Двадцать девятая
Летняя Многопредметная Школа
Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2013 г.

9 класс, группа профи

Преподаватели:
В. А. Брагин, А. Л. Глазман, К. А. Матвеев

Я не боюсь того, кто выучил тысячу ударов. Я боюсь того, кто 1000 раз выучил один удар.
Брюс Ли

В этот раз нам бы хотелось написать краткое, но серьезное предисловие. Давайте зададимся вопросом: а что именно делает летние школы, кружки, математические классы и прочие околоолимпиадные вещи столь особенными и значимыми? Нам кажется, что ключевое слово здесь *небезразличие*. Человек всегда является элементом каких-то систем, и зачастую они давят на него своим формализмом и равнодушием, заставляя принимать безличные правила игры. Пловец, оказавшийся в середине озера, может выплыть или утонуть в зависимости от сил физических и силы воли, но воде в озере до этого нет никакого дела. Вам эта мысль может показаться тривиальной, но мы не раз и не два видели талантливых ребят, которые, попадая в университет, теряли направление движения и не реализовывали свои возможности только потому, что система резко переставала пытаться подобрать к ним ключик. Они были интересны своим учителям и руководителям кружков, но другая реальность требовала иных усилий и не все успевали к ней приспособиться.

Поэтому то, что на наш взгляд является одним из самых важных элементов ЛМШ, это возможность не чувствовать себя одним пловцом, пусть сильным, пусть даже чемпионом. Это высокая степень небезразличия, интереса к тому, чтобы сделать лучше и правильнее для многих, постараться отыскать нужные ключики, потратив на это душевные и физические усилия, и далеко не только для собственного удовлетворения. Эта та степень, которая отличала наших учителей в ЛМШ (и за ее пределами), которая сделала это место чем-то большим чем просто беспорядочная россыпь ветхих корпусов. Очень хочется надеяться, что в какой-то мере эта степень небезразличия была свойственна и нам. Во всяком случае, мы старались.

Алгебра и теория чисел.

Числовые поля. 6 июля

Опредление. Подмножество множества комплексных чисел, замкнутое относительно четырёх арифметических операций и содержащее хоть одно число, отличное от нуля, называется *числовым полем.*

1. Являются ли числовыми полями следующие множества: 1) множество всех рациональных чисел; 2) множество всех целых чисел; 3) множество всех положительных чисел; 4) множество всех корней квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами; 5) множество чисел $a + b\sqrt{2}$, где a и b рациональные?

Последнее множество является числовым полем и обозначается $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

2. Докажите, что любое числовое поле содержит все рациональные числа.

3. Докажите, что любое числовое поле, содержащее $\sqrt{2}$, содержит любой элемент из $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Тем самым будет доказано, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ является наименьшим по включиению полем, содержащим $\sqrt{2}$.

4. а) Образуют ли числовое поле числа вида $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$?

б) Представьте число $\frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}}$ в виде $u + x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{6}$. (Все числа, обозначенные бувками, предполагаются рациональными.) Обязательно ли такое представление единственно?

в) Докажите, что существует наименьшее по включению числовое поле, содержащее $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Какие числа в него входят?

5. Какие числа входят в минимальное по включению числовое поле, содержащее $\sqrt[3]{2}$?

6. Квадрат разрезан на прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2. Докажите, что число треугольников четно.

7. Докажите, что квадрат нельзя разрезать на равные прямоугольные треугольнике с углом 30°.

8. Квадрат со стороной 1 разрезали на равные прямоугольники. Докажите, что стороны прямоугольников рациональны.

Многочлены от нескольких переменных. 6 июля

Обсуждаем: Одночлен от данного набора переменных, степень одночлена, многочлен, как сумма одночленов, однородный многочлен, однородная компонента многочлена, степень многочлена, коэффициенты.

В этом листочке все многочлены предполагаются с действительными коэффициентами.

1 а) Пусть f и g - два многочлена от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $fg = 0$. Докажите, что тогда либо $f = 0$, либо $g = 0$.

б) Докажите, что степень произведения двух многочленов равна сумме их степеней.

2 Докажите, что многочлен $x^{200}y^{200}+1$ нельзя представить в виде произведения многочлена от переменной x и многочлена от переменной y.

3 а) Многочлен $f(x_1, x_2)$ обращается в нуль при любых действительных значениях x_1 и x_2. Докажите, что $f = 0$.

б) Докажите тот же результат для многочлена от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

4 Существуют ли многочлены от трёх переменных $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$, для которых выполнено тождество $(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - 2x + 1)^3 R = 1$?

5 Найдите число одночленов суммарной степени d от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

6 Существует ли многочлен от x и y, множество значений которого есть в точности множество положительных чисел?

7 Докажите, что для любого натурального числа n можно подобрать многочлен P от переменных $x_1, \ldots, x_n$, для которого многочлен $(x_1 + \cdots + x_n)P(x_1, \ldots, x_n)$ есть многочлен от квадратов этих переменных.

