XXIX Летняя Многопредметная Школа Кировской области
3-28 июля 2013 г., с. Вишкиль

Числовые поля. 6 июля

Опредление. Подмножество множества комплексных чисел, замкнутое относительно четырёх арифметических операций и содержащее хоть одно число, отличное от нуля, называется *числовым полем.*

1. Являются ли числовыми полями следующие множества: 1) множество всех рациональных чисел; 2) множество всех целых чисел; 3) множество всех положительных чисел; 4) множество всех корней квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами; 5) множество чисел $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональные?

Последнее множество является числовым полем и обозначается $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

2. Докажите, что любое числовое поле содержит все рациональные числа.

3. Докажите, что любое числовое поле, содержащее $\sqrt{2}$, содержит любой элемент из $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Тем самым будет доказано, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ является наименьшим по включиению полем, содержащим $\sqrt{2}$.

4. а) Образуют ли числовое поле числа вида $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, где $a,b,c\in\mathbb{Q}$?

б) Представьте число $\frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}}$ в виде $u+x\sqrt{2}+y\sqrt{3}+z\sqrt{6}$. (Все числа, обозначенные бувками, предполагаются рациональными.) Обязательно ли такое представление единственно?

в) Докажите, что существует наименьшее по включению числовое поле, содержащее $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Какие числа в него входят?

5. Какие числа входят в минимальное по включению числовое поле, содержащее $\sqrt[3]{2}$?

6. Квадрат разрезан на прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2. Докажите, что число треугольников четно.

7. Докажите, что квадрат нельзя разрезать на равные прямоугольные треугольнике с углом 30°.

8. Квадрат со стороной 1 разрезали на равные прямоугольники. Докажите, что стороны прямоугольников рациональны.

XXIX Летняя Многопредметная Школа Кировской области
3-28 июля 2013 г., с. Вишкиль

Числовые поля. 6 июля

Опредление. Подмножество множества комплексных чисел, замкнутое относительно четырёх арифметических операций и содержащее хоть одно число, отличное от нуля, называется *числовым полем.*

1. Являются ли числовыми полями следующие множества: 1) множество всех рациональных чисел; 2) множество всех целых чисел; 3) множество всех положительных чисел; 4) множество всех корней квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами; 5) множество чисел $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональные?

Последнее множество является числовым полем и обозначается $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

2. Докажите, что любое числовое поле содержит все рациональные числа.

3. Докажите, что любое числовое поле, содержащее $\sqrt{2}$, содержит любой элемент из $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Тем самым будет доказано, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ является наименьшим по включиению полем, содержащим $\sqrt{2}$.

4. а) Образуют ли числовое поле числа вида $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, где $a,b,c\in\mathbb{Q}$?

б) Представьте число $\frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}}$ в виде $u+x\sqrt{2}+y\sqrt{3}+z\sqrt{6}$. (Все числа, обозначенные бувками, предполагаются рациональными.) Обязательно ли такое представление единственно?

в) Докажите, что существует наименьшее по включению числовое поле, содержащее $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Какие числа в него входят?

5. Какие числа входят в минимальное по включению числовое поле, содержащее $\sqrt[3]{2}$?

6. Квадрат разрезан на прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2. Докажите, что число треугольников четно.

7. Докажите, что квадрат нельзя разрезать на равные прямоугольные треугольнике с углом 30°.

8. Квадрат со стороной 1 разрезали на равные прямоугольники. Докажите, что стороны прямоугольников рациональны.