Останки геометрии. 21 июля.

1. Докажите, что биекция плоскости на себя является аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда она переводит центры масс в центры масс.

2. Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношение площадей треугольников.

3. Даны две параллельные прямые. На одной из них отмечен отрезок длины 1. Докажите, что можно с помощью одной линейки построить отрезок любой рациональной длины.

4. Докажите, что с помощью одной линейки нельзя построить биссектрису угла.

5. Точки A_1, B_1, C_1 делят соответственно стороны BC, CA, AB треугольника ABC в одном и том же отношении. Доказать, что совпадают точки пересечения медиан треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и треугольника с вершинами в точках пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1.

6. Дана треугольная призма. Проводятся два сечения, не пересекающие основания призмы и не задевающие друг друга. Могли ли эти сечения оказаться правильными треугольниками со стороной 1 и со стороной $1,01$?

Определение Дана окружность ω с центром в точке O радиусом R. *Полярой* точки $X \neq O$ относительно окружности ω называется геометрическое множество точек Y таких, что $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY} = R^2$.

7. Докажите, что поляра точки является прямой.

Если x — поляра точки X, то точку X называют *полюсом* прямой x.

8. а) Даны две точки A и B, прямые a и b — их поляры. Докажите, что $A \in b \Longleftrightarrow B \in a$.

б) Пусть A, B, C — точки плоскости, a, b, c — их поляры. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда прямые a, b, c пересекаются в одной точке или параллельны.

в) Отрезки KA и KB касаются окружности ω. Докажите, что прямая AB — поляра точки K.

г) **(Гармонический четырёхугольник.)** Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Касательные к описанной окружности, проведённые в точках B и D пересекаются на прямой AC. Докажите, что касательные к описанной окружности, проведённые в точках A и C пересекаются на прямой BD.

9. (Теорема Брианшона.) Каждая сторона шестиугольника $ABCDEF$ касается окружности ω. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке. (*Указание: воспользуйтесь теоремой Паскаля.*)