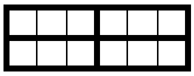
8 класс, 4 июля, вступительная олимпиада -решения

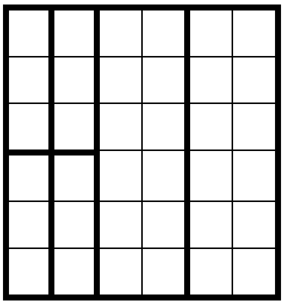
Задача 1. Даны три попарно различных числа. Квадрат первого из них равен сумме квадратов второго и третьего, а квадрат второго равен квадрату суммы первого и третьего. Чему может быть равна сумма чисел, написанных на доске?

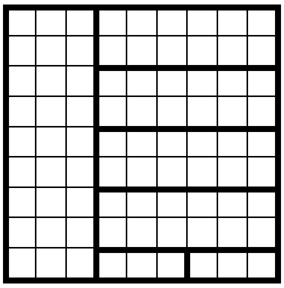
Ответ: **0.** ***Решение***. Обозначим наши числа за a, b, c. Получим два соотношения $a^2= b^2+c^2$, $b^2= a^2+c^2+2ac$. Сложив их, получим $a^2+b^2= a^2+b^2+2c^2+2ac$, откуда $c(a+c) = 0$. Если $c = 0$, тогда $a^2 = b^2$, и так как числа различны, то $a = -b$, откуда $a+b+c =0$. Иначе $a = -c$, $a^2 = c^2$, тогда из первого соотношения $b^2 = 0$, $a+b+c = 0$.

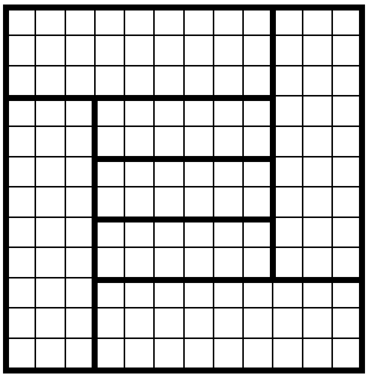
Задача 2. Прямоугольник называется *длинным*, если его стороны относятся как 1:3. Докажите, что для любого натурального n>5 квадрат можно разрезать на n длинных прямоугольников.

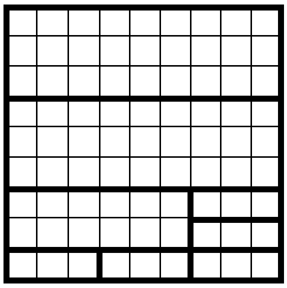


Решение. Заметим, что если длинный прямоугольник разрезать двумя перпендикулярными линиями посередине, как показано на рисунке, то мы получим снова четыре длинных прямоугольника. Так можно прибавлять по три прямоугольника. Так как есть примеры разрезания на 6, 7 и 8 (см. рис., на 7 – два примера), то, прибавляя нужное количество раз по три, мы получим любое натуральное число, больше 5.









Задача 3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$), угол B – тупой. На продолжении стороны AB за точку A отмечена точка D такая, что $AB = AD$. На продолжении стороны BC за точку B отмечена точка E такая, что ED перпендикулярно AC и AE перпендикулярно AB. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 30°,* 30°, 120°. *Решение. Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, тогда $\angle ABE = 2\alpha$ как внешний угол треугольника ABC. Рассмотрим треугольник BED. В нем EA – серединный перпендикуляр, значит, это треугольник равнобедренный, а значит $\angle EDB = 2\alpha$. Обозначим точку пересечения ED и AC через K, рассмотрим треугольник AKD. Из суммы углов треугольника AKD мы получаем, что $\alpha+2\alpha+90^\circ = 180^\circ$, откуда $\alpha = 30^\circ$.

Задача 4. Какое наибольшее число различных прямых можно провести на плоскости так, чтобы среди любых 2016 из них нашлись две, образующие угол 40°?

