Вопросы и задачи

1. В чём заключается метод динамического программирования? Приведите пример его использования при вычислении рекуррентно заданных функций.

   4+2 за 3 для трёх типов. Протестируйте группу из 4 монет и ещё пару монет за 3 взвешивания.

2. Решение задач с помощью индуктивных функций (задачи о поиске самого длинного возрастающего участка, участка с максимальной суммой элементов): общий смысл метода, пример использования.

   Ханойское расстояние. Ханойской конфигурации можно поставить в соответствие число, так что разным конфигурациям будут поставлены в соответствие разные числа: для этого занумеруем стержни цифрами 0, 1, 2, и будем считать, что они соответствуют цифрам в троичной системе счисления. Далее запишем в i-ю позицию троичного числа ту цифру, которая соответствует стержню, на который насажено i-е кольцо.

   Ханойским расстоянием между двумя конфигурациями будем называть количество переходов между ними. Обозначим его $han(i,j)$. Докажите, что $han(i,i) = 0, han(i,j) = han(j,i), han(i,j) \le han(i,k) + han(k,j)$.

   Посчитайте $han(1002_3, 0112_3)$, $han(0, 3^n - 1)$

   Приведите алгоритм, вычисляющий $han(i, 0)$

3. Взвешивания: задача о проверке равенства (верификации). Верификация 2^K монет за K взвешиваний, метод улучшения этого результата.

   Приведите алгоритм, который за один просмотр подсчитает, сколько раз в данной последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ встречается максимальный элемент.

4. Взвешивания: задача об эксперте: постановка задачи, связь с задачей о верификации.

   Набрать максимум суммы. Имеется равнобедренный числовой треугольник высоты n, аналогичный треугольнику Паскаля, в котором расставлены произвольные целые числа. Из каждого числа треугольника можно сделать два различных хода вниз в стоящие там числа (влево-вниз и вправо-вниз). Найти такой путь из верхней точки треугольника до его основания, чтобы сумма чисел на клетках этого пути была максимальна.

5. Взвешивания: задача о проверке равенства для монет трёх типов: постановка задачи, решение для $3n + 2$ монет за $2n + 1$ взвешивание.

   Ханойское расстояние. Ханойской конфигурации можно поставить в соответствие число, так что разным конфигурациям будут поставлены в соответствие разные числа: для этого занумеруем стержни цифрами 0, 1, 2, и будем считать, что они соответствуют цифрам в троичной системе счисления. Далее запишем в i-ю позицию троичного числа ту цифру, которая соответствует стержню, на который насажено i-е кольцо.

   Ханойским расстоянием между двумя конфигурациями будем называть количество переходов между ними. Обозначим его $han(i,j)$. Докажите, что $han(i,i) = 0, han(i,j) = han(j,i), han(i,j) \le han(i,k) + han(k,j)$.

   Посчитайте $han(1002_3, 0112_3)$, $han(0, 3^n - 1)$

   Приведите алгоритм, вычисляющий $han(i, 0)$

6. Ханойские башни: существование решения “классической” задачи за $2^n - 1$ перекладывание, доказательство неулучшаемости этого результата, единственность оптимального способа перекладывания. Примеры использования “узкого места” (переноса самого широкого кольца) в других задачах о Ханойской башне.

   30 за 4 для двух типов. Верифицируйте за 4 взвешивания 30 монет.

7. Ханойские башни: нерекурсивный алгоритм переноса.

   Целеустремлённый шахматный король стоит на поле $a1$ и стремится попасть на поле $h8$. Для каждого поля доски известно, сколько минут король будет ждать, попав на это поле. Поскольку король целеустремленный, он будет делать только такие ходы, которые приближают его к цели, то есть вверх, вправо и по диагонали вверх-вправо (если смотреть со стороны белых). Как найти для короля самый быстрый путь?

Задачи потруднее

1. *“Квадрат Малевича”.* Некоторые клеточки листа бумаги закрашены. Как найти самый большой полностью закрашенный квадрат?

2. Найдите количество правильных Ханойских конфигураций с n кольцами.

3. *Ханойское расстояние.* Ханойской конфигурации можно поставить в соответствие число, так что разным конфигурациям будут поставлены в соответствие разные числа: для этого занумеруем стержни цифрами 0, 1, 2, и будем считать, что они соответствуют цифрам в троичной системе счисления. Далее запишем в i-ю позицию троичного числа ту цифру, которая соответствует стержню, на который насажено i-е кольцо.

   Ханойским расстоянием между двумя конфигурациями будем называть количество переходов между ними. Обозначим его $han(i, j)$.

   Приведите алгоритм, вычисляющий $han(i, j)$

4. *Ханойские башни для $2n$ колец.* Пусть в задаче о Ханойских башнях на первый стержень нанизаны $2n$ колец: по два кольца каждого диаметра от 1 до n. Требуется перенести все кольца на третий стержень в соответствии с правилами (нельзя класть более широкое на более узкое), при этом сохранения порядка колец одинакового диаметра не требуется. Докажите, что задача имеет решение; укажите оценку числа действий; докажите, что оптимальная по количеству последовательность ходов единственна.

5. *“Неправильная” Ханойская башня.* Пусть задано некоторое расположение колец на стержнях, в котором более широкое кольцо может располагаться над более узким. Можно ли утверждать, что в этом случае можно собрать все кольца в правильном порядке на первом стержне, делая только разрешённые ходы (*правильный порядок колец* — более широкое кольцо не лежит на более узком, *разрешённые ходы* — нельзя класть более широкое кольцо на более узкое)?

6. *Сборка Ханойской башни вслепую.* Пусть в задаче о сборе Ханойской башни расположение колец не известно. Будем записывать ход с помощью пары (K_i, K_j), которая показывает, с какого стержня на какой переносится кольцо. Если такой перенос противоречит правилам, будем пропускать этот ход. Можно ли выписать такую последовательность ходов, выполнение которой приведёт к тому, что башня будет собрана на первом кольце? Как только башня оказывается собранной, выполнение ходов прекращается.

7. Дана последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Как найти наибольшую длину возрастающей подпоследовательности (элементы не обязательно идут подряд: $a_{i_1} < a_{i_2}, \ldots < a_{i_m}, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$)?