что $a_{18} \geqslant a_1^2$.

9. Внутри треугольника ABC отмечена точка D, такая что

$$\angle DAC = 2\angle DAB = 2\angle DBA.$$

Докажите, что $AD + AC > BC$.

10. После нескольких игр однокругового футбольного чемпионата выяснилось, что любые 5 команд можно расположить по кругу так, что каждая уже сыграла со следующей по кругу. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня (каждая команда должна сыграть с каждой; каждая команда играет в день не более одной игры).

Ориентированные графы. 14.07.2016

1. В ориентированном графе 2005 вершин, причем для любых двух вершин u и v найдется путь либо из u в v, либо из v в u. Докажите, что в этом графе а) найдется вершина, из которой можно попасть во все остальные вершины; б) можно отметить 1003 вершины этого графа так, чтобы в любую неотмеченную вершину вело ориентированное ребро из одной из отмеченных.

Определение 1. Вершины a и b ориентированного графа G назовем *связанными*, если в графе G существуют ориентированные пути из a в b и из b в a. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если любые две его вершины связаны.

2. Дан связный неориентированный граф без мостов (т.е. этот граф, не теряет связность при удалении любого ребра). Двое по очереди ориентируют по одному еще не ориентированному ребру. Проигрывает тот, после чьего хода граф перестанет быть сильно связным. Если все ребра ориентированы, а сильная связность сохранилась — наступает ничья. Может ли кто-то из игроков победить?

Определение 2. *Турнирный граф* или просто *турнир* — это ориентированный граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним ориентированным ребром.

3. а) Докажите, что любая вершина сильно связного турнира входит в ориентированный треугольник.

б) **(Теорема Муна.)** Пусть G — сильно связный турнирный граф, $3 \le k \le v(G)$. Докажите, что для любой вершины $v \in V(G)$ существует простой цикл длины k, проходящий через v.

в) Докажите, что в графе G существует хотя бы $v(G) - k + 1$ простых циклов длины k.

4. Пусть G — турнирный граф на n вершинах, где а) n четно; б) n нечетно и $n \ge 7$. Докажите, что в нём существует такой гамильтонов путь $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$, что его концы соединены ребром $a_1 \to a_n$.

5. В сильно связном ориентированном графе исходящая степень каждой вершины не меньше двух. Докажите, что а) одно из его ребер; б) одну из вершин можно удалить с сохранением условия сильной связности.

6. Каждые два города страны Гельбии соединены односторонним авиарейсом. Из каждого города можно добраться в любой другой, возможно, с пересадками. Региональные бароны хотят превратить страну в федерацию двух республик с общей столицей (в каждой республике должно быть хотя бы два города; каждый город, кроме столицы, будет принадлежать ровно одной из республик, а выбранная совместно столица – обеим). Оказалось, что при любом способе федерализации хотя бы в одной из республик найдутся два города, из одного из которых нельзя добраться до другого, не выезжая за пределы республики. Докажите, что города Гельбии можно занумеровать натуральными числами так, что все авиарейсы, кроме одного, будут вести из города с меньшим номером в город с большим номером.

Скалярное произведение векторов. 14.07.2016

Определение. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ называется число $|u| \cdot |v| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$. В случае, если хотя бы один из векторов $\overrightarrow{u}$ или $\overrightarrow{v}$ равен $\overrightarrow{0}$, их скалярное произведение также считается равным 0. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ обозначается $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ или $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

1. а) Пусть A, B, C и D — произвольные точки плоскости. Докажите, что $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = 0$.

б) Выведите из предыдущего пункта то, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

3. Докажите, что а) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон; б) сумма квадратов сторон произвольного четырехугольника не меньше, чем сумма квадратов его диагоналей, причем равенство достигается только в случае параллелограмма.

4. Даны два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

5. Есть четырёхугольник с целыми координатами вершин и равными диагоналями. Докажите, что его диагонали не могут пересекаться под углом $45°$.

6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) точка D — середина AB, O — центр описанной окружности, M — точка пересечения медиан треугольника ACD. Докажите, что $CD \perp OM$.

7. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Докажите неравенство $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$.

Преобразования плоскости. 15.07.2016

Определение 1. *Преобразованием плоскости* называется биекция множества точек плоскости на себя.

Определение 2. Преобразование плоскости F называется *движением*, если оно сохраняет расстояния (то есть для любых двух точек A и B $|F(A)F(B)| = |AB|$).

Определение 3. Преобразование плоскости F называется *преобразованием подобия*, если существует такое $k > 0$, что для любых двух точек A и B $\quad |F(A)F(B)| = k|AB|$.

1. Докажите, что движение переводит а) отрезок в отрезок; б) прямую в прямую.

в) Докажите, что преобразование подобия обладает теми же свойствами.

2. Две прямолинейные железные дороги пересекаются в точке A. Партизан Трофим с запасом взрывчатки находится в точке L (лагерь) внутри одной из частей, на которые дороги делят плоскость, причем эта часть ограничена лучами, образующими острый угол. Трофим хочет заминировать по очереди обе железные дороги, после чего вернуться в точку L, и пройти при этом как можно меньшее расстояние. Как Трофиму построить свой путь?

