XXIX Летняя Многопредметная Школа Кировской области
с. Вишкиль, 3-28 июля 2013 г.

Геометрический разнобой. 12 июля

1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC образуют прямоугольник.

2. На плоскости даны четыре окружности. Каждая из них касается внешним образом ровно двух из оставшихся окружностей. Докажите, что все четыре получившиеся точки касания лежат на одной окружности.

3. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Найдите $\angle DHQ$.

4. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D, а прямую AB — в точке M. Пусть K — отличная от O точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB. Докажите, что угол MKO — прямой.

5. Внутри треугольника расположены 4 равных окружности следующим образом — 3 из них касаются двух сторон треугольника, а четвертая касается внешним образом первых трех. Докажите, что центр четвертой окружности, центр вписанной окружности и центр описанной окружности лежат на одной прямой.

6. Даны два правильных пятиугольника с общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются цифрами от 1 до 5 по часовой стрелке, причем в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.

XXIX Летняя Многопредметная Школа Кировской области
с. Вишкиль, 3-28 июля 2013 г.

Геометрический разнобой. 12 июля

1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC образуют прямоугольник.

2. На плоскости даны четыре окружности. Каждая из них касается внешним образом ровно двух из оставшихся окружностей. Докажите, что все четыре получившиеся точки касания лежат на одной окружности.

3. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Найдите $\angle DHQ$.

4. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D, а прямую AB — в точке M. Пусть K — отличная от O точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB. Докажите, что угол MKO — прямой.

5. Внутри треугольника расположены 4 равных окружности следующим образом — 3 из них касаются двух сторон треугольника, а четвертая касается внешним образом первых трех. Докажите, что центр четвертой окружности, центр вписанной окружности и центр описанной окружности лежат на одной прямой.

6. Даны два правильных пятиугольника с общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются цифрами от 1 до 5 по часовой стрелке, причем в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.