Математика 9 непрофи

Материалы учебных занятий

4 июля 2012

Выпуклость

Задача 1. а) На плоскости даны 5 точек. Двое по очереди проводят отрезки соединяющие эти точки, так чтобы проведенные отрезки не пересекались. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?
б) Тоже самое для n точек.

Факт. Следующие определения эквивалентны:
а) Многоугольник называется *выпуклым*, если он содержит любую свою диагональ.
б) Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от любой своей стороны.
в) Многоугольник называется *выпуклым*, если все его внутренние углы меньше $180°$.

Определение 1. Пусть на плоскости заданы несколько точек. *Выпуклой оболочкой* называется выпуклый многоугольник с вершинами в некоторых из них, содержащий все остальные точки.

Задача 2. Докажите, что выпуклая оболочка существует и единственна.

Указание. При решении можно пользоваться следующим фактом: отрезок, соединяющий внутреннюю и внешнюю точки многоугольника, пересекает его периметр.

Задача 3. На плоскости дано n точек. Известно, что любые 4 из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что эти n точек являются вершинами выпуклого n-угольника.

Определение 2. Фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок.

Задача 4. Докажите, что пересечение выпуклых фигур выпукло.

Задача 5. Докажите, что если все вершины треугольника принадлежат выпуклой фигуре, то любая точка внутри треугольника также принадлежит этой фигуре.

Задача 6. Каким может быть пересечение выпуклой фигуры и прямой.

Определение 3. Прямая l называется *опорной* к фигуре Φ, если она пересекает фигуру Φ, и фигура Φ вся лежит в одной полуплоскости, ограниченной этой прямой.

Задача 7. Даны выпуклая фигура Φ и точка A вне нее. а) Докажите, что существует две опорные прямые к фигуре Φ, проходящие через точку A. б) Докажите, что существует прямая такая, что точка A и фигура Φ лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой.

Задача 8. Докажите, что если на плоскости даны 4 выпуклых множества, причем любые три из них имеют общую точку, то все четыре множества имеют общую точку

Указание. Выделите эти четыре точки и рассмотрите, какой может быть их выпуклая оболочка.

5 июля 2012

Многочлены 1: теорема Безу

Определение 1. Разделить многочлен $Q(x)$ на многочлен $P(x) \neq \mathrm{const}$ с остатком означает найти многочлены $R(x)$ и $F(x)$ такие, что $Q(x) = P(x)F(x) + R(x)$ и $\deg P(x) > \deg R(x)$.

Факт (Теорема Безу). Для любого числа a остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - a$ равен $P(a)$.

Следствие. Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $x - a$.

Упражнение 1. При каких a многочлен $x^{16} + ax^8 + a$ делится на $2x - 3$?

Упражнение 2. Докажите, что многочлен $x^{100} + 5x^2 - 7x + 1$ не делится на многочлен $x^2 + 5x - 6$.

Задача 1. Докажите, что если $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — различные корни многочлена P, то он делится на многочлен $(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_k)$.

Задача 2. Докажите, что многочлен степени n имеет не более n различных корней.

Задача 3. Докажите, что если два многочлена степени не выше n совпадают в $n + 1$ точке, то они равны.

Задача 4. Докажите, что

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} = 1.$$

Задача 5. Пусть $P(x)$ — многочлен, такой что $P(x) = P(x+1)$. Докажите, что $P(x)$ — константа.

Задача 6. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках равен ± 1. Докажите, что его нельзя разложить в произведение многочленов с целыми коэффициентами.

Задача 7. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

5 июля 2012

Теорема Хелли

Задача 1. Докажите, что если на плоскости даны 4 выпуклых множества, причем любые три из них имеют общую точку, то все четыре множества имеют общую точку

Указание. Выделите эти четыре точки и рассмотрите, какой может быть их выпуклая оболочка.

Задача 2 (Теорема Хелли). На плоскости даны несколько выпуклых фигур, любые три из которых имеют общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем фигурам.

Во всех следующих задачах надо применить теорему Хелли.

Задача 3. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трёх его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти три стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что тогда такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.

Задача 4. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

Задача 5. Дана некоторая система дуг, принадлежащих одной окружности и имеющих длину, меньше трети окружности. Каждые две дуги этой системы имеют общую точку. Докажите, что все дуги этой системы имеют общую точку.

Задача 6. На плоскости даны несколько точек, любые три из которых можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса 1.

Задача 7. На плоскости заданы несколько полуплоскостей, внутренности которых покрывают всю плоскость. Докажите, что из них можно выбрать три, внутренности которых также покрывают всю плоскость.

6 июля 2012

Инверсия 1: Образы прямых и окружностей

Пусть на плоскости дана окружность S с центром O и радиусом R.

Определение 1. *Инверсией* относительно окружности S называется преобразование, которое сопоставляет произвольной точке A, отличной от O, точку A_1, лежащую на луче $[OA)$ такую, что $|OA| \cdot |OA_1| = R^2$

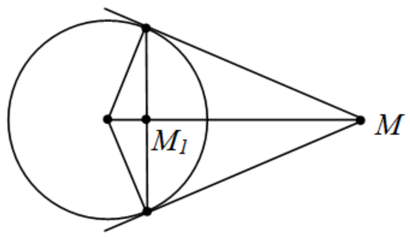
Окружность S называется *окружностью инверсии*, точка O называется *центром инверсии*, радиус R называется *радиусом инверсии*.

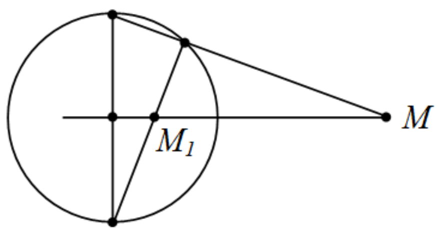
Свойства инверсии:

- Точки, расположенные на окружности инверсии, остаются на месте, расположенные внутри нее переходят вовне, а расположенные вне круга инверсии переходят во внутренние точки круга.

- Инверсия определена на всей плоскости кроме центра инверсии. Удобно рассматривать плоскость, пополненную бесконечно удаленной точкой образом центра инверсии.

Задача 1. Сформулируйте и обоснуйте два способа построения (с помощью циркуля и линейки) образа точки при инверсии.





Задача 2. Пусть при инверсии с центром в точке O точка A переходит в точку A_1, а точка B — в точку B_1. Докажите, что $\triangle OAB$ подобен $\triangle OB_1A_1$.

- При инверсии:

  а) Прямые, проходящие через точку O, переходят в себя.

  б) Прямые, не проходящие через O, переходят в окружности, проходящие через O.

в) Окружности, проходящие через точку O, переходят в прямые, не проходящие через точку O.

г) Окружности, не проходящие через точку O, переходят в окружности, не проходящие через точку O. Верно ли, что центр окружности переходит при этом в центр окружности?

Задача 3. Центр инверсии является точкой касания двух окружностей. Найдите образ этих окружностей при инверсии.

Задача 4. Центр инверсии является точкой касания окружности и прямой. Найдите их образы при инверсии. А если центр инверсии лежит на прямой, но не совпадает с точкой касания? Центр лежит на окружности? Центр лежит вне окружности и прямой?

Задача 5. Дан равносторонний треугольник, одна вершина которого лежит в центре инверсии, а две другие - на ее окружности. Найдите образ треугольника при инверсии.

Задача 6. Равносторонний треугольник вписан в окружность инверсии. Найдите его образ.

Задача 7. Дан квадрат, одна вершина которого совпадает с центром инверсии, а другая лежит на ее окружности. Постройте образ квадрата при инверсии.

Задача 8. Дан равносторонний треугольник, одна вершина которого лежит в центре инверсии, а противоположная сторона касается ее окружности. Найдите образ треугольника при инверсии.

Задача 9. Постройте образ точки при инверсии только при помощи одного циркуля.

6 июля 2012

Многочлены 2

Задача 1. а) Опишите все многочлены, которые равны 2 в точках 2, 3 и 5.
б) Опишите все многочлены, которые равны 2 в точке 1, 3 в точке 2.
в) Опишите все многочлены, которые равны 0 в точке 0, 2 в точке 1, 3 в точке 2.

Упражнение 1. Многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ разделили с остатком на многочлен $x - 5$. Докажите, что остаток и частное являются многочленами с целыми коэффициентами.

Задача 2. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами принимает значение 2 в четырех целых точках. Докажите, что $P(x)$ не принимает значений 1 и 3 в целых точках.

Задача 3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, $|P(3)| = |P(7)| = 1$. Докажите, что $P(x)$ не имеет целых корней.

Задача 4. Найти все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие условию:

$$xP(x-1) = (x-2)P(x).$$

Задача 5. Найдите все многочлены $P(x)$, которые удовлетворяют равенству:

$$P(x) = \frac{P(x-1) + P(x+1)}{2}.$$

Задача 6. Даны три квадратных многочлена с положительными старшими коэффициентами. Известно, что сумма любых двух имеет общий корень с третьим. Докажите, что все три многочлена имеют общий корень.

7-9 июля 2012

Системы линейных уравнений

Вводные задачи

Задача 1 (Интерполяция). Построение многочлена P степени не выше n, что $P(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, \ldots, n$ называется *интерполяцией*. Верно, ли что для любого набора точек x_i и значений y_i существует интерполяционный многочлен?

Замечание. Из задачи 3 листика Многочлены 1, следует, что интерполяционный многочлен единственный.

Упражнение 1. а) Постройте многочлен P второй степени такой, что $P(1) = 1$, $P(3) = 13$, $P(5) = 36$.
б) Постройте многочлен P третьей степени такой, что
$P(1) = 1$, $P(3) = 4$, $P(5) = 10$, $P(7) = 27$.

Задача 2 (Задача про каемку). В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно расставить (причем единственным образом) числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому своих соседей (у клетки максимум 4 соседа).

Упражнение 2. Молчаливый слон идет из точки с координатами $(6, 2)$ по прямой $x + 6y = 18$ со скоростью 1 метр в секунду. Веселая черепаха ползет с точки $(0,1)$ по прямой $-5x+18y=18$. Какую скорость ей выбрать, чтобы встретиться со слоном?