3. На плоскости даны окружность и две непараллельные прямые. С помощью циркуля и линейки постройте окружность, касающуюся и данных прямых, и данной окружности.

4. AD — биссектриса угла A в треугольнике ABC. Через точку A проведена прямая, перпендикулярная к AD, и из вершины B опущен перпендикуляр BB_1 на эту прямую. Докажите, что периметр треугольника BB_1C больше периметра треугольника ABC.

5. (Лемма Архимеда.) Пусть A и B — фиксированные точки окружности S. Выберем одну из дуг окружности S с концами A и B и рассмотрим произвольную окружность, касающуюся отрезка AB и выбранной дуги. Обозначим точки касания через P и Q соответственно. Докажите, что все прямые PQ пересекаются в одной точке.

6. Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат.

7. Докажите, что прямые, симметричные произвольной прямой, проходящей через ортоцентр треугольника, относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке

Многочлены над $\mathbb{Z}$ и не только. 15.07.2016

1. Пусть $f(x) = a_nx^n + \ldots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь такая, что $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Докажите, что $a_0 \vdots p$ и $a_n \vdots q$.

Определение 1. Пусть $p \in \mathbb{P}$, α — вычет по модулю p и $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Вычет α является *корнем многочлена* $f(x)$ *по модулю* p, если $f(\alpha) \equiv 0 \pmod p$.

Два многочлена *сравнимы по модулю* p, если сравнимы их коэффициенты при каждой степени x.

2. Пусть p — простое число.

а) Докажите, что если α — корень многочлена $f(x)$ по модулю p, то

$$f(x) \equiv (x - \alpha)g(x) \pmod p$$

для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами.

б) Докажите, что если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — различные корни многочлена $f(x)$ по модулю p, то

$$f(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)g(x) \pmod p$$

для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами.

в) Докажите, что многочлен степени n, у которого не все коэффициенты делятся на p, может иметь не более n корней по модулю p.

г) Докажите, что

$$x^{p-1}-1 \equiv (x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1)) \pmod p.$$

д) Выведите из предыдущих пунктов теорему Вильсона (то есть докажите, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$).

е) А верны ли будут пункты а)-г), если p — будет произвольным натуральным числом?

Определение 2. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. *Содержанием* многочлена f называется наибольший общий делитель всех его коэффициентов. Содержание многочлена f обозначается $c(f)$.

3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

а) Докажите, что если $c(f) = c(g) = 1$, то $c(fg) = 1$.

б) **(Лемма Гаусса.)** Докажите, что $c(fg) = c(f)c(g)$.

в) Докажите, что многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим и над $\mathbb{Q}$ (т. е. если f нельзя разложить на множители с целыми коэффициентами, то его нельзя разложить и на множители с рациональными коэффициентами).

4. (Критерий Эйзенштейна.) Пусть все коэффициенты многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, кроме старшего, кратны простому числу p, а свободный член не кратен p^2. Докажите, что многочлен $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

5. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

6. Пусть $n > 2$ — натуральное число, $a_1, \ldots, a_n$ — различные целые числа. Докажите, что многочлен а) $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$; б) $(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2+1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

Движения и векторы. 16.07.2016

1. Пусть F — произвольное преобразование подобия (возможно, являющееся движением, т.е. коэффициент подобия может быть равен 1).

а) Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{F(A)F(B)} = \overrightarrow{F(C)F(D)}$. *Исходя из утверждения пункта* **а)** *мы можем однозначно определить образ произвольного вектора* $\overrightarrow{v}$ *и обозначить его* $F(\overrightarrow{v})$.

б) Докажите, что для любых векторов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ и числа $k \in \mathbb{R}$ верны равенства $F(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = F(\overrightarrow{u}) + F(\overrightarrow{v})$ и $F(k\overrightarrow{u}) = kF(\overrightarrow{u})$.

Определение. Рассмотрим произвольный вектор $\overrightarrow{a}$ и угол φ. Через $\overrightarrow{a_\varphi}$ мы будем обозначать вектор, полученный из вектора $\overrightarrow{a}$ поворотом на угол φ против часовой стрелки.

Замечание. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, B' — образ точки B при повороте на угол φ с центром A и D' — образ точки D при повороте на угол φ с центром C, то $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{CD'}$. Это означает, что при повороте вектора на угол φ с любым центром будет получаться один и тот же вектор.

2. а) Докажите, что движение является параллельным переносом тогда и только тогда, когда каждый вектор оно переводит в равный ему вектор (т.е. каждый направленный отрезок переводит в эквивалентный ему).

б) Докажите, что движение является поворотом на угол $\varphi \neq 0$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\overrightarrow{a}$ данное движение переводит его в вектор $\overrightarrow{a_\varphi}$.

