8 класс, 7 июля, бесконечность

1. а) Все числа в бесконечной арифметической прогрессии по модулю меньше 2016. Верно ли, что они все равны? **б).** Все числа в бесконечной геометрической прогрессии по модулю меньше 2016. Верно ли, что все они равны?

2. Подмножество X множества "двузначных" чисел 00, 01, ..., 98, 99 таково, что в любой бесконечной последовательности цифр найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из X. Какое наименьшее количество чисел может содержаться в X?

3. Есть N бесконечных десятичных дробей. При каком наименьшем N из них можно гарантированно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций?

4. Докажите, что в бесконечной монотонно убывающей последовательности (каждый член больше последующего) целых чисел всегда есть отрицательные числа.

5. На бесконечном шоссе находятся полицейская машина (ездит со скоростью до 100 км/ч) и вор на угнанном мотоцикле (ездит со скоростью до 80 км/ч). Полицейские не знают, в каком месте шоссе находится вор. Как им действовать, чтобы наверняка догнать вора? (Вор не может съехать с шоссе или спрятаться).

6. На плоскости дано бесконечное множество прямоугольников, вершины каждого из которых расположены в точках с координатами (0, 0), $(0, m)$, $(n, 0)$, (n, m), где n и m — целые положительные числа (свои для каждого прямоугольника). Докажите, что из этих прямоугольников можно выбрать два так, чтобы один содержался в другом.

7. На небе бесконечное число звёзд. Астроном приписал каждой звезде пару натуральных чисел, выражающую яркость и размер. При этом каждые две звезды отличаются хотя бы в одном параметре. Докажите, что найдутся две звезды, первая из которых не меньше второй как по яркости, так и по размеру.

8. Можно ли разместить внутри квадрата несамопересекающуюся ломаную с бесконечным числом звеньев?

9. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос (полоса – часть плоскости между параллельными прямыми)?

10. Можно ли разбить бесконечную клетчатую доску на домино так, чтобы **а)** каждая линия сетки разрезала пополам бесконечно много доминошек; **б)** каждая линия сетки разрезала пополам лишь конечное число доминошек?

8 класс, 9 июля, бесконечность-2

11. Круг разделен на 2016 секторов, и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе где фишка, фишка сдвигается на это число секторов по часовой стрелке, и там, где она остановилась, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое число ходов все числа станут больше миллиона.

12. Доказать, что в бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдётся бесконечное количество чисел, которые больше своего номера в этой последовательности.

13. Можно ли расставить в клетки бесконечной клетчатой плоскости натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз и любые два числа из одного столбца или одной строки были взаимно просты?

14 (ключевая). Докажите, что из любой бесконечной числовой последовательности можно удалить какое-то (возможно, бесконечное) количество чисел так, чтобы оставшиеся образовали либо бесконечную убывающую, либо бесконечную возрастающую последовательность.

15. Дано несколько геометрических прогрессий, состоящих из натуральных чисел. Докажите, что найдётся натуральное число, не входящее ни в одну из них.

16. Множество натуральных чисел разбито на два множества. Известно, что первое множество не содержит трех чисел таких, что одно является средним арифметическим двух других. Может ли при этом второе множество не содержать бесконечной арифметической прогрессии?

17. Каждый прожектор освещает некоторый угол. **а)** На плоскости разместили несколько (конечное) прожекторов так, что освещена вся плоскость. Докажите, что сумма углов в этом случае не меньше 360°. **б)** придумайте пример, как осветить всю плоскость бесконечным числом прожекторов с углами 90°, 45°, 22,5° и т.д .(каждый новый в 2 раза меньше предыдущего).

18. Множество натуральных чисел разбито на бесконечные арифметические прогрессии с разностями d_1, d_2,…**а)** Докажите, что если число прогрессий конечно, то $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots=1$. **б)** что будет, если число прогрессий бесконечно?

19. а) В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n-го прямоугольника равна n^2. Всегда ли ими можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.

б) Дана бесконечно много квадратов. Всегда ли ими можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдутся квадраты суммарной площади больше N?

20. Два бога по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Первый своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, второй – одну. Если в итоге получится периодическая дробь, выигрывает первый, иначе – второй. Кто выиграет при наилучшей игре сторон?