Идея локального порядка 2: теорема Ван-дер-Вардена. 20 июля

Теорема Ван-дер-Вардена: Для любых натуральных k и r существует такое натуральное $W(k,r)$, что при любой раскраске чисел $\{1,2,\ldots,W(k,r)\}$ в r цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины k.

1 Докажите, что можно взять $W(3,2)=9$, но не $W(3,2)=8$.

2 Заполните пробелы в доказательстве теоремы Ван-дер-Вардена.

Доказательство: Будем вести индукцию по k: база для $k=1$ очевидна, будем доказывать переход $k-1\to k$.

Определение: Пучком прогрессий (ранга d, радиуса k, с корнем в a) назовем набор из d различных арифметическим прогрессий длины k, все из которых начинаются с одного и того же числа a. Тогда каждую из этих прогрессий (без корня) будем называть веткой пучка. Будем говорить, что пучок является *полихроматическим*, если внутри каждой ветки все числа покрашены в один цвет, эти цвета различны для разных веток и отличны от цвета, в который покрашен корень. Нам понадобится

Лемма: Предположим, что теорема Ван-дер-Вардена верна для $k-1$. Тогда для любых натуральных $d\le r$ существует такое натуральное $M(k,d,r)$, что при любой раскраске чисел $\{1,2,\ldots,M(k,d,r)\}$ в r цветов найдется либо одноцветная арифметическая прогрессия длины k, либо полихроматический пучок радиуса k и ранга d.

а) Выведите из леммы переход индукции.

б) Завершите доказательство леммы, приведенное ниже.

Доказательство леммы:

Будем доказывать лемму индукцией по d. База для $d=1$ очевидна (почему?) Рассмотрим переход $d-1\to d$. Пусть $N_1=M(k,d-1,r)$, $N_2=W(k-1,r^dN_1^d)$, $N=2N_1N_2$. Покажем, что можно взять $M(k,d,r)=N$. Предположим, что это не так, и возьмем раскраску, для которой условие не выполняется. Тогда для любого $N_2\le b\le 2N_2-1$ среди чисел $\{bN_1+1,\ldots,bN_1+N_1\}$ найдется полихроматический пучок радиуса k и ранга $d-1$. Покрасим числа $\{N_2,N_2+1,\ldots,2N_2-1\}$ в $\le r^dN_1^d$ цветов следующим образом …

3 а) Пусть $\{a_1<a_2<\ldots<a_n<\ldots\}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел, такая что $a_{i+1}-a_i<2013$ для любого i. Докажите, что эта последовательность содержит сколь угодно длинные арифметические прогрессии.

б) Докажите, что можно покрасить все натуральные числа в два цвета, так чтобы не нашлось бесконечной одноцветной арифметической прогрессии.

в) На бесконечной полоске клетчатой бумаги записаны целые числа. Докажите, что для любых натуральных m и n найдутся такие m одинаковых отрезков полоски, идущих подряд, что сумма чисел внутри каждого из них делится на n.

г) Докажите, что для любого действительного θ существует такое натуральное n, что θn^2 отличается от целого менее чем на 10^{-100}.

4 **Теорема Фолкмана:** Для любых натуральных k и r существует такое натуральное $F(k,r)$, что при любой раскраске чисел $\{1,2,\ldots,F(k,r)\}$ в r цветов найдется такое подмножество S из k одноцветных чисел, что сумма нескольких различных чисел из S всегда будет иметь тот же цвет.

а) Докажите, что для любых натуральных r и k существует такое натуральное $n(k,r)$, что при любой раскраске чисел $\{1,2,\ldots,n(k,r))\}$ в r цветов можно выбрать числа $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n(k,r)$, такие что $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq n(k,r)$ и для любых двух подмножеств $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ с одинаковым максимальным числом, суммы элементов в этих подмножествах имеют один и тот же цвет. (*Подсказка:* Докажите это индукцией по k. Покажите, что для перехода достаточно взять $n(k+1,r) = 2W(r, n(r,k)+1))$.

б) Выведите теорему Фолкмана из предыдущей задачи; покажите, что можно взять $W(k,r) = n(r,(r-1)k+1)$.

5 Докажите, что из $\{0,1,\ldots 3^n - 1\}$ можно выбрать 2^n чисел, никакие три из которых не образуют арифметическую прогрессию.