Нестандартные взвешивания, 8 июля.

Проверка равенства

Пусть есть несколько монет, среди которых могут быть фальшивые (весящие одинаково, но меньше настоящих). Задача состоит в том, чтобы за заданное число взвешиваний убедиться, что фальшивых монет на самом деле нет, то есть что все эти монеты на самом деле весят одинаково. Этот процесс мы будем называть *верификацией* или *тестированием*, а отдельные взвешивания будем также называть *проверками*).

1. *8 за 3.* Верифицировать 8 монет за 3 взвешивания.

Решение: Во-первых, отметим, что наши взвешивания должны содержать равное число монет на весах (иначе мы просто теряем взвешивание впустую), а чаши весов должны оставаться в равновесии – иначе верификация немедленно прекращается с отрицательным результатом "не все монеты весят одинаково". Весь вопрос в том, какие выводы мы сможем сделать из полученных нами трёх равенств.

Обозначим монеты числами от 1 до 8, помещение монет на одну чашку будем обозначать значком "+", а результат взвешивания – равенством.

Алгоритм верификации очень прост:

$$1 = 2 \tag{1}$$
$$1+2 = 3+4 \tag{2}$$
$$1+2+3+4 = 5+6+7+8 \tag{3}$$

Заметим, что эти три проверки можно делать в любом порядке.

Докажем, что при выполнении этих равенств все 8 монет весят поровну. Действительно, из первого равенства следует, что 1 и 2 весят поровну. Когда мы положили 1 и 2 на одну чашу весов, а справа положили две другие монеты и в результате вес оказался равным, мы немедленно можем сделать вывод о том, что каждая из монет 3 и 4 весит столько же, сколько монеты 1 и 2. Аналогичный вывод о следующих четырёх монетах делается на основании третьего взвешивания.

2. 2^K *за* K. Обобщите предыдущий алгоритм на случай K взвешиваний.

3. *10 за 3: первая сложная задача.* Верифицировать 10 монет за три взвешивания.

Решение: Поначалу задание кажется неразрешимым. Тем не менее, решение существует.

$$1+(2+3) = (4+5+6) \tag{4}$$
$$1+(4+5+6) = (7+8+9+10) \tag{5}$$
$$1+(7+8+9+10) = (2+3)+(4+5+6) \tag{6}$$

Покажем, что из выписанных трёх равенств действительно следует, что все монеты весят одинаково. Обозначим вес монеты 1 через x, вес суммы монет 2 и 3 – через y, вес суммы 4+5+6 – через z, а вес суммы 7+8+9+10 – через t. Тогда полученные нами в результате проверок три равенства означают выполнение системы трёх уравнений:

$$x+y = z \tag{7}$$
$$x+z = t \tag{8}$$
$$x+t = y+z \tag{9}$$

Сложим два последних уравнения. Получим после сокращений $2x = y$. Тогда из первого уравнения $z = 3x$, а из второго – $t = 4x$. Мы получили, что две монеты 2 и 3 весят вдвое больше монеты 1, три монеты 4, 5 и 6 весят в сумме втрое больше монеты 1, а последние 4 монеты весят вчетверо больше монеты 1. Значит, каждая монета весит ровно столько же, сколько весит монета 1.

4. *100 за 6.* Верифицировать 100 монет за 6 взвешиваний.

Решение: Решение этой задачи хочется получить даром – из предыдущего. Например, разбить 100 монет на 10 кучек по 10 монет и для начала за три взвешивания доказать аналогичным образом равенство весов в каждой кучке. Может быть, получится?

Да, несомненно. За три взвешивания мы сможем увидеть, что каждая из 10 кучек по 10 монет имеет один и тот же вес. Ну и что? А то, что это означает, что в каждой из кучек одно и то же количество фальшивых монет. Если мы теперь докажем равенство весов всех монет из любой одной кучки (то есть что фальшивых монет там или 0, или все 10), то автоматически окажется, что и все остальные монеты тоже весят одинаково. А это мы умеем доказывать ещё за три взвешивания.

5. 10^K *за* $3K$. Обобщить полученные результаты на $3K$ взвешиваний.

Однако, оказывается, и результат "10^K за $3K$" – не наилучший.

6. *28 за 4.* Верифицировать 28 монет за 4 взвешивания.

Решение: Для трёх проверок и четырёх групп мы воспользовались уравнениями, основанными на арифметических равенствах $1+2=3$, $1+3=4$ и $2+3=1+4$. А какие равенства можно использовать здесь?

