

Теоретико-числовой разнбой.

1. Докажите, что для любых натуральных a, b справедливо равенство $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.

Указание. Рассмотрите степень вхождения произвольного простого p в обе части равенства.

2. Докажите, что при всех $a, b, c \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\frac{\text{НОД}(a, b) \text{НОД}(b, c) \text{НОД}(c, a)}{\text{НОД}(a, b, c)^2} = \frac{\text{НОК}(a, b) \text{НОК}(b, c) \text{НОК}(c, a)}{\text{НОК}(a, b, c)^2}$$

3. Докажите формулу

$$[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(b, c)(c, a)}$$

для любых натуральных a, b и c .

4. Натуральные взаимно простые в совокупности a, b, c таковы, что $ab = c(a - b)$. Докажите, что $(a - b)$ — точный квадрат.

5. Натуральные числа m, n таковы, что $(m, n) + [m, n] = m + n$. Докажите, что одно из чисел m, n делится а другое.

6. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n .

7. Докажите, что при любых нечетных a, b, c справедливо равенство

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2} \right) = (a, b, c).$$

8. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

Теоретико-числовой разнбой.

1. Докажите, что для любых натуральных a, b справедливо равенство $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.

Указание. Рассмотрите степень вхождения произвольного простого p в обе части равенства.

2. Докажите, что при всех $a, b, c \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\frac{\text{НОД}(a, b) \text{НОД}(b, c) \text{НОД}(c, a)}{\text{НОД}(a, b, c)^2} = \frac{\text{НОК}(a, b) \text{НОК}(b, c) \text{НОК}(c, a)}{\text{НОК}(a, b, c)^2}$$

3. Докажите формулу

$$[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(b, c)(c, a)}$$

для любых натуральных a, b и c .

4. Натуральные взаимно простые в совокупности a, b, c таковы, что $ab = c(a - b)$. Докажите, что $(a - b)$ — точный квадрат.

5. Натуральные числа m, n таковы, что $(m, n) + [m, n] = m + n$. Докажите, что одно из чисел m, n делится а другое.

6. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n .

7. Докажите, что при любых нечетных a, b, c справедливо равенство

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2} \right) = (a, b, c).$$

8. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.