Поле, конечное поле. 21 июля

Квазиопределение: Будем называть натуральное число n *полепригодным*, если существует поле из n элементов. Возникает вопрос: а какие числа являются полепригодными? Мы знаем, что в частности все простые являются.

1 а) Является ли полепригодным число 4?

б) А число 6?

2 Пусть F - поле из n элементов.

а) Докажите, что $g^{n-1} = 1$ для любого $g \in F$, $g \neq 0$. (*Подсказка:* вспоминаем листок про группы)

б) Докажите, что в F есть ровно $\phi(n-1)$ *первообразных корней*, то есть таких $g \in F,\ g \neq 0$, что $g^m \neq 1$ для $0 < m < n-1$.

3 Пусть n - полепригодное число. Докажите, что можно покрасить все ребра полного графа K на n^2 вершинах в $n+1$ цвет, так чтобы в любом одноцветном связном подграфе графа K содержалось бы не более n вершин.

4 **Латинские квадраты**

Латинским квадратом порядка n называется квадрат $n \times n$, в клетках которого расставлены числа $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, так что в каждом столбце и в каждой строке все числа различны. Два латинских квадрата называются *ортогональными*, если при наложении одного на другой каждая из пар $(i, j),\ 0 \leq i \leq n-1,\ 0 \leq j \leq n-1$ встречается в клетках образовавшегося квадрата ровно один раз.

а) Докажите, что нельзя выбрать более чем $n-1$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n.

б) Пусть n - полепригодное число. Докажите, что можно выбрать $n-1$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n.

5 **Конечные плоскости**

Конечной аффинной плоскостью порядка n называется множество из n^2 элементов, в котором выделен некоторый набор n-элементных подмножеств (прямых), так что любые две различные точки лежат на одной прямой, любые две различные прямые пересекаются не более чем в одной точке, и через любую точку проходит ровно одна прямая, параллельная данной.

а) Докажите существование конечной аффинной плоскости порядка n для любого полепригодного числа n.

б) Пусть n - полепригодное число. В пространстве даны n^2 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причем отрезки не пересекаются друг с другом. Каждый отрезок покрашен в один из $n-1$ цветов. Петя хочет покрасить каждую точку в один из этих цветов так, чтобы не нашлось двух точек и отрезка между ними, окрашенных в один цвет. Всегда ли Пете это удастся?

Конечной проективной плоскостью порядка n называется множество из $n^2 + n + 1$ элементов, в котором выделен некоторый набор $n+1$-элементных подмножеств (прямых), так что любые две различные точки лежат на одной прямой и любые две различные прямые пересекаются ровно в одной точке.

в) Докажите существование конечной проективной плоскости порядка n для любого полепригодного числа n.

г) Пусть n - полепригодное число. Какое наибольшее количество клеток можно отметить в квадрате $n^2+n+1 \times n^2+n+1$, чтобы никакие четыре отмеченные клетки не образовывали прямоугольник?

6 Докажите, что число p^2 является полепригодным для любого простого p.