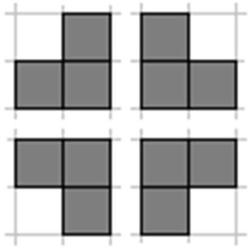
Уголки в прямоугольнике

04 июля

Постановка задачи



Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$ ($m, n \geq 2$). Есть неограниченный запас бумажных уголков из трех клеток. Уголки можно располагать внутри прямоугольника так, чтобы их границы шли по линиям сетки. Необходимо выяснить, при каких m и n можно разместить уголки так, чтобы каждая клетка была покрыта одинаковым числом слоев бумаги. В этом случае будем говорить, что прямоугольник *покрывается* уголками.

1. Докажите, что если прямоугольник покрывается уголками, то либо mn, либо число слоев делится на 3.
2. Докажите, что прямоугольник размером $2 \times n$ может быть покрыт уголками в 3 слоя.
3. Докажите, что если mn четно, то прямоугольник покрывается уголками.
4. Докажите, что прямоугольник $3 \times (2n + 1)$ не покрывается никаким числом слоев.
5. Покройте уголками в один слой какой-нибудь прямоугольник $5 \times (2n + 1)$.
6. Покройте уголками прямоугольник 7×7.
7. Укажите все прямоугольники $m \times n$, где mn – нечетно, которые не могут быть покрыты.
8. Укажите все прямоугольники $m \times n$, которые могут быть покрыты в один слой.

Векторы

05 июля

Определения. Отрезок, у которого указаны начало и конец, называется *направленным отрезком*. Направленные отрезки *равны*, если у них совпадают длина и направление. Множество всех равных между собой направленных отрезков называется *вектором*. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой.

Упражнения

1. а) Может ли длина суммы двух векторов быть меньше длины каждого из них?
б) Может ли длина разности двух векторов быть меньше разности их длин?

2. Нарисуйте два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Изобразите векторы $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = 3\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}$, $\vec{e} = -1{,}5\vec{b}$.

3. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и точка O. Известно, что $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{b} - 7\vec{a}$. Докажите, что точка C лежит на прямой AB. Верно ли, что точка C лежит на отрезке AB?

Задачи

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ векторы:
а) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{MN}$, где $AM : MB = CN : ND = 2 : 1$.

2. а) AM — медиана треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$.
б) Точка M делит отрезок BC в отношении $x : y$, считая от точки B. Докажите, что для любой точки O на плоскости верно равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{y\overrightarrow{OB}+x\overrightarrow{OC}}{x+y}$.

3. а) Пусть точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что для любой точки плоскости O верно равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$.
б) Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник.

4. Дан четырехугольник $ABCD$. Точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}}{2} = \frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}}{2}$.

5. На сторонах пятиугольника AB, BC, CD, DE отметили середины сторон K, L, M, N соответственно. P и Q — середины отрезков KM и LN. Докажите, что $PQ \parallel AE$, и найдите, во сколько раз отрезок AE больше отрезка PQ.

6. На стороне AB треугольника ABC отметили такую точку M, что $AM = 2MB$, на стороне BC — такую точку N, что $BN = 3NC$, а на стороне AC — ее середину P. Затем треугольник стерли, оставив только точки M, N и P. Как восстановить треугольник ABC?

7. На плоскости есть 2018 векторов, среди которых есть неколлинеарные. Сумма любых 2017 векторов коллинеарна с невключенным в эту сумму вектором. Докажите, что сумма всех векторов равна $\vec{0}$.

8. Сумма n векторов равна $\vec{0}$ ($n \geq 3$), и среди них нет сонаправленных. Докажите, что из этих векторов можно составить выпуклый n-угольник.

9. Из точки O на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Доказать, что можно выбрать несколько векторов (или, может быть, один вектор), длина суммы которых больше 1.

10. На сторонах треугольника ABC построили параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2 и CAA_1C_2. Обязательно ли из отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 можно составить треугольник?

Возвращение индукции

05 июля

Примеры

1. Дан связный граф без циклов (дерево), в котором n вершин. Докажите, что в нем n – 1 ребро.

2. Вершины некоторого выпуклого многоугольника с нечетным числом вершин покрашены в 3 цвета, причем любые две соседние вершины покрашены в разные цвета. Докажите, что многоугольник можно разрезать диагоналями на треугольники так, чтобы вершины каждого треугольника были покрашены в разные цвета.

Задачи

3. Дан выпуклый n-угольник, $n \geq 4$. В нем провели некоторые диагонали, причем никакие две диагонали не имеют общих внутренних точек. Докажите, что найдутся две (несоседние) вершины, из которых не выходит ни одной диагонали.

4. Несколько человек построились в две очереди одинаковой длины. Известно, что в каждой паре стоящий слева ниже стоящего справа. Докажите, что если обе очереди упорядочить по росту (от самого низкого), то это свойство сохранится.

5. Вдоль кольцевой автодороги стоит несколько бензоколонок. Общее количество бензина во всех бензоколонках достаточно для того, чтобы проехать один круг. Докажите, что автомобиль с изначально пустым баком может проехать круг по часовой стрелке, начав с некоторой бензоколонки. Размер бака достаточен для того, чтобы вместить весь бензин.

6. В стране некоторые пары городов соединены дорогами с односторонним движением, причем можно выехать из любого города, а затем в него вернуться. Докажите, что президент сможет разбить страну на регионы, содержащие больше одного города, так, чтобы внутри региона от любого города можно было добраться до любого другого. (В стране может быть только один регион.)

7. В некоторой связной шпионской сети города N участвует 77 человек (включая босса), причем босс знает 7 других шпионов, и никто не знает больше шпионов, чем знает босс. Однажды полиция города N изловила всех шпионов и хочет разместить их по камерам так, чтобы знакомых в одной камере не оказалось, и никто ни о чем не узнал. Докажите, что для этой цели достаточно 7 камер.

8. Даны такие натуральные числа a_1, a_2, ..., a_n, что ни одно из них не превосходит своего номера, а сумма всех их чётна. Докажите, что эти числа можно разбить на две группы с одинаковой суммой.

9. Пусть $p \leq n$, $q \leq m$ – натуральные числа. В клетках таблицы, состоящей из m строк и n столбцов, расставлены попарно различные числа. В каждой строчке подчеркнуты p наибольших чисел, в каждом столбце – q наибольших чисел. Докажите, что хотя бы pq чисел подчеркнуто дважды.

Вписанная

06 июля

1. Прямая PA касается описанной окружности треугольника ABC. Пусть C_1 и B_1 – основания перпендикуляров, опущенных из P на прямые AB и AC. Докажите, что BC перпендикулярно B_1C_1.

2. Окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую – в точках B и D. Докажите, что $AC \| BD$.

3. В треугольника ABC угол B равен 60°. Биссектрисы AK и CL пересекаются в точке I. Докажите, что $IK = IL$.

4. Четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны, вписан в окружность. Докажите, что продолжение перпендикуляра из точки пересечения диагоналей к одной из сторон делит противоположную сторону пополам.

5. Пусть D – отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно BC. Отрезки BD и CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что AD – биссектриса угла PAQ.

6. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. Окружность, описанная около треугольника ADB, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ADC, пересекает сторону AB в точке N (M, $N \neq A$). Пусть O – центр описанной окружности треугольника AMN. Докажите, что OD перпендикулярно BC.

7. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$). Точка X – основание перпендикуляра, опущенного из B на AO. AA_1 – высота треугольника ABC, M – середина BC. Докажите, что $XM = MA_1$.

8. В остроугольном треугольнике ABC отмечены ортоцентр H и середина M стороны BC. Прямая, проходящая через H перпендикулярно HM, пересекает стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что H – середина отрезка B_1C_1.

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр из B_1 на BC пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр из B на AK пересекает AC в точке L. Докажите, что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

Неравенства: начало

06 июля

Упражнения

1. Натуральные числа a, b, x и y таковы, что $a \geq b$, $x \geq y$. Докажите неравенство

$$ax + by - ay - bx \geq 0.$$

2. Докажите, что для всяких положительных a и b выполнено $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

3. При положительном x найдите минимум выражения $2x + \frac{3}{x}$.

Задачи

4. Для всяких положительных a и b докажите неравенство $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

5. Докажите, что если $a \geq b \geq c$, то $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \geq 0$.

6. Докажите неравенство $2x^2 + 9y^2 - 6xy + 4x + 4 \geq 0$. В каких случаях достигается равенство?

7. Докажите, что при любых x, y, z выполнено неравенство

$$x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1).$$

8. Докажите, что при любом x выполняется неравенство $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \geq -1$.

9. Докажите, что для любых вещественных чисел a, b выполнено: $a^2+ab+b^2 \geq 3(a + b - 1)$.

10. Положительные числа a и b таковы, что ${}^1/_a + {}^1/_b = 1$. Докажите неравенство

$$(a + b)^3 - a^3 - b^3 \geq 48.$$

11. Для любых двух различных нечётных простых чисел p и q докажите неравенство

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right)^2 > \frac{16}{pq}.$$

12. Доказать, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$ и $ac > 0$, то имеет место неравенство $\frac{a+b}{2a-b} + \frac{c+b}{2c-b} \geq 4$.

13. Для положительных чисел a, b, x, y, известно, что $ab \geq ax + by$, докажите неравенство

$$\sqrt{a+b} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Планарные графы

06 июля

Определение. *Планарный граф* – граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. *Плоский граф* – изображение планарного графа без пересечений ребер. Ребра плоского графа делят плоскость на части, которые называются *гранями*.

Формула Эйлера

1. Дан плоский граф. Обозначим количество вершин за В, ребер – за Р, граней – за Г.

а) Докажите, что если граф – дерево, то В + Г – Р = 2.

б) Докажите, что при удалении ребра, не являющимся мостом, величина В + Г – Р не изменяется.

в) Для связного плоского графа докажите формулу В + Г – Р = 2.

г) Чему равно В + Г – Р, если граф содержит К компонент связности?

Задачи

2. Докажите, что для любого связного плоского графа с хотя бы двумя ребрами, без петель и кратных ребер, выполняется неравенство 2Р ≥ 3Г.

3. Докажите, что для графа из предыдущей задачи выполняется неравенство Р ≤ 3В – 6.