Теоретические факты

Задача 3 (Метод Гаусса). Любая система линейных уравнений (СЛУ) равносильна системе ступенчатого вида

$$\begin{cases} a_{1e}x_e + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n & = & d_1 \\ \quad a_{2k}x_k + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n & = & d_2 \\ \qquad a_{3l}x_l + \cdots\cdots + a_{3n}x_n & = & d_3 \\ \qquad\quad \ddots \qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ \qquad\qquad a_{rs}x_s + \cdots + a_{rn}x_n & = & d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = & d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = & d_m \end{cases},$$

где коэффициенты $a_{1e}, a_{2k}, a_{3l} \dots a_{rs} \neq 0$.

Упражнение 3. Решите методом Гаусса системы уравнений.

а) $\begin{cases} 2x+y+3z=11, \\ x-2y+4z=3 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-2y+z=1, \\ 2x+y-3z=-3 \\ 4x-3y-z=-1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x-2y+z=1, \\ 2x+y-3z=-3 \\ 4x-3y-z=-4 \end{cases}$.

Задача 4 (Альтернатива Фредгольма). Для любой системы n линейных уравнений с n неизвестными имеет место *альтернатива*: либо при любой правой части решение системы существует и единственно (*система невырождена*), либо при некоторых правых частях система не имеет решений, а при остальных — имеет бесконечно много решений.

Следствие. а) Если при любой правой части решение СЛУ единственно, то система невырождена.
б) Если при нулевой правой части решение СЛУ единственно, то система невырождена.

Еще задачи

Задача 5. а) Решите задачу про каемку, если у клетки 8 соседей.
б) Как выглядит и решается задача для произвольного связного графа?

Задача 6 (10 бананов). Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково.

Задача 7 (Коровы). Есть 101 корова. Если убрать любую буренку, то оставшихся можно разделить на два равных по весу и численности стада.

Докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса а) натуральные; б) рациональные; в) действительные;

9 июля 2012

Инверсия 2: Задачи на построение

Полезное свойство инверсии:

- При инверсии касающиеся окружности переходят или в касающиеся окружности или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых. Тоже для образа касающихся окружности и прямой или пары параллельных прямых.

Задача 1. Постройте с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся трех данных окружностей, имеющих общую точку. Проведите исследование.

Задача 2. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности

Задача 3. Постройте окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одной из них в заданной точке.

Задача 4. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности и данной прямой.

Задача 5. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

Задача 6 (Задача Аполлония). Постройте окружность, касающуюся трех данных непересекающихся окружностей.

10 июля 2012

Линейное представление НОД и Китайская теорема

Линейное представление НОД

Задача 1. Для данных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ обозначим через I – - множество чисел представимых в виде $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, где числа x_i — целые.
а) Докажите, все элементы множества I делятся на НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
б) Докажите, что если m и n принадлежат I, то $m+n$, $m-n$, mk тоже принадлежат I (k — целое). Докажите, что остаток от деления m на n лежит в I
в) Пусть d наименьшее натуральное число в I. Докажите, что для любого m из I, $m \,\vdots\, d$. Докажите, что любое a_i делится на d.
г) Докажите, что $d =$ НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Определение 1. *Линейным представлением НОД* называется нахождение целых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, что $\text{НОД}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$

Замечание. Из предыдущей задачи следует существование линейного представление НОД.

Упражнение 1. Найдите линейное представление НОД чисел 17 и 19.

Китайская теорема об остатках(КТО)

Задача 2. Пусть a, b взаимно простые числа.
а) Докажите, что существует n такое, что $n \equiv 1 \pmod{a}$, $n \equiv 0 \pmod{b}$.
б) Докажите, что для любого $0 \leqslant r_1 < a$ существует n такое, что $n \equiv r_1 \pmod{a}$, $n \equiv 0 \pmod{b}$.
в) Докажите, что для любых $0 \leqslant r_1 < a, 0 \leqslant r_2 < b$, существует n такое, что $n \equiv r_1 \pmod{a}$, $n \equiv r_2 \pmod{b}$.
г) Докажите, что число n из предыдущей задачи единственно по модулю ab.

Задача 3 (Китайская теорема об остатках). Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ попарно взаимно простые числа, $m = m_1 m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$. Тогда для любых остатков r_i, $0 \leqslant r_i < m_i$, существует единственный остаток r, $0 \leqslant r < m$ такой, что $r \equiv r_i \pmod{m_i}$.

Упражнение 2. Решите систему сравнений.
а) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$

Применения КТО

Задача 4. Найдите линейное представление НОД чисел 696 и 493.

Задача 5. Для любых попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и остатков $r_1, r_2, \ldots, r_n$ по этим модулям найдутся n последовательных чисел $a, a+1, \ldots, a+n-1$ таких, что
$a \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $a+1 \equiv r_2 \pmod{m_2}$, $\ldots$, $a+n-1 \equiv r_n \pmod{m_n}$.

Задача 6. Натуральное число называется свободным от квадратов, если оно не делится ни на один квадрат простого числа. Докажите, что для любого n найдутся n подряд идущих чисел, не свободных от квадратов.

Задача 7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, из которых заменой одной цифры нельзя получить простое число.

Задача 8. а) Сколько остатков являются решениями сравнения $x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$, где p, q — нечетные простые. б) Подумайте над обобщением.

Многочлены 3: Интерполяция

Задача 1. а) Постройте многочлен P, который в точках $x_1, \ldots, x_n$ равен нулю, а в остальных точках отличен от нуля.
б) Постройте многочлен P степени n, который в точке x_0 принимает значение 1, а в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равен нулю.
в) Постройте многочлен P степени n, который в точке x_0 принимает значение y_0, а в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равен нулю.
г) Постройте многочлен P степени n, который в точке x_1 принимает значение y_1, а во всех точках $x_0, x_2, \ldots, x_n$ равен нулю.
д) Постройте многочлен P степени *не выше* n, который в точке x_0 принимает значение y_0, в точке x_1 принимает значение y_1, а в точках $x_2, \ldots, x_n$ равен нулю.
е) Постройте многочлен P степени *не выше* n такой, что $P(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, \ldots, n$

Определение 1. Интерполяционный многочлен в виде

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)}$$

называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

Определение 2. Интерполяционный многочлен в виде

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \tag{1}$$

называется *интерполяционным многочленом Ньютона.*

Задача 2. Докажите, что для любых точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и значений $y_0, y_1, \ldots, y_n$ существуют числа a_i такие, что многочлен (1) в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принимает значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Упражнение 1. Найдите многочлен степени не выше трех такой, что $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 4$, $P(3) = 8$
а) при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа;
б) при помощи интерполяционного многочлена Ньютона.

Задача 3. Найдите многочлен наименьшей степени, который при делении на $(x - 1)$ дает остаток 1, при делении на $(x - 2)$ дает остаток 3, при делении на $(x - 4)$ остаток 5.

Задача 4. Опишите все многочлены, которые в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принимают значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Задача 5. Многочлен называется *целозначным*, если он принимает целые значения в целых точках.
а) Верно ли, что у любого целозначного многочлена все коэффициенты целые?
б) Докажите, что любой целозначный многочлен можно приставить в виде суммы многочленов $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$, $\ldots$, $P_n(x) = \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!}$, $\ldots$ с целыми коэффициентами.
в) Докажите, что всякий многочлен степени n, принимающий целые значения в каких-то $n+1$ последовательных целых точках является целозначным.

Задача 6. Докажите, что если многочлен P степени n принимает целые значения при $x = 0, 1, 4, \ldots, n^2$, то он принимает целые значения во всех квадратах натуральных чисел.

11 июля 2012

Инверсия 3: Углы и расстояния

Будем изучать как меняются углы и расстояния при инверсии.

Задача 1. Пусть при инверсии с центром O и радиусом R точки A и B переходят в точки A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $A_1B_1 = \frac{R^2\cdot AB}{OA\cdot OB}$.

Определение 1. Пусть окружности пересекаются в точке P. *Углом между окружностями* в точке P называется угол между касательными к этим окружностям, проведенными в этой точке.

Окружности называются *ортогональными*, если угол между ними равен 90°.

Угол между прямой и окружностью определяется аналогично.

Задача 2. а) Постройте взаимно перпендикулярные окружность и прямую.
б) Докажите, что угол между пересекающимися окружностями (или окружностью и прямой) не зависит от выбора точки пересечения.

Задача 3. Докажите, что угол между двумя линиями (окружностями или прямыми) равен углу между их образами при инверсии. Сколько случаев достаточно рассмотреть?

Задача 4. Проведите через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.

Задача 5 (Теорема Птолемея). а) Докажите, что во вписанном четырехугольнике сумма произведений противолежащих сторон равна произведению диагоналей.
б) Верно ли обратное?

Задача 6. Даны две окружности S и T. Докажите, что следующие условие эквивалентны:
а) Окружности S и T ортогональны.
б) При инверсии относительно S окружность T переходит в себя.
в) Окружность T проходит через пару точек, инверсных относительно S.

5 июля 2012

Неравенство Коши–Буняковского–Шварца

Факт (Неравенство Коши–Буняковского–Шварца). Для двух наборов чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ верно неравенство

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geqslant (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

Равенство достигается, если наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пропорциональны.

Задача 1 (Неравенство треугольника). Докажите неравенство:

$$\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \geqslant \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Задача 2. Числа a, b, c удовлетворяют условию $a + 2b + 3c \geqslant 14$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 14$.

Задача 3. Для положительных чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ докажите неравенство:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + \ldots + b_n}.$$

Задача 4. Из точки M внутри треугольника ABC опускаются перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на прямые BC, AC, AB соответственно. Какое минимальное значение принимает сумма $\dfrac{BC}{MA_1} + \dfrac{AC}{MB_1} + \dfrac{AB}{MC_1}$? Где при этом должна находиться точка M?

Задача 5. Докажите неравенство: $\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha + \cos\beta \leqslant 2$.

