Сети Форда и Фалкерсона. 6 июля

Определение. Пусть задано множество вершин V, в котором выделены две вершины: s (*вход*) и t (*выход*). Пусть определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$c(x,y) \geq 0, \quad c(x,s) = 0, \quad c(t,y) = 0$$

для любых вершин $x, y \in V$. Тогда $G = (V, s, t, c)$ — сеть, функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Множество $A(G) = \{(x,y) : c(x,y) > 0\}$ называется множеством *стрелок* сети G.

Определение. Пусть G — сеть. Функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *потоком* в сети G, если f удовлетворяет трем условиям для любых $x, y \in V$ и $v \in V \setminus \{s,t\}$:

$$f(x,y) \leq c(x,y), \quad f(x,y) = -f(y,x), \quad \sum_{z \in V} f(v,z) = 0.$$

Число $|f| = \sum_{x \in V} f(s,x)$ называется *величиной потока*. Поток в сети G с максимальной величиной называется *максимальным*.

Определение. Пусть G — сеть, а множество ее вершин V разбито на два непересекающихся множества S и T таких, что $s \in S$ и $t \in T$. Тогда (S,T) — разрез сети G.

Величина $c(S,T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x,y)$ называется *пропускной способностью разреза*. Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.

Для любого потока f в сети G величина $f(S,T) = \sum_{s \in S, y \in T} f(x,y)$ называется *потоком через разрез* (S,T).

1. Для любого потока f и разреза (S,T) сети G докажите, что $|f| = f(S,T)$.

2. (Теорема Форда-Фалкерсона.) В сети G с пропускной способностью c задан поток f. Докажите, что следующие три утверждения равносильны:

1° поток f максимален;

2° существует разрез (S,T) такой, что $|f| = c(S,T)$;

3° в остаточной сети нет дополняющего пути.

Следствие. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

3. Пусть (S_1, T_1) и (S_2, T_2) — минимальные разрезы в сети G. Докажите, что разрезы $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ и $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ также являются минимальными.

4. Докажите, что в целочисленной сети (т. е. в сети, пропускные способности всех ребер которой являются целыми числами) существует максимальный поток, причем среди максимальных потоков данной сети найдется целочисленный.

Выведете из теоремы Форда-Фалкерсона следующие утверждения:

5. (“Реберная теорема Менгера.”) Даны граф G и его вершины u и v. Пусть при удалении любых $k-1$ ребер в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих ребер.

6. (Теорема Холла.) Если в двудольном графе с долями A и B для любого множества из k вершин $V \subseteq A$ существует не менее k вершин доли B, смежных хотя бы с одной из вершин множества V, то существует паросочетание, содержащее все вершины из A.

7. (Теорема Кёнига.) На клечатой плоскости расставлено несколько ладей. Тогда наибольшее число небьющих друг друга ладей, которые можно выбрать из них, равно наименьшему числу линий (столбцов и строк), покрывающих все данные ладьи.

8. (“Вершинная” теорема Менгера.) Пусть вершины u и v несмежны и при удалении любых $k-1$ вершин в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих внутренних вершин.