8 Докажите, что многочлен от двух переменных $P(x, y)$ обращается в нуль во всех точках прямой, заданной уравнением $ax+by+c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, тогда и только тогда, когда существует многочлен $Q(x, y)$, такой что $P(x, y) = (ax + by + c)Q(x, y)$.

9 Докажите, что многочлен $x^2y^2(x^2+y^2-3)+1$ принимает только неотрицательные значения, но при этом его нельзя представит в виде суммы нескольких квадратов многочленов.

10 Даны многочлены $P(x), Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x, y)$ выполняется равенство $P(x) - P(y) = R(x, y)(Q(x) - Q(y))$. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$.

Поля. 09 июля.

Определение. Множество $\mathbb{F}$ с операциями $+$ и $\times$ называется *полем*, если выполнены следующие аксиомы:

1) **(ассоциативность сложения)** $\forall a,b,c \in \mathbb{F} \quad (a+b)+c = a+(b+c)$;

2) **(коммутативность сложения)** $\forall a,b \in \mathbb{F} \quad a+b = b+a$;

3) **(существование нуля)** $\exists 0 \in \mathbb{F} : \forall a \in \mathbb{F} \quad a+0 = 0+a = a$;

4) **(существование обратного по сложению элемента)** $\forall a \in \mathbb{F}\ \exists b : a+b = b+a = 0$;

5) **(ассоциативность умножения)** $\forall a,b,c \in \mathbb{F} \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$;

6) **(коммутативность умножения)** $\forall a,b \in \mathbb{F} \quad a \times b = b \times a$;

7) **(существование единицы)** $\exists 1 : \forall b \quad b \times 1 = 1 \times b = b$;

8) **(существование обратного по умножению элемента)** $\forall b \neq 0 \quad \exists a : a \times b = b \times a = 1$;

9) **(дистрибутивность)** $\forall a,b,c \in \mathbb{F} \quad a \times (b+c) = a \times b + a \times c$;

10) в поле $1 \neq 0$.

1. Докажите, что в поле $0 \times a = a \times 0 = 0$.

2. Докажите, что нулевой элемент, единица, обратный по сложению и обратный по умножению единственны.

Аксиомы поля позволяют рассматривать многочлены, коэффициенты которых — это элементы поля. С такими многочленами можно выполнять все привычные операции и получать привычные итоги (деление с остатком, теорема Безу, наибольший общий делитель, главноидеальность, разложение на неприводимые множители).

3. Докажите, что любая функция на поле $\mathbb{F}_p$ со значениями в $\mathbb{F}_p$ представляется в виде многочлена.

4. а) Докажите, что у многочлена $(x+1)^{2^k}$ над $\mathbb{F}_2$ всего два ненулевых коэффициента. б) Найдите количество ненулевых коэффициентов многочлена $(x+1)^{2013}$ над $\mathbb{F}_2$.

Определение. Даны два поля $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{F}_2$. Отображение $\varphi : \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{F}_2$ называется *изоморфизмом*, если оно является биекцией, и для любых $x, y \in \mathbb{F}_1$ выполнено $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Определение. Поля называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

Определение. Изоморфизм из поля в само себя называется автоморфизмом.

5. Докажите, что при любом изоморфизме ноль переходит в ноль, единица в единицу.

6. Докажите, что при любом изоморфизме разность переходит в разность, а частное – в частное.

7. Докажите, что изоморфность полей есть отношение эквивалентности.

8. Придумайте нетождественный автоморфизм поля $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

9. Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ и $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ не изоморфны.

10. Докажите, что у поля действительных чисел нет нетождественного автоморфизма.

11. Есть ли нетождественный автоморфизм у поля комплексных чисел?

Группы. 10 июля.

Определение. Множество G с бинарной операцией $*$ называется *группой* $(G, *)$, если выполнены следующие аксиомы:
1) **(ассоциативность)** для любых $a, b, c \in G$ имеет место $a * (b * c) = (a * b) * c$;
2) **(существование нейтрального элемента)** существует элемент $e \in G$ такой, что для любого $a \in G$ выполнено $e * a = a * e = a$;
3) **(существование обратного элемента)** для любого элемента $a \in G$ существует элемент b такой, что $a * b = b * a = e$.

Определение. Группа G с операцией $*$ называется *коммутативной* (или *абелевой*), если $\forall a, b \in G \quad a * b = b * a$.

1. а) Докажите единственность нейтрального элемента.
б) Докажите единственность обратного элемента.

2. Являются ли следующие множества с бинарными операциями на них группами (если являются, то абелевыми или нет):
а) целые числа с операцией сложения $(\mathbb{Z}, +)$;
б) натуральные числа с операцией сложения $(\mathbb{N}, +)$;
в) действительные числа с операцией умножения $(\mathbb{R}, \times)$;
г) действительные положительные числа с операцией умножения $(\mathbb{R}_+, \times)$;
д) множество векторов на плоскости с операцией сложения;
е) множество многочленов от трёх переменных над полем $\mathbb{F}_7$ с операцией сложения;
ж) интервал $(-c, c)$ с операцией $u \circ v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$;
з) множество движений плоскости с операцией композиции;
и) множество поворотов с операцией композиции;
к) множество перестановок n элементов с операцией композиции (S_n);
л) множество чётных перестановок n элементов с операцией композиции;
м) множество нечётных перестановок n элементов с операцией композиции;
н) множество перестановок 10 элементов, которые являются третьими степеням каких-то других перестановок;
о) множество остатков по модулю n с операцией сложения $(\mathbb{Z}_n, +)$;
п) множество ненулевых остатков по модулю n с операцией умножения $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \times)$.

