Ханойская башня, 9 июля.

1. *Ханойская башня.* Пусть есть три столбика, на один из которых нанизаны кольца различного радиуса; при этом внизу находится самое широкое кольцо, над ним — второе по диаметру, …, наверху лежит самое узкое кольцо. Два другие столбика изначально свободны от колец. За ход разрешается взять одно из верхних колец с любого столбика и перенести его на другой столбик, при этом запрещено класть кольцо на более узкое. Как перенести все кольца на третий столбик? Каково наименьшее число перекладываний для этого нужно произвести?

Решение: Обозначим n — количество колец, $K_1, \ldots, K_n$ — кольца (K_1 — кольцо минимального диаметра, K_n — максимального). Докажем по индукции, что придётся произвести минимум $2^n - 1$ перекладываний (и этого числа достаточно). Будем называть столбик, с которого переносим кольца, "исходным", на которое — "целевым", оставшийся — "исходным".

База: $n = 1$.

Переход. Сначала покажем, что $2^n - 1$ перекладывания достаточно.

1. Перенесём кольца $K_1, \ldots, K_{n-1}$ с первого на второй столбик, пользуясь третьим как временным.
2. Перенесём кольцо K_n с первого на третий столбик
3. Наконец, перенесём $K_1, \ldots, K_{n-1}$ со второго на третий столбик, пользуясь первым как временным.

По предположению индукции, на первое и третье действия необходимо и достаточно $2^{n-1} - 1$ действий, значит, всего $2^n - 1$ действий.

Почему меньшим числом действий обойтись нельзя? Рассмотрим самое широкое кольцо (K_n). Чтобы его перенести, необходимо, чтобы оно осталось единственным в своём столбике, и чтобы был один пустой столбик. Значит, необходимо перенести кольца $K_1, \ldots, K_{n-1}$ на "временный" столбик (по предположению индукции, это занимает не менее $2^{n-1} - 1$ действий); после переноса самого широкого кольца нужно перенести все остальные кольца на тот столбик, где покоится самое широкое (ещё $2^{n-1} - 1$ действий, плюс одно на перенос широкого).

Заметим, что в процессе доказательства был указан алгоритм переноса. Его особенностью является то, что для выполнения задачи он вызывает сам себя. Соответственно, это рекурсивный алгоритм.

2. *Нерекурсивный перенос Ханойской башни.* Составьте нерекурсивный алгоритм, решающий первую задачу.

Решение: Для начала посмотрим, какие именно действия производит наш рекурсивный алгоритм. Рассмотрим в качестве примера башню из четырех дисков.

(1) 1: 1→2
(2) 2: 3←1
(3) 1: 2→3
(4) 3: 1→2
(5) 1: 3→1
(6) 2: 2←3
(7) 1: 1→2
(8) 4: 3←1
(9) 1: 2→3
(10) 2: 1←2
(11) 1: 3→1
(12) 3: 2→3
(13) 1: 1→2
(14) 2: 3←1
(15) 1: 2→3

Видно, что каждое кольцо всегда движется в одном и том же направлении: самое узкое — только вправо, следующее — только влево и так далее. Кроме того, можно заметить, что прослеживается зависимость переносимого кольца от номера хода: на нечётных ходах двигается самое узкое кольцо (K_1), на ходах, дающих остаток два по модулю четыре — следующее (K_2), … Осталось обосновать эти догадки.

Докажем, что на ходе с номером k переносится кольцо с таким номером m, что k делится на 2^{m-1}, но не делится на 2^m, и при этом перенос производится "вправо" (с первого на второй, со второго на третий, с третьего на первый), если чётности m и n различны.

Вновь проведём доказательство по индукции. Рассмотрим первый шаг рекурсивного алгоритма: "перенесём кольца $K_1, \ldots, K_{n-1}$ с первого на второй столбик, пользуясь третьим как временным". Заметим, что уменьшение количества колец меняет чётность параметра n, а перенумерация колец — к изменению "ориентации", так что в итоге справедливость утверждения сохраняется. После этого на ходе с номером 2^{n-1} переносится кольцо K_n, причём поворот производится "влево" (с первого на третий). Наконец, на третьем шаге алгоритма точно так же меняется чётность n и ориентация; кроме того, к номеру хода прибавляется 2^{n-1}, но на делимость это не влияет, так как эта прибавка заведомо делится на 2^m для $m \leq n-1$.