в) Докажите, что преобразование подобия является гомотетией с коэффициентом $k \neq 1$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\overrightarrow{a}$ данное преобразование переводит его в вектор $k \cdot \overrightarrow{a}$.

3. Даны две пересекающиеся прямые. Докажите, что композиция осевых симметрий относительно этих прямых есть поворот с центром в точке пересечения прямых и найдите угол этого поворота.

4. а) Докажите, что композиция двух поворотов, сумма углов которых не кратна 360°, есть поворот. Найдите его угол и центр. б) А что будет, если сумма углов кратна 360°?

5. Докажите, что композиция двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2, где $k_1k_2 \neq 1$, является гомотетией. Найдите ее центр и коэффициент. Что будет, если $k_1k_2 = 1$?

6. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACP и BCQ. Найдите углы треугольника, у которого вершины совпадают с серединой M стороны AB, точкой P и центром O треугольника BCQ.

7. Даны две окружности. Общая внешняя касательная касается их в точках A и B. Точки X, Y на окружностях таковы, что существует окружность, касающаяся данных в этих точках, причем одинаковым образом (внешним или внутренним). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AX и BY.

Перестановки. 17.07.2016

Определение 1. *Перестановкой* конечного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется биективное отображение σ этого множества на себя.

Утверждение. *Любая перестановка разбивается на непересекающиеся циклы.*

Определение 2. *Инверсией* назовем такую пару индексов i, j, что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Перестановка называется *четной* (соответственно *нечетной*), если число инверсий в ней четно (соответственного нечетно).

Определение 3. *Транспозицией* называется перестановка, меняющая два элемента местами.

Транспозиции, меняющие местами два соседних элемента, называются *элементарными.*

Определение 4. *Произведением* перестановок σ и τ называется композиция соответствующих функций. Т.е. отображение $(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$.

1. Докажите, что любую перестановку можно получить последовательным выполнением а) транспозиций; б) элементарных транспозиций. в) Придумайте две перестановки, такие, что их композициями можно получить любую перестановку.

2. а) Докажите, что при любой транспозиции четность перестановки меняется.

б) Найдите число четных перестановок множества из n-элементов.

3. а) Докажите, что при композиции двух перестановок их четности складываются.

б) Чему равна четность цикла длины n?

4. В городе N разрешены только тройные обмены квартир (по циклу). Однажды выяснилось, что горожане Дилер и Брокер хотят поменяться своими квартирами, а все остальные жители при этом не хотят никуда переезжать. Докажите, что этот план невыполним.

5. В очереди к стоматологу стоят 30 ребят: мальчиков и девочек. Часы на стене показывают 8:00. Как только начинается новая минута, каждый мальчик, за которым стоит девочка, пропускает ее вперед. Докажите, что перестановки в очереди закончатся до 8:30, когда откроется дверь кабинета.

6. За столом сидят $2n$ депутатов. После перерыва эти же $2n$ депутатов расселись вокруг стола в другом порядке. Докажите, что найдутся два депутата, между которыми как до, так и после перерыва сидело одинаковое число человек.

7. Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать. Какой максимальный результат они могут гарантировать?

Матбой Профи-7 — Профи-8. 17.07.2016

1. Существует ли на плоскости конечное множество точек такое, что у каждой точки хотя бы 4 ближайшие?

2. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) углы $\angle ABC$ и $\angle BAD$ острые. Докажите, что треугольник ABC можно разрезать на треугольники $X_1, \ldots, X_4$, а треугольник ABD на треугольники $Y_1, \ldots, Y_4$ так, что для каждого $i = 1, \ldots, 4$ треугольники X_i и Y_i равны.

3. Чевианы AD и BE правильного треугольника ABC пересекаются в точке F. Оказалось, что $S(ABF) = S(CEFD)$. Найдите угол AFB.

4. Существует ли такой набор натуральных чисел a, b, c, d, e, что ровно для двух натуральных чисел n все числа $n+a$, $n+b$, $n+c$, $n+d$, $n+e$ простые?

5. Натуральные числа a и n таковы, что все простые делители числа a больше n. Докажите, что $(a-1)(a^2-1)\ldots(a^{n-1}-1)$ делится на $n!$.

6. В клетках таблицы 32×32 записаны числа так, что выполнены следующие условия. В клетках верхней строки и левого столбца записаны единицы. В **некоторых** неугловых клетках главной диагонали (не обязательно во всех), идущей из левого нижнего угла в правый верхний угол записаны нули. В остальных клетках, каждое число равно сумме чисел, стоящих в соседних клетках слева и сверху. Докажите, что число, стоящее в правом нижнем углу, не делится на 31.

7. Изначально полоска 1×2016 пуста. Два школьника записывают по очереди в ее клетки буквы С и Э (каждым ходом каждый школьник может писать любую букву). Игрок, после хода которого получилось подслово СЭС, выигрывает. Докажите, что при правильной игре второй игрок выигрывает.