Определение. Количество элементов группы G называется *порядком* группы G и обозначается $|G|$.

Порядок группы может быть и бесконечным.

Определение. *Порядком* элемента g называется минимальное такое натуральное n, что $g^n = e$. Если такого n не существует, говорят, что g — элемент бесконечного порядка. Порядок элемента g обозначается $|g|$.

3. Докажите, что в конечной группе каждый элемент имеет конечный порядок.

4. Могут ли в бесконечной группе все элементы иметь конечный порядок?

Определение. Подмножество группы G, которое само является группой относительно той же операции, называется *подгруппой* группы G. Обозначение: $H \leq G$.

5. Докажите, что пересечение любого набора подгрупп является подгруппой.

6. Может ли собственная подгруппа группы быть изоморфной всей группе?

Определение. Пусть $H \leq G$ и $g \in G$. Множество $gH = \{g * h \,|\, h \in H\}$ называется *левым смежным классом* группы G по подгруппе H.

7. Докажите, что два левых смежных класса по одной и той же подгруппе либо не пересекаются, либо совпадают.

8. Опишите множество смежных классов для следующих групп и подгрупп: а) $\mathbb{R} \leq \mathbb{C}$; б) $\mathbb{Z} \leq \mathbb{R}$; в) $\mathbb{R}^* \leq \mathbb{C}^*$; г) подгруппа параллельных переносов в группе движений; д) подгруппа поворотов вокруг данной точки в группе движений.

Определение. Количество смежных классов называется *индексом* подгруппы H в группе G и обозначается $[G : H]$.

9. (**Теорема Лагранжа**) Для конечной группы G Докажите, что а) $|G| = [G : H] \cdot |H|$ для всякой подгруппы H; б) $|G|$ делится на $|g|$ для всякого элемента g.

Многочлены от нескольких переменных. Овертайм. 10 июля

1 Опишите как устроены графики в трехмерном пространстве функций, заданных многочленами

а) $x^2 + y^2$ б) $y^2 + x^4 - 2yx^2 + 1$.

2 Докажите, что ненулевой многочлен степени не выше $p - 1$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами из поля F_p не может принимать значение нуль для любых значений переменных из F_p.

3 Для каждого из нижеперечисленных подмножеств A точек на координатной плоскости установите, найдется ли многочлен $P(x, y)$, для которого A есть в точности множество точек, в которых он обращается в нуль?

а) A - конечное множество.

б) A - объединение конечного числа прямых.

в) $A = \{(\frac{1}{n^3}, 1 - \sqrt{\frac{1}{n}})|\ n \in \mathbb{N}\}$.

г) $A = \{(x, y)|\ x, y > 0; xy = 1\}$.

д) $A = \{(x, y)|\ y = 2^x\}$.

Числа. 11 июля.

1. Докажите, что $a^{561} \equiv a \pmod{561}$.

2. Дано p — простое число больше 3. Пусть $n = (2^{2p} - 1)/3$. Докажите, что $2^n - 2$ делится на n.

3. Последовательность $\{x_n\}$ задана реккурентной формулой: $a_1 = 29$, $a_2 = 2013$, $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_n^2$. Докажите, что ни один из членов последовательности не делится на 239.

4. а) Найти количество квадратичных вычетов по модулю 601 среди остатков от 1 до 300.
б) К скольким квадратичным вычетам при добавлении 1 получится квадратичный вычет?

5. а) Пусть $p = 4k+3$ — простое число. Известно, что a — квадратичный вычет по модулю p. Найдите формулу для квадратых корей из a по модулю p.
б) Если простое p имеет вид $3k + 2$, то любой элемент является кубическим вычетом. Найдите формулу для кубического корня из a.

6. Пусть простое число p имеет вид $3k+1$. а) Докажите, что над $\mathbb{F}_p$ многочлен $x^3 - 1$ имеет 3 корня.
б) Сколько всего кубических вычетов будет в по модулю p? в) Вычет b кубическим тогда и только тогда, когда $b^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$.

7. Натуральные числа x, y, m и n таковы, что $n^2 = 15x+16y$ и $m^2 = 16x-15y$. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать минимум из m и n.

Теорема Виета и симметрические многочлены. 12 июля

Первое отделение

1.1 Докажите, что сумма m-х степеней корней приведенного квадратного трехчлена с целыми коэффициентами является целым числом для любого натурального m.

1.2 а) Найдите сумму квадратов корней многочлена $x^3 + x^2 + 7x + 1$.

б) Найдите сумму кубов его корней.

