Материалы занятий алгоритмического кружка

Содержание

Рекуррентные соотношения и динамическое программирование.

1. *Взрывоопасность.* На складе есть ящики с тротилом и ящики с песком. Из соображений безопасности ящики с тротилом нельзя класть рядом. Сколькими способами можно построить штабель из N ящиков?

Решение: Если верхний ящик в штабеле – песок, то следующим можно класть любой из ящиков, а если верхний ящик взрывоопасен, то дальше можно класть только ящик с песком. Можно поглядеть на то же самое и в обратную сторону: если сверху в штабеле лежит песок, то под ним может лежать любой ящик, а если сверху лежит тротил, то под ним может лежать только песок (а вот дальше – снова любой ящик). Таким образом, если число возможных штабелей высоты N обозначить через $Ш(N)$, то $Ш(N) = Ш(N-1) + Ш(N-2)$ (первое слагаемое соответствует случаю, когда сверху лежит песок, а второе — случаю, когда сверху тротил). Осталось добавить, что $Ш(1) = 2$ и $Ш(2) = 3$.

2. *Шоколадка.* От шоколадки, состоящей из N кусочков, Петя и Вася по очереди откусывают по одному или два кусочка. Выигрывает тот, кто съедает последний кусочек шоколадки. Начинает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение: Рекуррентное соотношение ровно то же самое, что и в предыдущей задаче, однако на этот раз нас интересует не КОЛИЧЕСТВО, а ВЫИГРЫШ В ИГРЕ. Заметим, что если в шоколадке осталось 1 или 2 кусочка, то выигрывает тот, чья очередь делать ход, а если осталось всего три кусочка, то начинающий проигрывает. Дальше можно напомнить классику о выигрывающих и проигрывающих позициях — позиция, из которой есть хотя бы один выигрывающий ход, помечается как выигрывающая, а позиция, из которой такого хода нет — как проигрывающая. Несложно увидеть, что проигрывают все позиции, для которых число кусочков кратно 3.

3. *Пути фишки.* Фишка может двигаться по полю длины N только вперед. Длина хода фишки не более K. Найти число различных путей, по которым фишка может пройти поле от начала до конца.

4. *Размены.* В государстве Манилэнд выпущены монеты достоинством 17, 31 и 89 мани. Сколькими способами можно выплатить зарплату, равную 300 маням? (Способы, отличающиеся только порядком выплачиваемых монет, считать одинаковыми.)

Решение: Будем действовать так: для каждого натурального числа мы хотим найти число способов, которым его можно представить в виде $17a+31b+89c$, где a, b, c — целые неотрицательные числа. Заметим, что если есть способ так представить число N, то одновременно это дает способ представления чисел $N+17$, $N+31$ и $N+89$. Таким образом, можно последовательно заполнять табличку, в которую будут попадать все представимые числа, и для каждого числа будет накапливаться число способов его представления.

17 34 51 68 85 102 119 136 153 170 187 204 221 238 255 272 289

48 65 82 99 116 133 150 167 184 201 218 235 252 269 286

79 96 113 130 147 164 181 198 215 232 249 266 283 300 (!)

дальше можно проговорить о математике и представлениях 300=17a+31b Теперь будем доводить строчки не до 300, а до 300-89=211.

110 127 144 161 178 195 212

141 158 175 192 209

172 189 206

203

Ни одного способа получить 211 не найдено. Найдем еще 300-2*89=122 и 300-3*89=33. Их тоже в таблице нет.

Ответ: Одним способом.

5. *Путь ладьи.* Сколькими способами ладья может пройти с клетки $a1$ на клетку $h8$, перемещаясь по доске только вправо и вверх?

6. *Путь ладьи-2.* Из доски вырезан прямоугольник, состоящий из клеток $c3$–$c5$ и $d3$–$d5$. Сколькими способами ладья может пройти по такой доске с клетки $a1$ на клетку $h8$, перемещаясь по доске только вправо и вверх?

7. Целеустремлённый шахматный король стоит на поле $a1$ и стремится попасть на поле $h8$. Для каждого поля доски известно, сколько минут король будет ждать, попав на это поле. Поскольку король целеустремленный, он будет делать только такие ходы, которые приближают его к цели, то есть вверх, вправо и по диагонали вверх-вправо (если смотреть со стороны белых). Как найти для короля самый быстрый путь?

8. *Набрать максимум суммы.* Имеется равнобедренный числовой треугольник высоты n, аналогичный треугольнику Паскаля, в котором расставлены произвольные целые числа. Из каждого числа треугольника можно сделать два различных хода вниз в стоящие там числа (влево-вниз и вправо-вниз). Найти такой путь из верхней точки треугольника до его основания, чтобы сумма чисел на клетках этого пути была максимальна.