Итак, теперь мы можем построить существенно нерекурсивный алгоритм решения задачи о Ханойской башне: сначала по номеру хода k определяем номер кольца m, затем по нему и количеству колец n — направление переноса. Осталось выяснить, на каком столбике к данному ходу находилось это кольцо. Поскольку перенос осуществляется всегда в одном направлении, достаточно посчитать, сколько раз переносили это кольцо, то есть сколько чисел от 1 до k делятся на 2^{m-1}, но не делятся на 2^m. Разделим k на 2^{m-1}. Тогда искомая величина — число нечётных чисел от 1 до $\frac{k}{2^{m-1}}$. Номер кольца можно определить, взяв остаток от деления числа переносов на 3.

3. *Сборка Ханойской башни.* Пусть кольца нанизаны на стержни произвольным образом, но каждое кольцо лежит на более широком или является основанием башни. Докажите, что делая ходы по правилам, можно собрать все кольца на первом стержне. Сколько операций потребуется в худшем случае?

Решение: Рассмотрим самое широкое кольцо. Если его исходное положение совпадает с требуемым, решим задачу для колец $K_1, \ldots, K_{n-1}$. В противном случае соберем башню из $n-1$ колец на оставшемся стержне, перенесём самое широкое кольцо и, наконец, перенесём башню из $n-1$ колец на целевой стержень. Оценка числа действий такая же, как и для обычной задачи о Ханойских башнях — $2^n - 1$

4. *Сборка Ханойской башни-2.* Пусть, в отличие от предыдущей задачи, башня может быть собрана на любом стержне. Как изменится число требуемых действий?

Решение: Соберём башню на том стержне, где лежит самый широкий стержень. Таким образом получим оценку $2^{n-1} - 1$.

5. *Переход между Ханойскими конфигурациями.* Пусть есть два расположения колец на стержнях, удовлетворяющих условию (ни одно из колец не лежит на более узком). Как, делая ходы по правилам, перейти от одного из них к другому? Каково требуемое число переносов?

Решение: Вновь посмотрим на самое широкое кольцо. Если его положение в обоих случаях одинаково, решим задачу для колец $K_1, \ldots, K_{n-1}$; иначе достаточно освободить два стержня — тот, на котором это кольцо, и тот, на котором оно должно быть. Следовательно, на третьем будет собрана башня из $K_1, \ldots, K_{n-1}$. Таким образом, получаем такую же оценку, как и в первой задаче.

6. *Ханойское расстояние.* Ханойской конфигурации можно поставить в соответствие число, так что разным конфигурациям будут поставлены в соответствие разные числа: для этого занумеруем столбцы цифрами 0, 1, 2, и будем считать, что они соответствуют цифрам в троичной системе счисления. Далее запишем в i-ю позицию троичного числа ту цифру, которая соответствует стержню, на который насажено i-е кольцо.

Ханойским расстоянием между двумя конфигурациями будем называть количество переходов между ними. Обозначим его $han(i, j)$. Понятно, что $han(i, i) = 0, han(i, j) = han(j, i), han(i, j) \leq han(i, k) + han(k, j)$

В последнем случае равенство достигается для конфигураций, которые могут быть получены при кратчайшем переходе от i к j (в таком случае будем говорить, что k лежит между i и j).

Посчитайте $han(1002_3, 0112_3)$

Как вычислять $han(0, i)$? А $han(i, j)$?

7. *Сборка Ханойской башни вслепую.* Пусть в задаче о сборе Ханойской башни расположение колец не известно. Будем записывать ход с помощью пары (K_i, K_j), которая показывает, с какого стержня на какой переносится кольцо. Если такой перенос противоречит правилам, будем пропускать этот ход. Можно ли выписать такую последовательность ходов, выполнение которой приведёт к тому, что башня будет собрана на третьем кольце? Как только башня оказывается собранной, выполнение ходов прекращается.

Решение: Занумеруем все возможные конфигурации. Выпишем последовательность ходов, собирающую первую из них, и посмотрим, в какую переходит каждая из оставшихся конфигураций. После этого выпишем ходы, собирающие вторую конфигурацию (с учётом того, как её изменила первая последовательность), и так далее.