## Инверсия. 9 июля

**Определение.** Пусть $S$ — окружность с центром $O$ радиуса $r$. *Инверсией* относительно окружности $S$ называется преобразование плоскости, которое любую точку $A \neq O$ переводит в такую точку $A'$, лежащую на луче $OA$, что $|OA| \cdot |OA'| = r^2$. Для точки $O$ это преобразование не определено. Точка $O$ называется *центром инвесии*, $S$ — *окружность инвесии*, $r^2$ — *степень инвесии.*

**1.** а) Пусть преобразование плоскости $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{O\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{O\}$ — это инверсия с центром $O$. Докажите, что $f$ является инволюцией (то есть $f \circ f = id$ — тождественное преобразование).

Рассмотрим инверсию на комплексной плоскости. б) Пусть центром инверсии является 0, а ее степень равна 1. Докажите, что $z$ переходит в $\frac{1}{\bar{z}}$. в) Найдите образ $z$ при инверсии относительно окружности радиуса $r$ с центром в $a$.

**2.** Инверсия относительно окружности с центром в точке $O$ и радиусом $R$ переводит точки $A$ и $B$ в точки $A'$ и $B'$ соответственно. Докажите, что $|A'B'| = \frac{|AB| \cdot R^2}{|OA| \cdot |OB|}$.

**3.** Докажите, что инверсия с центром $O$

а) переводит прямую, проходящую через $O$, в себя;

б) переводит окружность, проходящую через $O$, в прямую, не проходящую через $O$. Куда при переходит центр этой окружности?

в) переводит прямую, не проходящую через $O$, в окружность, проходящую через $O$. Какая точка переходит в центр этой окружности?

г) переводит окружность, не проходящую через $O$, в окружность, не проходящую через $O$. Переходит ли при этом центр одной окружности в центр другой?

**4.** Точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой, а точка $P$ — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников $ABP, BCP, CAP$ и точка $P$ лежат на одной окружности.

**5.** Две окружности, пересекающиеся в точке $A$, касаются третьей окружности в точках $B_1, C_1$ и четвертой в $B_2, C_2$. Докажите, что описанные окружности треугольников $AB_1C_1$ и $AB_2C_2$ касаются.

**6.** Точки $L$ и $M$ выбраны на описанной окружности треугольника $ABC$ таким образом, что $AL$ и $AM$ — биссектрисы соответственно внутреннего и внешнего углов треугольника. На продолжениях отрезков $AM$ и $AL$ выбраны точки $P$ и $Q$ соответственно таким образом, что $AM = MP$, $AL = LQ$. Описанные окружности треугольников $AMQ$ и $ALP$ вторично пересекаются в точке $S$. Докажите, что прямые $AS$ и $BC$ параллельны.