Ответ: **4533 = 503·9+6.** ***Решение***. <u>Оценка.</u> Построим граф, где вершины – наши прямые, и они соединены ребром, если между этими прямыми угол 40°. Степень каждой вершины не больше 2, поэтому граф разбивается на циклы и цепочки. Так как 360°/40°= 9, то все циклы имеют длину 9. Попробуем выбрать 2016 несмежных вершин.

Из каждого цикла мы можем выбрать 4 вершины, попарно не соединенные ребром. Из каждой цепочки мы можем выбрать минимум половину вершин так, чтобы они не были соединены ребрами. Значит, из всего графа мы можем выбрать минимум 4/9 несмежных вершин. Если общее число вершин графа не делится на 9, то есть минимум одна цепочка, поэтому мы можем выбрать больше 4/9 вершин.

Пусть у нас 503·9+7 или более вершин, тогда мы можем выбрать минимум $\left[\frac{4}{9}(503\cdot 9+7)\right]$ +1 = 2012 +3+1 = 2016 вершин, попарно не соединенных ребрами. Противоречие.

Пример. Проведем 9 прямых через одну точку, делящих полный угол на равные части. Части составляют 20°, а такое семейство прямых составляет ровно один цикл длиной 9. Нарисуем 503 таких семейства, каждое повернуто относительно другого на угол, например, в 1/505°, тогда ни одна прямая не совпадет. 504-е семейство будет неполным и будет состоять только из 6 прямых (соответствует цепочке длиной 6). Тогда из соответствующих циклом можно выбрать максимум 4 несопряженные вершины, а из цепочки – максимум 3, итого не более 4·503+3 = 2015 вершин.

Задача 5. Каждый ученик ЛМШ записал на листочке несколько (не менее двух) натуральных чисел. Известно, что любые трое имеют общее число, которое записали они все. Докажите, что можно объявить некоторые натуральные числа *хорошими* так, чтобы у каждого ученика на листочке были как хорошие, так и плохие числа.

Решения. Пусть хорошие числа будут красного цвета, а плохие – синего. Ясно, что красные и синие цвета полностью равноправны. Докажем утверждение индукцией по количеству учеников. База. Если учеников трое, то их общее число сделаем красным, а остальные числа – синим. Докажем, что при добавлении нового ученика *A* можно сделать соответствующую раскраску чисел. Если у *A* есть какие-то новые числа, которые не встречались у других, раскрасим их произвольно. Теперь если у *A* есть и синие, и красные числа, то всё хорошо. Пусть у *A* только красные (если синие – аналогично). Рассмотрим число *x*, записанное *A*. Если его можно перекрасить в синий без противоречий, то задача решена. Если нет, то значит есть ученик *B*, у которого все числа синие, и только одно число красное – это x. Аналогично для другого числа $y \neq x$, которое есть у *A*, есть человек *C,* у которого единственное красное – это *y*. Рассмотрим учеников *A*, *B*, *C*. Так как у *A* только красные числа, то их общее число может быть красным. Но у *B* красное число – только *x*, а у С красное число только *y*, и они различны. Противоречие.

Задача 6. Вася выписывает на доску натуральные числа. Первое число равно 1, а каждое следующее число больше предыдущего либо на единицу, либо больше предыдущего в два раза. Может ли в какой-то момент времени сумма всех выписанных чисел оказаться равной 2000?

Ответ:* нет, не может. *Решения. Рассмотрим наши действия по mod 3. Пусть наше число было равно 0 (т.е. делилось на три). Тогда следующее число либо будет 0, либо 1. Если 1, то следующее равно 2. Если 2, то следующее – 0 или 1. Заметим, что нули не меняют остаток суммы при делении на 3. Это означает, что их можно не рассматривать, а значит, после 1 всегда идет 2, а после 2 идет 1. Начали с 1. Значит, сумма всегда будет давать либо остаток 1, либо остаток 0, поэтому 2000 получиться не может.