Ханойская башня, 9 июля.

1. *Ханойская башня.* Пусть есть три столбика, на один из которых нанизаны кольца различного радиуса; при этом внизу находится самое широкое кольцо, над ним — второе по диаметру, ..., наверху лежит самое узкое кольцо. Два другие столбика изначально свободны от колец. За ход разрешается взять одно из верхних колец с любого столбика и перенести его на другой столбик, при этом запрещено класть кольцо на более узкое. Как перенести все кольца на третий столбик? Каково наименьшее число перекладываний для этого нужно произвести?

2. *Нерекурсивный перенос Ханойской башни.* Составьте нерекурсивный алгоритм, решающий первую задачу.

3. *Сборка Ханойской башни.* Пусть кольца нанизаны на стержни произвольным образом, но каждое кольцо лежит на более широком или является основанием башни. Докажите, что делая ходы по правилам, можно собрать все кольца на первом стержне. Сколько операций потребуется в худшем случае?

4. *Сборка Ханойской башни-2.* Пусть, в отличие от предыдущей задачи, башня может быть собрана на любом стержне. Как изменится число требуемых действий?

5. *Переход между Ханойскими конфигурациями.* Пусть есть два расположения колец на стержнях, удовлетворяющих условию (ни одно из колец не лежит на более узком). Как, делая ходы по правилам, перейти от одного из них к другому? Каково требуемое число переносов?

6. *Ханойское расстояние.* Ханойской конфигурации можно поставить в соответствие число, так что разным конфигурациям будут поставлены в соответствие разные числа: для этого занумеруем столбцы цифрами 0, 1, 2, и будем считать, что они соответствуют цифрам в троичной системе счисления. Далее запишем в i-ю позицию троичного числа ту цифру, которая соответствует стержню, на который насажено i-е кольцо.

Ханойским расстоянием между двумя конфигурациями будем называть количество переходов между ними. Обозначим его $han(i,j)$. Понятно, что $han(i,i) = 0, han(i,j) = han(j,i), han(i,j) \le han(i,k) + han(k,j)$

В последнем случае равенство достигается для конфигураций, которые могут быть получены при кратчайшем переходе от i к j (в таком случае будем говорить, что k лежит между i и j).

Посчитайте $han(1002_3, 0112_3)$

Как вычислять $han(0,i)$? А $han(i,j)$?

7. *Сборка Ханойской башни вслепую.* Пусть в задаче о сборе Ханойской башни расположение колец не известно. Будем записывать ход с помощью пары (K_i, K_j), которая показывает, с какого стержня на какой переносится кольцо. Если такой перенос противоречит правилам, будем пропускать этот ход. Можно ли выписать такую последовательность ходов, выполнение которой приведёт к тому, что башня будет собрана на третьем кольце? Как только башня оказывается собранной, выполнение ходов прекращается.

Двадцать вторая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 2–27 июля 2006 года, 8 класс.

Ханойская башня, 9 июля.

1. *Ханойская башня.* Пусть есть три столбика, на один из которых нанизаны кольца различного радиуса; при этом внизу находится самое широкое кольцо, над ним — второе по диаметру, ..., наверху лежит самое узкое кольцо. Два другие столбика изначально свободны от колец. За ход разрешается взять одно из верхних колец с любого столбика и перенести его на другой столбик, при этом запрещено класть кольцо на более узкое. Как перенести все кольца на третий столбик? Каково наименьшее число перекладываний для этого нужно произвести?

2. *Нерекурсивный перенос Ханойской башни.* Составьте нерекурсивный алгоритм, решающий первую задачу.

3. *Сборка Ханойской башни.* Пусть кольца нанизаны на стержни произвольным образом, но каждое кольцо лежит на более широком или является основанием башни. Докажите, что делая ходы по правилам, можно собрать все кольца на первом стержне. Сколько операций потребуется в худшем случае?

4. *Сборка Ханойской башни-2.* Пусть, в отличие от предыдущей задачи, башня может быть собрана на любом стержне. Как изменится число требуемых действий?

5. *Переход между Ханойскими конфигурациями.* Пусть есть два расположения колец на стержнях, удовлетворяющих условию (ни одно из колец не лежит на более узком). Как, делая ходы по правилам, перейти от одного из них к другому? Каково требуемое число переносов?

6. *Ханойское расстояние.* Ханойской конфигурации можно поставить в соответствие число, так что разным конфигурациям будут поставлены в соответствие разные числа: для этого занумеруем столбцы цифрами 0, 1, 2, и будем считать, что они соответствуют цифрам в троичной системе счисления. Далее запишем в i-ю позицию троичного числа ту цифру, которая соответствует стержню, на который насажено i-е кольцо.

Ханойским расстоянием между двумя конфигурациями будем называть количество переходов между ними. Обозначим его $han(i,j)$. Понятно, что $han(i,i) = 0, han(i,j) = han(j,i), han(i,j) \le han(i,k) + han(k,j)$

В последнем случае равенство достигается для конфигураций, которые могут быть получены при кратчайшем переходе от i к j (в таком случае будем говорить, что k лежит между i и j).

Посчитайте $han(1002_3, 0112_3)$

Как вычислять $han(0,i)$? А $han(i,j)$?

7. *Сборка Ханойской башни вслепую.* Пусть в задаче о сборе Ханойской башни расположение колец не известно. Будем записывать ход с помощью пары (K_i, K_j), которая показывает, с какого стержня на какой переносится кольцо. Если такой перенос противоречит правилам, будем пропускать этот ход. Можно ли выписать такую последовательность ходов, выполнение которой приведёт к тому, что башня будет собрана на третьем кольце? Как только башня оказывается собранной, выполнение ходов прекращается.