

Непрерывность. 11 июля

Определение. Подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ называется всякая последовательность $\{x_{n_k}\}$, где n_k — это некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел.

1. а) Докажите, что a является точкой сгущения последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда некоторая ее подпоследовательность сходится к a . б) Докажите, что из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. в) Докажите, что у всякой ограниченной последовательности есть точка сгущения.

Определение. Функция f называется *непрерывной* в a , если она определена в a и для всякой последовательности x_n , сходящейся к a , последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(a)$.

Говорят, что f непрерывна на некотором множестве, если она непрерывна в каждой его точке.

2. Непрерывность монотонной функции. Функция f монотонна на промежутке \mathfrak{X} и принимает на нем все значения из промежутка \mathfrak{Y} и только их. Докажите, что f непрерывна на \mathfrak{X} . (Промежутки могут быть как открытыми, так и замкнутыми, как ограниченными, так и неограниченными.)

3. а) Докажите, что функция $f(x) = x^n$ непрерывна на всей вещественной оси для всякого $n \in \mathbb{N}$. б) Докажите, что всякий многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ непрерывен на \mathbb{R} .

4. Теоремы Больцано-Коши о среднем значении. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. а) Известно, что $f(a)f(b) \leq 0$. Докажите, что найдется такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = 0$. б) Пусть $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Докажите, что для всякого C между A и B найдется такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

5. Пусть f — непрерывная функция, определенная на отрезке $[0, 1]$ такая, что $f(0) = f(1) = 0$. а) Верно ли, что на графике f найдется хорда длины $\frac{1}{3}$, параллельная оси (OX)? б) При каких ℓ на графике f заведомо найдется хорда длины ℓ , параллельная оси (OX)?

6. Теоремы Вейерштрасса. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. а) Докажите, что $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ сверху и снизу. б) Докажите, что найдутся такие $x_0, x_1 \in [a, b]$, что $f(x_0)$ и $f(x_1)$ будут, соответственно, наибольшим и наименьшим из всех значений $f(x)$ на $[a, b]$.

7. Найдите пределы следующих последовательностей: а) $\sqrt[n]{n}$; б) $\frac{n^{2013}}{1.01^n}$.