8 класс, спецкурс по множествам и биективному ужасу

1. ***(ключевая)*** Установите биекцию между

а) (добавим точку) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \cup \{0\}$;

б) (удвоим количество точек) $\mathbb{N}$ и $2\mathbb{N}$;

в) (почти ничего нового) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$;

г) (из прямой – плоскость) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;

д) (заполним прямую не очень плотно) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$.

2. (*суперключевая)* Рассмотрим следующее отображение. Делим отрезок [0;1] пополам на два отрезка – [0, 0,5] и [0,5, 1]. Для каждой точки смотрим, куда она попала. Если в левый отрезок, то ставим 0, если в правый – то 1. Далее снова делим каждый из двух отрезков пополам. Аналогично для каждой точки определяем вторую цифру в зависимости от того, в левый или правый отрезок она попала после этого деления, и так далее. Таким образом, мы получаем для каждой точки бесконечную последовательность из 0 и 1. Какими уже изученными свойствами обладает это отображение? Что мы доказали?

3. ***(суперпуперключевая)*** Установите биекцию а) между всеми последовательностями из 0, 1, 2, 3, ….9 и отрезком [0,1]; б) между всеми бесконечными последовательностями из 0 и 1 и отрезком [0,1]; в) между всеми подмножествами $\mathbb{N}$ и бесконечными последовательностями из 0 и 1; г) между всеми функциями f: $\mathbb{N} \to \{0,1\}$ и всеми подмножествами $\mathbb{N}$; д) между всем, что было упомянуто в предыдущих пунктах.

4. (канторова диагональ) Докажите, что нельзя построить биекцию между натуральными числами и точками отрезка [0,1].

5. Установите биекцию между а) двумя любыми отрезками; б) единичным интервалом ($0<x<1$) и числовой прямой; в) множествами $0\le x<1$ и $0\le x<\infty$; г) окружностью с выкинутой точкой и прямой; д) отрезком [0,1] и полуинтервалом (0,1]; е) между отрезком [0,1] и полуинтервалом (0, 1]$ ж) между отрезком и числовой прямой; г)* единичным интервалом и единичным квадратом.

6. Установите биекцию между множествами точек квадрата без границ и точками всей плоскости.

7. Теорема Кантора — Бернштейна. Если существуют инъекции $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$, то существует биекция между *A* и *B*.

8. Докажите, что любое множество неравномощно множеству всех своих подмножеств.