Рекуррентные соотношения и динамическое программирование.

1. *Взрывоопасность.* На складе есть ящики с тротилом и ящики с песком. Из соображений безопасности ящики с тротилом нельзя класть рядом. Сколькими способами можно построить штабель из N ящиков?

2. *Шоколадка.* От шоколадки, состоящей из N кусочков, Петя и Вася по очереди откусывают по одному или два кусочка. Выигрывает тот, кто съедает последний кусочек шоколадки. Начинает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

3. *Пути фишки.* Фишка может двигаться по полю длины N только вперед. Длина хода фишки не более K. Найти число различных путей, по которым фишка может пройти поле от начала до конца.

4. *Размены.* В государстве Манилэнд выпущены монеты достоинством 17, 31 и 89 мани. Сколькими способами можно выплатить зарплату, равную 300 маням? (Способы, отличающиеся только порядком выплачиваемых монет, считать одинаковыми.)

5. *Путь ладьи.* Сколькими способами ладья может пройти с клетки $a1$ на клетку $h8$, перемещаясь по доске только вправо и вверх?

6. *Путь ладьи-2.* Из доски вырезан прямоугольник, состоящий из клеток $c3$–$c5$ и $d3$–$d5$. Сколькими способами ладья может пройти по такой доске с клетки $a1$ на клетку $h8$, перемещаясь по доске только вправо и вверх?

7. Целеустремлённый шахматный король стоит на поле $a1$ и стремится попасть на поле $h8$. Для каждого поля доски известно, сколько минут король будет ждать, попав на это поле. Поскольку король целеустремленный, он будет делать только такие ходы, которые приближают его к цели, то есть вверх, вправо и по диагонали вверх-вправо (если смотреть со стороны белых). Как найти для короля самый быстрый путь?

8. *Набрать максимум суммы.* Имеется равнобедренный числовой треугольник высоты n, аналогичный треугольнику Паскаля, в котором расставлены произвольные целые числа. Из каждого числа треугольника можно сделать два различных хода вниз в стоящие там числа (влево-вниз и вправо-вниз). Найти такой путь из верхней точки треугольника до его основания, чтобы сумма чисел на клетках этого пути была максимальна.

Рекуррентные соотношения и динамическое программирование II.

1. *Вычеркивания.* Заданы два слова z и y. Можно ли получить z вычеркиванием некоторых букв из y?

2. *Игра с шоколадкой.* От шоколадки, состоящей из N кусочков, Петя может откусывать по $a_1, \ldots, a_n$ кусочков, а Вася — по $b_1, \ldots, b_m$ кусочков. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Петя. Как выяснить, кто выигрывает при правильной игре, и построить выигрышную стратегию?

Пусть дана последовательность целых чисел $a_1, \ldots, a_N$. Её элементы разрешается просматривать только один раз.

3. Найдите наибольшую длину непрерывного возрастающего участка последовательности (максимальное m, для которого существует такое i, что $a_i < a_{i+1} < \ldots < a_{i+m-1}$).

4. Найдите наибольшую длину непрерывного монотонного участка последовательности.

5. Найдите участок последовательности с максимальной суммой элементов.

6. Некоторые клеточки листа бумаги заштрихованы. Найти самый большой полностью заштрихованный квадрат.

7. Найдите наибольшую длину возрастающей подпоследовательности (в отличие от предыдущей задачи, элементы не обязательно идут подряд: $a_{i_1} < a_{i_2}, \ldots < a_{i_m}, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$)

Нестандартные взвешивания.

Проверка равенства

Пусть есть несколько монет, среди которых могут быть фальшивые (весящие одинаково, но меньше настоящих). Задача состоит в том, чтобы за заданное число взвешиваний убедиться, что фальшивых монет на самом деле нет, то есть что все эти монеты на самом деле весят одинаково. Этот процесс мы будем называть *верификацией* или *тестированием*, а отдельные взвешивания будем также называть *проверками*).

1. *8 за 3.* Верифицировать 8 монет за 3 взвешивания.

2. 2^K *за* K. Обобщите предыдущий алгоритм на случай K взвешиваний.

3. *10 за 3: первая сложная задача.* Верифицировать 10 монет за три взвешивания.