1.3 Существуют ли такие ненулевые действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, что

$$(x^2-a_1x+b_1)(x^2-a_2x+b_2)\cdots(x^2-a_nx+b_n) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n).$$

1.4 В клетках таблицы 3×3 расставлено 9 чисел, причем суммы чисел в строках и в столбцах таблицы равны между собой. Докажите, что сумма произведений чисел в строках таблицы равна сумме произведений чисел в столбцах таблицы.

1.5 Будем называть размером прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений – длины, ширины и высоты. Может ли в некотором прямоугольном параллелепипеде поместиться больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

Второе отделение

Определение: Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **симметрическим**, если $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для любой перестановки $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Например, многочлен $x^4y+y^4x+x^4z+z^4x+y^4z+z^4y$ является симметрическим, а многочлены $x^2y+y^2z+z^2x$ и $x^2+y^3+z^2$ - нет. *Элементарным симметрическим многочленом* степени k от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется многочлен

$$e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}.$$

В частности, $e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1+x_2+\cdots+x_n$ и $e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n$. Мы также считаем, что $e_0 = 1$.

2.1 Теорема Виета

Если многочлен $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ имеет корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (с учетом кратностей), то $a_{n-k} = (-1)^k e_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

2.2 У многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + 1$ все корни - положительные действительные числа. Докажите, что $|a_k| + |a_{n-k}| \geq 2C_n^k$ для любого $0 \leq k \leq n$.

2.3 а) Пусть $p_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m$. Докажите, что для любого натурального m выполнено $me_m = \sum_{r=1}^{m}(-1)^{r-1}p_r e_{m-r}$ (*формула Ньютона*).

б) Докажите, что сумма m-х степеней корней унитарного многочлена с целыми коэффициентами является целым числом для любого натурального m.

Третье отделение

Основная теорема о симметрических многочленах

Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами является симметрическим тогда и только тогда, когда найдется такой многочлен $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с целыми коэффициентами, что

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Определение: Для строчек $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где a_i и b_i - неотрицательные целые числа, будем говорить, что α больше β в **лексикографическом порядке** и писать $\alpha \succ \beta$, если $\alpha \neq \beta$ и $a_i > b_i$ для наименьшего i, такого что $a_i \neq b_i$.

3.1 а) Покажите, что для $\alpha \neq \beta$ выполнено ровно одно из условий $\alpha \succ \beta$ и $\beta \succ \alpha$.

б) Покажите, что $\alpha \succ \beta$ и $\beta \succ \gamma \Rightarrow \alpha \succ \gamma$.

б) Покажите, что $\alpha \succ \beta$ и $\alpha' \succ \beta' \Rightarrow \alpha + \alpha' \succ \beta + \beta'$ (сложение α и β производится покомпонентно).

3.2 Докажите, что не существует такой бесконечной последовательности $\{\alpha_n\}$, что $\alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \cdots \alpha_n \succ \cdots$.

Определение: Для многочлена $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **старшей степенью** называется наибольшая в лексикографическом порядке такая строчка $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, что одночлен $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ входит в P с ненулевым коэффициентом.

3.3 а) Докажите, что старшая степень многочлена PQ равна сумме старшей степени многочлена P и старшей степени многочлена Q.

б) Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - старшая степень симметрического многочлена P. Докажите, что $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$.

в) Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Покажите, что эта строчка является старшей степенью многочлена

$$e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\alpha_1-\alpha_2} e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\alpha_2-\alpha_3} \cdots e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\alpha_{n-1}-\alpha_n} e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\alpha_n}.$$

г) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

3.4 Докажите, что значение любого симметрического многочлена от корней унитарного многочлена с целыми коэффициентами является целым числом.

Показатели и первообразные корни. 14 июля

Определение: Для взаимно простых натуральных чисел a и n наименьшее такое натуральное t, что $a^t \equiv 1 \pmod{n}$, называется **показателем** числа a по модулю n. Если показатель равен $\phi(n)$, то остаток a называется **первообразным корнем** по модулю n.

1 а) Докажите, что $a^d \equiv 1 \pmod{n} \Leftrightarrow d$ делится на t.

б) Докажите, что $\phi(a^n - 1)$ делится на n.

в) Найдите все простые p и q, такие что $2^p - 1$ делится на q и $2^q - 1$ делится на p

г) Докажите, что любой простой делитель числа $2^{2^n} + 1$ имеет вид $2^{n+1}x + 1$ и выведите бесконечность множества простых чисел такого вида (для фиксированного n).

д) Для фиксированного простого p докажите бесконечность множества простых чисел вида $2px + 1$ (*Подсказка:* Посмотрите на простые делители $\frac{a^p-1}{a-1}$, не делящие $a - 1$).

2 а) Докажите, что $n = \sum_{d|n} \phi(d)$ (*Подсказка:* рассмотрите дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$).

Для следующих пунктов вспоминаем про многочлены над F_p.

б) Докажите, что для любого d существует не более d остатков (по модулю p) показателя, делящего d.

в) Докажите, что для $d|p-1$ существует ровно d остатков (по модулю p) показателя, делящего d.