8. Граф G, содержащий 100 вершин, удовлетворяет условию: если выбрать в нем 4 различные вершины A, B, C, D такие, что A смежна с B, B смежна с C и C смежна с D, то среди этих четырех вершин еще какие-то две смежны. Докажите, что в графе G найдутся такие две вершины X и Y, что каждая из остальных 98 вершин либо смежна и с X, и с Y, либо не смежна ни с X, ни с Y.

9. В суперлиге играет 20 футбольных команд. Чемпионат разыгрывается в один круг (каждые две команды играют между собой один раз, за победу дают 3 очка, за ничью — 1, за поражение очков не дают). По итогам чемпионата составили турнирную таблицу, в которой команды упорядочены по количеству очков. Какая наибольшая разница может быть между результатами двух команд, занимающих соседние строчки турнирной таблицы?

10. Поезд вышел со станции A, проследовал мимо станции B, затем C и прибыл на станцию D. Часть пути от A до C он прошел за 2 часа, а от B до D — за 3 часа. Расстояние от A до B — 100 км, от B до C — 60 км, от C до D — 180 км. Какое наименьшее время поезд мог потратить на весь путь, если известно, что он нигде не превышал скорость в 100 км/час?

Матбой Профи-8 — Профи-9. 17.07.2016

1. Существуют ли такие вещественные числа a и b, что $a+b$ — иррационально, а $a^{2n+1}+b^{2n+1}$ — рационально при любом натуральном n?

2. У натурального числа a все простые делители больше натурального числа n. Докажите, что $(a-1)(a^2-1)\dots(a^{n-1}-1)$ делится на $n!$.

3. В графе G сто вершин. Оказалось, что после удаления любых 49 вершин из G, в оставшемся графе можно найти цикл. Каково наименьшее возможное количество рёбер в графе G?

4. В клетках доски 5×5 написаны нули. Мы можем выбрать какую-нибудь клетку, и увеличить на 1 числа, написанные в ней и её соседях по стороне. Можем ли мы такими операциями получить доску с числом 2016 в каждой клетке?

5. Пусть k и n — натуральные числа, а $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_n$ — целые. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что $P(x_1) = \ldots = P(x_k) = 2016$ и $P(y_1) = \ldots = P(y_n) = 57$. Какое наибольшее значение может принимать произведение kn?

6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Прямые BC и AD пересекаются в точке P, а диагонали AC и BD — в точке Q. Пусть M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Докажите, что прямая PQ касается описанной окружности треугольника MQN.

7. В трапеции $ABCD$ основание AB больше основания CD. Точки K и L, лежащие на отрезках AB и CD соответственно, таковы, что AD, BC и KL пересекаются в одной точке. На отрезке KL нашлись точки P и Q такие, что $\angle APB = \angle BCD$ и $\angle CQD = \angle ABC$. Докажите, что точки P, Q, B и C лежат на одной окружности.

8. На некоторой планете 2^N стран ($N \geqslant 4$). Каждая страна имеет флаг в виде таблицы шириной N клеток и высотой в 1 клетку, каждая клетка покрашена в желтый или синий цвет. Все флаги различны. Мы называем множество из N флагов *ненормальным*, если его элементы можно расположить в виде квадрата $N \times N$ так, чтобы все клетки на его главной диагонали были одноцветны. Найдите наименьшее M такое, что среди любых M флагов найдётся ненормальное множество.

9. Комар сел в какую-то клетку бесконечной клетчатой доски, и каждую секунду передвигается на соседнюю по стороне клетку, каждый раз в одном и том же направлении. Вася хочет прибить комара, но не видит его. Каждую секунду между перемещениями комара Вася может выбрать какую-то клетку доски и ударить по ней тапком. Если в тот момент комар находился в этой клетке, он умирает, в противном случае продолжает жить. Существует ли алгоритм, действуя по которому Вася сможет когда-нибудь убить комара?

10. На клетчатой доске 2012×2012 отмечены некоторые клетки на диагонали из верхнего правого угла в левый нижний угол, причём угловые клетки оказались не отмечены. Далее все клетки доски заполнили целыми числами следующим образом. В каждой клетке на верхней и левой сторонах квадрата написано 1. В каждой отмеченной клетке написано 0. В любой другой клетке написано число, равное сумме числа в верхнем соседе по стороне и числа в левом соседе по стороне. Докажите, что число в нижнем правом углу не делится на 2011.

Геометрия масс. 19.07.2016

Определение 1. Пусть M — некоторая точка плоскости и m — ненулевое число. Материальной точкой (m, M) называется точка M с числом m, причем число m называется массой материальной точки (m, M), а точка M — носителем этой материальной точки.

Определение 2. Центром масс системы материальных точек (m_1, M_1), (m_2, M_2), $\ldots$, (m_n, M_n) с ненулевой суммой масс называется такая точка Z, для которой имеет место равенство $m_1\overrightarrow{ZM_1}+m_2\overrightarrow{ZM_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZM_n} = \overrightarrow{0}$.