Контрольный вопрос: что будет, если в графе не более 1 ребра, или есть петли и кратные ребра? Выполняется ли формула В + Г – Р = 2? Выполняется ли неравенство Р ≤ 3В – 6?

4. Как изменятся неравенства 3 и 4 задачи, если граф двудолен (все остальные свойства также выполняются)?

5. Докажите, что полный граф на пяти вершинах (K_5) и полный двудольный граф, обе доли которого содержат 3 вершины ($K_{3,3}$) – не планарны.

Рассмотрим выпуклый многогранник и точку внутри него. Поместим многогранник внутрь сферы с центром в этой точке, и спроецируем его из центра на сферу. У полученного на сфере графа ребра не пересекаются. Почему?

Поставим сферу на плоскость так, чтобы точка, диаметрально противоположная точке касания (*полюс*), не принадлежала нарисованному на сфере графу. Спроецируем из полюса на плоскость все точки сферы (*стереографическая проекция*). Получился плоский граф, соответствующий многограннику.

6. Докажите, что для выпуклого многогранника выполняется формула В + Г – Р = 2.

7. Приведите пример многогранника, для которого не выполняется эта формула.

8. а) Докажите, что у любого планарного графа есть вершина степени не больше 5.

б) Докажите, что у выпуклого многогранника есть грань, содержащая не больше 5 ребер.

9. Семиугольник разбили на выпуклые 5 и 6-угольники. Известно, что в каждой вершине семиугольника сходится хотя бы 2 части разбиения, и никакая вершина любого многоугольника не является внутренней точкой стороны другого многоугольника. Докажите, что 5-угольников не менее 13.

10. Пятиугольник разрезан на несколько многоугольников так, что все стороны пятиугольника остались неразрезанными. Докажите, что если число многоугольников не меньше пяти, то в одном из них найдется угол, который больше или равен 72°.

11. Для произвольной триангуляции многоугольника докажите равносильность трех условий: а) вершины триангуляции можно отметить так, что каждая грань несет три разных отметки 0, 1 и 2; б) все грани триангуляции можно правильно раскрасить в два цвета так, что любые две соседние грани окрашены различно; в) из каждой внутренней вершины триангуляции выходит четное число ребер.

Китайская теорема об остатках

07 июля

Упражнения

1. Сима отметила все натуральные числа, дающие остаток 7 при делении на 505. Федор перемножил n подряд идущих отмеченных чисел. Докажите, что если n не делится ни на 101, ни на 5, то получившееся произведение делится на n.

2. Опишите все числа a такие, что:

а) $a \equiv 2(mod\ 5)$ и $a \equiv 4(mod\ 6)$;

б) $a \equiv 2(mod\ 5)$, $a \equiv 4(mod\ 6)$ и $a \equiv 3(mod\ 7)$;

в) $a \equiv 2(mod\ 9)$ и $a \equiv 5(mod\ 6)$;

г) $a \equiv 2(mod\ 9)$ и $a \equiv 4(mod\ 6)$.

Китайская теорема об остатках. *Пусть есть n попарно взаимно простых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и еще n чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$ такие, что для всех $1 \le i \le n$ выполняется $0 \le r_i \le (a_i - 1)$. Пусть $A = a_1 a_2 \dots a_n$. Тогда существует единственное число k такое, что $0 \le k \le A - 1$ и для всех $1 \le i \le n$ верно, что $k \equiv r_i\ (mod\ a_i)$.*

3. а) Докажите, что количество наборов $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ таких, что $0 \le r_i \le (a_i - 1)$ для всех $1 \le i \le n$ равно A.

б) Докажите, что наборы остатков, соответствующие различным числам k_1 и k_2 из отрезка $[0; A - 1]$, не могут совпадать.

в) Докажите Китайскую теорему об остатках.

4. Запишем набор сравнений:

$$
\begin{gathered}
k_1 = r_1 \\
k_2 = k_1 + z_1 a_1 \equiv r_2 (mod\ a_2) \\
k_3 = k_2 + z_2 a_1 a_2 \equiv r_3 (mod\ a_3) \\
\vdots \\
k_n = k_{n-1} + z_{n-1} a_1 a_2 \dots a_{n-1} \equiv r_n (mod\ a_n)
\end{gathered}
$$

а) Докажите, что можно подобрать такие числа $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, чтобы выполнялись все сравнения и неравенство $0 \le k_n \le A - 1$.

б) Докажите, что число $k = k_n$ подходит под условие Китайской теоремы об остатках.

Задачи

5. Из натуральных чисел, меньших 1000000, Оксана выписала все числа, которые при делении на 23 дают остаток 17, а при делении на 11 остаток 5. Маша из натуральных чисел, меньших 1000000, выписала все дающие остаток 11 при делении на 21, и остаток 3 при делении на 13. а) У кого чисел больше? б) Найдутся ли в списках Оксаны и Маши одинаковые числа?

6. Рекламный проспект набора кубиков, выпускаемого фабрикой «Математические игрушки» утверждает: «Из нашего набора Ваш малыш всегда сможет сложить несколько одинаковых кубов, даже если несколько (но не больше 20) кубиков будут потеряны». Можно ли верить этой рекламе?

7. Натуральный ряд представлен в виде объединения нескольких непересекающихся арифметических прогрессий. Докажите, что разности любых двух прогрессий имеют общий делитель отличный от единицы.

8. а) Докажите, что найдутся такие целые числа $d_1, d_2, \dots, d_n$, что для любого i $(1 \le i \le n)$ выполняется сравнение $\frac{A}{a_i} d_i \equiv 1 (mod\ a_i)$.

б) Докажите, что число k может быть выражено формулой

$$k = \frac{A}{a_1} d_1 r_1 + \frac{A}{a_2} d_2 r_2 + \cdots + \frac{A}{a_n} d_n r_n$$

(В задаче используются обозначения из формулировки КТО).

9. Докажите, что можно переставить все натуральные числа в ряд так, чтобы сумма любых n первых чисел делилась на n. Каждое натуральное число должно присутствовать, причем ровно один раз.

10. а) Верно ли, что среди любых 9 последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое со всеми остальными?

б) Верно ли, что для любого $k > 1$ среди любых k последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое со всеми остальными?

Разделяй и властвуй!

07 июля

Теорема (неравенство между средним квадратичным, арифметическим, геометрическим и гармоническим). Для любых вещественных положительных чисел a_1, a_2, …, a_n выполнены следующие неравенства:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

Замечание. Когда речь идёт о неравенстве между средним квадратичным и средним арифметическим, можно говорить о любых вещественных числах.

1. Докажите, что для любых положительных a, b и c выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq 9.$$

2. Для положительного x и натуральных n и m найдите минимум выражения

а) $x^2+\frac{2}{x}$; б) $x^4+\frac{3}{x}$; в) $ax^n+\frac{b}{x^m}$.

3. Для положительных x, y и z с произведением $xyz = 1$ докажите неравенство

$$(2+x)(2+y)(2+z) \geq 27.$$

4. Докажите неравенство $\frac{a^6+b^9}{4} \geq 3a^2b^3-16$ при $b \geq 0$.

5. Докажите неравенства

а) $\sqrt{4-a}+\sqrt{a+5} \leq 3\sqrt{2}$; б) $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a} \leq 12$.

6. Для любых вещественных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2+b^2+c^2+2(a-b+1)$$

7. Для положительных x, y и z выполняется равенство $x^2+y^2+z^2=3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq x+y+z.$$

8. Для положительных чисел a_1, a_2, …, a_n, a_{n+1} докажите, что

$$(n+1)\sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_{n+1}} - n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leq a_{n+1}.$$

9. Сумма квадратов вещественных чисел a, b и c равна 1. Докажите, что

$$a\sqrt{b^2+c^2}+b\sqrt{c^2+a^2}+c\sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{2}.$$

10. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{b^3c}+\frac{b}{c^3a}+\frac{c}{a^3b} \geq \frac{2}{b^2+c^4}+\frac{2}{c^2+a^4}+\frac{2}{a^2+b^4}.$$

Массы

09 июля

Определения. *Материальная точка mA* — это точка A вместе с размещенной в ней массой m. *Центром масс* системы материальных точек m_1A_1, ..., m_nA_n называется материальная точка mZ, для которой $m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \vec{0}$ и $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

Правило рычага. Центр масс $(m_1 + m_2)Z$ двух материальных точек m_1A_1 и m_2A_2 расположен на прямой A_1A_2, причем $m_1\overrightarrow{ZA_1} = -m_2\overrightarrow{ZA_2}$.

Основная теорема. Если Z — центр масс системы материальных точек m_1M_1, …, m_nM_n, причем $m_1 + \cdots + m_n \neq 0$, то для любой точки O имеет место $\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$. Обратно, если хотя бы для одной точки O выполнено это равенство, то Z — центр масс системы.

Следствие. Центр масс существует и единственный для любой системы материальных точек с ненулевой суммой масс.

Правило группировки. Если часть точек системы заменить их центром масс, то центр масс системы не изменится.

Упражнения

1. Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной 4. Точка P удовлетворяет условию $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$. Найдите расстояние между точкой P и центром квадрата.

2. В вершины треугольника ABC помещены массы 1. Где находится их центр масс? Докажите, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины.

3. Какие массы нужно расположить в вершинах треугольника ABC, чтобы центр масс был расположен в точке P — в середине средней линии, параллельной AB? В каком отношении прямая BP делит сторону AC?

Задачи

4. A_1, A_2, ..., A_6 — середины последовательных сторон шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ совпадают.

5. Из четырех точек A, B, C, D никакие три не лежат на одной прямой; M и N — середины отрезков AB и CD; K — середина отрезка MN; P — точка пересечения медиан треугольника BCD. Докажите, что точки A, K, P лежат на одной прямой.

6. Какие массы нужно поставить в вершинах треугольника, чтобы центр масс находился а) в середине биссектрисы; б) в точке пересечения биссектрис?

7. ***Теорема о пропорциональном делении.*** В треугольнике ABC точка A_1 делит сторону BC в отношении $p : q$, считая от вершины B, точка C_1 делит сторону AB в отношении $m : n$, считая от вершины A. Пусть K — точка пересечения AA_1 и CC_1. Тогда $\frac{AK}{KA_1} = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{p}{q}\right)$.