г) Докажите, что для $d|p-1$ существует ровно $\phi(d)$ остатков показателя d по модулю p (в частности $\phi(p-1) > 0$, так что первообразные корни по простому модулю существуют).

3 а) Докажите, что числа $1, 2, \ldots, p-1$ можно расставить по окружности так, что квадрат любого числа будет сравним по модулю p с произведением его соседей.

б) Для каждого натурального d найдите $\sum\limits_{n=0}^{p-1} n^d \pmod p$.

в) При помощи первообразных корней докажите, что $(\frac{a}{p}) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

4 а) Докажите, что для нечетного простого p и натуральных u, r (u не делится на p) число $(1+pu)^{p^r} - 1$ делится на p^{r+1}, но не на p^{r+2}.

а) Пусть g - первообразный корень по модулю нечетного простого p. Докажите, что хотя бы одно из чисел g и $g+p$ является первообразным корнем по модулю p^α для любого α.

б) Пусть g - первообразный корень по модулю p^α. Докажите, что одно из чисел g и $g+p^\alpha$ будет первообразным корнем по модулю $2p^\alpha$.

5 Александр Львович задумал s натуральных чисел и выписал на доску все их попарные суммы, в том числе суммы числа с самим собой. Для какого наибольшего s могло так оказаться, что все выписанные числа дают разные остатки по модулю $p(p-1)$ (p - простое число)?

Алгебраические и целые алгебраические числа. 15 июля

Первое действие

Определение: Комплексное число α называется **алгебраическим**, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами; **целым алгебраическим**, если оно является корнем унитарного многочлена с целыми коэффициентами; **трансцендентным**, если оно не является алгебраическим. Числа e и π трансцендентны, но доказать это очень непросто.

1.1 Опишите наименьшее числовое поле, содержащее π.

1.2 Докажите, что число, являющееся одновременно рациональным и целым алгебраическим, является целым.

1.3 Докажите счетность множества алгебраических чисел и выведите отсюда бесконечность множества трансцендентных чисел.

1.4 а) **Теорема Лиувилля** Будем называть комплексное число α хорошо приближаемым, если оно не является рациональным и для любых натуральных N, n найдется такое рациональное $\frac{p}{q}$, что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Nq^n}$. Докажите, что все хорошо приближаемые числа являются трансцендентными.

б) Постройте пример хорошо приближаемого числа.

1.5 а) Пусть $p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ - многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что у многочлена $\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x-\alpha_i\alpha_j)$ все коэффициенты также целые.

б) Докажите, что сумма, разность и произведение целых алгебраических чисел также является целым алгебраическим.

в) Докажите, что алгебраические числа образуют поле.

г) Докажите, что все корни многочлена с алгебраическими коэффициентами являются алгебраическими числами, а корни всех унитарных многочленов с целыми алгебраическими коэффициентами являются целыми алгебраическими числами.

Второе действие

Определение: Будем говорить, что целые алгебраические числа α, β сравнимы по модулю натурального числа n и писать $\alpha \equiv \beta \pmod n$, если число $\frac{\alpha-\beta}{n}$ является целым алгебраическим.

2.1 Докажите следующие свойства таких сравнений по модулю.

1) $\alpha \equiv \beta \pmod n$ и $\beta \equiv \gamma \pmod n \Rightarrow \alpha \equiv \gamma \pmod n$.

2) $\alpha \equiv \beta \pmod n \Rightarrow p(\alpha) \equiv p(\beta) \pmod n$ для любого многочлена $p(x)$ с целыми алгебраическими коэффициентами.

3) Если α и β - целые числа, то сравнимость по модулю n в определенном выше смысле эквивалентна обычной сравнимости по модулю n.

2.2 Пусть $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{8}) + i\sin(\frac{2\pi}{8})$.

а) Покажите, что ζ является целым алгебраическим числом.

б) Докажите, что для любого нечетного простого p выполнена цепочка сравнений (по модулю p) и равенств $\zeta^p + \zeta^{-p} \equiv (\zeta+\zeta^{-1})^p = 2^{\frac{p-1}{2}}(\zeta+\zeta^{-1}) \equiv (\frac{2}{p})(\zeta+\zeta^{-1})$.

в) Докажите, что $(\frac{2}{p}) = 1$, если $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, и $(\frac{2}{p}) = -1$, если $p \equiv \pm 3 \pmod 8$.

2.3 Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную начальными условиями $a_0 = 3, a_1 = 0, a_2 = 2$ и соотношениями $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$.

а) Пусть α, β, γ - корни многочлена x^3-x-1. Докажите, что $a_n = \alpha^n+\beta^n+\gamma^n$.

б) Докажите, что a_p делится на p для любого простого p, используя сравнимость целых алгебраических чисел по модулю p.

в) Докажите тот же результат с помощью комбинаторной интерпретациии: a_n есть количество способов разрезать клетчатое кольцо из n клеток на доминошки и триминошки.

Квадратичный закон взаимности Для различных нечетных простых p и q выполнено $(\frac{p}{q})(\frac{q}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

2.4 Пусть $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{p}) + i\sin(\frac{2\pi}{p})$. Для $1 \le a \le p-1$ обозначим $g_a = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \zeta^{ak}$.