Теорема 1 (Основная теорема)**.** *Если точка Z является центром масс системы материальных точек (m_1, M_1), (m_2, M_2),$\ldots$, (M_n, m_n), причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \neq 0$, то для любой точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1}+m_2\overrightarrow{OM_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$. Обратно, если для некоторой точки O выполняется это равенство, то точка Z — центр масс данной системы материальных точек.*

Теорема 2 (Правило рычага)**.** *Центр масс Z двух материальных точек (m_1, M_1) и (m_2, M_2) с неотрицательными массами расположен на отрезке M_1M_2, причем $m_1|M_1Z| = m_2|M_2Z|$.*

Теорема 3 (Правило группировки)**.** *Пусть дана система материальных точек $(m_1, M_1), (m_2, M_2), \ldots (m_n, M_n)$, и пусть точка O — центр масс системы, состоящей из первых k материальных точек данной системы. Тогда центр масс данной системы совпадает с центром масс системы материальных точек $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k, O), (m_{k+1}, M_{k+1}), \ldots (m_n, M_n)$.*

1. Какие массы надо поместить в вершины треугольника со сторонами a, b и c, чтобы центр полученной системы материальных точек оказался а) в точке пересечения медиан треугольника; б) в точке пересечения биссектрис; в) в центре вневписанной окружности, касающейся стороны a; г) в точке Нагеля (точке, где пересекаются отрезки, соединяющие вершину треугольника с точкой касания вневписанной окружности противоположной стороны); д) в точке Жергонна; е) в ортоцентре.

2. На плоскости дан треугольник ABC и отмечена точка O. Докажите, в вершины треугольника можно поставить такие массы, чтобы их центр попал в точку O.

3. Докажите, что точка Нагеля лежит на прямой, соединяющей точку пересечения медиан треугольника и точку пересечения его биссектрис.

4. При помощи масс докажите **теорему Менелая**. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, или на их продолжениях отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1.$$

5. При помощи масс докажите **теорему Чевы**. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, или на их продолжениях отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 *конкурентны* (т. е. либо параллельны, либо пересекаются в одной точке) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$

6. На окружности расположены n точек с единичными массами. Вася выбирает произвольные $n-2$ из них, рисует их центр масс и опускает из него перпендикуляр на прямую, проходящую через две оставшиеся точки. Докажите, что все Васины прямые пройдут через одну точку.

7. В треугольнике ABC вневписаная окружность касается стороны BC в точке T. I — центр его вписанной окружности этого треугольника, а основание высоты из точки A — это точка H. Докажите, что TI пересекает AH в её середине.

Разнобой-3. 19.07.2016

1. В классе 30 учеников. На 14 уроках они садились по два человека за парту, причем на разных уроках они могли сидеть по разному. Докажите, что их можно рассадить за парты так, что у каждого ученика будет сосед, с которым он еще ни разу не сидел.

2. (**Теорема о трех колпаках.**) Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

3. Из вершины C треугольника ABC проведены касательные CX, CY к окружности, проходящей через середины сторон треугольника. Докажите, что прямые XY, AB и касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

4. Найдите все пары натуральных чисел (m, n) такие, что $\varphi(\varphi(n^m)) = n$.

5. В квадратной коробочке размера 4×4 размещены 15 квадратных фишек размера 1×1 с номерами $1, 2, \ldots, 15$, а одно место осталось свободным. Первоначально фишки расставлены так, как на рисунке справа. Можно ли, последовательно сдвигая фишки на свободное место, получить расстановку фишек на рисунке слева?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	$*$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	$*$

6. Для любых натуральных a, b и c докажите неравенство

$$(a, b-1)(b, c-1)(c, a-1) \le ab + bc + ca.$$

7. Савелий загадал отличный многочлен многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Артём утверждает, что сможет однозначно определить этот многочлен, если узнает значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Прав ли он?

Классификация движений. 20.07.2016

1. Докажите, что любое движение однозначно задается образами а) одной точки и двух неколлинеарных векторов; б) трех точек, не лежащих на одной прямой.

2. а) Докажите, что движение, имеющее три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, является тождественным преобразованием, а движение, имеющее две неподвижные точки, — тождественным преобразованием или осевой симметрией.

б) Докажите, что движение, имеющее ровно одну неподвижную точку, является поворотом.

3. (Теорема Шаля.) Докажите, что любое движение можно представить как композицию не более, чем трех осевых симметрий.

4. Докажите, что движение, которое можно представить в виде композиции четного числа осевых симметрий, нельзя представить в виде композиции нечетного числа осевых симметрий.

Определение 1. Движение, представимое в виде композиции четного числа осевых симметрий, называется *движением первого рода*, а движение, представимое в виде композиции нечетного числа осевых симметрий, называется *движением второго рода*.

Определение 2. *Скользящей симметрией* называется композиция симметрии относительно некоторой прямой ℓ и параллельного переноса на вектор, параллельный ℓ (этот вектор может быть нулевым).