8. В треугольнике ABC точка F делит сторону BC в отношении 3 : 1, считая от вершины

B. Точки M и P отсекают от сторон AB и AC по одной шестой, считая соответственно от вершины A и от вершины C. В каком отношении делится каждый из отрезков MP и AF точкой их пересечения?

9. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1. В каком отношении делит эта прямая медиану CC_1?

10. На сторона AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно. Оказалось, что $KM \| BC$, $LN \| CD$. Отрезки LN и KM пересекаются в точке O. Докажите, что прямые BN, DK и CO пересекаются в одной точке.

11. Три мухи равной массы ползают по сторонам треугольника ABC так, что их центр масс остается на месте. Докажите, что он совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC, если известно, что одна муха проползла по всей границе треугольника.

12. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки D и E соответственно. F – точка пересечения AE и CD. Докажите, что середины отрезков AC, DE, BF лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*).

Направленные углы

Определение. *Направленный угол* между прямыми a и b — угол, на который нужно повернуть прямую a против часовой стрелки, чтобы получить параллельную b прямую.

Обозначение. $\angle(a, b)$

Свойства направленных углов

- Направленный угол определен с точностью до угла, кратного 180°.
- **Антисимметричность.** $\angle(a, b) = -\angle(b, a)$.
- **Замена точек прямой** Если A, B, C — коллинеарны, то $\angle(AB, l) = (BC, l)$.
- **Вспомогательная прямая.** $\angle(a, b) = \angle(a, c) + \angle(c, b)$
- **Замена точек на окружности**. Если точки A, B, C, D лежат на одной окружности, то $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$.

1. Запишите в направленных углах: «углы при основании равнобедренного треугольника равны», «угол между касательной и хордой равен вписанному углу».

2. Докажите, что если $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$, то A, B, C, D лежат на одной прямой или окружности.

3. Две окружности пересекаются в точках E и F. На одной окружности выбрали точки A и B. AE и BF пресекают вторую окружность в точках C и D соответственно. Докажите, что $AB \parallel CD$

   (a) Сколько разных картинок может быть в данной задаче?

   (b) Составьте «список прямых» и «список окружностей», содержащих хотя бы по три точки из условия задачи.

   (c) Решите задачу.

4. Две окружности пересекаются в точках E и F. Некоторая прямая пересекает первую окружность в точках A и C, а вторую — в точках B и D. Докажите, что или $\angle AEB = \angle CFD$, или они в сумме дают 180°.

5. **Прямая Симсона.** На описанной окружности треугольника ABC взяли точку M. Из точки M опустили перпендикуляры на прямые, содержащие стороны треугольника. Докажите, что основания перпендикуляров лежат на одной прямой.

6. Четыре прямые образуют четыре треугольника.

   (a) Докажите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке (**точка Микеля**).

   (b) Докажите, что проекции точки Микеля на эти прямые лежат на одной прямой.

(c)Докажите, что точка Микеля и четыре центра описанных окружностей этих треугольников лежат на одной из окружностей

7. Даны шесть точек на окружности — A, B, C, D, E и F, AB и DE пересекаются в точке G, BC и EF пересекаются в точке H, CD и FA пересекаются в точке K. Точка X лежит на прямой AB, а точка Y лежит на прямой DE так, что E, B, H, X, Y лежат на одной окружности. Докажите, что:

   (a) $AD \parallel XY$.

   (b) $AK \parallel XH$.

   (c) $DK \parallel YH$.

   (d) G, K, H лежат на одной прямой (этот пункт — про подобие треугольников!). Мы сейчас доказали **теорему Паскаля**.

   (e) Какие получатся утверждения, в случае совпадения некоторых из шести точек.

Красим ребра и вершины

09 июля

Определение. Раскраска вершин графа в несколько цветов называется *правильной*, если концы любого ребра покрашены в разные цвета.

1. Известно, что любой замкнутый маршрут в графе состоит из четного числа ребер. Докажите, что вершины такого графа можно правильно покрасить в два цвета.

2. Пусть в графе степени всех вершин не превосходят числа d. Докажите, что:

а) его вершины можно правильно раскрасить в $d + 1$ цвет.

б) его вершины можно раскрасить в $d^2 + 1$ цвет таким образом, чтобы любые две одноцветные вершины не были соединены и не имели общего соседа.

3. Пусть в связном графе степени всех вершин не превосходят числа d, и есть хотя бы одна вершина степени меньше d. Докажите, что его вершины можно правильно покрасить в d цветов.

4. Вершины некоторого графа нельзя правильным образом раскрасить в менее, чем k цветов. Докажите, что для любой правильной раскраски вершин этого графа в k цветов существует путь, в котором встречается ровно по одной вершине каждого цвета.

5. В графе самый длинный несамопересекающийся путь проходит через k вершин. Докажите, что граф можно правильно раскрасить в k цветов.

6. Все грани некоторого многогранника являются треугольниками. Докажите, что ребра этого многогранника можно раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы между любыми двумя вершинами можно было пройти как только по черным, так и только по белым ребрам.

7. В городе Цветочном n площадей и m улиц ($m \geq n + 1$). Каждая улица соединяет две площади и не проходит через другие площади. По существующей в городе традиции улица может называться либо Синей, либо Красной. Ежегодно в городе происходит переименование: выбирается площадь и переименовываются все выходящие из нее улицы. Докажите, что вначале можно назвать улицы так, что переименованиями нельзя добиться одинаковых названий у всех улиц города.

8. В графе есть вершина нечетной степени. Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в черный и белый цвета так, чтобы для каждой вершины количества выходящих из нее белых и черных ребер отличались не более чем на 1.

Неравенства для смельчаков. 10 июля

1. Пусть $a, b, c > 0$. Сравните числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{a+c}{b+c}$.

2. Даны числа $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Докажите неравенство a) $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \leqslant 1$; b) $\frac{x}{1+y+z} + \frac{y}{1+z+x} + \frac{z}{1+x+y} \leqslant 1$.

3. Докажите, что при любых положительных a, b и c верно неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} > \sqrt{a+b+c}.$$

4. Для любых положительных a, b, c докажите неравенство

$$1 \leqslant \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leqslant 2.$$

5. Пусть $x, y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$. Докажите, что $\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} \geqslant \frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}$.

6. Пусть $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. Докажите, что

$$a^{17} + b^{17} + c^{17} - a^{10}b^7 - b^{10}c^7 - c^{10}a^7 \leqslant 1.$$

7. Пусть $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{7+x^2+y^2} + \frac{y}{7+y^2+z^2} + \frac{z}{7+z^2+x^2} \leqslant \frac{1}{3}.$$

8. Для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, произведение которых равно 1, докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} \geqslant 1.$$

Неравенства для смельчаков. 10 июля

1. Пусть $a, b, c > 0$. Сравните числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{a+c}{b+c}$.

2. Даны числа $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Докажите неравенство a) $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \leqslant 1$; b) $\frac{x}{1+y+z} + \frac{y}{1+z+x} + \frac{z}{1+x+y} \leqslant 1$.

3. Докажите, что при любых положительных a, b и c верно неравенство

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} > \sqrt{a+b+c}.$$

4. Для любых положительных a, b, c докажите неравенство

$$1 \leqslant \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leqslant 2.$$

5. Пусть $x, y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$. Докажите, что $\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} \geqslant \frac{1-(x+y)}{1+(x+y)}$.

6. Пусть $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$. Докажите, что

$$a^{17} + b^{17} + c^{17} - a^{10}b^7 - b^{10}c^7 - c^{10}a^7 \leqslant 1.$$

7. Пусть $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{7+x^2+y^2} + \frac{y}{7+y^2+z^2} + \frac{z}{7+z^2+x^2} \leqslant \frac{1}{3}.$$

8. Для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, произведение которых равно 1, докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} \geqslant 1.$$

Функция Эйлера

10 июля

Определение. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ определяется как количество взаимно простых с n натуральных чисел, не превосходящих n.

1. Найдите:
   (a) $\varphi(24)$, $\varphi(100)$;
   (b) $\varphi(p)$, где p — простое;
   (c) $\varphi(p^k)$, где p — простое.
2. Докажите, что при $n > 2$ $\varphi(n)$ — четно.
3. Найдите сумму взаимно простых с n чисел, не превосходящих n.
4. Пусть m, n — взаимно простые натуральные числа. Строки таблицы пронумерованы числами от 0 до $n-1$, а столбцы — от 0 до $m-1$. На пересечении строчки j и столбика i записывается остаток от деления числа $in+jm$ на mn.
   (a) Докажите, что все числа в таблице будут различны.
   (b) Где в этой таблице числа, взаимно простые с mn? Докажите, что $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ (**мультипликативность** функции Эйлера).
   (c) Докажите **формулу Эйлера**:
   $$\varphi(n) = (p_1-1)p_1^{k_1-1}\dots(p_m-1)p_m^{k_m-1} = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_m}\right),$$
   где $n = p_1^{k_1}\dots p_m^{k_m}$.
5. Докажите, что $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$.
6. Найдите все такие x, что (a) $\varphi(x) = 24$; (b) $\varphi(x) = 56$.
7. Найдите все такие x, что (a) $\varphi(x) = \frac{x}{2}$; (b) $\varphi(x) = \frac{x}{3}$; (c) $\varphi(x) = \frac{x}{7}$.
8. Рассмотрим ряд дробей: $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dots, \dfrac{n}{n}$. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на их НОД.
   (a) Сколько будет дробей со знаменателем d, где d — делитель n?
   (b) Докажите **Тождество Эйлера-Гаусса**: $\varphi(d_1) + \ldots + \varphi(d_s) = n$, где $d_1, \dots, d_s$ — все делители числа n.
9. На каждой из бесконечного числа карточек написано натуральное число, причем для любого n имеется ровно n карточек, на которых написаны его делители. На скольких карточках написано число 2019?
10. (a) $\varphi(\text{НОД}(m,n))\varphi(\text{НОК}(m,n)) = \varphi(m)\varphi(n)$;
    (b) $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\dfrac{\text{НОД}(m,n)}{\varphi(\text{НОД}(m,n))}$.
11. Докажите, что для $n > 6$ выполнено неравенство $\varphi(n) \geq \sqrt{n}$.