Аналогично тому, как мы поступали раньше, мысленно разобьем все 28 монет на несколько групп. А именно, пусть в группах будет 1, 3, 6, 8 и 10 монет. Если мы с помощью четырёх равенств докажем, что веса групп тоже относятся как $1:3:6:8:10$, то мы решим поставленную задачу. Искомые равенства – такие:

$$1+8 = 3+6 \quad (10)$$
$$1+3+6 = 10 \quad (11)$$
$$1+10 = 3+8 \quad (12)$$
$$1+3+10 = 6+8 \quad (13)$$

А теперь – доказательство. Мы, конечно, можем снова начать "химичить" со сложением уравнений, рассчитывая на удачу. Но мы подойдем к делу проще: перепишем первые три равенства в виде

$$1+(8-6) = 3 \quad (14)$$
$$1+3 = (10-6) \quad (15)$$
$$1+(10-6) = 3+(8-6) \quad (16)$$

Ничего не напоминает?

Конечно же, это те самые равенства, которые мы уже видели в примере "10 за 3". Мы знаем, что они верифицируют группы из 1, (8-6)=2, 3 и (10-6)=4 монет. Иначе говоря, они доказывают, что группа 8 весит больше группы 6 ровно на 2, а группа 10 весит больше группы 6 ровно на 4. Но у нас есть еще одно равенство – $1+3+10=6+8$, равносильное $1+3+(10-6)=8$. Поскольку 1, 3 и 10-6 уже верифицированы, то мы получаем, что группа 8 тоже верифицирована, а заодно с ней оказываются верифицированными 6 и 10.

7. *30 за 4.* Верифицируйте за 4 взвешивания 30 монет.

Решение: Разбиение на группы – 2, 5, 6, 8, 9. Отыщите четыре нужных равенства для этих групп.

8. *80 за 5.* Решите ту же задачу для 5 взвешиваний и 80 монет – точнее, разбиения на группы (3, 4, 9, 10, 26, 28).

9. *96 за 5.* Решите ту же задачу для 5 взвешиваний и 96 монет – точнее, разбиений на группы (1, 8, 14, 18, 25, 30) или (1, 12, 15, 20, 22, 26).

10. *114 за 5.* То же для 114 монет – группы (9, 12, 20, 22, 25, 26).

Обратите внимание, что последние результаты позволяют, например, за 10 взвешиваний верифицировать $114^2 = 12996$ монет. Сравните это с "ожидаемым" поначалу значением $2^{10} = 1024$!

Задача об эксперте

В задачах об эксперте обычно фигурируют два персонажа – "эксперт" и "судья". Судье известно общее число фальшивых монет, а также то, что все фальшивые весят одинаково, все настоящие также весят одинаково, и фальшивые легче настоящих. Эксперт же знает все фальшивые монеты. Задача эксперта – убедить в справедливости своего знания (логически мыслящего и математически образованного) судью.

Итак...

11. На суде в качестве вещественного доказательства было предъявлено $2N$ пронумерованных монет. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по N-ю – фальшивые, а с $(N+1)$-й по $2N$-ю – настоящие. Суд же знает только, что все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые также весят одинаково, и что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта – чашечные весы без гирь.

Эксперт хочет доказать суду, что монеты с 1-й по N-ю – фальшивые, а с $(N+1)$-й по $2N$-ю – настоящие. Как эксперту сделать это за три взвешивания a) для $N=7$; b) для $N=9$?

Решение: a) Первым взвешиванием эксперт сравнивает монеты 1 и 8. $(1>8)$. Судья убеждается, что монета 8 – фальшивая, а 1 – настоящая.

Вторым взвешиванием эксперт сравнивает 1+9+10 с 2+3+8. $(2+3+8>1+9+10)$. Судья видит, что добавление двух неизвестных монет к тяжелой чаше и двух неизвестных монет к легкой чаше поменяло ситуацию на весах. Следовательно, к тяжелой чаше были добавлены две легких монеты, а к легкой – две тяжелых. Это доказывает ему, что монеты 2 и 3 – настоящие, а 9 и 10 – фальшивые.

Наконец, эксперт сравнивает $(1+2+3)+(11+12+13+14)$ с $(4+5+6+7)+(8+9+10)$. Восстановите рассуждения, которые по результату этого взвешивания сможет проделать судья.

Отметим, что этот алгоритм обобщается на любое число взвешиваний, при этом для N взвешиваний у эксперта получается доказательство для 2^N настоящих и такого же числа фальшивых монет.

b) Предварительное действие: эксперт группирует монеты в такие три кучки: А (1, 2; 10, 11); Б (3, 4, 5; 12, 13, 14); В (6, 7, 8, 9; 15, 16, 17, 18); В каждой кучке поровну настоящих и фальшивых монет, эксперту это известно, а судье будет доказано в результате взвешиваний.

1) На левую чашку весов кладутся настоящие монеты из кучки А и фальшивые из кучки Б, а на правую – фальшивые из кучки А и настоящие из кучки Б. Правая чашка тяжелее левой.

