Правильные многоугольники, корни из единицы и многочлены деления круга.
19 **июля**

Вспоминаем: У многочлена $z^n - 1$ есть n различных комплексных корней, а именно числа вида $\cos(\frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{2\pi k}{n})$ для $0 \le k \le n-1$, которые называются **корнями из единицы** . Соответствующие точки располагаются на единичной окружности и образуют правильный n-угольник. Корень из единицы ζ степени n называется **примитивным**, если $\zeta^m \ne 1$ для любого натурального $0 < m < n$.

1 а) Пусть ζ - корень из единицы степени n, $\zeta \ne 1$. Найдите $1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{n-1}$.

б) Найдите количество примитивных корней из единицы степени n.

в) Радиус окружности, описанной около правильного n-угольника, равен 1. Найдите произведение расстояний от фиксированной вершины A до всех остальных вершин этого многоугольника.

2 а) Докажите, что для любого простого p многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ (*Подсказка:* вспоминаем критерий Эйзенштейна).

б) В равноугольном p-угольнике (p - простое) длины всех сторон рациональны. Докажите, что он является правильным.

3 Вершины правильного многоугольника раскрашены в несколько (больше одного) цветов, так что все вершины каждого цвета также образуют правильный многоугольник. Докажите, что среди этих одноцветных правильных многоугольников найдутся два равных.

Определение: **Многочлены деления круга** - это $\Phi_n(x) = (x - \zeta_1)(x - \zeta_2)\cdots(x - \zeta_{\phi(n)})$, где $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{\phi(n)}$ - все примитивные корни n-й степени из 1.

4 а) Докажите, что $x^n - 1 = \prod\limits_{d|n} \Phi_d(x)$.

б) Докажите, что все коэффициенты многочлена $\Phi_n(x)$ - целые числа.

в) Найдите $\Phi_n(x)$ для всех $n < 12$.

5 **Частный случай теоремы Дирихле:** Для любого натурального n найдется бесконечно много простых чисел вида $nk + 1$.

а) Пусть многочлены $C(x)$ и $D(x)$ с целыми коэффициентами взаимно просты. Докажите, что тогда для достаточно больших простых p значения многочленов в одной целой точке не могут одновременно делиться на p.

б) Докажите, что многочлены деления круга попарно взаимно просты.

в) Докажите, что для достаточно больших простых p выполнено $p|\Phi_n(a) \Rightarrow n$ является показателем a по модулю $p \Rightarrow p = nk + 1$.

г) Докажите приведенный частный случай теоремы Дирихле.

6 **Неприводимость** $\Phi_n(x)$

а) Докажите, что для того, чтобы доказать неприводимость $\Phi_n(x)$ над $\mathbb{Z}$, достаточно показать, что если $f(x)$ - неприводимый над $\mathbb{Z}$ множитель $\Phi_n(x)$, ζ - корень $f(x)$, p - простое число, не делящее n, то ζ^p - тоже корень $f(x)$.

Предположим противное. Пусть $\alpha_1 = \zeta, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ - все корни $f(x)$.

б) Докажите, что у многочлена $g(x) = (x-\alpha_1^p)(x-\alpha_2^p)\cdots(x-\alpha_k^p)$ все коэффициенты целые и он взаимно прост с $f(x)$.

Пусть $\beta_i = \alpha_i^p$ $(1 \le i \le k)$. Обозначим все оставшиеся корни степени n из единицы (кроме α_i и β_i) через $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Пусть

$$A = \prod_{1\le i<j\le k} (\alpha_i - \alpha_j)^2,\ B = \prod_{1\le i<j\le k} (\beta_i - \beta_j)^2,\ C = \prod_{1\le i<j\le m} (\gamma_i - \gamma_j)^2,$$

$$D = \prod_{1\le i\le k,\ 1\le j\le k} (\alpha_i - \beta_j)^2,\ E = \prod_{1\le i\le k,\ 1\le j\le m} (\beta_i - \gamma_j)^2,\ F = \prod_{1\le i\le k,\ 1\le j\le m} (\alpha_i - \gamma_j)^2.$$

в) Докажите, что A, B, C, D, E, F - целые числа и $|ABCDEF| = n^n$.

г) Докажите цепочку равенств и сравнений (по модулю p) целых алгебраических чисел $D = (f(\alpha_1^p)f(\alpha_2^p)\cdots f(\alpha_k^p))^2 \equiv (f(\alpha_1)^p f(\alpha_2)^p \cdots f(\alpha_k)^p)^2 = 0$.

д) Получите противоречие и тем самым завершите доказательство неприводимости $\Phi_n(x)$.