Математический бой "Профи-8 – Профи-9". Вариант N. 17 июля

1 Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в какие-то две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times 2$ м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравьи отличают вершины от не вершин, но все вершины изначально для них равноправны и направления тоже. Муравей знает, сколько он прополз, и сможет отличить длинное ребро от короткого, добравшись до его середины. Муравей запоминает направления поворотов в пространстве и направления ребер, выходящих из вершин, где он бывал. Друг друга муравьи заметят только оказавшись в одной точке).

2 210 точек расположены на плоскости таким образом, что любые 209 из них лежат на 14 прямых. Докажите, что все точки лежат на 14 прямых.

3 Для каких простых p все числа вида $4n^2 + p$ – простые для любого $n = 1, 2, \ldots, p-1$?

4 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов B и D параллельны. Биссектриса угла B пересекает диагональ AC в точке K, а биссектриса угла D пересекает её в точке M так, что $AK = CM$ (точки K и M различны). Докажите, что отрезки KD и BM равны.

5 На доске выписаны N различных иррациональных чисел. Известно, что для любых выписанных a и b хотя бы одно из чисел $\frac{a}{b+1}$, $\frac{b}{a+1}$ рационально. Каково наибольшее возможное значение N?

6 В треугольнике есть сторона больше 1. Всегда ли его можно разрезать на несколько треугольников, в каждом из которых есть сторона, равная 1?

7 Правильный треугольник с стороной длины 99 разбит на 99^2 клеток – правильных треугольников со стороной 1. У клеток всего 5050 вершин, в каждую вершину положили по монете. Монеты могут быть разного веса. Известно, однако, что у всех клеток, кроме одной, суммарные веса трех монет в вершинах одинаковы, а у этой одной клетки эта сумма меньше. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти «легкую» клетку?

8 Треугольник ABC вписан в окружность. Через точку A проведены хорды, пересекающие сторону BC в точках K и L и дугу BC в точках M и N. Докажите, что если вокруг четырехугольника $KLNM$ можно описать окружность, то треугольник ABC – равнобедренный.

9 На прямой отмечено конечное число точек. Известно, что для любых двух из них можно выбрать третью так, что среди этих трех одна лежит ровно посредине между двумя другими. Каково наибольшее возможное число отмеченных точек?

10 Действительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что все числа $2a - \frac{1}{b}, 2b - \frac{1}{c}, 2c - \frac{1}{a}$ не могут быть одновременно больше 1.