5. а) Докажите, что любое движение первого рода является поворотом или параллельным переносом. б) Докажите, что любое движение второго рода является скользящей симметрией.

6. Каким движением является композиция двух разных скользящих симметрий, каждая из которых отображает отрезок AB на отрезок A_1B_1?

7. Савелий нарисовал на стене пятиугольник, а Баир — окружность. Может ли Максим нарисовать пятиугольник, который был бы вписан в эту окружность, а его стороны были соответственно параллельны сторонам пятиугольника Савелия?

Квадратичные вычеты. 20.07.2016

Определение 1. Пусть $m > 1$ — натуральное число и a — целое число, взаимно простое с m. Число a называется *квадратичным вычетом* по модулю m, если существует $x \in \mathbb{N}$ такое, что $a \equiv x^2 \pmod{m}$. В противном случае число a называется *квадратичным невычетом* по модулю m.

1. Докажите, что если p — нечетное простое число, то по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов.

2. Докажите, что для данного модуля $p \in \mathbb{P}$ а) произведение двух квадратичных вычетов — вычет; б) произведение вычета на невычет — невычет; в) произведение двух невычетов — вычет.

3. Пусть p — нечетное простое число. а) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. б) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

Определение 2. Пусть $p \in \mathbb{P}$. *Символом Лежандра* называется выражение, обозначаемое $\left(\frac{a}{p}\right)$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p; -1, если a — невычет по модулю p и 0, если a кратно p.

Из задачи **3** следует, что если p нечетно, то $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

4. При каких p вычет -1 является квадратичным вычетом по модулю p (где p — нечетное простое число)?

5. Пусть p — нечетное простое число, a, b, c — вычеты по модулю p, причем $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, а $D = b^2 - 4ac$. Докажите, что если D — квадратичный вычет по модулю p, то сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$ имеет два корня, если D — квадратичный невычет по модулю p, то сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$ не имеет корней, а если $D \equiv 0 \pmod p$, то это сравнение имеет один корень.

6. а) Найдите сумму всех квадратичных вычетов по простому модулю p. б) Известно, что x не делится на простое p. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k(k+x)}{p}\right)$.

7. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 7 = y^2$.

8. Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ а) не имеет решений в натуральных числах; б) имеет бесконечно много решений в ненулевых целых числах.

Комплексные числа и геометрия. 21.07.2016

Предупреждение: тех, кто в следующей задаче будет пользоваться тем, что при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются — просьба сидеть и не отсвечивать.

1. (*Новые доказательства старых фактов.*) а) Дано комплексное число $z \neq 0$. Докажите, что отображение комплексной плоскости, сопоставляющее числу a число az будет являться преобразованием подобия с коэффициентом $|z|$. б) Докажите, что если $|z| = 1$ и $z \neq 1$ то умножение на z задаёт поворот комплексной плоскости на угол $\arg z$. в) Выведите из предыдущих пунктов ещё одно доказательство тригонометрического тождества $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. г) Выведите из предыдущей задачи, что скалярное произведение векторов с координатами $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ будет равно $x_1x_2 + y_1y_2$.

2. а) (*Общее уравнение прямой.*) Докажите, что любое уравнение вида $cz + \overline{cz} + D = 0$, где $c \in \mathbb{C}$, $D \in \mathbb{R}$ и $c \neq 0$, задает на комплексной плоскости прямую.

б) (*Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.*) Докажите, что прямая, проходящая через точки A и B, задается уравнением $(\overline{b}-\overline{a})z-(b-a)\overline{z}+(\overline{a}b-a\overline{b}) = 0$ (здесь и далее точки плоскости обозначаются заглавными латинскими буквами, а их комплексные координаты — соответствующими буквами).

в) Докажите, что если точки A и B лежат на единичной окружности (т.е. окружности с центром 0 и радиусом 1), то уравнение прямой AB имеет вид $z + ab\overline{z} = a + b$. г) Как выглядит уравнение касательной к единичной окружности в точке A? д) На единичной окружности отмечены точки A и B. Докажите, что касательные в этих точках к этой окружности пересекаются в точке $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Определение. *Двойным отношением* комплексных чисел a, b, c, d называется число $\quad (a,b,c,d) = \dfrac{a-c}{b-c} : \dfrac{a-d}{b-d}$.

3. Докажите, что точки, с комплексными координатами a, b, c, d лежат на одной окружности или на одной прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно.

4. а) На комплексной плоскости отмечены точки с координатами 0, z_1, z_2, z_1+z_2. Докажите, что площадь образованного ими параллелограмма равна $\pm\frac{i}{2}(z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2)$. б) Докажите, что площадь треугольника ABC равна $\pm\frac{i}{4}(a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} - \overline{a}b - \overline{b}c - \overline{c}a)$.

При помощи комплексных чисел докажите следующие утверждения.

5. (Задача Ньютона.) Докажите, что середины диагоналей описанного четырехугольника и центр его вписанной окружности лежат на одной прямой.

