# Материалы занятий

*8 класс ПРОФИ*

Д. А. Белов
Р. С. Ефремов
Ж. В. Зосимова

## Дорогие дети!

Ваши преподаватели искренне рады, что мы встретились с вами этим летом на просторах Кировской ЛМШ. Уверены, что от смены останутся самые теплые и приятные воспоминания и у вас, и у нас.

Мы многое прошли за эту смену, но еще больше вас ждет впереди. Надеемся, что знания, полученные за эти 25 дней, не утратятся за последующие 340.

До встречи через год!


**Искренне Ваши,**

**Дмитрий Алексеевич,**

**Руслан Сергеевич,**

**Жанна Владиславовна.**

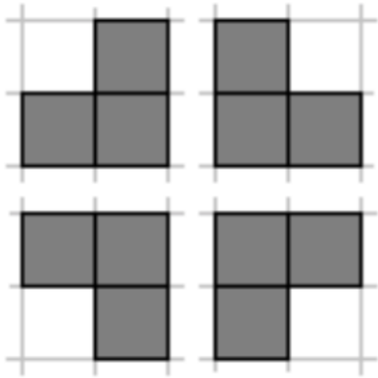
# Оглавление


**1.** Серия 0, уголки в прямоугольнике . . . 4
**2.** Вступительная олимпиада . . . 4
**3.** Серия 1, векторы . . . 5
**4.** Серия 2, индукция . . . 7
**5.** Вступительная олимпиада 2.0 . . . 8
**6.** Серия 3, теорема Эйлера . . . 8
**7.** Серия 4, подбираем коэффициенты . . . 9
**8.** Серия 5, вписанная . . . 11
**9.** Серия 6, диаграммы Юнга . . . 12
**10.** Серия 7, скалярное произведение . . . 13
**11.** Серия 9, теорема Безу . . . 14
**12.** Серия 10, массивная . . . 15
**13.** Серия 11, триангуляции . . . 17
**14.** Серия 12, показательная . . . 18
**15.** Серия 13, принципиальная . . . 19
**16.** Серия 14, гомотетия . . . 20
**17.** Серия 15, многочлены над $\mathbb{Z}$ . . . 21
**18.** Серия 16, конечное и бесконечное . . . 22
**19.** Серия 17, скалярное–2 . . . 23
**20.** Внутрипрофный матбой . . . 24
**21.** Матбой 3/4 профи . . . 25
**22.** Серия 18, множественная . . . 25
**23.** Серия 19, показатели–2 . . . 26
**24.** Серия 20. Окружность Аполлония . . . 27
**25.** Серия 21, разложение . . . 28
**26.** Серия 22, выделяем бесконечное . . . 29

**27.** Серия 23, гомотетия–2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
**28.** Серия 24, квадратичная . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
**29.** Серия 25, экстремальная . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
**30.** Серия 26, поворотная . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
**31.** Серия 27, массивная добавка . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
**32.** Профи–8 vs Профи–9 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36
**33.** Серия 28, неприводимость . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
**34.** Серия 29, немного о двойке . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
**35.** Серия 30, от точки до прямой . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
**36.** Серия 31, подсчеты в множествах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
**37.** Серия 32, примитивная . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40
**38.** Серия 33, экстремальные графы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41
**39.** Серия 34, поворотная–2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
**40.** Серия 35, первообразные корни–2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
**41.** Серия 36, движемся к концу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
**42.** Вопросы к зачету . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45

# 1. Серия 0, уголки в прямоугольнике *4 июля*

Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$ $(m, n \geqslant 2)$. Есть неограниченный запас бумажных уголков из трех клеток. Уголки можно располагать внутри прямоугольника так, чтобы их границы шли по линиям сетки. Необходимо выяснить, при каких $m$ и $n$ можно разместить уголки так, чтобы каждая клетка была покрыта одинаковым числом слоев бумаги. В этом случае будем говорить, что прямоугольник *покрывается уголками.*



**Упр. 1.** Докажите, что если прямоугольник покрывается уголками, то либо $mn$, либо число слоев делится на 3.

**1.** Докажите, что прямоугольник размером $2 \times n$ может быть покрыт уголками в 3 слоя.

**2.** Докажите, что если $mn$ четно, то прямоугольник покрывается уголками в три слоя.

**3.** Докажите, что если $mn$ делится на 6, то прямоугольник покрывается уголками в один слой.

**Замечание.** Случай, когда одно из чисел $m$ или $n$ четно, рассмотрен целиком, поэтому дальше исследуем случай нечетных чисел.

**4.** Докажите, что прямоугольник $3 \times (2n+1)$ не покрывается уголками ни в какое число слоев.

**5.** Докажите, что прямоугольники $5 \times 5$ и $5 \times 7$ не покрываются никаким числом слоев.

**6.** Покройте уголками в один слой прямоугольник $5 \times 9$.

**7.** Покройте уголками прямоугольник $7 \times 7$.

**8.** Укажите все пары нечетных чисел $m$ и $n$, при которых прямоугольник $m \times n$ может быть покрыт в один слой.

**9.** Укажите все пары нечетных чисел $m$ и $n$, при которых прямоугольник $m \times n$ может быть покрыт уголками.

**Замечание.** В итоге мы показали, что если прямоугольник может быть покрыт уголками в несколько слоев, то он может быть покрыт и в три слоя.

# 2. Вступительная олимпиада *4 июля*

**1.** В ряд стоит 50 человек, все разного роста. Ровно 15 из них выше своего левого соседа. Сколько человек выше своего правого соседа? Приведите все варианты и докажите, что других нет.

**2.** Из четырех палочек получилось составить выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что из тех же палочек можно составить четырехугольник, два противоположных угла которого будут равны по $90°$.

**3.** Петя поделил с остатком натуральное число на сумму его цифр. И неполное частное, и остаток оказались у Пети равны 2017. Учительница поставила Пете двойку. Докажите, что учительница права.

**4.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AL$. На стороне $AB$ нашлась точка $K$ такая, что $\angle ACK = \angle ABC$, $\angle CLK = \angle BKC$. Докажите, что $AC = KB$.

**5.** 40 членов жюри подбирают пятую задачу для 8 класса. У них есть список из 30 задач. Они договорились поставить в вариант задачу, которую умеют решать не менее половины членов жюри, но не все. Каждый из членов жюри решил ровно 26 задач, причем любые два члена жюри решили разные наборы задач. Докажите, что они смогут найти подходящую задачу.

**6.** Сумма чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ равна нулю. Известно, что

$$|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \ldots = |a_{2018} - 2a_{2019}| = |a_{2019} - 2a_1|.$$

Докажите, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2019} = 0$.

## 3. Серия 1, векторы

*5 июля*

**Определение 1.** *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленный отрезок с началом в точке $A$ и концом в точке $B$ обозначается $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$. Начало и конец направленного отрезка могут совпадать.

**Определение 2.** Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *эквивалентными*, если $ABDC$ — параллелограмм (возможно, вырожденный).

Эквивалентность направленных отрезков является отношением эквивалентности.

**Определение 3.** Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами.* Словосочетание «вектор $AB$» означает класс эквивалентности, содержащий направленный отрезок $\overline{AB}$.

**Определение 4.** Векторы называются *коллинеарными*, если направленные отрезки, соответствующие этим векторам, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой. Если они при этом лежат на одном луче исходящем из этой точки, то они называются *сонаправленными.* Если на разных — то *противоположно направленными.*

**Упр. 1.** **(a)** Упростите выражение $\overline{AC}+\overline{DE}+\overline{CB}+\overline{EA}$.

**(b)** Упростите выражение $\overline{CE}-\overline{CA}+\overline{EB}-\overline{DB}$.

**(c)** Пусть $AA_1$ медиана треугольника $ABC$. Докажите, что $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$.

**(d)** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ выбрана точка $A_1$ такая, что $\frac{BA_1}{BC}=t$. Докажите, что $\overline{AA_1}=(1-t)\overline{AB}+t\overline{AC}$.

**(e)** Пусть $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ — два параллелограмма с общей вершиной. Докажите, что один из векторов $\overline{BB}_1$, $\overline{CC}_1$ и $\overline{DD}_1$ коллинеарен сумме двух других.

**1.** В четырехугольнике $ABCD$ точка $M$ — середина $BC$, $N$ — середина $AD$. Докажите, что $MN \leqslant \dfrac{BA+CD}{2}$. Когда достигается равенство?

**2.** Пусть $M$, $N$, $P$ и $Q$ — середины сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $DE$ выпуклого пятиугольника $ABCDE$. $F$ — середина $MP$, $G$ — середина $NQ$. Докажите, что $\overline{FG}=\frac{1}{4}\overline{AE}$.

**3.** Из медиан треугольника $ABC$ составлен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан треугольника $A_1B_1C_1$ составлен треугольник $A_2B_2C_2$. Докажите, что треугольники $ABC$ и $A_2B_2C_2$ подобны, и найдите коэффициент подобия.

**4.** На прямой лежат 2017 точек $M_1, \ldots, M_{2017}$. Вне прямой дана точка $A$. Может ли так случиться, что можно расставить на отрезках $AM_1, \ldots, AM_{2017}$ стрелки так, чтобы сумма полученных векторов была равна $\overrightarrow{0}$?

**5.** Докажите, что сумма векторов, ведущих из центра правильного $n$-угольника в его вершины, равна $\overrightarrow{0}$.

**6.** На сторонах многоугольника, вписанного в окружность диаметра 1, расставлены стрелочки. Докажите, что длина суммы полученных векторов не превосходит 2.

**7.** На плоскости нарисованы два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ (их вершины перечислены против часовой стрелки). Докажите, что середины отрезков $AK$, $BL$, $CM$ и $DN$ являются вершинами квадрата.

**8.** Середины противолежащих сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведенные отрезки равны.

**9.** В вершинах правильного $n$-угольника расставлены $n$ чисел: $n-1$ ноль и одна единица. Разрешается увеличить на 1 все числа в вершинах любого правильного $k$-угольника, вписанного в данный многоугольник. Можно ли такими операциями сделать все числа равными?

**10.** *Центроидом* четырехугольника будем называть точку пересечения двух прямых, соединяющих середины его противоположных сторон. Дан шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в окружность $\Omega$ с центром $O$. Известно, что $AB = DE$ и $BC = EF$. Пусть $X, Y$ и $Z$ — центроиды четырехугольников $ABDE$, $BCEF$ и $CDFA$ соответственно. Докажите, что высоты треугольника $XYZ$ пересекаются в точке $O$.

# 4. Серия 2, индукция *5 июля*

**1. (a)** На доске написано 1000 двоек. За один ход можно стереть с доски два числа и записать вместо них либо сумму, либо произведение. Можно ли получить после 999 операций число, большее $2^{1000}$?

**(b)** На доске написано 1000 единиц. За один ход можно стереть с доски два числа и записать вместо них либо сумму, либо произведение. Можно ли получить после 999 операций число, большее 1000?

**2.** Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трех разных цветов.

**3.** Пусть $n \geqslant 3$ — натуральное число. Докажите, что $n!$ можно представить в виде суммы $n$ попарно различных натуральных делителей $n!$.

**4.** В полном однокруговом турнире по футболу участвует $N > 2$ команд. Они договорились, что каждая команда в своей $k$-ой игре забивает $k$ голов. Каково наименьшее количество ничьих в таком турнире?

**5.** Пусть $p \leqslant n$, $q \leqslant m$ — натуральные числа. В клетках таблицы $n \times m$ расставлены попарно различные числа. В каждой строчке подчёркнуты $p$ наибольших чисел, в каждом столбце — $q$ наибольших чисел. Докажите, что хотя бы $pq$ чисел подчёркнуты дважды.

**6.** Обозначим через $S$ множество всех точек $(x, y)$ с целыми неотрицательными координатами, для которых $x+y < n$. Точки множества $S$ раскрашены в красный и синий цвета так, что если $(x, y)$ красная, то $(x', y')$ также красная для всех $x' \leqslant x$ и $y' \leqslant y$. Пусть $A$ — количество способов выбрать $n$ синих точек так, чтобы все их $x$-координаты были различны, а $B$ — количество способов выбрать $n$ синих точек так, чтобы все их $y$-координаты были различны. Докажите, что $A = B$.

**7.** В классе каждый ученик — либо болтун, либо молчун, причем каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. Болтун молчит, если в кабинете находится нечётное число его друзей-молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все присутствующие на факультативе болтуны молчали.

**8.** Дано нечётное число $n > 10$. Найдите количество способов расставить по кругу в некотором порядке натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, n$ так, чтобы каждое число являлось делителем суммы двух соседних с ним чисел. (Способы, отличающиеся поворотом или отражением, считаются одинаковыми.)

## 5. Вступительная олимпиада 2.0 *5 июля*

**1.** Точка $K$ — середина перпендикуляра, опущенного из вершины $A$ прямоугольника $ABCD$ на диагональ $BD$, а точка $M$ — середина стороны $AD$. Докажите, что точка пересечения прямых $BK$ и $CM$ лежит на описанной окружности $ABCD$.

**2.** По кругу расставлены $a + b$ целых чисел ($a$ и $b$ — данные натуральные числа). Петя считает количество способов выбрать $a$ чисел, стоящих подряд, так, чтобы их сумма давала при делении на 3 остаток 1, а сумма всех остальных $b$ чисел давала при делении на 3 остаток 2. Вася считает количество способов выбрать $a$ чисел, стоящих подряд, так, чтобы их сумма давала при делении на 3 остаток 2, а сумма всех остальных $b$ чисел давала при делении на 3 остаток 1. Докажите, что разность Петиного и Васиного чисел делится на 3.

