Двадцать восьмая
Летняя Многопредметная Школа
Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2012 г.

9 класс, группа профи

Преподаватели:
А. В. Пастор, А. С. Трегубов, Л. А. Попов, Е. А. Исаак

Поворотная гомотетия. 04.07.2012

Определение. *Поворотной гомотетией* с коэффициентом k и углом φ называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ, имеющих общий центр ($H_O^k \circ R_O^{\varphi}$). При этом можно считать, что $k > 0$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Теорема 1. *Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P, причем все точки A, B, A_1, B_1, P различны. Тогда существует единственная поворотная гомотетия, переводящая точку A в A_1, а B в B_1, причем её центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P.*

Теорема 2. *Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1 совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1.*

Следствие. *Даны четыре прямые общего положения. Тогда описанные окружности четырех треугольников, образованных этими прямыми, пересекаются в одной точке.*

1. а) Докажите, что преобразование подобия является поворотной гомотетией с коэффициентом $k \neq 1$ и углом φ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\overrightarrow{a}$ данное преобразование переводит его в вектор $k \cdot \overrightarrow{a_\varphi}$ (где $\overrightarrow{a_\varphi}$ — вектор, полученный из вектора $\overrightarrow{a}$ поворотом на угол φ).

б) Чем может быть композиция двух поворотных гомотетий (перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет).

в) Докажите, что любое сохраняющее ориентацию преобразование подобия с коэффициентом, отличным от 1, является поворотной гомотетией.

2. Даны две неконцентрические окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что существует ровно две поворотные гомотетии с углом поворота $\frac{\pi}{2}$, переводящие ω_1 в ω_2.

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямые p и q, проходящие через точку A, пересекают окружность ω_1 в точках P_1 и Q_1, а окружность ω_2 в точках P_2 и Q_2 соответственно. Докажите, что угол между окружностями равен углу между прямыми P_1Q_1 и P_2Q_2.

4. Окружности $\omega_1, \ldots, \omega_n$ пересекаются в точке O. Кузнечик прыгает из точки X_i окружности ω_i в точку X_{i+1} окружности ω_{i+1}, при этом прямая X_iX_{i+1} проходит через точку пересечения окружностей ω_i и ω_{i+1}, отличную от точки O. Докажите, что через n прыжков кузнечик вернется в исходную точку.

5. Две окружности пересекаются в точках A и B, а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$, P – середина отрезка BN, точка Q — середина MC. Докажите, что $\angle ANC = \angle APQ$.

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1; точки M и M_1 — середины отрезков AC и A_1C_1 соответственно. Прямая BM пересекает описанную окружность треугольника A_1BC_1 в точке K_1, а прямая BM_1 — описанную окружность треугольника ABC в точке K. Сами описанные окружности пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC — в точке T. Докажите, что точки M, M_1, K, K_1, P и T лежат на одной окружности.

Вступительная олимпиада. 04.07.2012

1. Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

2. Даны 10 действительных чисел. Известно, что любое из них меньше, чем сумма всех чисел, делённая на 9. Верно ли, что все эти числа положительные?

3. В ромбе $ABCD$ на отрезках AC и BC выбраны точки M и N соответственно, так, что $NM = MD$. ($N \neq B, C$). Прямая DN пересекает отрезок AC в точке P, а прямая DM пересекает отрезок AB в точке R. Докажите, что $RP = PD$.

4. Есть три целых числа a, b, c. Известно, что $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Доказать, что кубы каких-то двух из них дают одинаковый остаток при делении на $a+b+c$.

5. В 7 ячейках записаны натуральные числа от 1 до 7, но неизвестно, какие где. Про любой набор ячеек можно узнать, является ли среднее арифметическое чисел в нем целым. Про какие числа можно узнать, в каких ячейках они находятся?

Инверсия. 05.07.2012

Определение 1. *Инверсией* относительно данной окружности с центром в точке O радиуса R преобразование плоскости, при котором каждая точка A переходит в точку A' такую, что $\overrightarrow{OA'} = R^2\frac{\overrightarrow{OA}}{|OA|^2}$.

1. Пусть инверсия с центром O переводит окружность S в S'. Докажите, что точка O — центр гомотетии, переводящей S в S'.

Определение 2. *Углом между прямой и окружностью* называется угол между этой прямой и касательной к окружности в точке пересечения этой прямой и окружности. *Углом между двумя окружностями* называется угол между касательными к этим окружностям в точке их пересечения.

2. Докажите, что инверсия сохраняет углы между окружностями и прямыми.

3. При помощи циркуля и линейки постройте окружность, а) проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности; б) проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей; в) касающуюся трех данных окружностей.

4. В сегмент вписываются всевозможные пары окружностей, и для каждой пары строится их радикальная ось. Докажите, что все получившиеся прямые проходят через одну точку.

5. Рассмотрим 3 попарно пересекающиеся окружности w_1, w_2 и w_3. Пусть три их общие хорды имеют точкой пересечения R. Обозначим через O_1 центр описанной окружности треугольника, образованного какой-то тройкой общих точек w_1 и w_2, w_2 и w_3, w_3 и w_1, а через O_2 — центр описанной окружности треугольника, образованного вторыми точками пересечения тех же пар окружностей. Докажите, что R, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.

6. Дана окружность и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

Паросочетания, покрытия и другие важные понятия. 05.07.2012

Будем использовать следующие обозначения: $V(G)$ и $E(G)$ — множества вершин и ребер графа G; $v(G) = |V(G)|$, $e(G) = |E(G)|$.

Определение 1. Множество вершин $U \subset V(G)$ называется *независимым*, если никакие две его вершины не смежны. Обозначим через $\alpha(G)$ количество вершин в максимальном независимом множестве графа G.

Определение 2. Множество вершин $W \subset V(G)$ называется *доминирующим*, если оно покрывает все рёбра графа (то есть для каждого ребра хотя бы один из его концов принадлежит W). Обозначим через $\beta(G)$ количество вершин в минимальном доминирующем множестве графа G.

Определение 3. Множество рёбер $M \subset E(G)$ называется *паросочетанием*, если никакие два его ребра не имеют общей вершины. Обозначим через $\alpha'(G)$ количество рёбер в максимальном паросочетании графа G.

Определение 4. Множество рёбер $F \subset E(G)$ называется *покрытием*, если оно покрывает все вершины графа (то есть каждая вершина графа является концом одного из ребер множества F). Обозначим через $\beta'(G)$ количество рёбер в минимальном покрытии графа G.

1. Теорема Кёнига (D. König, 1931.) Пусть G — двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$.

а) Выведете теорему Кёнига из теоремы Холла.

б) Выведете теорему Холла из теоремы Кёнига.

2. а) Докажите, что $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$ для любого графа G.

б) **Теорема Галлаи (T. Gallai, 1959.)** Докажите, что $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$ для любого графа G без вершин степени 0.

3. При удалении из графа любой вершины остальные вершины можно разбить на пары смежных. Докажите, что через любую вершину этого графа проходит нечетный цикл (несамопересекающийся по вершинам).

Определение 5. *Четным контуром* степени k называется однородный граф степени k, не содержащий нечетных циклов.

4. (Теорема Кёнига о четном контуре.) Докажите, что четный контур степени k можно разбить на k графов степени 1, не имеющих общих ребер.

Определение 6. Паросочетание, покрывающее все вершины графа, называется *совершенным паросочетанием.*

5. Степени всех вершин графа равны 3. Обязательно ли в таком графе есть совершенное паросочетание?

6. Назовем ребро графа *важным*, если при его удалении увеличивается размер максимального пустого подграфа. Докажите, что если два важных ребра имеют общую вершину, то в графе есть нечетный цикл.

Разнобой №1. 05.07.2012

1. В треугольнике ABC вневписанные окружности касаются сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1. Точка A^* — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BB_1, CC_1. Аналогично определяются точки B^* и C^*. Оказалось, что точки A^*, B^*, C^* лежат внутри углов BAC, ABC, BCA соответственно. Докажите, что прямые AA^*, BB^* и CC^* пересекаются в одной точке.

2. Найдите наименьшее натуральное t, такое, что существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_t$, удовлетворяющие равенству

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_t^3 = 2002^{2002}.$$

3. Из бесконечной шахматной доски вырезана связная фигура. Оказалось, что черных клеток в ней ровно в три раза больше, чем белых. Докажите, что ее можно разрезать на одинаковые связные фигурки состоящие из четырех клеток.

4. Докажите, что для любых натуральных чисел $m, n \geq 2$ справедливо тождество $\left[\frac{n}{m}\right] + \left[\frac{2n}{m}\right] + \ldots + \left[\frac{(m-1)n}{m}\right] = \left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{2m}{n}\right] + \ldots + \left[\frac{(n-1)m}{n}\right]$.

