

Дележ драгметаллов. 22 июля

- 1 а) Докажите, что 100 золотых слитков (возможно разных по весу) можно разложить на две кучи по пятьдесят слитков, так чтобы веса этих куч различались не более чем на вес самого тяжелого слитка.
- б) Имеется 25 слитков разного веса. Всегда ли можно один из этих слитков распилить на две части и разложить их в два сейфа так, что части разрезанного слитка окажутся в разных сейфах, веса золота в сейфах будут одинаковы и в каждом сейфе будет по 12 целых слитков?

- 2 Имеется 301 ящик, в которых разложены золото и серебро.

- а) Али Баба имеет право выбрать себе 151 ящик. Докажите, что он может получить не менее половины всего золота и не менее половины всего серебра. Покажите, что 150 ящичков для этого может и не хватить.
- б) Какое наименьшее количество ящичков должен иметь право забрать Али Баба, чтобы он гарантированно мог получить не менее трети всего золота и не менее трети всего серебра?
- в) Тот же вопрос для двух пятых.

Теорема о блинах: На плоскости расположены две фигуры (возможно несвязных). Тогда существует прямая, которая делит каждую из этих фигур на две части равной площади. Иначе говоря, если на сковородке жарятся два блина, то можно одним прямым разрезом разделить каждый из блинов на две равных по площади части.

- 3 Выведите пункт а) предыдущей задачи из теоремы о блинах.

- 4 а) Имеется четное число ящичков, в которых разложены золото и серебро, причем каждый ящик содержит не более a кг золота и не более b кг серебра. Докажите, что ящики можно разбить на две равные по количеству группы, так что суммарная масса золота отличается в двух группах не более чем на a кг, а суммарная масса серебра отличается в двух группах не более чем на b кг.
- б) Имеется 100 ящичков, в которых разложены золото, серебро и платина. Али Баба имеет право выбрать себе 51 ящик. Докажите, что он может получить не менее половины всего золота, не менее половины всего серебра и не менее половины всей платины. Покажите, что 50 ящичков для этого может и не хватить.

Теорема о сэндвиче: В пространстве расположены три тела (возможно несвязных). Тогда существует плоскость, которая делит каждое из тел на две части равного объема. Иначе говоря, сэндвич, состоящий из хлеба, сыра и ветчины, можно одним ударом ножа разрезать на две части, содержащие поровну хлеба, сыра и ветчины.

- 5 Выведите пункт б) предыдущей задачи из теоремы о сэндвиче.

- 6 Имеется N ящичков, в которых разложены n драгметаллов.

- а) На ящики нужно наклеить ярлык с ценой, и все драгметаллы из этого ящика будут продаваться по этой цене. Каждая цена должна быть действительным числом от 0 до 1 (условных единиц за килограмм) и суммарная стоимость каждого металла (в условных единицах) должна составлять половину суммарной массы каждого металла (в килограммах). Докажите, что это можно сделать так, чтобы хотя бы $N - n$ цен равнялись 0 или 1.
- б) Али Баба имеет право выбрать себе $n + \lfloor (N - n)/2 \rfloor$ ящик. Докажите, что он может получить не менее половины от общего количества каждого из металлов. Покажите, что меньшего числа ящичков для этого может и не хватить.