**3.** В стране между некоторыми парами городов установлено *одностороннее* прямое авиасообщение. Два вредителя хотят добиться того, чтобы, вылетев из любого города, нельзя было вернуться в него. Первый вредитель умел закрывать рейсы. Он выяснил, что можно закрыть 1000 рейсов, добившись требуемого, но меньшего числа рейсов недостаточно; однако до начала действий его обнаружили и обезвредили. Второй вредитель умеет разворачивать направления рейсов. Какого минимального количества разворачиваний ему гарантированно хватит?

**4.** Рассмотрим всевозможные выражения вида $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 200$. Найдите среднее арифметическое **квадратов** всех таких выражений.

## 6. Серия 3, теорема Эйлера *6 июля*

**Упр. 1.** Рассмотрим сравнение $ak \equiv bk \pmod{m}$. При каком условии на $k$ и $m$ из этого следует, что $a \equiv b \pmod{m}$?

**Определение 1.** Значение *функции Эйлера* $\varphi(m)$ равно количеству натуральных чисел, не превосходящих $m$ и взаимно простых с $m$.

**Упр. 2.** Чему равно $\varphi(p^k)$ при простом $p$?

**Замечание.** Функция Эйлера *мультипликативна*, то есть при взаимно простых $a$ и $b$ выполнено $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$. Это позволяет вывести для нее явную формулу, зная разложение числа на простые множители.

**Теорема.** Пусть $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_i$ — различные простые числа. Тогда

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

**Теорема Эйлера.** Если НОД$(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.
Доказывается эта теорема, например, через *приведенную систему вычетов.*

**1.** Докажите, что при $m > 2$ число $\varphi(m)$ четно.

**2.** Докажите, что к числу $2^{2018}$ можно приписать слева несколько цифр так, чтобы снова получилась степень двойки.

**3.** Найдите три последние цифры числа $2008^{2007^{\cdots^{2^1}}}$.

**4.** Для скольких значений числа $i$, где $1 \leqslant i \leqslant 1000$, существует число $j$, $1 \leqslant j \leqslant 1000$, такое, что $2^j - 1$ делится на $i$?

**5.** Докажите, что для любого натурального числа $n$ найдется число с суммой цифр, равной $n$, делящееся на $n$.

**6.** Дано натуральное $n \geqslant 3$. Докажите, что число

$$n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$$

делится на 1989.

**7.** Дано простое число $p = 3k + 2$. Докажите, что сравнение $y^2 - x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ имеет не более $p$ решений по модулю $p$.

**8.** Докажите, что $2^{2^{\cdots^2}} - 2^{2^{\cdots^2}}$ (в первом слагаемом $n$ двоек, во втором — $n - 1$) делится на все числа от 1 до $n$.

**9.** Найдите наименьшее простое $p$ такое, что $2^{120!} - 1$ делится на $p$, но не делится на $p^2$.

**10.** Даны натуральные $a$ и $b$. Известно, что для любого натурального $n$ число $a^n + n$ делится на $b^n + n$. Докажите, что $a = b$.

# 7. Серия 4, подбираем коэффициенты *6 июля*

**Упр. 1.** Для положительных вещественных чисел $x$, $y$ и $z$ выполнено равенство $xy + yz + zx = 1$. Докажите неравенство

$$10x^2 + 10y^2 + z^2 \geqslant 4.$$

Представим $10 = 8 + 2$ и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$2x^2 + 2y^2 \geqslant 4xy; \quad 8x^2 + \frac{1}{2}z^2 \geqslant 4xz; \quad 8y^2 + \frac{1}{2}z^2 \geqslant 4yz.$$

Складывая неравенства выше, получаем требуемое.

Как догадаться разложить 10 как сумму 8 и 2? Могут ли другие разложения помочь, скажем, 7 и 3? Чтобы ответить на эти вопросы, давайте решим более общую задачу.

**1.** Дано положительное число $k$. Про положительные числа $x$, $y$ и $z$ известно, что $xy + yz + zx = 1$. Найдите минимум выражения

$$k(x^2 + y^2) + z^2.$$

*Подсказка.* Разложите $k$ неопределенным образом на два слагаемых: $l$ и $k - l$.

**2.** Даны положительные числа $x$, $y$, $z$ и $t$ с условием $xy + yz + zt + tx = 1$. Найдите наименьшее значение выражения

$$5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + t^2.$$

**3.** Сумма положительных чисел $a$, $b$ и $c$ равна 6. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^4 + 1} + \frac{6b^2}{b^3 + 16} + \frac{54c^2}{c^4 + 243} \leqslant 3.$$

**4.** Сумма неотрицательных чисел $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_{10}$ равна 9. Найдите минимальное возможное значение суммы

$$x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_{10}^{10}.$$

**5.** Сумма трех положительных чисел $x$, $y$ и $z$ равна 3. Найдите минимум выражения

$$x^2 + y^2 + z^3.$$

**6.** Произведение положительных чисел $x$, $y$, $z$ равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{x^5 + xy + y^5} + \frac{yz}{y^5 + yz + z^5} + \frac{zx}{z^5 + zx + x^5} \leqslant 1$$

**7.** Сумма положительных чисел $a$, $b$, $c$ и $d$ равна 4. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a^3 + 8} + \frac{b}{b^3 + 8} + \frac{c}{c^3 + 8} + \frac{d}{d^3 + 8} \leqslant \frac{4}{9}.$$

# 8. Серия 5, вписанная

*6 июля*

**1.** Прямая $PA$ касается описанной окружности треугольника $ABC$. Пусть $C_1$ и $B_1$ — основания перпендикуляров, опущенных из $P$ на прямые $AB$, $AC$. Докажите, что $BC$ перпендикулярно $B_1C_1$.

**2.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ равен $60°$. Биссектрисы $AK$ и $CL$ пересекаются в точке $I$. Докажите, что $IK = IL$.

**3.** Четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Докажите, что продолжение перпендикуляра из точки пересечения диагоналей к одной из сторон делит противоположную сторону пополам.

**4.** Пусть $D$ — отражение вершины $A$ остроугольного треугольника $ABC$ относительно $BC$. Отрезки $BD$, $CD$ пересекают описанную окружность треугольника $ABC$ в точках $P$ и $Q$. Докажите, что $AD$ — биссектриса угла $PAQ$.

**5.** На окружности $\omega$ зафиксированы точки $B$ и $C$, а точка $A$ скользит по $\omega$. Найдите геометрическое место точек $X$, служащих для треугольника $ABC$

- **(a)** ортоцентром;
- **(b)** центром вписанной окружности;
- **(c)** точкой пересечения медиан;
- **(d)** центром одной из вневписанных окружностей.

**6.** Окружности пересекаются в точках $M$ и $K$. Через $M$ и $K$ проведены прямые $AB$ и $CD$ соответственно, пересекающие первую окружность в точках $A$ и $C$, вторую в точках $B$ и $D$. Докажите, что $AC \parallel BD$.

**7.** Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что прямая, соединяющая середины дуг $AB$ и $CD$, не содержащих отмеченных точек, перпендикулярна одной из биссектрис угла между прямыми $AB$ и $CD$.

**8.** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Окружность, описанная около треугольника $ADB$, пересекает сторону $AC$ в точке $M$, а окружность, описанная около треугольника $ADC$, пересекает сторону $AB$ в точке $N$ ($M, N \neq A$). Пусть $O$ — центр описанной окружности треугольника $AMN$. Докажите, что $OD \perp BC$.

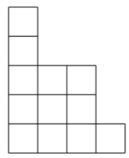
**9.** Точка $O$ — центр описанной окружности остроугольного треугольника $ABC$ ($AB > AC$). Обозначим $X$ основание перпендикуляра, опущенного из $B$ на $AO$. Далее: $M$ — середина $BC$, $AA_1$ — высота треугольника $ABC$. Докажите, что $XM = MA_1$.

**10.** В остроугольном треугольнике $ABC$ отмечен ортоцентр $H$ и середина $M$ стороны $BC$. Прямая, проходящая через $H$ и перпендикулярная $HM$, пересекает стороны $AC$, $AB$ в точках $B_1$, $C_1$. Докажите, что $H$ — середина отрезка $B_1C_1$.

**11.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $BB_1$. Перпендикуляр из $B_1$ на $BC$ пересекает дугу $BC$ описанной окружности треугольника $ABC$ в точке $K$. Перпендикуляр из $B$ на $AK$ пересекает $AC$ в точке $L$. Докажите, что точки $K$, $L$ и середина дуги $AC$ (не содержащей точку $B$) лежат на одной прямой.

# 9. Серия 6, диаграммы Юнга *7 июля*

**Определение 1.** *Диаграммой Юнга* называется упорядоченный по невозрастанию набор клетчатых столбцов. Она задается указанием высоты этих столбцов. Например, на рисунке справа изображена диаграмма Юнга $(5, 3, 3, 1)$.



**Замечание.** Каждая диаграмма Юнга соответствует разбиению натурального числа $n$, равного количеству клеток в диаграмме, на натуральные не обязательно различные слагаемые. Число $n$ также называют *весом* диаграммы Юнга.

**1.** Докажите, что количество разбиений числа $n$ в сумму не более, чем $k$ слагаемых, каждое из которых не превосходит $\ell$, равно количеству разбиений числа $n$ в сумму не более, чем $\ell$ слагаемых, каждое из которых не превосходит $k$.

**Определение 2.** Диаграмма Юнга, полученная симметрией относительно диагонали, называется *сопряженной диаграммой Юнга.*

**2.** Докажите, что количество разбиений числа $n$ в сумму не более, чем $k$ слагаемых, каждое из которых не превосходит $\ell$, равно количеству разбиений числа $k\ell - n$ в сумму не более, чем $k$ слагаемых, каждое из которых не превосходит $\ell$.

**3.** На доске написано несколько натуральных чисел: $a_0$, $a_1$, $a_2$, …, $a_n$. Пишем на второй доске следующие числа: $b_0$ — сколько всего чисел на первой доске; $b_1$ — сколько там чисел, больших единицы; $b_2$ — сколько чисел, больших двойки, и т. д., пока получаются положительные числа. На этом заканчиваем — нули не пишем. На третьей доске пишем числа $c_0$, $c_1$, $c_2$, …, построенные по числам второй доски по тому же правилу, по которому числа $b_0, b_1, b_2, \ldots$ строились по числам первой доски. Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают.

**4.** Петя написал количество разбиений числа $n$ в сумму не более, чем $k$ слагаемых, каждое из которых не превосходит $\ell$, Вася написал количество разбиений числа $n$ в сумму не более, чем $k$ слагаемых, каждое из которых не превосходит $\ell - 1$, а Маша написала количество разбиений числа $n - \ell$ в сумму не более, чем $k - 1$ слагаемых, каждое из которых не превосходит $\ell$. Докажите, что сумма Машиного и Васиного чисел равна числу Пети.

**5.** Рассмотрим всевозможные наборы из 100 неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке и не превосходящие 100, в которых сумма всех чисел кратна 10. Докажите, что ровно половина этих наборов заканчивается на 100.

**6.** Докажите, что что количество разбиения числа $N$ на нечетные слагаемые равно количеству разбиений числа $N$ на попарно различные слагаемые.

**7.** На столе у чиновника Министерства околичностей лежат 2016 томов Британской энциклопедии, сложенной в несколько стопок. Каждый день, придя на работу, чиновник берёт из каждой стопки по одному тому и складывает взятые тома в новую стопку, затем располагает стопки по количеству томов (в невозрастающем порядке) и заполняет ведомость, в которой указывает количество томов в каждой стопке. Кроме этого, чиновник никогда ничего не делает. Докажите, что начиная с некоторого дня, ведомость будет заполняться одинаковыми записями.

## 10. Серия 7, скалярное произведение *7 июля*

**Определение 1.** *Углом между векторами* $\overline{u}$ и $\overline{v}$ называется угол, на который нужно повернуть вектор $\overline{u}$, чтобы он стал сонаправлен вектору $\overline{v}$. По умолчанию угол считается против часовой стрелки.

**Определение 2.** *Скалярным произведением* двух векторов $\overline{v}$ и $\overline{u}$ называется число $|v| \cdot |u| \cdot \cos\alpha$, где $\alpha$ — угол между векторами $\overline{u}$ и $\overline{v}$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

**(a)** симметричность: $(\overline{v_1}, \overline{v_2}) = (\overline{v_2}, \overline{v_1})$;

**(b)** билинейность: $(a\overline{v_1} + b\overline{v_2}, \overline{v_3}) = a(\overline{v_1}, \overline{v_3}) + b(\overline{v_2}, \overline{v_3})$;

**(c)** скалярное произведение равно $x_1x_2 + y_1y_2$, если $\overline{v_1} = (x_1, y_1)$, $\overline{v_2} = (x_2, y_2)$.

**1.** Докажите, что $|\overline{v_1}| = |\overline{v_2}|$ тогда и только тогда, когда $\overline{v_1} - \overline{v_2}$ и $\overline{v_1} + \overline{v_2}$ перпендикулярны.

**2.** Точка $K$ — середина стороны $AB$ квадрата $ABCD$, а точка $M$ лежит на диагонали $AC$, причём $AM : MC = 3 : 1$. Докажите, что угол $KMD$ прямой.

