

Программа теоретического зачета.

Алгебра и теория чисел

- 1 Определение поля и числового поля. Описание наименьшего числового поля, содержащего $\sqrt{2}$; содержащего $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; содержащего $\sqrt[3]{2}$. Изоморфизм полей. Поле F_p . Отсутствие нетождественного автоморфизма \mathbb{R} .
- 2 Многочлены от нескольких переменных. Степень многочлена; степень произведения двух многочленов равна сумме их степеней. Ненулевой многочлен с действительными коэффициентами принимает ненулевое значение. Многочлен, обращающийся в нуль во всех точках прямой, делится на линейный многочлен, задающий эту прямую.
- 3 Симметрические многочлены. Теорема Виета. Формула Ньютона. Лексикографический порядок. Основная теорема о симметрических многочленах.
- 4 Алгебраические и целые алгебраические числа. Число, являющееся одновременно целым алгебраическим и рациональным, является целым. Сумма, разность, произведение целых алгебраических чисел является целым алгебраическим. Алгебраические числа образуют поле. *Корни многочленов с алгебраическими коэффициентами являются алгебраическими числами, корни унитарных многочленов с целыми алгебраическими коэффициентами являются целыми алгебраическими числами.*
- 5 Сравнения целых алгебраических чисел по модулю. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Задача про рекурренту.
- 6 Трансцендентные числа. Описание наименьшего числового поля, содержащего π . Несчетность множества трансцендентных чисел. *Теорема Лиувилля.*
- 7 Квадратичный закон взаимности и три его доказательства.
- 8 Показатели. Бесконечность множества простых чисел вида $2^n x + 1$ для фиксированного натурального n . Существование первообразного корня по простому модулю; *по модулю p^k , $2p^k$ (p — нечетное простое).*
- 9 Многочлены деления круга. $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$. Доказательство бесконечности множества простых чисел вида $nx + 1$ для фиксированного натурального n . *Неприводимость многочленов деления круга.*
- 10 Конечные поля. Доказательство того, что существует поле из n элементов $\Leftrightarrow n = p^k$. Количество первообразных корней в поле. *Конечные плоскости.*
- 11 Определение группы. Примеры. Подгруппы, левые классы смежности, порядок элемента, индекс подгруппы, теорема Лагранжа.
- 12 Алгебраические кривые. Переход из одной системы координат в другую. Эллипс, гипербола и парабола являются кривыми второго порядка. *Алгебраическое доказательство теоремы о бабочке; теоремы о двух бабочках. Теорема о девяти точках на кубической кривой. Вывод невырожденной теоремы Паскаля и теоремы Паппа.*

Комбинаторика

- 1 Сети, потоки, теорема Форда-Фалкерсона. Реберная теорема Менгера, *теорема Холла*. *теорема Кенига*, *вершинная теорема Менгера*.
- 2 Теорема Рамсея для графов. *Теорема Рамсея для гиперграфов*.
- 3 Теорема Ван-дер-Вардена. *Теорема Фолкмана*.
- 4 Теорема Бержа. *Теорема Татта*. *Теорема Брукса*.

Математический анализ

- 1 Ловушки, кормушки, пределы и точки сгущения последовательностей. Операции с пределами. Вычисление пределов конкретных последовательностей. Теорема о милиционерах. Аксиома полноты и лемма о вложенных промежутках.
- 2 Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Непрерывность функции в точке. Непрерывность монотонных сюръективных функций. Непрерывность многочленов. Теорема Больцано-Коши и теорема Вейерштрасса.
- 3 Предел последовательности комплексных чисел. Равносильности определений. Непрерывность функции комплексного переменного. Непрерывность модуля многочлена от одной переменной. Достижение максимума и минимума на круге.
- 4 Доказательство основной теоремы алгебры.

Геометрия

- 1 Поворотная гомотетия, определение, свойство поворотной гомотетии, переводящей одну окружность в другую. Центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок в отрезок. Точка Микеля.
- 2 Инверсия, определение, образы прямых и окружностей при инверсии, формула для расстояния между образами.
- 3 Полярное соответствие, свойства, гармонический четырёхугольник.
- 4 Аффинное преобразование, определение, сохранение отношений длин параллельных отрезков. Сохранение отношений площадей. Сохранение центров масс. Построения линейкой.