5. В n-элементном множестве X выбраны трёхэлементные подмножества A_1, A_2, $\ldots$, A_m, пересечение любых двух из которых состоит не более, чем из одного элемента. Докажите, что в множестве X найдётся подмножество A, состоящее не менее, чем из $[\sqrt{2n}]$ элементов и не содержащее ни одного из подмножеств A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

6. Докажите, что из любого конечного множества точек на плоскости можно так удалить одну точку, что оставшееся множество можно разбить на две части меньшего диаметра. (Диаметр — это максимальное расстояние между точками множества).

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy + xz + yz = 1, \\ 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 4\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = 5\left(z + \dfrac{1}{z}\right). \end{cases}$$

Выпуклость. 06.07.2012

Определение 1. Фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок.

1. Докажите, что пересечение любого (в том числе и бесконечного!) множества выпуклых фигур является выпуклой фигурой.

Определение 2. *Выпуклым многоугольником* называется многоугольник (т. е. замкнутая несамопересекающаяся ломаная), лежащий в одной полуплоскости относительно любой из прямых, содержащих его стороны. Точка M, не лежащая на сторонах выпуклого многоугольника, называется *внутренней*, если лежит по отношению к любой из этих прямых в той же полуплоскости, что и весь многоугольник. В противном случае говорят, что точка M *лежит вне многоугольника*.

2. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника а) отрезок соединяющий любые две его внутренние точки целиком лежит внутри него; б) любая ломаная, соединяющая внутреннюю точку с внешней, пересекает хотя бы одну из сторон многоугольника (не обязательно во внутренней точке, возможно она проходит через вершину многоугольника); в) любые две внешние точки можно соединить ломаной, не пересекающейся с многоугольником.

Теорема (теорема Жордана)**.** *Для любой замкнутой несамопересекающийся ломаной M на плоскости, множество всех не лежащих на M точек можно разбить на два подмножества M_1 и M_2, таких, что*

(1) *любые две точки из одного подмножества можно соединить ломаной, не пересекающейся с M;*

(2) *любая ломаная, концы которой лежат в разных подмножествах, пересекается с M;*

(3) *множество* M_1 *ограничено (то есть лежит в некотором круге), а множество* M_2 *— не ограничено.*

Замечание. Фактически, в задаче **2** мы доказали частный случай этой теоремы для ломаной, образующей выпуклый многоугольник. Общий случай пока будем принимать без доказательства.

Определение 3. *Выпуклой оболочкой* множества точек A называется наименьшая по включению выпуклая фигура, содержащая все точки множества A (то есть любая другая выпуклая фигура, содержащая все точки A должна содержать также и выпуклую оболочку A).

3. Докажите, что а) у произвольного множества точек на плоскости существует выпуклая оболочка; б) выпуклая оболочка конечного множества точек является многоугольником с вершинами в некоторых из этих точек; в) выпуклая оболочка многоугольника совпадает с выпуклой оболочкой множества его вершин.

4. Дано n попарно несонаправленных векторов $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ ($n \geq 3$) таких, что $\overrightarrow{a_1} + \cdots + \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$. а) Докажите, что существует выпуклый n-угольник $A_1 \ldots A_n$ такой, что набор векторов $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_nA_1}$ совпадает с набором $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$. б) Сколько существует различных многоугольников, удовлетворяющих условию пункта а)?

5. а) Докажите, что многоугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда у него нет сверхтупых углов.

б) Внутренняя область некоторого многоугольника является выпуклой фигурой. Докажите, что этот многоугольник выпуклый.

6. На плоскости даны 5 точек общего положения. Докажите, что из них можно выбрать 4, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.

Лемма об уточнении показателя. 06.07.2012

Определение. Будем писать $p^k \parallel n$, если $n \mathrel{\vdots} p^k$, но $n \not\mathrel{\vdots} p^{k+1}$.

1. (Лемма об уточнении показателя.) Даны простое число p и натуральные числа a и n, причем $a - 1 \mathrel{\vdots} p$. Пусть $p^t \parallel a - 1$. а) Докажите, что если $n \not\mathrel{\vdots} p$, то $p^t \parallel a^n - 1$. б) Пусть натуральное число kтаково, что $p^k \parallel n$. Докажите, что если $p > 2$ или $t > 1$, то $p^{t+k} \parallel a^n - 1$, а если $p = 2$ и $t = 1$, то $2^{k+2} \mid a^n - 1$.

Замечание. Иногда ее называют “леммой Гензеля”, но это не совсем правильно.

2. Сколькими нулями оканчивается число $4^{5^6}+6^{5^4}$?

3. В какой степени 5 входит в разложение числа $3^{1000}-2^{1000}$ на простые множители?

4. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

5. Найдите все пары натуральных чисел (x,n), для которых $x>2$, $n>1$ и x^n-1 — степень простого числа.

6. Решите в натуральных числах уравнение $z^x+1=(z+1)^y$.

Разнобой №2. 06.07.2012

1. В строку выписаны числа 1, 2, …, 9. За один ход разрешается «перевернуть» (т. е. записать числа в обратном порядке) любой блок подряд идущих чисел, записанных в монотонном порядке (например, $91\underbrace{653}2748 \to 91\underbrace{356}2748$). Докажите, что не более, чем за 12 таких ходов числа, записанные первоначально в произвольном порядке, можно расположить в монотонном порядке.

2. В кружке занимаются 20 мальчиков и несколько девочек. Каждый мальчик дружит не больше, чем с тремя девочками. Однако для любых трех мальчиков есть девочка, с которой дружат хотя бы два из них. Докажите, что с какой-то из девочек дружит хотя бы пять мальчиков.

3. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки K, L, M, N соответственно. Оказалось, что пятиугольники $ABLMD$ и $BCDNK$ являются вписанными, и $LM=KN$. Докажите, что $\angle BAD=\angle BCD$.

4. Найдите все натуральные m, при которых $p^4=2^{3m}+2^{2m}+1$, если p — простое число.

5. Для положительных чисел a_1, a_2, …, a_n докажите неравенство $\frac{2a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{2a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{2a_n^2}{a_n+a_1}\geq a_1+a_2+\ldots+a_n$.

6. Иррациональный взрыв с эпицентром в точке P удаляет из плоскости все точки, находящиеся на иррациональном расстоянии от точки P. Какое наименьшее количество иррациональных взрывов достаточно для того, чтобы удалить из плоскости все точки?

7. Найдите количество коэффициентов многочлена $(1+x)^{1988}$, не делящихся на 3.

Неравенства. 07.07.2012

1. Даны положительные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ такие, что для любого натурального i: $1 \leqslant i \leqslant n-1$, выполнено неравенство: $a_i^2 \geqslant a_{i-1}a_{i+1}$. Докажите, что

$$\frac{a_0+a_1+\ldots+a_n}{n+1}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}}{n}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

2. Пусть a, b, $c>0$. Докажите неравенство $\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca} \geqslant 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c})$.

3. Для любых положительных чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n$ докажите неравенство

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$

4. Продолжения медиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекают описанную вокруг него окружность в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что

$$3(AA_2+BB_2+CC_2) \geqslant 4(AA_1+BB_1+CC_1).$$

5. Пусть $x,y,z>0$. Докажите, что $\sqrt{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}} \geqslant \sqrt[32]{xyz}$.

6. Докажите, что для неотрицательных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $x^2+y^2+z^2=1$, выполнено неравенство

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Внутренний матбой. 07.07.2012

1. Каждая сторона равностороннего треугольника разделена на 6 равных частей, через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам, делящие исходный треугольник на 36 маленьких треугольничков. В каждой из вершин этих треугольничков сидит по жуку. Они одновременно начинают двигаться по линиям деления с равными скоростями. Когда жук попадает в вершину треугольничка, он поворачивает на 60 или 120 градусов. Докажите, что через некоторое время какие-то два жука окажутся в одной вершине маленького треугольничка.

2. M — середина AC треугольника ABC. Обозначим через A_1 центр вписанной окружности треугольника ABM, A_2 — центр его вневписанной окружности, касающейся стороны AB. Аналогично для треугольника BCM определяются точки C_1, C_2. Докажите, что $A_1A_2C_2C_1$ — вписанный.

3. Хроматическое число графа G равно k. Известно, что существует правильная раскраска вершин графа G такая, что вершин каждого цвета хотя бы две. Докажите, что существует такая раскраска в k цветов.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки P, Q, R, S — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно, а точки K, L — середины диагоналей AC и BD соответственно. Диагонали пересекаются в точке O. Внутри четырехугольника нашлась такая точка X, что $OKXL$ — параллелограмм. Докажите, что площади четырехугольников $XSAP$, $XPBQ$, $XQCR$ и $XRDS$ равны.

5. Докажите, что для любых натуральных a и b лишь конечное количество натуральных n таких, что оба числа $an^2 + b$ и $a(n + 1)^2 + b$ являются точными квадратами.

6. Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что для любых i, j выполняется неравенство $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. Докажите, что $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$.

