Матбой 7-8

Обычные группы
17.07.16

1. За круглым столом сидят 2016 человек. Раз в минуту любые двое, являющиеся друзьями, могут поменяться местами. Оказалось, что, потратив некоторое время, люди за столом могут сесть в произвольном порядке. Какое минимальное количество пар друзей среди этих 2016 человек?

2. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что числа $(ab+cd)$ и $(ab+a+b-cd-c-d)$ делятся на $(a+b+c+d+2)$. Докажите, что $a+b+c+d+2$ — составное число.

3. Клетку квадрата 11×11 назовем *хорошей*, если после её удаления оставшуюся часть можно разрезать на прямоугольники 1×4. Сколько существует хороших клеток?

4. Клетчатый квадрат 20×20 разделён ломаной длины 40, проходящей по линиям сетки из левого нижнего в правый верхний угол. Клетки под ломаной закрашены. К закрашенной области последовательно присоединяются по две соседние (по стороне) новые клетки, если при этом длина границы, идущей из левого нижнего в правый верхний угол, не изменяется. Процесс заканчивается, когда такая операция станет невозможна. Докажите, что можно установить, как будет проходить граница в конце, зная только, как она проходит в начале.

5. Назовем натуральное число *заниженным*, если в его записи нет цифр 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Найдите все десятизначные заниженные числа, каждое из которых делится хотя бы на одно девятизначное заниженное число.

6. В треугольнике ABC $AB < AC$. Прямые, проходящие через вершины B и C параллельно прямым AC и AB, пересекают биссектрису внешнего угла при вершине A в точках D и E соответственно. Серединный перпендикуляр к отрезку DE пересекает сторону AC в точке F. Докажите, что $FC = AB$.

7. Задана последовательность $a_n = 2^n - 3$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Можно ли выбрать из неё 2016 попарно взаимно простых чисел?

8. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса CD. На прямых AC и BC отметили точки E и F соответственно, так что угол CDE — прямой, а отрезки DF и AC параллельны. Докажите, что $CE = 2DF$.