Задача 6. Положительные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3$. Докажите, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z$.

Задача 7. Для положительных чисел докажите, что

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2.$$

12 июля 2012

Многочлены 4

Применения интерполяции

В следующих задачах ответ многочлен.

Задача 1. Продолжите последовательность $0, 1, 5, 12, 22, \ldots$ Задайте ее формулой.

Задача 2. Найдите формулу для суммы первых n членов последовательности из предыдущей задачи.

Задача 3*. На сколько частей разбивают пространство n плоскостей общего положения?

Многочлены как функция, графики многочленов

Задача 4. Верно ли, что любые три точки на плоскости с различными абсциссами лежат на одной параболе? Если неверно, то укажите критерий когда верно, а когда нет.

Задача 5 (Московская олимпиада 2006). Один из двух приведенных квадратных трехчленов имеет два корня меньших тысячи, другой — два корня больших тысячи. Может ли сумма этих трехчленов иметь один корень меньший тысячи, а другой — больший тысячи?

Задача 6. Даны три квадратных многочлена с различными старшими коэффициентами. Графики любых двух имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют общую точку.

Задача 7 (4 этап Всероссийской олимпиады, 2001). Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(f(x))=0$ имеет 3 различных корня. Может ли уравнение $f(f(f(x)))=0$ имеет 7 различных корней?

Задача 8. Дан многочлен $P(x)$ степени 1001 с действительными коэффициентами. Имеется бесконечная последовательность целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такая, что $P(a_1)=0, P(a_2)=a_1, P(a_3)=a_2$, и т. д. Докажите, что не все числа в последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ различны.

14 июля 2012

Комплексные числа 1: Алгебраические операции

Определение 1. *Комплексным числом* называется запись вида $a + bi$, где a и b действительные числа, а i — формальный символ. Умножение комплексных чисел задается правилом $i^2 = -1$.

Число a называется *вещественной частью* и обозначается $\mathrm{Re}(z)$. Число b называется *мнимой частью* и обозначается $\mathrm{Im}(z)$.

Задача 1. Вычислите а) $(3 + 4i)^{-1}$; б) $(a + bi)^{-1}$.

Определение 2. Два комплексных числа называются сопряженными, если они отличаются только знаком мнимой части. Число, сопряженное числу z, обозначают $\overline{z}$. Таким образом, если $z = a + bi$, то $\overline{z} = a - bi$.

Задача 2. Вычислите а) $\dfrac{2+5i}{1-2i}$; б) $\sqrt{7 + 24i}$; в) $\sqrt{i}$.

Задача 3. Решите уравнения а) $z^2 + 4z + 5 = 0$; б) $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$; в) $z^3 = 1$.
Будем отождествлять комплексное число $z = x + iy$ с точкой $Z = (x, y)$ плоскости.

Определение 3. *Модулем* числа z (обозначается $|z|$) называется длина вектора OZ, а *аргументом* числа z (обозначается $\arg z$) — ориентированный угол между положительным направлением оси абсцисс и вектором OZ.

Задача 4. а) Докажите, что $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
б) Докажите, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей.

Задача 5. Какое множество комплексной плоскости задается условием: а) $|z - 2| < 3$; б) $|z - 2| = |z + 4i|$; в) $1 < |z - 1 + i| \leqslant 3$; г) $\mathrm{Im}\,\frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$; д) $\mathrm{Re}(z^2) \leqslant 1$.

Задача 6. Докажите, что из любого комплексного числа $z \neq 0$ можно извлечь ровно два квадратных корня.

Задача 7. Три точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их *простое отношение* $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$ вещественно.

Задача 8. Какие множества на плоскости могут быть заданы уравнением вида $Az\overline{z} + Bz + C\overline{z} + D = 0$, где A, D — вещественные, $C = \bar{B}$ параметры?

Задача 9. Если целые числа a и b представимы в виде суммы двух квадратов, то и их произведение представимо в виде суммы двух квадратов.

Задача 10. Будем рассматривать выражения вида $a + bj$, где a и b — остатки по модулю p, $j^2 = d$ (d — фиксированный остаток). При каких d в таких числах возможно деление?

14 июля 2012

Чередующиеся цепи

Определение 1. *Паросочетанием* графа называется множество ребер графа без общих вершин.

Определение 2. Для данного паросочетания *чередующейся цепью* называется путь, в котором чередуются принадлежащие и не принадлежащие паросочетанию ребра, причем крайние вершины пути не принадлежат ребрам паросочетания.

Задача 1. а) Есть два паросочетания M_1 и M_2, причём рёбер в M_1 меньше, чем в M_2. Докажите, что для паросочетания M_1 есть чередующаяся цепь.
б) Докажите, что паросочетание максимально тогда и только тогда, когда нет ни одной чередующейся цепи.

Задача 2. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: «Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!». Вторая сваха говорит: «А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!». Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: «В таком случае можно сделать и то, и другое одновременно!». Прав ли он?

Задача 3. Дан граф с mn рёбрами ребра которого раскрашены в n цветов, причем ни какая вершина не имеет два ребра одинакового цвета. Докажите, что можно перекрасить эти рёбра так, что рёбер всех цветов станет поровну и по–прежнему ни от какой вершины не отходит два ребра одного цвета.

Задача 4 (лемма Холла). Есть несколько юношей и девушек. Докажите, что все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых тогда и только тогда, когда для любого k любые k юношей знают не менее k девушек.

Указание. Поженим максимальное количество юношей. Допустим, какой-то юноша не женат. Возьмём этого юношу, его знакомых девушек, их мужей, их знакомых девушек и т.д. Докажите, что либо в построенном множестве есть незамужняя девушка и можно поженить по-другому тех же юношей вместе с выбранным, либо для указанного множества юношей не выполнено условие леммы Холла.

Задача 5. Все вершины графа G имеют степень 3. Известно, что вершины графа G можно покрасить в три цвета правильным образом. Докажите, что для любой вершины A эту покраску можно произвести так, чтобы соседи A не были одноцветными.

Указание. Попытайтесь рассматривать только два цвета, а про третий забыть.

15 июля 2012

Инверсия 4: Решение задач

Задача 1. При инверсии окружность S перешла в прямую l. Докажите, что центр окружности S перешел в точку, симметричную центру инверсии относительно прямой l.

Задача 2. Четыре окружности расположены так, что первая касается второй в точке A, вторая третьей — в точке B, третья четвёртой — в точке C, а четвёртая первой — в точке D. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

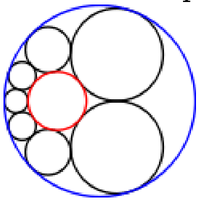
Задача 3. Никакие три из четырех точек A, B, C и D не лежат на одной прямой. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен углу между описанными окружностями треугольников ACD и BCD.

Задача 4. а) В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите множество точек их касания.
б) Для каждой пары окружностей из предыдущего пункта через точку их касания проводится общая касательная. Докажите, что все получившиеся прямые проходят через одну точку; укажите, где расположена эта точка.

Задача 5. Точки A, B и C лежат на одной прямой, не проходящей через точку M. Около треугольников ABM, ACM и BCM описаны окружности. Докажите, что их центры и точка M лежат на одной окружности.

Задача 6. а) Окружности S и T перпендикулярны прямой l и окружности ω. Нарисуйте образ этой картинки после инверсии с центром в точке N — точке пересечения l и ω.
б) Докажите, что для любых двух окружностей существует инверсия, которая переводит их либо на пару прямых, либо на две концентрические окружности.

Задача 7 (поризм Штейнера). Окружность w_1 лежит внутри окружности w_2. Предположим, что существует цепочка окружностей $S_1, S_2, \ldots, S_n$ таких, что каждая касается двух соседних (S_n касается S_1 и S_{n-1}), а также w_1 и w_2. Тогда для любой окружности T, касающейся w_1 и w_2, существует аналогичная цепочка из n окружностей.



Лемма Холла

Факт (Лемма Холла). Есть n юношей и несколько девушек. Тогда все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых тогда и только тогда, когда для любого k любые k юношей знают не менее k девушек.

Задача 1. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

Задача 2. Все вершины двудольного графа имеют степень d. Докажите, что в этом графе есть паросочетание такое, что любая вершина принадлежит ребру из паросочетания.

Задача 3. В каждой строке и в каждом столбце доски 20×20 стоят по три ладьи. Докажите, что можно выбрать 20 ладей, не бьющих друг друга.

Задача 4 (Лемма Холла для арабских стран). Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

Задача 5. Конечное множество разбито на m подмножеств с одинаковым количеством элементов, и это же множество разбито на m^2 подмножеств с одинаковым числом элементов. Докажите, что можно выбрать m^2 различных элементов так, что каждое из множеств первого разбиения содержит ровно m выбранных элементов, а каждое из множеств второго разбиения содержит ровно один выбранный элемент.

Многочлены 5: Делимость многочленов

Определение 1. *Наибольшим общим делителем* набора многочленов A_1, A_2, $\ldots A_n$ называется такой их общий делитель, который делится на любой другой их общий делитель.

Замечание. а) Наибольший общий делитель определен с точностью до умножения на константу. Иногда константу подбирают так, чтобы многочлен был *приведенным*, т.е. его старший коэффициент равнялся 1.
б) Для данного определения не очевидно существование такого многочлена. Мы докажем его двумя способами в следующих двух задачах.
в) Из данного определения следует, что наибольший общий делитель является делителем наибольшей степени.

Задача 1. Для данных многочленов $A_1, A_2, \ldots A_n$ обозначим через I множество многочленов представимых в виде $A_1X_1 + A_2X_2 + \cdots + A_nX_n$, где X_i — произвольные многочлены. Пусть D многочлен наименьшей степени в множестве I.
а) Докажите, что для любого M из I, $M \,\vdots\, D$.
б) Докажите, что D является наибольшим общим делителем в смысле определения 1.

