

Билеты на теоретический зачет.

Билет 1

1. Алгебраические кривые. Переход из одной системы координат в другую. Эллипс, гипербола и парабола являются кривыми второго порядка.
2. Доказательство Золотарева квадратичного закона взаимности через перестановки.
3. Теорема Фолкмана.

Билет 2

1. Алгебраическое доказательство теоремы о бабочке; теоремы о двух бабочках.
2. Построение поля из p^2 элементов. Существование первообразного корня в поле.
3. Теорема Больцано-Коши и теорема Вейерштрасса.

Билет 3

1. Теорема о девяти точках на кубической кривой. Вывод невырожденной теоремы Паскаля и теоремы Паша.
2. Доказательство квадратичного закона взаимности через подсчет произведения двумя способами.
3. Ловушки, кормушки, пределы и точки сгущения последовательностей. Операции с пределами. Вычисление предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Билет 4

1. Определение поля и числового поля. Описание наименьшего числового поля, содержащего $\sqrt{2}$; содержащего $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; содержащего $\sqrt[3]{2}$. Изоморфизм полей. Поле F_p . Отсутствие нетождественного автоморфизма \mathbb{R} .
2. Корни многочленов с алгебраическими коэффициентами являются алгебраическими числами, корни унитарных многочленов с целыми алгебраическими коэффициентами являются целыми алгебраическими числами.
3. Теорема Брукса.

Билет 5

1. Симметрические многочлены. Теорема Виета. Формула Ньютона. Лексикографический порядок. Основная теорема о симметрических многочленах.
2. Сравнения целых алгебраических чисел по модулю. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Задача про рекурренту.
3. Инверсия, определение, образы прямых и окружностей при инверсии, формула для расстояния между образами.

Билет 6

1. Алгебраические и целые алгебраические числа. Число, являющееся одновременно целым алгебраическим и рациональным, является целым. Сумма, разность, произведение целых алгебраических чисел является целым алгебраическим. Алгебраические числа образуют поле.
2. Показатели. Бесконечность множества простых чисел вида $2^n x + 1$ для фиксированного натурального n . Существование первообразного корня по простому модулю; по модулю p^k , $2p^k$ (p — нечетное простое).
3. Поворотная гомотетия, определение, свойство поворотной гомотетии, переводящей одну окружность в другую.

Билет 7

1. Корни многочленов с алгебраическими коэффициентами являются алгебраическими числами, корни унитарных многочленов с целыми алгебраическими коэффициентами являются целыми алгебраическими числами.
2. Определение группы. Примеры. Подгруппы, левые классы смежности, порядок элемента, индекс подгруппы, теорема Лагранжа.
3. Полярное соответствие, свойства, гармонический четырёхугольник.

Билет 8

1. Многочлены деления круга. $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$. Доказательство бесконечности множества простых чисел вида $nx + 1$ для фиксированного натурального n .
2. Доказательство того, что существует поле из n элементов $\Rightarrow n = p^k$.
3. Центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок в отрезок. Точка Микеля.

Билет 9

1. Неприводимость многочленов деления круга
2. Непрерывность функции в точке. Непрерывность монотонных сюръективных функций. Непрерывность многочленов.
3. Аффинное преобразование. Сохранение отношений площадей. Сохранение центров масс. Построения линейкой.

Билет 10

1. Определение группы. Примеры. Подгруппы, левые классы смежности, порядок элемента, индекс подгруппы, теорема Лагранжа.
2. Доказательство основной теоремы алгебры (в предположении, что модуль многочлен достигает минимума на комплексной плоскости).
3. Теорема Татта

Билет 11

1. Сравнения целых алгебраических чисел по модулю. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Задача про рекурренту.
2. Трансцендентные числа. Описание наименьшего числового поля, содержащего π . Несчетность множества трансцендентных чисел. Теорема Лиувилля.
3. Теорема о милиционерах. Аксиома полноты и лемма о вложенных промежутках.

Билет 12

1. Многочлены от нескольких переменных. Степень многочлена; степень произведения двух многочленов равна сумме их степеней. Ненулевой многочлен с действительными коэффициентами принимает ненулевое значение. Многочлен, обращающийся в нуль во всех точках прямой, делится на линейный многочлен, задающий эту прямую.
2. Предел последовательности комплексных чисел. Равносильности определений. Непрерывность функции комплексного переменного. Непрерывность модуля многочлена от одной переменной. Достижение максимума и минимума на круге.
3. Сети, потоки, теорема Форда-Фалкерсона.

Билет 13

1. Доказательство квадратичного закона взаимности через квадратичные суммы Гаусса.
2. Многочлены от нескольких переменных. Степень многочлена; степень произведения двух многочленов равна сумме их степеней. Ненулевой многочлен с действительными коэффициентами принимает ненулевое значение. Многочлен, обращающийся в нуль во всех точках прямой, делится на линейный многочлен, задающий эту прямую.
3. Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Билет 14

1. Доказательство Золотарева квадратичного закона взаимности через перестановки.
2. Доказательство основной теоремы алгебры (в предположении, что модуль многочлен достигает минимума на комплексной плоскости).
3. Реберная теорема Менгера

Билет 15

1. Доказательство квадратичного закона взаимности через подсчет произведения двумя способами.
2. Построение поля из p^k элементов.
3. Теорема Рамсея для гиперграфов.

Билет 16

1. Доказательство того, что существует поле из n элементов $\Rightarrow n = p^k$.
2. Теорема о девяти точках на кубической кривой. Вывод невырожденной теоремы Паскаля и теоремы Паппа.
3. Теорема Холла

Билет 17

1. Построение поля из p^k элементов.
2. Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.
3. Вершинная теорема Менгера.

Билет 18

1. Конечные плоскости.
2. Симметрические многочлены. Теорема Виета. Формула Ньютона. Лексикографический порядок. Основная теорема о симметрических многочленах.
3. Аффинное преобразование, определение, сохранение отношений длин параллельных отрезков. Сохранение отношений площадей. Сохранение центров масс. Построения линейкой.

Билет 19

1. Построение поля из p^2 элементов. Существование первообразного корня в поле.
2. Многочлены деления круга. $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$. Доказательство бесконечности множества простых чисел вида $nx + 1$ для фиксированного натурального n .
3. Теорема Ван-дер-Вардена.

Билет 20

1. Показатели. Бесконечность множества простых чисел вида $2^n x + 1$ для фиксированного натурального n . Существование первообразного корня по простому модулю; по модулю p^k , $2p^k$ (p — нечетное простое).
2. Алгебраические кривые. Переход из одной системы координат в другую. Эллипс, гипербола и парабола являются кривыми второго порядка.
3. Теорема Кенига

Билет 21

1. Трансцендентные числа. Описание наименьшего числового поля, содержащего π . Несчетность множества трансцендентных чисел. Теорема Лиувилля.
2. Алгебраическое доказательство теоремы о бабочке; теоремы о двух бабочках.
3. Теорема Бержа.