Разборчивая невеста. 14 июля

Постановка задачи: Принцесса выбирает себе жениха. Для этого к ней приехали n царевичей, которые выстроились перед дворцом в очередь и входят знакомиться с принцессой по одному. Узнав очередного претендента, принцесса может либо принять его предложение (и тогда на следующий день играют свадьбу), либо отвергнуть (и тогда гордый королевич уезжает навсегда). Познакомившись с двумя царевичами, принцесса может сказать кто из них лучше (при этом выполняется естественное правило, что если Иван-дурак лучше чем Джон-дурак, а Джон-дурак лучше чем Иоганн-дурак, то Иван-дурак лучше чем Иоганн-дурак). Принцесса хочет выбрать самого лучшего жениха, но в каком порядке они изначально расставлены перед дворцом, не знает. Будем считать этот порядок случайным. Как ей действовать, чтобы иметь максимально возможную вероятность победить (то есть выбрать лучшего жениха)?

1 Решите эту задачу при $n = 2, 3, 4$.

2 Обозначим через g_t вероятность того, что если t-й по счету жених оказался лучше всех предыдущих, то он вообще лучше всех. Это так называемая *условная вероятность*. Вычислите g_t.

3 а) Обозначим через h_t вероятность того, что если принцесса пропустит первых t претендентов (просто узнав о них какую-то информацию), а дальше будет действовать неким оптимальным образом (которого мы пока не знаем, но который существует) то она победит. Докажите, что $h_0 \geq h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_{n-1} \geq h_n$.

б) Вычислите h_n, h_{n-1}, h_{n-2}

4 Покажите, что стратегия оптимальных действий для принцессы состоит в следующем. Пусть s - наименьшее такое число, что $g_s > h_s$. Тогда принцессе нужно пропустить первые $s - 1$ человек, а затем выбрать первого встречного, который стал условно лучшим (то есть лучше всех предыдущих).

Чтобы решить задачу, осталось научиться считать s. А для этого нужно научиться считать h_t.

5 а) Докажите, что $h_0 = h_1 = h_2 = \ldots. = h_{s-1}$.

б) Докажите, что если $t \geq s$, то $h_t = \frac{1}{n} + \frac{t}{t+1} h_{t+1}$.

в) Докажите, что если $t \geq s$, то $h_t = \frac{t}{n}(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \cdots + \frac{1}{n-1})$.

6 Покажите, что s – это наименьшее такое натуральное число, что $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} < 1$. Еще раз убедитесь в правильности нашего ответа к первой задаче и определите оптимальное поведение принцессы и вероятность ее выигрыша, если $n = 5, 6, 7, 8$.

Вопрос для размышления: Как хотя бы приблизительно вычислить s и h_{s-1} (наибольшую вероятность выигрыша) для данного n?

Ответ для размышления: Для больших n имеет место приблизительное равенство $s \approx \frac{n}{e}$, соответственно $h_{s-1} \approx \frac{1}{e}$.