Числа g_a называются **квадратичными суммами Гаусса.**

а) Докажите, что числа g_a являются целыми алгебраическими.

б) Докажите, что $g_a = (\frac{a}{p})g_1$.

в) Докажите, что $g_1^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$. (*Подсказка:* рассмотрите выражение $\sum\limits_{a=1}^{p-1} g_a g_{-a}$ и докажите, что оно одновременно равно и $(\frac{-1}{p})(p-1)g_1^2$, и $p(p-1)$)

г) Докажите цепочку сравнений (по модулю q) и равенств

$$\left(\frac{q}{p}\right) g_1 = g_q \equiv g_1^q = ((-1)^{\frac{p-1}{2}}p)^{\frac{q-1}{2}} g_1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) g_1.$$

д) Выведите квадратичный закон взаимности.

Правильные многоугольники, корни из единицы и многочлены деления круга.
19 **июля**

Вспоминаем: У многочлена $z^n - 1$ есть n различных комплексных корней, а именно числа вида $\cos(\frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{2\pi k}{n})$ для $0 \le k \le n-1$, которые называются **корнями из единицы** . Соответствующие точки располагаются на единичной окружности и образуют правильный n-угольник. Корень из единицы ζ степени n называется **примитивным**, если $\zeta^m \ne 1$ для любого натурального $0 < m < n$.

1 а) Пусть ζ - корень из единицы степени n, $\zeta \neq 1$. Найдите $1+\zeta+\zeta^2+\dots+\zeta^{n-1}$.

б) Найдите количество примитивных корней из единицы степени n.

в) Радиус окружности, описанной около правильного n-угольника, равен 1. Найдите произведение расстояний от фиксированной вершины A до всех остальных вершин этого многоугольника.

2 а) Докажите, что для любого простого p многочлен $x^{p-1}+x^{p-2}+\dots+x+1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ (*Подсказка:* вспоминаем критерий Эйзенштейна).

б) В равноугольном p-угольнике (p - простое) длины всех сторон рациональны. Докажите, что он является правильным.

3 Вершины правильного многоугольника раскрашены в несколько (больше одного) цветов, так что все вершины каждого цвета также образуют правильный многоугольник. Докажите, что среди этих одноцветных правильных многоугольников найдутся два равных.

Определение: **Многочлены деления круга** - это $\Phi_n(x) = (x-\zeta_1)(x-\zeta_2)\cdots(x-\zeta_{\phi(n)})$, где $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{\phi(n)}$ - все примитивные корни n-й степени из 1.

4 а) Докажите, что $x^n - 1 = \prod\limits_{d|n} \Phi_d(x)$.

б) Докажите, что все коэффициенты многочлена $\Phi_n(x)$ - целые числа.

в) Найдите $\Phi_n(x)$ для всех $n < 12$.

5 **Частный случай теоремы Дирихле:** Для любого натурального n найдется бесконечно много простых чисел вида $nk+1$.

а) Пусть многочлены $C(x)$ и $D(x)$ с целыми коэффициентами взаимно просты. Докажите, что тогда для достаточно больших простых p значения многочленов в одной целой точке не могут одновременно делиться на p.

б) Докажите, что многочлены деления круга попарно взаимно просты.

в) Докажите, что для достаточно больших простых p выполнено $p|\Phi_n(a) \Rightarrow n$ является показателем a по модулю $p \Rightarrow p = nk+1$.

г) Докажите приведенный частный случай теоремы Дирихле.

6 **Неприводимость** $\Phi_n(x)$

а) Докажите, что для того, чтобы доказать неприводимость $\Phi_n(x)$ над $\mathbb{Z}$, достаточно показать, что если $f(x)$ - неприводимый над $\mathbb{Z}$ множитель $\Phi_n(x)$, ζ - корень $f(x)$, p - простое число, не делящее n, то ζ^p - тоже корень $f(x)$.

Предположим противное. Пусть $\alpha_1 = \zeta, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ - все корни $f(x)$.

б) Докажите, что у многочлена $g(x) = (x - \alpha_1^p)(x - \alpha_2^p)\cdots(x - \alpha_k^p)$ все коэффициенты целые и он взаимно прост с $f(x)$.

Пусть $\beta_i = \alpha_i^p$ $(1 \le i \le k)$. Обозначим все оставшиеся корни степени n из единицы (кроме α_i и β_i) через $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Пусть

$$A = \prod_{1 \le i < j \le k} (\alpha_i - \alpha_j)^2,\ B = \prod_{1 \le i < j \le k} (\beta_i - \beta_j)^2,\ C = \prod_{1 \le i < j \le m} (\gamma_i - \gamma_j)^2,$$

$$D = \prod_{1 \le i \le k,\ 1 \le j \le k} (\alpha_i - \beta_j)^2,\ E = \prod_{1 \le i \le k,\ 1 \le j \le m} (\beta_i - \gamma_j)^2,\ F = \prod_{1 \le i \le k,\ 1 \le j \le m} (\alpha_i - \gamma_j)^2.$$

в) Докажите, что A, B, C, D, E, F - целые числа и $|ABCDEF| = n^n$.