Рекуррентные соотношения и динамическое программирование II.

1. *Вычеркивания.* Заданы два слова z и y. Можно ли получить z вычеркиванием некоторых букв из y?

Решение: Пусть N — длина y. Вычислим для $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ величину $F(k)$ — наибольшую возможную длину префикса z, который можно получить из префикса y длины k вычёркиванием букв. Понятно, что $F(k) = 0$. Далее, пусть известно $F(k-1)$. Если k-я буква y и $F(k-1)+1$ -я буква z совпадают, то $F(k) = F(k-1)+1$, иначе $F(k) = F(k-1)$. Если $F(N)$ равно длине z, ответ задачи — "можно", иначе — "нельзя".

2. *Игра с шоколадкой.* От шоколадки, состоящей из N кусочков, Петя может откусывать по $a_1, \ldots, a_n$ кусочков, а Вася — по $b_1, \ldots, b_m$ кусочков. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Петя. Как выяснить, кто выигрывает при правильной игре, и построить выигрышную стратегию?

Решение: Для $k = 0, \ldots, N$ вычислим, выигрывает ли каждый из игроков, если начинает игру. Для $k = 0$ ответ "проигрывает", далее, если есть ход в позицию, в которой соперник проигрывает, то эта позиция выигрышная, иначе проигрышная.

Пусть дана последовательность целых чисел $a_1, \ldots, a_N$. Её элементы разрешается просматривать только один раз.

3. Найдите наибольшую длину непрерывного возрастающего участка последовательности (максимальное m, для которого существует такое i, что $a_i < a_{i+1} < \ldots < a_{i+m-1}$).

Решение: Будем последовательно для $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ вычислять две величины: $F(k)$ — наибольшую длину возрастающего участка, кончающегося на k-м элементе, и $M(k)$ — наибольшую длину возрастающего участка в подпоследовательности $a_1, \ldots, a_k$. Очевидно, что $M(k) = \max\limits_{1 \le i \le k} F(i) = \max(M(k-1), F(k))$, $F(k) = F(k-1)+1$, если $a_k > a_{k-1}$ (иначе $F(k) = 1$), и $F(0) = M(0) = 0$.

4. Найдите наибольшую длину непрерывного монотонного участка последовательности.

Решение: Аналогично предыдущей задаче, только теперь вычисляем две пары таких функций — для возрастающих и убывающих участков.

5. Найдите участок последовательности с максимальной суммой элементов.

Решение: $F(k)$ — наибольшая сумма участка с последним элементом a_k. Если $F(k-1) < 0$, то $F(k) = a_k$, иначе $F(k) = a_k + F(k-1)$. $M(k) = \max\limits_{1 \le i \le k} F(i) = \max(M(k-1), F(k))$

6. Некоторые клеточки листа бумаги заштрихованы. Найти самый большой полностью заштрихованный квадрат.

Решение: Для каждой клеточки найдём $V(x,y)$ — наибольшую длину вертикального отрезка, для которого текущая клеточка — самая нижняя, $H(x,y)$ — наибольшую длину горизонтального отрезка, для которого текущая клеточка — самая правая, и $S(x,y)$ — наибольшую сторону квадрата, для которого текущая клеточка — правый нижний угол. Для незаштрихованных клеточек эти функции равны нулю, для заштрихованных $V(x,y) = V(x,y-1)+1, H(x,y) = H(x-1,y)+1, S(x,y) = \min(V(x,y), H(x,y), S(x-1,y-1)+1)$.

7. Найдите наибольшую длину возрастающей подпоследовательности (в отличие от предыдущей задачи, элементы не обязательно идут подряд: $a_{i_1} < a_{i_2}, \ldots < a_{i_m}, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$)

Решение: Можно решить "за один проход": для $k = 1, \ldots, n$ хранить минимальное число, на которое оканчивается возрастающая последовательность длины k; при получении нового элемента эту информацию можно обновлять за $O(\log n)$, если использовать бинарный поиск, или за $O(n)$; однако есть решение за $O(n^2)$ с многократным просмотром последовательности (и до него может быть проще догадаться).

Нестандартные взвешивания.

Проверка равенства

Пусть есть несколько монет, среди которых могут быть фальшивые (весящие одинаково, но меньше настоящих). Задача состоит в том, чтобы за заданное число взвешиваний убедиться, что фальшивых монет на самом деле нет, то есть что все эти монеты на самом деле весят одинаково. Этот процесс мы будем называть *верификацией* или *тестированием*, а отдельные взвешивания будем также называть *проверками*).

