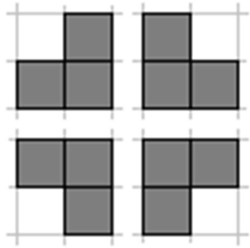
Уголки в прямоугольнике

04 июля

Постановка задачи



Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$ (m, $n \geq 2$). Есть неограниченный запас бумажных уголков из трех клеток. Уголки можно располагать внутри прямоугольника так, чтобы их границы шли по линиям сетки. Необходимо выяснить, при каких m и n можно разместить уголки так, чтобы каждая клетка была покрыта одинаковым числом слоев бумаги. В этом случае будем говорить, что прямоугольник *покрывается* уголками.

1. Докажите, что если прямоугольник покрывается уголками, то либо mn, либо число слоев делится на 3.
2. Докажите, что прямоугольник размером $2 \times n$ может быть покрыт уголками в 3 слоя.
3. Докажите, что если mn четно, то прямоугольник покрывается уголками.
4. Докажите, что прямоугольник $3 \times (2n + 1)$ не покрывается никаким числом слоев.
5. Покройте уголками в один слой какой-нибудь прямоугольник $5 \times (2n + 1)$.
6. Покройте уголками прямоугольник 7×7.
7. Укажите все прямоугольники $m \times n$, где mn – нечетно, которые не могут быть покрыты.
8. Укажите все прямоугольники $m \times n$, которые могут быть покрыты в один слой.

Векторы

05 июля

Определения. Отрезок, у которого указаны начало и конец, называется *направленным отрезком*. Направленные отрезки *равны*, если у них совпадают длина и направление. Множество всех равных между собой направленных отрезков называется *вектором*. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой.

Упражнения

1. а) Может ли длина суммы двух векторов быть меньше длины каждого из них?
б) Может ли длина разности двух векторов быть меньше разности их длин?

2. Нарисуйте два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Изобразите векторы $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = 3\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}$, $\vec{e} = -1{,}5\vec{b}$.

3. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и точка O. Известно, что $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{b} - 7\vec{a}$. Докажите, что точка C лежит на прямой AB. Верно ли, что точка C лежит на отрезке AB?

Задачи

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ векторы: а) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{MN}$, где $AM : MB = CN : ND = 2 : 1$.

2. а) AM — медиана треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$.
б) Точка M делит отрезок BC в отношении $x : y$, считая от точки B. Докажите, что для любой точки O на плоскости верно равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{y\overrightarrow{OB} + x\overrightarrow{OC}}{x+y}$.

3. а) Пусть точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что для любой точки плоскости O верно равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$.
б) Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник.

4. Дан четырехугольник $ABCD$. Точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}}{2} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}}{2}$.

5. На сторонах пятиугольника AB, BC, CD, DE отметили середины сторон K, L, M, N соответственно. P и Q — середины отрезков KM и LN. Докажите, что $PQ \parallel AE$, и найдите, во сколько раз отрезок AE больше отрезка PQ.

6. На стороне AB треугольника ABC отметили такую точку M, что $AM = 2MB$, на стороне BC — такую точку N, что $BN = 3NC$, а на стороне AC — ее середину P. Затем треугольник стерли, оставив только точки M, N и P. Как восстановить треугольник ABC?

7. На плоскости есть 2018 векторов, среди которых есть неколлинеарные. Сумма любых 2017 векторов коллинеарна с невключенным в эту сумму вектором. Докажите, что сумма всех векторов равна $\vec{0}$.

8. Сумма n векторов равна $\vec{0}$ ($n \geq 3$), и среди них нет сонаправленных. Докажите, что из этих векторов можно составить выпуклый n-угольник.

9. Из точки O на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Доказать, что можно выбрать несколько векторов (или, может быть, один вектор), длина суммы которых больше 1.

10. На сторонах треугольника ABC построили параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2 и CAA_1C_2. Обязательно ли из отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 можно составить треугольник?

Возвращение индукции

05 июля

Примеры

1. Дан связный граф без циклов (дерево), в котором n вершин. Докажите, что в нем n – 1 ребро.

2. Вершины некоторого выпуклого многоугольника с нечетным числом вершин покрашены в 3 цвета, причем любые две соседние вершины покрашены в разные цвета. Докажите, что многоугольник можно разрезать диагоналями на треугольники так, чтобы вершины каждого треугольника были покрашены в разные цвета.

Задачи

3. Дан выпуклый n-угольник, $n \geq 4$. В нем провели некоторые диагонали, причем никакие две диагонали не имеют общих внутренних точек. Докажите, что найдутся две (несоседние) вершины, из которых не выходит ни одной диагонали.

4. Несколько человек построились в две очереди одинаковой длины. Известно, что в каждой паре стоящий слева ниже стоящего справа. Докажите, что если обе очереди упорядочить по росту (от самого низкого), то это свойство сохранится.

5. Даны два выпуклых многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ и $B_1B_2B_3\ldots B_n$, причем $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$, …, $A_nA_1 = B_nB_1$, а $n - 3$ угла одного многоугольника равны $n - 3$ соответственным углам другого. Обязательно ли такие многоугольники равны?

6. Вдоль кольцевой автодороги стоит несколько бензоколонок. Общее количество бензина во всех бензоколонках достаточно для того, чтобы проехать один круг. Докажите, что автомобиль с изначально пустым баком может проехать круг по часовой стрелке, начав с некоторой бензоколонки. Размер бака достаточен для того, чтобы вместить весь бензин.

7. В стране некоторые пары городов соединены дорогами с односторонним движением, причем можно выехать из любого города, а затем в него вернуться. Докажите, что президент сможет разбить страну на регионы, содержащие больше одного города, так, чтобы внутри региона от любого города можно было добраться до любого другого. (В стране может быть только один регион.)

8. В некоторой связной шпионской сети города N участвует 77 человек (включая босса), причем босс знает 7 других шпионов, и никто не знает больше шпионов, чем знает босс. Однажды полиция города N изловила всех шпионов и хочет разместить их по камерам так, чтобы знакомых в одной камере не оказалось, и никто ни о чем не узнал. Докажите, что для этой цели достаточно 7 камер.

9. Даны такие натуральные числа a_1, a_2, ..., a_n, что ни одно из них не превосходит своего номера, а сумма всех их чётна. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы с одинаковой суммой.

Неравенства: начало

06 июля

Упражнения

1. Натуральные числа a, b, x и y таковы, что $a \geq b$, $x \geq y$. Докажите неравенство

$$ax + by - ay - bx \geq 0.$$

2. Докажите, что для всяких положительных a и b выполнено $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

3. При положительном x найдите минимум выражения $2x + \frac{3}{x}$.

Задачи

4. Для всяких положительных a и b докажите неравенство $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

5. Докажите, что если $a \geq b \geq c$, то $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \geq 0$.

6. Докажите неравенство $2x^2 + 9y^2 - 6xy + 4x + 4 \geq 0$. В каких случаях достигается равенство?

7. Докажите, что при любых x, y, z выполнено неравенство

$$x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1).$$

8. Докажите, что при любом x выполняется неравенство $x(x+1)(x+2)(x+3) \geq -1$.

9. Докажите, что для любых вещественных чисел a, b выполнено: $a^2+ab+b^2 \geq 3(a+b-1)$.

10. Положительные числа a и b таковы, что ${}^1/_a + {}^1/_b = 1$. Докажите неравенство

$$(a+b)^3 - a^3 - b^3 \geq 48.$$

11. Для любых двух различных нечётных простых чисел p и q докажите неравенство

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right)^2 > \frac{16}{pq}.$$

12. Доказать, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ и $ac > 0$, то имеет место неравенство $\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} \geq 4$.

13. Для положительных чисел a, b, x, y, известно, что $ab \geq ax + by$, докажите неравенство

$$\sqrt{a+b} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Планарные графы

06 июля

Определение. *Планарный граф* – граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. *Плоский граф* – изображение планарного графа без пересечений ребер. Ребра плоского графа делят плоскость на части, которые называются *гранями*.

Формула Эйлера

1. Дан плоский граф. Обозначим количество вершин за В, ребер – за Р, граней – за Г.

а) Докажите, что если граф – дерево, то В + Г – Р = 2.

б) Докажите, что при удалении ребра, не являющимся мостом, величина В + Г – Р не изменяется.

в) Для связного плоского графа докажите формулу В + Г – Р = 2.

