XXIX Летняя Многопредметная Школа Кировской области
с. Вишкиль, 3-28 июля 2013 г. Профи 9.

Внутренний матбой. 13 июля

1. Петя и Вася показывают Коле карточный фокус. Коля выбирает пять карт из колоды, содержащей 52 карты, и передает их Пете. Он смотрит в них, прячет одну из карт в карман, а четыре оставшиеся выкладывает слева направо в каком-либо порядке картинками вверх. После этого они зовут Васю, который отгадывает спрятанную карту. Докажите, что Петя и Вася могут так сговориться, что фокус всегда будет удаваться.

2. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D, а прямую AB — в точке M. Пусть K — отличная от O точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB. Докажите, что угол MKO — прямой.

3. Вася написал на доске n положительных чисел. После этого Петя, выбирая всеми возможными способами несколько из них, подсчитал сумму выбранных чисел и записал ответы на карточках — получилась $2^n - 1$ карточка. Докажите, что Вася может разложить все карточки на стопки таким образом, чтобы числа на карточках в одной стопке отличались не больше, чем в два раза.

4. Дан треугольник ABC. Каждая точка плоскости окрашена в синий или красный цвет. Докажите, что либо какие-то 3 красные точки образуют треугольник, равный ABC, либо найдутся две синие точки на расстоянии 1.

5. Пусть $n \geq a_1 > a_2 > \ldots > a_k$ — натуральные числа такие, что $\text{НОК}(a_i, a_j) \leq n$ при любых i и j. Докажите, что $ia_i \leq n$ при всех i.

6. Дано натуральное $n > 4$. В правильном n-угольнике проведены $n-3$ непересекающиеся диагонали, разбивающие его на треугольники. Найдите максимальное возможное количество различных треугольников среди треугольников разбиения.

7. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая, отличная от AB, пересекает окружность ω_1 в точках C и D, окружность ω_2 в точках E и F, а прямую AB — в точке P, лежащей на отрезке AB. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников ACE и BDF, проходит через точку P.

8. Существует ли такой квадратный трехчлен с действительными коэффициентами, что для любого натурального n уравнение $f(f(\ldots(f(x))\ldots)) = 0$ (n букв f) имеет ровно 2^n различных действительных корней?