Вписанная окружность. Радикальная ось-2.

1. Обозначим через a, b, c стороны, через p полупериметр треугольника ABC.

(a) Вписанная окружность касается стороны AB в точке C'. Докажите, что $AC' = p - a$.

(b) Вневписанная окружность касается стороны AB в точке C''. Докажите, что $BC'' = p - a$.

(c) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке. (Эта точка называется точкой Жергонна.)

(d) Докажите утверждение, аналогичное пункту с), но про вневписанную окружность.

Напоминание. *Выпуклый четырехугольник является описанным тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны.*

Если вы не знаете доказательства этого факта (особенно в обратную сторону), обязательно спросите у нас его доказательство, аналогичные приемы будут использоваться и позже.

2. Дан невыпуклый четырехугольник $ABCD$, причем $\angle BCD > 180°$. Пусть $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$.

(a) Докажите, что существует окружность, касающаяся прямых AB, BC, CD, DA **(как на первой картинке)** тогда и только тогда, когда $a + c = b + d$

(b) Докажите, что существует окружность, касающаяся прямых AB, BC, CD, DA **(как на второй картинке)** тогда и только тогда, когда $a + b = c + d$.

3. В треугольнике ABC проведена чевиана BB_1. В треугольники ABB_1 и CBB_1 вписаны окружности ω_1 и ω_2. Пусть B' — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC.

(a) Докажите, что они касаются друг друга тогда и только тогда, когда B_1 совпадает с B'.

(b) Докажите, что если ω_1 и ω_2 не касаются, то общая внутренняя касательная этих окружностей, отличная от BB_1, проходит через точку B'.

(c) Докажите, что $\angle O_1B'O_2$ — прямой.

Указание. Сначала докажите, что $\angle O_1B_1O_2$ — прямой.

4. Дан треугольник ABC. Окружность ω пересекает сторону AB в точках C_1 и C_2, сторону BC — в точках A_1, A_2, сторону AC — в точках B_1, B_2. Оказалось, что чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что чевианы AA_2, BB_2, CC_2 также пересекаются в одной точке.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Чевы.

5. (a) Дан треугольник ABC и точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ на сторонах BC, AC, AB соответственно. Оказалось, что четверки точек A_1, A_2, B_1, B_2; A_1, A_2, C_1, C_2; B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности (не обязательно одинаковой для разных четверок). Докажите, что всё же обязательно, то есть что $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.

Указание. См. задачу 3 из темы радикальная ось.

(b) Основание каждой высоты треугольника проектируется на боковые стороны треугольника. Докажите, что шесть полученных точек лежат на одной окружности.

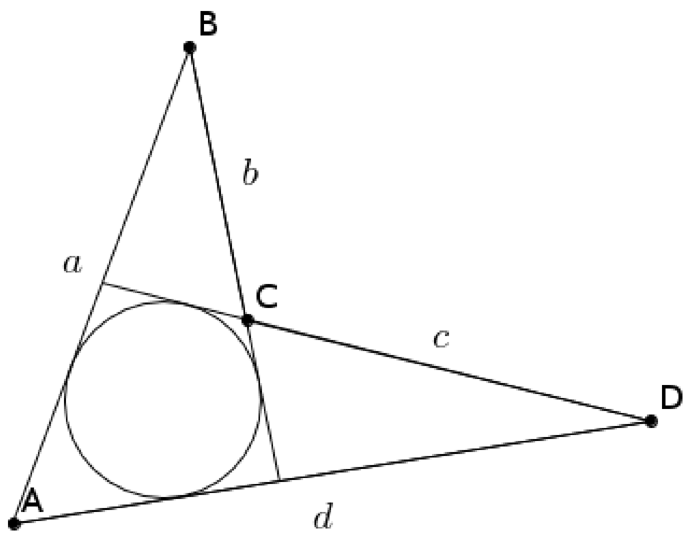
Указание. Почему мы объединили пункты a) и b) в одну задачу?

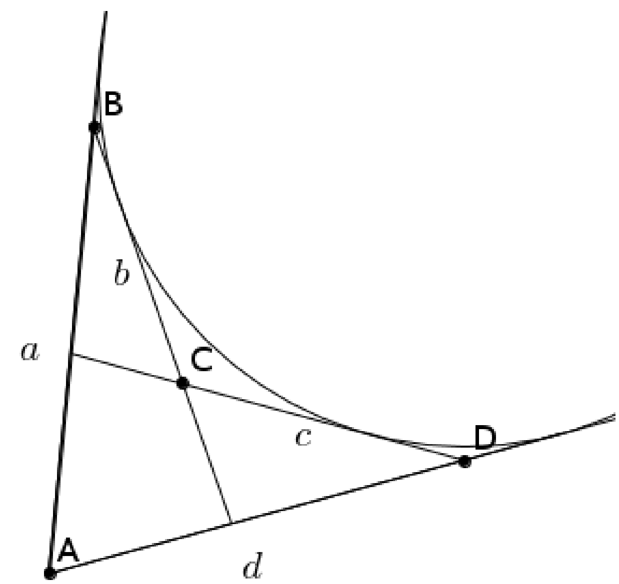
(c) (Окружность Конвея.) На прямых AB, BC, CA треугольника ABC построили отрезки, как показано на картинке. Известно, что $AA_1 = AA_2 = BC$; $BB_1 = BB_2 = AC$; $CC_1 = CC_2 = AB$. Докажите, что 6 построенных точек лежат на одной окружности. **(см. третью картинку)**

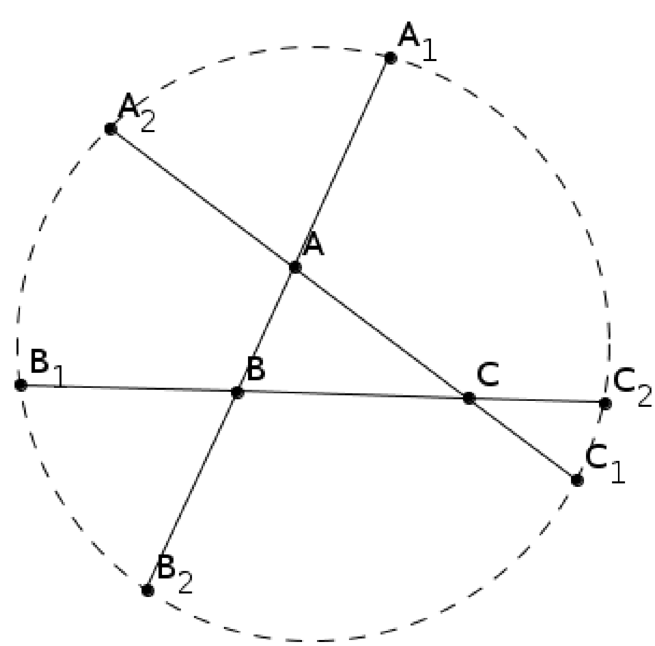
6. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая l пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает l в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

7. На стороне BC треугольника ABC взята точка A'. Серединный перпендикуляр к отрезку $A'B$ пересекает сторону AB в точке M, а серединный перпендикуляр к отрезку $A'C$ пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что точка, симметричная точке A' относительно прямой MN, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

8. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются прямой AC в точках A и C соответственно. Отрезок AB пересекается с ω_1 в точке M, отрезок BC пересекается с ω_2 в точке N. Оказалось, что O_1, M, N и O_2 лежат на одной прямой. Докажите, что эта прямая перпендикулярна медиане треугольника из точки B.


B
b
a
C
c
D
A
d


B
b
a
C
c
D
A
d


A1
A2
A
B1
B
C
C2
C1
B2