Теорема Эйлера.

Определение. *Функцией Эйлера $\varphi(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется функция, которая каждому натуральному числу n сопоставляет количество натуральных чисел, взаимно простых с n и не превосходящих n.*

Упражнение. Вычислите функцию Эйлера:

(a) $\varphi(1)$

(b) $\varphi(p)$, где $p \in \mathbb{P}$.

(c) $\varphi(p^n)$, где $p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}$.

(d) Докажите, что $\varphi(12) = \varphi(3) \cdot \varphi(4)$.

1. (a) Докажите *мультипликативность* функции Эйлера: для взаимно простых a, b справедливо равенство

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab).$$

Указание. Расставьте числа от 1 до ab в прямоугольнике $a \times b$. Сколько в каждой строке чисел, взаимно простых с b? Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с a?

(b) (*Явная формула для функции Эйлера.*) Если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Указание. Сначала докажите утверждение для простых, потом для степеней простых, затем для произвольных.

2. Решите в натуральных числах уравнение $\varphi(x) = \frac{x}{3}$.

3. (a) Рассмотрим приведенную систему вычетов по модулю n (то есть множество всех остатков при делении на n, взаимно простых с n). Докажите, что при домножении на произвольное число a, взаимно простое с n, приведенная система вычетов переходит в себя.

(b) *Теорема Эйлера.* Докажите, что

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

(c) Выведите малую теорему Ферма из теоремы Эйлера.

4. Найдите остаток от деления 2^{100} на 12.

5. Докажите, что $a^{17} - a \,\vdots\, 510$.

6. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если $(a, 561) = 1$, то выполняется сравнение $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$. Числа, обладающие таким свойством, называются *псевдопростыми.*

7. Пусть $(n, 10) = 1$. Докажите, что существует число, составленное из одних единиц, кратное n.

8. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001? А на любую комбинацию из 4 цифр?

9. Дано число 2^{2016}. Докажите, что можно приписать к нему слева несколько (больше нуля) цифр так, чтобы снова получилась степень двойки.

10. Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.

11. Докажите, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\sum_{d|n} \varphi(n) = n.$$

Указание. Рассмотрите все дроби со знаменателем n. Какие из них сократимы?

12. Решите в целых числах уравнение:

(a) $a^{1984} + b^{1984} + c^{1984} = 1984$

(b) $a^{2016} + b^{2016} = c^{2016} + 1000$

(c) $a^{2016} + b^{2016} = c^{2016} + 2016$

(d) $a^{2015} + b^{2015} + c^{2015} = 2015$