XXIX Кировская Летняя Многопредметная Школа
Вишкиль, 3–28 июля 2013 года. Профи 9.

Разнобой-1. 05.07.2013

1. Докажите, что найдется такое натуральное число n, что у числа $2^n + 3$ не менее 2013 различных простых делителей.

2. Расстояния от ортоцентра до вершин треугольника равны x, y и z. Радиус описанной окружности равен R. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3R^2$.

3. Даны два многочлена положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причем выполнены тождества $P(P(x)) = Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли тогда выполнено тождество $P(x) = Q(x)$?

4. Дана бесконечная последовательность вещественных чисел x_1, x_2, ... Докажите, что если среди всевозможных упорядоченных t-элементных наборов вида x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{k+t} имеется не более t различных, то последовательность переодична (возможно, с предпериодом).

5. Найдите количество маршрутов хромой ладьи на доске $3 \times n$, которые начинаются в левом нижнем углу, проходят по всем клеткам ровно один раз и заканчиваются в правом верхнем углу. (Хромой ладьей называется фигура, которая может ходить только в соседнюю по стороне клетку.)

6. Числа $a, b, c \in \mathbb{R}$ таковы, что $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что одно из чисел a, b и c равно 1.

7. Числа $k, n \in \mathbb{N}$ таковы, что $k < n$. Дана таблица $k \times n$, в каждой клетке которой записано целое число от 1 до n. При этом в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Докажите, что эту таблицу можно дополнить до квадрата $n \times n$, записав в каждую новую клетку какое-нибудь целое число от 1 до n так, чтобы по-прежнему в в каждой строке и в каждом столбце все числа были различны.

8. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки M, N и K, соответственно. Окружности, описанные около треугольников AMK и CNK, касаются прямой MN. Радиусы этих окружностей — R_1 и R_2. Найти радиус окружности, описанной около тругольника MNB.

XXIX Кировская Летняя Многопредметная Школа
Вишкиль, 3–28 июля 2013 года. Профи 9.

Разнобой-1. 05.07.2013

1. Докажите, что найдется такое натуральное число n, что у числа $2^n + 3$ не менее 2013 различных простых делителей.

2. Расстояния от ортоцентра до вершин треугольника равны x, y и z. Радиус описанной окружности равен R. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3R^2$.

3. Даны два многочлена положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причем выполнены тождества $P(P(x)) = Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли тогда выполнено тождество $P(x) = Q(x)$?

4. Дана бесконечная последовательность вещественных чисел x_1, x_2, ... Докажите, что если среди всевозможных упорядоченных t-элементных наборов вида x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{k+t} имеется не более t различных, то последовательность переодична (возможно, с предпериодом).

5. Найдите количество маршрутов хромой ладьи на доске $3 \times n$, которые начинаются в левом нижнем углу, проходят по всем клеткам ровно один раз и заканчиваются в правом верхнем углу. (Хромой ладьей называется фигура, которая может ходить только в соседнюю по стороне клетку.)

6. Числа $a, b, c \in \mathbb{R}$ таковы, что $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что одно из чисел a, b и c равно 1.

7. Числа $k, n \in \mathbb{N}$ таковы, что $k < n$. Дана таблица $k \times n$, в каждой клетке которой записано целое число от 1 до n. При этом в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Докажите, что эту таблицу можно дополнить до квадрата $n \times n$, записав в каждую новую клетку какое-нибудь целое число от 1 до n так, чтобы по-прежнему в в каждой строке и в каждом столбце все числа были различны.

8. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки M, N и K, соответственно. Окружности, описанные около треугольников AMK и CNK, касаются прямой MN. Радиусы этих окружностей — R_1 и R_2. Найти радиус окружности, описанной около тругольника MNB.