8 класс, 5 июля, функции

Определение. *Функцией (или отображением) f*: *A*→*B* называется правило, по которому каждому элементу множества *A* сопоставляется РОВНО ОДИН элемент множества *B*. Множество *A* называется *областью определения*, а *B* – *областью значений*.

Примеры. **Какие из примеров являются , какие – нет:**

а) *f*: {все люди}→{все люди}, каждому ребенку ставится в соответствие его мама;

б) *f*:{все работники}→{все начальники}, работнику ставится в соответствие его начальник;

в) f:{все люди}→{имена}, человеку ставится в соответствие его имя;

г) f:{все люди}→{слова}, человеку ставится в соответствие его имя;

д) f: {все граждане России старше 10 лет}→ $\mathbb{N}$, человеку ставится в соответствие его номер ИНН;

е) f : $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, каждому числу ставится в соответствие число Фибоначчи с таким номером ;

ж) f: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, двум целым числам ставится в соответствие дробь, где первое число – числитель, второе – знаменатель;

з) f: $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$;

и) каждому человеку соответствует третья буква его имени;

к) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$;

л) каждому человеку соответствует его рост в сантиметрах;

м) $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(x)=x^2$;

н) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$;

о) $f:[0,2]\to[0,1]$, $f(x)=x^2$;

п) Петя сопоставил каждому городу России, где он бывал, число 1, каждому городу России, где бывал его друг Вася, число 2, а каждому городу России, где не бывали ни он ни Вася, — число 0. Является ли такое сопоставление отображением из множества всех городов России в множество {0, 1, 2}

Определение. Функции называются различными, если их значения не совпадают хотя бы при одном значении аргумента (элемента множества определения).

1. Сколько бывает различных функций из *m*-элементного множества в *n*-элементное?

2. В некотором государстве каждая совокупность граждан образует тайное общество. Каждый гражданин является осведомителем полиции, куда доносит ровно на одно из обществ. Докажите, что есть общество, на которое никто не доносит а) в случае, когда граждан конечное число; б)* а что будет, если в государстве бесконечное число граждан?

Как можно определить обратное отображение? В каком случае существует обратное отображение? Вспомним, что такое функция.

Вопросы

- Существует ли отображение, обратное к отображению *Мать*?
- Какое отображение будет обратным для $y=3x+5$? А для $y=x^3$? Для суммы цифр?

Определение. Пусть задано отображение f:$A\to B$.

а) f – это отображение *«на» (сюръекция)*, если для любого b из B найдется такой a из A, что $f(a)=b$.

б) f – это отображение *«в» (инъективное отображение)*, если для каждой пары различных a и b значения $f(a)$ и $f(b)$ также различны.

в) f – это *взаимно-однозначное соответствие (биекция)*, если f одновременно отображение «на» и «в».

Для ВСЕХ ФУНКЦИЙ из примеров поймите, являются ли они сюръекциями и инъекциями.

Вспомним тест

Отображение	***Сюр***	***Ин***	***Би***
Каждому человеку соответствует его мама, Люди→Люди			
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \{x\}$; $\{x\}$ – дробная часть x			
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$			
$f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$			
f:{0, 1, 2, …, 10 } → (0, 1, 2, …, 10}, $f(x) = 5x$ (mod 11)			
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = (-1)^x x$			

3. Пусть A и B – конечные множества, $|X|$ обозначает количество элементов в множестве X, f — отображение из A в B. Если

а) f – инъекция= «в»ложение => $|A| \leq |B|$;

б) f –сюръекция = «на» => $|A| \geq |B|$;

в) f – биекция = взаимно-однозначное=> $|A|=|B|$.

6. Пусть A и B – конечные множества, $|A|=|B|$, f – сюръекция. Докажите, что тогда f – биекция. Верно ли обратное?

4. Пусть $|A|=m$, $|B|=n$. Сколько среди функций из A в B **а)** инъекций; **б)** биекций?

5. Докажите, что для конечных множеств обратимое отображение является биекцией.

6. Назовем счастливым билетом шестизначный номер (можно начать с 0…), у которого сумма трех первых цифр равна сумме последних трех цифр. А теперь внимание, вопрос! Четно или нечетно число счастливых билетов?

7. Трехзначное число назовем горкой, если в нем цифра десятков больше цифры единиц и цифры сотен. Трехзначное число назовем ямкой, если в нем цифра десятков меньше цифры единиц и цифры сотен. Чего больше – горок или ямок, и насколько?

8. Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько с суммой цифр 27.

9. Придумайте задачу о подсчёте числа отображений, где ответом было бы число сочетаний из n по k.

10. Докажите, что множество A бесконечно тогда и только тогда, когда его можно биективно отобразить на его подмножество B, не совпадающее с самим множеством A

8 класс, 6 июля, функции-2

Определение. Отображение f:$A \to A$ называется *тождественным*, если для любого элемента a из A выполнено $f(a)=a$. Тождественное отображение обозначается id_A.

Определение. Пусть заданы $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Определим $h=g \circ f: A \to C$ формулой: $h(a)=g(f(a))$ и назовем его **композицией** или **сквозным отображением**.

ОБОЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ:

Rod: Л$\to$ $\mathbb{N}$, год рождения; *Отец: Л*$\to$*Л*, *Мать: Л*$\to$*Л* ; *Ордината: П*$\to$*R; Точка*: $\mathbf{R}^2 \to$*П* (точка с заданными координатами в фиксированной системе координат); s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – сумма цифр, Res_k: : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – остаток от деления на натуральное k; **тождественное отображение** Id_A*:* $A \to A$, такое, что для всех a из A: $Id_A(a)=a$.

Примеры. Что такое: **а)** *Rod*$\circ$*Мать;* **б)** *Ордината*$\circ$*Точка;* **в)** *Мать*$\circ$*Отец*; **г)** *Отец*$\circ$*Мать;* **д)** композиция функций y=3x+5 и z=5y+3; **е)** $x^2 \circ x^3$?

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что если $f: A \to B$, то $f \circ Id_A = Id_B \circ f = f$.

Определение. Отображения $f: A \to B$ и $g: B \to A$ называются **взаимно-обратными**, если $f \circ g = Id_B$, $g \circ f = Id_A$ (пишут $f=g^{-1}$, $g=f^{-1}$). Отображение f^{-1} называется **обратным** к f. Отображение, у которого есть обратное, называется **обратимым**.

11. Докажите, что композиция инъективных (сюръективных, биективных) отображений – инъективное (сюръективное, биективное) отображение.

12. Может ли оказаться, что $f \circ g$ — тождественное, а $g \circ f$ — нет?

13. Существует ли не тождественное отображение f :$A \to A$, что а) $f \circ f = f$; б) $f \circ f = f^{-1}$?

14. (ключевая задача) Докажите, что $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

15. Докажите, что $s \circ Res_3 = Res_3 \circ s$; сформулируйте это свойство так, как вы привыкли.

16. Докажите, что если если отображение f обратимо, то обратимо и отображение f^{-1}, и обратным к нему является отображение f.

17. Докажите, что если отображения f: $A \to B$ и g $B \to C$ обратимы, то обратима и их композиция, причём $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

18. Найдите все такие функции $f(x)$, что $f(2x + 1) = 4x^2 + 14x + 7$.

19. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x))=0$ и $g(f(x))=0$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x))=0$ и $g(g(x))=0$ тоже не имеет вещественных корней.

20. Доказать, что не существует функции $f(n)$: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такой, что $f(f(n)) = n+2011$.

21. Пусть f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Докажите, что если для каждого n выполняется неравенство $f(n+1) > f(f(n))$, то $f(n) \equiv n$.