

Фамилия, имя _____

Функции

1. Относительно каждого описанного варианта напишите, функция это или нет. Если нет – обоснуйте, почему.

а) каждому человеку соответствует третья буква его имени; _____

б) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$; _____

в) каждому человеку соответствует его рост в сантиметрах _____

г) $f: [0,1] \rightarrow [0,1], f(x) = x^2$ _____

д) $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ _____

е) $f: [0,2] \rightarrow [0,1], f(x) = x^2$ _____

2. Поставьте +/–, если указанное отображение является сюръекцией, инъекцией, биекцией

Отображение	Сюр	Ин	Би
Каждому человеку соответствует его мама			
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + \{x\}; \{x\}$ – дробная часть x			
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+1}$			
$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), f(x) = \frac{1}{x^2+1}$			
$f: \{0, 1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 10\}, f(x) = 5x \pmod{11}$			
$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = (-1)^x x$			

3. Рассмотрим отображения $f, g: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ заданные формулами $f(x) = 2^{3\sqrt{x}}$ и $g(x) = (x+1)^2$. Вычислите

а) $f \circ g(x) =$ _____ б) $g \circ f(x) =$ _____ в) $g^{-1}(x) =$ _____

Множества и комбинаторика

4. В множестве A 2016 элементов.

а) Сколько подмножеств в множестве A ? _____

б) Сколько подмножеств из пяти элементов в множестве A ? _____

5. Сколько существует шестизначных чисел, начинающихся с 5, у которых ровно 3 четных и 3 нечетных цифры? _____

6. В языке Мин есть три буквы – М, И, Н, причем две буквы И не могут идти подряд. Сколько пятнадцатibuквенных слов, в котором ровно пять букв И, можно написать в этом языке по правилам?

7. Вычеркните все множества, не являющиеся счетными

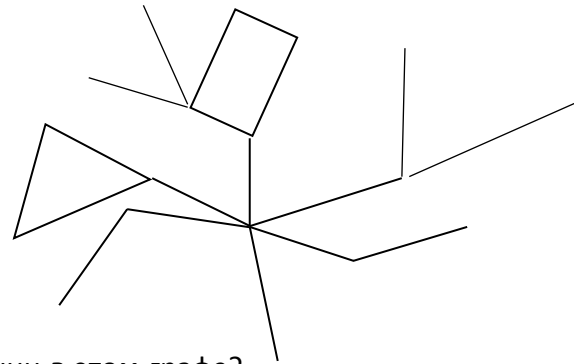
\mathbb{R} , точки квадрата со стороной 1, $\mathbb{N} \cup \{0\}$, рациональные точки единичного квадрата, \mathbb{Q} , множество всех подмножеств \mathbb{N} , множество людей, живущих на Земле когда-либо и будущих жить на в будущем, множество конечных слов, которые можно написать с помощью русских букв (слово – любая последовательность), $\{(x, y), 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{N}\}$.

Графы

8. Что такое гамильтонов цикл? _____

9. Сколько остовных деревьев есть в этом графе? _____

10. Чему равен диаметр нарисованного графа? _____



11. В связном планарном графе 16 граней и 25 ребер, сколько вершин в этом графе? _____

12. Напишите критерий двудольности графа

13. Сформулируйте лемму Холла

Теория чисел

14. Найдите НОД $(2^n - 1, 2^m - 1) =$ _____

15. Решите сравнение $8x \equiv 5^{100} \pmod{13}$ _____

16. Чему равно $\varphi(3000)$ _____

17. Сформулируйте теорему Эйлера _____

18. Сколько различных остатков можно использовать в китайской теореме об остатках? _____

19. Сколько существует первообразных корней по модулю 7? _____;

Алгебра

20. Знаете ли вы (да/нет) бином Ньютона $(a+b)^n$ _____? Полином Ньютона $(a+b+c)^n$ _____

21. Дан многочлен x^3+4x-1 . Найдите сумму квадратов корней этого многочлена. _____

22. Напишите неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

у

23. Докажите неравенство с помощью транс-неравенства $x, y, z > 0$ $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq x^2 + y^2 + z^2$.

Геометрия

24. На сторонах AB и CD четырехугольника $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, так что $AM = 2BM$, $DN = 2CN$. Выразите \overrightarrow{MN} через \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{BC} .

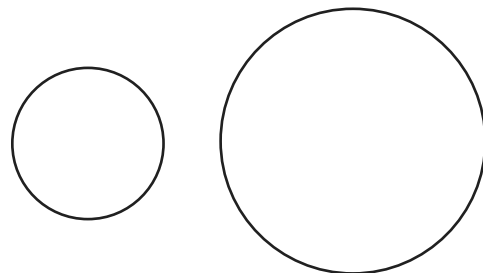
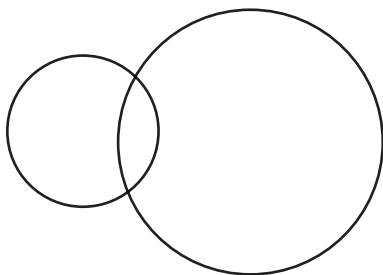
25. Приведите условия а) параллельности прямых, содержащих векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD}

б) перпендикулярности прямых, содержащих векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} .

26. Точка X лежит на стороне BC треугольника ABC , а точка Y – на стороне AC . При этом $BX:XC=2:1$, $CY:YA=3:2$. В каком отношении точка пересечения AX и BY делит эти отрезки? Какие массы надо расставить вершины треугольника? Нарисуйте чертеж и расставьте массы

27. Что является композицией двух осевых симметрий (не забудьте описать все случаи)?

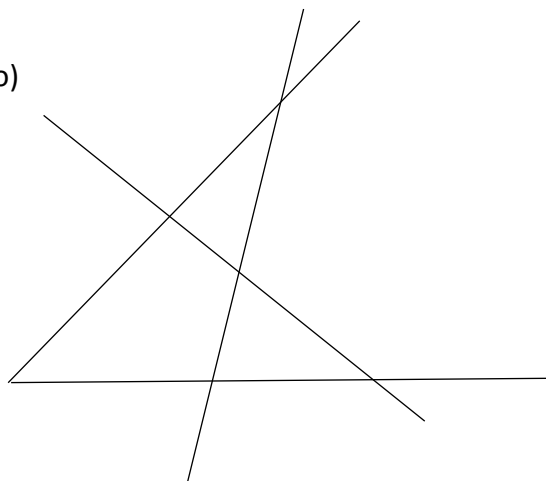
28. Нарисуйте радикальную ось для двух окружностей в обоих случаях.



29. Рассмотрим следующее преобразование плоскости: Сначала делаем гомотетию с центром в точке $(0,0)$ и коэффициентом 2, потом – гомотетию с центром в точке $(0,1)$ и коэффициентом $1/2$. Что это за преобразование?

30. Какие девять точек лежат на окружности девяти точек?

31. Нарисуйте точку Микеля для данной конфигурации (примерно)



32. Нарисуйте прямую Симсона для точки P