г) Чему равно В + Г – Р, если граф содержит К компонент связности?

Задачи

2. В стране Озерная 7 озер и 10 каналов (канал соединяет 2 озера), причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

3. Докажите, что для любого связного плоского графа с хотя бы двумя ребрами, без петель и кратных ребер, выполняется неравенство 2Р ≥ 3Г.

4. Докажите, что для графа из предыдущей задачи выполняется неравенство Р ≤ 3В – 6.

Контрольный вопрос: что будет, если в графе не более 1 ребра, или есть петли и кратные ребра? Выполняется ли формула В + Г – Р = 2? Выполняется ли неравенство Р ≤ 3В – 6?

5. Как изменятся неравенства 3 и 4 задачи, если граф двудолен (все остальные свойства также выполняются)?

6. Докажите, что полный граф на пяти вершинах (K_5) и полный двудольный граф, обе доли которого содержат 3 вершины ($K_{3,3}$) – не планарны.

Рассмотрим выпуклый многогранник и точку внутри него. Поместим многогранник внутрь сферы с центром в этой точке, и спроецируем его из центра на сферу. У полученного на сфере графа ребра не пересекаются. Почему?

Поставим сферу на плоскость так, чтобы точка, диаметрально противоположная точке касания (*полюс*), не принадлежала нарисованному на сфере графу. Спроецируем из полюса на плоскость все точки сферы (*стереографическая проекция*). Получился плоский граф, соответствующий многограннику.

7. Докажите, что для выпуклого многогранника выполняется формула В + Г – Р = 2.

8. Приведите пример многогранника, для которого эта формула не выполняется.

9. Все грани выпуклого многогранника – правильные пятиугольники. Сколько у него вершин, ребер и граней?

10. а) Докажите, что у любого планарного графа есть вершина степени не больше 5.

б) Докажите, что у выпуклого многогранника есть грань, содержащая не больше 5 ребер.

11. Семиугольник разбили на выпуклые 5 и 6-угольники. Известно, что в каждой вершине семиугольника сходится хотя бы 2 части разбиения, и никакая вершина любого многоугольника не является внутренней точкой стороны другого многоугольника. Докажите, что 5-угольников не менее 13.

Китайская теорема об остатках

07 июля

Упражнения

1. Сима отметила все натуральные числа, дающие остаток 7 при делении на 505. Федор перемножил n подряд идущих отмеченных чисел. Докажите, что если n не делится ни на 101, ни на 5, то получившееся произведение делится на n.

2. Опишите все числа a такие, что:

а) $a \equiv 2 (mod\ 5)$ и $a \equiv 4 (mod\ 6)$;

б) $a \equiv 2 (mod\ 5)$, $a \equiv 4 (mod\ 6)$ и $a \equiv 3 (mod\ 7)$;

в) $a \equiv 2 (mod\ 9)$ и $a \equiv 5 (mod\ 6)$;

г) $a \equiv 2 (mod\ 9)$ и $a \equiv 4 (mod\ 6)$.

Китайская теорема об остатках. *Пусть есть n попарно взаимно простых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и еще n чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$ такие, что для всех $1 \le i \le n$ выполняется $0 \le r_i \le (a_i - 1)$. Пусть $A = a_1 a_2 \dots a_n$. Тогда существует единственное число k такое, что $0 \le k \le A - 1$ и для всех $1 \le i \le n$ верно, что $k \equiv r_i\ (mod\ a_i)$.*

3. а) Докажите, что количество наборов $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ таких, что $0 \le r_i \le (a_i - 1)$ для всех $1 \le i \le n$ равно A.

б) Докажите, что наборы остатков, соответствующие различным числам k_1 и k_2 из отрезка $[0; A - 1]$, не могут совпадать.

в) Докажите Китайскую теорему об остатках.

4. Запишем набор сравнений:

$$\begin{gathered}
k_1 = r_1 \\
k_2 = k_1 + z_1 a_1 \equiv r_2 (mod\ a_2) \\
k_3 = k_2 + z_2 a_1 a_2 \equiv r_3 (mod\ a_3) \\
\vdots \\
k_n = k_{n-1} + z_{n-1} a_1 a_2 \dots a_{n-1} \equiv r_n (mod\ a_n)
\end{gathered}$$

а) Докажите, что можно подобрать такие числа $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, чтобы выполнялись все сравнения и неравенство $0 \le k_n \le A - 1$.

б) Докажите, что число $k = k_n$ подходит под условие Китайской теоремы об остатках.

Задачи

5. Из натуральных чисел, меньших 1000000, Оксана выписала все числа, которые при делении на 23 дают остаток 17, а при делении на 11 остаток 5. Маша из натуральных чисел, меньших 1000000, выписала все дающие остаток 11 при делении на 21, и остаток 3 при делении на 13. а) У кого чисел больше? б) Найдутся ли в списках Оксаны и Маши одинаковые числа?

6. Рекламный проспект набора кубиков, выпускаемого фабрикой «Математические игрушки» утверждает: «Из нашего набора Ваш малыш всегда сможет сложить несколько одинаковых кубов, даже если несколько (но не больше 20) кубиков будут потеряны». Можно ли верить этой рекламе?

7. Докажите, что для любого n найдутся n подряд идущих натуральных чисел, делителями которых являются полные квадраты, причем различные для разных чисел.

8. Натуральный ряд представлен в виде объединения нескольких непересекающихся арифметических прогрессий. Докажите, что разности любых двух прогрессий имеют общий делитель отличный от единицы.

9. Докажите, что можно переставить все натуральные числа в ряд так, чтобы сумма любых n первых чисел делилась на n. Каждое натуральное число должно присутствовать, причем ровно один раз.

Разделяй и властвуй! 7 июля

Если под музыку не танцуют — это не музыка.

из к/ф «1 + 1»

Теорема. *(Неравенство между средним квадратичным, арифметическим, геометрическим и гармоническим.)* Для любых вещественных положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнены следующие неравенства:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Замечание. Когда речь идёт о неравенстве между средним квадратичным и средним арифметическим, можно говорить о любых вещественных числах.

1. Докажите, что для любых положительных a, b и c выполняется неравенство $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geqslant 9$.

2. Для положительного x и натуральных n и m найдите минимум выражения a) $x^2+\dfrac{2}{x}$; b) $x^4+\dfrac{3}{x}$; c) $ax^n+\dfrac{b}{x^m}$.

3. Для положительных чисел a и b докажите неравенство $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

4. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

5. Для положительных x, y и z, произведение которых равно единице, докажите неравенство

$$(2+x)(2+y)(2+z) \geqslant 27.$$

6. Докажите неравенство a) $\sqrt{4-a}+\sqrt{a+5} \leqslant 3\sqrt{2}$;
b) $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a} \leqslant 12$.

7. Докажите, что $\dfrac{(a+b+c)^2}{3} \leqslant a^2+b^2+c^2+2(a-b+1)$ для любых вещественных a, b и c.

8. Для положительных x, y и z выполняется равенство $x^2+y^2+z^2=3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant x+y+z.$$

9. Для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}$ докажите, что

$$(n+1)\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{n+1}} - n\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \leqslant a_{n+1}.$$

10. Сумма квадратов вещественных чисел a, b и c равна 1. Докажите, что $a\sqrt{b^2+c^2}+b\sqrt{c^2+a^2}+c\sqrt{a^2+b^2} \leqslant \sqrt{2}$.

Массы

09 июля

Определения. *Материальная точка mA* — это точка A вместе с размещенной в ней массой m. *Центром масс* системы материальных точек m_1A_1, ..., m_nA_n называется материальная точка mZ, для которой $m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \vec{0}$ и $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

Правило рычага. Центр масс $(m_1 + m_2)Z$ двух материальных точек m_1A_1 и m_2A_2 расположен на прямой A_1A_2, причем $m_1\overrightarrow{ZA_1} = -m_2\overrightarrow{ZA_2}$.

Основная теорема. Если Z — центр масс системы материальных точек m_1A_1, …, m_nA_n, причем $m_1 + \cdots + m_n \neq 0$, то для любой точки O имеет место $\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$. Обратно, если хотя бы для одной точки O выполнено это равенство, то Z — центр масс системы.

Следствие. Центр масс существует и единственный для любой системы материальных точек с ненулевой суммой масс.

Правило группировки. Если часть точек системы заменить их центром масс, то центр масс системы не изменится.