2) На левую чашку весов кладутся настоящие монеты из кучки Б и фальшивые из кучки В, а на правую – фальшивые из кучки Б и настоящие из кучки В. Правая чашка тяжелее левой.

3) На левую чашку весов кладутся настоящие монеты из кучки В и фальшивые из кучек А и Б, а на правую – фальшивые из кучки В и настоящие из кучек А и Б. Правая чашка тяжелее левой.

Пусть x – разность весов настоящих и фальшивых монет кучки А, т.е. $x = (1+2)-(10+11)$, y – то же самое для кучки Б, то есть $y = (3+4+5)-(12+13+14)$, и, аналогично, $z = (6+7+8+9)-(15+16+17+18)$. Разность между весом фальшивой и весом настоящей монеты можем считать равной 1.

Наши взвешивания доказали судье следующие три неравенства: $y > x$, $z > y$, $x+y > z$. Поскольку x, y и z – целые числа, то строгие неравенства можно заменить на нестрогие: $y \geq x+1$, $z \geq y+1$, $x+y \geq z+1$. Сравнивая второе и третье неравенства, получаем $x+y+z \geq y+z+2$, откуда $x \geq 2$. Складывая все три неравенства, получаем $y \geq 3$. Наконец, из уже полученного делаем вывод $z \geq 4$. С другой стороны, очевидно, что разность между какими-то K монетами и другими K монетами не может быть больше, чем K, причем равенство бывает только тогда, когда первые монеты – настоящие, а вторые – фальшивые. Это и доказывает судье всё, что надо.

12. Установите связь между решением пункта б) этой задачи и решением задачи о верификации 10 монет за три взвешивания.

13. Докажите, что каждому алгоритму верификации K монет, в котором величина одной из кучек монет равна 1, соответствует решение задачи об эксперте для $K-1$ настоящих и $K-1$ фальшивых монет.

Проверка равенства для монет трех типов

Очень интересным случаем общей задачи о верификации является такая задача: монеты могут быть либо настоящими (скажем, весящими 10 г), либо легкими фальшивыми (9 г), либо тяжелыми фальшивыми (11 г). [Здесь важно только то, что веса 9, 10, 11 образуют арифметическую прогрессию.] Как и раньше, перед нами стоит задача – доказать, что все монеты на самом деле весят поровну.

Совершенно очевидно, что для N монет эту задачу можно решить за $N-1$ взвешивание, просто сравнив одну монету со всеми остальными. Если все монеты весят одинаково, это будет зафиксировано в результате таких взвешиваний. Но этот результат абсолютно тривиален.

Мы же начнем сразу с нетривиального результата.

14. *6 за 4.* Протестируйте 6 монет за 4 взвешивания.

Решение: Алгоритм базируется на таком свойстве: если в условиях задачи (a, b, c) – веса монет и $3a = 2b+c$, то $a = b = c$. Докажем это свойство.

По свойству арифметической прогрессии либо $c = 2a-b$, либо $c = 2b-a$, либо $c = \frac{a+b}{2}$. В каждом из трёх случаев, подставляя указанное значение c в равенство $c = 3a-2b$, убеждаемся, что $a = b$, а подставляя это в условие, получаем $c = 3a-2b = a$.

Теперь покажем, как использовать это равенство для доказательства равенства шести монет. Сначала (двумя взвешиваниями) убедимся, что первые три монеты равны по весу. (Обозначим их вес через a). Затем (одним взвешиванием) убедимся, что четвертая монета равна пятой (пусть их вес равен b). Наконец, вес шестой монеты обозначим c. Положив на одну чашу весов монеты 1, 2 и 3, а на другую – монеты 4, 5 и 6, убедимся, что весы в равновесии. Отсюда (рассуждение см. выше) заключаем, что все 6 монет весят одинаково.

15. *5 за 3.* Протестируйте 5 монет за 3 взвешивания.

Решение: Ключевая идея та же самая, но взвешивания будут немного другими. Пусть у нас есть монеты a, b, c, d, e.

$$a+d = b+c \tag{17}$$
$$a+e = b+d \tag{18}$$
$$a = e \tag{19}$$
$$\tag{20}$$

Если сложить эти три равенства, то в результате получится как раз $3a = 2b+c$. Как мы уже знаем, из этого соотношения делается вывод о том, что $a = b = c$. Тогда из первого уравнения получаем $d = b+c-a = a$.

16. $3n+2$ *за* $2n+1$. Протестируйте $3n+2$ монеты за $2n+1$ взвешивание $(n > 0)$.

Введем обозначение $f_A(n)$ – количество монет, которое удается оттестировать алгоритмом A за n взвешиваний. Кроме того, обозначим $f(n) = \max_A f_A(n)$ – максимальное значение числа тестируемых монет по всем алгоритмам. Ниже мы будем доказывать нижние оценки для $f(n)$, которые на самом деле будут сводиться просто к предъявлению алгоритма, дающего нужное значение $f_A(n)$ для бесконечно многих значений n.