4. *100 за 6.* Верифицировать 100 монет за 6 взвешиваний.

5. 10^K *за* $3K$. Обобщить полученные результаты на $3K$ взвешиваний.
Однако, оказывается, и результат “10^K за $3K$” – не наилучший.

6. *28 за 4.* Верифицировать 28 монет за 4 взвешивания.

7. *30 за 4.* Верифицируйте за 4 взвешивания 30 монет.

8. *80 за 5.* Решите ту же задачу для 5 взвешиваний и 80 монет – точнее, разбиения на группы (3, 4, 9, 10, 26, 28).

9. *96 за 5.* Решите ту же задачу для 5 взвешиваний и 96 монет – точнее, разбиений на группы (1, 8, 14, 18, 25, 30) или (1, 12, 15, 20, 22, 26).

10. *114 за 5.* То же для 114 монет – группы (9, 12, 20, 22, 25, 26).
Обратите внимание, что последние результаты позволяют, например, за 10 взвешиваний верифицировать $114^2 = 12996$ монет. Сравните это с “ожидаемым” поначалу значением $2^{10} = 1024$!

Задача об эксперте

В задачах об эксперте обычно фигурируют два персонажа – “эксперт” и “судья”. Судье известно общее число фальшивых монет, а также то, что все фальшивые весят одинаково, все настоящие также весят одинаково, и фальшивые легче настоящих. Эксперт же знает все фальшивые монеты. Задача эксперта – убедить в справедливости своего знания (логически мыслящего и математически образованного) судью.
Итак...

11. На суде в качестве вещественного доказательства было предъявлено $2N$ пронумерованных монет. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по N-ю – фальшивые, а с $(N+1)$-й по $2N$-ю – настоящие. Суд же знает только, что все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые также весят одинаково, и что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта – чашечные весы без гирь.
Эксперт хочет доказать суду, что монеты с 1-й по N-ю – фальшивые, а с $(N+1)$-й по $2N$-ю – настоящие. Как эксперту сделать это за три взвешивания a) для $N = 7$; b) для $N = 9$?

12. Установите связь между решением пункта б) этой задачи и решением задачи о верификации 10 монет за три взвешивания.

13. Докажите, что каждому алгоритму верификации K монет, в котором величина одной из кучек монет равна 1, соответствует решение задачи об эксперте для $K-1$ настоящих и $K-1$ фальшивых монет.

Проверка равенства для монет трех типов

Очень интересным случаем общей задачи о верификации является такая задача: монеты могут быть либо настоящими (скажем, весящими 10 г), либо легкими фальшивыми (9 г), либо тяжелыми фальшивыми (11 г). [Здесь важно только то, что веса 9, 10, 11 образуют арифметическую прогрессию.] Как и раньше, перед нами стоит задача – доказать, что все монеты на самом деле весят поровну.
Совершенно очевидно, что для N монет эту задачу можно решить за $N-1$ взвешивание, просто сравнив одну монету со всеми остальными. Если все монеты весят одинаково, это будет зафиксировано в результате таких взвешиваний. Но этот результат абсолютно тривиален.
Мы же начнем сразу с нетривиального результата.

14. *6 за 4.* Протестируйте 6 монет за 4 взвешивания.

15. *5 за 3.* Протестируйте 5 монет за 3 взвешивания.

16. $3n+2$ *за* $2n+1$. Протестируйте $3n+2$ монеты за $2n+1$ взвешивание ($n > 0$).
Введем обозначение $f_A(n)$ – количество монет, которое удается оттестировать алгоритмом A за n взвешиваний. Кроме того, обозначим $f(n) = \max_A f_A(n)$ – максимальное значение числа тестируемых монет по всем алгоритмам. Ниже мы будем доказывать нижние оценки для $f(n)$, которые на самом деле будут сводиться просто к предъявлению алгоритма, дающего нужное значение $f_A(n)$ для бесконечно многих значений n.

17. *4+2 за 3.* Протестируйте группу из 4 монет и еще пару монет за 3 взвешивания.

18. *7 за 4.* Протестируйте 7 монет за 4 взвешивания.

19. *14 за 11.* Протестируйте 14 монет за 11 взвешиваний.

20. Докажите неравенство $f(4n) \geq 7n$.