1. *8 за 3.* Верифицировать 8 монет за 3 взвешивания.

Решение: Во-первых, отметим, что наши взвешивания должны содержать равное число монет на весах (иначе мы просто теряем взвешивание впустую), а чаши весов должны оставаться в равновесии – иначе верификация немедленно прекращается с отрицательным результатом "не все монеты весят одинаково". Весь вопрос в том, какие выводы мы сможем сделать из полученных нами трёх равенств.

Обозначим монеты числами от 1 до 8, помещение монет на одну чашку будем обозначать значком "+", а результат взвешивания – равенством.

Алгоритм верификации очень прост:

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \quad (1)\\ 1+2 &= 3+4 \quad (2)\\ 1+2+3+4 &= 5+6+7+8 \quad (3)\end{aligned}$$

Заметим, что эти три проверки можно делать в любом порядке.

Докажем, что при выполнении этих равенств все 8 монет весят поровну. Действительно, из первого равенства следует, что 1 и 2 весят поровну. Когда мы положили 1 и 2 на одну чашу весов, а справа положили две другие монеты и в результате вес оказался равным, мы немедленно можем сделать вывод о том, что каждая из монет 3 и 4 весит столько же, сколько монеты 1 и 2. Аналогичный вывод о следующих четырёх монетах делается на основании третьего взвешивания.

2. 2^K *за* K. Обобщите предыдущий алгоритм на случай K взвешиваний.

3. *10 за 3: первая сложная задача.* Верифицировать 10 монет за три взвешивания.

Решение: Поначалу задание кажется неразрешимым. Тем не менее, решение существует.

$$\begin{aligned} 1+(2+3) &= (4+5+6) \quad (4)\\ 1+(4+5+6) &= (7+8+9+10) \quad (5)\\ 1+(7+8+9+10) &= (2+3)+(4+5+6) \quad (6)\end{aligned}$$

Покажем, что из выписанных трёх равенств действительно следует, что все монеты весят одинаково. Обозначим вес монеты 1 через x, вес суммы монет 2 и 3 – через y, вес суммы 4+5+6 – через z, а вес суммы 7+8+9+10 – через t. Тогда полученные нами в результате проверок три равенства означают выполнение системы трёх уравнений:

$$\begin{aligned} x+y &= z \quad (7)\\ x+z &= t \quad (8)\\ x+t &= y+z \quad (9)\end{aligned}$$

Сложим два последних уравнения. Получим после сокращений $2x = y$. Тогда из первого уравнения $z = 3x$, а из второго – $t = 4x$. Мы получили, что две монеты 2 и 3 весят вдвое больше монеты 1, три монеты 4, 5 и 6 весят в сумме втрое больше монеты 1, а последние 4 монеты весят вчетверо больше монеты 1. Значит, каждая монета весит ровно столько же, сколько весит монета 1.

4. *100 за 6.* Верифицировать 100 монет за 6 взвешиваний.

Решение: Решение этой задачи хочется получить даром – из предыдущего. Например, разбить 100 монет на 10 кучек по 10 монет и для начала за три взвешивания доказать аналогичным образом равенство весов в каждой кучке. Может быть, получится?

Да, несомненно. За три взвешивания мы сможем увидеть, что каждая из 10 кучек по 10 монет имеет один и тот же вес. Ну и что? А то, что это означает, что в каждой из кучек одно и то же количество фальшивых монет. Если мы теперь докажем равенство весов всех монет из любой одной кучки (то есть что фальшивых монет там или 0, или все 10), то автоматически окажется, что и все остальные монеты тоже весят одинаково. А это мы умеем доказывать ещё за три взвешивания.

5. 10^K *за* $3K$. Обобщить полученные результаты на $3K$ взвешиваний.

Однако, оказывается, и результат "10^K за $3K$" – не наилучший.

6. *28 за 4.* Верифицировать 28 монет за 4 взвешивания.

Решение: Для трёх проверок и четырёх групп мы воспользовались уравнениями, основанными на арифметических равенствах $1+2=3$, $1+3=4$ и $2+3=1+4$. А какие равенства можно использовать здесь?