Определение 2. *Алгоритмом Евклида* для многочленов A и B называется последовательность делений с остатком:

$$\begin{aligned}
&A = BQ_1 + R_1,\\
&B = R_1Q_2 + R_2;\\
&\ldots\\
&R_{n-2} = R_{n-1}Q_n + R_n;\\
&R_{n-1} = R_nQ_{n+1}.
\end{aligned}$$

Последний ненулевой остаток R_n называется *результатом работы алгоритма Евклида.*

Задача 2. а) Докажите, что R_n делится на любой общий делитель D многочленов A и B.
Указание. Докажите, что любой R_i делится на D.
б) Докажите, что многочлены A и B делятся на R_n.
Указание. Докажите, что любой R_i делится на R_n.

Упражнение 1. Найдите НОД многочленов x^4+2x^3-x-2 и x^2+5x+6.

Определение 3. Многочлен P называется неприводимым, если он не представляется в виде произведения двух многочленов меньшей степени.

Факт (Основная теорема арифметики). Каждый многочлен раскладывается на неприводимые множители. Такое разложение единственно с точностью до умножения на константы и перестановок сомножителей.

Замечание. Неприводимость многочлена зависит от того многочлены с какими коэффициентами мы рассматриваем (комплексными, действительными, рациональными). Например, многочлен x^2+1 неприводим как многочлен с действительными коэффициентами, но как многочлен с комплексными коэффициентами разлагается на множители $(x+i)(x-i)$.

Задача 3. Докажите, что если многочлен A делится на многочлен B, то все корни многочлена B являются корнями многочлена A. Верно ли обратное утверждение?

Задача 4. Найдите НОД: а) $x^{2011}+1$ и x^2+2x+1; б) $x^{2013}+1$ и x^2-x+1.

Определение 4. Для любых многочленов A_1, $\dots A_n$ *линейным представлением НОД* называется нахождение многочленов $X_1, \dots, X_n$ таких, что

$$\text{НОД}(A_1, \dots, A_n) = A_1X_1 + \dots + A_nX_n.$$

Задача 5. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами взаимно просты. Докажите, что найдется число M такое, что для любого целого n $\text{НОД}(P(n), Q(n)) < M$.

Задача 6. Могут ли два многочлена с рациональными коэффициентами, не имеющие общих делителей с рациональными коэффициентами, иметь общий иррациональный корень?

Задача 7. Найдите НОД x^n-1 и x^m-1.

Задача 8. а) Докажите, что многочлен x^n+2 не представим в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами. б) Докажите, что этот многочлен неприводим как многочлен с рациональными коэффициентами.

17 июля 2012

Комплексные числа 2: Тригонометрическая форма

Задача 1. Докажите, что если число z имеет модуль r и аргумент ϕ, то $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Такая форма записи называется *тригонометрической формой записи комплексного числа.*

Упражнение 1. Представьте в тригонометрической форме: а) $1+i$; б) $\sqrt{3}+i$.

Задача 2. а) Докажите, что при перемножении комплексных чисел аргументы складываются, а модули перемножаются.
б) Пусть $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Найдите тригонометрическую форму числа z^{-1}.
в) (формула Муавра) Докажите, что $z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$.

Упражнение 2. Вычислите а) $(1+i)^{2012}$; б) $(\sqrt{3}+i)^{2013}$.

Упражнение 3. Найдите все z такие, что $z^6 = 1$. Нарисуйте их на плоскости.

Определение 1. Решение уравнения $z^n = a$ называется *корнем степени n* из a.

Задача 3. Докажите, что существует ровно n корней: а) из единицы; б) из произвольного комплексного числа a. Как они расположены на комплексной плоскости?

Задача 4. Решите уравнение $z^3 = \bar{z}$.

Задача 5. Докажите, что угол Z_1 треугольника $Z_1Z_2Z_3$ равен аргументу простого отношения $\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$, а отношение боковых сторон — модулю этого простого отношения.
Указание. Решите сначала для случая когда Z_1 лежит в начале координат.

Задача 6. Докажите, что четыре точки Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 лежат на одной окружности или одной прямой тогда и только тогда, когда их *двойное отношение*

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

вещественно.

Задача 7. Найдите сумму всех корней n-й степени из единицы.

Задача 8. Найдите сумму: а) $\cos\phi + \cos 2\phi + \ldots + \cos 2012\phi$;
б) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 + \ldots$.

19 июля 2012

Рекурренты в комбинаторике

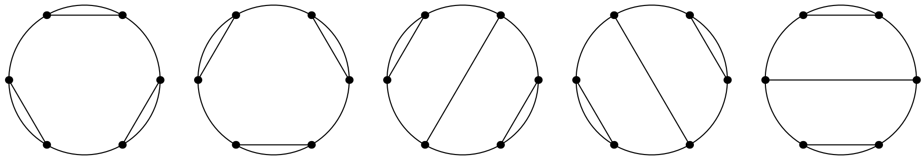
Задача 1. Обозначим через a_n количество способов покрасить клетки прямоугольника $1\times n$ так, чтобы не было закрашено двух подряд идущих клеток. Найдите a_7.

Задача 2. Обозначим через a_n количество способов покрасить клетки прямоугольника $1\times n$ так, чтобы не было закрашено трех подряд идущих клеток. Найдите a_7.

Задача 3. Каким числом способов можно покрасить клетки прямоугольника 2×7 так, чтобы не было полностью закрашенных квадратов 2×2?

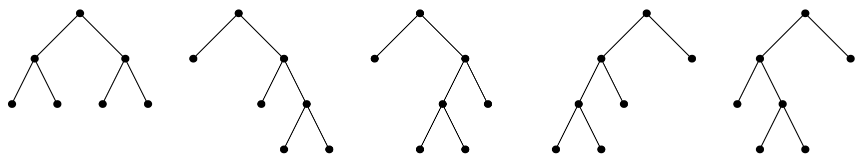
Задача 4. В вершине правильного треугольника сидит лягушка. Каждым ходом она перемещается в соседнюю вершину. Обозначим через a_n количество способов которыми она может вернуться в исходную вершину через n ходов. Найдите a_{10}. Найдите рекуррентное соотношение на a_n.

Задача 5. Обозначим через c_n количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (из любой точки выходит одна хорда). Например $c_3 = 5$:



Найдите рекуррентное соотношение на c_n.

Задача 6. Обозначим через c_n количество *плоских корневых строго двоичных деревьев* (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного [и тогда это по определению лист]) с $n+1$ листьями. Например $c_3 = 5$:



Найдите рекуррентное соотношение на c_n.

19 июля 2012

Аффинная геометрия 1

Определение 1. Преобразование плоскости f называется *аффинным*, если оно переводит равные вектора в равные, и линейно на множестве свободных векторов т.е.

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}), \quad f(k\vec{a}) = kf(\vec{a})$$

Замечание. а) В определении подразумевается, что преобразование плоскости является биекцией.

б) Для описания аффинного преобразования удобно выбрать произвольную точку O и базис $\vec{a}, \vec{b}$ и указать их образы $O', \vec{a}', \vec{b}'$. Координаты любой точки в системе $O\vec{a}\vec{b}$ совпадают с координатами образа этой точки в системе $O'\vec{a}'\vec{b}'$, т.е. если $\overrightarrow{OC} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то $\overrightarrow{O'C'} = x\vec{a}' + y\vec{b}'$.

Свойства аффинных преобразований:

- Преобразование обратное к аффинному, также является аффинным.
- Прямые переходят в прямые.
- Параллельные прямые переходят в параллельные прямые; пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся прямые.
- Сохраняются отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой или параллельных прямых (в частности, середина отрезка переходит в середину отрезка).
- Для любых треугольников ABC и $A'B'C'$, найдется единственное аффинное преобразование, переводящее один треугольник в другой так, что A переходит в A', B — в B', а C — в C' (т.е. треугольник аффинно эквивалентен любому другому, например, правильному).

Задача 1. Докажите, что:
а) любой параллелограмм аффинно эквивалентен квадрату;
б) любая трапеция аффинно эквивалентна некоторой равнобедренной трапеции (но не всем равнобедренным трапециям);
в) любые два четырехугольника аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда точка пересечения диагоналей делит диагонали в соответственно равных отношениях.

Задача 2. Докажите, что в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.

Задача 3. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.

Задача 4. Дан параллелограмм $ABCD$. Произвольная прямая пересекает лучи AB, AC и AD соответственно в точках P, Q и R. Докажите, что

$$\frac{AB}{AP} + \frac{AD}{AR} = \frac{AC}{AQ}.$$

Задача 5. а) Отрезок AB параллелен прямой l . При помощи одной линейки разделить отрезок AB пополам.
б) Докажите, что одной только линейкой нельзя построить правильный треугольник. Можно ли построить биссектрису?

Задача 6. На сторонах AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Пусть b, c и d — прямые, проходящие через B, C и D параллельно прямым A_1B_1, A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Докажите, что прямые b, c и d проходят через одну точку.

20 июля 2012

Линейные рекурренты

Определение 1. *Линейной рекуррентной* называется всякая числовая последовательность $x_0, x_1, \dots x_n, \dots$, задаваемая линейным рекуррентным соотношением:

$$x_n = a_{k-1}x_{n-1} + a_{k-2}x_{n-2} + \dots + a_0x_{n-k}. \tag{2}$$

Многочлен:

$$x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \dots - a_1x - a_0.$$

называется *характеристическим многочленом* линейной рекурренты.

Факт. Предположим, что $q_1, q_2, \dots, q_k$ различные корни характеристического многочлена. Тогда все решения рекуррентного уравнения можно представить в виде:

$$x_n = C_1q_1^n + \dots C_kq_k^n,$$

где C_i некоторые константы, которые определяются по начальным условиям.

Пример. Рассмотрим линейную рекурренту $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$. Корнями характеристического уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ являются 2 и 3. Любое решение рекуррентного уравнения имеет вид $x_k = C_12^k + C_23^k$.

Упражнение 1. Последовательность x_n задается рекуррентным уравнением $x_{n+1} = 2x_n + 8x_{n-1}$, $a_0 = 1, a_1 = 0$. Найдите формулу общего члена.

Задача 1. Последовательность a_n определена формулой $a_n = (5+\sqrt{17})^n + (5-\sqrt{17})^n$. а) Найдите рекуррентное соотношение на a_n. б) Докажите, что a_n делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}.