Упражнения

1. В вершины треугольника ABC помещены массы 1. Где находится их центр масс? Докажите, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2. Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной 4. Точка P удовлетворяет условию $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$. Найдите расстояние между точкой P и центром квадрата.

3. Какие массы нужно расположить в вершинах треугольника ABC, чтобы центр масс был расположен в точке P — в середине средней линии, параллельной стороне BC? В каком отношении прямая BP делит сторону AC?

Задачи

4. A_1, A_2, ..., A_6 — середины последовательных сторон шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ совпадают.

5. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN делит эти отрезки пополам, а также делит пополам отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

6. Из четырех точек A, B, C, D никакие три не лежат на одной прямой; M и N — середины отрезков AB и CD; K — середина отрезка MN; P — точка пересечения медиан треугольника BCD. Докажите, что точки A, K, P лежат на одной прямой.

7. Какие массы нужно поставить в вершинах треугольника, чтобы центр масс находился а) в середине биссектрисы; б) в точке пересечения биссектрис?

8. На стороне BC треугольника ABC взята такая точка D, что $BD : DC = 5 : 1$. В каком отношении медиана CE делит отрезок AD?

9. ***Теорема о пропорциональном делении.*** В треугольнике ABC точка A_1 делит сторону BC в отношении $p : q$, считая от вершины B, точка C_1 делит сторону AB в отношении $m : n$, считая от вершины A. Пусть K — точка пересечения AA_1 и CC_1. Тогда $\frac{AK}{KA_1} = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{p}{q}\right)$.

10. В треугольнике ABC точка F делит сторону BC в отношении $3 : 1$, считая от вершины B. Точки M и P отсекают от сторон AB и AC по одной шестой, считая соответственно от вершины A и от вершины C. В каком отношении делится каждый из отрезков MP и AF точкой их пересечения?

11. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1. В каком отношении делит эта прямая медиану CC_1?

12. Старый пират зарыл клад на острове среди 20 деревьев. После этого он написал завещание, в котором указал, как искать клад. Нужно встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, затем повернуть к четвертому и пройти четверть расстояния до него, и т. д., наконец, повернуть к двадцатому и пройти двадцатую часть расстояния до него. К сожалению, пират забыл указать, как занумерованы деревья! Сколько разных ям придется выкопать потомкам пирата, чтобы все-таки найти клад?

13. Три мухи равной массы ползают по сторонам треугольника ABC так, что их центр масс остается на месте. Докажите, что он совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC, если известно, что одна муха проползла по всей границе треугольника.

Красим ребра и вершины

09 июля

1. В ЛМШ прошел турнир по троеборью. Каждый участник сыграл по три партии, причем все, кроме Артемия, сыграли по одной партии в шахматы, настольный теннис и бадминтон (возможно, с разными участниками). Докажите, что Артемий тоже сыграл по одной партии в шахматы, настольный теннис и бадминтон.

2. Известно, что все ребра графа можно покрасить в три цвета так, чтобы любой подграф, состоящий из всех вершин и всех ребер одного цвета, был связным. Какое наименьшее количество вершин может быть в таком графе?

Определение. Раскраска вершин графа в несколько цветов называется *правильной*, если концы любого ребра покрашены в разные цвета.

3. Известно, что любой замкнутый маршрут в графе состоит из четного числа ребер. Докажите, что вершины такого графа можно правильно покрасить в два цвета.

4. Пусть в графе степени всех вершин не превосходят числа d. Докажите, что:

а) его вершины можно правильно раскрасить в $d + 1$ цвет.

б) его вершины можно раскрасить в $d^2 + 1$ цвет таким образом, чтобы любые две одноцветные вершины не были соединены и не имели общего соседа.

5. Пусть в связном графе степени всех вершин не превосходят числа d, и есть хотя бы одна вершина степени меньше d. Докажите, что его вершины можно правильно покрасить в d цветов.

6. Вершины некоторого графа нельзя правильным образом раскрасить в менее, чем k цветов. Докажите, что для любой правильной раскраски вершин этого графа в k цветов существует путь, в котором встречается ровно по одной вершине каждого цвета.

7. В графе самый длинный несамопересекающийся путь проходит через k вершин. Докажите, что граф можно правильно раскрасить в k цветов.

8. В городе Цветочном n площадей и m улиц ($m \geq n + 1$). Каждая улица соединяет две площади и не проходит через другие площади. По существующей в городе традиции улица может называться либо синей, либо красной. Ежегодно в городе происходит переименование: выбирается площадь и переименовываются все выходящие из нее улицы. Докажите, что вначале можно назвать улицы так, что переименованиями нельзя добиться одинаковых названий у всех улиц города.

Неравенства для смельчаков

10 июля

1. Пусть a, b, $c > 0$. Сравните числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{a+c}{b+c}$.

2. Даны числа $0 \le x, y, z \le 1$. Докажите неравенство

а) $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \le 1$; б) $\frac{x}{1+y+z} + \frac{y}{1+z+x} + \frac{z}{1+x+y} \le 1$.

3. Докажите, что при любых положительных a, b и c верно неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} > \sqrt{a+b+c}.$$

4. Для любых положительных a, b, c докажите неравенство

$$1 \le \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \le 2.$$

5. Пусть $x, y \ge 0$, $x + y \le 1$. Докажите, что $\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} \ge \frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}$.

6. Пусть $0 \le a, b, c \le 1$. Докажите, что

$$a^{17} + b^{17} + c^{17} - a^{10}b^7 - b^{10}c^7 - c^{10}a^7 \le 1.$$

7. Даны числа $0 \le x, y, z \le 1$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{7+x^2+y^2} + \frac{y}{7+y^2+z^2} + \frac{z}{7+z^2+x^2} \le \frac{1}{3}.$$

8. Для положительных чисел x_1, x_2, …, x_n ($n > 3$), произведение которых равно 1, докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \dots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} \ge 1.$$

Функция Эйлера

10 июля

Определение. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$определяется как количество взаимно простых с n натуральных чисел, не превосходящих n.

1. Найдите:

(a) $\varphi(24)$, $\varphi(100)$;

(b) $\varphi(p)$, где p - простое;

(c) $\varphi(p^k)$, где p – простое.

2. Докажите, что при $n > 2$ $\varphi(n)$ четно. $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

3. Найдите сумму взаимно простых с n чисел, не превосходящих n.

4. Пусть m, n — взаимно простые натуральные числа. Строки таблицы пронумерованы числами от 0 до $n-1$, а столбцы — от 0 до $m-1$. На пересечении строчки j и столбика i записывается остаток от деления числа $in + jm$ на mn.

(a) Докажите, что все числа в таблице будут различны.

Где в этой таблице числа, взаимно простые с mn? Докажите **мультипликативность** функции Эйлера: $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

(b) Докажите функцию Эйлера:

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{k_1-1}(\dots(p_m - 1)p_m^{k_m-1} = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\dots(1 - \frac{1}{p_m})$$

где $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$.

5. Докажите, что $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$.

6. Найдите все такие x, что:

(a) $\varphi(x) = 24$;

(b) $\varphi(x) = 56$.

7. Найдите все такие x, что:

(a) $\varphi(x) = \frac{x}{2}$;

(b) $\varphi(x) = \frac{x}{3}$;

(c) $\varphi(x) = \frac{x}{7}$.

8. Рассмотрим ряд дробей: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на их НОД.

(a) Сколько будет дробей со знаменателем d, где d — делитель n?

(b) Докажите **Тождество Эйлера-Гаусса**: $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_s) = n$,

где $d_1, d_2, \dots, d_s$ - все делители числа n.

9. На каждой из бесконечного числа карточек написано натуральное число, причем для любого n имеется ровно n карточек, на которых написаны его делители. На скольких карточках написано число 2019?

Массы - 2

11 июля

Упражнения

1. Отрезок A_0A_4 разделен на четыре равных отрезка точками A_1, A_2, A_3. В точке A_3 помещена масса $m = 1$. Какую массу m_k следует поместить в точке A_k, чтобы при каждом $k = 1, 2, 4$ центром масс двух материальных точек $1A_3$ и m_kA_k была точка A_0?

2. В трех вершинах квадрата стоят массы 1, а в четвертой вершине — (–2). Где находится центр масс этой системы?

3. Расположите массы в трех вершинах параллелограмма так, чтобы их центр масс оказался в четвертой вершине.