Аналогично тому, как мы поступали раньше, мысленно разобьем все 28 монет на несколько групп. А именно, пусть в группах будет 1, 3, 6, 8 и 10 монет. Если мы с помощью четырёх равенств докажем, что веса групп тоже относятся как $1:3:6:8:10$, то мы решим поставленную задачу. Искомые равенства – такие:

$$\begin{aligned} 1+8 &= 3+6 && (10)\\ 1+3+6 &= 10 && (11)\\ 1+10 &= 3+8 && (12)\\ 1+3+10 &= 6+8 && (13) \end{aligned}$$

А теперь – доказательство. Мы, конечно, можем снова начать "химичить" со сложением уравнений, рассчитывая на удачу. Но мы подойдем к делу проще: перепишем первые три равенства в виде

$$\begin{aligned} 1+(8-6) &= 3 && (14)\\ 1+3 &= (10-6) && (15)\\ 1+(10-6) &= 3+(8-6) && (16) \end{aligned}$$

Ничего не напоминает?

Конечно же, это те самые равенства, которые мы уже видели в примере "10 за 3". Мы знаем, что они верифицируют группы из 1, (8-6)=2, 3 и (10-6)=4 монет. Иначе говоря, они доказывают, что группа 8 весит больше группы 6 ровно на 2, а группа 10 весит больше группы 6 ровно на 4. Но у нас есть еще одно равенство – $1+3+10=6+8$, равносильное $1+3+(10-6)=8$. Поскольку 1, 3 и 10-6 уже верифицированы, то мы получаем, что группа 8 тоже верифицирована, а заодно с ней оказываются верифицированными 6 и 10.

7. *30 за 4.* Верифицируйте за 4 взвешивания 30 монет.

Решение: Разбиение на группы – 2, 5, 6, 8, 9. Отыщите четыре нужных равенства для этих групп.

8. *80 за 5.* Решите ту же задачу для 5 взвешиваний и 80 монет – точнее, разбиения на группы (3, 4, 9, 10, 26, 28).

9. *96 за 5.* Решите ту же задачу для 5 взвешиваний и 96 монет – точнее, разбиений на группы (1, 8, 14, 18, 25, 30) или (1, 12, 15, 20, 22, 26).

10. *114 за 5.* То же для 114 монет – группы (9, 12, 20, 22, 25, 26).

Обратите внимание, что последние результаты позволяют, например, за 10 взвешиваний верифицировать $114^2 = 12996$ монет. Сравните это с "ожидаемым" поначалу значением $2^{10} = 1024$!

Задача об эксперте

В задачах об эксперте обычно фигурируют два персонажа – "эксперт" и "судья". Судье известно общее число фальшивых монет, а также то, что все фальшивые весят одинаково, все настоящие также весят одинаково, и фальшивые легче настоящих. Эксперт же знает все фальшивые монеты. Задача эксперта – убедить в справедливости своего знания (логически мыслящего и математически образованного) судью.

Итак...

11. На суде в качестве вещественного доказательства было предъявлено $2N$ пронумерованных монет. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по N-ю – фальшивые, а с $(N+1)$-й по $2N$-ю – настоящие. Суд же знает только, что все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые также весят одинаково, и что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта – чашечные весы без гирь.

Эксперт хочет доказать суду, что монеты с 1-й по N-ю – фальшивые, а с $(N+1)$-й по $2N$-ю – настоящие. Как эксперту сделать это за три взвешивания a) для $N=7$; b) для $N=9$?

Решение: a) Первым взвешиванием эксперт сравнивает монеты 1 и 8. $(1>8)$. Судья убеждается, что монета 8 – фальшивая, а 1 – настоящая.

Вторым взвешиванием эксперт сравнивает 1+9+10 с 2+3+8. $(2+3+8>1+9+10)$. Судья видит, что добавление двух неизвестных монет к тяжелой чаше и двух неизвестных монет к легкой чаше поменяло ситуацию на весах. Следовательно, к тяжелой чаше были добавлены две легких монеты, а к легкой – две тяжелых. Это доказывает ему, что монеты 2 и 3 – настоящие, а 9 и 10 – фальшивые.

Наконец, эксперт сравнивает $(1+2+3)+(11+12+13+14)$ с $(4+5+6+7)+(8+9+10)$. Восстановите рассуждения, которые по результату этого взвешивания сможет проделать судья.

Отметим, что этот алгоритм обобщается на любое число взвешиваний, при этом для N взвешиваний у эксперта получается доказательство для 2^N настоящих и такого же числа фальшивых монет.

b) Предварительное действие: эксперт группирует монеты в такие три кучки: А (1, 2; 10, 11); Б (3, 4, 5; 12, 13, 14); В (6, 7, 8, 9; 15, 16, 17, 18); В каждой кучке поровну настоящих и фальшивых монет, эксперту это известно, а судье будет доказано в результате взвешиваний.

1) На левую чашку весов кладутся настоящие монеты из кучки А и фальшивые из кучки Б, а на правую – фальшивые из кучки А и настоящие из кучки Б. Правая чашка тяжелее левой.