7. Рассмотрим множество из 20 целых чисел $\{\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_{10}\}$. Докажите, что из этого множества можно выбрать непустое подмножество S такое, что никакие два числа $\pm a_i$ не могут оба лежать в S, и сумма всех чисел из S делится на 1001.

8. Пусть A — конечное множество точек плоскости, каждая из которых покрашена либо в черный, либо в белый цвет. Множество A называется неразделимым, если для любой прямой l, не содержащей точек A, найдутся две разноцветные точки, лежащие по одну сторону относительно l. Пусть M – неразделимое множество, никакие три точки которого не лежат на одной прямой. Докажите, что неразделимых подмножеств M с четным числом точек на одно больше, чем с нечетным.

Первообразные корни и показатели. 09.07.2012

Сначала напомним определение.

Определение 1. Пусть $(a, m) = 1$. Наименьшее натуральное число d такое, что $a^d \equiv 1 \pmod{m}$ называется *показателем, которому принадлежит a по модулю m.*

Числа, принадлежащие показателю $\varphi(m)$ (если такие существуют), называются *первообразными корнями* по модулю m.

В прошлом году мы доказали, что первообразные корни существуют по любому простому модулю. А по каким еще модулям они существуют?

1. Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что существует первообразный корень по модулю а) $2p$; б) p^2 и $2p^2$; в) p^n и $2p^n$, где n — произвольное натуральное число.

г) Докажите, что если по модулю m существует первообразный корень, то m равно либо 2, либо 4, либо p^n, либо либо $2p^n$, где $n \in \mathbb{N}$ и p — нечетное простое число.

2. Докажите, что для каждого n найдется такое m, что $2^m + 2008 \mathrel{\vdots} 3^n$.

3. а) Пусть $p \in \mathbb{P}$, $d \mid p-1$. Сколько различных остатков от деления на p дают числа $1^d, 2^d, \ldots, (p-1)^d$? б) Сколько будет различных остатков, если $(d, p-1) = k$?

Определение 2. Натуральное число n называется *числом Кармайкла* или *псевдопростым числом*, если $a^n - a \mathrel{\vdots} n$ для любого $a \in \mathbb{N}$.

4. а) **(A. Korselt, 1899.)** Число n является числом Кармайкла тогда и только тогда, когда для любого простого делителя p числа n имеет место $n \not\mathrel{\vdots}\, p^2$ и $n - 1 \mathrel{\vdots} p - 1$.

б) Найдите все числа Кармайкла вида $3pq$, где $p, q \in \mathbb{P}$.

Полярное преобразование. 09.07.2012

Определение. Пусть ω — окружность с центром O радиуса r, P — точка, отличная от O. *Полярой* точки P называется прямая p, перпендикулярная OP и проходящая через точку P' (образ P при инверсии относительно ω). Точка P называется *полюсом* прямой p.

1. а) Докажите, что если полюс A прямой a лежит на поляре b точки B, то точка B лежит на прямой a.

б) Пусть A, B, C — точки плоскости, a, b, c — их поляры. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда прямые a, b, c пересекаются в одной точке или параллельны.

в) Из точки P вне окружности ω проведены касательные PM и PN. Докажите, что MN — поляра точки P.

2. На окружности отмечены точки A, B, C, D, E, F. Прямые AB и DE пересекаются в точке U, прямые BC и EF — в точке V, а прямые CD и FA — в точке W. (Некоторые из точек A, B, C, D, E, F могут совпадать, в этом случае в качестве соединяющей их прямой рассматривается касательная в этой точке.)

а) Пусть X и Y — вторые точки пересечения описанной окружности треугольника BEV с прямыми AB и DE соответственно. Докажите, что соответствующие стороны треугольников XYV и ADW параллельны.

б) **(Теорема Паскаля.)** При помощи пункта а) докажите, что точки U, V и W лежат на одной прямой.

в) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную к теореме Паскаля.

3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть E — точка пересечения его диагоналей, F — точка пересечения продолжений сторон AD и BC, G — точка пересечения продолжений сторон AB и CD, H — точка пересечения касательных к описанной окружности в точках C и D.

а) Докажите, что точки E, F, H лежат на одной прямой.

б) Докажите, что EF — поляра точки G, а FG — поляра точки E.

4. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Точка O — центр его описанной окружности, T — точка пересечения диагоналей, P и Q — точки пересечения продолжений сторон. Докажите, что точки P, Q, T и O образуют *ортоцентрическую четверку* (т. е. любая из них является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими).

5. Через центр вписанной окружности треугольника проведены прямые, перпендикулярные его биссектрисам. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами, на которые опущены биссектрисы, лежат на одной прямой.

Совершенные паросочетания. 10.07.2012

Будем использовать следующие обозначения: если $U \subset V(G)$, то через $G - U$ обозначается граф, полученный удалением из G всех вершин множества U (и всех инцидентных им ребер); если $ab \notin E(G)$, то через $G + ab$ обозначим граф, полученный из G добавлением ребра ab.

Определение 1. Пусть M — паросочетание графа G. Назовем путь *M-чередующимся*, если в нем чередуются ребра из M и ребра, не входящие в M. Назовем чередующийся путь *M-дополняющим*, если его начало и конец не покрыты M (то есть ни одно из ребер паросочетания M не инцидентно ни одному из концов пути).

1. Теорема Бержа (C. Berge, 1957.) Докажите, что паросочетание M является максимальным тогда и только тогда, когда нет M-дополняющих путей.

2. Вершины $x, y, z, w \in V(G)$ таковы, что $xy, yz \in E(G)$, но $xz, yw \notin E(G)$. Пусть в каждом из графов $G + xz$ и $G + yw$ есть совершенное паросочетание. Докажите, что тогда и в графе G есть совершенное паросочетание.

Определение 2. Обозначим через $o(G)$ количество нечетных компонент связности графа G (то есть количество компонент связности, содержащих нечетное число вершин).

Теорема Татта о совершенном паросочетании (W. T. Tutte, 1947.) В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется $o(G - S) \le |S|$.

3. а) Докажите, что если в графе G есть совершенное паросочетание, то он удовлетворяет условию Татта (то есть для любого $S \subset V(G)$ выполняется $o(G - S) \le |S|$.)

Пусть граф G удовлетворяет условию Татта и при добавлении к G любого ребра в получившемся графе есть совершенное паросочетание. Обозначим через U множество вершин графа G, смежных со всеми остальными вершинами (то есть $U = \{v \in V(G) \mid d(v) = v(G) - 1\}$).

Докажите, что тогда и в графе G есть совершенное паросочетание б) если среди компонент связности графа $G-U$ хотя бы одна не является полным графом; в) в произвольном случае.

г) Выведете из предыдущих пунктов теорему Татта.

Определение 3. *Дефицитом графа* назовем количество вершин, не покрытых максимальным паросочетанием. То есть $\operatorname{def}(G) = v(G) - 2\alpha'(G)$.

4. Формула Бержа (C. Berge, 1958.) Докажите, что $\operatorname{def}(G) = \max\limits_{S \subset V(G)} (o(G - S) - |S|)$.

5. а) **(J. Petersen, 1891.)** Степени всех вершин графа равны 3, и при этом в нем не более двух мостов. Докажите, что в нем есть совершенное паросочетание.

б) Степени всех вершин связного графа G с четным числом вершин равны d, и при этом из любого собственного подмножества S множества его вершин выходит не менее $d-1$ ребер (то есть не менее $d-1$ ребер соединяют вершины множеств S и $V(G) \setminus S$). Докажите, что в графе G есть совершенное паросочетание.

Гармонические четырехугольники. 10.07.2012

Определение 1. *Симедианой* треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

1. а) Пусть BM — симедиана треугольника ABC. Докажите, что $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2}$. б) **(Точка Лемуана.)** Докажите, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

Определение 2. Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

2. а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2} = \frac{|AD|^2}{|DC|^2}$. б) Докажите, что каждая диагональ гармонического четырехугольника является симедианой треугольников, на которые разбивает четырехугольник другая диагональ.

Определение 3. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$. В случае, если $(A, B, C, D) = -1$, четверка точек A, B, C, D называется *гармонической*.

3. а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей, P — точка пересечения касательной к его описанной окружности в точке B и прямой AC. Докажите, что точки A, C, M, P образуют гармоническую четверку точек. б) Докажите, что вписанный четырехугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда касательные к его описанной окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC, либо параллельны этой прямой. в) Докажите, что гармонический четырехугольник однозначно задается тремя своими вершинами (порядок обхода вершин также известен) и укажите способ его построения по трем данным вершинам. г) Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является симедианой треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ гармонический.

4. Пусть N — середина диагонали AC гармонического четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle BNC = \angle DNC$.

5. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — ее диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB. Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH.

6. $ABCD$ — параллелограмм, прямая ℓ проходит через B перпендикулярно BC. Две окружности с общей хордой CD касаются прямой ℓ в точках P и Q. Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами.