Массы - 2

11 июля

Упражнения

1. Отрезок A_0A_4 разделен на четыре равных отрезка точками A_1, A_2, A_3. В точке A_3 помещена масса $m = 1$. Какую массу m_k следует поместить в точке A_k, чтобы при каждом $k = 1, 2, 4$ центром масс двух материальных точек $1A_3$ и m_kA_k была точка A_0?

2. В трех вершинах квадрата стоят массы 1, а в четвертой вершине — (–2). Где находится центр масс этой системы?

3. Расположите массы в трех вершинах параллелограмма так, чтобы их центр масс оказался в четвертой вершине.

Задачи

4. Какие массы следует поместить в вершинах треугольнпка ABC, имеющего длины сорон a, b, c, чтобы центром масс этих трех точек был центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB и продолжения двух других сторон?

5. Дан треугольник $A_1A_2A_3$, B_1, B_2, B_3 — середины сторон A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 соответсвенно. P — произвольная точка плоскости, P_1, P_2, P_3 — точки, симметричные P относительно точек B_1, B_2, B_3. Докажите, что прямые A_1P_1, A_2P_2 и A_3P_3 пересекаются в одной точке.

6. а) ***Теорема Чевы.*** На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

б) ***Теорема Менелая.*** На сторонах AB, BC и продолжении стороны AC за точку С треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

7. На биссектрисе угла A неравнобедренного треугольника ABC выбрана точка K. Прямые BK и CK пересекают стороны AC и AB в точках L и M соответственно. Докажите, что прямая LM проходит через основание биссектрисы внешнего угла A треугольника.

8. Докажите, что центр Z трех масс m_1, m_2, m_3 с ненулевой суммой, помещенных в вершинах некоторого треугольника $A_1A_2A_3$, лежит на прямой, проходящей через вершину A_1 и параллельной стороне A_2A_3, тогда и только тогда, когда $m_2 + m_3 = 0$.

9. В трех вершинах треугольника ABC стоят массы 1, а в центре описанной около этого треугольника окружности — (–2). Где находится центр масс этой системы?

10. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Через середину каждой стороны четырехугольника проведена прямая, перпендикулярная противоположной стороне. Докажите, что все эти четыре прямые пересекаются в одной точке.

11. В четырехугольник вписана окружность. Докажите, что если в каждую точку касания окружности со стороной поставить массу, равную длине этой стороны, то центр масс совпадет с центром окружности.

Перестановки

11 июля

Определение. *Перестановкой* на некотором конечном множестве M будем называть некоторый способ поменять элементы этого множества местами. *Тождественная перестановка* — перестановка, которая ничего не переставляет. Мы будем рассматривать только ситуацию, когда M состоит из натуральных чисел 1; 2; …; n. Перестановке мы сопоставим табличку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Здесь $a_1, a_2, \dots a_n$ — переставленный местами набор чисел от 1 до n.

Определение. *Произведением* перестановок a и b называется последовательное выполнение их (справа налево) и обозначается как $a \cdot b$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Найдите произведение перестановок а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Запишите все перестановки на множестве из трех элементов. Сколько существует перестановок на множестве из n элементов?

3. Доказать, что при $n > 2$ множество перестановок *некоммутативно*, то есть найти две такие перестановки a и b, что $a \cdot b \neq b \cdot a$.

Определение. *Циклом* называется перестановка, которая переводит некий элемент a_1 в a_2, a_2 в a_3, ..., a_{k-1} в a_k, a_k в a_1, а остальные оставляет на месте. *Транспозицией* называется цикл длины 2. Два цикла называются *независимыми*, если никакой элемент не сдвигается и первой, и второй перестановкой одновременно. Цикл для краткости принято обозначать строкой $(a_1a_2\dots a_k)$. Число k называется *длиной* цикла.

Задачи

4. Докажите, что любая перестановка однозначно с точностью до перестановки множителей разлагается в произведение независимых циклов.

5. Пусть f – перестановка из n элементов. Пусть k – наименьшее число такое, что $f \cdot f \cdot \dots \cdot f$ (k раз) – тождественное отображение. Докажите, что НОК(1; 2; …; n) делится на k.

Определение. Транспозиция называется *элементарной*, если она меняет местами два элемента, которые стоят на соседних местах.

6. Докажите, что каждая перестановка может быть представлена в виде произведения транспозиций. Единственно ли такое разложение? Верно ли, что любая перестановка представляется в виде произведения независимых транспозиций? Произведения элементарных транспозиций?

7. Оля написала на карточках числа от 1 до n и разложила карточки в некотором порядке. Она умеет менять местами две самые левые карточки, а также переставлять самую правую карточку в левый конец. Всегда ли она сможет выставить карточки в порядке возрастания?

8. На полке в произвольном порядке стоят десять томов энциклопедии, пронумерованных от 1 до 10. Разрешается менять местами любые два тома, между которыми стоит не меньше четырех других томов. Всегда ли можно расставить все тома по возрастанию номеров?

9. В отряде восьмого класса разрешены только парные обмены задачами, и каждый ученик может совершить только один обмен в день. Докажите, что любой сложный обмен (при котором каждый ученик отдает одну задачу и получает одну задачу) можно совершить за два дня.

10. На полке стоят 2018 томов энциклопедии. Каждое утро библиотекарь Федя берет три тома и как-то расставляет их на тех же местах, а каждый вечер уборщица Дуся меняет какие-то два тома местами. Докажите, что Дуся может действовать так, что в любой момент времени на своих местах будут стоять не более пяти томов (исходно тома расставляет уборщица).

11. а) На полке стоят 2018 томов энциклопедии. Каждое утро библиотекарь Федя меняет местами какие-то два тома. Какого количества дней наверняка хватит Феде, чтобы упорядочить все тома, как бы они ни были расставлены вначале?

б) А сколько дней заведомо хватит Феде, если каждое утро он меняет местами по три тома?

Дополнительные построения

12 июля

1. Внутри прямоугольника $ABCD$ выбрана произвольная точка M. Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, стороны которого равны соответственно отрезкам AM, BM, CM и DM.

2. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 1, а угол ABC равен 20°. На стороне AB выбирают произвольную точку K, а на стороне BC — произвольную точку E. Найдите минимум суммы $AE + EK + KC$.

3. Один из углов остроугольного треугольника равен 30°. На каждой его стороне выбрали по одной точке. Докажите, что минимальный периметр образованного этими точками треугольника равен одной из высот исходного треугольника.

4. В равностороннем треугольнике ABC взята точка M так, что угол AMC равен 150°. Докажите, что из отрезков AM, BM и CM можно сложить прямоугольный треугольник.

5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$, длина стороны которого равна a, отмечены точки M и N соответственно так, что площадь треугольника AMN равна сумме площадей треугольников ABM и ADN. Найдите угол MAN и длину высоты треугольника AMN, проведенной из вершины A.

6. На меньшей дуге BC описанной окружности правильного треугольника ABC взята произвольная точка M. Докажите, что $AM = MC + BM$.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны стороны AB, BC и CD, M — середина стороны AD. Известно, что угол BMC — прямой. Найдите угол между диагоналями AC и BD.

8. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1 и C_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2 соответственно так, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1B_2 равны, а угол между каждыми двумя из них равен 60°. Докажите, что $\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{B_1B_2}{AC} = \frac{C_1C_2}{AB}$.

9. В треугольнике ABC точка M — середина BC, AD — его высота. Докажите, что $\angle B = 2\angle C$ тогда и только тогда, когда $AB = 2MD$.

10. В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle C$. Через вершину A угла BAC проведены прямые, делящие угол на три равные части, которые пересекают серединый перепендикуляр к отрезку BC в точках P и Q (точка P внутри угла BAQ). Докажите, что точка P — центр описанной окружности треугольника BQC.

Матбой полупрофи

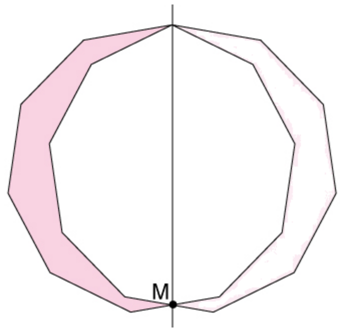
12 июля

1. Даны натуральные числа a, b, c, d. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left[\frac{a+b+c}{d}\right]+\left[\frac{a+b+d}{c}\right]+\left[\frac{a+c+d}{b}\right]+\left[\frac{b+c+d}{a}\right].$$

2. Пусть r — натуральное число. Докажите, что если граф на n вершинах не содержит простых циклов длины $2r$ или меньше, то он содержит не более n^{2017} простых циклов длины ровно $2017r$.

3. Два правильных десятиугольника площади 80 расположены как на рисунке справа (M — середина сторон). Найдите площадь закрашенной части.



4. К натуральному числу $a > 1$ приписали это же число и получили число b, кратное a^2. Найдите все возможные значения числа $\dfrac{b}{a^2}$.

5. Числа от 2 до 2018 разбиваются на несколько групп так, что наибольший общий делитель двух чисел из одной группы никогда не лежит в той же группе. Какое наименьшее количество групп для этого нужно?

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно, BH — высота. Точка K симметрична точке H относительно B_1C_1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой BK.

7. Сто номерков выложили в ряд в порядке возрастания: $00, 01, 02, 03, \ldots, 99$. Затем номерки переставили так, что каждый следующий номерок стал получаться из предыдущего увеличением или уменьшением ровно одной из цифр на 1 (например, после 29 может идти 19, 39 или 28, а 30 или 20 — не может). Какое наибольшее число номерков могло остаться на своих местах?

8. Две противоположные стороны квадрата $n \times n$ окрашены в красный цвет, а две другие — в синий. Аня и Боря по очереди закрашивают по одной клетке квадрата по такому правилу: Аня может закрасить в красный цвет незакрашенную клетку, у которой уже есть красная сторона, а Боря – в синий цвет незакрашенную клетку, у которой уже есть синяя сторона. Игрок, которому удалось соединить стороны своего цвета цепью из клеток своего цвета (в цепи каждые две соседние клетки имеют общую сторону), выигрывает, а если все клетки будут закрашены и такой цепи не появится, игра считается закончившейся вничью. При каких n у одного из игроков есть выигрышная стратегия?

