XXIX Летняя Многопредметная Школа Кировской области
3-28 июля 2013 г., с. Вишкиль

Разнобой-2. 6 июля

1. Дан вписанный шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

2. Вещественные числа x, y, z принадлежат отрезку $[0, 1]$. Докажите, что

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x^2y + y^2z + z^2x + 1.$$

3. У каждого жителя города N знакомые составляют не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы мэра, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Выборы считаются состоявшимися, если явка избирателей не меньше 50%. Докажите, что можно провести выборы с двумя кандидатами, на которых будет необходимая явка.

4. Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы трех точных квадратов не менее чем миллионом различных способов.

5. В треугольнике ABC точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей. Вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках K и M соответственно, а стороны BC — в точке N. Оказалось, что середина отрезка KM лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки O, I и N лежат на одной прямой.

6. Положительные иррациональные числа p и q таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что каждое натуральное число является членом ровно одной из последовательностей $[np]$ и $[nq]$.

7. Существует ли многочлен степени 2013 с целыми коэффициентами такой, что его значения в точках $1, 2, \ldots 2014$ — это различные степени двойки?

8. В клетках таблицы $m \times n$ записаны различные числа. В каждой строке подчеркнули k наибольших чисел, а каждом столбце — ℓ наибольших чисел. Докажите, что по меньшей мере $k\ell$ чисел подчёркнуты дважды.

XXIX Летняя Многопредметная Школа Кировской области
3-28 июля 2013 г., с. Вишкиль

Разнобой-2. 6 июля

1. Дан вписанный шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

2. Вещественные числа x, y, z принадлежат отрезку $[0, 1]$. Докажите, что

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x^2y + y^2z + z^2x + 1.$$

3. У каждого жителя города N знакомые составляют не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы мэра, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Выборы считаются состоявшимися, если явка избирателей не меньше 50%. Докажите, что можно провести выборы с двумя кандидатами, на которых будет необходимая явка.

4. Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы трех точных квадратов не менее чем миллионом различных способов.

5. В треугольнике ABC точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей. Вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках K и M соответственно, а стороны BC — в точке N. Оказалось, что середина отрезка KM лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки O, I и N лежат на одной прямой.

6. Положительные иррациональные числа p и q таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что каждое натуральное число является членом ровно одной из последовательностей $[np]$ и $[nq]$.

7. Существует ли многочлен степени 2013 с целыми коэффициентами такой, что его значения в точках $1, 2, \ldots 2014$ — это различные степени двойки?

8. В клетках таблицы $m \times n$ записаны различные числа. В каждой строке подчеркнули k наибольших чисел, а каждом столбце — ℓ наибольших чисел. Докажите, что по меньшей мере $k\ell$ чисел подчёркнуты дважды.