Задача 2. Последовательность x_n задается рекуррентным уравнением $x_{n+1} = (2\cos\phi)x_n - x_{n-1}$ где ϕ некоторый угол. а) Найдите общий вид решения. б) Найдите формулу общего члена при $x_0 = 1, x_1 = \cos\phi$ и при $x_0 = 0, x_1 = \sin\phi$.

Задача 3. а) Докажите, что геометрическая прогрессия $x_n = cq^n$ является решением рекурренты (2) тогда и только тогда, когда q является корнем характеристического многочлена.
б) Докажите, утверждение Факта для линейных рекуррент второго порядка.

Задача 4. Последовательность $a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$. Найдутся ли 5 ее последовательных членов которые делятся на 401?

20 июля 2012

Комплексные числа 3: Геометрические преобразования

Задача 1. Нарисуйте на плоскости множество точек вида $\dfrac{c+i}{c-i}$, где c — действительное число.

Задача 2. а) Если комплексное число a имеет модуль 1, то отображение умножения на a, $z \mapsto az$, является поворотом.
б) Задайте в комплексных координатах параллельный перенос. Задайте симметрию относительно оси проходящей через начало координат.

Определение 1. Композиция поворота и гомотетии с одним центром называется *поворотной гомотетией.*

Задача 3. а) Преобразование плоскости вида $z \mapsto az$, для произвольного a является поворотной гомотетией с центром в нуле.
б) Преобразование плоскости вида $z \mapsto az + b$, при $a \neq 0$ является поворотной гомотетией. Как найти ее центр?

Задача 4. Докажите, что композиция поворотных гомотетий — поворотная гомотетия или параллельный перенос.

Задача 5. Преобразование $z \mapsto R^2/\bar{z}$ является инверсией комплексной плоскости относительно окружности радиуса R с центром в начале координат.

Определение 2. Преобразование $z \mapsto 1/z$ будем называть *преобразование обращения.*

Задача 6. Докажите, что преобразование обращения переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности.

Определение 3. Биективное преобразование расширенной комплексной плоскости вида $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ называется *дробно-линейным* преобразованием.

Задача 7. Докажите, что преобразование плоскости вида $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ является иньекцией тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$ (т. е. многочлены $az + b$ и $cz + d$ нельзя сократить)

Задача 8. а) Дробно-линейные преобразования суть композиции движений, гомотетий и преобразований обращения.
б) Дробно-линейные преобразования переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности (используйте предыдущую задачу).
в) Композиция любого числа движений, гомотетий и инверсий есть либо дробно-линейное преобразование, либо сопряженное к нему.

Задача 9. Докажите, что дробно-линейные преобразования переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности, используя уравнение обобщенной окружности $Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0$, где A, D — вещественные, $C = \bar{B}$.

Задача 10. Докажите, что дробно-линейные преобразования сохраняют двойное отношение.

16 июля 2012

Многочлены 6: Основная теорема алгебры

Факт (Основная теорема алгебры). Всякий отличный от константы многочлен $P(x)$ с комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один корень среди комплексных чисел.

Следствие. а) Все многочлены неприводимые как многочлены с комплексными коэффициентами являются линейными.
б) Всякий многочлен $P(x)$ степени n единственным образом представляется в виде:

$$P(x) = a(x - x_1)^{n_1} \dots (x - x_k)^{n_k}. \tag{3}$$

Где $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$, а x_i — комплексные числа.

Упражнение 1. Докажите следующие свойства комплексного сопряжения а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; б) $\overline{z_1 z_1} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Задача 1. а) Пусть многочлен $P(x)$ имеет действительными коэффициенты. Докажите, что $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.
б) Многочлен $P(x)$ имеет действительными коэффициенты. Докажите, что если $P(z) = 0$, то $P(\overline{z}) = 0$.

Задача 2. а) Докажите, что многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами всегда имеет действительный корень.
б) Докажите, что все неприводимые многочлены с действительными коэффициентами имеют степень не выше двух. Напишите соответствующий аналог формулы (3).

Задача 3. Найдите НОД многочленов $x^n - 1$ и $x^m - 1$.
Указание: найдите общие корни этих многочленов, изобразите их на комплексной плоскости

Задача 4. Докажите, что многочлен $P(z)$ представляет собой чётную функцию от $z \in \mathbf{C}$ тогда и только тогда, когда существует многочлен $Q(z)$, такой что $P(z) = Q(-z)Q(z)$.

Задача 5. Найдите все ненулевые многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству
$$P(x^2) = (P(x))^2.$$

Задача 6. Существует ли многочлен $P(x)$, степени 1000 такой, что $P(x^2+x+1)$ делится на $P(x)$.

Задача 7. Многочлен с действительными коэффициентами принимает неотрицательные значения во всех действительных точках тогда и только тогда, когда он представим в виде суммы квадратов двух других многочленов с действительными коэффициентами.
Указание: разложите многочлен на неприводимые множители

19 июля 2012

Аффинная геометрия 2: Площади

Задача 1. а) Даны два треугольника T_1 и T_2, имеющие две пары параллельных сторон. Докажите, отношение площадей треугольников T_1 и T_2 равно отношению площадей их образов при аффинном преобразовании.
б) Даны два треугольника T_1 и T_2, имеющие пару параллельных сторон. Докажите, что существует треугольник T_3 такой, что у T_1 и T_3 есть две пары параллельных сторон, и у треугольников T_2 и T_3 есть две пары параллельных сторон. Докажите, что отношение площадей треугольников T_1 и T_2 равно отношению площадей их образов при аффинном преобразовании.
в) Докажите, что для любых двух треугольников T_1 и T_2 отношение их площадей равно отношению площадей их образов при аффинном преобразовании.

Задача 2 (Отношение площадей). Докажите, что для произвольных (выпуклых) многоугольников отношение площадей сохраняется при аффинном преобразовании.

Задача 3. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC даны точки M, N, P соответственно. Докажите, что если точки M_1, N_1, P_1 симметричны точкам M, N, P относительно середин соответствующих сторон, то $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.

Задача 4. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC даны точки M, N, P соответственно. Докажите, что если точки M_1, N_1, P_1 — такие точки сторон AC, AB, BC, что $MM_1 \parallel BC$, $NN_1 \parallel CA$, $PP_1 \parallel AB$, то $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.

Еще задачи

Задача 5. а) Докажите, что с помощью аффинного преобразования можно выпуклый четырехугольник перевести в четырехугольник, два противоположных угла которого прямые.

Указание: используйте задачу 1в из листика Аффинные преобразования 1

б) Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, E и F — точки пересечения продолжений противоположных сторон. Докажите, что середины диагоналей AC и BD и середина EF лежат на одной прямой.

Задача 6. Докажите, что центр масс системы материальных точек переходит при аффинном преобразовании в центр масс образов этих точек.

22 июля 2012

Рекурренты 3

Упражнение 1. Продолжите последовательность

а) 0, 1, 3, 6, 9, 9, ...

б) 1, 1, -1, -11, -49, -179

Указание: линейная рекуррента второго порядка

Задача 1 (ММО 1963). Последовательность $\{x_m\}$ задана условиями

$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{x_{n-2}}.$$

Доказать, что все члены этой последовательности целые числа.

Задача 2. Последовательность $\{a_m\}$ задана условиями

$$a_1 = 1/2, a_2 = 1/3, a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}}{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}.$$

Найдите формулу n-го члена.

Задача 3. Докажите, что уравнение $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

Разнобой

Задача 4 (Теорема Виета). а) Пусть многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три корня x_1, x_2 и x_3. Докажите, что справедливы *формулы Виета*:

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad c = -x_1x_2x_3.$$

Напишите подобные формулы для неприведеного кубического многочлена.
б) Напишите подобные формулы, выражающие коэффициенты многочлена n–ой степени.

Задача 5. Найдите сумму всех корней n-й степени из единицы.

Задача 6. Докажите неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2}$$

Материалы послеобеденных кружков

9 июля 2012

Числа в компьютере

В компьютере все числа хранятся в некоторой двоичной записи. Под число мы будем отводить 32 бита, т.е. 32 ячейки, в каждой бите стоит либо 0, либо 1.

Определение 1. Дополнительный код — способ представления отрицательных целых чисел в компьютерах.

Дополнительный код — это используемый в современных компьютерах способ кодирования целых чисел, при котором неотрицательное число X представляется «как есть», а отрицательное число x представляется как число $\overline{|x|-1}$. Т.е. первый бит в числе означает знак этого числа. Если 1, то число отрицательное, если 0, то положительное.

Упражнение 1. Заполните до конца Таблицу 1 в полях «логические операции с инверсией второго аргумента».

Задача 1. Запишите число -1 в дополнительном коде.

Задача 2. Как с помощью ровно одной операции из Таблицы 1 реализовать функцию, которая по числу x возвращает -1, если $x < 0$ и 0, если $x \geq 0$.*Для этого вам потребуется вспомнить о том, что ячеек в которых хранится число конечное количество.*

Задача 3. Придумайте, как получать $\min(x, y)$ с помощью функций из Таблицы 1.

Задача 4. Докажите, что $x\&(x-1) == 0$ тогда и только тогда, когда $x = 2^k$

Задача 5. Придумайте, как за две операции из Таблиц 1 и 2 определить, принадлежит ли число x отрезку $[10, 13]$.

Задача 6. Известно, что x степень двойки. Как за одну операцию из Таблицы 1 определить, что принадлежит ли x множеству чисел $\{1, 2, 256\}$? *Указание: обратите внимание на запись степени двойки в дополнительном коде и логические операции.*

Задача 7. Придумайте, как с помощью четырёх операций из Таблиц 1 и 2 определить, принадлежит ли число x множеству $\{2, 8, 16, 32, 128\}$.

Если у вас есть функция A и функция B, возвращающие 0 или 1, и вы хотите построить функцию C, которая принимает значение 1 тогда и только тогда, когда и A и B принимает значение 1, то можно записывать так $C = A\&\&B$.