Многочлены, введение

14 июля

Определения. *Многочлен* – это выражение вида $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, коэффициенты которого принадлежат некоторому числовому множеству **K**. *Степень многочлена* – $deg\, P(x) = n$. a_n – *старший* коэффициент, a_0 – *свободный член*. Многочлены *равны*, если у них совпадают все коэффициенты. Вместо x можно подставить любое число x_0, т.е. вычислить *значение в точке* x_0. Если это значение равно 0, то x_0 называют *корнем* многочлена.

1. Найдите степень и старший коэффициент следующих многочленов:

а) $(x+1)^{10}(1-2x^2)^3$; б) $(x^2+x+1)^6-(x+1)^{12}$.

2. Найдите свободный член и сумму коэффициентов следующих многочленов:

а) $(x^2-x+1)^{2016}$; б) $(3x^2-4x-2)^{15}$.

3. Докажите, что если в выражении $(x^2-x+1)^{2016}$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то какой-нибудь коэффициент полученного многочлена будет отрицательным.

Теорема (определение) о делении с остатком. Для любых многочленов $A(x)$ и $B(x) \neq 0$ существуют единственные* многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ такие, что $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ и $deg\, B(x) > deg\, R(x)$. Если $R(x) \equiv 0$, то $A(x)$ *делится* на $B(x)$.

4. Поделите в столбик:

а) $3x^4-7x^3+12x^2-10x+8$ на x^2-2x+2; б) $x^{105}+x+1$ на x^2-1.

Теорема Безу. Даны многочлен $P(x)$ и число a. Тогда многочлен $P(x)$ можно представить в виде $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$, притом $deg\, Q(x) = deg\, P(x) - 1$.

Следствие. Если $P(x)$ имеет корень a, то его можно представить в виде $P(x) = (x - a)Q(x)$.

Следствие 2. Многочлен степени n имеет не более n различных корней*.

5. Найдите, при каких a и b многочлен $x^{10}+ax^2+bx+1$ делится на x^2-1.

6. В лес за грибами пошли 11 девочек и n мальчиков. Вместе они собрали $n^2 + 9n - 2$ гриба, причём все они собрали поровну грибов. Кого было больше: мальчиков или девочек?

7. Найдите все целые x, при которых число $x^4+3x^3+2x^2+3x-1$ делится на x^2+1.

8. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $(x - 2)$ и $(x - 3)$ соответственно равны 5 и 7. Найдите остаток от деления $P(x)$ на $(x - 2)(x - 3)$.

9. Докажите, что если многочлен степени не выше n какое-то значение принимает более n раз, то он является константой.

б) Докажите единственность в теореме о делении с остатком.

10. Про многочлен P(x) степени 10 с действительными коэффициентами известно, что $P(1) = P(-1), \ldots, P(5) = P(-5)$. Докажите, что $P(x) = P(-x)$ для любого x.

11. Многочлен P такой, что $P(x) = P(-x)$ при любом x. Докажите, что найдется такой многочлен Q, что $P(x) = Q(x^2)$ при любом x.

*(Замечание: правда для этого нужно потребовать от **K** выполнение условия $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ или $b = 0$).

Перестановки-2

14 июля

Определение. Рассмотрим перестановку s множества $\{1, ..., n\}$. Будем говорить, что пара (i, j), для которой $i < j$, но $a_i > a_j$ образует *инверсию* (или *беспорядок*). Перестановка называется *чётной*, если число её инверсий чётно.

Упражнения

1. Пусть числа выставлены в обратном порядке (т. е. n, $n - 1$, …, 2, 1). Найдите чётность этой перестановки.

2. Пусть порядок чисел следующий: 2, 3,…, n, 1. Найдите чётность этой перестановки.

3. Докажите, что произведение четной перестановки и транспозиции нечетно, а нечетной перестановки и транспозиции четно.

4. Докажите, что чётная перестановка является произведением чётного числа транспозиций, а нечётная — нечётного числа.

5. Докажите, что произведение двух перестановок одной чётности чётна, а произведение перестановок разной чётности нечётна.

Задачи

6. Каких перестановок больше: четных или нечетных?

7. В некотором городе разрешены только тройные обмены (семья А переезжает в квартиру Б, семья Б переезжает в квартиру С, семья С переезжает в квартиру А). Может ли в результате нескольких обменов получиться так, что семья Ивановых поменяется квартирами с семьёй Петровых, а все остальные жители останутся при своих квартирах?

8. Докажите, что любая четная перестановка представляется в виде произведения циклов длины 3.

9. На прямой стоят две фишки. Слева — красная, справа — синяя. Разрешается проводить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю — слева?

10. а) Докажите, что в игре «Пятнашки» нельзя поменять местами числа 14 и 15, а остальные оставить на своих местах.

б) Докажите, что любое изначальное расположение пятнашек можно привести либо к правильному, либо к расположению, отличному от правильного перестановкой чисел 14 и 15.

Движения

14 июля

Определение. *Движением* называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

1. Докажите, что при движении отрезок переходит в отрезок, прямая — в прямую, треугольник — в равный себе треугольник, угол — в равный себе угол.

Определение. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на такую точку M', что $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{r}$, называется *параллельным переносом* T_r на заданный вектор $\overrightarrow{r}$.

Определение. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на симметричную ей точку M' относительно прямой l, называется *осевой симметрией* S_l.

Определение. *Поворотом* вокруг точки O на ориентированный угол α называется преобразование плоскости R_O^α, которое каждую точку M отображает на такую точку M', что $OM = OM'$ и $\sphericalangle MOM' = \alpha$.

Определение. *Центральной симметрией* относительно точки O называется преобразование плоскости Z_O, которое переводит точку M в такую точку M', что O — середина отрезка MM' (поворот на $180°$).

Упражнения.

2. Выразите через стороны трапеции длину отрезка, соединяющего середины оснований.

3. В треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1, а серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1. Докажите, что прямая B_1C_1 касается вписанной окружности треугольника ABC.

4. Через центр правильного треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен $60°$. Докажите, что отрезки этих прямых, являющиеся их пересечением с треугольником, равны.

Задачи.

5. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ вне его построен треугольник ABE. Через точки C и D проведены перпендикуляры CM и DN соответственно к прямым AE и BE. Докажите, что точка пересечения CM и DN принадлежит прямой, содержащей высоту треугольника ABE.

6. Внутри квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P. Через вершины A, B, C, D проведены перпендикуляры к прямым PB, PC, PD, PA соответственно. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

7. Внутри угла с вершиной O дана точка M. Постройте прямую OM циркулем и линейкой, не используя точку O.

8. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

9. Даны две концентрические окружности. Постройте с помощью циркуля и линейки квадрат так, чтобы две его смежные вершины лежали на одной окружности, а две другие — на другой.

10. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Докажите, что прямая, соединяющая центр описанной окружности треугольника и его ортоцентр, образует со сторонами угла A правильный треугольник.

11. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону от него построены правильные треугольники ABC_1, AB_1C и A_1BC. Докажите, что
(a) $AA_1 = BB_1 = CC_1$
(b) меньший угол между AA_1 и BB_1 равен 60°
(c) AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке T_1 (первая точка Торичелли)
(d) Докажите аналогичное утверждение для внутреннего построения правильных треугольников (вторая точка Торичелли)

12. Докажите, что в треугольнике с углами меньше 120° сумма расстояний $(XA + XB + XC)$ минимальна при $X = T_1$.

13. $(*)$ Докажите, что в треугольнике с углом больше 120° минимум достигается в вершине тупого угла.

Транснеравенство. 15 июля.

1. a) Пусть $c_i \leqslant c_{i+1}$. Докажите, что $a_1c_1 + \ldots + \alpha_i c_i + a_{i+1}c_{i+1} + \ldots a_n c_n \leqslant a_1c_1 + \ldots + a_i c_{i+1} + a_{i+1}c_i + \ldots + a_n c_n$.
b) Докажите, что если в перестановке k инверсий, то она представима в виде произведения k элементарных транспозиций.
c) Докажите, что $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \leqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$.
d) Докажите, что $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$.

2. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$ при $a, b, c, d > 0$.

3. Пусть $a, b, c \geqslant 0$. Используя *транснеравенство*, докажите, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$.

4. Для положительных чисел x, y и z докажите, что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

5. Для положительных a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

6. Для положительных a, b и c докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

7. Для положительных a, b и c докажите, что

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

8. *Неравенство Чебышева.* Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Докажите, что
a) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqslant n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)$;
b) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \geqslant n(a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + b_na_1)$.

9. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ и $a+b+c+d \geqslant 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geqslant 1$.

10. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите, что

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant a + b + c.$$

11. Вместо «квадратиков» в выражении

$$\square \cdot \square + \square \cdot \square + \square \cdot \square + \square \cdot \square + \square \cdot \square$$

поставили различные простые числа. Какое наименьшее значение может иметь полученное выражение?

Теорема Эйлера

15 июля

Теорема Эйлера. Если $(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

1. (a) Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$ — все взаимно простые с n остатки при делении на n. Докажите, что если $(a, n) = 1$, то набор остатков от деления чисел $ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\varphi(n)}$ на n совпадает с $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$.
(b) Докажите *теорему Эйлера.*

2. Докажите малую теорему Ферма.

3. Какой остаток при делении на 300 дает число 7^{400}, 7^{100}, 6^{100}?

4. Докажите, что $a^{17} - a \;\vdots\; 510$.

5. Пусть $a > 1$, $(a, b) = 1$. Докажите, что существует такое n, что $1 + a + a^2 + \ldots + a^n$ делится на b.

6. Докажите, что если число n имеет два различных нечетных простых делителя, то для a, взаимно простого с n, $a^{\varphi(n)/2} - 1 \;\vdots\; n$.

7. Усиление теоремы Эйлера. Пусть $n = p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ — разложение числа n на простые множители. Обозначим через d наименьшее общее кратное чисел $\varphi(p_1^{k_1}), \ldots, \varphi(p_m^{k_m})$. Докажите, что для любого a, взаимно простого с n, выполняется сравнение $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

8. Дано число 2^{2018}. Докажите, что можно дописать слева от него несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

9. Докажите, что для любого числа n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.