г) Докажите цепочку равенств и сравнений (по модулю p) целых алгебраических чисел $D = (f(\alpha_1^p)f(\alpha_2^p)\cdots f(\alpha_k^p))^2 \equiv (f(\alpha_1)^p f(\alpha_2)^p \cdots f(\alpha_k)^p)^2 = 0$.

д) Получите противоречие и тем самым завершите доказательство неприводимости $\Phi_n(x)$.

Поле, конечное поле. 21 июля

Квазиопределение: Будем называть натуральное число n *полепригодным*, если существует поле из n элементов. Возникает вопрос: а какие числа являются полепригодными? Мы знаем, что в частности все простые являются.

1 а) Является ли полепригодным число 4?

б) А число 6?

2 Пусть F - поле из n элементов.

а) Докажите, что $g^{n-1} = 1$ для любого $g \in F$, $g \neq 0$. (*Подсказка:* вспоминаем листок про группы)

б) Докажите, что в F есть ровно $\phi(n-1)$ *первообразных корней*, то есть таких $g \in F,\ g \neq 0$, что $g^m \neq 1$ для $0 < m < n - 1$.

3 Пусть n - полепригодное число. Докажите, что можно покрасить все ребра полного графа K на n^2 вершинах в $n+1$ цвет, так чтобы в любом одноцветном связном подграфе графа K содержалось бы не более n вершин.

4 Латинские квадраты

Латинским квадратом порядка n называется квадрат $n \times n$, в клетках которого расставлены числа $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, так что в каждом столбце и в каждой строке все числа различны. Два латинских квадрата называются *ортогональными*, если при наложении одного на другой каждая из пар $(i, j),\ 0 \leq i \leq n-1,\ 0 \leq j \leq n-1$ встречается в клетках образовавшегося квадрата ровно один раз.

а) Докажите, что нельзя выбрать более чем $n-1$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n.

б) Пусть n - полепригодное число. Докажите, что можно выбрать $n-1$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n.

5 Конечные плоскости

Конечной аффинной плоскостью порядка n называется множество из n^2 элементов, в котором выделен некоторый набор n-элементных подмножеств (прямых), так что любые две различные точки лежат на одной прямой, любые две различные прямые пересекаются не более чем в одной точке, и через любую точку проходит ровно одна прямая, параллельная данной.

а) Докажите существование конечной аффинной плоскости порядка n для любого полепригодного числа n.

б) Пусть n - полепригодное число. В пространстве даны n^2 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причем отрезки не пересекаются друг с другом. Каждый отрезок покрашен в один из $n-1$ цветов. Петя хочет покрасить каждую точку в один из этих цветов так, чтобы не нашлось двух точек и отрезка между ними, окрашенных в один цвет. Всегда ли Пете это удастся?

Конечной проективной плоскостью порядка n называется множество из n^2+n+1 элементов, в котором выделен некоторый набор $n+1$-элементных подмножеств (прямых), так что любые две различные точки лежат на одной прямой и любые две различные прямые пересекаются ровно в одной точке.

в) Докажите существование конечной проективной плоскости порядка n для любого полепригодного числа n.

г) Пусть n - полепригодное число. Какое наибольшее количество клеток можно отметить в квадрате $n^2+n+1 \times n^2+n+1$, чтобы никакие четыре отмеченные клетки не образовывали прямоугольник?

6 Докажите, что число p^2 является полепригодным для любого простого p.

Разговор про конечные поля (схема). 21 июля

Первая часть: Доказываем, что если существует поле F из n элементов, то $n = p^k$ для некоторого простого p.

Шаг 1.1: *Характеристикой* поля F называется наименьшее такое m, что сумма m единиц в F равна 0. Тогда $m = p$ - простое, и F содержит подполе, изоморфное F_p.

Шаг 1.2: Доказываем необходимое утверждение при помощи "вычерпывания": на k-м шаге у нас есть множество из p^k элементов поля. Если в F еще остались элементы, то мы расширяем выбранное множество до p^{k+1} элементов.

Вторая часть: Существует поле из p^k элементов для любого натурального k.

Шаг 2.1: Доказываем существование поля из p^2 элементов, присоединяя к F_p квадратный корень из какого-то квадратичного невычета.

Шаг 2.2: Пусть $g(x)$ - неприводимый многочлен над F. Тогда все остатки по модулю g образуют поле, которое является расширением поля F. Например, при $F = \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 1$ мы получаем расширение, изоморфное $\mathbb{C}$.

Шаг 2.3: Применяя описанную выше процедуру, строим цепочку расширений $F^1 \subset F^2 \subset \cdots \subset F^s$, так что $F^1 = F_p$, для любого $1 \leq k < s$ над полем F^{k+1} многочлен $x^{p^n} - x$ раскладывается на большее число неприводимых множителей, нежели над полем F^{k+1}, а над полем F^s он раскладывается на линейные множители.