Задачи

4. Какие массы следует поместить в вершинах неравнобедренного треугольника ABC, имеющего длины сорон a, b, c, чтобы центром масс этих трех точек был центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB и продолжения двух других сторон?

5. Дан треугольник $A_1A_2A_3$, B_1, B_2, B_3 — середины сторон A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 соответсвенно. P — произвольная точка плоскости, P_1, P_2, P_3 — точки, симметричные P относительно точек B_1, B_2, B_3. Докажите, что прямые A_1P_1, A_2P_2 и A_3P_3 пересекаются в одной точке.

6. а) ***Теорема Чевы.*** На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

б) ***Теорема Менелая.*** На сторонах AB, BC и продолжении стороны AC за точку C треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

7. На биссектрисе угла A неравнобедренного треугольника ABC выбрана точка K. Прямые BK и CK пересекают стороны AC и AB в точках L и M соответственно. Докажите, что прямая LM проходит через основание биссектрисы внешнего угла A треугольника.

8. Докажите, что центр Z трех масс m_1, m_2, m_3 с ненулевой суммой, помещенных в вершинах треугольника $A_1A_2A_3$, лежит на прямой, проходящей через вершину A_1 и параллельной стороне A_2A_3, тогда и только тогда, когда $m_2 + m_3 = 0$.

9. В трех вершинах треугольника ABC стоят массы 1, а в центре описанной около этого треугольника окружности — (–2). Где находится центр масс этой системы?

10. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Через середину каждой стороны четырехугольника проведена прямая, перпендикулярная противоположной стороне. Докажите, что все эти четыре прямые пересекаются в одной точке.

Перестановки

11 июля

Определение. *Перестановкой* на некотором конечном множестве M будем называть некоторый способ поменять элементы этого множества местами. *Тождественная перестановка* — перестановка, которая ничего не переставляет. Мы будем рассматривать только ситуацию, когда M состоит из натуральных чисел 1; 2; …; n. Перестановке мы сопоставим табличку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Здесь $a_1, a_2, \dots a_n$ — переставленный местами набор чисел от 1 до n.

Определение. *Произведением* перестановок a и b называется последовательное выполнение их (справа налево) и обозначается как $a \cdot b$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Найдите произведение перестановок а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Запишите все перестановки на множестве из трех элементов. Сколько существует перестановок на множестве из n элементов?

3. Доказать, что при $n > 2$ множество *перестановок* некоммутативно, то есть найти две такие перестановки a и b, что $a \cdot b \neq b \cdot a$.

*Определение****.*** *Циклом* называется перестановка, которая переводит некий элемент a_1 в a_2, a_2 в a_3, ..., a_{k-1} в a_k, a_k в a_1, а остальные оставляет на месте. *Транспозицией* называется цикл длины 2. Два цикла называются *независимыми*, если никакой элемент не сдвигается и первой, и второй перестановкой одновременно. Цикл для краткости принято обозначать строкой $(a_1a_2\dots a_k)$. Число k называется *длиной* цикла.

Задачи

4. Докажите, что любая перестановка однозначно с точностью до перестановки множителей разлагается в произведение независимых циклов.

5. Докажите, что любой цикл является произведением транспозиций.

6. Докажите, что каждая перестановка может быть представлена в виде произведения транспозиций. Единственно ли такое разложение? Верно ли, что любая перестановка представляется в виде произведения независимых транспозиций?

Определение. Транспозиция называется *элементарной*, если она меняет местами два элемента, которые стоят на соседних местах.

7. Докажите, что любую перестановку можно разложить в произведение элементарных транспозиций.

8. Оля написала на карточках числа от 1 до n и разложила карточки в некотором порядке. Она умеет менять местами две самые левые карточки, а также переставлять самую правую карточку в левый конец. Всегда ли она сможет выставить карточки в порядке возрастания?

9. В отряде восьмого класса разрешены только парные обмены задачами, и каждый ученик может совершить только один обмен в день. Докажите, что любой сложный обмен (при котором каждый ученик отдает одну задачу и получает одну задачу) можно совершить за два дня.

10. Пусть f — перестановка из n элементов. Пусть k — наименьшее число такое, что $f \cdot f \cdot \ldots \cdot f$ (k раз) — тождественное отображение. Докажите, что

а) $n!$ делится на k; б) НОК(1; 2; …; n) делится на k.

Дополнительные построения

12 июля

1. Внутри прямоугольника $ABCD$ выбрана произвольная точка M. Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, стороны которого равны соответственно отрезкам AM, BM, CM и DM.

2. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 1, а угол ABC равен 20°. На стороне AB выбирают произвольную точку K, а на стороне BC — произвольную точку E. Найдите минимум суммы $AE + EK + KC$.

3. Один из углов остроугольного треугольника равен 30°. На каждой его стороне выбрали по одной точке. Докажите, что минимальный периметр образованного этими точками треугольника равен одной из высот исходного треугольника.

4. В равностороннем треугольнике ABC взята точка M так, что угол AMC равен 150°. Докажите, что из отрезков AM, BM и CM можно сложить прямоугольный треугольник.

5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$, длина стороны которого равна a, отмечены точки M и N соответственно так, что площадь треугольника AMN равна сумме площадей треугольников ABM и ADN. Найдите угол MAN и длину высоты треугольника AMN, проведенной из вершины A.

6. На меньшей дуге BC описанной окружности правильного треугольника ABC взята произвольная точка M. Докажите, что $AM = MC + BM$.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны стороны AB, BC и CD, M — середина стороны AD. Известно, что угол BMC — прямой. Найдите угол между диагоналями AC и BD.

8. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1 и C_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2 соответственно так, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1B_2 равны, а угол между каждыми двумя из них равен 60°. Докажите, что $\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{B_1B_2}{AC} = \frac{C_1C_2}{AB}$.

9. В треугольнике ABC точка M — середина BC, AD — его высота. Докажите, что $\angle B = 2\angle C$ тогда и только тогда, когда $AB = 2MD$.

Матбой обыкновенный

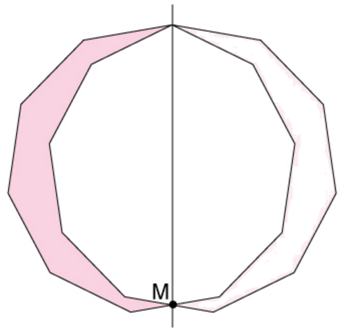
12 июля

1. Даны натуральные числа a, b, c, d. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left[\frac{a+b+c}{d}\right]+\left[\frac{a+b+d}{c}\right]+\left[\frac{a+c+d}{b}\right]+\left[\frac{b+c+d}{a}\right].$$

2. Нескольким студентам предложили набор из 8 заданий. Каждому дали 3 задания. Никакие два студента не получили более одного общего задания. Какое наибольшее возможное количество студентов?

3. Два правильных десятиугольника площади 80 расположены как на рисунке справа (M — середина сторон). Найдите площадь закрашенной части.



4. Существует ли такое натуральное n, что десятичная запись 2^n начинается цифрой 5, а десятичная запись 5^n начинается цифрой 2?

5. Числа от 2 до 2018 разбиваются на несколько групп так, что наибольший общий делитель двух чисел из одной группы никогда не лежит в той же группе. Какое наименьшее количество групп для этого нужно?

6. Внутри треугольника ABC выбрана точка D. Оказалось, что $\angle BAC = 100°$, $\angle ACB = 20°, \angle BAD = 70°, \angle ABD = 40°$. Найдите угол $\angle ACD$.

7. Сто номерков выложили в ряд в порядке возрастания: $00, 01, 02, 03, \ldots, 99$. Затем номерки переставили так, что каждый следующий номерок стал получаться из предыдущего увеличением или уменьшением ровно одной из цифр на 1 (например, после 29 может идти 19, 39 или 28, а 30 или 20 — не может). Какое наибольшее число номерков могло остаться на своих местах?

8. При каких натуральных n квадрат $n \times n$ можно разбить на квадраты 2×2 и 3×3?

Перестановки-2

14 июля

Определение. Рассмотрим перестановку s множества $\{1, ..., n\}$. Будем говорить, что пара (i, j), для которой $i < j$, но $a_i > a_j$ образует *инверсию* (или *беспорядок*). Перестановка называется *чётной*, если число её инверсий чётно.

