

8 класс, 15 июля, рациональность

Рациональным число называется число, которое можно представить в виде $\frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.

Вопросы. Может ли быть а) сумма двух рациональных чисел иррациональна; б) сумма двух иррациональных чисел рациональна; в) произведение двух иррациональных чисел рационально; г) иррациональное число в иррациональной степени рационально?

1. а) При каких натуральных значениях n число \sqrt{n} является рациональным? Целым?

б) Докажите что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ – иррационально; в) докажите что число $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ – иррационально.

2. Докажите, что число является рациональным тогда и только тогда, когда оно представляется в виде периодической десятичной дроби.

3. Докажите, что свойство рациональности числа не зависит от системы счисления.

4. Могут ли числа $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ быть членами одной а) геометрической; б) арифметической прогрессии? (не обязательно они должны идти подряд).

5. Пусть число a задается в виде дроби а) $0,101001000100001\dots$; б) $0,123456789101112\dots$. Установите, иррациональное a или рациональное?

6. После нуля и десятичной запятой последовательно выписали все степени двойки (получилось число вида $0,1248163264128256$). Будет ли это число рациональным?

7. Докажите, что если $a, b, c \in \mathbb{Q}$ и $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$, то $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

8. Имеется 40 газовых баллонов, значения давления газа в которых нам неизвестны и могут быть различны. Разрешается соединять любые баллоны друг с другом в количестве, не превосходящем заданного натурального числа k , а затем разъединять их; при этом давление газа в соединяемых баллонах устанавливается равным среднему арифметическому давлений в них до соединения. При каком наименьшем k существует способ уравнивания давлений во всех 40 баллонах независимо от первоначального распределения давлений в баллонах?

9. Иррациональный взрыв с эпицентром в точке P удаляет из плоскости все точки, находящиеся на иррациональном расстоянии от точки P . Какое наименьшее количество иррациональных взрывов достаточно для того, чтобы удалить из плоскости все точки?

10. Числовое множество M , содержащее 2003 различных числа, таково, что для любых двух различных элементов a, b из M число $a^2 + b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что для любого a из M число $a\sqrt{2}$ рационально.

11.* В числе $\alpha = 0,12457\dots$ n -я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$. Докажите, что α – иррациональное число.

12.* Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для каждой двух из них либо сумма этих чисел, либо их произведение – рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.