Последовательности и пределы. 11.07.2012

Определение 1. Отрезок $[a, b]$ мы будем называть *ловушкой* для последовательности $\{x_n\}$, если в этом отрезке содержатся почти все (т. е. все, кроме, может быть, конечного числа) члены данной последовательности. Отрезок $[a, b]$ мы будем называть *кормушкой* для последовательности $\{x_n\}$, если в этом отрезке содержится бесконечно много членов данной последовательности.

0. (Упражнение, которое не нужно сдавать, но очень желательно решить.) Существует ли последовательность, для которой отрезки $[0, 1]$ и $[2, 3]$ одновременно являются а) ловушками; б) кормушками?

1. Пусть отрезки $[0, 1]$ и $[9, 10]$ являются кормушками для последовательности $\{x_n\}$. Может ли для этой последовательности существовать а) ловушка длины 1; б) ловушка длины 9? в) Существует ли последовательность без кормушек? г) Существует ли последовательность, для которой любой отрезок является кормушкой?

2. Докажите по определению предела, что предел последовательности $a_n = \frac{s(n)}{k(n)} \neq 5$, где $s(n)$ — сумма чисел числа n, $k(n)$ — количество разрядов в десятичной записи числа n

3. Найдите предел последовательности $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

Определение 2. Последовательность a_n называется *фундаментальной* или *сходящейся в себе*, если выполнено следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N\ (|a_m - a_n| < \varepsilon).$$

4. Докажите, что всякая фундаментальная последовательность сходится.

5. Рассмотрим последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Докажите, что а) последовательность x_n возрастает; б) последовательность y_n убывает; в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Определение 3. Общий предел последовательностей x_n и y_n называется числом e.

6. (Метод Герона.) Приближенное извлечение квадратного корня из числа x осуществляется так: выбираем начальное приближение $a_1 \approx \sqrt{x}$ и строим последовательность $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{x}{a_n}}{2}$. Докажите, что при правильном выборе начального приближения (каком?) $a_n \to \sqrt{x}$.

Разнобой №3. 11.07.2012

1. У Яны был граф G на $n > 2$ вершинах. Она всеми возможными способами удалила из этого графа по одной вершине и каждый из полученных графов нарисовала на отдельном листочке бумаги, после чего все эти листочки отдала Диане. Докажите, что Диана с помощью этих листочков может

а) определить, вершины каких степеней есть в графе G;

б) если граф G несвязен, то восстановить сам граф G.

2. Венцом последовательности назовем число, полученное так: сначала вычисляем модуль разности первого и второго членов, затем модуль разности этого числа и третьего члена и т.д. до последнего члена. Пусть у нас все 28 костяшек домино сложены в цепочку по правилам домино, то есть костяшки прикладываются половинками с одинаковыми числами. Числа на половинках образуют последовательность из 56 членов. Известно, что она начинается с пятерки. Чему равен венец этой последовательности?

3. На сторонах угла отмечены точки A и B. Пусть S_1, S_2 — произвольная пара окружностей, расположенных внутри угла, касающихся его сторон в точках A и B соответственно и касающихся друг друга в точке X. Найдите геометрическое место точек X.

4. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{b(b+1)} + \frac{1}{c(c+1)} \geq \frac{3}{2}.$$

5. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел, такая что для любого n выполнено условие:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}}.$$

6. В школе изучаются $2n$ предметов, а ученики получают только двойки и тройки. Никакие два ученика не учатся одинаково, и ни про каких двух учеников нельзя сказать, что один учится лучше другого (то есть имеет по всем предметам оценки не хуже и хотя бы по одному предмету лучше). Какое наибольшее число учеников может быть в этом классе?

Множества и мощности. 12.07.2012

Определение 1. Два множества называются *равномощными*, если между ними существует биекция.

Определение 2. Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

Теорема 1. *Множество рациональных чисел счетно.*

Теорема 2. *Множество точек отрезка* $[0, 1]$ *несчетно.*

Определение 3. Множество называется *континуальным*, или имеющим *мощность континуума*, если оно равномощно $[0, 1]$.

0. (Упражнение, которое нужно сдать в письменном виде.) Постройте явную биекцию между $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$.

1. а) Докажите, что счетное объединение счетных множеств счетно.

б) Докажите, что множество *алгебраических чисел*, то есть чисел, являющихся корнями многочленов с рациональными коэффициентами, счетно.

в) Докажите, что существуют *трансцендентные числа*, то есть вещественные числа, не являющиеся алгебраическими.

2. а) Докажите, что на плоскости нельзя изобразить более чем счетное количество попарно не пересекающихся кругов.

Верно ли аналогичное утверждение для б) "восьмерок" (то есть пар касающихся внешним образом окружностей, окружности из разных восьмерок не могут пересекаться, но одна восьмерка может содержаться внутри другой); в) "букв Т", то есть пар отрезков, таких, что конец одного из них является внутренней точкой другого?

3. Докажите, что множество всевозможных бесконечных последовательностей нулей и единиц — континуально.

4. Верно ли, что множество а) всех функций; б) непрерывных функуций $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ континуально?

5. а) Существует ли континуальная цепочка попарно вложенных друг в друга подмножеств счетного множества?

б) Может ли иметь континуальную мощность система подмножеств счетного множества, любые два из которых имеют конечное пересечение?

6. После того, как бесы, коих бесконечно много, проиграли Балде, им стало так стыдно, что они решили заняться физкультурой и записались в спортивные секции. Известно, что в каждую секцию записалось конечное число бесов, и среди любого бесконечного набора бесов найдутся двое, занимающиеся в одной и той же секции. Докажите, что бесов-лентяев, которые ходят в конечное число секций, лишь конечное число.

Обобщение КБШ на случай нескольких наборов. 15.07.2012

1. а) Пусть $a, b, c, d, e, f, k, \ell, m, x, y, z \in \mathbb{R}$. Докажите, что
$$(a^4+b^4+c^4)(d^4+e^4+f^4)(k^4+\ell^4+m^4)(x^4+y^4+z^4) \geq (adkx+be\ell y+cfmz)^4.$$

б) Пусть $a, b, c, d, e, f, k, \ell, m > 0$. При помощи пункта а) докажите неравенство
$$(a^3 + b^3 + c^3)(d^3 + e^3 + f^3)(k^3 + \ell^3 + m^3) \geq (adk + be\ell + cfm)^3.$$

в) Докажите аналогичное неравенство для 2^k скобочек и n слагаемых в каждой скобочке. То есть, пусть $x_{i,j} \geq 0$, где $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ и $m = 2^k$. Докажите, что
$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}^m\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} x_{i,j}\right)\right)^m.$$

г) Докажите, что если неравенство из пункта в) верно для m скобок, то оно верно и для $m-1$ скобки. Выведете из этого данное неравенство для произвольных m и n.

2. (Неравенство Гёльдера.) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$; $p, q \in \mathbb{Q}$, $p, q > 0$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. При помощи задачи **1**, докажите неравенство

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

3. $x, y, z > 0$. Докажите, что а) $(x^3+1)(y^3+1)(z^3+1) \geq \frac{(x+y+z)^3}{4}$; б) $(x^3+1)(y^3+1)(z^3+1) \geq \frac{(xy+yz+zx)^3}{4}$.

4. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

5. Докажите для положительных a, b, c, d неравенство

$$\frac{a}{(8b+9c+10d)^2} + \frac{b}{(10a+10c+7d)^2} + \frac{c}{(9a+8b+10d)^2} + \frac{d}{(8a+11b+8c)^2} \geq$$

$$\geq \frac{16}{729}\frac{1}{a+b+c+d}.$$

Геометрический разнобой. 15.07.2012

1. При помощи циркуля и линейки постройте четырехугольник по четырем сторонам и сумме противоположных углов.

2. Окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q, а также описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке PQ.

3. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены касательные AB и AC к этой окружности, а также прямая, пересекающая окружность в точках X и Y. Докажите, что точки A, B, C и середина отрезка XY лежат на одной окружности.

4. Дана полуокружность с центром O и диаметром AB. На ней расположены точки P и Q ($AP < AQ$). Лучи AP и BQ пересекаются в точке R. Оказалось, что ортоцентр H треугольника PQR лежит на полуокружности. Чему может быть равен $\angle AOH$?

5. На окружности даны 5 точек U, V, A, B, C. Прямые UA и VB пересекаются в точке M, прямые UB и VA — в точке M_1, прямые UB и VC — в точке N, прямые UC и VB — в точке N_1, прямые UC и VA — в точке P и прямые UA и VC — в точке P_1. Докажите, что прямые MM_1, NN_1 и PP_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

6. а) **(Теорема о двойной бабочке.)** На окружности S отмечены точки A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4. Прямая ℓ пересекает прямые A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно и прямые B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 в точках X_1, X_2, X_3 соответственно. Докажите, что прямая B_4B_1 проходит через точку X_4.