Упражнения

1. Пусть числа выставлены в обратном порядке (т. е. n, $n - 1$, …, 2, 1). Найдите чётность этой перестановки.

2. Пусть порядок чисел следующий: 2, 3,…, n, 1. Найдите чётность этой перестановки.

3. Докажите, что произведение четной перестановки и транспозиции нечетно, а нечетной перестановки и транспозиции четно.

4. Докажите, что чётная перестановка является произведением чётного числа транспозиций, а нечётная — нечётного числа.

5. Докажите, что произведение двух перестановок одной чётности чётна, а произведение перестановок разной чётности нечётна.

Задачи

6. Каких перестановок больше: четных или нечетных?

7. В некотором городе разрешены только тройные обмены (семья А переезжает в квартиру Б, семья Б переезжает в квартиру С, семья С переезжает в квартиру А). Может ли в результате нескольких обменов получиться так, что семья Ивановых поменяется квартирами с семьёй Петровых, а все остальные жители останутся при своих квартирах?

8. Докажите, что любая четная перестановка представляется в виде произведения циклов длины 3.

9. На прямой стоят две фишки. Слева — красная, справа — синяя. Разрешается проводить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю — слева?

10. а) Докажите, что в игре «Пятнашки» нельзя поменять местами числа 14 и 15, а остальные оставить на своих местах.

б) Докажите, что любое изначальное расположение пятнашек можно привести либо к правильному, либо к расположению, отличному от правильного перестановкой чисел 14 и 15.

Движения

14 июля

Определение. *Движением* называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

1. Докажите, что при движении отрезок переходит в отрезок, прямая — в прямую, треугольник — в равный себе треугольник, угол — в равный себе угол.

Определение. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на такую точку M', что $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{r}$, называется *параллельным переносом* T_r на заданный вектор $\overrightarrow{r}$.

Определение. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на симметричную ей точку M' относительно прямой l, называется *осевой симметрией* S_l.

Определение. *Поворотом* вокруг точки O на ориентированный угол α называется преобразование плоскости R_O^α, которое каждую точку M отображает на такую точку M', что $OM = OM'$ и $\sphericalangle MOM' = \alpha$.

Определение. *Центральной симметрией* относительно точки O называется преобразование плоскости Z_O, которое переводит точку M в такую точку M', что O — середина отрезка MM' (поворот на $180°$).

Упражнения.

2. Выразите через стороны трапеции длину отрезка, соединяющего середины оснований.

3. В треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1, а серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1. Докажите, что прямая B_1C_1 касается вписанной окружности треугольника ABC.

4. Через центр правильного треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен $60°$. Докажите, что отрезки этих прямых, являющиеся их пересечением с треугольником, равны.

Задачи.

5. Правильные треугольники ABC и BDE лежат в одной полуплоскости прямой ABD. Точки F и G — середины отрезков AE и CD. Докажите, что треугольник BFG правильный.

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены соответственно квадраты $ABED$ и $BCGF$, причем квадрат $ABED$ и треугольник ABC находятся в разных полуплоскостях от прямой AB, а квадрат $BCFG$ – в одной полуплоскости с этим треугольником относительно прямой BC. Докажите, что отрезки EG и AC равны и перпендикулярны.

7. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ вне его построен треугольник ABE. Через точки C и D проведены перпендикуляры CM и DN соответственно к прямым AE и BE. Докажите, что точка пересечения CM и DN принадлежит прямой, содержащей высоту треугольника ABE.

8. Точки M и N симметричны вершине C треугольника ABC относительно прямых, содержащих биссектрисы его углов A и B. Доказать, что точка P касания стороны AB с вписанной окружностью является серединой отрезка MN.

9. Внутри квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P. Через вершины A, B, C, D проведены перпендикуляры к прямым PB, PC, PD, PA соответственно. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

10. Внутри угла с вершиной O дана точка M. Постройте прямую OM циркулем и линейкой, не используя точку O.

11. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

12. Даны две концентрические окружности. Постройте с помощью циркуля и линейки квадрат так, чтобы две его смежные вершины лежали на одной окружности, а две другие — на другой.

13. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону от него построены правильные треугольники ABC_1, AB_1C и A_1BC. Докажите, что
(a) $AA_1 = BB_1 = CC_1$
(b) меньший угол между AA_1 и BB_1 равен 60°
(c) AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке T_1 (первая точка Торичелли)
(d) Докажите аналогичное утверждение для внутреннего построения правильных треугольников (вторая точка Торичелли)

Транснеравенство. 15 июля.

1. Есть три кучки монет: по 2, по 5 и по 10 рублей. Разрешается выбрать 7 монет из одной кучки, 5 монет из другой и 2 — из третьей на выбор. Как набрать наибольшую, а как наименьшую сумму денег?

2. Даны числа $a_1 \geqslant a_2$ и $b_1 \geqslant b_2$. Какое из чисел больше $a_1b_1 + a_2b_2$ или $a_1b_2 + a_2b_1$?

3. Цель данной задачи — доказательство *транснеравенства*. Даны два набора чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — некоторая перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Тогда

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1.$$

a) Пусть $c_i \leqslant c_{i+1}$. Докажите, что $a_1c_1 + \ldots + a_ic_i + a_{i+1}c_{i+1} + \ldots a_nc_n \leqslant a_1c_1 + \ldots + a_ic_{i+1} + a_{i+1}c_i + \ldots + a_nc_n$.
b) Докажите, что если в перестановке k инверсий, то она представима в виде произведения k элементарных транспозиций.
c) Докажите, что $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \leqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$.
d) Докажите, что $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$.

4. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$ при $a, b, c, d > 0$.

5. Пусть $a, b, c \geqslant 0$. Используя *транснеравенство*, докажите, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$.

6. Для положительных чисел x, y и z докажите, что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

7. Для положительных a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

8. Для положительных a, b и c докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

9. Пусть $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Докажите
a) *неравенство Чебышева:*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqslant n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n);$$

b) что-то похожее на неравенство Чебышева

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \geqslant n(a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + b_na_1).$$

10. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ и $a+b+c+d \geqslant 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geqslant 1$.

Теорема Эйлера

15 июля

Теорема Эйлера. Если $(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

1. (a) Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$ — все взаимно простые с n остатки при делении на n. Докажите, что если $(a, n) = 1$, то набор остатков от деления чисел $ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(n)}$ на n совпадает с $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$.
(b) Докажите *теорему Эйлера.*

2. Докажите малую теорему Ферма.

3. Какой остаток при делении на 64 дает число 3^{2018}?

4. Какой остаток при делении на 300 дает число 6^{100}?

5. Докажите, что $a^{17} - a \vdots 510$.

6. Докажите, что $2^{n!} - 1 \vdots n$ при нечетном n.

7. Докажите, что если число n имеет два различных нечетных простых делителя, то для a, взаимно простого с n, $a^{\varphi(n)/2} - 1 \vdots n$.

8. Усиление теоремы Эйлера. Пусть $n = p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ — разложение числа n на простые множители. Обозначим через d наименьшее общее кратное чисел $\varphi(p_1^{k_1}), \ldots, \varphi(p_m^{k_m})$. Докажите, что для любого a, взаимно простого с n, выполняется сравнение $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

9. Дано число 2^{2018}. Докажите, что можно дописать слева от него несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

10. Докажите, что для любого числа n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.

11. Докажите, что в любой арифметической прогрессии a, $a + d$, $a + 2d$, $\ldots$, составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложения которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

Теорема Эйлера

15 июля

Теорема Эйлера. Если $(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

1. (a) Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$ — все взаимно простые с n остатки при делении на n. Докажите, что если $(a, n) = 1$, то набор остатков от деления чисел $ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(n)}$ на n совпадает с $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$.
(b) Докажите *теорему Эйлера.*

2. Докажите малую теорему Ферма.

3. Какой остаток при делении на 64 дает число 3^{2018}?

4. Какой остаток при делении на 300 дает число 6^{100}?

5. Докажите, что $a^{17} - a \mathrel{\vdots} 510$.

6. Докажите, что $2^{n!} - 1 \mathrel{\vdots} n$ при нечетном n.

7. Докажите, что если число n имеет два различных нечетных простых делителя, то для a, взаимно простого с n, $a^{\varphi(n)/2} - 1 \mathrel{\vdots} n$.