2) На левую чашку весов кладутся настоящие монеты из кучки Б и фальшивые из кучки В, а на правую – фальшивые из кучки Б и настоящие из кучки В. Правая чашка тяжелее левой.

3) На левую чашку весов кладутся настоящие монеты из кучки В и фальшивые из кучек А и Б, а на правую – фальшивые из кучки В и настоящие из кучек А и Б. Правая чашка тяжелее левой.

Пусть x – разность весов настоящих и фальшивых монет кучки А, т.е. $x = (1+2) - (10+11)$, y – то же самое для кучки Б, то есть $y = (3+4+5) - (12+13+14)$, и, аналогично, $z = (6+7+8+9) - (15+16+17+18)$. Разность между весом фальшивой и весом настоящей монеты можем считать равной 1.

Наши взвешивания доказали судье следующие три неравенства: $y > x$, $z > y$, $x + y > z$. Поскольку x, y и z – целые числа, то строгие неравенства можно заменить на нестрогие: $y \geq x + 1$, $z \geq y + 1$, $x + y \geq z + 1$. Сравнивая второе и третье неравенства, получаем $x + y + z \geq y + z + 2$, откуда $x \geq 2$. Складывая все три неравенства, получаем $y \geq 3$. Наконец, из уже полученного делаем вывод $z \geq 4$. С другой стороны, очевидно, что разность между какими-то K монетами и другими K монетами не может быть больше, чем K, причем равенство бывает только тогда, когда первые монеты – настоящие, а вторые – фальшивые. Это и доказывает судье всё, что надо.

12. Установите связь между решением пункта б) этой задачи и решением задачи о верификации 10 монет за три взвешивания.

13. Докажите, что каждому алгоритму верификации K монет, в котором величина одной из кучек монет равна 1, соответствует решение задачи об эксперте для $K-1$ настоящих и $K-1$ фальшивых монет.

Проверка равенства для монет трех типов

Очень интересным случаем общей задачи о верификации является такая задача: монеты могут быть либо настоящими (скажем, весящими 10 г), либо легкими фальшивыми (9 г), либо тяжелыми фальшивыми (11 г). [Здесь важно только то, что веса 9, 10, 11 образуют арифметическую прогрессию.] Как и раньше, перед нами стоит задача – доказать, что все монеты на самом деле весят поровну.

Совершенно очевидно, что для N монет эту задачу можно решить за $N-1$ взвешивание, просто сравнив одну монету со всеми остальными. Если все монеты весят одинаково, это будет зафиксировано в результате таких взвешиваний. Но этот результат абсолютно тривиален.

Мы же начнем сразу с нетривиального результата.

14. *6 за 4.* Протестируйте 6 монет за 4 взвешивания.

Решение: Алгоритм базируется на таком свойстве: если в условиях задачи (a, b, c) – веса монет и $3a = 2b + c$, то $a = b = c$. Докажем это свойство.

По свойству арифметической прогрессии либо $c = 2a - b$, либо $c = 2b - a$, либо $c = \frac{a+b}{2}$. В каждом из трёх случаев, подставляя указанное значение c в равенство $c = 3a - 2b$, убеждаемся, что $a = b$, а подставляя это в условие, получаем $c = 3a - 2b = a$.

Теперь покажем, как использовать это равенство для доказательства равенства шести монет. Сначала (двумя взвешиваниями) убедимся, что первые три монеты равны по весу. (Обозначим их вес через a). Затем (одним взвешиванием) убедимся, что четвертая монета равна пятой (пусть их вес равен b). Наконец, вес шестой монеты обозначим c. Положив на одну чашу весов монеты 1, 2 и 3, а на другую – монеты 4, 5 и 6, убедимся, что весы в равновесии. Отсюда (рассуждение см. выше) заключаем, что все 6 монет весят одинаково.

15. *5 за 3.* Протестируйте 5 монет за 3 взвешивания.

Решение: Ключевая идея та же самая, но взвешивания будут немного другими. Пусть у нас есть монеты a, b, c, d, e.

$$\begin{aligned} a + d &= b + c && (17)\\ a + e &= b + d && (18)\\ a &= e && (19)\\ & && (20) \end{aligned}$$

Если сложить эти три равенства, то в результате получится как раз $3a = 2b + c$. Как мы уже знаем, из этого соотношения делается вывод о том, что $a = b = c$. Тогда из первого уравнения получаем $d = b + c - a = a$.

16. *$3n + 2$ за $2n + 1$.* Протестируйте $3n + 2$ монеты за $2n + 1$ взвешивание $(n > 0)$.