б) (**Теорема о бабочке.**) Через точку M, являющуюся серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены хорды AB и CD. Хорды AD и BC пересекают отрезок PQ в точках X и Y. При помощи пункта а) докажите, что точка M является серединой отрезка XY.

7. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 2\angle B$. Пусть D — основание биссектрисы угла A. Окружность ω с центром в точке S касается внешним образом описанных окружностей треугольников ABD и ACD, а также касается прямой AB (ω и точка C лежат по одну сторону от AB). Докажите, что прямые AS и BC перпендикулярны.

Непрерывность. 16.07.2012

1. а) **(Функция Дирихле.)** Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывна во всех вещественных точках.

б) **(Функция Римана.)** Докажите, что функция

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q}, x = \dfrac{p}{q} \end{cases}$$

имеет разрыв во всех рациональных точках и непрерывна во всех иррациональных точках.

2. Положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ таковы, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Докажите, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполнено неравенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

3. а) На плоскости даны многоугольник и прямая. Докажите, что найдется прямая, параллельная данной, которая делит площадь многоугольника пополам.

б) Докажите, что непрерывная функция на окружности принимает одинаковые значения в некоторой паре диаметрально противоположных точек.

в) На плоскости дан выпуклый многоугольник. Докажите, что существует прямая, делящая пополам и его площадь, и его периметр.

г) Докажите, что для произвольного многоугольника существуют две взаимно перпендикулярные прямые, делящие его площадь на четыре равные части

4. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.

5. Монотонная функция $f(x)$ для любых вещественных x и y удовлетворяет уравнению $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Докажите, что $f(x) = kx$.

6. Пусть f — непрерывная функция, определенная на отрезке $[0,1]$ такая, что $f(0) = f(1) = 0$. а) Верно ли, что на графике f найдется хорда длины $\frac{1}{3}$, параллельная оси (OX)? б) При каких ℓ на графике f заведомо найдется хорда длины ℓ, параллельная оси (OX)?

Двойные отношения. 16.07.2012

Определение 1. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$.

Определение 2. *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых a, b, c, d, называется величина $(a, b, c, d) = \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{c})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{c})} : \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{d})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{d})}$, где $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d.

Замечание. Эта величина не зависит от выбора направлений векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$.

Определение 3. Точки A, B, C, D лежат на окружности S. Пусть X — произвольная точка этой окружности. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D называется величина $(A, B, C, D) = (XA, XB, XC, XD)$.

Замечание. Эта величина не зависит от выбора точки X. В случае, если одна из точек A, B, C, D совпадает с X, в качестве соответствующей прямой рассматривается касательная к окружности S.

1. Докажите, что двойное отношение сохраняется при полярном преобразовании.

2. а) Докажите, что если $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

б) Докажите, что $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$.

в) Пусть $(A, B, C, D) = k$. Какие значения может принимать двойное отношения той же четверки точек, взятых в другом порядке?

3. а) Пусть M и N — основания внутренней и внешней биссектрис треугольника ABC с основанием BC. Докажите, что $(B, C, M, N) = -1$.

б) Пусть у окружностей разного радиуса с центрами X, Y общие внешние касательные пересекаются в точке A, а общие внутренние касательные в точке B. Докажите, что $(A, B, X, Y) = -1$.

в) На вещественной прямой отметим точки $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$. Докажите, что $(A, B, O, X) = -1$ тогда и только тогда, когда координата X равна среднему гармоническому чисел a и b. (Отсюда и взялось название гармоническая четверка).

г) Докажите, что $(A, B, C, D) = -1$ тогда и только тогда, когда C и D – инверсны относительно окружности построенной на AB, как на диаметре.

4. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке A. На прямой ℓ_1 отмечены точки B_1, C_1, D_1, а на прямой ℓ_2 — точки B_2, C_2, D_2. Докажите, что прямые B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 *конкурентны* (то есть пересекаются в одной точке или параллельны) тогда и только тогда, когда $(A, B_1, C_1, D_1) = (A, B_2, C_2, D_2)$.

5. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, продолжения BC и AD — в точке F, прямые AC и BD пересекают EF в точках M и N. Докажите, что $(E, F, M, N) = -1$.

6. При помощи проекции двойных отношений докажите **Теорему о бабочке**. В пунктах а) и б) приведены две возможные формулировки этой теоремы.

а) Прямая ℓ пересекает окружность S с центром O, точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на ℓ. На окружности S отмечены точки A, B, C, D такие, что прямые BC и AD пересекаются в точке P. Прямые AB и CD пересекают ℓ в точках X и Z. Докажите, что $XP = PZ$.

б) Прямая ℓ пересекает окружность S с центром O, точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на ℓ. На окружности S отмечены точки A, B, C, D такие, что прямые AB, BC, CD, DA пересекают ℓ в точках X, Y, Z, T соответственно. Известно, что точки Y и T симметричны относительно P. Докажите, что точки X и Z также симметричны относительно P.

Замечание. На самом деле, верна еще более общая формулировка теоремы: условие о том, что прямая пересекает окружность, не обязательно.

7. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина CD, $F = (AD) \cap (BC)$ и $E = (AC) \cap (BD)$. Отличная от M точка N на описанной окружности $\triangle ABM$ такова, что $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MB}$. Докажите, что точка N лежит на прямой EF.

Теорема Форда-Фалкерсона. 16-17.07.2012

Определение 1. *Сетью* называется ориентированный граф $G = (V, E)$, в котором выделены две вершины s (*исток*) и t (*сток*) и задана функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям

1° $\forall u, v\ (c(u, v) \geq 0)$;

2° $c(u, v) > 0 \Leftrightarrow (u, v) \in E$.

Функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Замечание. Множество ребер сети G однозначно задается функцией c.

Определение 2. *Потоком* в сети G называется функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим трем условиям:

1° $\forall\ u, v(f(u, v) \leq c(u, v))$;

2° $\forall\ u, v(f(u, v) = -f(v, u))$;

3° $\forall v \in V \setminus \{s, t\}\ \left(\sum\limits_{x \in V} f(v, x) = 0\right)$.

Число $|f| = \sum\limits_{x \in V} f(s, x)$ называется *величиной потока.* Поток сети G с максимальной величиной называется *максимальным.*

Замечание. Вообще-то совсем не очевидно, почему максимальный поток существует.

Определение 3. Пусть G — сеть, а множество ее вершин V разбито на два непересекающихся множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) — разрез сети G.

Величина $c(S, T) = \sum\limits_{x \in S,\, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*, а $f(S, T) = \sum\limits_{x \in S,\, y \in T} f(x, y)$ — *потоком через разрез* (S, T). Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.

Замечание. Нетрудно понять, что минимальный разрез сети существует. Возможно, таких разрезов несколько.

1. Для любого потока f и разреза (S, T) сети G докажите, что $|f| = f(S, T)$.

Определение 4. 1) Пусть f — поток в сети G. Рассмотрим сеть G_f с теми же V, s, t, пропускной способностью $c_f(x, y) := c(x, y) - f(x, y)$ и множеством ребер $E_f = \{(u, v) \mid c_f(u, v) > 0\}$. Назовем G_f *остаточной сетью* потока f.

2) Любой путь из s в t в сети G_f называется *дополняющим путем* потока f.

2. Теорема Форда-Фалкерсона (L. Ford, D. Fulkerson, 1956.) В сети G с пропускной способностью c задан поток f. Докажите, что следующие три утверждения равносильны:

1° поток f максимален;

2° существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$;

3° в остаточной сети G_f нет дополняющего пути.

Следствие. *Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.*

3. Докажите, что в целочисленной сети (т. е. в сети, пропускные способности всех ребер которой являются целыми числами) существует максимальный поток, причем среди максимальных потоков данной сети найдется целочисленный.

4. Пусть (S_1, T_1) и (S_2, T_2) — минимальные разрезы в сети G. Докажите, что разрезы $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ и $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ также являются минимальными а) для целочисленной сети G; б) для произвольной сети G.

Выведете из теоремы Форда-Фалкерсона следующие утверждения.

5. (Теорема Холла.) В двудольном графе с долями A и B для любого подмножества $V \subseteq A$ существует не менее $|V|$ вершин доли B, смежных хотя бы с одной из вершин множества V. Тогда существует паросочетание, содержащее все вершины из A.

6. (Теорема Кенига.) Пусть G — двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$, где $\alpha'(G)$ — количество рёбер в максимальном паросочетании и $\beta(G)$ — количество вершин в минимальном доминирующем множестве графа G.

Определение 5. Пусть a, b — вершины графа G. 1) Обозначим через $\lambda(a, b)$ минимальное количество рёбер, которые нужно удалить из графа для того, чтобы a и b оказались в разных компонентах связности.

2) Пусть a и b несмежны. Обозначим через $\kappa(a, b)$ минимальное количество вершин, которые нужно удалить из графа для того, чтобы a и b оказались в разных компонентах связности.