8. Усиление теоремы Эйлера. Пусть $n = p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ — разложение числа n на простые множители. Обозначим через d наименьшее общее кратное чисел $\varphi(p_1^{k_1}), \ldots, \varphi(p_m^{k_m})$. Докажите, что для любого a, взаимно простого с n, выполняется сравнение $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

9. Дано число 2^{2018}. Докажите, что можно дописать слева от него несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

10. Докажите, что для любого числа n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.

11. Докажите, что в любой арифметической прогрессии a, $a + d$, $a + 2d$, $\ldots$, составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложения которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

Композиция движений

16 июля

Определение. *Композицией движений* f и g называется отображение $g \circ f$, т. е. результат последовательного применения движений f и g.

1. Каким движением является композиция:
а) двух параллельных переносов;
б) двух поворотов с одним центром;
в) двух осевых симметрий с перпендикулярными осями?

2. **Лемма о трех гвоздях.** Если два движения совпадают в трех точках, не лежащих на одной прямой, то они совпадают во всех точках плоскости.

3. **Теорема Шаля.** Любое движение является композицией не более трех осевых симметрий.
а) Доказать, что для любых двух точек плоскости существует осевая симметрия, переводящая одну из них в другую.
б) Доказать, что для любых двух отрезков равной длины AB и CD существует композиция не более чем двух осевых симметрий переводящих точку A в точку C, а точку B в точку D.
в) На плоскости даны равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что композицией не более чем трех осевых симметрий можно перевести точку A в точку A_1, точку B в точку B_1, точку C в точку C_1.

4. а) Докажите, что композиция двух осевых симметрий является параллельным переносом, если оси параллельны, и поворотом, если они не параллельны.
б) Докажите, что всякий поворот (параллельный перенос) можно представить в виде композиции двух осевых симметрий. Сколькими способами такое представление возможно?

5. Найдите композицию трех осевых симметрий $S_{l_3} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$, если
а) оси параллельны;
б) оси пересекаются в одной точке;
в) l_1 и l_2 параллельны, а l_3 им перпендикулярна;
г) l_1, l_2, l_3 — прямые общего положения;
д) две из трех осей параллельны, а третья пересекает их.

Определение. Композиция симметрии и параллельного переноса на ненулевой вектор, параллельный оси симметрии, называется *скользящей* (или *переносной*) *симметрией*.

Определение. Говорят, что треугольник ABC ориентирован *положительно*, если обход по контуру треугольника от вершины A к вершине B и затем к вершине C совершается против движения часовой стрелки. Если же этот обход совершается по движению часовой стрелки, то говорят, что треугольник ABC ориентирован *отрицательно*.
Движение плоскости, сохраняющее ориентацию треугольников, называется *движением первого рода*. Движение, изменяющее ориентацию треугольников на противоположную, называется *движением второго рода*.

Теорема о классификации движений. Всякое движение плоскости первого рода представляет собой либо поворот (в частности центральную симметрию), либо параллельный перенос. Всякое движение второго рода является осевой или скользящей симметрией.

6. Каким движением является композиция:
а) осевой и центральной симметрии; б) двух центральных симметрий;
б) трех центральных симметрий; в) n центральных симметрий?

7. Даны треугольник ABC и точка M. Точка M_1 симметрична точке M относительно середины AB, точка M_2 симметрична точке M_1 относительно середины BC, точка M_3 симметрична точке M_2 относительно середины AC. Докажите, что точка M_3 симметрична точке M относительно вершины A.

8. Даны пять точек — середины сторон пятиугольника. Построить его вершины.

9. Дан треугольник ABC. Прямые l, m, p — серединные перпендикуляры к отрезкам BC, CA, AB соответственно. Найти композицию $S_p \circ S_m \circ S_l$.

10. Различные прямые a_1, a_2, ..., a_5 пересекаются в одной точке O, точка M лежит на прямой a_1 и не совпадает с O. Построить пятиугольник, у которого M — середина стороны, а данные прямые — серединные перпендикуляры к его сторонам.

11. Чем является композиция симметрий относительно трех биссектрис треугольника?

12. Докажите, что композиция четырех осевых симметрий, оси которых содержат последовательно биссектрисы углов выпуклого четырехугольника, есть перенос.

Прогулки по графу

16 июля

Определение. *Простой путь* – путь, проходящий по различным вершинам. *Простой цикл* – цикл, проходящий по различным вершинам.

1. Пусть в графе n вершин, а минимальная степень вершины не меньше $\frac{n-1}{2}$. Докажите, что граф связен.
2. Докажите, что если в графе есть цикл, то есть и простой цикл.
3. Минимальная степень вершины в графе равна $k \geq 2$. Докажите, что в этом графе есть:

   а) простой путь, содержащий не менее k ребер;

   б) простой цикл, содержащий не менее $k + 1$ ребер.
4. Пусть в графе n вершин и m ребер, причем для некоторого натурального числа k выполняется неравенство $m \geq nk$. Докажите, что:

   а) если из графа выкинуть вершину степени не больше k со всеми выходящими из нее ребрами, то для оставшегося графа также выполняется условие $m \geq nk$;

   б) из графа можно выкинуть несколько вершин с выходящими из них ребрами так, чтобы минимальная степень среди оставшихся вершин была не меньше $k + 1$;

   в) в графе найдется простой путь, содержащий не менее $k + 1$ ребер, и простой цикл, содержащий не менее $k + 2$ ребер.
5. Максимальный простой путь в графе содержит k ребер. Пусть вершины A и B соединяет один из таких путей. Докажите, что если суммарная степень вершин A и B больше k, то в графе есть простой цикл из $k + 1$ ребра.

Определение. *Гамильтонов путь* – простой путь, проходящий по всем вершинам. *Гамильтонов цикл* – простой цикл, проходящий по всем вершинам.

6. ***Теорема Оре.*** Пусть в связном графе n вершин.

   а) Известно, что суммарная степень любых двух несоседних вершин не меньше $n - 1$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.

   б) Известно, что суммарная степень любых двух несоседних вершин не меньше n. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.
7. ***Теорема Дирака.*** Пусть в графе n вершин.

   а) Если минимальная степень вершины в графе не меньше $\frac{n-1}{2}$, то в графе есть гамильтонов путь.

   б) Если минимальная степень вершины в графе не меньше $\frac{n}{2}$, то в графе есть гамильтонов цикл.

Неравенства в ТЧ

17 июля

1. Пусть $a, b, c -$ натуральные числа такие, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$. Докажите, что abc – точный куб.

2. Докажите неравенство: $\text{НОД}(a,b)+\ \text{НОК}(a,b) \geq 2\sqrt{ab}$.

3. Докажите, что если k — число делителей натурального числа n, то $k^2 < 4n$.

4. Даны три различных натуральных числа, причем сумма любых двух из этих чисел делится на оставшееся. Докажите, что одно из этих чисел втрое больше другого.

5. Найдит все пары (m, n) натуральных чисел, для которых число $4(mn+1)$ делится на $(m+\ n)^2$.

6. Для натуральных чисел a и b выполнено неравенство

$$a \cdot \text{НОД}(a,b) + b \cdot \text{НОК}(a,b) < 2{,}5ab.$$

Докажите, что a делится на b.

7. Даны различные натуральные числа a, b, c. Докажите неравенство:

$$\text{НОД}(ab+1, bc+1, ac+1) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

8. $S(n)$ - сумма цифр числа n. Докажите, что:

а) $S(m+n) \leq S(m)+S(n)$ для любых n и m;

б) $S(mn) \leq S(m)S(n)$ для любых натуральных m и n.

9. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10} -$ натуральные числа, $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Пусть $b_k -$ наибольший делитель a_k, меньший a_k. Оказалось, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_{10}$. Докажите, что $a_{10} > 500$.

10. Все простые делители натурального числа n меньше 100. Докажите, что у числа n существует такой делитель d, что $d^2 \leq n < 100d^2$.

Неравенство Коши–Буняковского–Шварца

19 июля

1. Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите, что выполняется неравенство **Коши–Буняковского–Шварца**

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$$

Установите при каких a_i, b_i достигается равенство.

2. Докажите следующие неравенства, используя неравенство КБШ:

(a) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$;

(b) $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$.

(c) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n$;

3. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant 14$, если известно, что $a+2b+3c \geqslant 14$. Когда в нем достигается равенство?

