Группы. 10 июля.

Определение. Множество G с бинарной операцией $*$ называется *группой* $(G, *)$, если выполнены следующие аксиомы:
1) **(ассоциативность)** для любых $a, b, c \in G$ имеет место $a * (b * c) = (a * b) * c$;
2) **(существование нейтрального элемента)** существует элемент $e \in G$ такой, что для любого $a \in G$ выполнено $e * a = a * e = a$;
3) **(существование обратного элемента)** для любого элемента $a \in G$ существует элемент b такой, что $a * b = b * a = e$.

Определение. Группа G с операцией $*$ называется *коммутативной* (или *абелевой*), если $\forall a, b \in G \quad a*b = b * a$.

1. а) Докажите единственность нейтрального элемента.
б) Докажите единственность обратного элемента.

2. Являются ли следующие множества с бинарными операциями на них группами (если являются, то абелевыми или нет):
а) целые числа с операцией сложения $(\mathbb{Z}, +)$;
б) натуральные числа с операцией сложения $(\mathbb{N}, +)$;
в) действительные числа с операцией умножения $(\mathbb{R}, \times)$;
г) действительные положительные числа с операцией умножения $(\mathbb{R}_+, \times)$;
д) множество векторов на плоскости с операцией сложения;
е) множество многочленов от трёх переменных над полем $\mathbb{F}_7$ с операцией сложения;
д) интервал $(-c, c)$ с операцией $u \circ v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$;
е) множество движений плоскости с операцией композиции;
ж) множество поворотов с операцией композиции;
з) множество перестановок n элементов с операцией композиции (S_n);
и) множество чётных перестановок n элементов с операцией композиции;
к) множество нечётных перестановок n элементов с операцией композиции;
л) множество перестановок 10 элементов, которые являются третьими степеням каких-то других перестановок;
м) множество остатков по модулю n с операцией сложения $(\mathbb{Z}_n, +)$;
н) множество ненулевых остатков по модулю n с операцией умножения $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \times)$.

Определение. Количество элементов группы G называется *порядком* группы G и обозначается $|G|$.

Порядок группы может быть и бесконечным.

Определение. *Порядком* элемента g называется минимальное такое натуральное n, что $g^n = e$. Если такого n не существует, говорят, что g — элемент бесконечного порядка. Порядок элемента g обозначается $|g|$.

3. Докажите, что в конечной группе каждый элемент имеет конечный порядок.

4. Могут ли в бесконечной группе все элементы иметь конечный порядок?

Определение. Подмножество группы G, которое само является группой относительно той же операции, называется *подгруппой* группы G. Обозначение: $H \leq G$.

5. Докажите, что пересечение любого набора подгрупп является подгруппой.

6. Может ли собственная подгруппа группы быть изоморфной всей группе?

Определение. Пусть $H \leq G$ и $g \in G$. Множество $gH = \{g * h \,|\, h \in H\}$ называется *левым смежным классом* группы G по подгруппе H.

7. Докажите, что два левых смежных класса по одной и той же подгруппе либо не пересекаются, либо совпадают.

8. Опишите множество смежных классов для следующих групп и подгрупп: а) $\mathbb{R} \leq \mathbb{C}$; б) $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$; в) $\mathbb{R}^* \leq \mathbb{C}^*$; г) подгруппа параллельных переносов в группе движений; д) подгруппа поворотов вокруг данной точки в группе движений.

Определение. Количество смежных классов называется *индексом* подгруппы H в группе G и обозначается $[G : H]$.

9. (**Теорема Лагранжа**) Для конечной группы G Докажите, что а) $|G| = [G : H] \cdot |H|$ для всякой подгруппы H; б) $|G|$ делится на $|g|$ для всякого элемента g.