10. Докажите, что в любой арифметической прогрессии a, $a + d$, $a + 2d$, $\ldots$, составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложения которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

11. Докажите, что $\varphi(a^n - 1) \;\vdots\; n$.

12. Докажите, что существует такое натуральное число $n < 1000000$, что в десятичной записи числа 5^n есть шесть последовательных нулей.

Прогулки по графу

16 июля

Определение. *Простой путь* – путь, проходящий по различным вершинам. *Простой цикл* – цикл, проходящий по различным вершинам.

1. Пусть в графе n вершин, а минимальная степень вершины не меньше $\frac{n-1}{2}$. Докажите, что граф связен.

2. Докажите, что если в графе есть цикл, то есть и простой цикл.

3. Минимальная степень вершины в графе равна $k \geq 2$. Докажите, что в этом графе есть:

а) простой путь, содержащий не менее k ребер;

б) простой цикл, содержащий не менее $k + 1$ ребер.

4. Пусть в графе n вершин и m ребер, причем для некоторого натурального числа k выполняется неравенство $m \geq nk$. Докажите, что:

а) из графа можно выкинуть несколько вершин с выходящими из них ребрами так, чтобы минимальная степень среди оставшихся вершин была не меньше $k + 1$;

б) в графе найдется простой путь, содержащий не менее $k + 1$ ребер, и простой цикл, содержащий не менее $k + 2$ ребер.

5. Максимальный простой путь в графе содержит k ребер. Пусть вершины A и B соединяет один из таких путей. Докажите, что если суммарная степень вершин A и B больше k, то в графе есть простой цикл из $k + 1$ ребра.

Определение. *Гамильтонов путь* – простой путь, проходящий по всем вершинам. *Гамильтонов цикл* – простой цикл, проходящий по всем вершинам.

6. ***Теорема Оре.*** Пусть в графе n вершин.

а) Известно, что суммарная степень любых двух несоседних вершин не меньше $n - 1$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь.

б) Известно, что суммарная степень любых двух несоседних вершин не меньше n. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.

7. ***Теорема Дирака.*** Пусть в графе n вершин.

а) Если минимальная степень вершины в графе не меньше $\frac{n-1}{2}$, то в графе есть гамильтонов путь.

б) Если минимальная степень вершины в графе не меньше $\frac{n}{2}$, то в графе есть гамильтонов цикл.

8. Пусть в графе n вершин и m ребер, причем $2m \geq n^2 - 3n + 6$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.

9. Пусть в графе $2n$ вершин, причем степень первой вершины равна 1, второй – 2, третьей – 3, …, $(2n - 1)$-ой – $(2n - 1)$. Сколько в этом графе гамильтоновых путей, начинающихся с первой вершины?

Неравенства в ТЧ

17 июля

1. Пусть $a, b, c -$ натуральные числа такие, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$. Докажите, что abc – точный куб.

2. Докажите неравенство: $\text{НОД}(a,b)+\ \text{НОК}(a,b) \geq 2\sqrt{ab}$.

3. Докажите, что если k — число делителей натурального числа n, то $k^2 < 4n$.

4. Даны три различных натуральных числа, причем сумма любых двух из этих чисел делится на оставшееся. Докажите, что одно из этих чисел втрое больше другого.

5. Найдит все пары (m, n) натуральных чисел, для которых число $4(mn+1)$ делится на $(m+\ n)^2$.

6. Для натуральных чисел a и b выполнено неравенство

$$a \cdot \text{НОД}(a,b) + b \cdot \text{НОК}(a,b) < 2{,}5ab.$$

Докажите, что a делится на b.

7. Даны различные натуральные числа a, b, c. Докажите неравенство:

$$\text{НОД}(ab+1, bc+1, ac+1) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

8. $S(n)$ - сумма цифр числа n. Докажите, что:

а) $S(m+n) \leq S(m)+S(n)$ для любых n и m;

б) $S(mn) \leq S(m)S(n)$ для любых натуральных m и n.

9. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10} -$ натуральные числа, $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Пусть $b_k -$ наибольший делитель a_k, меньший a_k. Оказалось, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_{10}$. Докажите, что $a_{10} > 500$.

10. Все простые делители натурального числа n меньше 100. Докажите, что у числа n существует такой делитель d, что $d^2 \leq n < 100d^2$.

Неравенство Коши–Буняковского–Шварца

19 июля

1. Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите, что выполняется неравенство **Коши–Буняковского–Шварца**

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$$

Установите при каких a_i, b_i достигается равенство.

2. Докажите следующие неравенства, используя неравенство КБШ:

(a) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$;

(b) $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$.

(c) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n$;

3. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant 14$, если известно, что $a+2b+3c \geqslant 14$. Когда в нем достигается равенство?

4. Докажите неравенство

$$\Big((a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + \ldots + (a_n+b_n)^2\Big)\left(\frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \ldots + \frac{1}{a_nb_n}\right) \geqslant 4n^2$$

5. Докажите, что при любых числах a_i и $b_i > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}$$

6. Докажите неравенство $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geqslant \dfrac{9}{2(a+b+c)}$.

7. Пусть a, b, c положительные числа и $a + b + c \leqslant 3$, тогда $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant 3$.

8. Докажите неравенство при неотрицательных a, b, c и d

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}$$

9. Докажите неравенство при неотрицательных a, b, c и d

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2$$

10. Обозначим через S сумму чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, больших 1. Докажите, что

$$\frac{a_1}{a_1^2-1} + \frac{a_2}{a_2^2-1} + \ldots + \frac{a_n}{a_n^2-1} \geqslant \frac{Sn^2}{S^2-n^2}$$

11. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}$$

Неравенство Коши–Буняковского–Шварца

19 июля

1. Для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите, что выполняется неравенство **Коши–Буняковского–Шварца**

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$$

Установите при каких a_i, b_i достигается равенство.

2. Докажите следующие неравенства, используя неравенство КБШ:

(a) $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$;

(b) $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}\right) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$.

(c) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n$;

3. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant 14$, если известно, что $a+2b+3c \geqslant 14$. Когда в нем достигается равенство?

4. Докажите неравенство

$$\left((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2\right)\left(\frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \ldots + \frac{1}{a_nb_n}\right) \geqslant 4n^2$$

5. Докажите, что при любых числах a_i и $b_i > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}$$

6. Докажите неравенство $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \geqslant \dfrac{9}{2(a+b+c)}$.

7. Пусть a, b, c положительные числа и $a + b + c \leqslant 3$, тогда $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant 3$.

8. Докажите неравенство при неотрицательных a, b, c и d

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3}$$

9. Докажите неравенство при неотрицательных a, b, c и d

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2$$

10. Обозначим через S сумму чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, больших 1. Докажите, что

$$\frac{a_1}{a_1^2 - 1} + \frac{a_2}{a_2^2 - 1} + \ldots + \frac{a_n}{a_n^2 - 1} \geqslant \frac{Sn^2}{S^2 - n^2}$$

11. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geqslant \frac{a + b + c}{3}$$

Многочлены: конструктивы

19 июля

Определение. Многочлен называется *приведенным*, если его старший коэффициент равен 1.

1. Приведите пример многочлена f такой, что $f(f(x)) \equiv 2017x + 2018$.

2. Существуют ли такие три непостоянных многочлена, что каждый из них имеет корень, а сумма любых двух из них корней не имеет?

3. Существуют ли такие p и q, что уравнения $x^2 + (p - 1)x + q = 0$ и $x^2 + (p + 1)x + q = 0$ имеют по два различных корня, а уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет корней?

4. На доске написаны девять приведённых квадратных трёхчленов: $x^2 + a_1x + b_1$, $x^2 + a_2x + b_2$, ..., $x^2 + a_9x + b_9$. Известно, что последовательности $a_1, a_2, ..., a_9$ и $b_1, b_2, ..., b_9$ – арифметические прогрессии. Оказалось, что сумма всех девяти трёхчленов имеет хотя бы один корень. Какое наибольшее количество исходных трёхчленов может не иметь корней?

5. Существуют ли такие два многочлена с целыми коэффициентами, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2018, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?

6. Дан приведенный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что найдется такой многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами, что многочлен $P(x)Q(x)$ имеет ровно 2 нечетных коэффициента. (Например, если $P(x) = x^5 + x^2 + 1$, то подойдет многочлен $Q(x) = x^{26} + x^{23} + x^{21} + x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$.)

7. На $2n + 1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Докажите, что числа на этих карточках можно поставить в качестве коэффициентов многочлена степени $2n$, использовав каждое по одному разу, так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней.

Композиция поворотов.

19 июля

0. *Задача из предыдущего листка.* Укажите, каким движением является композиция:
(a) двух осевых симметрий;
(b) трех осевых симметрий, проходящих через одну точку;
(c) трех осевых симметрий общего положения.

1. Каким движением является композиция поворотов?
(a) Какого рода это движение?
(b) При каком условии это параллельный перенос?
(c) Найдите неподвижную точку, если такая есть.
(d) Дайте полный ответ на вопрос задачи.

2. Дан равносторонний треугольник ABC, O — его центр. Найдите композицию поворотов:
(a) ${R_B}^{60^\circ} \circ {R_A}^{60^\circ}$; (b) ${R_O}^{60^\circ} \circ {R_A}^{60^\circ}$; (c) ${R_O}^{120^\circ} \circ {R_A}^{60^\circ}$.

3. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACP и BCQ. Найдите углы треугольника, у которого вершины совпадают с серединой M стороны AB, точкой P и центром O треугольника BCQ.

Задачи.

4. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, пересекающая ω_1 и ω_2 в точках C и D (A на отрезке CD). Пусть M и N — середины дуг BC и BD соответственно, не содержащих точку A, K — середина CD. Докажите, что точки A, K, M, N лежат на одной окружности.

5. Теорема Наполеона. На сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники. Докажите, что центры этих треугольников образуют равносторонний.

6. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты $ABDE$ и $BCFG$. Докажите, что центры этих квадратов, середина AC и середина DG образуют квадрат.

7. На сторонах AB и BC вписанного четырехугольника $ABCD$ выбраны такие точки K и L соответственно, что $AK = CD$ и $CL = AD$. Пусть M — середина KL. Докажите, что $\angle AMC = 90^\circ$.