**3.** В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр $BK$ на диагональ $AC$. Точки $M$ и $N$ — середины отрезков $AK$ и $CD$ соответственно. Докажите, что угол $BMN$ прямой.

**4. (a)** Пусть $A$, $B$, $C$ и $D$ — произвольные точки на плоскости. Докажите, что $(\overline{AB}, \overline{CD}) + (\overline{BC}, \overline{AD}) + (\overline{CA}, \overline{BD}) = 0$.

**(b)** Выведите из предыдущего пункта то, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

**5. (a)** Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

**(b)** Докажите, что сумма квадратов сторон произвольного четырехугольника не меньше, чем сумма квадратов его диагоналей, причем равенство достигается только в случае параллелограмма.

**6.** Четыре перпендикуляра, опущенные из вершин выпуклого пятиугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке. Докажите, что пятый такой перпендикуляр тоже проходит через эту точку.

**7.** Дан четырёхугольник с целыми координатами вершин и равными диагоналями. Докажите, что его диагонали не могут пересекаться под углом 45°.

**8.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ $(AB = AC)$ точка $D$ — середина $AB$, $O$ — центр описанной окружности, $M$ — точка пересечения медиан треугольника $ACD$. Докажите, что $CD \perp OM$.

## 11. Серия 9, теорема Безу

*9 июля*

**Определение 1.** *Многочленом* от одной переменной $x$ называется выражение вида $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0$, где $a_n \neq 0$. Число $n$ называется *степенью* этого многочлена, обозначается как $\deg P(x)$. Число $a_n$ называется *старшим коэффициентом*, $a_0$ — свободным членом.

**Замечание.** Степень нулевого многочлена принято считать равной $-\infty$.

**Упр. 1.** Чему равно **(a)** $\deg(P \times Q)$; **(b)** $\deg(P + Q)$; **(c)** $\deg(P(Q(x))$?

**Определение 2.** Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$. Многочлены $P$ и $Q$ *равны формально*, если $m = n$ и $a_i = b_i$ для любого $0 \leqslant i \leqslant n$.

**Определение 3.** Многочлены $P$ и $Q$ *равны функционально*, если их значения равны во всех точках.

**Определение 4.** Скажем, что многочлен $R(x)$ — *остаток от деления* $P(x)$ *на* $Q(x)$, если существует многочлен $H(x)$ такой, что выполнено $P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$, где $\deg(R) < \deg(Q)$.

**Замечание.** Деление многочленов напоминает деление целых чисел друг на друга, только вместо разрядов выступают одночлены.

**Упр. 2.** Докажите, что остаток и частное при делении многочлена $P(x)$ на $Q(x)$ определяются однозначно.

**Определение 5.** Число $a$ — *корень* многочлена $P$, если $P(a) = 0$.

**Теорема Безу.** Пусть $P(x)$ при делении на $x - a$ дает остаток $R(x)$. Докажите, что

**(a)** $R$ — константа;

**(b)** $R = P(a)$;

**(c)** Если $a$ — корень многочлена $P$, то $R = 0$, а значит $P(x) = (x-a)H(x)$ для некоторого многочлена $H(x)$.

**Упр. 3.** Докажите, что если $P(x) = 0$ для любого $x$, то $P \equiv 0$ (под «$\equiv$» понимается формальное равенство многочленов).

**Упр. 4.** Докажите равносильность формального и функционального равенства многочленов.

**1.** Какой остаток дает $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ при делении на $x - 1$?

**2.** Докажите, что у многочлена $n$-й степени не более $n$ корней.

**3.** Многочлен $P(x)$ таков, что $P(x^5) \,\vdots\, x - 1$. Докажите, что

**(a)** $P(x) \,\vdots\, x - 1$; **(b)** $P(x^5) \,\vdots\, x^5 - 1$.

**4.** Существует ли многочлен, функционально равный выражению

**(a)** $|x|$; **(b)** $\sqrt[3]{3x^2 + x}$; **(c)** $(x^4 + 1)/(x^2 + 1)$; **(d)** $(x^2 - 3x + 2)/(x - 1)$?

**5.** Многочлен $P$ дает остаток 2 при делении на $x-1$ и остаток 1 при делении на $x - 2$. Какой остаток дает $P$ при делении на многочлен $(x - 1)(x - 2)$?

**6.** Многочлен $P(x)$ таков, что $P(x) = P(x + 1)$. Докажите, что $P(x)$ — константа.

**7.** Найдите остаток при делении многочлена $x^{100} - 8x^{97} - 5x^{17} + 10x^{16} + x^2 - 2x + 1$ на $x^2 - 3x + 2$.

**8.** Найти все многочлены $P$, для которых верно $xP(x - 1) \equiv (x - 26)P(x)$.

## 12. Серия 10, массивная *9 июля*

**Определение 1.** Пусть $M$ — некоторая точка плоскости и $m$ — ненулевое число. *Материальной точкой* $(m, M)$ называется точка $M$ с числом $m$.

**Определение 2.** *Центром масс* системы материальных точек $(m_1, M_1)$, $(m_2, M_2)$, ..., $(m_n, M_n)$ с ненулевой суммой масс называется такая точка $Z$, для которой имеет место равенство

$$m_1\overline{ZM_1} + m_2\overline{ZM_2} + \ldots + m_n\overline{ZM_n} = \overline{0}.$$

**Основная теорема.** Если точка $Z$ является центром масс системы материальных точек $(m_1, M_1)$, $(m_2, M_2)$,..., $(M_n, m_n)$, причем $m_1+m_2+\ldots+m_n \neq 0$, то для любой точки $O$ справедливо равенство

$$\overline{OZ} = \frac{m_1\overline{OM_1} + m_2\overline{OM_2} + \ldots + m_n\overline{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Обратно, если для некоторой точки $O$ выполняется это равенство, то точка $Z$ — центр масс данной системы материальных точек.

**Правило группировки.** Пусть дана система материальных точек $(m_1, M_1)$, $(m_2, M_2)$, $\ldots$, $(m_n, M_n)$, и пусть точка $O$ — центр масс системы, состоящей из первых $k$ материальных точек данной системы. Тогда центр масс данной системы совпадает с центром масс системы материальных точек $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k, O), (m_{k+1}, M_{k+1}), \ldots (m_n, M_n)$.

**1.** $A_1, A_2, \ldots, A_6$ — середины последовательных сторон шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ совпадают.

**2.** В параллелограмме $ABCD$ на сторонах $BC$ и $CD$ взяты точки $M$ и $N$ так, что $BM : MC = CN : ND$. Докажите, что центр масс треугольника $AMN$ лежит на диагонали $BD$.

**3.** Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.

**4.** На плоскости дан треугольник $ABC$ и отмечена точка $O$. Докажите, что в вершины треугольника можно поставить такие массы, чтобы их центр попал в точку $O$.

**Определение 3.** *Отношением* двух **коллинеарных** векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число $k = \frac{|a|}{|b|}$, взятое со знаком «+», если вектора сонаправлены, и взятое со знаком «−» в противном случае.

**5.** При помощи масс докажите **теорему Чевы**. На сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$, или на их продолжениях отмечены точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ соответственно. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ *конкурентны* (т. е. либо параллельны, либо пересекаются в одной точке) равносильно

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1.$$

**6.** Старый пират зарыл клад на острове среди 20 деревьев. После этого он написал завещание, в котором указал, как искать клад: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, затем повернуть к четвертому и пройти четверть расстояния до него, и т.д., наконец, повернуть к двадцатому и пройти двадцатую часть расстояния до него. К сожалению, пират забыл указать, как занумерованы деревья! Сколько разных ям придется выкопать потомкам пирата, чтобы всё-таки найти клад?

**7.** В вершине $A_1$ выпуклого $n$-угольника $A_1 A_2 \ldots A_n$ стоит точечный робот. На $i$-м шаге робот может переместиться в любую точку отрезка, соединяющего его и вершину $A_j$, где $j \equiv i \pmod{n}$. Докажите, что не более чем за $n-1$ шаг робот сможет добраться до любой точки многоугольника.

**8.** На плоском столе лежат несколько комаров и мух. Известно, что для любых четырех предметов можно накрыть те из них, что являются мухами, длинной скатертью с прямым краем, не задев комаров. Докажите, что можно накрыть этой скатертью всех мух, не задев комаров.

**9.** На окружности расположены $n$ точек с единичными массами. Вася выбирает произвольные $n-2$ из них, рисует их центр масс и опускает из него перпендикуляр на прямую, проходящую через две оставшиеся точки. Докажите, что все Васины прямые пройдут через одну точку.

**10.** Три мухи равной массы ползали по сторонам треугольника так, что одна из мух проползла по всей границе треугольника, а центр их масс все время оставался на месте. Докажите, что он все время совпадал с центром тяжести треугольника.

## 13. Серия 11, триангуляции

*9 июля*

**1.** В выпуклом 2018-угольнике провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри 2018-угольника. В результате 2018-угольник разделился на 2016 треугольников. Могло ли случиться, что ровно у половины треугольников все стороны являются диагоналями этого 2018-угольника?

**2.** На доске нарисовали выпуклый многоугольник. В нем провели несколько непересекающихся диагоналей так, что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, примыкающих к этой вершине, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стертые диагонали?

**3.** Сколько остроугольных треугольников может быть в триангуляции правильного 2018-угольника?

**4.** Докажите, что выпуклый многоугольник можно триангулировать на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

**5.** Выпуклый 100-угольник триангулирован, и треугольники раскрашены в шахматном порядке. Какова наибольшая разность между количеством черных и белых треугольников?

**6.** Выпуклый $n$-угольник триангулирован. Разрешается проделывать следующее преобразование *flip*: взяв пару треугольников $ABD$ и $BCD$ с общей стороной, заменить их на треугольники $ABC$ и $ACD$.

**(a)** Докажите, что при помощи *flip*-ов из любой триангуляции можно получить любую другую.

**(b)** Пусть $f(n)$ — наименьшее число *flip*-ов, за которое можно перевести каждое разбиение в любое другое. Докажите, что $f(n) \geqslant n-3$.

**(c)** Докажите, что $f(n) \leqslant 2n-7$.

**7.** Найдите все такие $n$, при которых для правильного $n$-угольника существует триангуляция, в которой все треугольники являются равнобедренными.

## 14. Серия 12, показательная

*10 июля*

**Определение 1.** Пусть НОД$(a, m) = 1$. *Показателем* числа $a$ по модулю $m$ называется наименьшее натуральное $d$ такое, что $a^d \equiv 1 \pmod m$.

*Обозначение* $\operatorname{ord}_m a$ происходит от английского слова *order*.

**Упр. 1.** Докажите, что показатель существует.

**Упр. 2.** Пусть $\operatorname{ord}_m a = d$. Докажите, что тогда

**(a)** числа $a, a^2, \ldots, a^d$ попарно не сравнимы по модулю $m$;

**(b)** $a^{d_1} \equiv a^{d_2} \pmod m$ тогда и только тогда, когда $d_1 \equiv d_2 \pmod d$;

**(c)** $d$ является делителем числа $\varphi(m)$.

**Упр. 3.** Найдите $\operatorname{ord}_{a^n-1}(a)$.

**Упр. 4.** Докажите, что если для натурального $k$ выполнено $a^k \equiv 1 \pmod m$, то $k \,\vdots\, \operatorname{ord}_m a$.

**1.** Докажите, что показатели взаимно обратных чисел совпадают.

**2.** Пусть $\operatorname{ord}_m a = d$. Докажите, что тогда

**(a)** если $d \,\vdots\, h$, то показатель числа $a^h$ по модулю $m$ равен $\frac{d}{h}$;

**(b)** если $k$ является показателем числа $b$ по модулю $m$ и НОД$(k, d) = 1$, то $dk$ является показателем числа $ab$ по модулю $m$.

**3.** Рассмотрим все числа вида $10^i - 10^j$ при $0 \leqslant i < j \leqslant 99$. Сколько из них делятся на 1001?

**4.** Дано нечетное простое число $p$, а также простые числа $q$ и $r$. Известно, что $q^r + 1 \,\vdots\, p$. Докажите, что либо $p - 1 \,\vdots\, 2r$, либо $q^2 - 1 \,\vdots\, p$.

**5.** Сколько делителей от 1 до 200 имеет число $2^{239} - 1$?

**6.** Пусть $N$ — произведение первых ста простых чисел. Сравнимо ли $2^N$ с единицей по модулю 17?

**7.** Дано простое число $p$. Докажите, что $2^{2^p} - 4$ делится на $2^p - 1$.

**8.** Даны натуральные числа $a, n > 1$. Докажите, что для каждого нечетного простого делителя $p$ числа $a^{2^n} + 1$ число $p - 1$ делится на $2^{n+1}$.

**9.** Докажите, что при натуральном $n > 1$ число $2^n - 1$ не делится на $n$.

**10.** Найдите все пары простых чисел $p$ и $q$ таких, что $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q) \vdots pq$.

## 15. Серия 13, принципиальная *10 июля*

**1.** На праздник пришли $n$ мальчиков и $n$ девочек. Каждому мальчику нравится $a$ девочек и каждой девочке нравится $b$ мальчиков. Найдите все пары $(a, b)$, при которых обязательно найдутся мальчик и девочка, нравящиеся друг другу.

