Нестандартные взвешивания, 8 июля.

Проверка равенства

Пусть есть несколько монет, среди которых могут быть фальшивые (весящие одинаково, но меньше настоящих). Задача состоит в том, чтобы за заданное число взвешиваний убедиться, что фальшивых монет на самом деле нет, то есть что все эти монеты на самом деле весят одинаково. Этот процесс мы будем называть *верификацией* или *тестированием*, а отдельные взвешивания будем также называть *проверками*).

1. *8 за 3.* Верифицировать 8 монет за 3 взвешивания.

2. 2^K *за* K. Обобщите предыдущий алгоритм на случай K взвешиваний.

3. *10 за 3: первая сложная задача.* Верифицировать 10 монет за три взвешивания.

4. *100 за 6.* Верифицировать 100 монет за 6 взвешиваний.

5. 10^K *за* $3K$. Обобщить полученные результаты на $3K$ взвешиваний.

Однако, оказывается, и результат “10^K за $3K$” – не наилучший.

6. *28 за 4.* Верифицировать 28 монет за 4 взвешивания.

7. *30 за 4.* Верифицируйте за 4 взвешивания 30 монет.

8. *80 за 5.* Решите ту же задачу для 5 взвешиваний и 80 монет – точнее, разбиения на группы (3, 4, 9, 10, 26, 28).

9. *96 за 5.* Решите ту же задачу для 5 взвешиваний и 96 монет – точнее, разбиений на группы (1, 8, 14, 18, 25, 30) или (1, 12, 15, 20, 22, 26).

10. *114 за 5.* То же для 114 монет – группы (9, 12, 20, 22, 25, 26).

Обратите внимание, что последние результаты позволяют, например, за 10 взвешиваний верифицировать $114^2 = 12996$ монет. Сравните это с “ожидаемым” поначалу значением $2^{10} = 1024$!

Задача об эксперте

В задачах об эксперте обычно фигурируют два персонажа – “эксперт” и “судья”. Судье известно общее число фальшивых монет, а также то, что все фальшивые весят одинаково, все настоящие также весят одинаково, и фальшивые легче настоящих. Эксперт же знает все фальшивые монеты. Задача эксперта – убедить в справедливости своего знания (логически мыслящего и математически образованного) судью.

Итак...

11. На суде в качестве вещественного доказательства было предъявлено $2N$ пронумерованных монет. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по N-ю – фальшивые, а с $(N+1)$-й по $2N$-ю – настоящие. Суд же знает только, что все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые также весят одинаково, и что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта – чашечные весы без гирь.

Эксперт хочет доказать суду, что монеты с 1-й по N-ю – фальшивые, а с $(N+1)$-й по $2N$-ю – настоящие. Как эксперту сделать это за три взвешивания a) для $N=7$; b) для $N=9$?

12. Установите связь между решением пункта б) этой задачи и решением задачи о верификации 10 монет за три взвешивания.

13. Докажите, что каждому алгоритму верификации K монет, в котором величина одной из кучек монет равна 1, соответствует решение задачи об эксперте для $K-1$ настоящих и $K-1$ фальшивых монет.

Проверка равенства для монет трех типов

Очень интересным случаем общей задачи о верификации является такая задача: монеты могут быть либо настоящими (скажем, весящими 10 г), либо легкими фальшивыми (9 г), либо тяжелыми фальшивыми (11 г). [Здесь важно только то, что веса 9, 10, 11 образуют арифметическую прогрессию.] Как и раньше, перед нами стоит задача – доказать, что все монеты на самом деле весят поровну.

Совершенно очевидно, что для N монет эту задачу можно решить за $N-1$ взвешивание, просто сравнив одну монету со всеми остальными. Если все монеты весят одинаково, это будет зафиксировано в результате таких взвешиваний. Но этот результат абсолютно тривиален.

Мы же начнем сразу с нетривиального результата.

14. *6 за 4.* Протестируйте 6 монет за 4 взвешивания.

15. *5 за 3.* Протестируйте 5 монет за 3 взвешивания.

16. $3n+2$ *за* $2n+1$. Протестируйте $3n+2$ монеты за $2n+1$ взвешивание ($n>0$).

Введем обозначение $f_A(n)$ – количество монет, которое удается оттестировать алгоритмом A за n взвешиваний. Кроме того, обозначим $f(n) = \max_A f_A(n)$ – максимальное значение числа тестируемых монет по всем алгоритмам. Ниже мы будем доказывать нижние оценки для $f(n)$, которые на самом деле будут сводиться просто к предъявлению алгоритма, дающего нужное значение $f_A(n)$ для бесконечно многих значений n.

17. *4+2 за 3.* Протестируйте группу из 4 монет и еще пару монет за 3 взвешивания.

18. *7 за 4.* Протестируйте 7 монет за 4 взвешивания.

19. *14 за 11.* Протестируйте 14 монет за 11 взвешиваний.

20. Докажите неравенство $f(4n) \geq 7n$.

21. Доказать неравенство $f(8n+1) \geq 15n$

22. Доказать неравенства $f(16n+2) \geq 31n$, $f(32n+3) \geq 63n$, а также общий случай – неравенство

$$f\left(2^k n + (k-2)\right) \geq \left(2^{k+1} - 1\right) n \qquad (1)$$

23. Как вы думаете, можно ли протестировать за K взвешиваний более чем $2K$ монет?