4. Докажите неравенство

$$\left((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2\right)\left(\frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \ldots + \frac{1}{a_nb_n}\right) \geqslant 4n^2$$

5. Докажите, что при любых числах a_i и $b_i > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}$$

6. Докажите неравенство $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geqslant \dfrac{9}{2(a+b+c)}$.

7. Пусть a, b, c положительные числа и $a + b + c \leqslant 3$, тогда $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant 3$.

8. Докажите неравенство при неотрицательных a, b, c и d

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}$$

9. Докажите неравенство при неотрицательных a, b, c и d

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2$$

Неравенство Коши–Буняковского–Шварца

19 июля

1. Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите, что выполняется неравенство **Коши–Буняковского–Шварца**

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$$

Установите при каких a_i, b_i достигается равенство.

2. Докажите следующие неравенства, используя неравенство КБШ:

(a) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$;

(b) $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$.

(c) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n$;

3. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant 14$, если известно, что $a+2b+3c \geqslant 14$. Когда в нем достигается равенство?

4. Докажите неравенство

$$\left((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2\right)\left(\frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \ldots + \frac{1}{a_nb_n}\right) \geqslant 4n^2$$

5. Докажите, что при любых числах a_i и $b_i > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}$$

6. Докажите неравенство $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geqslant \dfrac{9}{2(a+b+c)}$.

7. Пусть a, b, c положительные числа и $a + b + c \leqslant 3$, тогда $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant 3$.

8. Докажите неравенство при неотрицательных a, b, c и d

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}$$

9. Докажите неравенство при неотрицательных a, b, c и d

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2$$

Композиция движений – 2

19 июля

1. **Композиция двух поворотов**. Докажите, что композиция двух поворотов на углы в сумме не кратные 360° является поворотом. В какой точке находится центр и чему равен угол этого поворота? Рассмотрите случай, когда сумма углов кратна 360°.

Упражнения

2. Дан равносторонний треугольник ABC, O — центр треугольника. Найдите композицию поворотов: а) $R_B^{-60°} \circ R_A^{60°}$; б) $R_O^{-120°} \circ R_A^{60°}$; в) $R_O^{120°} \circ R_A^{60°}$.

3. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC вне его построены правильные треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1. Докажите, что композиция поворотов с центрами A_1, B_1, C_1 на углы 60° есть центральная симметрия. Найдите ее центр.

Задачи

4. Археологи нашли старинный свиток, в котором было написано: «Встань около березы, и дойди от нее, не сворачивая, до колодца, а у колодца поверни под прямым углом налево и пройди такое же расстояние. В том месте, где ты оказался, вбей колышек в землю. Теперь опять встань у березы, и дойди от нее, не сворачивая, до дуба, поверни под прямым углом направо и пройди такое же расстояние. Вбей второй колышек в землю. Посередине между колышками зарыт клад». Оказалось, что колодец и дуб по-прежнему на месте, но березы уже нет. Смогут ли археологи найти клад?

5. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACP и BCQ. Найти углы треугольника, у которого вершины совпадают с серединой M стороны AB, точкой P и центром O треугольника BCQ.

6. ***Теорема Наполеона***. На сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники. Докажите, что их центры — вершины правильного треугольника.

7. Постройте треугольник, если известны три точки, являющиеся вершинами правильных треугольников, построенных вне треугольника на его сторонах.

8. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, пересекающая ω_1 и ω_2 в точках C и D (A на отрезке CD). Пусть M и N — середины дуг BC и BD соответственно, не содержащих точку A, K — середина CD. Докажите, что точки A, K, M, N лежат на одной окружности.

9. На сторонах четырехугольника, вне его построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами четырехугольника, у которого диагонали равны и перпендикулярны.

10. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ как на диаметрах построили полуокружности. На AB и CD — внешним образом, а на BC и DA — внутренним. После чего отметили точки K, L, M, N — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Оказалось, что они образуют четырехугольник. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

11. На сторонах AB и BC вписанного четырехугольника $ABCD$ выбраны такие точки K и L соответственно, что $AK = CD$ и $CL = AD$. Пусть M — середина KL. Докажите, что $\angle AMC = 90°$.

Гомотетия

20 июля

Упражнения

1. На окружности фиксированы точки B и C, а точка A перемещается по окружности. По какой кривой перемещается центр масс треугольника ABC?

Определения. *Гомотетией* с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется такое преобразование плоскости H_O^k, которое каждую точку M отображает на такую точку M', что $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

2. При гомотетии H_O^k образом вектора $\overrightarrow{AB}$ является вектор $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

3. Гомотетия прямую отображает на прямую, угол — на равный ему угол, окружность — на окружность.

4. Даны два параллельных отрезка. Укажите все гомотетии, переводящие один отрезок в другой.

5. Укажите все гомотетии, переводящие одну окружность в другую.

6. *Теорема о четырех точках трапеции.* Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны трапеции, лежат на одной прямой.

Задачи

7. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

8. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке D. E — середина дуги BC, не содержащей точку A. Докажите, что а) точки A, D, E лежат на одной прямой; б) $\angle BAD = \angle CAD$.

9. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Секущая пересекает окружности в точках M, N, P, Q, расположенных последовательно.Докажите, что углы MAP и NAQ равны.

10. а) Дан треугольник ABC. Обозначим середины сторон BC, AC, AB через A_1, B_1, C_1 соответственно. Найдите гомотетию, которая переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$.

б) Точка P соединена последовательно с точками A_1, B_1, C_1. Докажите, что прямые, проведенные через его вершины A, B, C параллельно соответственно прямым PA_1, PB_1, PC_1, пересекаются в точке G и $\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MP}$, где M — центр масс треугольника ABC.

11. а) *Прямая Эйлера*. Докажите, что ортоцентр H, центр масс M и центр описанной окружности O лежат на одной прямой, причем отрезок OH делится точкой M в отношении 1 : 2, считая от точки O.

б) Докажите, что центр E описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ является серединой отрезка OH.

12. *Окружность Эйлера*. Докажите, что основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника лежат на одной окружности.

13. В треугольнике ABC вписанная и вневписанная окружности касаются стороны BC в точках M и N соответственно. MP — диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки A, P, N лежат на одной прямой.

14. В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H, а также прямые MC и MD, пересекающие прямую AB в точках F и K. Докажите, что $EF = KH$.

Показатели

20 июля

Определение. Число t называют *показателем* остатка a по модулю n, если t – наименьшее натуральное число такое, что $a^t \equiv 1(mod\ n)$.

Упражнения

1. Найдите показатель остатка 2 по модулю 9 и по модулю 13.

2. Для каких остатков по модулю n показатель не определен?

3. Всегда ли показатель остатка a по модулю n равен $\varphi(n)$?

Задачи

4. Пусть t – показатель остатка a по модулю n. Докажите, что:

а) если $m \vdots t$, то $a^m \equiv 1(mod\ n)$;

б) если $a^m \equiv 1(mod\ n)$, то $m \vdots t$;

в) $\varphi(n) \vdots t$;

г) остатки чисел $1, a, a^2, \ldots, a^{t-1}$ по модулю n попарно различны.

5. Показатель остатка a по модулю 30 равен 4. Чему равен показатель следующих остатков по модулю 30:

а) a^2; б) a^3; в) a^{2018}; г) $2a$; д) $11a$?

6. Показатели a и b по модулю 2017 равны 2016. Известно, что $a^k \equiv b\ (mod\ 2017)$. Докажите, что k – нечетно. (2017 – простое число.)

7. Пусть q – простое число, а число $2^q - 1$ делится на простое число p. Докажите, что тогда $p - 1 \vdots q$.

8. Докажите, что если $p > q$, p и q – простые, $a - 1$ не делится на q, то a^p не может давать остаток 1 по модулю q.

9. Докажите, что если m – степень двойки, то любой простой делитель числа $2^m + 1$ сравним с 1 по модулю $2m$.

10. Докажите, что $2^n - 1$ не делится на n при любом натуральном $n > 1$.

Графы на любителя

21 июля

1. 11 шахматистов сыграли однокруговой турнир, причем каждый выиграл и проиграл по 4 партии и две партии свел вничью. Докажите, что можно выбрать трех шахматистов и поставить их по кругу так, чтобы каждый из них выиграл у стоящего справа от него.

2. В одной из школ 20 раз проводился кружок по астрономии. На каждом занятии присутствовало ровно пять школьников, причём никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не менее 20 школьников.