11 июля 2012

Пифагоровы тройки и уравнение окружности

Определение 1. Будем называть точку на плоскости *рациональной*, если она имеет рациональные координаты.

Задача 1. а) Прямая, проходящая через две рациональные точки, задается уравнением с рациональными коэффициентами. Такие прямые мы будем называть *рациональными.*
б) Докажите, что точка пересечения двух рациональных прямых — рациональная.

Задача 2. а) Приведите пример рациональной прямой, которая пересекает окружность $x^2+y^2=1$ в двух не рациональных точках. Приведите пример прямой, которая пересекает ее в двух рациональных точках.
б) Докажите, что если одна точка пересечения рациональной прямой с окружностью $x^2+y^2=1$ рациональная, то и другая тоже рациональна.

Задача 3 (Пифагоровы тройки). Найдите тройки целых чисел a, b, c такие, что $a^2+b^2=c^2$.
План решения задачи про Пифагоровы тройки.

1. Если у каких-то двух чисел из a, b, c есть общий делитель, то он есть и у третьего. Поделим набор a, b, c на общий делитель и будет искать несократимые решения.

2. Делим уравнение на c^2, получается уравнение в рациональных числах $x^2+y^2=1$, где $x=\frac{a}{c}, y=\frac{b}{c}$. Задача свелась к поиску рациональных точек на окружности.

3. Подбираем одну точку на этой окружности — скажем $(0,1)$.

4. Проводим через эту точку произвольную рациональную прямую $y=kx+1$. Ее другая точка пересечения имеет координаты
$$(x,y)=(\frac{2k}{k^2+1},\frac{k^2-1}{k^2+1}).$$
Таким образом описаны все рациональные точки на окружности. (исходная точка $(0,1)$ формально соответствует $k=\infty$).

5. Представляем k в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$. Тогда a, b, c находятся $a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$ для m, n разной четности и $a=(m^2-n^2)/2, b=mn, c=(m^2+n^2)/2$ для m, n — нечетных.

Задача 4. Найдите тройки квадратов чисел которые образуют арифметическую прогрессию.

Замечание. Аналогичным способом можно решать любые диофантовые уравнения второй степени от трех переменных. План решения следующий:
а) Свести уравнение к уравнению в рациональных числах. Геометрически это задача нахождения рациональных точек на кривой.
б) Найти одну рациональную точку на получившейся кривой.
в) Провести через полученную рациональную точку прямую с произвольным рациональным угловым коэффициентом k. Найти вторую точку пересечения этой прямой и кривой.
г) Представить k в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$ и перейти к целочисленным решениям.

Задача 5. Сколько существует пар остатков (x, y) по простому нечетному модулю p таких, что $x^2 + y^2 \equiv 1 (\bmod p)$.
Ответ: при p вида $4k+1$ решений $p-1$, при p вида $4k+3$ решений $p+1$.

Решение: Легко проверить, что полученные для описания Пифагоровых троек формулы $(\dfrac{2k}{k^2+1}, \dfrac{k^2-1}{k^2+1})$, где k — остаток по модулю p дают решения сравнения $x^2 + y^2 \equiv 1 (\bmod p)$. Вместе с точкой $((0,1))$ (соответствующей $k = \infty$) это дает $p+1$ решений при p вида $4k+3$. Для p вида $4k+1$ решений меньше, так как есть два остатка k таких, что $k^2 \equiv -1 (\bmod p)$.

То, что нет других решений доказывается также, как и в задаче пифагоровы тройки, через проведение формальных прямых через точку $(0, 1)$.

16 июля 2012

Алгебраические методы в геометрии

Определение 1. Кривой второго порядка называется множество точек на плоскости, задаваемых уравнением вида:

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + b_1x + b_2y + c = 0.$$

Факт. Если кривая второго порядка имеет с окружностью 5 общих точек, то она совпадает с этой окружностью.

Задача 1. Прямую, проходящую через точки A, B будем обозначать через l_{AB}. Пусть точки A, B, C, D принадлежат окружности ω, задаваемой уравнением $f = 0$. Тогда существуют числа α и β такие, что

$$f = \alpha l_{AB} l_{CD} - \beta l_{AC} l_{BD}.$$

Задача 2. Дана окружность ω и точка O вне неё. Через O проводится три секущие l_1, l_2, l_3. Прямая l_1 пересекает ω в токах A_1, A_2, прямая l_2 пересекает ω в токах A_3, A_4, прямая l_3 в точках A_5, A_6. Докажите, что точки пересечения пар прямых A_1A_4 и A_2A_3, A_1A_6 и A_2A_5, A_3A_6 и A_4A_5 лежат на одной прямой.

Задача 3 (Теорема о бабочке). Пусть хорды KL и MN проходят через O середину хорды AB. Тогда прямые KN и ML пересекают прямую AB в точках равноудаленных от O.

Задача 4. Даны две прямые $l_1 = A_1x + B_1y$ и $l_2 = A_2x + B_2y$, причём $A_1^2+B_1^2 = A_2^2+B_2^2 = 1$. Доказать, что прямая $l = (l_1+l_2)/2$ — биссектриса исходных прямых.

Задача 5. Дан четырехугольник. В одной паре его противоположных углов провели внешние биссектрисы, получили точку их пересечения. Потом в другой паре получили вторую точку. Потом противоположные стороны продлили до пересечения, получили два угла. По ним аналогично построили третью точку. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

21 июля 2012

Построения одним циркулем

В этом листике все построения требуется проводить одним циркулем. Прямая считается заданной, если заданы две ее точки.

Простые построения

Задача 1. Дан отрезок AB. Постройте точку C так, чтобы точка B была бы серединой отрезка AC.

Задача 2. Дан отрезок AB. Постройте отрезок $n \cdot AB$.

Задача 3. Даны точки A, B и C. Постройте точку C', симметричную точке C относительно прямой AB.

Образы точки при инверсии и применения

Задача 4. Дана окружность S с центром O и точка A вне ее. Постройте образ точки A при инверсии относительно S.

Задача 5. Дана окружность S с центром O и точка A внутри окружности S. Постройте образ точки A при инверсии относительно S.

Указание: постройте сначала точку A' такую, что $OA' = nOA$ и точка A' лежит вне окружности S

Задача 6. Разделите отрезок на n равных частей.

Задача 7. Из данной точки опустите перпендикуляр на прямую, заданную двумя точками.

Образы линий при инверсии

Задача 8. Дана окружность S с центром O и прямая, заданная точками A и B. Постройте образ прямой AB при инверсии относительно окружности S.

Задача 9. Даны точки A, B и C. Постройте окружность, описанную около треугольника ABC.

Задача 10. Постройте образ окружности при инверсии.

Теорема Мора–Маскерони

Задача 11. Найдите точки пересечения данной окружности и прямой, заданной двумя точками.

Задача 12. Найти точку пересечения двух прямых, каждая из которых задана парой точек.

Задача 13 (Теорема Мора–Маскерони). Любое построение на плоскости, выполнимое с помощью циркуля и линейки, выполнимо с помощью одного лишь циркуля.

22 июля 2012

Лемма Гаусса и неприводимые многочлены

Определение 1. *Содержанием* $c(f)$ многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами называется наибольший общий делитель всех его коэффициентов.

Задача 1. а) Докажите, что если $c(f) = c(g) = 1$, то $c(fg) = 1$.
б) Докажите, что $c(fg) = c(f)c(g)$.
в) **Лемма Гаусса**. Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами раскладывается на нетривиальные множители с рациональными коэффициентами, то он раскладывается на нетривиальные множители и с целыми коэффициентами.

Задача 2. Докажите, что если p/q — несократимая дробь, являющаяся корнем полинома $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами, то $qm - p$ делит $f(m)$ для любого целого m.

Задача 3 (Критерий Эйзенштейна). Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$, причем для некоторого простого p коэффициент a_n не делится на p, коэффициенты $a_0, \dots, a_{n-1}$ делятся на p, но коэффициент a_0 не делится на p^2. Тогда f неприводим над $\mathbb{Z}$.

Задача 4. Докажите, что многочлен $3x^{100} - 6x^{50} + 5$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

Задача 5. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + \dots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда p — простое число.

Материалы соревнований

3 июля 2012

Вступительный тест

Задача 1. Преобразуйте а) $\sin(x-y)$; б) $\cos x \cos y + \sin x \sin y$.

Задача 2. а) Напишите *общее* уравнение прямой на плоскости.
б) Напишите уравнение прямой проходящей через точки $(-2, 3)$ и $(4, 5)$.

Задача 3. Какие из следующих прямых параллельны или совпадают
а) $2x-3y=1$, б) $3x-2y=4$, в) $y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}$, г) $y=5x-2$, д) $6x-9y=3$?

Задача 4. Напишите формулу для скалярного произведения двух векторов с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Задача 5. а) Что такое базис векторов на плоскости? б) Разложите вектор $(4, 5)$ по базису $\vec{e_1}=(1, 2)$, $\vec{e_2}=(-3, 4)$.

Задача 6. Найдите площадь треугольника с координатами вершин $(0, 0)$, (a, b), (c, d), где $a > c > 0$, $d > b > 0$.

Задача 7. Какое множество в трехмерном пространстве задается уравнением $x+y+z=1$.

Задача 8. Разделите многочлен x^4+5x+1 на многочлен x^2+1 с остатком.

Задача 9. Сформулируйте теорему Безу.

Задача 10. При каких a многочлен $x^{10}-ax^8+1$ делится на $x-2$?

Задача 11. Найдите НОД$(923, 1157)$.

Задача 12. Найдите линейное представление НОД для чисел 7 и 5.

Задача 13. Что означает записать $a \equiv b \pmod m$ (Или запись $a \equiv_m b$)

Задача 14. Дана окружность ω центром O и радиусом 2. На луче OB отмечено две точки A и C, расстояние от которых до O равны 1 и 3. Найдите расстояние между этими точками после инверсии относительно окружности ω.

Задача 15. Чему равно $\overline{5+7i}$?

Задача 16. Найдите все корни уравнения $x^6-1=0$.

