Разнобой по неравенствам

1. Докажите, что для любого $x > 0$ выполнено $2x + 3/8 \geq \sqrt[4]{x}$.

2. Докажите, что для любого $n > 1$ выполнено $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

3. Пусть $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Докажите, что хотя бы одно число из $a^2+ac+bc-b, b^2+ab+ac-c, c^2+bc+ab-a$ неотрицательно.

4. (a) Для положительных x, y, z известно, что $xyz = 1$. Докажите, что $(2+x)(2+y)(2+z) \geq 27$.

(b) Для положительных $x_1, x_2 \ldots, x_n$ известно, что $x_1x_2 \ldots x_n = 1$. Докажите, что $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 2^n$.

5. Для положительных $a_1, \ldots, a_n$ пусть $s = a_1 + \ldots + a_n$. Докажите, что

(a) $\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}$.

(b) $\frac{a_1}{\sqrt{s-a_1}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{s-a_n}} \geq \sqrt{\frac{ns}{n-1}}$.

6. Для неотрицательных $x_1, \ldots, x_n$ известно, что $x_1+\ldots+x_n = 1$. Докажите, что $(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \leq 2\cdot n!$.

7. Для 4 неотрицательных чисел a, b, c, d известно, что $a + b + c + d = 4$. Докажите, что

$$\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c} + \sqrt{1+d} \leq 4\sqrt{2}.$$

8. Пусть $a, b, c > 1$. Докажите, что

$$\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ac}{a+b} > 3.$$

9. (a) Пусть $x_1, \ldots, x_n \geq 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}.$$

(b) Пусть $0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}.$$

XXXII Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2016 года • 8 класс • 22.07.2016

Разнобой по неравенствам

1. Докажите, что для любого $x > 0$ выполнено $2x + 3/8 \geq \sqrt[4]{x}$.

2. Докажите, что для любого $n > 1$ выполнено $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

3. Пусть $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Докажите, что хотя бы одно число из $a^2+ac+bc-b, b^2+ab+ac-c, c^2+bc+ab-a$ неотрицательно.

4. (a) Для положительных x, y, z известно, что $xyz = 1$. Докажите, что $(2+x)(2+y)(2+z) \geq 27$.

(b) Для положительных $x_1, x_2 \ldots, x_n$ известно, что $x_1x_2 \ldots x_n = 1$. Докажите, что $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 2^n$.

5. Для положительных $a_1, \ldots, a_n$ пусть $s = a_1 + \ldots + a_n$. Докажите, что

(a) $\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}$.

(b) $\frac{a_1}{\sqrt{s-a_1}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{s-a_n}} \geq \sqrt{\frac{ns}{n-1}}$.

6. Для неотрицательных $x_1, \ldots, x_n$ известно, что $x_1+\ldots+x_n = 1$. Докажите, что $(1+x_1)(2+x_2)\ldots(n+x_n) \leq 2\cdot n!$.

7. Для 4 неотрицательных чисел a, b, c, d известно, что $a + b + c + d = 4$. Докажите, что

$$\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} + \sqrt{1+c} + \sqrt{1+d} \leq 4\sqrt{2}.$$

8. Пусть $a, b, c > 1$. Докажите, что

$$\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ac}{a+b} > 3.$$

9. (a) Пусть $x_1, \ldots, x_n \geq 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}.$$

(b) Пусть $0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}}.$$