Декомпозиция. 05.07.2013

Вспоминаем: Разложение натуральных чисел в произведение простых, многочленов с целыми коэффициентами в произведение неприводимых над $\mathbb{Z}$ многочленов, перестановок в произведение непересекающихся циклов (или транспозиций), графов в объединение компонент связности, движений в композицию осевых симметрий, натуральных чисел в сумму различных степеней двойки и тп.

1. В графе степень каждой вершины четна. Докажите, что его ребра можно раскрасить в несколько цветов так, что ребра каждого цвета образуют простой цикл.

2. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи (числами Фибоначчи называются элементы рекуррентной последовательности $\{F_n\}$, заданной условиями $F_1 = F_2 = 1$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geq 2$).

3. Докажите, что любое положительное рациональное число можно представить в виде суммы различных чисел вида $\frac{1}{n}$ (n — натуральное)

а) При помощи *жадного алгоритма*: в начале свести к случаю числа меньшего 1, а затем на каждом шаге вычитать наибольшее $\frac{1}{n}$, не превосходящее имеющееся на данный момент число.

б) При помощи *метода парных замен*: $\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \to \frac{2}{y}$, если y четно; $\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \to \frac{2}{y+1} + \frac{2}{y(y+1)}$, если y — нечетно.

4. Многочлен $p(x)$ (с действительными коэффициентами) называется *целозначным*, если он принимает целые значения при всех целых x

а) Докажите, что многочлен $\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ является целозначным.

б) Докажите, что многочлен является целозначным тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$a_0 + a_1x + a_2\frac{x(x-1)}{2!} + a_3\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \cdots + a_n\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!},$$

где числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые.

в) Какую наименьшую степень может иметь *унитарный* (то есть с единичным старшим коэффициентом) многочлен $f(x)$, такой что $f(a)$ делится на 100 при любом целом a.

5. Среди многочленов степени не выше n с целыми коэффициентами некоторые особенно раздражают Владимира Алексеевича, причем сумма и разность двух раздражающих многочленов сама является раздражающей. Докажите, что из раздражающих многочленов можно выбрать $n+1$ так, что любой раздражающий многочлен представляется как линейная комбинация выбранных с целыми коэффициентами

а) Для $n = 0$.

б) Для $n = 1$.

в) Для произвольного n.

6. У Карлсона есть 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем сотая часть всего варенья. Карлсон считает завтрак правильным, если во время него он съедает поровну варенья из каких-то 100 банок и не трогает остальные. Докажите, что Карлсон может съесть все варенье за несколько правильных завтраков.

7. Будем называть многочлен $p(x)$ почти целозначным, если $p(2^k)$ — целое число для любого целого неотрицательного k.

а) Докажите, что многочлен $p_k(x) = 2^{-k(k-1)/2}\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-2^{k-1})}{(2-1)(2^2-1)\cdots(2^k-1)}$ является почти целозначным.

б) Сформулируйте и докажите аналог утверждения б) из задачи 4.