7. Пусть a и b — вершины графа G.

а) **Рёберная теорема Менгера (L. Ford, D. Fulkerson, 1956.)** Докажите, что в графе G существует $\lambda(a, b)$ путей из a в b, не имеющих общих рёбер.

б) **Теорема Менгера (K. Menger, 1927.)** Пусть вершины a и b несмежны. Докажите, что в графе G существует $\kappa(a, b)$ путей из a в b, не имеющих общих внутренних вершин.

Матбой профи9–профи10. 17.07.2012

1. В ряд выстроено n бюрократов различного веса, в порядке возрастания весов. Непустое множество бюрократов называется *правильным*, если вместе с каждыми двумя бюрократами оно содержит и всех бюрократов промежуточного веса между ними. Какое наибольшее число различных комиссий можно образовать из этих n бюрократов, если пересечение любых двух различных комиссий должно быть правильным множеством?

2. Рассмотрим множество A всех последовательностей длины n с элементами из $\mathbb{Z}_2$, с обычной операцией сложения последовательностей. Функция $f : A \to A$ обладает двумя свойствами: 1) $f(0) = 0$; 2) если последовательности a и b отличаются ровно в k позициях, то последовательности $f(a)$ и $f(b)$ тоже отличаются ровно в k позициях. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

3. Докажите, что невозможно разбить 190 последовательных натуральных чисел на два непересекающихся множества так, чтобы произведения чисел в этих двух множествах были бы равны.

4. На плоскости дано $n \geqslant 4$ точек, попарно соединенных отрезками. Докажите, что если все эти отрезки имеют целую длину, то хотя бы $1/6$ этих отрезков имеет длину, кратную 3.

5. На плоскости есть 2009 точек общего положения. Докажите, что число треугольников, в каждом из которых лежит любая фиксированная из этих точек (строго внутри), четно.

6. Пусть G — плоский граф, все вершины которого имеют степень 4. Вася и Петя ходят по его рёбрам. Первый раз каждый из них идет как угодно, а потом каждый из них идет прямо (из трех дорог выбирает среднюю). В итоге на каждой вершине побывал ровно один из них и ровно один раз. Докажите, что в графе четное число вершин.

7. Внутри треугольника ABC выбрана точка P таким образом, что $\angle PAB = \angle PCB = \frac{1}{4}(\angle A + \angle C)$. BL — биссектриса этого треугольника. Прямая PL пересекает описанную окружность треугольника APC в точке Q. Докажите, что прямая QB — биссектриса угла AQC.

8. Дан многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ с рациональными коэффициентами, причем $d < 0$. Произведение каких-то двух корней $P(x)$ рационально. Докажите, что их сумма тоже рациональна.

9. Суду предъявлены 100 одинаковых с виду монет. Суд уже установил, что среди них есть 2 или 3 фальшивые, все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Может ли он убедить суд, что фальшивых монет три, а не две, не разгласив ни про какую монету фальшивая она или настоящая? (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)

10. Четырехугольник $ABCD$ является одновременно вписанным и описанным. Вписанная окружность касается его сторон AB и CD в точках X и Y соответственно. Перпендикуляры, восставленные к сторонам AB и CD в точках A и D соответственно, пересекаются в точке U, перпендикуляры к ним же в точках X и Y пересекаются в точке V, и, на-конец, в точках B и C — в точке W. Докажите, что U, V, W лежат на одной прямой.

Матбой профи8–профи9. 17.07.2012

1. Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до n. Известно, что сумма чисел на всех карточках равна $k \cdot n!$, где k — целое число. Доказать, что карточки можно разложить на k групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, написанных на карточках, равнялась $n!$.

2. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1, а окружность, касающаяся стороны BC и продолжений сторон AB и AC касается прямых AB и AC в точках C_2 и B_2. Пусть D — середина BC. Прямая AD пересекает отрезки C_1B_1 и C_2B_2 в точках E и F. Докажите, что $BECF$ параллелограмм.

3. Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что $a > 1$, $b > 1$, и $[a^m]$ отлично от $[b^n]$ при любых натуральных m и n?

4. В клубе встретилось несколько джентльменов, которые при встрече обменивались рукопожатиями. Каждый джентельмен жал руки не более чем пяти другим джентельменам и при этом не жал никому руку дважды. Докажите, что джентельменов можно распределить по двум залам, так чтобы количество рукопожатий, совершенных джентельменами из разных залов составляло не менее 60% от общего числа рукопожатий.

5. Докажите, что для любого натурального a найдется бесконечно много натуральных n, таких что число $a^{2^n} + 2^n$ — составное.

6. На плоскости отмечены четыре точки, все попарные расстояния между которыми не меньше 1. Какое наименьшее значение может принимать сумма попарных расстояний между этими точками?

7. У Карлсона есть 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем сотая часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съесть поровну варенья из любых 100 банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье.

8. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC выбрали точки K, L и M соответственно, так что $AM = AK$ и $KB = BL$. При этом оказалось $\angle BAC = \angle BLM$. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника MLC. Докажите, что $KI = ML$.

9. Докажите, что $\sqrt[n]{2} > \frac{2n}{2n-1}$ для любого натурального $n > 1$.

10. Дана таблица из n строк и $2n$ столбцов. В i-й строке закрашено $2i-1$ первых клеток. Два игрока по очереди ставят ладьи в закрашенные клетки, так, чтобы ладьи не били друг друга. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре (ответ может зависеть от n)?

Аффинные преобразования. 19.07.2012

Определение 1. *Аффинным преобразованием плоскости* называется биекция плоскости, переводящая прямые в прямые.

1. Точки A и B лежат на прямой l, а их образы при аффинном преобразовании F, точки A' и B' — на прямой l'. Введем на прямых l и l' системы координат так, что точкам A и A' соответствует координата 0, а точкам B и B' — координата 1. Рассмотрим отображение $f : R \to R$ ставящее в соответствие числу a координату образа точки с координатой a. Докажите, что а) $f(a+b) = f(a) + f(b)$; б) $f(ab) = f(a)f(b)$; в) функция f монотонна.

г) **(Теорема Дарбу.)** Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой. Докажите, что $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{F(A)F(B)}}{\overline{F(B)F(C)}}$.

д) Докажите, что отношение площадей треугольников сохраняется.

Определение 2. *Аффинным преобразованием плоскости* называется биекция плоскости, переводящее центры масс в центры масс.

2. Докажите равносильность определений.

3. а) Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, которое переводит данную точку O в точку O', а данный базис векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ — в данный базис $\overline{e_1'}, \overline{e_2'}$.

б) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее точку A в точку A_1, B — в B_1, C — в C_1.

в) Докажите, что любой выпуклый четырехугольник, кроме трапеции, можно перевести аффинным преобразованием в четырехугольник у которого противоположные углы прямые.

4. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника параллельна одной из его сторон. Докажите, что аффинным преобразованием этот пятиугольник можно перевести в правильный.

5. Точки A_1, B_1, C_1 делят соответственно стороны BC, CA и AB треугольника ABC в одном и том же отношении. Докажите, что совпадают точки пересечении медиан треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и треугольника с вершинами в точках пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1.

6. В треугольнике ABC проведены чевианы AM и BN, которые пересекаются в точке O. Докажите, что середины отрезков CO, MN и AB лежат на одной прямой.

7. Почему одной только линейкой нельзя построить правильный треугольник?

Теорема Турана и экстремальная теория графов. 19.07.2012

1. В графе $2n$ вершин и n^2+1 ребро. Докажите, что в нем есть а) треугольник; б) не менее n треугольников.

Определение. Свойство графов P называется *наследственным*, если для любого графа G, обладающего свойством P, любой подграф графа G также обладает этим свойством.

2. (Лемма о наследственном свойстве.) Пусть $P(n)$ — наибольшее количество ребер в графе с n вершинами, обладающим наследственным свойством P. Докажите, что $P(n) \leq \frac{n}{n-2}P(n-1)$.

3. Найдите при помощи леммы о наследственном свойстве наибольшее количество ребер в графе на n вершинах без а) треугольников; б) полных подграфов на 4 вершинах.

4. Теорема Турана (P. Turán, 1941.) Найдите наибольшее возможное количество ребер в графе на v вершинах, не содержащем подграфа K_n (полного подграфа на n вершинах) а) при помощи леммы о наследственном свойстве; б) без помощи леммы о наследственном свойстве.

Задача о запрещенном подграфе. *Дан фиксированный граф H. Требуется найти наибольшее возможное число ребер в графе на v вершинах, не содержащего подграфа, изоморфного H. Такое число мы будем обозначать* $\mathrm{ex}(v, H)$.

