Программа зачета

I. Многочлены и целые числа

1. Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида для многочленов
2. Теорема Безу и ее следствия (многочлен степени n имеет не более n корней; единственность решения задачи интерполяции)
3. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона
4. Китайская теорема об остатках. Задача интерполяции как китайская теорема об остатках для многочленов
5. Линейное представление НОД для чисел и многочленов
6. Основная теорема алгебры. Неприводимые многочлены с действительными и комплексными коэффициентами.
7. Теорема Виета для многочлена n-й степени.

II. Линейность

8. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений
9. Альтернатива Фредгольма
10. Существование решения задачи интерполяции (через системы линейных уравнений)
11. Линейные рекурренты. Представление решения в виде линейной комбинации геометрических прогрессий.

III. Геометрические преобразования

12. Инверсия: определение, построение образов точек циркулем и линейкой, одним циркулем
13. Образы прямых и окружностей при инверсии
14. Изменение расстояний при инверсии. Теорема Птолемея (в четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон тогда и только тогда, когда он вписанный)
15. Сохранение углов при инверсии
16. Задача Аполлония (построение окружности, касающейся трех данных окружностей — в т. ч. случаи, когда часть окружностей вырождаются в точки)
17. Возможность перевести инверсией любую пару непересекающихся окружностей в пару концентрических окружностей. Поризм Штейнера
18. Аффинные преобразования: определение, образ прямой при аффинном преобразовании, сохранение параллельности, сохранение отношений отрезков на параллельных прямых
19. Изменение площадей при аффинных преобразованиях

IV. Алгебра и геометрия комплексных чисел

20. Умножение и деление комплексных чисел
21. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра. Корни из единицы
22. Уравнение обобщенной окружности в комплексных координатах.

23. Геометрический смысл простого отношения
24. Геометрический смысл умножения комплексных чисел. Композиция поворотных гомотетий
25. Геометрический смысл взятия обратного. Образы прямых и окружностей при дробнолинейных преобразованиях

V. Другое

26. Выпуклые фигуры. Выпуклость пересечения. Выпуклая оболочка (определение, существование и единственность)
27. Теорема Хелли
28. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Многомерное неравенство треугольника
29. Чередующиеся цепи. Лемма Холла

Важные задачи

I. Многочлены и целые числа

1. Натуральное число называется свободным от квадратов, если оно не делится ни на один квадрат простого числа. Докажите, что для любого n найдутся n подряд идущих чисел, не свободных от квадратов.
2. Сколько остатков являются решениями сравнения $x^2 \equiv 1 \pmod{p_1 p_2 \dots p_k}$, где p_i, различные нечетные простые числа.
3. Пусть $P(x)$ — многочлен, такой что $P(x) = P(x+1)$. Докажите, что $P(x)$ — константа.
4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, $|P(3)| = |P(7)| = 1$. Докажите, что $P(x)$ не имеет целых корней.
5. Опишите все многочлены, которые в точках $x_0, \dots, x_n$ принимают значения $y_0, \dots, y_n$.
6. Один из двух приведенных квадратных трехчленов имеет два корня меньших тысячи, другой — два корня больших тысячи. Может ли сумма этих трехчленов иметь один корень меньший тысячи, а другой — больший тысячи?
7. Даны три квадратных многочлена с различными старшими коэффициентами. Графики любых двух имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют общую точку.
8. Найдите НОД $x^n - 1$ и $x^m - 1$.

II. Линейность

9. В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно расставить (причем единственным образом) числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому своих соседей по стороне.
10. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково.
11. Обозначим через a_n количество способов покрасить клетки прямоугольника $1 \times n$ так, чтобы не было закрашено двух подряд идущих клеток. Найдите a_7.
12. Последовательность a_n определена формулой $a_n = (5+\sqrt{17})^n + (5-\sqrt{17})^n$. Докажите, что a_n делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}.
13. Последовательность x_n задается рекуррентным уравнением $x_{n+1} = (2\cos\phi)x_n - x_{n-1}$ где ϕ некоторый угол. Найдите общий вид решения.Найдите формулу общего члена при $x_0 = 1, x_1 = \cos\phi$ и при $x_0 = 0, x_1 = \sin\phi$.

III. Геометрические преобразования

14. Постройте с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся трех данных окружностей, имеющих общую точку. Проведите исследование.
15. Постройте общую касательную к двум данным окружностям. Проведите исследование.
16. Даны две окружности S и T. Докажите, что следующие условия эквивалентны.
а) Окружности S и T ортогональны.
б) При инверсии относительно S окружность T переходит в себя.
в) Окружность T проходит через пару точек, инверсных относительно S.

17. В сегмент вписаны всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите множество точек их касания.
18. Докажите, что для любых двух окружностей существует инверсия, которая переводит их либо на пару прямых, либо на две концентрические окружности.
19. Докажите, что любая трапеция аффинно эквивалентна некоторой равнобедренной трапеции (но не всем равнобедренным трапециям);
20. Докажите, что любые два четырехугольника аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда точка пересечения диагоналей делит диагонали в соответственно равных отношениях.
21. Докажите, что одной только линейкой нельзя построить правильный треугольник. Докажите, что одной линейкой нельзя провести биссектрису.
22. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC даны точки M, N, P соответственно. Докажите, что если точки M_1, N_1, P_1 симметричны точкам M, N, P относительно середин соответствующих сторон, то $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.

IV. Алгебра и геометрия комплексных чисел

23. Три точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их простое отношение $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$ вещественно.
24. Угол Z_1 треугольника $Z_1Z_2Z_3$ равен аргументу простого отношения $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$, а отношение боковых сторон — модулю этого простого отношения.
25. Решите уравнение $z^3 = \bar{z}$.
26. Найдите сумму $\cos\phi + \cos 2\phi + \ldots + \cos 2012\phi$.
27. Найдите сумму $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 + \ldots$.
28. Композиция любого числа движений, гомотетий и инверсий есть либо дробно-линейное преобразование, либо сопряженное к нему.
29. Докажите, что дробно-линейные преобразования сохраняют двойное отношение.
30. Найдите сумму всех корней n-й степени из единицы.

V. Другое

31. На плоскости дано n точек. Известно, что любые 4 из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что эти n точек являются вершинами выпуклого n-угольника.
32. Даны выпуклая фигура Ф и точка A вне нее. Докажите, что существует две опорные прямые к фигуре Ф проходящие через точку A. Докажите, что существует прямая такая, что точка A и фигура Ф лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой.
33. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трёх его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти три стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что тогда такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.
34. На плоскости даны несколько точек, любые три из которых можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса 1.
35. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: «Я могу одновременно женить

всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!». Вторая сваха говорит: «А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!». Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: «В таком случае можно сделать и то, и другое!». Прав ли он?

36. Все вершины двудольного графа имеют степень d. Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

37. Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

38. Из точки M внутри треугольника ABC опускаются перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на прямые BC, AC, AB соответственно. Какое минимальное значение принимает сумма

$$\frac{BC}{MA_1}+\frac{AC}{MB_1}+\frac{AB}{MC_1}?$$

Где при этом должна находиться точка M?

39. Положительные числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2+z^2\leqslant 3$. Докажите, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant x+y+z$.