XXIX Кировская Летняя Многопредметная Школа.
Вишкиль, 3–28 июля 2013 года. Профи 9.

Математический бой "Профи-8 – Профи-9". Вариант M. 17 июля

1 Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в какие-то две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times 2$ м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравьи отличают вершины от не вершин, но все вершины изначально для них равноправны и направления тоже. Муравей знает, сколько он прополз, и сможет отличить длинное ребро от короткого, добравшись до его середины. Муравей запоминает направления поворотов в пространстве и направления ребер, выходящих из вершин, где он бывал. Друг друга муравьи заметят только оказавшись в одной точке).

2 210 точек расположены на плоскости таким образом, что любые 209 из них лежат на 14 прямых. Докажите, что все точки лежат на 14 прямых.

3 Натуральные числа a и b таковы, что числа $2a-1$, $2b-1$ и $a+b$ – простые. Докажите, что ни a^b+b^a, ни a^a+b^b не делятся на $a+b$.

4 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов B и D параллельны. Биссектриса угла B пересекает диагональ AC в точке K, а биссектриса угла D пересекает её в точке M так, что $AK = CM$ (точки K и M различны). Докажите, что отрезки KD и BM равны.

5 На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже написанных одинаковых числа n и написать вместо них числа $n+1$ и $n-1$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2013? (Сначала доска была чистой.)

6 Существует ли такая последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$, что $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}}$ при всех натуральных n?

7 Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC; O_A, O_B, O_C – центры вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно; T_A, T_B, T_C – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны.

8 Вершины графа занумерованы натуральными числами от 1 до 10^5, причем каждое натуральное число встречается ровно один раз. Известно, что в этом графе нет циклов из четырех вершин. Докажите, что существует арифметическая прогрессия из пяти не превосходящих 10^5 натуральных чисел такая, что никакие две вершины с номерами из этой прогрессии не соединены ребром.

9 На прямой отмечено конечное число точек. Известно, что для любых двух из них можно выбрать третью так, что среди этих трех одна лежит ровно посредине между двумя другими. Каково наибольшее возможное число отмеченных точек?

10 Действительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что все числа $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}, 2c-\frac{1}{a}$ не могут быть одновременно больше 1.