Задача 17. Найдите предел последовательности $x_n=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$.

4 июля 2012

Вступительная олимпиада

Задача 1. Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

Задача 2. Даны 10 действительных чисел. Известно, что любое из них меньше, чем сумма всех чисел, делённая на 9. Верно ли, что все эти числа положительные?

Задача 3. В ромбе $ABCD$ на отрезках AC и BC выбраны точки M и N соответственно, так, что $NM = MD$. ($N \neq B, C$). Прямая DN пересекает отрезок AC в точке P, а прямая DM пересекает отрезок AB в точке R. Докажите, что $RP = PD$.

Задача 4. Есть три целых числа a, b, c. Известно, что $a^2+b^2+c^2$ делится на $a+b+c$. Доказать, что кубы каких-то двух из них дают одинаковый остаток при делении на $a+b+c$.

Задача 5. В 17 ячейках записаны натуральные числа от 1 до 17, но неизвестно, какие где. Про любой набор ячеек можно узнать, является ли среднее арифметическое чисел в нем целым. Про какие числа можно узнать, в каких ячейках они находятся?

7 июля 2012

Матбой (вариант B)

Задача 1. Сколькими способами число $\frac{38}{37}$ можно представить в виде произведения двух чисел вида $\frac{k+1}{k}$, где k — натуральное число?

Задача 2. MN — средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Ортоцентр треугольника ABC совпадает с точкой пересечения медиан треугольника AMN. Найдите угол ABC.

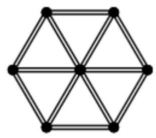
Задача 3. Рассмотрим множество из 20 целых чисел $\{\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_{10}\}$. Докажите, что из этого множества можно выбрать непустое подмножество S такое, что никакие два числа $\pm a_i$ не могут оба лежать в S, и сумма всех чисел из S делится на 1001.

Задача 4. Из любых шести точек на плоскости (из которых никакие три не лежат на одной прямой) можно так выбрать три, что треугольник с вершинами в этих точках имеет хотя бы один угол, не больший 30^o. Доказать.

Задача 5. Для положительных чисел x, y известно, что $y^3 + y \leq x - x^3$. Докажите, что $x^2 + y^2 \leq 1$

Задача 6. Пусть M, N, P — произвольные точки на сторонах BC, CA, AB соответственно остроугольного треугольника ABC. Докажите, что выполнено хотя бы одно из неравенств $NP \geq BC/2$, $PM \geq CA/2$, $MN \geq AB/2$.

Задача 7. В системе коридоров, показанной на рисунке, расстояние между каждыми двумя соседними развилками одно и то же. По коридорам бегает мышка, способная развивать скорость до 7 м/с. За мышкой согласованно охотятся две кошки, могущие развивать скорость до v м/с. Все животные в каждый момент знают место расположения друг друга. При каком наименьшем значении v кошки могут (независимо от начальных положений) гарантированно поймать мышку?



Задача 8. Пусть многочлены $P(x), R(x), Q(x)$ и $S(x)$ удовлетворяют тождеству:

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x),$$

для любого x. Докажите, что $P(x)$ делится на $x - 1$.

7 июля 2012

Матбой (вариант C)

Задача 1. Сколькими способами число $\frac{38}{37}$ можно представить в виде произведения двух чисел вида $\frac{k+1}{k}$, где k — натуральное число?

Задача 2. MN — средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Ортоцентр треугольника ABC совпадает с точкой пересечения медиан треугольника AMN. Найдите угол ABC.

Задача 3. Из множества A, состоящего из n элементов выбрали $n + 1$ трёхэлементное подмножество. Докажите, что какие-то два подмножества имеют ровно один общий элемент.

Задача 4. Из любых шести точек на плоскости (из которых никакие три не лежат на одной прямой) можно так выбрать три, что треугольник с вершинами в этих точках имеет хотя бы один угол, не больший 30^o. Доказать.

Задача 5. Даны десять подряд натуральных чисел. У каждого взяли наибольший собственный делитель и образовали новые десять чисел. Докажите, что найдутся два, оканчивающиеся на одну и ту же цифру.

Задача 6. Пусть M, N, P — произвольные точки на сторонах BC, CA, AB соответственно остроугольного треугольника ABC. Докажите, что выполнено хотя бы одно из неравенств $NP \geq BC/2$, $PM \geq CA/2$, $MN \geq AB/2$.

Задача 7. В одной из вершин проволочного куба сидит муха, а в противоположной сидят два паука. Смогут ли пауки поймать муху, если насекомые могут передвигаться только по ребрам, и максимальные скорости пауков и мухи равны.

Задача 8. Пусть многочлены $P(x), R(x), Q(x)$ и $S(x)$ удовлетворяют тождеству:

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) \equiv (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x).$$

Докажите, что $P(x)$ делится на $x - 1$.

17 июля 2012

Математический бой обычных групп 8–9

Задача 1. В некотором обществе любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно два общих знакомых. Доказать, что все члены общества имеют одинаковое количество знакомых.

Задача 2. В угловой клетке шахматной доски 100×100 стоит фишка. За один ход разрешается передвинуть ее на соседнюю клетку по горизонтали, вертикали или диагонали так, чтобы при этом расстояние от центра начальной клетки до центра той, в которой находится фишка, постоянно увеличивалось. Какое наибольшее число ходов можно сделать, соблюдая это условие?

Задача 3. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O, а на отрезках OB и OC выбраны точки B_1 и C_1 для которых $\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90°$. Докажите, что $AB_1 = AC_1$.

Задача 4. Докажите, что из любого треугольника площади 4 можно вырезать осесимметричную фигуру площади больше 3.

Задача 5. Есть 720 спичек, разложенных в 100 кучек. Петя и Вася ходят по очереди. Каждым ходом выбирается кучка, делится на две меньшие части, и эти части сливаются с двумя из оставшихся кучек. Игрок победит, если после его хода во всех кучках станет поровну спичек. Если же после хода остались всего две кучки, и они не равны, игрок проиграл. Кто из них может выигрывать, как бы не играл соперник?

Задача 6. Найдите все простые p такие, что $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ является полным квадратом.

Задача 7. С квадратным трехчленом $ax^2 + bx + c$ разрешается производить такие операции:

- Заменить в нем x на $x - d$, где d произвольное вещественное число.
- Заменить его на трехчлен $cx^2 + (b + 2c)x + (a + b + c)$.

Можно ли с помощью таких операций из трехчлена $x^2 - 3x - 4$ получить трехчлен $x^2 - 2x - 5$?

Задача 8. Числа $a^2 - a$ и $a^4 - a$ целые. Докажите, что a — целое число.

17 июля 2012

Математический бой обычных групп 9–10

Задача 1. В турнире по шахматам принимают участие n игроков. На старте турнира все они находятся на первом уровне. Если в любой момент после старта турнира имеется два или более игрока одного уровня, не занятых в партиях, они некоторым образом разбиваются на пары и начинают играть друг с другом так, что остается не более одного участника каждого уровня. Продолжительность партии непостоянна. По завершении партии победитель увеличивает свой уровень на один, а проигравший уменьшает на один (если был на первом уровне, то ничего не меняет). Турнир заканчивается, когда все участники оказываются на разных уровнях. На каком уровне будет находиться победитель в конце турнира?

Задача 2. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, точка O – центр описанной окружности. Докажите, что неравенство $\angle AIO \leq 90^\circ$ равносильно тому, что $2BC \leq AC + AB$

Задача 3. На доске 8×8 расставлены чёрные и белые ладьи (оба цвета присутствуют) так, что ладьи разных цветов не бьют друг друга. Какое наибольшее количество ладей может стоять на границе доски?

Задача 4. На столе лежит треугольник со сторонами 1 метр, 1 метр и 1 сантиметр, в котором находится точечный шарик. Основание треугольника намазывают клеем изнутри, а шарик заставляют катиться по законам физики. Докажите, что до момента прилипания к основанию шарик преодолеет менее двух метров.

Задача 5. Докажите, что начиная с некоторого n, все делители числа $(n!)^n + 1$ будут больше, чем $n + 2012$.

Задача 6. Дан треугольник ABC. Окружность Ω проходит через точку A и касается прямой BC в точке L – основании биссектрисы AL, а также пересекает сторону AB в точке P. Отрезко CP вторично пересекает Ω в точке Q. Докажите, что прямая AQ делит отрезок CL пополам.

Задача 7. Дан граф, степени всех вершин которого равны 3. Докажите, что его рёбра можно раскрасить в два цвета так, чтобы не было нечётных одноцветных циклов.

Задача 8. Некоторые клетки доски $n \times n$ заражены инфекцией. Клетка заражается, если хотя бы две соседние по стороне клетки уже заражены. Какое минимальное количество клеток нужно заразить, чтобы в конце концов заразилась вся доска?

Задача 9. Докажите для положительных чисел x, y, u, v неравенство

$$\frac{xy + xv + uy + uv}{x + y + u + v} \geq \frac{xy}{x + y} + \frac{uv}{u + v}.$$

Задача 10. Последовательность a_n задана рекуррентным соотношением $a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3$. Известно, что $a_0 = 9$. Докажите, что в десятичной записи числа a_{10} присутствует хотя бы 1000 девяток.

12 июля 2012

Абака. Условия

Алгебра

Алгебра 10 Найдите все натуральные n, для которых первая цифра после запятой в числе $\sqrt[3]{n^3 + n}$ равна 1.

Алгебра 20 Найдите все значения параметра a, для каждого из которых график функции $y = x^2 + a|4x^2 - 8x + 3| - |2x^2 - 7x + 6|$ имеет хотя бы один прямолинейный участок.

Алгебра 30 Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = 2(x + y) + xy$.

Алгебра 40 Найдите значение выражения

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{50^2}{99 \cdot 101}.$$

Алгебра 50 Привидите пример многочлена от двух переменных x и y, который принимает все положительные значения, но нигде не обращается в 0.

Алгебра 60 Пусть a, b таковы, что $a^2 + b^2 + ab = a + b$. Найдите наибольшее возможное значение $a^2 + b^2$.