Введем обозначение $f_A(n)$ – количество монет, которое удается оттестировать алгоритмом А за n взвешиваний. Кроме того, обозначим $f(n) = \max\limits_{A} f_A(n)$ – максимальное значение числа тестируемых монет по всем алгоритмам. Ниже мы будем доказывать нижние оценки для $f(n)$, которые на самом деле будут сводиться просто к предъявлению алгоритма, дающего нужное значение $f_A(n)$ для бесконечно многих значений n.

Решение: Нам предстоит доказать, что $f(2n+1) \geq 3n + 2$. Доказательство будет индукционным. База индукции $f_A(3) = 5$ доказана выше, а сейчас мы покажем, как добавлять 3 монеты к уже оттестированным $3n+2$ монетам всего за 2 взвешивания. Это делается так: пусть добавляемые монеты весят b, c и d, а каждая из оттестированных монет весит a. Искомые два взвешивания можно записать в виде равенств:

$$
\begin{aligned}
b &= d \quad (21)\\
3a &= b+c+d \quad (22)\\
& \quad (23)
\end{aligned}
$$

Действительно, из этих равенств получаем $3a = 2b + c$, откуда, как и выше, делаем вывод о том, что $a = b = c$. Равенство $b = d$ завершает доказательство.

Может показаться, что неравенство $f(2n + 1) \geq 3n + 2$ неулучшаемо. Однако это неверно, как мы увидим в следующих примерах.

17. *4+2 за 3.* Протестируйте группу из 4 монет и еще пару монет за 3 взвешивания.

Решение: Пусть у нас есть монеты a, b, c, d, e и f, а мы хотим доказать $a = b = c = d$ и $e = f$.

Схема взвешиваний:

$$
\begin{aligned}
e-f &= a-b \quad (24)\\
e-f &= b-c \quad (25)\\
e-f &= c-d \quad (26)\\
& \quad (27)
\end{aligned}
$$

Мы здесь записали разности вместо сумм. Если сложить эти три равенства, то в результате получится результат $3(e-f) = a - d$. Но разность между монетами a и d, каждая из которых весит либо n, либо $n - 1$, либо $n + 1$, должна быть не более 2, а величина $3(e - f)$ кратна 3. Поэтому и левая, и правая части в последнем равенстве равны 0, то есть $e = f$ и $a = d$. Подставив $e = f$ в каждое из исходных равенств, получим, что $a = b$, $b = c$ и $c = d$, что и требовалось доказать.

18. *7 за 4.* Протестируйте 7 монет за 4 взвешивания.

Решение: Выше мы протестировали 4+2. Итак, $a1 = a2 = a3 = a4 = a$ и $b1 = b2 = b$. Отложим одну из монет a_i и добавим на весы еще одну монету c, которую мы до сих пор не использовали. Точнее, снова воспользуемся равенством $3a = 2b + c$, которое и докажет нам полное равенство всех 4+2+1 монет.

19. *14 за 11.* Протестируйте 14 монет за 11 взвешиваний.

Решение: Здесь необходимо доказать еще одно полезное свойство весов монет: если $7a = 4b + 2c + d$, то $a = b = c = d$. Докажем его.

Если справа есть неравные по весу монеты, то правая чаша весит больше, чем $7\min(b, c, d)$, но меньше, чем $7\max(b, c, d)$. Это значит, что вес монеты a заключен между $\min(b, c, d)$ и $\max(b, c, d)$, то есть является средним членом арифметической прогрессии. Запишем равенство как $4(b - a) + 2(c - a) + (d - a) = 0$. Каждое из выражений в скобках равно нулю или ± 1 (напомним, что 1 – разность арифметической прогрессии), поэтому мы немедленно получаем из соображений чётности, что $d - a = 0$, затем делим на 2 и получаем $c - a = 0$, а затем и $b - a = 0$. Итак, $b = c = d = a$, что и требовалось доказать.

Таким образом, для верификации 7+4+2+1 монет достаточно провести 6+3+1 предварительное взвешивание, устанавливающее 6 равенств монет "a", три равенства монет "b", одно равенство для двух монет "c", а после этого – еще одно взвешивание всех 14 монет, доказывающее их полную идентичность.

20. Докажите неравенство $f(4n) \geq 7n$.

Решение: База индукции – проверка 7 монет за 4 взвешивания, а для перехода нам надо добавлять каждые следующие 7 монет к уже верифицированным за 4 взвешивания. Обе этих операции мы уже фактически научились делать.