Теорема Турана дает нам точное значение числа $\mathrm{ex}(v, K_n)$. Если запрещенный подграф не является полным, задача становится гораздо более сложной и точную формулу как правило указать нельзя. Тем не менее, для случая полного двудольного графа $K_{m,n}$ известны некоторые числа $\mathrm{ex}(v, K_{m,n})$.

5. а) В графе на v вершинах, степень каждой вершины равна d и нет циклов длины четыре. Докажите, что $d \le \frac{1+\sqrt{4v-3}}{2}$. б) В графе на v вершинах нет циклов длины четыре. Докажите, что в этом графе не более $\frac{v(1+\sqrt{4v-3})}{4}$ ребер.

в) **(T. Kövári, V. T. Sós, P. Turán, 1954.)** Пусть $m, n \ge 2$ и $v \ge m+n$. Докажите, что

$$\mathrm{ex}(v, K_{m,n}) \le \frac{1}{2} \cdot \left((m-1)^{\frac{1}{n}} v^{2-\frac{1}{n}} + nv\right).$$

6. В графе 30 вершин, каждое ребро графа покрашено в красный или синий цвет так, что нет трех вершин, попарно соединенных ребрами одного цвета. Какое наибольшее количество ребер может быть в этом графе?

Квадратичный закон взаимности Гаусса. 20.07.2012

1. Пусть p — нечетное простое число, $t = \frac{p-1}{2}$, $0 < x \le t$ и $(a,p) = 1$. Докажите, что а) $ax \equiv (-1)^{[\frac{2ax}{p}]} \cdot r_x \pmod p$, где $0 < r_x \le t$; б) $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{t} [\frac{2ax}{p}]}$.

2. Пусть p — нечетное простое число, $t = \frac{p-1}{2}$, $0 < x \le t$ и a — нечетное число, взаимно простое с p. Докажите, что а) $\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{t} [\frac{ax}{p}] + \frac{p^2-1}{8}}$; б) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$; в) $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{t} [\frac{ax}{p}]}$.

3. **(Квадратичный закон взаимности Гаусса.)** Докажите, что $\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$ для любых различных нечетных простых чисел p и q.

4. а) Пусть $(m,n) = 1$. Докажите, что число a является квадратичным вычетом по модулю mn тогда и только тогда, когда оно является квадратичным вычетом по модулям m и n. б) Пусть p — нечетное простое число, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что a является квадратичным вычетом по модулю p^n тогда и только тогда, когда a является квадратичным вычетом по модулю p. в) Докажите, что a является квадратичным вычетом по модулю 2^n (где $n > 3$) тогда и только тогда, когда a является квадратичным вычетом по модулю 8.

5. Докажите, что простых чисел вида $8k-1$ бесконечно много.

6. Даны $a, b \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{P}$ такие, что $a \not\vdots\, 2$ и $a^2 + b^2 = p$. Докажите, что a — квадратичный вычет по модулю p.

Числа Каталана. 20.07.2012

Определение. Обозначим через c_n количество способов расставить в ряд n открывающихся и n закрывающихся скобок так, чтобы запись была корректна (то есть, среди любого количества первых элементов ряда открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся). Число c_0 полагается равным 1. Число c_n называется *n-ым числом Каталана.*

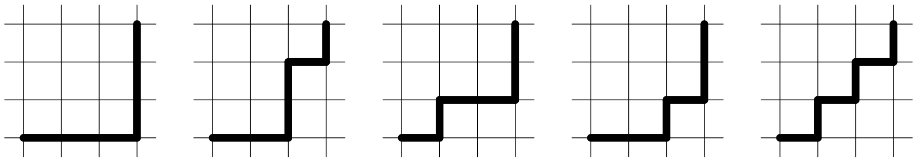
`((()))` `(())()` `()(())` `(()())` `()()()`

1. Докажите, что числа Каталана при всех $n \geq 0$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_0.$$

В следующих задачах приведен ряд множеств и требуется доказать, что количество элементов в них равно c_n. Для этого есть два основных способа — построить явную биекцию и проверить рекуррентное соотношение. В некоторых задачах полезно сделать и то и то.

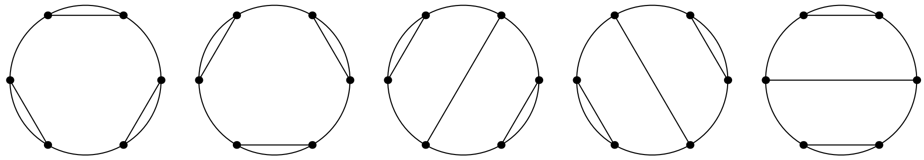
2. а) Докажите, что количество путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, и не поднимающихся выше прямой $y = x$, равно c_n.



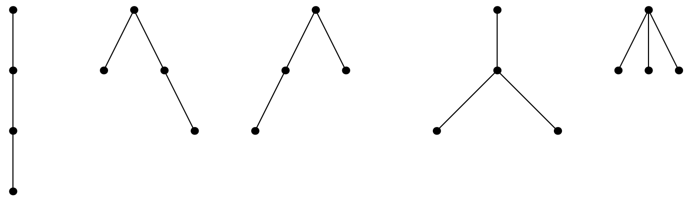
б) Докажите, что количество таблиц $2 \times n$, заполненных натуральными числами от 1 до $2n$, причём числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают, равно c_n.

1	2	3	1	2	4	1	3	4	1	2	5	1	3	5
4	5	6	3	5	6	2	5	6	3	4	6	2	4	6

в) Докажите, что количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (из любой точки выходит одна хорда) равно c_n.



г) Докажите, что количество *упорядоченных корневых деревьев* (то есть деревьев, у которых задан корень и для каждой вершины задан порядок ее потомков) с $n+1$ вершинами равно c_n.



Следующая наша цель — найти явную формулу для чисел Каталана. В следующих задачах предлагается вывести ее двумя способами.

3. (Принцип отражений.) а) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из точки $(0,0)$ в точку $(2n,-2)$.

б) При помощи предыдущего пункта докажите, что

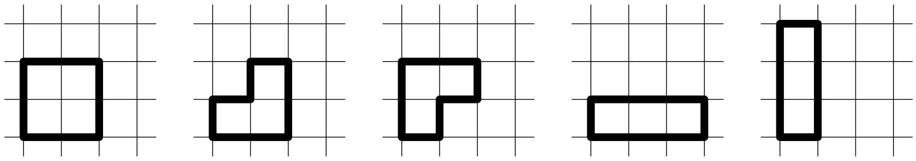
$$c_n = \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{n+1}. \tag{1}$$

4. а) **(Лемма Рени.)** Докажите, что для любой последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ целых чисел, сумма которых равна 1, ровно у одного из ее циклических сдвигов

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m), (x_2, \ldots, x_m, x_1), \ldots, (x_m, x_1, \ldots, x_{m-1})$$

все частичные суммы положительные. б) Докажите, что c_n равно количеству последовательностей из предыдущего пункта длины $2n+1$, состоящих из ± 1, для которых все частичные суммы положительные. в) Выведете из предыдущих пунктов формулу (1).

5. Докажите, что количество *"параллеломино"* (пара путей на клетчатой бумаге с началом $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n+2$ равно c_n.



6. Докажите, что количество наборов из n целых чисел от 0 до n, сумма которых делится на $n+1$ (числа могут повторяться, порядок чисел в наборе неважен) равно c_n.

`0 0 0     0 1 3     0 2 2     1 1 2     2 3 3`

Проективные преобразования. 21.07.2012

Определение 1. *Проективным преобразованием* называется биекция проективной плоскости на себя, переводящая прямые в прямые.

Определение 2. *Особой прямой* называется прямая, переходящая в бесконечно удаленную.

1. Докажите, что при проективном преобразование сохраняется отношение направленных отрезков, лежащих на прямой, параллельной особой.

2. Даны точки A, B, C, D, никакие три из который не лежат на одной прямой, и точки A_1, B_1, C_1, D_1, обладающие тем же свойством. а) Докажите, что существует проективное преобразование, которое переводит одну четверку точек в другую; б) Докажите, что такое преобразование единственно.

3. Докажите, что существует проективное преобразование, оставляющее данную окружность на месте, а данную точку внутри окружности в ее центр. Какая прямая при этом будет особой?

4. (Теорема о дважды перспективных треугольниках.) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O, и прямые AB_1, BC_1 и CA_1 пересекаются в одной точке O_1. Докажите, что прямые AC_1, BA_1 и CB_1 тоже пересекаются в одной точке O_2.

5. (Теорема Паппа.) На прямых ℓ_1 и ℓ_2 отмечены точки A, B, C и D, E, F соответственно. Прямые AE и BD пересекаются в точке X; CE

и BF — в точке Y; AF и CD — в точке Z. Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

6. В проективной плоскости дан треугольник ABC и точка S, не лежащая не на одной из его сторон. Пусть P, Q и R — точки пересечения прямых AS, BS и CS соответственно с прямыми BC, CA и AB, а L, M и N — точки, четвертые гармонические к тройкам BCP, CAQ и ABR соответственно. Доказать, что точки L, M и N лежат на одной прямой.

