**XXIX Кировская Летняя Многопредметная Школа.**
**Вишкиль, 3–28 июля 2013 года. Профи 9.**

---

## Идея локального порядка 1: теория Рамсея. 9 июля

1 Докажите, что из любых 5 точек на плоскости можно выбрать 4, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.

2 а) Докажите, что из любых 6 человек можно выбрать или трех попарно знакомых, или трех попарно незнакомых.

б) Докажите, что из любых 9 человек можно выбрать или трех попарно знакомых, или четырех попарно незнакомых.

в) Степан Юрьевич, незнакомый с внутренней структурой нашей группы профи, тем не менее имеет смелость утверждать, что в ней заведомо найдутся либо четыре человека, любые два из которых когда-нибудь сидели за одной партой, либо четыре человека, никакие два из которых никогда не сидели за одной партой. Прав ли он?

г) Докажите, что из любых $2^{m+n}$ человек можно выбрать или $m$ попарно знакомых, или $n$ попарно незнакомых.

**Определение:** Наименьшее такое натуральное $R$, что из $R$ человек можно выбрать или $m$ попарно знакомых, или $n$ попарно незнакомых, называется *числом Рамсея* и обозначается через $R(m, n)$.

3 Найдите $R(3, 3)$ и $R(3, 4)$.

Более обще, пусть фиксированы натуральные числа $a_1, \dots, a_k$. Тогда наименьшее такое натуральное $R$, что при раскраске полного графа на $R$ вершинах в $k$ цветов найдется либо полный одноцветный подграф цвета 1 на $a_1$ вершинах, либо полный одноцветный подграф цвета 2 на $a_2$ вершинах, ..., либо полный одноцветный подграф цвета $k$ на $a_k$ вершинах, обозначается через $R(a_1, \dots, a_k)$ и также называется числом Рамсея.

4 **Теорема Рамсея для графов** Докажите существование $R(a_1, \dots, a_k)$ и

$$R(a_1, \dots, a_k) \leq k^{a_1+\dots+a_k}.$$

5 а) Докажите, что для любого натурального $n$ существует такое натуральное $N$, что при любом исходе кругового турнира среди $N$ команд по воллейболу можно выбрать $n$ команд, среди которых первая выиграла у всех остальных, вторая — выиграла у всех остальных, кроме первой, третья — выиграла у всех команд, кроме первой и второй, ..., $n$-я — всем проиграла.

б) **Теорема Шура** Докажите, что для любого натурального $n$ существует такое натуральное $N$, что если покрасить числа $1, 2, \dots, N$ в $n$ цветов, то найдутся три числа (не обязательно различных) $x, y, z$ одного цвета, для которых $x + y = z$.

6 а) Каждое из 3-элементных подмножеств множества $A$ из $4^{4^{4^{\cdots^{4}}}}$ ($m+n$ четверок) элементов покрашено в красный или в синий цвет. Докажите, что в $A$ можно выбрать либо $m$ элементов, среди которых все тройки - красные, либо $n$ элементов, среди которых все тройки - синие ($m, n \geq 3$).

б) **Теорема Рамсея для гиперграфов** Для любых натуральных чисел $n_1, \dots, n_k, s$ существует такое натуральное $N$, если в множестве из $N$ элементов раскрасить все $s$-элементные подмножества в $k$ цветов, то для какого-то $1 \leq i \leq k$ можно выбрать $n_i$ элементов, среди которых все $s$-элементные подмножества покрашены в цвет $i$.