Геометрия

Геометрия 10 В окружность радиуса 1 вписан правильный четырнадцатиугольник. Найти сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин этого четырнадцатиугольника.

Геометрия 20 Внутри треугольника выбраны две точки, расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 1, 3 и 15, а от другой 4, 5 и 11 соответственно. Найдите радиус вписанной окружности треугольника.

Геометрия 30 Средняя линия равнобочной трапеции равна 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 7:13. Найдите высоту трапеции.

Геометрия 40 В окружности радиуса 1 дана хорда AB длины $\sqrt{3}$. Рассматриваются всевозможные хорды CD (все точки A, B, C, D – различные) такие, что $CA||BD$. Найти геометрическое место середин хорд CD.

Геометрия 50 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в середине стороны CD, а угол C равен $70°$. Найдите угол D.

Геометрия 60 В правильном треугольнике ABC точка O такова, что $\angle AOC = 113°$, $\angle BOC = 123°$. Найдите углы треугольника, сложенного из отрезков AO, BO и CO.

ТЧ

Теория чисел 10 При каком наибольшем n число $2007 + n^2$ — точный квадрат?

Теория чисел 20. Найдите все натуральные числа, которые в 33 раза больше суммы своих цифр.

Теория чисел 30. Назовем число интересным, если оно представимо в виде произведения двух (не обязательно различных) простых чисел. Каково наибольшее возможное количество последовательных интересных чисел?

Теория чисел 40. Пусть $k(n)$ — наибольший нечетный делитель n. Чему равна сумма $k(m + 1) + \cdots + k(2m)$?

Теория чисел 50. Найдите наименьшее натуральное число, у которого ровно 1000 натуральных делителей.

Теория чисел 60. Приведите пример бесконечной арифметической прогрессии, каждый член которой не является ни суммой, ни разностью двух простых чисел.

Комбинаторика

Комбинаторика 10 Квадрат 3×3 по линиям сетки режется на несколько (не менее двух) различных прямоугольников. Сколько различных наборов прямоугольников можно получить?

Комбинаторика 20 В центральной клетке таблицы 5×5 записана двойка, в восьми окружающих её клетках — нули, а в клетках по периметру таблицы — девятки. Сколькими способами можно прочитать в этой таблице число 2009, если разрешается за ход переходить из клетки в соседнюю по горизонтали, вертикали или диагонали?

Комбинаторика 30 Сколькими способами можно купить 10 открыток пяти сортов, чтобы каждого сорта было не более 8 открыток?

Комбинаторика 40 В графе 80 вершин, и все простые циклы — нечётны. Какое максимальное число рёбер у него может быть?

Комбинаторика 50 В однокруговом турнире участвовали $2n$ команд. После окончания турнира оказалось, что у каждой команды число ничьих равно числу побед. При каких n такое возможно?

Комбинаторика 60 Клетки таблицы 10×10 занумерованы числами от 1 до 100 так, что соседние номера стоят в соседних (по стороне) клетках. Какова наименьшая возможная сумма номеров на главной диагонали?

Конструкции

Конструкции 10 Разрезать квадрат со стороной 4 клетки, на прямоугольники сумма периметров которых равна 25.

Конструкции 20 Найти такие 50 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел.

Конструкции 30 Нарисуйте два пятиугольника так, чтобы у них были одни и те же вершины, но не было ни одной общей стороны.

Конструкции 40 Разбейте числа 1,2,...,2008 на две группы так, чтобы сумма одной была равна произведению другой.

Конструкции 50 Имеются плашки (вырезанные из картона прямоугольники) размера 2×1. На каждой плашке нарисована одна диагональ. Есть плашки двух сортов, так как диагональ можно расположить двумя способами, причем плашек каждого сорта имеется достаточно много. Сложите квадрата 8×8 из 32 плашек так, что концы диагоналей нигде не совпали?

Конструкции 60 Нарисуйте на плоскости 6 прямых, такие что для любых трех из них нашлась бы четвертая из этого же набора прямых, такая, что все четыре будут касаться некоторой окружности, но все шесть прямых одной окружности не касались.

Текстовые задачи

Текстовые задачи 10 Сереже на день рождения подарили 777 конфет. Он хочет съесть все конфеты за несколько дней, причем так, чтобы каждый день, начиная со второго, съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Какое наибольшее число дней Сережа может есть подаренные конфеты?

Текстовые задачи 20 Одновременно из деревень А и Б навстречу друг другу вышли Аня и Боря (их скорости постоянны, но не обязательно одинаковы). Если бы Аня вышла на 30 минут раньше, то они встретились бы на 2 километра ближе к деревне Б. Если бы Боря вышел на 30 минут раньше, то встреча состоялась бы ближе к деревне А. На сколько?

Текстовые задачи 30 Непоследовательный преподаватель взялся раздавать футболки школьникам. На раздачу пришли 20 человек. Преподаватель построил их по кругу, дал одному первую футболку, его соседу слева - вторую, затем одного человека пропустил, следующему дал футболку, пропустил двоих, следующему дал футболку и т.д., пока не раздал все 2012 футболок. Скольким желающим не досталось футболки?

Текстовые задачи 40 В n комнатах сидят n человек. На дверях первой написано: "Здесь сидит один человек на дверях второй: "Здесь сидит два человека . . . , на дверях n-ой: "Здесь сидит n человек". Известно, что ровно одна из этих надписей неверна. Чему может равняться n?

Текстовые задачи 50 У бедного мальчика Саши всего 159 монет, причем одна из них легкая фальшивая монета. У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берет с Саши плату: 1 рубль если одна из чашек перевесила и 2 рубля если весы остались в равновесии. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша чтобы заведомо определить фальшивую монету с помощью Костиных весов.

Текстовые задачи 60 За круглым столом сидит 210 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый из них заявил: "Среди моих 20 соседей (10 справа и 10 слева) - ровно 10 лжецов". Сколько всего лжецов за столом? Найдите все ответы.

Абака. Ответы

Алгебра 10 2 и 3
Алгебра 20 1/4, -1/4, -3/4
Алгебра 30 (0, 0); (0, 2); (2, 0); (2, 4); (4, 2); (4, 4).
Алгебра 40 $\frac{25\cdot51}{101)} = \frac{1275}{101}$
Алгебра 50 Например $x^2 + (1 - xy)^2$
Алгебра 60 1

Геометрия 10 28
Геометрия 20 7
Геометрия 30 4
Геометрия 40 окружность радиуса 1/2 с тем же центром без трех точек, которые будут серединами сторон равностороннего треугольника с основанием AB
Геометрия 50 70 и 110 (градусов)
Геометрия 60 63, 53, 64 (градусов)

Теория чисел 10 1003
Теория чисел 20. 594

Теория чисел 30. 3
Теория чисел 40. m^2
Теория чисел 50. $2^4 * 3^4 * 5^4 * 7 * 11 * 13$
Теория чисел 60.
Комбинаторика 10 3
Комбинаторика 20 88
Комбинаторика 30 976
Комбинаторика 40 138
Комбинаторика 50 не сравнимо с 1 mod 3
Комбинаторика 60 140

Конструкции 10 Разрезание должно быть не по линиям сетки
Конструкции 20
Конструкции 30 В ответе две точки внутри треугольника образованного остальными тремя
Конструкции 40 1, 1003, 2008 и остальные.
Конструкции 50
Конструкции 60 Пусть $ABB'A'$ — квадрат, O — точка пересечения его диагоналей, w и w' — вписанные окружности треугольников OAB и $OA'B'$, l_1 и l_2 — общие внешние касательные w и w'. Тогда требуемая шестерка прямых — это l_1, l_2, $l3 = AB$, $l_4 = A'B'$, $l_5 = AB'$, $l_6 = BA'$.

Текстовые задачи 10 37
Текстовые задачи 20 2км.
Текстовые задачи 30 8
Текстовые задачи 40 2 или 3.
Текстовые задачи 50 6 рублей.
Текстовые задачи 60 100 или 210

23 июля 2012

Заключительная олимпиада

Довывод

Задача 1. В стране фараонов одинаковыми монетами любого достоинства можно набрать сумму в один динар, причем для этого всегда нужно менее 40 монет. Барон Мюнхгаузен привез оттуда шесть монет разных достоинств и утверждает, что они как раз составляют сумму в один динар. Могут ли слова барона оказаться правдой?

Задача 2. Парабола на координатной плоскости называется *красивой*, если ее вершина и две точки пересечения с осью абсцисс образуют равносторонний треугольник. Докажите, что у всех квадратных трехчленов с красивыми графиками одинаковый дискриминант.

Задача 3. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что если $AI + AC = BC$, то $\angle BAC = 2\angle ABC$.

Задача 4. Какое наибольшее число коней можно расставить на шахматной доске 8×8, так чтобы каждый бил не более семи из остальных?

Задача 5. Существует ли бесконечная последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ такая, что $p_{k+1} = 2p_k \pm 1$?

Вывод

Задача 6. Иероглиф племени Мумбо-Юмбо состоит из 361 точки, расположенных в виде квадрата 18×18 и соединенных отрезками, являющимися сторонами клеток так, что получается дерево. Иероглиф племени Юмбо-Мумбо состоит из 400 точек, расположенных в узлах квадрата 19×19 и соединенных отрезками, являющимися сторонами клеток так, что получается дерево, причем на сторонах большого квадрата проведены все отрезки кроме одного. Чему равно отношение числа иероглифов в языке Юмбо-Мумбо к числу иероглифов в языке Мумбо-Юмбо?

Задача 7. Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Прямая AB пересекается с CD в точке E, F — точка пересечения диагоналей. Описанные окружности треугольников AFD и BFC пересекаются в точке H. Докажите, что $\angle EHF = 90°$.

Задача 8. Дано иррациональное число α такое, что $0 < \alpha < 1/2$. По нему определяется новое число α_1 как меньшее из двух чисел 2α и $1-2\alpha$. По этому числу аналогично определяется α_2, и так далее. Докажите, что для некоторого n выполнено неравенство $\alpha_n < 3/16$.