**2.** Дано натуральное $n \geqslant 2$. На встрече за круглым столом сидят представители $n$ стран. Известно, что для любых двух человек из одной страны их соседи справа принадлежат разным странам. Найдите наибольшее количество человек, которые могут сидеть за столом.

**3.** Ребра полного графа на 17 вершинах раскрашены в 3 цвета. Докажите, что в нем найдется одноцветный треугольник.

**4.** Выбрано $n + 1$ число из множества $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

**5.** В ряд выписано $ab + 1$ различных чисел. Докажите, что найдется или возрастающая последовательность из $a + 1$ числа, или убывающая последовательность из $b + 1$ числа.

**6.** Школьники участвовали в олимпиаде, проходящей в два тура. В каждый из двух дней они рассаживались по нескольким кабинетам, при этом никто не сидел в кабинете в одиночестве. Количество кабинетов в разные дни олимпиады может отличаться. Докажите, что найдутся два школьника $A$ и $B$ такие, что в первый день $A$ и $B$ писали олимпиаду в кабинетах с одинаковым количеством участников, и во второй день $A$ и $B$ писали олимпиаду в кабинетах с одинаковым количеством участников.

**7.** В трех школах Default-city учится по 100 человек. Любые двое либо знакомы, либо не знакомы. Докажите, что можно выбрать двух школьников $A$ и $B$ из разных школ так, чтобы среди учащихся оставшейся школы нашлось либо 17 человек, каждый из которых знает и $A$, и $B$, либо 17 человек, каждый из которых не знает ни $A$, ни $B$.

**8.** Дана клетчатая доска $100 \times 100$. Клетки доски покрашены в 4 цвета так, что в каждой строке и в каждом столбце ровно 25 клеток каждого цвета. Докажите, что найдутся 2 строки и 2 столбца, клетки на пересечении которых окрашены в 4 различных цвета.

# 16. Серия 14, гомотетия

*10 июля*

*Гомотетией* с центром $O$ и коэффициентом $k \neq 0$ называется такое преобразование плоскости, что образ $A'$ произвольной точки $A$ удовлетворяет соотношению $\overline{OA'} = k\overline{OA}$.

**1.** На каждом из оснований $AD$ и $BC$ трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

**2.** Внутри угла отмечена точка. Постройте окружность, проходящую через заданную точку и касающуюся сторон данного угла.

**3.** С помощью циркуля и линейки впишите квадрат в данный треугольник так, чтобы одна из сторон квадрата лежала на основании треугольника, а противоположные этой стороне вершины — на боковых сторонах.

**4.** Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

**5.** Две окружности касаются внешним образом в точке $P$. Прямая касается одной из них в точке $A$ и пересекает другую в точках $B$ и $C$. Докажите, что $PA$ — биссектриса внешнего угла $P$ треугольника $PBC$.

**6.** На окружности даны точки $A$ и $B$. На окружности берется произвольная точка $M$ и из середины отрезка $BM$ проводится перпендикуляр к прямой $AM$. Докажите, что этот перпендикуляр проходит через некоторую точку, не зависящую от выбора точки $M$.

**7.** На лугу, имеющем форму квадрата, имеется круглая лунка. По лугу прыгает кузнечик. Перед каждым прыжком он выбирает вершину и прыгает по направлению к ней. Длина прыжка равна половине расстояния до этой вершины. Сможет ли кузнечик попасть в лунку?

**8.** $ABCD$ — параллелограмм. Окружности $k_1$ и $k_2$ касаются внешним образом, причем $k_1$ вписана в угол $BAD$, $k_2$ — в угол $BCD$. Докажите, что при любом способе выбора таких окружностей линия центров окружностей параллельна одной прямой.

**9.** Дан треугольник $ABC$. Точка $A_1$ симметрична точке касания стороны $BC$ со вписанной окружностью относительно биссектрисы угла $A$. Аналогично определяются точки $B_1$ и $C_1$.

**(a)** Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке.

**(b)** Докажите, что эта точка лежит на одной прямой с центрами вписанной и описанной окружностей треугольника $ABC$.

**10.** Дана окружность и точка $P$ внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке $P$. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

## 17. Серия 15, многочлены над $\mathbb{Z}$ *11 июля*

Сегодня мы будем рассматривать многочлены с целыми коэффициентами. Множество всех многочленов с целыми коэффициентами обозначается как $\mathbb{Z}[x]$.

**1.** Докажите, что если рациональное число является корнем ненулевого унитарного (то есть со старшим коэффициентом 1) многочлена с целыми коэффициентами, то это число — целое.

**2.** Докажите, что число $\sqrt[10]{10}$ иррационально.

**3. Теорема о рациональном корне.** Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $\frac{p}{q}$ — его корень, $p \in \mathbb{Z}, q \in N$, НОД$(p, q) = 1$. Тогда

**(a)** $a_0 \,\vdots\, p$; **(b)** $a_n \,\vdots\, q$.

**4.** Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что при целых $a$ и $b$ выполнено $P(a) - P(b) \,\vdots\, a - b$.

**5.** Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причем для некоторого целого числа $n$ числа $P(n)$, $P(n+1)$ и $P(n+2)$ делятся на 3. Докажите, что тогда $P(k)$ делится на 3 для любого целого $k$.

**6.** Дан многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Известно, что $P(2) \,\vdots\, 6$ и $P(3) \,\vdots\, 6$. Докажите, что $P(5) \,\vdots\, 6$.

**7.** $P(x)$ — многочлен, $P(7) = 11$, $P(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из коэффициентов $P$ не является целым.

**8.** Приведите пример многочлена $P(x)$, делящегося на $x^2 + 1$ такого, что $P(x) - 1$ делится на $x^3 + 1$.

**9.** Многочлен с целыми коэффициентами принимает значение 5 при пяти различных целых значениях $x$. Докажите, что у него нет целых корней.

**10.** Целые числа $a$, $b$, $c$ попарно различны. Докажите, что не существует многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ со свойством: $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$.

**11.** Дан непостоянный многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что не может быть так, что все его значения в натуральных точках, начиная с некоторого места, простые.

# 18. Серия 16, конечное и бесконечное *11 июля*

**Определение 1.** Говорят, что величина может быть *сколь угодно большой*, если для любого натурального $N$ существует значение величины, превосходящее $N$.

**Пример.** Существует сколь угодно много подряд идущих составных чисел, но бесконечного количества подряд идущих составных чисел не существует.

**1. (a)** Продлим шахматную доску вправо и влево на миллион клеток. Король стоит на средней клетке нижней горизонтали. Может ли он обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно один раз?

**(b)** Тот же вопрос, если доску продлили вправо и влево до бесконечности.

**2.** Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

**3.** Круг разделен на 2018 секторов, и в каждом написано целое число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе, где стоит фишка (пусть прочитано $k$), фишка сдвигается на $|k|$ секторов по часовой стрелке, и там, куда она придет, число увеличивается на 1. Докажите, что со временем все числа станут больше миллиона.

**4.** Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 метров. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на $a$ метров у себя и на $b$ метров у соперника», где $a$, $b$ — вещественные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе

**(a)** конечно; **(b)** бесконечно?

**5.** Дана клетчатая доска $100 \times 100$. В каждой клеточке нарисована стрелочка в одном из 4 направлений: вниз, вверх, влево, вправо. Граница доски огорожена стеной, имеющей лишь один выход: верхнюю сторону правой верхней клетки. Жука ставят в одну из клеток. Каждую секунду жук переползает по направлению стрелочки в его текущей клетке в одну из соседних по стороне. При этом стрелочка в той клетке, откуда жук только что уполз, поворачивается на $90^\circ$ по часовой стрелке. Если двигаться в том направлении, в котором указывает стрелка, нельзя, жук остается в той же клетке, но стрелка все равно поворачивается. Возможна ли ситуация, при которой жук никогда не покинет пределы доски?

**6.** Тор и Локи играют в игру. Они по очереди выписывают цифры в последовательности. Тор пишет любое число цифр, какое захочет, а Локи — только одну. Тор хочет, чтобы последовательность получилась периодической, а Локи пытается ему помешать. Кто выигрывает при правильной игре?

**7.** Назовём *сочетанием цифр* несколько цифр, записанных подряд. Некоторые сочетания цифр объявлены запрещёнными. Известно, что существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещённых сочетаний. Верно ли что тогда найдётся бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещённых сочетаний, если

**(a)** число запрещённых сочетаний конечно;

**(b)** число запрещённых сочетаний бесконечно?

## 19. Серия 17, скалярное–2

*12 июля*

**1.** Точки $M$ и $N$ — середины отрезков $AC$ и $BD$ соответственно. Докажите, что $4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2$.

**2.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB+CD = \sqrt{2}AC$ и $BC + AD = \sqrt{2}BD$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

**3.** Точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой. Найдите ГМТ $M$ таких, что $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MB} \cdot \overline{MC} = \overline{MA} \cdot \overline{MC}$.

**4.** Дано 8 действительных чисел: $a, b, c, d, e, f, g, h$. Докажите, что хотя бы одно из 6 чисел $ac+bd, ae+bf, ag+bh, ce+df, cg+dh, eg+fh$ неотрицательно.

**5.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ на основании $AC$ выбрана точка $P$. Точки $X$ и $Y$ на сторонах $AB$ и $BC$ соответственно таковы, что $PX \parallel BC$, $PY \parallel AB$. Точка $K$ — середина дуги $AC$ (не содержащей точку $B$) описанной окружности треугольника $ABC$. Докажите, что $KP \perp XY$.

**6.** Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. На сторонах $BC$ и $CD$ выбраны соответственно точки $F$ и $E$ так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

**7.** Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — правильный $n$-угольник, $X$ — произвольная точка. Рассмотрим проекции $X_1, \ldots, X_n$ точки $X$ на прямые $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$. Пусть $x_i$ — длина отрезка $A_iX_i$ с учётом знака (знак плюс берётся в случае, когда лучи $A_iX_i$ и $A_iA_{i+1}$ сонаправлены). Докажите, что сумма $x_1 + \ldots + x_n$ равна половине периметра многоугольника $A_1 \ldots A_n$.

**8.** Дан выпуклый многоугольник. Каким может быть ГМТ $P$, лежащих внутри многоугольника, таких, что сумма расстояний от $P$ до прямых, содержащих стороны, равна 1?

# 20. Внутрипрофный матбой

*12 июля*

**1.** Пусть $a, b, c, d$ — положительные вещественные числа с суммой $a+b+c+$ $+d=2$. Докажите неравенство
$$\frac{(a+c)^2}{ad+bc}+\frac{(b+d)^2}{ac+bd}+4 \geqslant 4\left(\frac{a+b+1}{c+d+1}+\frac{c+d+1}{a+b+1}\right).$$

**2.** Пусть $r$ — натуральное число. Докажите, что если граф на $n$ вершинах не содержит простых циклов длины $2r$ или меньше, то он содержит не более $n^{2017}$ простых циклов длины ровно $2017r$.

**3.** Внутри треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Оказалось, что окружности $S_1$ и $S_2$, вписанные в треугольники $ABD$ и $CBD$ соответственно, касаются друг друга. Обозначим через $K$ точку пересечения общих внешних касательных к $S_1$ и $S_2$. Докажите, что $K$ лежит на прямой $AC$.

**4.** Найдите все такие составные числа $n$, что для любого разложения на два натуральных сомножителя $n=xy$ сумма $x+y$ является степенью двойки.

**5.** Какое наибольшее количество ферзей можно расставить на доске $2017\times$ $\times 2017$ таким образом, чтобы каждый ферзь бил не более одного из остальных ферзей?

**6.** Пусть $a$ — натуральное число. Оказалось, что для всех $n$ существует натуральное $d \neq 1$, что $d \equiv 1 \pmod n$ и $n^2a-1$ делится на $d$. Докажите, что $a$ — точный квадрат.

**7.** Дан остроугольный треугольник $ABC$. В нем отметили точку $P$, из которой опустили перпендикуляры $PA_1, PB_1, PC_1$ на стороны $BC, AC, AB$ соответственно. Прямая $B_1C_1$ пересекает $BC$ в точке $X$. Точка $A_2$ — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ с $BC$. Докажите, что $XP \perp AA_2$.

**8.** Простое $p$ и натуральные $x$ и $y$ удовлетворяют условиям
$$p=\frac{2x^2-1}{7}=2y^2-1.$$
Найдите все такие тройки чисел $p$, $x$, $y$.

**9.** Чебурашка свалился в кольцевую канаву длины 1. Он знает, что в этой канаве расположены 2016 бутылок, и знает, где именно они (и он сам) находятся. При каком наименьшем $\ell$ ему достаточно проползти по канаве расстояние $\ell$, чтобы собрать все эти бутылки, при любом расположении Чебурашки и бутылок?

**10.** Таблица состоит из $n$ строк и 10 столбцов. В каждой клетке таблицы написана цифра. Известно, что для каждой строки $A$ и каждой пары столбцов $B$ и $C$ существует строка, отличающаяся от $A$ в точности в столбцах $B$ и $C$. Докажите, что $n \geqslant 512$.