7. Можно ли на плоскости отметить 21 белую и 21 черную точку, так чтобы для каждой точки хотя бы 20 из 21 "разноцветных" прямых (содержащих данную точку и противоположную ей по цвету) содержали еще ровно одну отмеченную точку.

Символы Якоби и еще одно доказательство квадратичного закона взаимности. 21.07.2012

Определение 1. Пусть $n > 1$ — нечетное число и $n = p_1 p_2 \dots p_r$ — разложение n на простые множители (среди которых могут быть равные). Пусть далее $(a, n) = 1$. Тогда *символ Якоби* $\left(\frac{a}{n}\right)$ определяется равенством

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)\dots\left(\frac{a}{p_r}\right).$$

Замечание. В отличии от символа Лежандра, $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ не означает, что a квадратичный вычет по модулю n. Придумайте контрпример сами!

1. Докажите, следующие свойства символа Якоби. а) $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)$; б) $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$; в) $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$.

2. Умножение всех элементов приведенной системы вычетов по нечетному простому модулю p на вычет $a \not\equiv 0 \pmod p$ производит в ней перестановку.

а) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то получившаяся подстановка четна.

б) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p, то она нечетна.

3. Пусть p и q — различные нечетные простые числа. Рассмотрим два множества $M = \{0, 1, \dots, pq-1\}$ и $\overline{M} = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_q$, где $\mathbb{F}_p$ — поле вычетов по модулю p. Каждому элементу $x \in M$ поставим в соответствие пару

$\overline{x} = (x_p, x_q) \in \overline{M}$, где $x_p \equiv x \pmod p$ и $x_q \equiv x \pmod q$. Заметим (поймите это!), что данное отображение будет биекцией между M и $\overline{M}$.

Рассмотрим пару отображений $f, g : \overline{M} \to \overline{M}$, заданную следующими равенствами: $f(a,b) = \overline{a + pb}$ и $g(a,b) = \overline{qa + b}$. Соответствующие им отображения из M в M мы также будем обозначать буквами f и g.

а) Докажите, что f и g — перестановки на множестве $\overline{M}$.

б) Докажите, что перестановка f четна тогда и только тогда, когда $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$.

в) Рассмотрим перестановку $f \circ g^{-1}$ на множестве M. Вычислите число инверсий этой перестановки.

г) **(Доказательство Золотарёва.)** При помощи предыдущих пунктов докажите квадратичный закон взаимности:

$$\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

4. (Квадратичный закон взаимности для символов Якоби.) Пусть m, n — взаимно простые нечетные числа, большие 1. Докажите, что

$$\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}}.$$

5. Докажите, что $3^n - 1$ не делится на $2^n - 1$ при любом натуральном $n > 1$.

6. Пусть $x_1 = 1, y_1 = 100,\ x_{n+1} = x_n^{237} + y_n,\ y_{n+1} = y_n^{237} + x_n$. Докажите, что $x_n y_n$ не делится на 239 ни при каком натуральном n.

Геометрия. Проективность и не только. 22.07.2012

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, E — точка пересечения диагоналей. Внутри четырехугольника отмечена точка P, такая, что $\angle BAP + \angle PCB = \angle PBC + \angle CDP = \frac{\pi}{2}$. Докажите, что точки P, E, O лежат на одной прямой.

2. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D, а продолжений сторон AB и AC — в точках E и F. Пусть T — точка пересечения прямых EC и BF. Докажите, что точки A, D и T лежат на одной прямой.

3. Пусть M, N и K — точки касания вписанной окружности треугольника ABC его сторон. Q — центр окружности, проходящей через середины отрезков MN, NK и KM. Докажите, что точка Q, центр описанной окружности и центр вписанной окружности треугольника лежат на одной прямой.

4. (Теорема о трижды перспективных треугольниках.) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O, прямые AA_1, BC_1 и CB_1 пересекаются в одной точке O_1 и прямые AC_1, BB_1 и CA_1 пересекаются в одной точке O_2. Докажите, что прямые AB_1, BA_1 и CC_1 тоже пересекаются в одной точке O_3.

5. (Теорема Хелли.) На плоскости дано а) 4; б) n выпуклых фигур, причем любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все фигуры имеют общую точку.

6. На плоскости даны несколько фигур, любые три из которых можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все эти фигуры можно покрыть кругом радиуса 1.

7. Дан выпуклый шестиугольник. Пусть s — сумма длин трех отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон. Докажите, что в шестиугольнике существует точка, сумма расстояний от которой до прямых, содержащих его стороны, не превосходит s.

Разнобой. 22.07.2012

1. (Лемма Куммера.) Докажите, что показатель, с которым простое число p входит в разложение C_{m+n}^{n} равно числу переносов при сложении чисел m и n в системе счисления с основанием p.

2. Все вершины плоского графа имеют степень 3. а) Его ребра можно правильным образом раскрасить в 3 цвета. Докажите, что страны можно правильным образом раскрасить в 4 цвета. б) Его страны можно правильным образом раскрасить в 4 цвета. Докажите, что ребра можно правильным образом раскрасить в 3 цвета.

3. Хозяйка умеет печь торты k различных сортов. Она устроила пир на 66 человек, на котором каждая компания из 36 человек съела по одному торту. Причем для любых двух компаний A и B евших торты одного сорта $|A \cap B| > 18$. Докажите, что хозяйка может устроить пирушку на 12 человек так, чтобы каждая компания из 6 человек съела по одному торту и для любых двух компаний A и B, евших торты одного сорта $|A \cap B| \neq 3$.

4. В городе 57 автобусных маршрутов, расположенных так, что выполняются следующие условия: 1) с любой остановки можно попасть на любую другую без пересадки; 2) любые два маршрута имеют ровно одну общую остановку; 3) в любом маршруте как минимум 3 остановки. Сколько остановок может быть в маршруте?

5. а) Для положительных чисел A, M, S докажите неравенство $\frac{1}{A(1+M)} + \frac{1}{M(1+S)} + \frac{1}{S(1+A)} \geq \frac{3}{1+AMS}$. б) Пусть $n > 3$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$. Докажите неравенство $\frac{1}{a_1(a_2+1)} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}(a_n+1)} + \frac{1}{a_n(a_1+1)} \geq \frac{n}{1+a_1 \ldots a_n}$.

6. Найдите все натуральные n, для которых оба числа $n^n + 1$ и $(2n)^{2n} + 1$ — простые.

7. В очереди в кассу кинотеатра стоят n зрителей с полтинниками и m — с рублями. В начале в кассе p полтинников, цена билета полтинник. Найдите количество очередей, которые целиком смогут пройти через эту кассу так, чтобы никому не пришлось ждать сдачи.

Заключительная олимпиада. 23.07.2012

Довывод

1. В стране фараонов одинаковыми монетами любого достоинства можно набрать сумму в один динар, причем для этого всегда нужно менее 40 монет. Барон Мюнхгаузен привез оттуда шесть монет разных достоинств и утверждает, что они как раз составляют сумму в один динар. Могут ли слова барона оказаться правдой?

2. Парабола на координатной плоскости называется *красивой*, если ее вершина и две точки пересечения с осью абсцисс образуют равносторонний треугольник. Докажите, что у всех квадратных трехчленов с красивыми графиками одинаковый дискриминант.

3. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что если $AI + AC = BC$, то $\angle BAC = 2\angle ABC$.

4. Какое наибольшее число коней можно расставить на шахматной доске 8×8, так чтобы каждый бил не более семи из остальных?

5. Существует ли бесконечная последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ такая, что $p_{k+1} = 2p_k \pm 1$?

Вывод

6. Иероглиф племени Мумбо-Юмбо состоит из 361 точки, расположенных в виде квадрата 18×18 и соединенных отрезками, являющимися сторонами клеток так, что получается дерево. Иероглиф племени

Юмбо-Мумбо состоит из 400 точек, расположенных в узлах квадрата 19×19 и соединенных отрезками, являющимися сторонами клеток так, что получается дерево, причем на сторонах большого квадрата проведены все отрезки кроме одного. Чему равно отношение числа иероглифов в языке Юмбо-Мумбо к числу иероглифов в языке Мумбо-Юмбо?

7. Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Прямая AB пересекается с CD в точке E, F — точка пересечения диагоналей. Описанные окружности треугольников AFD и BFC пересекаются в точке H. Докажите, что $\angle EHF = 90°$.

8. Дано иррациональное число α такое, что $0 < \alpha < 1/2$. По нему определяется новое число α_1 как меньшее из двух чисел 2α и $1 - 2\alpha$. По этому числу аналогично определяется α_2, и так далее. Докажите, что для некоторого n выполнено неравенство $\alpha_n < 3/16$.

Послевывод

9. Сумма четырех положительных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{d^2+1} + \frac{d}{a^2+1} \geq 2.$$