Заметим, что результат "$7n$ монет за $4n$ взвешиваний" даёт *асимптотический* выигрыш перед предыдущим результатом "$3n + 2$ монет за $2n + 1$ взвешивание": раньше мы за каждые 4 проверки увеличивали число верифицированных монет на 6, а сейчас – на 7.

Однако и этот результат не является лучшим.

21. Доказать неравенство $f(8n + 1) \geq 15n$

22. Доказать неравенства $f(16n + 2) \geq 31n$, $f(32n + 3) \geq 63n$, а также общий случай – неравенство

$$
f\left(2^k n + (k-2)\right) \geq \left(2^{k+1} - 1\right) n \quad (28)
$$

23. Как вы думаете, можно ли протестировать за K взвешиваний более чем $2K$ монет?

Ханойская башня.

1. *Ханойская башня.* Пусть есть три столбика, на один из которых нанизаны кольца различного радиуса; при этом внизу находится самое широкое кольцо, над ним — второе по диаметру, ..., наверху лежит самое узкое кольцо. Два другие столбика изначально свободны от колец. За ход разрешается взять одно из верхних колец с любого столбика и перенести его на другой столбик, при этом запрещено класть кольцо на более узкое. Как перенести все кольца на третий столбик? Каково наименьшее число перекладываний для этого нужно произвести?

Решение: Обозначим n — количество колец, $K_1, \ldots, K_n$ — кольца (K_1 — кольцо минимального диаметра, K_n — максимального). Докажем по индукции, что придётся произвести минимум $2^n - 1$ перекладываний (и этого числа достаточно). Будем называть столбик, с которого переносим кольца, "исходным", на которое — "целевым", оставшийся — "исходным".

База: $n = 1$.

Переход. Сначала покажем, что $2^n - 1$ перекладывания достаточно.

1. Перенесём кольца $K_1, \ldots, K_{n-1}$ с первого на второй столбик, пользуясь третьим как временным.
2. Перенесём кольцо K_n с первого на третий столбик
3. Наконец, перенесём $K_1, \ldots, K_{n-1}$ со второго на третий столбик, пользуясь первым как временным.

По предположению индукции, на первое и третье действия необходимо и достаточно $2^{n-1} - 1$ действий, значит, всего $2^n - 1$ действий.

Почему меньшим числом действий обойтись нельзя? Рассмотрим самое широкое кольцо (K_n). Чтобы его перенести, необходимо, чтобы оно осталось единственным в своём столбике, и чтобы был один пустой столбик. Значит, необходимо перенести кольца $K_1, \ldots, K_{n-1}$ на "временный" столбик (по предположению индукции, это занимает не менее $2^{n-1} - 1$ действий); после переноса самого широкого кольца нужно перенести все остальные кольца на тот столбик, где покоится самое широкое (ещё $2^{n-1} - 1$ действий, плюс одно на перенос широкого).

Заметим, что в процессе доказательства был указан алгоритм переноса. Его особенностью является то, что для выполнения задачи он вызывает сам себя. Соответственно, это рекурсивный алгоритм.

2. *Нерекурсивный перенос Ханойской башни.* Составьте нерекурсивный алгоритм, решающий первую задачу.

Решение: Для начала посмотрим, какие именно действия производит наш рекурсивный алгоритм. Рассмотрим в качестве примера башню из четырех дисков.

(1) 1: 1→2
(2) 2: 3←1
(3) 1: 2→3
(4) 3: 1→2
(5) 1: 3→1
(6) 2: 2←3
(7) 1: 1→2
(8) 4: 3←1
(9) 1: 2→3
(10) 2: 1←2
(11) 1: 3→1
(12) 3: 2→3
(13) 1: 1→2
(14) 2: 3←1
(15) 1: 2→3

Видно, что каждое кольцо всегда движется в одном и том же направлении: самое узкое — только вправо, следующее — только влево и так далее. Кроме того, можно заметить, что прослеживается зависимость переносимого кольца от номера хода: на нечётных ходах двигается самое узкое кольцо (K_1), на ходах, дающих остаток два по модулю четыре — следующее (K_2), ... Осталось обосновать эти догадки.

Докажем, что на ходе с номером k переносится кольцо с таким номером m, что k делится на 2^{m-1}, но не делится на 2^m, и при этом перенос производится "вправо" (с первого на второй, со второго на третий, с третьего на первый), если чётности m и n различны.