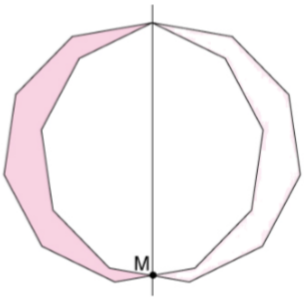
# 21. Матбой 3/4 профи

*12 июля*

**1.** Даны натуральные числа $a$, $b$, $c$, $d$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left[\frac{a+b+c}{d}\right]+\left[\frac{a+b+d}{c}\right]+\left[\frac{a+c+d}{b}\right]+\left[\frac{b+c+d}{a}\right].$$

**2.** Пусть $r$ — натуральное число. Докажите, что если граф на $n$ вершинах не содержит простых циклов длины $2r$ или меньше, то он содержит не более $n^{2017}$ простых циклов длины ровно $2017r$.




**3.** Два правильных десятиугольника площади 80 расположены как на рисунке ($M$ — середина сторон). Найдите площадь закрашенной части.

**4.** Какое наибольшее количество ферзей можно расставить на доске $2017 \times 2017$ таким образом, чтобы каждый ферзь бил не более одного из остальных ферзей?

**5.** Пусть $a$ — натуральное число. Оказалось, что для всех $n$ существует натуральное $d \neq 1$, что $d \equiv 1 \pmod{n}$ и $n^2a-1$ делится на $d$. Докажите, что $a$ — точный квадрат.

**6.** Числа от 2 до 2018 разбиваются на несколько групп так, что наибольший общий делитель двух чисел из одной группы никогда не лежит в той же группе. Какое наименьшее количество групп для этого нужно?

**7.** Дан остроугольный треугольник $ABC$. В нем отметили точку $P$, из которой опустили перпендикуляры $PA_1, PB_1, PC_1$ на стороны $BC, AC, AB$ соответственно. Прямая $B_1C_1$ пересекает $BC$ в точке $X$. Точка $A_2$ — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ с $BC$. Докажите, что $XP \perp AA_2$.

**8.** Таблица состоит из $n$ строк и 10 столбцов. В каждой клетке таблицы написана цифра. Известно, что для каждой строки $A$ и каждой пары столбцов $B$ и $C$ существует строка, отличающаяся от $A$ в точности в столбцах $B$ и $C$. Докажите, что $n \geqslant 512$.

# 22. Серия 18, множественная

*14 июля*

**1.** В одном городе много геометрических кружков, каждые два кружка имеют хотя бы одного общего человека. Докажите, что можно каждому жителю города дать линейку либо циркуль, и лишь одному жителю дать и то и другое так, чтобы в каждом кружке были и циркуль, и линейка.

**Определение 1.** Будем говорить, что семейство множеств *прибито $n$ гвоздями*, если выбрано $n$ элементов так, что в каждом множестве есть хотя бы один выбранный элемент.

**2.** **(a)** Пусть дано семейство двухэлементных множеств. Среди любых $p = 3$ множеств хотя бы 2 имеют общий элемент. Всегда ли можно прибить это семейство двумя гвоздями?

**(b)** Каким минимальным количеством гвоздей можно гарантированно прибить это семейство?

**(c)** Та же задача для произвольного $p$.

**3.** **(a)** Пусть дано семейство двухэлементных множеств. Среди любых $p = 3$ множеств хотя бы 2 имеют общий элемент. Всегда ли можно разбить это семейство на 3 подсемейства так, чтобы в каждом подсемействе любые два множества пересекались?

**(b)** На какое минимальное количество подсемейств можно гарантированно разбить это семейство, чтобы в каждом подсемействе любые два множества пересекались?

**(c)** Та же задача для произвольного $p$.

**4.** Для изготовления магического жезла надо знать 20 заклинаний. Каждый маг знает 5 заклинаний. При этом магов так много, что любой возможный набор из пяти заклинаний известен какому-то магу. Какое наименьшее число отрядов магов можно создать так, чтобы ни в одном отряде не смогли сделать магический жезл силами магов этого отряда?

**5.** Для того, чтобы открыть волшебную дверь, нужно произнести $n$ заклинаний. Каждый из 9 магов знает некоторые из них. Известно, что группа магов может открыть волшебную дверь тогда и только тогда, когда в ней не менее 6 магов. Каково наименьшее возможное $n$?

**6.** Пусть дано семейство двухэлементных множеств. Среди любых $p$ множеств хотя бы $q$ имеют общий элемент. Каким минимальным количеством гвоздей можно гарантированно прибить это семейство?

**7.** Выбрано $k > 1$ подмножеств $n$-элементного множества $A$. Известно, что каждая пара элементов из $A$ принадлежит ровно одному выбранному подмножеству. Докажите, что $k \geqslant n$.

## 23. Серия 19, показатели–2 *14 июля*

**1.** Докажите, что для всех натуральных $a, n > 1$ выполнено $\varphi(a^n - 1) \vdots n$.

**2.** Даны натуральные числа $a$ и $b$, взаимно простые с числом $m$. При этом оказалось, что $a^x \equiv b^x \pmod{m}$ и $a^y \equiv b^y \pmod{m}$. Докажите, что $a^{\text{НОД}(x,y)} \equiv b^{\text{НОД}(x,y)} \pmod{m}$.

**3.** Даны взаимно простые числа $a$ и $b$. Докажите, что для любого нечетного делителя $d$ числа $a^{2^n} + b^{2^n}$ выполнено $d - 1 \vdots 2^{n+1}$.

**4.** Докажите, что для натурального $n > 1$ число $2^{n-1} + 1$ не делится на $n$.

**5.** Найдите все упорядоченные тройки простых чисел $(p, q, r)$ таких, что

$$p^q + 1 \vdots r, q^r + 1 \vdots p, r^p + 1 \vdots q.$$

**6.** Найдите все пары простых чисел $p$ и $q$ таких, что $5^p + 5^q \vdots pq$.

**7.** Найдите наименьшее $n$ такое, что $17^n - 1$ делится на $2^{2005}$.

**8.** Дано число $p = 2^n + 1$, где $n \geqslant 2$. Докажите, что если $3^{(p-1)/2} + 1 \vdots p$, то число $p$ — простое.

## 24. Серия 20. Окружность Аполлония *14 июля*

**1.** Дан отрезок $AB$ и число $k > 0$. Найдите ГМТ $C$ таких, что $\frac{AC}{BC} = k$.
*Подсказка.* Посчитайте в координатах.

**Определение 1.** Полученное ГМТ называется *окружностью Аполлония.*

**2.** На прямой даны четыре точки $A$, $B$, $C$ и $D$ в указанном порядке. Постройте такую точку $X$, из которой отрезки $AB$, $BC$ и $CD$ видны под равными углами.

**Обозначение.** Пусть $s$ — описанная окружность остроугольного неравнобедренного треугольника $ABC$, $O$ — ее центр. Пусть $s_b$ — окружность Аполлония, определенная точками $A$ и $C$ и проходящая через вершину $B$. Аналогично определим окружности $s_a$ и $s_c$.

**3.** Пусть окружность $s_b$ пересекает описанную окружность треугольника $ABC$ в точках $B$ и $D$, $M$ — середина $AC$. Докажите, что лучи $BD$ и $BM$ симметричны относительно биссектрисы угла $B$.

**Определение 2.** Пересекающиеся окружности называются *ортогональными*, если касательные к ним в точке пересечения перпендикулярны.

**4.** Докажите, что $s$ и $s_b$ ортогональны.

**5.** Рассмотрим окружность Аполлония, определенную любыми двумя вершинами треугольника $ABC$ и произвольным отношением $k > 0$. Докажите, что точка $O$ имеет относительно всех таких окружностей одинаковую степень. Какую?

**6.** Докажите, что $s_a$, $s_b$ и $s_c$ проходят через две некоторые точки $X$ и $Y$. Более того, точка $Y$ лежит на луче $OX$ и $OX \cdot OY = R^2$, где $R$ — радиус $s$.

**7.** Пусть точка $X$ (см. задачу **6**) лежит внутри треугольника $ABC$. Докажите, что проекции точки $X$ на стороны треугольника $ABC$ являются вершинами равностороннего треугольника.

**Определение 3.** Точки $P$ и $Q$ называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника $ABC$, если лучи $AP$ и $AQ$ симметричны относительно биссектрисы угла $A$, лучи $BP$ и $BQ$ симметричны относительно биссектрисы угла $B$, лучи $CP$ и $CQ$ симметричны относительно биссектрисы угла $C$.

**8.** Докажите, что точка $X$ изогонально сопряжена точке Торричелли (т. е. точке, из которой все стороны видны под углом $120°$).

## 25. Серия 21, разложение *15 июля*

Мы хорошо знаем, что каждое натуральное число можно представить *единственным* образом в виде произведения простых, с точностью до перестановки множителей. Попробуем доказать аналогичный факт для многочленов.

**Определение 1.** Многочлен называется *приводимым* над $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$), если он раскладывается в виде произведения двух многочленов меньшей степени с коэффициентами из $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$). В противном случае многочлен называется *неприводимым* над $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$).

**Упр. 1.** Является ли многочлен $x^3 - 2$ приводимым **(a)** над $\mathbb{Q}$; **(b)** над $\mathbb{R}$ **(c)** над $\mathbb{Z}_7$?

Неприводимые многочлены будут выполнять роль простых чисел в разложении многочленов.

**Определение 2.** *Общим делителем* двух многочленов $P$ и $Q$ называется такой многочлен $D$, если $P \vdots D$ и $Q \vdots D$.

**Определение 3.** *Наибольшим общим делителем* двух многочленов $P$ и $Q$ называется общий делитель $D$, делящийся на любой другой делитель многочленов $P$ и $Q$.

**1.** Докажите с помощью алгоритма Евклида, что НОД двух многочленов всегда существует, кроме случая, когда оба многочлена равны 0.

**Упр. 2.** Как связаны между собой все НОДы двух многочленов?

**Упр. 3.** Дан многочлен $P$ и неприводимый многочлен $Q$. Чему может быть равен НОД$(P, Q)$?

**2.** Даны натуральные числа $n$ и $k$. Найдите НОД$(x^{2^n} + 1, x^{2^k} + 1)$.

**3. Теорема о линейном представлении НОД для многочленов.** Для любых многочленов $P$ и $Q$ существуют такие многочлены $A$ и $B$, что $PA + QB =$ $=$ НОД$(P, Q)$.

**4.** Пусть $PQ \vdots H$, при этом НОД$(P, H) = 1$. Докажите, что $Q \vdots H$.

**5. Основная теорема арифметики для многочленов.** Любой унитарный многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ может быть единственным образом разложен в виде произведения неприводимых унитарных многочленов из $\mathbb{R}[x]$ с точностью до перестановки сомножителей.

**6.** Даны многочлены $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$. Рассмотрим НОДы этих многочленов над $\mathbb{Q}$ и над $\mathbb{R}$. Докажите, что эти НОДы отличаются домножением на константу.

**7.** Разложите $x^{12} - 1$ на 5 сомножителей ненулевой степени с целыми коэффицинтами.

**8.** У многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$ есть корень $\sqrt[3]{3}$. Докажите, что этот многочлен делится на $x^3 - 3$.

**9.** Даны взаимно простые многочлены $P$ и $Q$ с целыми коэффициентами, то есть НОД$(P, Q) = 1$ над $\mathbb{R}$. Докажите, что существует такая константа $C$, что для любого целого $k$ выполнено НОД$(P(k), Q(k)) < C$.

## 26. Серия 22, выделяем бесконечное *15 июля*

**1.** Можно ли переставить множество чисел натурального ряда так, чтобы сумма двух соседних чисел была составным числом?

**2.** За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста, причём рост каждого составляет натуральное число сантиметров. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания.

**3.** Докажите, что множество чисел натурального ряда можно переставить так, чтобы сумма первых $n$ чисел делилась на $n$ при любом натуральном $n$.

**4.** Множество натуральных чисел разбито на бесконечные арифметические прогрессии с разностями $d_1$, $d_2$, $\ldots$.

(**a**) Докажите, что если число прогрессий конечно, то $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots = 1$.

(**b**) Верно ли утверждение пункта (**a**), если число прогрессий бесконечно?

**5.** Можно ли расставить в клетки бесконечной клетчатой плоскости натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз, и чтобы любые два числа из одной строки или одного столбца были взаимно простыми?

**6.** Множество натуральных чисел разбито на две части $A$ и $B$. Известно, что $A$ не содержит трехчленной арифметической прогрессии. Может ли случиться так, что $B$ не содержит бесконечной арифметической прогрессии?

**7.** Существует ли такая последовательность $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$ натуральных чисел, что каждое натуральное число представляется единственным образом в виде разности двух чисел из $M$?

**8.** Докажите, что множество чисел натурального ряда можно переставить так, чтобы сумма первых $k$ чисел делилась на $k+1$-е поставленное число.

## 27. Серия 23, гомотетия–2 *15 июля*

*Утверждение.* Рассмотрим взаимнооднозначное преобразование плоскости $F$ такое, что для любых точек плоскости $X, Y$ выполняется $\overline{F(X)F(Y)} = k\overline{XY}$ при $k \neq 0$.

**1.** Докажите, что вышеупомянутое преобразование — это либо гомотетия с коэффициентом $k$ при $k \neq 1$, либо параллельный перенос при $k = 1$.

**2. Теорема о композиции гомотетий.** Даны точки на плоскости $O_1$ и $O_2$ и числа $k_1$ и $k_2$, не равные 0 и 1. Докажите, что композиция гомотетий с центром $O_1$, коэффициентом $k_1$ и с центром $O_2$, коэффициентом $k_2$ есть

- параллельный перенос с вектором, параллельным $O_1O_2$, если $k_1k_2 = 1$;
- гомотетия с центром на прямой $O_1O_2$, если $k_1k_2 \neq 1$.

