Рекуррентные соотношения и динамическое программирование, 4 июля.

1. *Взрывоопасность.* На складе есть ящики с тротилом и ящики с песком. Из соображений безопасности ящики с тротилом нельзя класть рядом. Сколькими способами можно построить штабель из N ящиков?

Решение: Если верхний ящик в штабеле – песок, то следующим можно класть любой из ящиков, а если верхний ящик взрывоопасен, то дальше можно класть только ящик с песком. Можно поглядеть на то же самое и в обратную сторону: если сверху в штабеле лежит песок, то под ним может лежать любой ящик, а если сверху лежит тротил, то под ним может лежать только песок (а вот дальше – снова любой ящик). Таким образом, если число возможных штабелей высоты N обозначить через $Ш(N)$, то $Ш(N) = Ш(N-1) + Ш(N-2)$ (первое слагаемое соответствует случаю, когда сверху лежит песок, а второе — случаю, когда сверху тротил). Осталось добавить, что $Ш(1) = 2$ и $Ш(2) = 3$.

2. *Шоколадка.* От шоколадки, состоящей из N кусочков, Петя и Вася по очереди откусывают по одному или два кусочка. Выигрывает тот, кто съедает последний кусочек шоколадки. Начинает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение: Рекуррентное соотношение ровно то же самое, что и в предыдущей задаче, однако на этот раз нас интересует не КОЛИЧЕСТВО, а ВЫИГРЫШ В ИГРЕ. Заметим, что если в шоколадке осталось 1 или 2 кусочка, то выигрывает тот, чья очередь делать ход, а если осталось всего три кусочка, то начинающий проигрывает. Дальше можно напомнить классику о выигрывающих и проигрывающих позициях — позиция, из которой есть хотя бы один выигрывающий ход, помечается как выигрывающая, а позиция, из которой такого хода нет — как проигрывающая. Несложно увидеть, что проигрывают все позиции, для которых число кусочков кратно 3.

3. *Пути фишки.* Фишка может двигаться по полю длины N только вперед. Длина хода фишки не более K. Найти число различных путей, по которым фишка может пройти поле от начала до конца.

4. *Размены.* В государстве Манилэнд выпущены монеты достоинством 17, 31 и 89 мани. Сколькими способами можно выплатить зарплату, равную 300 маням? (Способы, отличающиеся только порядком выплачиваемых монет, считать одинаковыми.)

Решение: Будем действовать так: для каждого натурального числа мы хотим найти число способов, которым его можно представить в виде $17a+31b+89c$, где a, b, c — целые неотрицательные числа. Заметим, что если есть способ так представить число N, то одновременно это дает способ представления чисел $N+17$, $N+31$ и $N+89$. Таким образом, можно последовательно заполнять табличку, в которую будут попадать все представимые числа, и для каждого числа будет накапливаться число способов его представления.
17 34 51 68 85 102 119 136 153 170 187 204 221 238 255 272 289
48 65 82 99 116 133 150 167 184 201 218 235 252 269 286
79 96 113 130 147 164 181 198 215 232 249 266 283 300 (!)
дальше можно проговорить о математике и представлениях 300=17a+31b Теперь будем доводить строчки не до 300, а до 300-89=211.
110 127 144 161 178 195 212
141 158 175 192 209
172 189 206
203
Ни одного способа получить 211 не найдено. Найдем еще 300-2*89=122 и 300-3*89=33. Их тоже в таблице нет.

Ответ: Одним способом.

5. *Путь ладьи.* Сколькими способами ладья может пройти с клетки $a1$ на клетку $h8$, перемещаясь по доске только вправо и вверх?

6. *Путь ладьи-2.* Из доски вырезан прямоугольник, состоящий из клеток $c3$–$c5$ и $d3$–$d5$. Сколькими способами ладья может пройти по такой доске с клетки $a1$ на клетку $h8$, перемещаясь по доске только вправо и вверх?

7. Целеустремлённый шахматный король стоит на поле $a1$ и стремится попасть на поле $h8$. Для каждого поля доски известно, сколько минут король будет ждать, попав на это поле. Поскольку король целеустремленный, он будет делать только такие ходы, которые приближают его к цели, то есть вверх, вправо и по диагонали вверх-вправо (если смотреть со стороны белых). Как найти для короля самый быстрый путь?

8. *Набрать максимум суммы.* Имеется равнобедренный числовой треугольник высоты n, аналогичный треугольнику Паскаля, в котором расставлены произвольные целые числа. Из каждого числа треугольника можно сделать два различных хода вниз в стоящие там числа (влево-вниз и вправо-вниз). Найти такой путь из верхней точки треугольника до его основания, чтобы сумма чисел на клетках этого пути была максимальна.