8 класс, 14 июля, снова о степенях вхождения простых

1. Доказать, что в вершинах многогранника можно расставить натуральные числа так, что в каждых двух вершинах, соединённых ребром, стоят числа не взаимно простые, а в каждых двух вершинах, не соединённых ребром, взаимно простые.

2. Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

3. Произведение 15 последовательных чисел не делится на 2^{12}. Докажите, что среднее число делится на 8.

4. Существует ли такое натуральное число, что произведение всех его натуральных делителей (включая 1 и само число) оканчивается ровно на 2001 ноль?

5. Докажите, что произведение чисел от $n+1$ до $2n$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}.

6. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

7. Пусть A – множество из шести натуральных чисел, больших 1 и взаимно простых в совокупности. Известно, что произведение любых двух чисел из A делится на любое из оставшихся. Докажите, что произведение всех чисел из A – точная пятая степень.

8. Натуральные числа x и y таковы, что $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Докажите, что разность $x–y$ есть квадрат натурального числа.

9. Найдите все натуральные n и простые p такие, что $3^p–np = n+p$.

10. Найдите все такие простые p и натуральные k, что $p^2–p+1=k^3$.