**3.** Трапеции $ABCD$ и $ADPQ$ имеют общее основание. Докажите, что точки пересечения прямых $AB$ и $CD$, $AP$ и $DQ$, $BP$ и $CQ$ (все точки пересечения существуют) коллинеарны.

**4. Теорема о трех колпаках.** Есть три попарно непересекающиеся окружности попарно различных радиусов. К любым двух из них проведены две общие внешние касательные, которые пересекаются в точке. Докажите, что полученные три точки лежат на одной прямой.

**5. Теорема Менелая.** На сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$, или на их продолжениях, отмечены точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ соответственно. Докажите, что точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

**6.** Треугольник $ABC$ находится внутри окружности $\omega$. Окружность $\omega_A$ касается продолжений сторон $AB$ и $AC$ за точку $A$ и окружности $\omega$ внутренним образом в точке $A_1$; аналогично определяются окружности $\omega_B$, $\omega_C$ и точки $B_1$, $C_1$. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке.

**7.** Внутри треугольника даны 4 равных окружности. Три из них касаются трех разных пар сторон треугольника, а четвертая — трех остальных внешним образом. Докажите, что центр четвертой окружности лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей исходного треугольника.

**8.** Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть $P$ и $Q$ — точки пересечения лучей $BA$ и $CD$, $BC$ и $AD$ соответственно, а $H$ — проекция $D$ на $PQ$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников $ADP$ и $CDQ$ видны из точки $H$ под равными углами.

## 28. Серия 24, квадратичная *16 июля*

Попробуем решить сравнение $x^2 \equiv 2 \pmod 7$. Операции извлечения корня как таковой при работе над сравнениями у нас нет, поэтому просто подберем корень $x \equiv 3$.

**Определение 1.** Говорят, что число $a$ является *квадратичным вычетом* по модулю $m$, если $a$ взаимно просто с $m$ и существует корень сравнения $x^2 \equiv a \pmod m$.

**Упр. 1.** Легко видеть, что у изначального сравнения $x^2 \equiv 2 \pmod 7$ есть принципиально два различных корня: 3 и $-3$. И это вполне оправдывает наши ожидания, что квадратный трехчлен имеет не более двух корней. А всегда ли это так?

Далее везде $p$ — *нечетное* простое число, $a$ обычно не делится на $p$.

**Упр. 2.** Квадратичные вычеты — квадраты обычных вычетов, поэтому все они получаются при возведении приведенной системы вычетов в квадрат. Сколько принципиально различных чисел мы получим, другими словами, сколько существует квадратичных вычетов по модулю $p$?

**Определение 2.** Вычет, не являющийся квадратичным по модулю $p$ и не делящийся на $p$, называется *квадратичным невычетом* по модулю $p$.

**Упр. 3.** Сколько существует квадратичных невычетов по модулю $p$?

**1.** Пусть $p$ — нечетное простое число, $a$, $b$, $c$ — вычеты по модулю $p$, причем $a$ не делится на $p$, а $D = b^2 - 4ac$. Докажите, что если $D$ — квадратичный вычет по модулю $p$, то сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$ имеет два корня, если $D$ — квадратичный невычет по модулю $p$, то указанное сравнение не имеет корней, а если $D$ делится на $p$, то это сравнение имеет ровно один корень.

**Упр. 4.** Почему важно условие, что $p$ — не 2?

**2.** Решите сравнение $3x^2 - 4x + 1 \equiv 0 \pmod{131}$. Без перебора!

**Определение 3.** *Символом Лежандра* называется выражение, обозначаемое $\left(\dfrac{a}{p}\right)$, равное 1, если $a$ — квадратичный вычет по модулю $p$; $-1$, если $a$ — невычет по модулю $p$ и 0, если $a$ кратно $p$.

**Свойства символа Лежандра.**

**3.** **(a)** $\left(\dfrac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod p$ (критерий Эйлера);

**(b)** $\left(\dfrac{ab}{p}\right) = \left(\dfrac{a}{p}\right)\left(\dfrac{b}{p}\right)$ (мультипликативность).

Другими словами, мы только что доказали, что *вычет на вычет дает вычет, невычет на вычет дает невычет, невычет на невычет дает вычет.*

**4.** Докажите, что $-1$ является квадратичным вычетом по модулю $p \iff p = 4k+1$.

**5.** Докажите, что у сравнения $(x^2-2)(x^2-3)(x^2-6) \equiv 0 \pmod p$ всегда есть решение.

**6.** Докажите, что число $p$ является делителем числа вида $x^2 - x + 3$ тогда и только тогда, когда оно является делителем числа вида $y^2 - y + 25$.

**7.** Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.

**8.** Пусть $a$ — квадратичный вычет по простому модулю $p > 2$. Докажите, что $a$ — квадратичный вычет по модулю $p^n$ при любом натуральном $n$.

**9.** Пусть $p = 4k+3$ простое. Докажите, что если

$$\frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2+1} = \frac{m}{n},$$

где $(m,n) = 1$, то $2m - n \,\vdots\, p$.

## 29. Серия 25, экстремальная *16 июля*

**Определение 1.** Набор ребер в графе называется *паросочетанием*, если они не имеют общих вершин.

**Определение 2.** Набор ребер в графе называется *покрытием*, если каждая вершина графа принадлежит хотя бы одному ребру набора.

**1.** В стране есть несколько городов и несколько дорог с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через остальные. При этом, какие бы два города ни взять, хотя бы из одного из них можно проехать в другой, не нарушая правил движения. Докажите, что найдется город, из которого можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.

**2.** 20 членов местного шахматного клуба решили провести турнир из 14 игр, причем каждый участник должен сыграть хотя бы в одной игре. Докажите, что в этом турнире должен быть набор из 6 игр, которые можно провести параллельно.

**3.** В киноклубе $n$ участников, причем среди любых четырех человек найдутся трое попарно знакомых либо трое попарно незнакомых. Докажите, что всех участников клуба можно рассадить в две комнаты так, чтобы в одной комнате все были попарно знакомы, а в другой попарно незнакомы.

**4.** На конгрессе собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющих равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдется ученый, имеющий ровно одного друга.

**5.** Дан граф на $n$ вершинах, среди которых нет изолированных. Докажите, что сумма размеров максимального паросочетания и минимального реберного покрытия равна $n$.

**6.** Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2017 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что Оля может выиграть.

**7.** В кабинете президента стоят 2004 телефона, любые два из которых соединены проводом одного из четырех цветов. Известно, что провода всех четырех цветов присутствуют. Всегда ли можно выбрать несколько телефонов так, чтобы среди соединяющих их проводов встречались провода ровно трех цветов?

**8.** Дан полный граф на $n > 4$ вершинах. Его ребра раскрашены в красный и синий цвета. Известно, что граф остается связным при стирании всех ребер любого из цветов. Докажите, что из графа можно удалить $n - 4$ вершины и все выходящие из них ребра так, чтобы оставшийся граф по прежнему при удалении всех ребер любого цвета оставался связным.

## 30. Серия 26, поворотная *16 июля*

**Определение 1.** *Поворотной гомотетией* с коэффициентом $k$ и углом $\varphi$ называется композиция гомотетии с коэффициентом $k$ и поворота на угол $\varphi$, имеющих общий центр ($H_O^k \circ R_O^\varphi$). При этом можно считать, что $k > 0$ и $0^\circ \leqslant \varphi < 360^\circ$.

**Упр. 1.** Верно ли равенство $H_O^k \circ R_O^\varphi = R_O^\varphi \circ H_O^k$?

**1. (а)** Из точки $P$ проведены два отрезка $PA$ и $PA_1$. На отрезке $PA$ выбрана точка $B$, а на отрезке $PA_1$ выбрана точка $B_1$. Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая точку $A$ в $A_1$, а $B$ в $B_1$, причём её центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников $AA_1P$ и $BB_1P$.

**(b) Теорема о двойственной поворотной гомотетии.** Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок $AB$ в отрезок $A_1B_1$, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок $AA_1$ в отрезок $BB_1$.

**(c)** Даны четыре прямые общего положения. Выведите из пунктов **(a)** и **(b)** то, что описанные окружности четырех треугольников, образованных этими прямыми, пересекаются в одной точке.

**2.** Докажите, что центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок $AB$ в отрезок $BC$, является точка пересечения окружности, проходящей через точку $A$ и касающейся прямой $BC$ в точке $B$, и окружности, проходящей через точку $C$ и касающейся прямой $AB$ в точке $B$.

**3.** Постройте поворотную гомотетию с углом поворота $90°$, совмещающую две неконцентрические окружности разного радиуса.

**4.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Описаная окружность треугольника $BCD$ вторично пересекает окружность, проходящую через точки $A$ и $D$ и касающуюся прямой $CD$, в точке $K$. Точка $M$ — середина $BC$, $N$ — середина $AD$. Докажите, что точки $B$, $M$, $N$ и $K$ лежат на одной окружности.

**Определение 2.** Дано вещественное $k \neq 0$. Рассмотрим взаимнооднозначное преобразование плоскости $F$ такое, что для любых точек плоскости $X$, $Y$ выполняется $\overline{F(X)F(Y)} = k\overline{a}$, где вектор $\overline{a}$ получается из $\overline{XY}$ поворотом на фиксированный угол $\alpha$. Назовем такое преобразование *преобразованием подобия.*

**5.** Докажите, что преобразование подобия с $k \neq 1$ является поворотной гомотетией.

**6.** На плоскости даны две неравных окружности. По ним с равными угловыми скоростями по часовой стрелке движутся 2 точки. Докажите, что на плоскости найдется точка, отношение расстояний от которой до этих двух точек будет постоянно.

**7.** Два комара $P$ и $Q$ ползут равномерно по двум прямым, пересекающимся в точке $O$.

**(a)** Найдите ГМТ середины отрезка $PQ$.

**(b)** Докажите, что если скорости комаров равны, то середина дуги (одной из дуг) $PQ$ окружности $(OPQ)$ неподвижна.

**(c)** Докажите, что если комары проходят точку $O$ не одновременно, то окружности $(OPQ)$ имеют вторую общую точку, отличную от $O$.

# 31. Серия 27, массивная добавка *17 июля*

**1.** Какие массы надо поместить в вершины треугольника со сторонами $a$, $b$ и $c$, чтобы центр полученной системы материальных точек оказался

**(a)** в точке пересечения медиан треугольника;

**(b)** в точке пересечения биссектрис;

**(c)** в центре вневписанной окружности, касающейся стороны $a$;

**(d)** в точке Нагеля (точке, где пересекаются отрезки, соединяющие вершину треугольника с точкой касания вневписанной окружности противоположной стороны);

**(e)** в точке Жергонна (точке, где пересекаются отрезки, соединяющие вершину треугольника с точкой касания вписанной окружности);

**(f)** в ортоцентре?

**2.** Дан треугольник $ABC$. На продолжениях сторон $AB$ и $AC$ за точки $B$ и $C$ соответственно выбрали точки $A_B$ и $A_C$ так, что $BA_B = CA_C = BC$. Прямые $BA_C$ и $CA_B$ пересеклись в точке $A_0$. Точки $B_0$ и $C_0$ определяются аналогично. Докажите, что прямые $AA_0$, $BB_0$ и $CC_0$ пересекаются в одной точке.

**3.** Пусть в правильном треугольнике $ABC$ точка $O$ — центр. На стороне $AC$ взята точка $K$. Докажите, что отрезок, образованный основаниями перпендикуляров, опущенных из точки $K$ на стороны $AB$ и $BC$, делится отрезком $OK$ пополам.

**4.** Докажите, что все оси симметрии произвольного многоугольника проходят через одну точку.

**5.** Точки, разбивающие каждую из сторон четырехугольника на три равные части, соединили так, что четырехугольник разбился на 9 меньших четырехугольников.

**(a)** Докажите, что каждый из полученных отрезков делится точками пересечения на три равные части.

**(b)** Докажите, что площадь среднего четырехугольника в девять раз меньше исходного.

**6.** Докажите, что точка Нагеля лежит на прямой, соединяющей точку пересечения медиан треугольника и точку пересечения его биссектрис.

**7.** В треугольнике $ABC$ вневписаная окружность касается стороны $BC$ в точке $T$. $I$ — центр его вписанной окружности этого треугольника, а основание высоты из точки $A$ — это точка $H$. Докажите, что $TI$ пересекает $AH$ в её середине.

**8.** Окружность с центром $O$, вписанная в треугольник $ABC$, касается стороны $AC$ в точке $K$. Вторая окружность, также с центром $O$, пересекает все стороны треугольника $ABC$. Пусть $E$ и $F$ — её точки пересечения со сторонами соответственно $AB$ и $BC$, ближайшие к вершине $B$; $B_1$ и $B_2$ — точки её пересечения со стороной $AC$, $B_1$ — ближе к $A$. Докажите, что точки $B$, $K$ и точка $P$ пересечения отрезков $B_2E$ и $B_1F$ лежат на одной прямой.

## 32. Профи–8 vs Профи–9

*17 июля*

**1.** В стране Дезориентация 2018 городов, каждые два из которых нужно соединить прямым авиарейсом, летающим, увы, только в одну сторону. Однако законы Дезориентации запрещают авиакомпаниям осуществлять транзитные перевозки (то есть если имеются рейсы из города $A$ в город $B$ и из города $B$ в город $C$, то их не может выполнять одна и та же авиакомпания). Какое наименьшее количество авиакомпаний может справиться с организацией воздушного движения в таких непростых условиях?