Нестандартные взвешивания, 8 июля.

Проверка равенства

Пусть есть несколько монет, среди которых могут быть фальшивые (весящие одинаково, но меньше настоящих). Задача состоит в том, чтобы за заданное число взвешиваний убедиться, что фальшивых монет на самом деле нет, то есть что все эти монеты на самом деле весят одинаково. Этот процесс мы будем называть *верификацией* или *тестированием*, а отдельные взвешивания будем также называть *проверками*).

1. *8 за 3.* Верифицировать 8 монет за 3 взвешивания.

2. 2^K *за* K. Обобщите предыдущий алгоритм на случай K взвешиваний.

3. *10 за 3: первая сложная задача.* Верифицировать 10 монет за три взвешивания.

4. *100 за 6.* Верифицировать 100 монет за 6 взвешиваний.

5. 10^K *за* $3K$. Обобщить полученные результаты на $3K$ взвешиваний.
Однако, оказывается, и результат "10^K за $3K$" – не наилучший.

6. *28 за 4.* Верифицировать 28 монет за 4 взвешивания.

7. *30 за 4.* Верифицируйте за 4 взвешивания 30 монет.

8. *80 за 5.* Решите ту же задачу для 5 взвешиваний и 80 монет – точнее, разбиения на группы (3, 4, 9, 10, 26, 28).

9. *96 за 5.* Решите ту же задачу для 5 взвешиваний и 96 монет – точнее, разбиений на группы (1, 8, 14, 18, 25, 30) или (1, 12, 15, 20, 22, 26).

10. *114 за 5.* То же для 114 монет – группы (9, 12, 20, 22, 25, 26).
Обратите внимание, что последние результаты позволяют, например, за 10 взвешиваний верифицировать $114^2 = 12996$ монет. Сравните это с "ожидаемым" поначалу значением $2^{10} = 1024$!

Задача об эксперте

В задачах об эксперте обычно фигурируют два персонажа – "эксперт" и "судья". Судье известно общее число фальшивых монет, а также то, что все фальшивые весят одинаково, все настоящие также весят одинаково, и фальшивые легче настоящих. Эксперт же знает все фальшивые монеты. Задача эксперта – убедить в справедливости своего знания (логически мыслящего и математически образованного) судью.
Итак...

11. На суде в качестве вещественного доказательства было предъявлено $2N$ пронумерованных монет. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по N-ю – фальшивые, а с $(N+1)$-й по $2N$-ю – настоящие. Суд же знает только, что все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые также весят одинаково, и что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта – чашечные весы без гирь.
Эксперт хочет доказать суду, что монеты с 1-й по N-ю – фальшивые, а с $(N+1)$-й по $2N$-ю – настоящие. Как эксперту сделать это за три взвешивания a) для $N = 7$; b) для $N = 9$?

12. Установите связь между решением пункта б) этой задачи и решением задачи о верификации 10 монет за три взвешивания.

13. Докажите, что каждому алгоритму верификации K монет, в котором величина одной из кучек монет равна 1, соответствует решение задачи об эксперте для $K-1$ настоящих и $K-1$ фальшивых монет.

Проверка равенства для монет трех типов

Очень интересным случаем общей задачи о верификации является такая задача: монеты могут быть либо настоящими (скажем, весящими 10 г), либо легкими фальшивыми (9 г), либо тяжелыми фальшивыми (11 г). [Здесь важно только то, что веса 9, 10, 11 образуют арифметическую прогрессию.] Как и раньше, перед нами стоит задача – доказать, что все монеты на самом деле весят поровну.
Совершенно очевидно, что для N монет эту задачу можно решить за $N-1$ взвешивание, просто сравнив одну монету со всеми остальными. Если все монеты весят одинаково, это будет зафиксировано в результате таких взвешиваний. Но этот результат абсолютно тривиален.
Мы же начнем сразу с нетривиального результата.

14. *6 за 4.* Протестируйте 6 монет за 4 взвешивания.

15. *5 за 3.* Протестируйте 5 монет за 3 взвешивания.

16. $3n+2$ *за* $2n+1$. Протестируйте $3n+2$ монеты за $2n+1$ взвешивание ($n>0$).
Введем обозначение $f_A(n)$ – количество монет, которое удается оттестировать алгоритмом A за n взвешиваний. Кроме того, обозначим $f(n) = \max\limits_A f_A(n)$ – максимальное значение числа тестируемых монет по всем алгоритмам. Ниже мы будем доказывать нижние оценки для $f(n)$, которые на самом деле будут сводиться просто к предъявлению алгоритма, дающего нужное значение $f_A(n)$ для бесконечно многих значений n.

17. *4+2 за 3.* Протестируйте группу из 4 монет и еще пару монет за 3 взвешивания.

18. *7 за 4.* Протестируйте 7 монет за 4 взвешивания.

19. *14 за 11.* Протестируйте 14 монет за 11 взвешиваний.

20. Докажите неравенство $f(4n) \ge 7n$.

21. Доказать неравенство $f(8n+1) \ge 15n$

22. Доказать неравенства $f(16n+2) \ge 31n$, $f(32n+3) \ge 63n$, а также общий случай – неравенство

$$f\left(2^k n + (k-2)\right) \ge \left(2^{k+1} - 1\right) n \qquad (2)$$

23. Как вы думаете, можно ли протестировать за K взвешиваний более чем $2K$ монет?