3. В школе учатся 100 мальчиков и 100 девочек. Каждый мальчик знаком хотя бы с одной девочкой, а каждая девочка – хотя бы с одним мальчиком. Один раз каждая девочка сказала: «Среди знакомых мне мальчиков не менее двух третей – рыжие!» А каждый мальчик ответил: «Среди знакомых мне девочек не менее половины – блондинки!» Все они сказали правду, но среди мальчиков только 10 являются рыжими. А какое наименьшее количество блондинок может быть среди девочек?

4. В стране 100 городов, любые два города соединены дорогой. В целях развития туристического бизнеса честный бизнесмен Вася хочет приватизировать а) 4; б) 5 дорог, образующих циклический маршрут. Но после того, как Вася приватизирует какую-нибудь дорогу, Министерство Взяток арестовывает еще четыре не приватизированных. Может ли Министерство Взяток помешать Васе?

5. Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из двух или трёх человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

6. В графе 20 вершин. Известно, что какие 5 вершин ни выбрать, между ними проведено не больше 3 ребер. Докажите, что можно выбрать 10 вершин так, что между ними не проведено ни одного ребра.

7. В стране 1993 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из каждого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками.

8. Жители города Натуральный живут в домах с номерами от 2 до 2019 (каждый житель — в своем доме с уникальным номером). Некоторые из них дружат между собой. В журнале «National Geographic» написали, что у двух жителей есть общий друг тогда и только тогда, когда номер дома одного из них делится на номер дома другого. Докажите, что журнал врёт.

Периоды дробей

21 июля

Рассмотрим процесс деления «в столбик». Пусть мы делим число a на число n. На каждом шаге деления вычитается число, кратное n, до тех пор, пока не останется остаток от деления числа a на n (обозначим его за r). Даже если $r = 0$, поставим запятую в частном и продолжим процесс деления: на каждом шаге к текущему остатку приписывается 0, и получается новый остаток от деления на n. Остаток, получившийся после приписывания k нулей обозначим за r_k, а k-ю цифру после запятой в частном – за c_k. Если с некоторого момента все c_k равны 0, то соответствующая десятичная дробь называется *конечной*. Если последовательность c_k периодична с некоторого места, то и дробь называется *периодичной*, а последовательность $c_1c_2\ldots$ перед началом периода называется *предпериодом*.

1. Объясните, почему $10^k a \equiv r_k (mod\ n)$ и $c_k = \left[\frac{10r_{k-1}}{n}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x.

2. Докажите, что частное от деления a на n – либо конечная дробь, либо периодическая.

3. Дана чисто периодическая дробь, длина периода равна d. Докажите, что эту дробь можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем $10^d - 1$.

4. Пусть НОД(10, n) = 1. Докажите, что дробь a/n является или целым числом, или периодической дробью без предпериода.

5. Докажите, что если $r_x \neq r_y$, то последовательности $c_x c_{x+1} c_{x+2} \ldots$ и $c_y c_{y+1} c_{y+2} \ldots$ не совпадают.

6. Пусть НОД(10, n) = 1. Докажите, что если m/n – несократима, то длина периода равна показателю остатка 10 по модулю n.

7. Пусть НОД(10, n) = 1. Докажите, что длина периода любой правильной дроби m/n является делителем длины периода дроби $1/n$.

8. Пусть $m/n = 0,c_1c_2c_3 \ldots$ – правильная дробь. Докажите, что если вычеркнуть несколько первых цифр после запятой, то получится десятичная запись некоторой правильной дроби со знаменателем n.

9. Докажите, что если $n = 2^a 5^b s$, НОД(s,10) = 1, то длина предпериода несократимой дроби m/n равна $max(a, b)$, а длина периода равна длине периода дроби $1/s$.

10. Пусть период дроби k/p, где p – простое число, состоит из $2n$ цифр. «Разрежем» период на два n-значных куска. Докажите, что сумма полученных кусков есть число из n девяток.

11. Найдите три последние цифры периода дробей 1/107, 1/131, не вычисляя весь период.

12. Докажите, что в десятичной записи любой правильной дроби $k/73$ нет двух одинаковых цифр подряд.

Гомотетия – 2

22 июля

1. В данный остроугольный треугольник ABC впишите квадрат так, чтобы две его вершины находились на стороне AC и по одной вершине на сторонах AB и BC.

2. Внутри угла отмечена точка. Постройте окружность, проходящую через заданную точку и касающуюся сторон данного угла.

3. Постройте на стороне BC данного треугольника ABC такую точку, что прямая, соединяющая основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на стороны AB и AC, параллельна BC.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC так, что а) $BX = XY = YC$; б) $AX = XY = YC$.

5. Докажите, что если при некотором преобразовании плоскости произвольный отрезок $\overrightarrow{AB}$ переходит в $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, причем $k \neq 1$, то это преобразование есть гомотетия с коэффициентом k.

6. а) Пусть O_1 и O_2 — две различные точки. Докажите, что если $k_1k_2 \neq 1$, то композиция $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$ — гомотетия. Найдите центр и коэффициент этой гомотетии.
б) Докажите, что если $k_1k_2 = 1$, то композиция $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$ — параллельный перенос.

7. Трапеции $ABCD$ и $APQD$ имеют общее основание AD, причем длины всех их оснований попарно различны. Докажите, что на одной прямой лежат точки пересечения следующих пар прямых: а) AB и CD, AP и DQ, BP и CQ; б) AB и CD, AQ и DP, BQ и CP.

8. *Задача о трех колпаках*. а) Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.
б) Общие внутренние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, внешние к окружностям S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

9. Две неравные окружности ω_1, ω_2 с центрами O_1, O_2 касаются внешне окружности ω в точках A_1, A_2 соответственно. Пусть M — произвольная точка на ω, прямые MA_1 и MA_2 пересекают ω_1 и ω_2 в точках B_1 и B_2 соответственно. Докажите, что прямые O_1O_2, A_1A_2, B_1B_2 пересекаются в одной точке.

10. На продолжении стороны CD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) за точку D отмечена точка P, M — середина AD. Прямые PM и AC пересекаются в Q, PB и AD — в X, а BQ и AD — в Y. Докажите, что M — середина XY.

Неравенства в треугольнике

22 июля

Основное утверждение. Треугольник со сторонами a, b и c существует тогда и только тогда, когда существуют положительные числа x, y, z такие, что $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.

Далее в этом листке, мы будем считать, что a, b, c — стороны треугольника, p, S, r и R — его полупериметр, площадь, радиус вписанной и описанной окружностей соответственно.

1. Докажите, что

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leqslant abc.$$

2. Докажите, что

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

3. Докажите, что p, S, r и R выражаются через x, y, z следующим образом:

$$p = x + y + z; S = \sqrt{xyz(x + y + z)}; r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}}; R = \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4\sqrt{xyz(x + y + z)}}$$

4. Докажите, что $R \geqslant 2r$.

5. Докажите, что

(a) $2(ab + bc + ca) \geqslant a^2 + b^2 + c^2$;

(b) $2(ab + bc + ca) \geqslant 4S\sqrt{3} + a^2 + b^2 + c^2$.

6. Докажите, что

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \geqslant 0.$$

7. Докажите, что

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqslant 0.$$

8. Докажите, что

$$\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} \geqslant 3.$$

Неравенства в треугольнике

22 июля

Основное утверждение. Треугольник со сторонами a, b и c существует тогда и только тогда, когда существуют положительные числа x, y, z такие, что $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.

Далее в этом листке, мы будем считать, что a, b, c — стороны треугольника, p, S, r и R — его полупериметр, площадь, радиус вписанной и описанной окружностей соответственно.

1. Докажите, что

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leqslant abc.$$

2. Докажите, что

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

3. Докажите, что p, S, r и R выражаются через x, y, z следующим образом:

$$p = x + y + z; S = \sqrt{xyz(x + y + z)}; r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}}; R = \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4\sqrt{xyz(x + y + z)}}$$

4. Докажите, что $R \geqslant 2r$.

5. Докажите, что

(a) $2(ab + bc + ca) \geqslant a^2 + b^2 + c^2$;

(b) $2(ab + bc + ca) \geqslant 4S\sqrt{3} + a^2 + b^2 + c^2$.

6. Докажите, что

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \geqslant 0.$$

7. Докажите, что

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqslant 0.$$

8. Докажите, что

$$\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} \geqslant 3.$$