**2.** Стороны $AD$ и $BC$ выпуклого четырёхугольника $ABCD$ не параллельны. Его диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $E$. Точки $F$ и $G$ лежат на сторонах $AB$ и $CD$ соответственно так, что $\frac{AF}{FB} = \frac{DG}{GC} = \frac{AD}{BC}$. Докажите, что если точки $E$, $F$ и $G$ лежат на одной прямой, то четырёхугольник $ABCD$ — вписанный.

**3.** Для любых натуральных $a$, $b$ и $c$ докажите неравенство

$$(a, b-1)(b, c-1)(c, a-1) \leqslant ab + bc + ca.$$

(Как обычно, $(x, y)$ обозначает наибольший общий делитель чисел $x$ и $y$.)

**4.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $BP$ и $CQ$. Точка $M$ — середина $BC$. Описанная окружность треугольника $CMP$ касается стороны $AB$. Докажите, что описанная окружность треугольника $BMQ$ касается прямой $AC$.

**5.** Можно ли в 18-элементном множестве выбрать 2700 подмножеств $M_1$, $M_2$, …, $M_{2700}$ так, чтобы для любых $M_i$ и $M_j$ выполнялось неравенство $|M_i \setminus M_j| > 1$?

**6.** Сколькими способами можно расставить плюсы и минусы в клетках таблицы $2016 \times 2016$ так, чтобы в каждом квадрате, составленном из клеток таблицы, количества плюсов и минусов отличались не более, чем на 1?

**7.** Пусть $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ — перестановка чисел 1, 2, …, $n$. Найдите максимальное значение суммы

$$S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_n - a_1|.$$

**8.** На плоскости даны $n \geqslant 3$ точек общего положения. Для каждой посчитали сумму расстояний до остальных, и все эти суммы оказались равными. Докажите, что точки являются вершинами выпуклого многоугольника.

**9.** Даны две бесконечные возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$, состоящие из натуральных чисел; их разности взаимно просты. Оказалось, что в каждой из них бесконечно много палиндромов. Обязательно ли найдётся такое $n$, что оба числа $a_n$ и $b_n$ — палиндромы?

**10.** Найдите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами такие, что для любого простого $p$ найдутся натуральные $m$ и $n$, что $f(p^n) = p^m$.

## 33. Серия 28, неприводимость *19 июля*

**1.** Даны многочлены $P$ и $Q$ с целыми коэффициентами. Известно, что не все коэффициенты $P$ четны и не все коэффициенты $Q$ четны. Докажите, что не все коэффициенты $PQ$ четны.

**2. [Не] Критерий Эйзенштейна.** Пусть все коэффициенты многочлена над $\mathbb{Z}$, кроме старшего, делятся на простое число $p$ и свободный член не делится на $p^2$. Докажите, что этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

**Определение 1.** *Содержанием* многочлена с целыми коэффициентами назовем наибольший общий делитель его коэффициентов. Обозначим содержание многочлена $P$ через $\operatorname{cont}(P)$.

**Определение 2.** Многочлен $P$ с содержанием $\operatorname{cont}(P) = 1$ назовем *примитивным.*

**3. Лемма Гаусса.** Для любых многочленов $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ выполняется равенство $\operatorname{cont}(P)\operatorname{cont}(Q) = \operatorname{cont}(PQ)$.

**4.** Выведите из леммы Гаусса, что если многочлен с целыми коэффициентами приводим над $\mathbb{Q}$, то он приводим и над $\mathbb{Z}$.

**5.** Найдите НОД над $\mathbb{Q}$ многочленов $(x-1)^{103} + 1$ и $(x+1)^{101} - 1$.

**6.** Докажите, что число $\sqrt[7]{7}$ не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами степени меньше 7.

**7.** Значение многочлена 20 степени с целыми коэффициентами при всех целых $x$ делится на 37. Докажите, что все его коэффициенты делятся на 37. Верно ли аналогичное утверждение для многочлена произвольной степени?

**8.** Разложите на неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители многочлен $x^{101} - 1$.

## 34. Серия 29, немного о двойке *19 июля*

Сегодня мы узнаем, по каким простым модулям 2 является квадратичным вычетом. Для этого нам достаточно узнать, с чем сравнимо $2^{(p-1)/2}$ по модулю $p$.

**1.** Рассмотрим числа 2, 4, 6, …, $p-1$. Докажите, что их произведение сравнимо с $\pm 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\frac{p-1}{2}$ по модулю $p$.

**2.** Научитесь определять знак в предыдущей задаче в зависимости от $p$.

**3.** Докажите, что 2 — квадратичный вычет по модулю $p \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \pmod 8$.

**4.** По каким простым модулям $-2$ является квадратичным вычетом?

**5.** Докажите, что у числа $2^n+1$ не может быть простых делителей вида $8k+7$.

**6.** Чему равна сумма

$$\left[\frac{1}{2003}\right]+\left[\frac{2}{2003}\right]+\left[\frac{2^2}{2003}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{2001}}{2003}\right]?$$

**7.** Докажите, что простых чисел вида **(a)** $8k+3$; **(b)** $8k+5$; **(c)** $8k+7$ бесконечно много. Так как доказательства одинаковы, то сдается один любой пункт.

**8.** Докажите, что равенство $x^3-3=2y^2$ не имеет решений в целых числах.

**9.** Последовательность $\{x_n\}$ определена рекурсивно: $x_1=a$ при некотором натуральном $a$, а также $x_{n+1}=2x_n+1$. Пусть $y_n=2^{x_n}-1$. Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может быть в последовательности $\{y_n\}$?

## 35. Серия 30, от точки до прямой *19 июля*

Зафиксируем прямую $b$ и одну из полуплоскостей, на которые она делит плоскость. Назовем *ориентированным* расстоянием $f_b(A)$ расстояние от $A$ до $b$, взятое со знаком «+», если $A$ лежит в зафиксированной полуплоскости, и со знаком «−» в противном случае. Обозначим за $\overline{e}_b$ единичный вектор, перпендикулярный $b$ и ведущий в зафиксированную полуплоскость.

Сдвинем точку $A$ на вектор $\overline{a}$.

**Упр. 1.** Как изменится величина $f_b(A)$? А величина $p\cdot f_b(A)$, где $p$ — константа?

**Упр. 2.** Как изменится $p\cdot f_b(A)+q\cdot f_c(A)$, где $q$ — константа, а $c$ — прямая? Докажите, что существует прямая $d$ и константа $r$, такие, что $p\cdot f_b(A)+q\cdot f_c(A)=r\cdot f_d(A)$.

**Упр. 3.** Пусть дан набор прямых $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и набор чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Докажите, что сумма $p_1\cdot f_{b_1}(A)+p_2\cdot f_{b_2}(A)+\ldots+p_n\cdot f_{b_n}(A)$ либо фиксирована, либо принимает все значения, при этом каждое значение принимается только для всех точек некоторой прямой.

В некотором смысле, можно считать, что при сдвиге точки $A$ на вектор $\overline{a}$ вышеприведенная сумма меняется на $r \cdot |a|$, где $r$ — константа, не зависящая от $|a|$.

**1.** Внутри треугольника $ABC$ дан треугольник $A_1B_1C_1$. Известно, что для любой вершины треугольника $A_1B_1C_1$ расстояние до сторон $ABC$ одно и то же. Докажите, что треугольник $ABC$ — правильный.

**2.** Докажите, что основания внешних биссектрис неравнобедренного треугольника лежат на одной прямой.

**3.** Дан четырехугольник. В одной паре его противоположных углов провели внешние биссектрисы — получили точку их пересечения. Потом в другой паре — получили вторую точку. Потом противоположные стороны продлили до пересечения, получили два угла — по ним аналогично построили третью точку. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

**4. Теорема Ньютона.** В описанном четырехугольнике прямая, проходящая через середины диагоналей, проходит и через центр вписанной окружности.

**5. Прямая Гаусса.** Прямая, соединяющая середины диагоналей выпуклого четырехугольника, делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечения противоположных сторон.

**6.** Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается стороны $AB$ в точке $D$. Докажите, что середины отрезков $AB$ и $CD$, а также центр вписанной окружности лежат на одной прямой.

**7.** Пусть $AA_1$ и $BB_1$ биссектрисы треугольника $ABC$. $X$ — точка пересечения прямой $A_1B_1$ с дугой $AC$ описанной окружности треугольника $ABC$ не содержащей точку $B$. Докажите, что $\frac{1}{AX} = \frac{1}{BX} + \frac{1}{CX}$.

## 36. Серия 31, подсчеты в множествах *20 июля*

**1.** Обозначим через $T$ множество $T = \{1, 2, \ldots, 4k\}$ при некотором натуральном $k > 1$. Назовем подмножество $S$ множества $T$ *сбалансированным*, если для любого его элемента $a$ найдется такой элемент этого подмножества $b \neq a$, что $\dfrac{a+b}{2}$ также лежит в $S$. Докажите, что все подмножества $T$ из более, чем $3k$ элементов сбалансированны.

**2.** Подмножество $S$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ назовем *неизолированным*, если для любого элемента в $S$ найдется элемент, отличающийся от него на 1. Найдите количество 5-элементных неизолированных подмножеств.

**3.** Обозначим через $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_{2n}$ различные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Кроме того, условимся считать $A_{2n+1} \equiv A_1$. Найдите макси-

мальное значение суммы
$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|}.$$

**4.** Обозначим через $S$ множество чисел $\{1, 2, \ldots, 10^6\}$, а через $A$ — его 101-элементное подмножество. Докажите, что в $S$ найдутся такие числа $t_1$, $t_2, \ldots, t_{100}$, что все множества $A_j = \{x+t_j | x \in A\}, \quad j = 1, 2, \ldots, 100$, попарно непересекающиеся.

**5.** В школе учится $n$ школьников. Они ходят в кружки. Каждый школьник может посещать любое количество кружков. При этом каждый кружок посещает не менее 2 школьников. Известно, что если в два кружка ходят хотя бы 2 общих школьника, то количество школьников в этих двух кружках различно. Докажите, что общее количество кружков не превосходит $(n-1)^2$.

**6.** В школе учится 10001 школьник. Они входят в банды, при этом один школьник может входить в несколько банд. Банды входят в сообщества, при этом одна банда может входить в несколько сообществ. Пусть всего $k$ сообществ, при этом выполнены следующие условия.

- Каждая пара школьников входит ровно в одну банду.
- Для каждого школьника $P$ и каждого сообщества $S$ существует ровно одна банда этого сообщества $S$, в которую входит школьник $P$.
- В каждой банде нечетное количество участников. Более того, если в банде $2n+1$ человек, то эта банда входит ровно в $n$ сообществ.

Найдите все возможные значения $k$.

## 37. Серия 32, примитивная

*20 июля*

**Определение 1.** Число называется *первообразным корнем (primitive root)* по модулю $m$, если его показатель равен в точности $\varphi(m)$.

**Теорема.** По любому простому модулю $p$ существует первообразный корень.

**Ключевая лемма.** Пусть $p$ — произвольное простое число. Тогда сравнение $x^n \equiv 1 \pmod{p}$ имеет не более $n$ решений по модулю $p$.

**Доказательство 1.** Пусть $d_1, \ldots, d_{p-1}$ — показатели чисел $1, \ldots, p-1$ соответственно.

**(a)** Докажите, что если показатели каких-то двух чисел равны $a$ и $b$, то существует число, показатель которого равен НОК$(a, b)$.

*Подсказка.* Вспомните задачу **2** из показателей–1.

**(b)** Рассмотрим сравнение $x^{\text{НОК}(d_1,\ldots,d_{p-1})} \equiv 1 \pmod p$. Докажите, пожалуйста, что $\text{НОК}(d_1, \ldots, d_{p-1}) = p - 1$.

**(c)** Докажите, что первообразные корни по модулю $p$ существуют.

**Важная мысль.** Первообразный корень $g$ прекрасен тем, что $g^1$, $g^2$, ..., $g^{p-1}$ дают все ненулевые остатки по модулю $p$.

**Упр. 1.** Пусть $g$ — первообразный корень по модулю $m > 2$. Докажите, что $g^{\varphi(m)/2} \equiv -1 \pmod m$. Верно ли это в обратную сторону?

**1.** Докажите, что при простом $p$ сравнение $x^4 \equiv -1 \pmod p$ имеет решение тогда и только тогда, когда $p = 8k + 1$.

**2.** Найдите сумму всех квадратичных вычетов по простому модулю $p > 3$.

**3.** Докажите, что натуральные числа 1, 2, ..., 238 можно расставить по кругу так, чтобы для любых трех подряд идущих по часовой стрелке чисел $a$, $b$, $c$ число $b^2 - ac$ делилось на 239.

**4.** Докажите, что 2 является первообразным корнем любого простого числа вида $p = 4q + 1$, где $q$ — простое.

**5.** Найдите остаток суммы всех выражений вида $ij$, где $1 \leqslant i < j \leqslant p - 1$ по простому модулю $p$.

**6.** Дано простое число $p$ и натуральное число $0 < i \leqslant p-2$. Докажите, что

$$1^i + 2^i + \ldots + (p-1)^i \,\vdots\, p.$$

## 38. Серия 33, экстремальные графы *21 июля*

**1.** Найдите максимальное количество ребер в графе, если в нем $n$ вершин и нет циклов нечетной длины.

**2.** Найдите максимальное число ребер в графе, если в нем $n$ вершин и нет треугольников.

*Подсказка.* Попробуйте удалить из графа две вершины, соединенные ребром.

