
Заключительная олимпиада.

Довывод

1 У трех братьев день рождения в один день. Когда старшему из них исполнилось двенадцать, оказалось что сумма возрастов всех братьев делится на двенадцать. То же самое случилось, когда среднему исполнилось двенадцать. Докажите, что то же самое случится, когда третьему исполнится двенадцать.

2 Найдите все решения в действительных числах уравнения

$$\max\{x^2 + y^2, 2\} = \min\{-2x, 2y\}.$$

3 Василий Иванович и его верный ординарец Петька пленили 999 белогвардейцев и начали их допрашивать. Известно, что любой белогвардеец "расколется"после трех заданных ему вопросов (но не раньше!), а "расколовшего"(то есть задавшего третий вопрос) его героя гражданской войны награждают орденом. Допрос происходит следующим образом. Сначала Василий Иванович выбирает любого еще "нерасколовшегося" белогвардейца и задает ему вопрос, затем то же самое делает Петька, затем - снова Василий Иванович и т.д. Какое наибольшее количество орденов может обеспечить себе легендарный комдив?

4 D - основание высоты, проведенной из точки A в треугольнике ABC. На некоторой прямой, проходящей через точку D, нашлись такие точки E и F, лежащие вне треугольника ABC, что $BE \perp AE$ и $AF \perp CF$. M и N - середины BC и EF соответственно. Докажите, что угол ANM - прямой.

5 Последовательность натуральных чисел $\{a_k\}$ такова, что $a_{k+3} = a_k a_{k+1} a_{k+2} + 1$ при любом $k \geq 1$. Докажите, что число $a_k - 43$ — составное для любого $k > 100$.

Вывод

6 На плоскости проведено бесконечно много прямых, никакие две из которых не параллельны. Известно, что для любого квадрата со стороной 1 найдется проведенная прямая, которая его пересекает. Докажите, что можно нарисовать квадрат со стороной $0,8$, который пересекают не менее чем три проведенные прямые.

7 В n-элементном множестве M выбрано n различных подмножеств $A_1, \ldots, A_n$. Докажите, что для некоторого $x \in M$ множества $A_1 \cup \{x\}, \ldots, A_n \cup \{x\}$ также различны.

8 Александр Львович задумал три целых неотрицательных числа, такие что сумма их попарных произведений составляет половину точного квадрата, а сумма их квадратов является степенью простого числа. Какие значения могло принимать это простое число?

Послевывод

9 Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до n. Известно, что сумма чисел на всех карточках равна $n! \cdot k$, где k – целое число. Доказать, что карточки можно разложить на k групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, написанных на карточках, равнялась $n!$.