Предел. 7 июля

Определение. Последовательность — это функция от натурального аргумента. Если a — такое функция, то элементы последовательности записывают как $a_1 = a(1)$, $a_2 = a(2)$, ..., а саму последовательность обозначают $\{a_n\}$.

Определение. Интервал (a, b) мы будем называть *ловушкой* для последовательности $\{x_n\}$, если в этом отрезке содержатся почти все (т. е. все, кроме, может быть, конечного числа) члены данной последовательности. Интервал (a, b) мы будем называть *кормушкой* для последовательности $\{x_n\}$, если в этом отрезке содержится бесконечно много членов данной последовательности.

1. Существует ли последовательность, для которой интервалы $(0, 1)$ и $(2, 3)$ одновременно являются а) ловушками; б) кормушками?

Пусть отрезки $(0, 1)$ и $(9, 10)$ являются кормушками для последовательности $\{x_n\}$. Может ли для этой последовательности существовать в) ловушка длины 1; г) ловушка длины 9? д) Существует ли последовательность без кормушек? е) Существует ли последовательность, для которой любой отрезок является кормушкой?

Определение. Число a является точкой сгущения последовательности $\{x_n\}$, если любой открытый интервал, содержащий a является кормушкой для $\{x_n\}$.
Число a является пределом последовательности, если любой открытый интервал, содержащий a является ловушкой для $\{x_n\}$. В этом случае говорят, что последовательсность x_n сходится (к a) и пишут $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

2. а) Докажите, что если a является пределом последотальности $\{x_n\}$, то a является ее точкой сгущения. б) Докажите, что у всякой последовательности есть не более одного предела. в) Приведите пример последовательности, у которой несколько точек сгущения. Есть ли у нее предел?

3. Сложение пределов. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, а последовательность $\{z_n\}$ определяется как сумма $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т. е. $z_n = x_n + y_n$. Тогда $\{z_n\}$ сходится, причем $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если найдется такое число M, что $|x_n| < M$ для всякого $n \in \mathbb{N}$.

4. а) Докажите, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. б) Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, а последовательность y_n ограничена. Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = 0$. в) **Умножение пределов.** Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся. Докажите, что произведение этих двух последовательностей также сходится, причем $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

5. Вычислите а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

6. Теорема о двух милиционерах. Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ таковы, что $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Известно, что $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся, причем предел у них один и тот же. Докажите, что $\{y_n\}$ тоже сходится, причем к этому же пределу.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонно возрастающей, если $x_n \leq x_{n+1}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Монотонно убывающая последовательность определяется аналогично.
Последовательность называется монотонной, если она является монотонно возрастающей или монотонно убывающей.

Аксиома полноты. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

7. Лемма о вложенных промежутках. Пусть имеется бесконечная последовательность замкнутых промежутков, так что последующий содержится в предыдущем. Докажите, что если длина промежутка стремится к нулю, то пересечение всех отрезков является точкой.

8. Дана последовательность $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... $(x_{n+1} = \sqrt{2+x_n})$. а) Докажите, что эта последовательность имеет предел. б) Найдите этот предел.