8. На сторонах треугольника построили правильные треугольники вне его, затем стерли начальный треугольник. Восстановите его по трем оставшимся точкам.

9. Пусть OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3 —правильные одинаково ориентированные треугольники. Докажите, что середины A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 образуют равносторонний треугольник.

Композиция поворотов.

19 июля

0. *Задача из предыдущего листка.* Укажите, каким движением является композиция:
(a) двух осевых симметрий;
(b) трех осевых симметрий, проходящих через одну точку;
(c) трех осевых симметрий общего положения.

1. Каким движением является композиция поворотов?
(a) Какого рода это движение?
(b) При каком условии это параллельный перенос?
(c) Найдите неподвижную точку, если такая есть.
(d) Дайте полный ответ на вопрос задачи.

2. Дан равносторонний треугольник ABC, O — его центр. Найдите композицию поворотов:
(a) ${R_B}^{60^\circ} \circ {R_A}^{60^\circ}$; (b) ${R_O}^{60^\circ} \circ {R_A}^{60^\circ}$; (c) ${R_O}^{120^\circ} \circ {R_A}^{60^\circ}$.

3. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACP и BCQ. Найдите углы треугольника, у которого вершины совпадают с серединой M стороны AB, точкой P и центром O треугольника BCQ.

Задачи.

4. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, пересекающая ω_1 и ω_2 в точках C и D (A на отрезке CD). Пусть M и N — середины дуг BC и BD соответственно, не содержащих точку A, K — середина CD. Докажите, что точки A, K, M, N лежат на одной окружности.

5. Теорема Наполеона. На сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники. Докажите, что центры этих треугольников образуют равносторонний.

6. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты $ABDE$ и $BCFG$. Докажите, что центры этих квадратов, середина AC и середина DG образуют квадрат.

7. На сторонах AB и BC вписанного четырехугольника $ABCD$ выбраны такие точки K и L соответственно, что $AK = CD$ и $CL = AD$. Пусть M — середина KL. Докажите, что $\angle AMC = 90^\circ$.

8. На сторонах треугольника построили правильные треугольники вне его, затем стерли начальный треугольник. Восстановите его по трем оставшимся точкам.

9. Пусть OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3 —правильные одинаково ориентированные треугольники. Докажите, что середины A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 образуют равносторонний треугольник.

Показатели

20 июля

Определение. Число t называют *показателем* остатка a по модулю n, если t – наименьшее натуральное число такое, что $a^t \equiv 1 (mod\ n)$.

Упражнения

1. Найдите показатель остатка 2 по модулю 9 и по модулю 13.

2. Для каких остатков по модулю n показатель не определен?

3. Всегда ли показатель остатка a по модулю n равен $\varphi(n)$?

Задачи

4. Пусть t – показатель остатка a по модулю n. Докажите, что:

а) если $m \vdots t$, то $a^m \equiv 1 (mod\ n)$;

б) если $a^m \equiv 1 (mod\ n)$, то $m \vdots t$;

в) $\varphi(n) \vdots t$;

г) остатки чисел $1, a, a^2, \ldots, a^{t-1}$ по модулю n попарно различны.

5. Показатель остатка a по модулю 30 равен 4. Чему равен показатель следующих остатков по модулю 30:

а) a^2; б) a^3; в) a^{2018}; г) $2a$; д) $11a$?

6. Показатели a и b по модулю 2017 равны 2016. Известно, что $a^k \equiv b\ (mod\ 2017)$. Докажите, что k – нечетно. (2017 – простое число.)

7. Пусть q – простое число, а число $2^q - 1$ делится на простое число p. Докажите, что тогда $p - 1 \vdots q$.

8. Докажите, что если $p > q$, p и q – простые, $a - 1$ не делится на q, то a^p не может давать остаток 1 по модулю q.

9. Докажите, что если m – степень двойки, то любой простой делитель числа $2^m + 1$ сравним с 1 по модулю $2m$.

10. Пусть $n = 4q$, где q – нечетное простое, НОД$(a, n) = 1$. Может ли показатель остатка a по модулю n быть равным $\varphi(n)$?

11. Показатель остатка a по модулю n равен d_1, остатка b – равен d_2. Докажите, что если НОД$(d_1, d_2) = 1$, то показатель остатка ab по модулю n равен d_1d_2.

12. Докажите, что $2^n - 1$ не делится на n при любом натуральном $n > 1$.

13. Докажите, что показатель остатка 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$

Гомотетия

10 июля

Определение. *Гомотетией* с центром O и коэффицентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости H_O^k, которое каждую точку M плоскости преводит в точку $M' = H_O^k(M)$, для которой выполнено равенство $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$

1. При гомотетии H_O^k отрезок $\overline{AB}$ переходит в отрезок $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$.

2. При гомотетии прямая переходит в параллельную себе прямую, треугольник — в треугольник, окружность — в окружность.

3. Сколько существует гомотетий, переводящих отрезок AB в параллельный ему отрезок $A'B'$? А окружность — в заданную окружность? Рассмотрите все случаи.

4. Докажите, что два неравных треугольника с параллельными сторонами гомотетичны.

Задачи.

5. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

6. Докажите, что O, M и H лежат на одной прямой — *прямой Эйлера* (где O, M и H — центр описанной окружности, центр масс и ортоцентр треугольника).

7. В углы A и C выпуклого четырехугольника $ABCD$ вписаны равные окружности с центрами O_1 и O_2. Оказалось, что $O_1O_2 \parallel AC$. Докажите, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

8. В окружности Ω проведена хорда AB. Окружность ω внутренне касается AB и Ω в точках K и T соответственно. M — середина дуги AB, не содержащей T, окружности Ω.
(a) Докажите, что K, T и M лежат на одной прямой (*лемма Архимеда*).
(b) Докажите *лемму Архимеда* для случая внешнего касания.

9. Пусть ω, ω_A — вписанная и вневписанная (касающаяся стороны BC) окружности треугольника ABC, а D, E — их точки касания со стороной BC соответственно. Пусть F — диаметрально противоположная точка D. Докажите, что точки A, E и F лежат на одной прямой.

10. Дан треугольник ABC. В нём H — точка пересечения высот, I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Известно, что отрезки IO и BC параллельны. Докажите, что отрезки AO и HK также параллельны.

11. В каждый из углов треугольника ABC вписана окружность, причем радиусы всех окружностей одинаковые. Окружность Ω касается всех трех окружностей внешне. Докажите, что ее центр лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружности треугольника ABC.

Гомотетия

10 июля

Определение. *Гомотетией* с центром O и коэффицентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости H_O^k, которое каждую точку M плоскости преводит в точку $M' = H_O^k(M)$, для которой выполнено равенство $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$

1. При гомотетии H_O^k отрезок $\overline{AB}$ переходит в отрезок $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$.

2. При гомотетии прямая переходит в параллельную себе прямую, треугольник — в треугольник, окружность — в окружность.

3. Сколько существует гомотетий, переводящих отрезок AB в параллельный ему отрезок $A'B'$? А окружность — в заданную окружность? Рассмотрите все случаи.

4. Докажите, что два неравных треугольника с параллельными сторонами гомотетичны.

Задачи.

5. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

6. Докажите, что O, M и H лежат на одной прямой — *прямой Эйлера* (где O, M и H — центр описанной окружности, центр масс и ортоцентр треугольника).

7. В углы A и C выпуклого четырехугольника $ABCD$ вписаны равные окружности с центрами O_1 и O_2. Оказалось, что $O_1O_2 \parallel AC$. Докажите, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

8. В окружности Ω проведена хорда AB. Окружность ω внутренне касается AB и Ω в точках K и T соответственно. M — середина дуги AB, не содержащей T, окружности Ω.
(a) Докажите, что K, T и M лежат на одной прямой (*лемма Архимеда*).
(b) Докажите *лемму Архимеда* для случая внешнего касания.

9. Пусть ω, ω_A — вписанная и вневписанная (касающаяся стороны BC) окружности треугольника ABC, а D, E — их точки касания со стороной BC соответственно. Пусть F — диаметрально противоположная точка D. Докажите, что точки A, E и F лежат на одной прямой.

10. Дан треугольник ABC. В нём H — точка пересечения высот, I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Известно, что отрезки IO и BC параллельны. Докажите, что отрезки AO и HK также параллельны.

11. В каждый из углов треугольника ABC вписана окружность, причем радиусы всех окружностей одинаковые. Окружность Ω касается всех трех окружностей внешне. Докажите, что ее центр лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружности треугольника ABC.

Графы на любителя

21 июля

1. 11 шахматистов сыграли однокруговой турнир, причем каждый выиграл и проиграл по 4 партии и две партии свел вничью. Докажите, что можно выбрать трех шахматистов и поставить их по кругу так, чтобы каждый из них выиграл у стоящего справа от него.

2. В одной из школ 20 раз проводился кружок по астрономии. На каждом занятии присутствовало ровно пять школьников, причём никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не менее 20 школьников.

3. В школе учатся 100 мальчиков и 100 девочек. Каждый мальчик знаком хотя бы с одной девочкой, а каждая девочка – хотя бы с одним мальчиком. Один раз каждая девочка сказала: «Среди знакомых мне мальчиков не менее двух третей – рыжие!» А каждый мальчик ответил: «Среди знакомых мне девочек не менее половины – блондинки!» Все они сказали правду, но среди мальчиков только 10 являются рыжими. А какое наименьшее количество блондинок может быть среди девочек?

4. В стране 100 городов, любые два города соединены дорогой. В целях развития туристического бизнеса честный бизнесмен Вася хочет приватизировать а) 4; б) 5 дорог, образующих циклический маршрут. Но после того, как Вася приватизирует какую-нибудь дорогу, Министерство Взяток арестовывает еще четыре не приватизированных. Может ли Министерство Взяток помешать Васе?

5. Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из двух или трёх человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

6. В графе 20 вершин. Известно, что какие 5 вершин ни выбрать, между ними проведено не больше 3 ребер. Докажите, что можно выбрать 10 вершин так, что между ними не проведено ни одного ребра.

7. В стране 1993 города, и из каждого выходит не менее 93 дорог. Известно, что из каждого города можно проехать по дорогам в любой другой. Докажите, что это можно сделать не более, чем с 62 пересадками.

