XXIX Кировская Летняя Многопредметная Школа
Вишкиль, 3–28 июля 2013 года. Профи 9.

Числа. 11 июля.

1. Докажите, что $a^{561} \equiv a \pmod{561}$.

2. Дано p — простое число больше 3. Пусть $n = (2^{2p} - 1)/3$. Докажите, что $2^n - 2$ делится на n.

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана реккурентной формулой: $a_1 = 29$, $a_2 = 2013$, $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n^2$. Докажите, что ни один из членов последовательности не делится на 239.

4. а) Найти количество квадратичных вычетов по модулю 601 среди остатков от 1 до 300.
б) К скольким квадратичным вычетам при добавлении 1 получится квадратичный вычет?

5. а) Пусть $p = 4k + 3$ — простое число. Известно, что a — квадратичный вычет по модулю p. Найдите формулу для квадратых корей из a по модулю p.
б) Если простое p имеет вид $3k + 2$, то любой элемент является кубическим вычетом. Найдите формулу для кубического корня из a.

6. Пусть простое число p имеет вид $3k + 1$. а) Докажите, что над $\mathbb{F}_p$ многочлен $x^3 - 1$ имеет 3 корня.
б) Сколько всего кубических вычетов будет в по модулю p? в) Вычет b кубическим тогда и только тогда, когда $b^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$.

7. Натуральные числа x, y, m и n таковы, что $n^2 = 15x + 16y$ и $m^2 = 16x - 15y$. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать минимум из m и n.

XXIX Кировская Летняя Многопредметная Школа
Вишкиль, 3–28 июля 2013 года. Профи 9.

Числа. 11 июля.

1. Докажите, что $a^{561} \equiv a \pmod{561}$.

2. Дано p — простое число больше 3. Пусть $n = (2^{2p} - 1)/3$. Докажите, что $2^n - 2$ делится на n.

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана реккурентной формулой: $a_1 = 29$, $a_2 = 2013$, $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n^2$. Докажите, что ни один из членов последовательности не делится на 239.

4. а) Найти количество квадратичных вычетов по модулю 601 среди остатков от 1 до 300.
б) К скольким квадратичным вычетам при добавлении 1 получится квадратичный вычет?

5. а) Пусть $p = 4k + 3$ — простое число. Известно, что a — квадратичный вычет по модулю p. Найдите формулу для квадратых корей из a по модулю p.
б) Если простое p имеет вид $3k + 2$, то любой элемент является кубическим вычетом. Найдите формулу для кубического корня из a.

6. Пусть простое число p имеет вид $3k + 1$. а) Докажите, что над $\mathbb{F}_p$ многочлен $x^3 - 1$ имеет 3 корня.
б) Сколько всего кубических вычетов будет в по модулю p? в) Вычет b кубическим тогда и только тогда, когда $b^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$.

7. Натуральные числа x, y, m и n таковы, что $n^2 = 15x + 16y$ и $m^2 = 16x - 15y$. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать минимум из m и n.

XXIX Кировская Летняя Многопредметная Школа
Вишкиль, 3–28 июля 2013 года. Профи 9.

Числа. 11 июля.

1. Докажите, что $a^{561} \equiv a \pmod{561}$.

2. Дано p — простое число больше 3. Пусть $n = (2^{2p} - 1)/3$. Докажите, что $2^n - 2$ делится на n.

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана реккурентной формулой: $a_1 = 29$, $a_2 = 2013$, $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n^2$. Докажите, что ни один из членов последовательности не делится на 239.

4. а) Найти количество квадратичных вычетов по модулю 601 среди остатков от 1 до 300.
б) К скольким квадратичным вычетам при добавлении 1 получится квадратичный вычет?

5. а) Пусть $p = 4k + 3$ — простое число. Известно, что a — квадратичный вычет по модулю p. Найдите формулу для квадратых корей из a по модулю p.
б) Если простое p имеет вид $3k + 2$, то любой элемент является кубическим вычетом. Найдите формулу для кубического корня из a.

6. Пусть простое число p имеет вид $3k + 1$. а) Докажите, что над $\mathbb{F}_p$ многочлен $x^3 - 1$ имеет 3 корня.
б) Сколько всего кубических вычетов будет в по модулю p? в) Вычет b кубическим тогда и только тогда, когда $b^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$.

7. Натуральные числа x, y, m и n таковы, что $n^2 = 15x + 16y$ и $m^2 = 16x - 15y$. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать минимум из m и n.