21. Доказать неравенство $f(8n+1) \geq 15n$

22. Доказать неравенства $f(16n+2) \geq 31n$, $f(32n+3) \geq 63n$, а также общий случай – неравенство

$$f\left(2^k n + (k-2)\right) \geq \left(2^{k+1} - 1\right) n \tag{1}$$

23. Как вы думаете, можно ли протестировать за K взвешиваний более чем $2K$ монет?

Ханойская башня.

1. *Ханойская башня.* Пусть есть три столбика, на один из которых нанизаны кольца различного радиуса; при этом внизу находится самое широкое кольцо, над ним — второе по диаметру, ..., наверху лежит самое узкое кольцо. Два другие столбика изначально свободны от колец. За ход разрешается взять одно из верхних колец с любого столбика и перенести его на другой столбик, при этом запрещено класть кольцо на более узкое. Как перенести все кольца на третий столбик? Каково наименьшее число перекладываний для этого нужно произвести?

2. *Нерекурсивный перенос Ханойской башни.* Составьте нерекурсивный алгоритм, решающий первую задачу.

3. *Сборка Ханойской башни.* Пусть кольца нанизаны на стержни произвольным образом, но каждое кольцо лежит на более широком или является основанием башни. Докажите, что делая ходы по правилам, можно собрать все кольца на первом стержне. Сколько операций потребуется в худшем случае?

4. *Сборка Ханойской башни-2.* Пусть, в отличие от предыдущей задачи, башня может быть собрана на любом стержне. Как изменится число требуемых действий?

5. *Переход между Ханойскими конфигурациями.* Пусть есть два расположения колец на стержнях, удовлетворяющих условию (ни одно из колец не лежит на более узком). Как, делая ходы по правилам, перейти от одного из них к другому? Каково требуемое число переносов?

6. *Ханойское расстояние.* Ханойской конфигурации можно поставить в соответствие число, так что разным конфигурациям будут поставлены в соответствие разные числа: для этого занумеруем столбцы цифрами 0, 1, 2, и будем считать, что они соответствуют цифрам в троичной системе счисления. Далее запишем в i-ю позицию троичного числа ту цифру, которая соответствует стержню, на который насажено i-е кольцо.

Ханойским расстоянием между двумя конфигурациями будем называть количество переходов между ними. Обозначим его $han(i,j)$. Понятно, что $han(i,i) = 0, han(i,j) = han(j,i), han(i,j) \leq han(i,k) + han(k,j)$

В последнем случае равенство достигается для конфигураций, которые могут быть получены при кратчайшем переходе от i к j (в таком случае будем говорить, что k лежит между i и j).

Посчитайте $han(1002_3, 0112_3)$

Как вычислять $han(0,i)$? А $han(i,j)$?

7. *Сборка Ханойской башни вслепую.* Пусть в задаче о сборе Ханойской башни расположение колец не известно. Будем записывать ход с помощью пары (K_i, K_j), которая показывает, с какого стержня на какой переносится кольцо. Если такой перенос противоречит правилам, будем пропускать этот ход. Можно ли выписать такую последовательность ходов, выполнение которой приведёт к тому, что башня будет собрана на третьем кольце? Как только башня оказывается собранной, выполнение ходов прекращается.

Дополнительные задачи.

1. *Ханойские башни для $2n$ колец.* Пусть в задаче о Ханойских башнях на первый стержень нанизаны $2n$ колец: по два кольца каждого диаметра от 1 до n. Требуется перенести все кольца на третий стержень в соответствии с правилами (нельзя класть более широкое на более узкое), при этом сохранения порядка колец одинакового диаметра не требуется. Докажите, что задача имеет решение, укажите оценку числа действий, докажите, что оптимальная по количеству последовательность ходов единственна.

2. *"Неправильная" Ханойская башня.* Пусть задано некоторое расположение колец на стержнях, в котором более широкое кольцо может располагаться над более узким. Можно ли утверждать, что в этом случае можно собрать все кольца в правильном порядке на первом стержне, делая только разрешённые ходы (*правильный порядок колец* — более широкое кольцо не лежит на более узком, *разрешённые ходы* — нельзя класть более широкое кольцо на более узкое)?