План доказательства основной теоремы алгебры. 19 июля.

Основная теорема алгебры. Всякий непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

План доказательства.

Будем доказывать, что у многочлена $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ есть комплексный корень.

Шаг 1. Функция $|f(z)|$ непрерывна на всей комплексной плоскости.

Шаг 2. (Лемма о поведении многочлена "вдали"). Для любой контстанты $c \in \mathbb{R}$ существует такое R, что при $|z| > R$ выполнено $|f(z)| > c$.

Шаг 3. Подбираем c и соответствующее R так, чтобы минимум $|f(z)|$ на круге радиуса R стал и глобальным минимумом функции. (Для этого достаточно взять $c > |f(0)|$.)

Шаг 4. На круге радиуса R непрерывная функция достигает минимум. (Который в итоге является и глобальным.)

Шаг 5. Если минимальное значение $|f(z)| = 0$, то доказательство завершено. если же минимум достигается в точке z_0 и $f(z_0) = q \neq 0$, то рассмотрим разностый многочлен $g(\delta) = f(z_0 + \delta) - f(z_0)$. У этого многочлена свободный член равен 0.

Шаг 6. (Лемма о поведении многочлена "вблизи"). Пусть

$$g(\delta) = b_m\delta^m + b_{m+1}\delta^{m+1} + \dots b_n\delta^n,$$

причём степени здесь расположены в порядке возрастания, то есть b_m — коэффициент при самой младшей степени из тех, коэффициент при которых не равен 0. Введём обозначение $h(\delta) = g(\delta) - b_m\delta^m$. Тогда существует такое r, что для любого $\delta \in \mathbb{C}$ такого, что $|\delta| < r$ выполнены неравенства:

$$\frac{|q|}{2} > |b_m\delta^m| > 2|h(\delta)|.$$

Шаг 7. Существует такое $\delta \in \mathbb{C}$, что $|\delta| < r$ и $q + b_m\delta^m$ лежит на отрезке между 0 и q.

Шаг 8. Для выбранного δ выполнено неравенство $|q + g(\delta)| < |q|$, что противоречит тому, что q — минимум функции.

Следствие 1. Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ имеют степень 1.

Следствие 2. Всякий многочлен $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ степени n раскладывается на n сомножителей первой степени $f(z) = a(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ — корни многочлена f.

Следствие 3. Неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ — это многочлены степени 1 или квадратные трёхчлены с отрицательным дискриминантом.