
Теорема Виета и симметрические многочлены. 12 июля

Первое отделение

1.1 Докажите, что сумма m-х степеней корней приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами является целым числом для любого натурального m.

1.2 а) Найдите сумму квадратов корней многочлена $x^3 + x^2 + 7x + 1$.

б) Найдите сумму кубов его корней.

1.3 Существуют ли такие ненулевые действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, что

$$(x^2-a_1x+b_1)(x^2-a_2x+b_2)\cdots(x^2-a_nx+b_n) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n).$$

1.4 В клетках таблицы 3×3 расставлено 9 чисел, причем суммы чисел в строках и в столбцах таблицы равны между собой. Докажите, что сумма произведений чисел в строках таблицы равна сумме произведений чисел в столбцах таблицы.

1.5 Будем называть размером прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений – длины, ширины и высоты. Может ли в некотором прямоугольном параллелепипеде поместиться больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

Второе отделение

Определение: Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **симметрическим**, если $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для любой перестановки $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Например, многочлен $x^4y + y^4x + x^4z + z^4x + y^4z + z^4y$ является симметрическим, а многочлены $x^2y + y^2z + z^2x$ и $x^2 + y^3 + z^2$ - нет. *Элементарным симметрическим многочленом* степени k от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется многочлен

$$e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}.$$

В частности, $e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ и $e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n$. Мы также считаем, что $e_0 = 1$.

2.1 Теорема Виета

Если многочлен $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ имеет корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (с учетом кратностей), то $a_{n-k} = (-1)^k e_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

2.2 У многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + 1$ все корни - положительные действительные числа. Докажите, что $|a_k| + |a_{n-k}| \ge 2C_n^k$ для любого $0 \le k \le n$.

2.3 а) Пусть $p_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m$. Докажите, что для любого натурального m выполнено $me_m = \sum\limits_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}p_re_{m-r}$ (*формула Ньютона*).

б) Докажите, что сумма m-х степеней корней унитарного многочлена с целыми коэффициентами является целым числом для любого натурального m.

Третье отделение

Основная теорема о симметрических многочленах

Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами является симметрическим тогда и только тогда, когда найдется такой многочлен $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с целыми коэффициентами, что

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Определение: Для строчек $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где a_i и b_i - неотрицательные целые числа, будем говорить, что α больше β в **лексикографическом порядке** и писать $\alpha \succ \beta$, если $\alpha \neq \beta$ и $a_i > b_i$ для наименьшего i, такого что $a_i \neq b_i$.

3.1 а) Покажите, что для $\alpha \neq \beta$ выполнено ровно одно из условий $\alpha \succ \beta$ и $\beta \succ \alpha$.

б) Покажите, что $\alpha \succ \beta$ и $\beta \succ \gamma \Rightarrow \alpha \succ \gamma$.

б) Покажите, что $\alpha \succ \beta$ и $\alpha' \succ \beta' \Rightarrow \alpha + \alpha' \succ \beta + \beta'$ (сложение α и β производится покомпонентно).

3.2 Докажите, что не существует такой бесконечной последовательности $\{\alpha_n\}$, что $\alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \cdots \alpha_n \succ \cdots$.

Определение: Для многочлена $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **старшей степенью** называется наибольшая в лексикографическом порядке такая строчка $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, что одночлен $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ входит в P с ненулевым коэффициентом.

3.3 а) Докажите, что старшая степень многочлена PQ равна сумме старшей степени многочлена P и старшей степени многочлена Q.

б) Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - старшая степень симметрического многочлена P. Докажите, что $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

в) Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Покажите, что эта строчка является старшей степенью многочлена

$$e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\alpha_1 - \alpha_2} e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\alpha_2 - \alpha_3} \cdots e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\alpha_n}.$$

г) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

3.4 Докажите, что значение любого симметрического многочлена от корней унитарного многочлена с целыми коэффициентами является целым числом.