8. Жители города Натуральный живут в домах с номерами от 2 до 2019 (каждый житель — в своем доме с уникальным номером). Некоторые из них дружат между собой. В журнале «National Geographic» написали, что у двух жителей есть общий друг тогда и только тогда, когда номер дома одного из них делится на номер дома другого. Докажите, что журнал врёт.

Периоды дробей

21 июля

Рассмотрим процесс деления «в столбик». Пусть мы делим число a на число n. На каждом шаге деления вычитается число, кратное n, до тех пор, пока не останется остаток от деления числа a на n (обозначим его за r). Даже если $r = 0$, поставим запятую в частном и продолжим процесс деления: на каждом шаге к текущему остатку приписывается 0, и получается новый остаток от деления на n. Остаток, получившийся после приписывания k нулей обозначим за r_k, а k-ю цифру после запятой в частном – за c_k. Если с некоторого момента все c_k равны 0, то соответствующая десятичная дробь называется *конечной*. Если последовательность c_k периодична с некоторого места, то и дробь называется *периодичной*, а последовательность $c_1c_2\ldots$ перед началом периода называется *предпериодом*.

1. Дана чисто периодическая дробь, длина периода равна d. Докажите, что эту дробь можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем $10^d - 1$.

Задачи

2. Объясните, почему $10^k a \equiv r_k (mod\, n)$ и $c_k = \left[\frac{10r_{k-1}}{n}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x.

3. Докажите, что частное от деления a на n – либо конечная дробь, либо периодическая.

4. Пусть НОД(10, n) = 1. Докажите, что дробь a/n является или целым числом, или периодической дробью без предпериода.

5. Докажите, что если $r_x \neq r_y$, то последовательности $c_x c_{x+1} c_{x+2} \ldots$ и $c_y c_{y+1} c_{y+2} \ldots$ не совпадают.

6. Пусть НОД(10, n) = 1. Докажите, что если m/n – несократима, то длина периода равна показателю остатка 10 по модулю n.

7. Пусть НОД(10, n) = 1. Докажите, что длина периода любой правильной дроби m/n является делителем длины периода дроби $1/n$.

8. Пусть $m/n = 0,c_1c_2c_3\ldots$ – правильная дробь. Докажите, что если вычеркнуть несколько первых цифр после запятой, то получится десятичная запись некоторой правильной дроби со знаменателем n.

9. Докажите, что если $n = 2^a 5^b s$, НОД(s,10) = 1, то длина предпериода несократимой дроби m/n равна $max(a, b)$, а длина периода равна длине периода дроби $1/s$.

10. Пусть период дроби k/p, где p – простое число, состоит из $2n$ цифр. «Разрежем» период на два n-значных куска. Докажите, что сумма полученных кусков есть число из n девяток.

11. Найдите три последние цифры периода дробей 1/107, 1/131, не вычисляя весь период.

12. Докажите, что в десятичной записи любой правильной дроби $k/73$ нет двух одинаковых цифр подряд.

13. Пусть $m/n = 0,c_1c_2c_3\ldots$ – правильная дробь. Докажите, что дробь $0,d_1d_2d_3\ldots$ является рациональным числом, где $d_k = c_{2^k}$ при любом k.

Гомотетия-2

22 июля

1. В данный остроугольный треугольник ABC впишите квадрат так, чтобы две его вершины находились на стороне AC и по одной вершине на сторонах AB и BC.

2. Постройте с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся сторон угла ABC и проходящую через точку M внутри этого угла.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC так, что:
(a) $BX = XY = YC$;
(b) $AX = XY = YC$.

4. Докажите, что если при некотором преобразовании плоскости произвольный отрезок $\overrightarrow{AB}$ переходит в $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, причем $k \neq 1$, то это преобразование есть гомотетия с коэффициентом k.

5. Рассмотрим композицию $H_{O_1}^{k_1} \circ H_{O_2}^{k_2}$:
(a) Чем она является, если $O_1 = O_2$?
(b) Чем она является, если $k_1k_2 = 1$?.
(c) Докажите, что при $k_1k_2 \neq 1$ это — гомотетия, найдите ее центр и коэффициент.

6. Теорема о трех колпаках. (a) Даны три окружности ω_1, ω_2, ω_3. К каждой паре окружностей проведены общие внешние касательные, пересекающиеся в точках X_1, X_2, X_3. Докажите, что X_1, X_2, X_3 лежат на одной прямой.
(b) Переформулируйте задачу для случая, когда некоторые пары касательных внутренние, и решите её.

7. Две неравные окружности ω_1, ω_2 с центрами O_1, O_2 касаются внешне окружности ω в точках A_1, A_2 соответственно. Пусть M — произвольная точка на ω, прямые MA_1 и MA_2 пересекают ω_1 и ω_2 в точках B_1 и B_2 соответственно. Докажите, что прямые O_1O_2, A_1A_2, B_1B_2 пересекаются в одной точке.

8. Вокруг треугольника ABC описана окружность ω, три окружности ω_1, ω_2, ω_3 касаются внешне ω в точках A_1, B_1, C_1 соответственно и двух сторон треугольников (AC и AB, AB и BC, AC и BC соответственно). Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

9. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, G_A, G_B и G_C — центры масс треугольников BIC, AIC и AIB соответственно. Докажите, что центр масс треугольника ABC является центром вписанной окружности треугольника $G_AG_BG_C$.

10. На продолжении боковой стороны CD трапеции $ABCD$ за точку D отмечена точка P, точка M — середина AD. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q, PB и AD — в точке X, а BQ и AD — в точке Y. Докажите, что M — середина XY.

Гомотетия-2

22 июля

1. В данный остроугольный треугольник ABC впишите квадрат так, чтобы две его вершины находились на стороне AC и по одной вершине на сторонах AB и BC.

2. Постройте с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся сторон угла ABC и проходящую через точку M внутри этого угла.

3. Дан остроугольный треугольник ABC. Постройте точки X и Y на сторонах AB и BC так, что:
(a) $BX = XY = YC$;
(b) $AX = XY = YC$.

4. Докажите, что если при некотором преобразовании плоскости произвольный отрезок $\overrightarrow{AB}$ переходит в $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, причем $k \neq 1$, то это преобразование есть гомотетия с коэффициентом k.

5. Рассмотрим композицию $H_{O_1}^{k_1} \circ H_{O_2}^{k_2}$:
(a) Чем она является, если $O_1 = O_2$?
(b) Чем она является, если $k_1k_2 = 1$?.
(c) Докажите, что при $k_1k_2 \neq 1$ это — гомотетия, найдите ее центр и коэффициент.

6. Теорема о трех колпаках. (a) Даны три окружности ω_1, ω_2, ω_3. К каждой паре окружностей проведены общие внешние касательные, пересекающиеся в точках X_1, X_2, X_3. Докажите, что X_1, X_2, X_3 лежат на одной прямой.
(b) Переформулируйте задачу для случая, когда некоторые пары касательных внутренние, и решите её.

7. Две неравные окружности ω_1, ω_2 с центрами O_1, O_2 касаются внешне окружности ω в точках A_1, A_2 соответственно. Пусть M — произвольная точка на ω, прямые MA_1 и MA_2 пересекают ω_1 и ω_2 в точках B_1 и B_2 соответственно. Докажите, что прямые O_1O_2, A_1A_2, B_1B_2 пересекаются в одной точке.

8. Вокруг треугольника ABC описана окружность ω, три окружности ω_1, ω_2, ω_3 касаются внешне ω в точках A_1, B_1, C_1 соответственно и двух сторон треугольников (AC и AB, AB и BC, AC и BC соответственно). Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

9. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, G_A, G_B и G_C — центры масс треугольников BIC, AIC и AIB соответственно. Докажите, что центр масс треугольника ABC является центром вписанной окружности треугольника $G_AG_BG_C$.

10. На продолжении боковой стороны CD трапеции $ABCD$ за точку D отмечена точка P, точка M — середина AD. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q, PB и AD — в точке X, а BQ и AD — в точке Y. Докажите, что M — середина XY.

Неравенства в треугольнике

22 июля

Основное утверждение. Треугольник со сторонами a, b и c существует тогда и только тогда, когда существуют положительные числа x, y, z такие, что $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.

Далее в этом листке, мы будем считать, что a, b, c — стороны треугольника, p, S, r и R — его полупериметр, площадь, радиус вписанной и описанной окружностей соответственно.

1. Докажите, что

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leqslant abc.$$

2. Докажите, что

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

3. Докажите, что p, S, r и R выражаются через x, y, z следующим образом:

$$p = x + y + z; S = \sqrt{xyz(x + y + z)}; r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}}; R = \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4\sqrt{xyz(x + y + z)}}$$

4. Докажите, что $R \geqslant 2r$.

5. Докажите, что

(a) $2(ab + bc + ca) \geqslant a^2 + b^2 + c^2$;

(b) $2(ab + bc + ca) \geqslant 4S\sqrt{3} + a^2 + b^2 + c^2$.

6. Докажите, что

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \geqslant 0.$$

7. Докажите, что

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqslant 0.$$

8. Докажите, что

$$\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} \geqslant 3.$$

Неравенства в треугольнике

22 июля

Основное утверждение. Треугольник со сторонами a, b и c существует тогда и только тогда, когда существуют положительные числа x, y, z такие, что $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.

Далее в этом листке, мы будем считать, что a, b, c — стороны треугольника, p, S, r и R — его полупериметр, площадь, радиус вписанной и описанной окружностей соответственно.

1. Докажите, что

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leqslant abc.$$

2. Докажите, что

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

3. Докажите, что p, S, r и R выражаются через x, y, z следующим образом:

$$p = x + y + z; S = \sqrt{xyz(x + y + z)}; r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}}; R = \frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{4\sqrt{xyz(x + y + z)}}$$

4. Докажите, что $R \geqslant 2r$.

5. Докажите, что

(a) $2(ab + bc + ca) \geqslant a^2 + b^2 + c^2$;

(b) $2(ab + bc + ca) \geqslant 4S\sqrt{3} + a^2 + b^2 + c^2$.

6. Докажите, что

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \geqslant 0.$$

7. Докажите, что

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqslant 0.$$

8. Докажите, что

$$\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} \geqslant 3.$$