6. Пусть A, B, C, D — произвольные точки плоскости. При помощи комплексных чисел докажите, что а) (**Неравенство Птолемея.**) $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|$; б) (**Теорема Птолемея.**) равенство достигается тогда и только тогда, когда точки A, B, C, D лежат на одной окружности, причем именно в таком порядке.

7. (Треугольники Наполеона.) На сторонах треугольника ABC а) во внешнюю сторону; б) во внутреннюю сторону построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник. в) Докажите, что разность площадей этих треугольников равна площади исходного треугольника.

8. Пусть A, B, C, D — четыре точки на окружности с центром O. Точки A_C, A_D — проекции точки A на BC и BD соответственно; точки B_C, B_D — проекции точки B на AC и AD соответственно. Точки H_A и H_B — ортоцентры треугольников ACD и BCD соответственно. Докажите, что если $A_CA_D \perp OH_B$, то $B_CB_D \perp OH_A$.

Раскраски графов и теорема Брукса. 21.07.2016

Определение 1. Раскраска вершин графа G в k цветов называется *правильной*, если любые две смежные вершины покрашены в разные цвета.

Наименьшее натуральное число k, такое, что существует правильная раскраска вершин графа G в k цветов называется *хроматическим числом* графа G и обозначается $\chi(G)$.

Определение 2. Через $\alpha(G)$ обозначается размер наибольшего *независимого* множества вершин графа G, то есть такого множества вершин, между которыми нет ни одного ребра.

Определение 3. Через $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ обозначаются соответственно наименьшая и наибольшая из степеней вершин графа G.

Определение 4. Пусть v — вершина графа G. Через $G-v$ обозначается граф, получаемый из G удалением вершины v (и всех инцидентных ей ребер).

Определение 5. Через $\overline{G}$ обозначается *дополнение* графа G, то есть граф с тем же множеством вершин, что и G, в котором смежны те и только те пары вершин, которые не смежны в графе G.

1. Докажите, что для любого графа G на n вершинах выполняется неравенство $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$.

2. Вершины графа G нельзя правильным образом покрасить в d цветов. Докажите, что существует такой подграф H графа G, что $\delta(H) \geq d$.

3. Докажите, что $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$, где n — количество вершин графа G.

4. В графе G v вершин и e ребер, его вершины можно правильным образом покрасить в k цветов. Докажите, что $k \geq \frac{v^2}{v^2-2e}$.

5. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d \geq 3$. Докажите, что вершины G можно правильным образом раскрасить в d цветов, если

а) есть вершина, степень которой меньше d;

б) есть такая вершина v, что граф $G - v$ несвязен;

в) есть две такие вершины u и v, что граф $G - u - v$ несвязен;

г) есть три вершины u, v и w такие, что u смежна с v и w, вершины v и w несмежны и граф $G - v - w$ связен.

Теорема (R. L. Brooks, 1941)**.** *Пусть $d \geq 3$, а G — связный граф, отличный от полного графа на $d+1$ вершине, $\Delta(G) \leq d$. Тогда $\chi(G) \leq d$.*

6. Докажите теорему Брукса а) при помощи задачи 5; б) при помощи метода чередующихся цепей.

Неравенства-2. 22.07.2016

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца). *Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство*

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

Давайте вспомним как можно больше доказательств этого неравенства!

Следствие. *Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и положительных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + \ldots + b_n}.$$

Напомним, что именно в такой формулировке это неравенство было у нас в прошлом году.

Случай равенства в предыдущих неравенствах достигается, когда наборы a_i и b_i пропорциональны (то есть когда существует вещественное c такое, что $a_i = cb_i$ для любого i).

1. (Транснеравенство.) а) Пусть $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n; 0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Докажите, что $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 \leq a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \ldots + a_n b_{i_n} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$.

б) Пусть $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n; 0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n; \ldots; 0 < \ell_1 \leq \ell_2 \leq \ldots \leq \ell_n$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $\ldots$, $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$. Докажите, что $a_1 b_{i_1} \ldots \ell_{j_1} + a_2 b_{i_2} \ldots \ell_{j_2} + \ldots + a_n b_{i_n} \ldots \ell_{j_n} \leq a_1 b_1 \ldots \ell_1 + a_2 b_2 \ldots \ell_2 + \ldots + a_n b_n \ldots \ell_n$.

2. (Неравенство Чебышёва.) Докажите, что для чисел $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, $0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) \leq n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n).$$

3. Пусть a, b, c — стороны и α, β, γ — противолежащие им углы треугольника. Докажите, что

$$\alpha a + \beta b + \gamma c \geq \frac{1}{2}(\alpha b + \beta c + \gamma a + \alpha c + \beta a + \gamma b).$$

4. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

5. Докажите, что для положительных чисел a, b, и c выполнено неравенство
$$3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)^2.$$

6. Пусть даны положительные числа a, b и c такие, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите, что
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq a+b+c.$$

7. Пусть даны положительные вещественные числа a, b и c. Докажите что
$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a}\geq\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

8. Пусть $a,b,c>0$ и $abc=1$. Докажите неравенство
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$
.