Решение: Нам предстоит доказать, что $f(2n+1) \geq 3n+2$. Доказательство будет индукционным. База индукции $f_A(3) = 5$ доказана выше, а сейчас мы покажем, как добавлять 3 монеты к уже оттестированным $3n+2$ монетам всего за 2 взвешивания. Это делается так: пусть добавляемые монеты весят b, c и d, а каждая из оттестированных монет весит a. Искомые два взвешивания можно записать в виде равенств:

$$\begin{aligned} b &= d && (21) \\ 3a &= b+c+d && (22) \\ & && (23) \end{aligned}$$

Действительно, из этих равенств получаем $3a = 2b+c$, откуда, как и выше, делаем вывод о том, что $a = b = c$. Равенство $b = d$ завершает доказательство.

Может показаться, что неравенство $f(2n+1) \geq 3n+2$ неулучшаемо. Однако это неверно, как мы увидим в следующих примерах.

17. *4+2 за 3.* Протестируйте группу из 4 монет и еще пару монет за 3 взвешивания.

Решение: Пусть у нас есть монеты a, b, c, d, e и f, а мы хотим доказать $a = b = c = d$ и $e = f$.

Схема взвешиваний:

$$\begin{aligned} e-f &= a-b && (24) \\ e-f &= b-c && (25) \\ e-f &= c-d && (26) \\ & && (27) \end{aligned}$$

Мы здесь записали разности вместо сумм. Если сложить эти три равенства, то в результате получится результат $3(e-f) = a-d$. Но разность между монетами a и d, каждая из которых весит либо n, либо $n-1$, либо $n+1$, должна быть не более 2, а величина $3(e-f)$ кратна 3. Поэтому и левая, и правая части в последнем равенстве равны 0, то есть $e = f$ и $a = d$. Подставив $e = f$ в каждое из исходных равенств, получим, что $a = b$, $b = c$ и $c = d$, что и требовалось доказать.

18. *7 за 4.* Протестируйте 7 монет за 4 взвешивания.

Решение: Выше мы протестировали 4+2. Итак, $a1 = a2 = a3 = a4 = a$ и $b1 = b2 = b$. Отложим одну из монет a_i и добавим на весы еще одну монету c, которую мы до сих пор не использовали. Точнее, снова воспользуемся равенством $3a = 2b+c$, которое и докажет нам полное равенство всех 4+2+1 монет.

19. *14 за 11.* Протестируйте 14 монет за 11 взвешиваний.

Решение: Здесь необходимо доказать еще одно полезное свойство весов монет: если $7a = 4b+2c+d$, то $a = b = c = d$. Докажем его.

Если справа есть неравные по весу монеты, то правая чаша весит больше, чем $7\min(b,c,d)$, но меньше, чем $7\max(b,c,d)$. Это значит, что вес монеты a заключен между $\min(b,c,d)$ и $\max(b,c,d)$, то есть является средним членом арифметической прогрессии. Запишем равенство как $4(b-a)+2(c-a)+(d-a) = 0$. Каждое из выражений в скобках равно нулю или ± 1 (напомним, что 1 – разность арифметической прогрессии), поэтому мы немедленно получаем из соображений чётности, что $d-a = 0$, затем делим на 2 и получаем $c-a = 0$, а затем и $b-a = 0$. Итак, $b = c = d = a$, что и требовалось доказать.

Таким образом, для верификации 7+4+2+1 монет достаточно провести 6+3+1 предварительное взвешивание, устанавливающее 6 равенств монет "a", три равенства монет "b", одно равенство для двух монет "c", а после этого – еще одно взвешивание всех 14 монет, доказывающее их полную идентичность.

20. Докажите неравенство $f(4n) \geq 7n$.

Решение: База индукции – проверка 7 монет за 4 взвешивания, а для перехода нам надо добавлять каждые следующие 7 монет к уже верифицированным за 4 взвешивания. Обе этих операции мы уже фактически научились делать.

Заметим, что результат "$7n$ монет за $4n$ взвешиваний" даёт *асимптотический* выигрыш перед предыдущим результатом "$3n+2$ монет за $2n+1$ взвешивание": раньше мы за каждые 4 проверки увеличивали число верифицированных монет на 6, а сейчас – на 7.

Однако и этот результат не является лучшим.

21. Доказать неравенство $f(8n+1) \geq 15n$

22. Доказать неравенства $f(16n+2) \geq 31n$, $f(32n+3) \geq 63n$, а также общий случай – неравенство

$$f\left(2^k n + (k-2)\right) \geq \left(2^{k+1}-1\right) n \qquad (28)$$

23. Как вы думаете, можно ли протестировать за K взвешиваний более чем $2K$ монет?