Многочлены от нескольких переменных. 6 июля

Обсуждаем: Одночлен от данного набора переменных, степень одночлена, многочлен, как сумма одночленов, однородный многочлен, однородная компонента многочлена, степень многочлена, коэффициенты.

В этом листочке все многочлены предполагаются с действительными коэффициентами.

1 а) Пусть f и g - два многочлена от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $fg = 0$. Докажите, что тогда либо $f = 0$, либо $g = 0$.

б) Докажите, что степень произведения двух многочленов равна сумме их степеней.

2 Докажите, что многочлен $x^{200}y^{200} + 1$ нельзя представить в виде произведения многочлена от переменной x и многочлена от переменной y.

3 а) Многочлен $f(x_1, x_2)$ обращается в нуль при любых действительных значениях x_1 и x_2. Докажите, что $f = 0$.

б) Докажите тот же результат для многочлена от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

4 Существуют ли многочлены от трёх переменных $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$, для которых выполнено тождество $(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - 2x + 1)^3 R = 1$?

5 Найдите число одночленов суммарной степени d от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

6 Существует ли многочлен от x и y, множество значений которого есть в точности множество положительных чисел?

7 Докажите, что для любого натурального числа n можно подобрать многочлен P от переменных $x_1, \ldots, x_n$, для которого многочлен $(x_1 + \cdots + x_n)P(x_1, \ldots, x_n)$ есть многочлен от квадратов этих переменных.

8 Докажите, что многочлен от двух переменных $P(x, y)$ обращается в нуль во всех точках прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, тогда и только тогда, когда существует многочлен $Q(x, y)$, такой что $P(x, y) = (ax + by + c)Q(x, y)$.

9 Докажите, что многочлен $x^2y^2(x^2+y^2-3)+1$ принимает только неотрицательные значения, но при этом его нельзя представит в виде суммы нескольких квадратов многочленов.

10 Даны многочлены $P(x), Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x, y)$ выполняется равенство $P(x) - P(y) = R(x, y)(Q(x) - Q(y))$. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$.