**3.** Найдите максимальное число ребер в графе, если в нем $3n$ вершин и нет полного графа на 4 вершинах.

**4.** Докажите, что максимальное число ребер в графе на $kn$ вершинах, в котором нет полного графа на $k+1$ вершинах, достигается в полном $k$-дольном графе, где в каждой доле по $n$ вершин.

**5.** В графе 30 вершин, каждое ребро графа покрашено в красный или синий цвет так, что нет трех вершин, попарно соединенных ребрами одного цвета. Какое наибольшее количество ребер может быть в этом графе?

**6.** В графе любые два простых цикла нечетной длины не имеют общих ребер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая вершина была соединена ребром не более чем с одной вершиной такого же цвета.

**7.** Найдите максимальное количество ребер в графе, если в нем $n$ вершин и нет циклов четной длины.

**8.** В графе на $n$ вершинах любые два нечетных цикла не имеют общих ребер. Найдите максимальное количество ребер в нем.

**9.** **(a)** Есть $2n+1$ батарейка ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?

**(b)** Та же задача, но батареек $2n$ ($n > 2$), причем хороших и плохих поровну.

## 39. Серия 34, поворотная–2

*21 июля*

**1.** Окружности $S_1$ и $S_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. При поворотной гомотетии $P$ с центром $A$, переводящей $S_1$ в $S_2$, точка $M_1$ окружности $S_1$ переходит в $M_2$. Докажите, что прямая $M_1M_2$ проходит через точку $B$.

**2.** По трем окружностям, имеющим общую точку $O$ и попарные точки пересечения $A$, $B$ и $C$, одновременно начали движение из точки $O$ по часовой стрелке с равными угловыми скоростями три улитки $X$, $Y$ и $Z$. Докажите, что все треугольники $XYZ$ подобны между собой.

**3.** Окружности $S_1, \ldots, S_n$ проходят через точку $O$. Кузнечик из точки $X_i$ окружности $S_i$ прыгает в точку $X_{i+1}$ окружности $S_{i+1}$ так, что прямая $X_iX_{i+1}$ проходит через точку пересечения окружностей $S_i$ и $S_{i+1}$, отличную от точки $O$. Докажите, что после $n$ прыжков (с окружности $S_1$ на $S_2$, с $S_2$ на $S_3$, $\ldots$, с $S_n$ на $S_1$) кузнечик вернется в исходную точку.

**4.** Докажите, что композиция двух поворотных гомотетий является поворотной гомотетией. Кроме одного маленького случая, какого?

**5.** Пусть $H_1$ и $H_2$ — две поворотные гомотетии. Докажите, что $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$ тогда и только тогда, когда центры этих поворотных гомотетий совпадают.

**6.** Докажите, что центры правильных треугольников, построенных внешним (внутренним) образом на сторонах треугольника $ABC$, образуют правильный треугольник.

**7.** Какова траектория движения центра масс треугольника $XYZ$ из второй задачи?

**8.** На сторонах $BC$ и $AB$ треугольника $ABC$ стоят точки $X$ и $Y$ так, что $\angle BAX = \angle BCY = \alpha$. Из вершины $B$ опущены перпендикуляры $BK$ и $BL$ на отрезки $AX$ и $CY$ соответственно. Найдите углы треугольника $KLM$, где $M$ — середина стороны $AC$.

## 40. Серия 35, первообразные корни–2 *21 июля*

Докажем существование первообразного корня еще двумя способами.

**Доказательство 2.** Пусть $d$ — делитель числа $p-1$.

**(a)** Пусть показатель числа $a$ равен $d$. Докажите, что все решения сравнения $x^d \equiv 1 \pmod p$ суть вычеты $a^1, a^2, \ldots a^d$.

**(b)** Докажите, что существует не более $\varphi(d)$ вычетов, показатель которых равен $d$.

**(c)** Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — все делители натурального числа $n$ (включая $n$). Докажите тождество Гаусса

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(d_k) = n.$$

**(d)** Докажите, что существует в точности $\varphi(d)$ вычетов, показатель которых равен $d$.

**Доказательство 3.** Рассмотрим разложение числа $p-1 = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}$ на простые множители. Далее найдём такие числа $g_i$, что $g_i^{(p-1)/q_i^{\alpha_i}} \not\equiv 1 \pmod p$.

**(a)** Докажите, что такие числа $g_i$ действительно найдутся.

**(b)** Докажите, что если через $h_i$ обозначить $\dfrac{p-1}{q_i^{\alpha_i}}$ степень числа $g_i$, то показатель числа $h_i$ равен $q_i^{\alpha_i}$.

**(c)** Докажите, что произведение всех чисел $h_i$ является первообразным корнем.

**1.** Докажите, что 2 является первообразным корнем по модулю $3^n$ при любом натуральном $n$.

**2.** Докажите, что если $n = 3^{k-1}$, то $2^n + 1 \,\vdots\, 3^k$.

**3.** Докажите, что если у числа $n$ есть два различных нечетных простых делителя $p$ и $q$, то по модулю $n$ нет первообразных корней.

**4.** Докажите, что по модулю $2^k p$, где $k \geqslant 2$, а $p$ — простое, нет первообразных корней.

**5.** Пусть $g$ — первообразный корень по простому модулю $p$. Докажите, что либо $g$, либо $g+p$ является первообразным корнем по модулю $p^2$.

**6.** Пусть $g$ — первообразный корень по модулю $p^k$, где $p$ — простое, $k \geqslant 2$. Докажите, что тогда $g$ — первообразный корень по модулю $p^{k+1}$.

**7.** Дано некоторое натуральное число $m$. Все числа, не превосходящие $m$ и взаимно простые с ним, перемножили, получив число $P$. Докажите, что $P \equiv \pm 1 \pmod{m}$, причем сравнимо с $-1$ тогда и только тогда, когда по модулю $m$ есть первообразный корень.

## 41. Серия 36, движемся к концу *22 июля*

**Определение 1.** Объект движется линейно, если существует вектор $\overline{v}$ такой, что за время $t$ объект сдвигается на вектор $t \cdot \overline{v}$.

**1. (a)** Точки $A$ и $B$ движутся линейно. Докажите, что середина отрезка $AB$ тоже движется линейно.

**(b)** Выведите из этого старую задачу: в четырехугольнике середины диагоналей и точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.

**2.** Даны фиксированные точки $A$ и $B$. Точка $C$ линейно движется по лучу $AC$. Докажите, что центр описанной окружности, точка пересечения высот и точка пересечения медиан треугольника $ABC$ движутся линейно.

**3.** На сторонах $BC$ и $CD$ ромба $ABCD$ отмечены точки $P$ и $Q$ соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $APQ$ лежит на диагонали $BD$ ромба. На самом деле эта задача является частным случаем старой задачи, какой?

**4.** В треугольнике $ABC$ проведены медианы $AM$ и $BN$. На стороне $AB$ выбрана точка $P$, а на сторонах $AC$ и $BC$ выбраны точки $L$ и $K$ такие, что $PL$ параллельно $BN$, а $PK$ параллельно $AM$. Докажите, что отрезок $LK$ делится медианами на три равные части.

**5. (a)** Точка $A$ покоится на месте, а точки $B$ и $C$ движутся линейно и параллельно друг другу. Сколько требуется моментов времени, в которые точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой, чтобы утверждать, что они всегда лежат на одной прямой?

**(b)** А если мы не знаем, движутся ли они параллельно?

**(c)** Докажите существование прямой Гаусса через движение прямой.

**6.** В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $M$, при этом $\angle AMD = 120^\circ$, $AM = MD$. На стороне $BC$ выбрана произвольная точка $E$. Через нее проведены прямые, параллельные диагоналям, которые пересекают четырехугольник второй раз в точках $P$ и $Q$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $PEQ$ лежит на прямой $AD$.

**7.** $H$ — ортоцентр треугольника $ABC$. Точка $P$ движется по описанной окружности треугольника $ABH$. Пусть $A_0$ и $B_0$ — точки пересечения прямых $AP$ и $BP$ с противоположными сторонами треугольника $ABC$. Найдите ГМТ середин отрезков $A_0B_0$.

**8.** Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка $X$. Пусть $X_{AB}$, $X_{BC}$, $X_{CD}$, $X_{DA}$, $X_{AC}$, $X_{BD}$ — проекции точки $X$ на прямые $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, $AC$ и $BD$ соответственно. Докажите, что середины отрезков $X_{AB}X_{CD}$, $X_{BC}X_{DA}$ и $X_{AC}X_{BD}$ лежат на одной прямой.

## 42. Вопросы к зачету *22 июля*

**Алгебра**

**1.** Подбор коэффициентов в несимметричных неравенствах. Пример применения идеологии в задачах **4.2**, **4.5**.

**2.** Многочлены. Определения, теорема Безу. Равносильность формального и функционального равенства.

**3.** Многочлены. Непредставимость функций в виде многочлена из задачи **9.4**.

**4.** Многочлены над $\mathbb{Z}$. Теорема о рациональном корне.

**5.** Многочлены над $\mathbb{Z}$. Применение $P(a) - P(b) \vdots a - b$ на примере задач **15.6, 15.7, 15.9**.

**6.** Алгоритм Евклида для многочленов. Теорема о линейном представлении НОД. Основная теорема арифметики для многочленов.

**7.** Многочлены. [Не] Критерий Эйзенштейна. Применение в задачах **28.5, 28.6, 28.8**.

**8.** Многочлены. Лемма Гаусса, приводимость многочлена с целыми коэффициентами над $\mathbb{Q}$ и над $\mathbb{Z}$.

**Теория чисел**

**9.** Теорема Эйлера. Применение в задачах **3.6, 3.8, 3.9**.

**10.** Показатели. Определение, свойства из упражнений и задач **12.1, 12.2**.

**11.** Показатели. Применение в задачах **12.4, 12.5, 12.7**.

**12.** Показатели. Применение в задачах **19.3, 19.5**.

**13.** Квадратичные вычеты. Определение, свойства, символ Лежандра.

**14.** Применение квадратичных вычетов в задачах **24.7, 24.9**.

**15.** Вывод $\left(\dfrac{2}{p}\right)$ и $\left(\dfrac{-2}{p}\right)$.

**16.** Применение знаний о квадратичности двойки в задачах **29.6, 29.7, 29.8**.

**17.** Первообразные корни. Доказательство–1 существования по простому модулю.

**18.** Первообразные корни. Применение в задачах **32.3, 32.5, 32.6**.

**19.** Первообразные корни. Доказательство–2 и доказательство–3 существования по простому модулю.

**20.** Первообразные корни. Доказательство существования по модулям $2p$, $p^k$.

**21.** Первообразные корни. Доказательство не существования по модулям, отличных от $2p$ и $p^k$.

**Комбинаторика**

**22.** Индукция. Методы ведения индукции на примере задач **2.3, 2.7, 2.8**.

**23.** Диаграммы Юнга. Пример применения в задачах **6.1, 6.2, 6.5**.

**24.** Триангуляции. Доказательство существования двух ушей. Задачи **11.3, 11.4**.

**25.** Принцип Дирихле. Применение в задачах **13.5, 13.6, 13.7**.

**26.** Разница между конечным и бесконечным на примере задач **16.4, 16.6**.

**27.** Множества. Применение принципа крайнего в задачах **18.2, 18.3**.

**28.** Множества. Применение комбинаторных соображений в задачах **18.4, 18.5**.

**29.** Перестановки натурального ряда. Задачи **22.3, 22.5**.

**30.** Перестановки натурального ряда. Задачи **22.6, 22.7**.

**31.** Принцип крайнего в графах на примере задач **25.5, 25.6**.

**32.** Подсчеты в множествах. Задачи **31.3, 31.4**.

**33.** Теорема Турана.

**34.** Применение теоремы Турана и стягивания в задачах **33.5, 33.7, 33.8**.

**Геометрия**

**35.** Векторы. Определение. Проекции векторов на одно направление. Сумма векторов, ведущих из центра правильного $n$-угольника в его вершины. Применение в задачах **1.6** и **1.9**.

**36.** Антипараллельность. Применение в задаче **5.6**.

**37.** Скалярное произведение. Определение. Свойства. Применение в задачах **7.4** и **7.7**.

**38.** Геометрия масс. Определение материальной точки, центра масс. Основная теорема. Правило группировки. Применение в задаче **10.6**.

**39.** Гомотетия. Два определения. Свойства. Применение в задачах **14.4** и **14.5**.

**40.** Теорема о композиции двух гомотетий. Применение в задачах **23.4** и **23.5**.

**41.** Окружность Аполлонния. Доказательство. Степень центра описанной окружности треугольника относительно всевозможных окружностей Аполлония, определенных любой парой вершин.

**42.** Поворотная гомотетия. Два определения. Свойства. Теорема о двойственной поворотной гомотетии. Применение в задаче **26.7(а)**.

**43.** Композиция поворотных гомотетий. Применение в задаче **34.8**.

**44.** Расстояние о точки до прямой. Линейная комбинация расстояний. Применение в задачах **30.3** и **30.4**.

**45.** Линейное движение. Применение в задачах **36.4** и **36.5**.