Первообразные корни. 22.07.2016

Определение 1. Пусть $(a,m)=1$. Наименьшее натуральное число d такое, что $a^d\equiv 1 \pmod m$ называется *показателем, которому принадлежит a по модулю m*. Это число также называют *порядком числа a по модулю m* и обозначают $\mathrm{ord_m\,a}$.

1. Пусть a принадлежит показателю d по модулю m. Докажите, что а) числа $1=a^0,a^1,\ldots,a^{d-1}$ попарно не сравнимы по модулю m; б) $a^{d_1}\equiv a^{d_2} \pmod m \Leftrightarrow d_1\equiv d_2 \pmod d$; в) $d\mid\varphi(m)$; г) для любого делителя h числа d число a^h принадлежит показателю $\frac{d}{h}$ по модулю m; д) если b принадлежит показателю k и $(d,k)=1$, то ab принадлежит показателю dk по модулю m.

Определение 2. Числа, принадлежащие показателю $\varphi(m)$ (если такие существуют), называются *первообразными корнями* по модулю m.

Теорема. *Первообразные корни по простому модулю p существуют.*

Эту теорему мы докажем двумя способами.

2. а) Пусть $d_1,\ldots,d_{p-1}$ — показатели, которым принадлежат числа $1,\ldots,p-1$ по простому модулю p. Докажите, что $[d_1,\ldots,d_{p-1}]=p-1$.

б) При помощи пункта а) докажите, что первообразные корни по модулю p существуют.

3. а) Для любого натурального n докажите, что $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$.

б) Пусть $p \in \mathbb{P}$. При помощи пункта а) докажите, что для любого $d \mid p-1$ существует ровно $\varphi(d)$ вычетов, принадлежащих показателю d по модулю p.

Мы доказали, что по простому модулю p существует первообразный корень, причем не один, а в количестве $\varphi(p-1)$ штук. Теперь докажем более сильный факт, заключающийся в том, что первообразные корни существуют только по модулям 2, 4, p^k и $2p^k$, где p — нечетное простое.

4. Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что существует первообразный корень по модулю а) $2p$; б) p^2 и $2p^2$; в) p^n и $2p^n$, где n — произвольное натуральное число.

г) Докажите, что если по модулю m существует первообразный корень, то m равно либо 2, либо 4, либо p^n, либо либо $2p^n$, где $n \in \mathbb{N}$ и p — нечетное простое число.

5. Пусть p — простое число и $S = 1^n + \ldots + (p-1)^n$. Какой остаток эта сумма дает по модулю p?

6. Умножение всех элементов приведенной системы вычетов по нечетному простому модулю p на вычет $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ производит в ней перестановку.

а) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то получившаяся перестановка четна.

б) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p, то она нечетна.

Заключительная олимпиада. 23.07.2016

1. За один ход фигура Z передвигается на соседнюю по стороне клетку, при этом каждый ход направление меняется на перпендикулярное. Докажите, что фигура Z не может обойти все клетки доски 2016×2016, попав на каждую клетку один раз, даже если не надо возвращаться в начальную клетку.

2. Ваня нарисовал n прямых, которые образовали несколько точек пересечения. Из точек пересечения он отметил красным ровно $3n$. Докажите, что Аня может выбрать 4 красные точки так, чтобы никакие три из них не лежали на одной *проведенной* прямой.

3. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка D такая, что $\angle BDC = 90^\circ$, и точка H — ортоцентр треугольника ABC. На отрезке AH как на диаметре построена окружность. Докажите, что длина касательной, проведенной к этой окружности из точки B, равна длине отрезка BD.

4. Дана клетчатая доска $m \times n$, где $m, n > 1$. Ее клетки красят в черный и белый цвета. Обозначим через F количество таких раскрасок, в которых найдется или черная строка, или черный столбец и через G количество раскрасок, в которых найдется или черная строка, или белый столбец. Что больше, F или G?

5. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n. Натуральное число n таково, что $\sigma(n) = 2n-1$. Докажите, что $\frac{\sigma(k)}{k} \neq \frac{\sigma(n)}{n}$ при всех натуральных $k \neq n$.

. . . .

Заключительная олимпиада. Вывод

6. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, AD — его биссектриса, точка E — проекция O на AD. На луче AD отмечена точка F такая, что $CD = CF$. Известно, что $AC = 2AB$. Докажите, что $\angle EBF = \angle ECF$.

7. На карте полетов авиакомпании $K_{r,r}$ изображены несколько городов, некоторые пары городов связаны прямым (двусторонним) авиарейсом, причем всего имеется m авиарейсов. Требуется выбрать две непересекающиеся группы по r городов в каждой такие, что каждый город одной группы связан авиарейсом с каждым из городов второй группы. Докажите, что этот выбор можно осуществить не более чем $2m^r$ способами.

8. Неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Докажите неравенство

$$(a + b + c)^3 \geq 9(ab + bc + ca).$$