Вновь проведём доказательство по индукции. Рассмотрим первый шаг рекурсивного алгоритма: "перенесём кольца $K_1, \ldots, K_{n-1}$ с первого на второй столбик, пользуясь третьим как временным". Заметим, что уменьшение количества колец меняет чётность параметра n, а перенумерация колец — к изменению "ориентации", так что в итоге справедливость утверждения сохраняется. После этого на ходе с номером 2^{n-1} переносится кольцо K_n, причём поворот производится "влево" (с первого на третий). Наконец, на третьем шаге алгоритма точно так же меняется чётность n и ориентация; кроме того, к номеру хода прибавляется 2^{n-1}, но на делимость это не влияет, так как эта прибавка заведомо делится на 2^m для $m \leq n-1$.

Итак, теперь мы можем построить существенно нерекурсивный алгоритм решения задачи о Ханойской башне: сначала по номеру хода k определяем номер кольца m, затем по нему и количеству колец n — направление переноса. Осталось выяснить, на каком столбике к данному ходу находилось это кольцо. Поскольку перенос осуществляется всегда в одном направлении, достаточно посчитать, сколько раз переносили это кольцо, то есть сколько чисел от 1 до k делятся на 2^{m-1}, но не делятся на 2^m. Разделим k на 2^{m-1}. Тогда искомая величина — число нечётных чисел от 1 до $\frac{k}{2^{m-1}}$. Номер кольца можно определить, взяв остаток от деления числа переносов на 3.

3. *Сборка Ханойской башни.* Пусть кольца нанизаны на стержни произвольным образом, но каждое кольцо лежит на более широком или является основанием башни. Докажите, что делая ходы по правилам, можно собрать все кольца на первом стержне. Сколько операций потребуется в худшем случае?

Решение: Рассмотрим самое широкое кольцо. Если его исходное положение совпадает с требуемым, решим задачу для колец $K_1, \ldots, K_{n-1}$. В противном случае соберем башню из $n-1$ колец на оставшемся стержне, перенесём самое широкое кольцо и, наконец, перенесём башню из $n-1$ колец на целевой стержень. Оценка числа действий такая же, как и для обычной задачи о Ханойских башнях — $2^n - 1$

4. *Сборка Ханойской башни-2.* Пусть, в отличие от предыдущей задачи, башня может быть собрана на любом стержне. Как изменится число требуемых действий?

Решение: Соберём башню на том стержне, где лежит самый широкий стержень. Таким образом получим оценку $2^{n-1} - 1$.

5. *Переход между Ханойскими конфигурациями.* Пусть есть два расположения колец на стержнях, удовлетворяющих условию (ни одно из колец не лежит на более узком). Как, делая ходы по правилам, перейти от одного из них к другому? Каково требуемое число переносов?

Решение: Вновь посмотрим на самое широкое кольцо. Если его положение в обоих случаях одинаково, решим задачу для колец $K_1, \ldots, K_{n-1}$; иначе достаточно освободить два стержня — тот, на котором это кольцо, и тот, на котором оно должно быть. Следовательно, на третьем будет собрана башня из $K_1, \ldots, K_{n-1}$. Таким образом, получаем такую же оценку, как и в первой задаче.

6. *Ханойское расстояние.* Ханойской конфигурации можно поставить в соответствие число, так что разным конфигурациям будут поставлены в соответствие разные числа: для этого занумеруем столбцы цифрами 0, 1, 2, и будем считать, что они соответствуют цифрам в троичной системе счисления. Далее запишем в i-ю позицию троичного числа ту цифру, которая соответствует стержню, на который насажено i-е кольцо.

Ханойским расстоянием между двумя конфигурациями будем называть количество переходов между ними. Обозначим его $han(i,j)$. Понятно, что $han(i,i) = 0, han(i,j) = han(j,i), han(i,j) \leq han(i,k) + han(k,j)$

В последнем случае равенство достигается для конфигураций, которые могут быть получены при кратчайшем переходе от i к j (в таком случае будем говорить, что k лежит между i и j).

Посчитайте $han(1002_3, 0112_3)$

Как вычислять $han(0,i)$? А $han(i,j)$?

7. *Сборка Ханойской башни вслепую.* Пусть в задаче о сборе Ханойской башни расположение колец не известно. Будем записывать ход с помощью пары (K_i, K_j), которая показывает, с какого стержня на какой переносится кольцо. Если такой перенос противоречит правилам, будем пропускать этот ход. Можно ли выписать такую последовательность ходов, выполнение которой приведёт к тому, что башня будет собрана на третьем кольце? Как только башня оказывается собранной, выполнение ходов прекращается.

Решение: Занумеруем все возможные конфигурации. Выпишем последовательность ходов, собирающую первую из них, и посмотрим, в какую переходит каждая из оставшихся конфигураций. После этого выпишем ходы, собирающие вторую конфигурацию (с учётом того, как её изменила первая последовательность), и так далее.