Рекуррентные соотношения и динамическое программирование - 2, 5 июля.

1. *Вычеркивания.* Заданы два слова z и y. Можно ли получить z вычеркиванием некоторых букв из y?

Решение: Заведём два индекса: i и j. В начале $i = j = 1$. Далее двигаем j вперёд на 1, если $y[j] = z[i]$, увеличиваем i. Если i стало больше длины z, ответ "можно", иначе — "нельзя".

2. *Игра с шоколадкой.* От шоколадки, состоящей из N кусочков, Петя может откусывать по $a_1, \ldots, a_n$ кусочков, а Вася — по $b_1, \ldots, b_m$ кусочков. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Петя. Как выяснить, кто выигрывает при правильной игре, и построить выигрышную стратегию?

Решение: Для $k = 0, \ldots, N$ вычисляем, выигрывает ли каждый из игроков, если начинает игру. Для $k = 0$ ответ "проигрывает", далее, если есть ход в позицию, в которой соперник проигрывает, то эта позиция выигрышная, иначе проигрышная.

Вариации на тему "выясните что-либо о последовательности чисел за один проход" ("индуктивные функции"):

Пусть дана последовательность целых чисел $a_1, \ldots, a_n$. Её элементы разрешается просматривать только один раз.

3. Найдите наибольшую длину непрерывного возрастающего участка последовательности (максимальное m, для которого существует такое i, что $a_i < a_{i+1} < \ldots < a_{i+m-1}$).

4. Найдите наибольшую длину непрерывного монотонного участка последовательности.

5. Найдите участок последовательности с максимальной суммой элементов.

6. Некоторые клеточки листа бумаги заштрихованы. Найти самый большой полностью заштрихованный квадрат.

7. Найдите наибольшую длину возрастающей подпоследовательности (в отличие от предыдущей задачи, элементы не обязательно идут подряд: $a_{i_1} < a_{i_2}, \ldots < a_{i_m}, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$)

решение за один проход: для $k = 1, \ldots, n$ хранить минимальное число, на которое оканчивается возрастающая последовательность длины k; при получении нового элемента эту информацию можно обновлять за $O(\log n)$, если использовать бинарный поиск, или за $O(n)$; однако до решения за $O(n^2)$ с многократным просмотром последовательности может быть проще догадаться; поэтому в этой задаче можно и разрешить многократный просмотр.