Тридцать вторая Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2016 года.

Заключительная олимпиада. 23.07.2016

1. За один ход фигура Z передвигается на соседнюю по стороне клетку, при этом каждый ход направление меняется на перпендикулярное. Докажите, что фигура Z не может обойти все клетки доски 2016×2016, попав на каждую клетку один раз, даже если не надо возвращаться в начальную клетку.

2. Ваня нарисовал n прямых, которые образовали несколько точек пересечения. Из точек пересечения он отметил красным ровно $3n$. Докажите, что Аня может выбрать 4 красные точки так, чтобы никакие три из них не лежали на одной *проведенной* прямой.

3. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка D такая, что $\angle BDC = 90^\circ$, и точка H — ортоцентр треугольника ABC. На отрезке AH как на диаметре построена окружность. Докажите, что длина касательной, проведенной к этой окружности из точки B, равна длине отрезка BD.

4. Дана клетчатая доска $m \times n$. Ее клетки красят в черный и белый цвета. Обозначим через F количество таких раскрасок, в которых найдется или черная строка, или черный столбец и через G количество раскрасок, в которых найдется или черная строка, или белый столбец. Что больше, F или G?

5. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n. Натуральное число n таково, что $\sigma(n) = 2n - 1$. Докажите, что $\frac{\sigma(k)}{k} \neq \frac{\sigma(n)}{n}$ при всех натуральных $k \neq n$.

Заключительная олимпиада. Вывод

6. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, AD — его биссектриса, точка E — проекция O на AD. На луче AD отмечена точка F такая, что $CD = CF$. Известно, что $AC = 2AB$. Докажите, что $\angle EBF = \angle ECF$.

7. На карте полетов авиакомпании $K_{r,r}$ изображены несколько городов, некоторые пары городов связаны прямым (двусторонним) авиарейсом, причем всего имеется m авиарейсов. Требуется выбрать две непересекающиеся группы по r городов в каждой такие, что каждый город одной группы связан авиарейсом с каждым из городов второй группы. Докажите, что этот выбор можно осуществить не более чем $2m^r$ способами.

8. Неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Докажите неравенство

$$(a + b + c)^3 \geq 9(ab + bc + ca).$$

Тридцать вторая Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2016 года.

Заключительная олимпиада. 23.07.2016

1. За один ход фигура Z передвигается на соседнюю по стороне клетку, при этом каждый ход направление меняется на перпендикулярное. Докажите, что фигура Z не может обойти все клетки доски 2016×2016, попав на каждую клетку один раз, даже если не надо возвращаться в начальную клетку.

2. Ваня нарисовал n прямых, которые образовали несколько точек пересечения. Из точек пересечения он отметил красным ровно $3n$. Докажите, что Аня может выбрать 4 красные точки так, чтобы никакие три из них не лежали на одной *проведенной* прямой.

3. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка D такая, что $\angle BDC = 90°$, и точка H — ортоцентр треугольника ABC. На отрезке AH как на диаметре построена окружность. Докажите, что длина касательной, проведенной к этой окружности из точки B, равна длине отрезка BD.

4. Дана клетчатая доска $m \times n$. Ее клетки красят в черный и белый цвета. Обозначим через F количество таких раскрасок, в которых найдется или черная строка, или черный столбец и через G количество раскрасок, в которых найдется или черная строка, или белый столбец. Что больше, F или G?

5. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n. Натуральное число n таково, что $\sigma(n) = 2n - 1$. Докажите, что $\frac{\sigma(k)}{k} \neq \frac{\sigma(n)}{n}$ при всех натуральных $k \neq n$.

Заключительная олимпиада. Вывод

6. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, AD — его биссектриса, точка E — проекция O на AD. На луче AD отмечена точка F такая, что $CD = CF$. Известно, что $AC = 2AB$. Докажите, что $\angle EBF = \angle ECF$.

7. На карте полетов авиакомпании $K_{r,r}$ изображены несколько городов, некоторые пары городов связаны прямым (двусторонним) авиарейсом, причем всего имеется m авиарейсов. Требуется выбрать две непересекающиеся группы по r городов в каждой такие, что каждый город одной группы связан авиарейсом с каждым из городов второй группы. Докажите, что этот выбор можно осуществить не более чем $2m^r$ способами.

8. Неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Докажите неравенство

$$(a + b + c)^3 \geq 9(ab + bc + ca).$$