8 класс, транснеравенство, 20 июля

1. ***Транснеравенство.***

а) Пусть $0 < a < b < c < d$. Выпишите в порядке возрастания попарные произведения чисел.

б) Пусть $a \leq b$ и $c \leq d$. Докажите, что $ad + bc \leq ac + bd$.

в) Пусть $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – некоторая перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Докажите **транснеравенство**

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \leq a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Указание. Вспомните перестановки чисел и метод сортировки «пузырьком».

В дальнейших задачах можно пользоваться транснеравенством без доказательства.

Упражнение. Пусть $a > b > c > 0$. Упорядочите наборы чисел по убыванию: $\{a^3, b^3, c^3\}, \left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}, \{a^2b^2, a^2c^2, b^2c^2\}, \left\{\frac{b}{ac}, \frac{a}{bc}, \frac{c}{ab}\right\}$.

2. а) При *a*, *b*, *c* > 0 докажите неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$; **б)** Для положительных чисел докажите неравенство: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$.

3. При *a*, *b*, *c* > 0 докажите неравенство $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c$

4. При *a*, *b*, *c* > 0 докажите, что $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+C} + \frac{c}{a+b}$

5. При любых значениях *a*, *b*, *c* докажите, что $abc^2 + bca^2 + cab^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$.

6. Докажите, что при $a > b > c > 0$ выполнено неравенство

$$a + b + c > \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}$$

7. Докажите ***неравенство Чебышева.*** Пусть $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ и $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Тогда верно $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geq \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n)$.

8. Баир записал пять попарно взаимно простых чисел, каждое из которых является произведением двух простых. Найдите наименьшее возможное значение суммы чисел Баира.

9. Докажите ***неравенство Минковского***

Пусть $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Тогда $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$