8 класс, разнообразные Холлы, 22 июля

1. ***Лемма Холла для регулярных двудольных графов.***

В двудольном графе в одной доле n вершин, а в другой – k вершин, $k \le n$. Все вершины одной доли имеют одинаковую степень. Докажите, что тогда существует паросочетание с k ребрами.

2. ***Максимальный набор независимых подмножеств***. Найдите максимальное число элементов такого набора подмножеств n-элементного множества так, чтобы ни одно из них не являлось собственным подмножеством никакого другого множества из данного набора.

(*Указание*: нарисовать все множества в виде гиперкуба, подвесить за пустое множество и спустить всё с помощью леммы Холла на средний уровень)

3. ***Лемма Холла для арабских стран.*** Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

(*Указание:* мысленно разделить каждого юношу на несколько.)

4. В компании из n юношей и n девушек каждые k юношей знакомы не менее чем с k девушками. Докажите, что каждые k девушек знакомы не менее, чем с k юношами.

5. ***Фиктивные невесты: не всем хватило.*** Докажите, что если любые k ($1 \le k \le n$) юношей знакомы в совокупности не менее чем с k-d девушками, то n-d юношей могут выбрать себе невест из числа знакомых.

(*Указание:* рассмотрите d якобы существующих невест, связанных со всеми юношами, а потом уберите их).

6. Есть n юношей и n девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы женатые юноши не знали незамужних девушек.

7. Прямоугольник $m \times n$ ($m \le n$) называется латинским прямоугольником, если он заполнен натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строчке и в каждом столбце стоят разные числа. Докажите, что латинский прямоугольник можно дополнить до лат. квадрата $n \times n$.

8. В каждой клетке таблицы $n \times n$ стоит некая буква. Известно, что все строки таблицы различны. Докажите, что в ней можно стереть столбец так, что после стирания столбца все строки таблицы останутся различны

9. На недавней международной математической олимпиаде странам-участницам были предложены на выбор девять комбинаторных задач. Учитывая, как трудно в таких случаях прийти к согласию, никого не удивил следующий результат: а) каждая страна выбрала ровно три задачи; б) каждые две страны выбрали разные наборы задач; в) для любых трех стран можно найти задачу, которую не выбрала ни одна из них. Какое наибольшее количество стран могло участвовать в этой олимпиаде?