Шаг 2.4: Пусть $G = \{\alpha \in F^s | \alpha^{p^n} = \alpha\}$. Тогда G замкнуто относительно арифметических операций (для сложения мы используем тот факт, что $C_{p^n}^k$ делится на p для любого $0 < k < p^n$), то есть образует поле.

Шаг 2.5: Чтобы доказать, что в G содержится ровно p^n элементов, теперь достаточно показать, что у $x^{p^n} - x$ нет кратных корней. Для этого вводим понятие *производной* многочлена над полем: если $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, то $p'(x) := na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$ и воспользуемся правилом Лейбница $(p_1p_2)' = p_1'p_2 + p_1p_2'$.

Квадратичный закон взаимности Гаусса. 22 июля

(Квадратичный закон взаимности Гаусса.) Для любых различных нечетных простых чисел p и q имеет место равенство $\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$.

Доказательство 1 было листочках про алгебраические числа.

Будем обозначать парой (a,b) такой остаток s при делении на pq, что выполнены $s \equiv a \pmod p$ и $s \equiv b \pmod q$.

Доказательство 2.

1. Рассмторим два подмножества остатков по модулю pq

$$S = \{(a,b) : a = 1,2,\ldots,p-1; b = 1,\ldots \frac{q-1}{2}\}$$

$$T = \{(c\ mod\,p, c\ mod\,q) : (c,pq) = 1, c = 1,2,\ldots,\frac{pq-1}{2}\}.$$

Докажите, что произведения остатков в двух множествах либо совпадают, либо отличаются знаком.

2. Докажите, что

а) $\prod\limits_{(a,b)\in S}(a,b) \equiv ((p-1)!^{\frac{q-1}{2}}, ((q-1)/2)!^{p-1}) \pmod{pq}$;

б) $\prod\limits_{c\in S} \equiv \dfrac{(1\cdot 2\ldots\cdot p-1)\cdot(p+1\cdot\ldots 2p-1)\ldots(\ldots\cdots\frac{q-1}{2}p-1)(\ldots\cdot\frac{q-1}{2}p+\frac{p-1}{2})}{q\cdot 2q\cdot\ldots\frac{p-1}{2}q} \equiv$

$(p-1)!^{\frac{q-1}{2}}\left(\dfrac{q}{p}\right) \pmod p$

в) $\prod\limits_{c\in S} \equiv ((p-1)!^{\frac{q-1}{2}}\left(\dfrac{q}{p}\right), (q-1)!^{\frac{p-1}{2}}\left(\dfrac{p}{q}\right)) \pmod{pq}$;

г) Выведите из этих сравнений квадратичный закон взаимности.

Доказательство 3.

3. Умножение всех элементов приведенной системы вычетов по нечетному простому модулю p на вычет $a \not\equiv 0 \pmod p$ производит в ней перестановку.

а) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то получившаяся подстановка четна.

б) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p, то она нечетна.

4.Пусть p и q — различные нечетные простые числа. Рассмотрим два множества $M = \{0,1,\ldots,pq-1\}$ и $\overline{M} = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_q$, где $\mathbb{F}_p$ — поле вычетов по модулю p. Каждому элементу $x \in M$ поставим в соответствие пару $\overline{x} = (x_p, x_q) \in \overline{M}$, где $x_p \equiv x \pmod p$ и $x_q \equiv x \pmod q$. Заметим (поймите это!), что данное отображение будет биекцией между M и $\overline{M}$.

Рассмотрим пару отображений $f, g : \overline{M} \to \overline{M}$, заданную следующими равенствами: $f(a,b) = \overline{a+pb}$ и $g(a,b) = \overline{qa+b}$. Соответствующие им отображения из M в M мы также будем обозначать буквами f и g.

а) Докажите, что f и g — перестановки на множестве $\overline{M}$.

б) Докажите, что перестановка f четна тогда и только тогда, когда $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$.

в) Рассмотрим перестановку $f \circ g^{-1}$ на множестве M. Вычислите число инверсий этой перестановки.

г) **(Доказательство Золотарёва.)** При помощи предыдущих пунктов докажите квадратичный закон взаимности:

$$\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

5. Пусть $x_1 = 1, y_1 = 100,\ x_{n+1} = x_n^{237} + y_n,\ y_{n+1} = y_n^{237} + x_n$. Докажите, что $x_n y_n$ не делится на 239 ни при каком натуральном n.

Из невошедшего. Гауссовы числа.

Определение. *Гауссовыми числами* называются комплексные числа вида $a + bi$, где a и b целые. Гауссовы числа образуют кольцо, которое обозначается $\mathbb{Z}[i]$.

Определение. *Нормой* гауссова числа $\alpha = a + bi$ называется число $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2$

Определение. Гауссово число α *делится* на гауссово число β, если существует такое гауссово число γ, что $\alpha = \beta\gamma$.

Определение. Гауссово число называется *обратимым*, если на него делится единица, и *необратимым* в противном случае.

1. Найдите все обратимые гауссовы числа.

Определение. Необратимое гауссово число называется *простым гауссовым* если его нельзя представить в виде произведения двух необратимых гауссовых чисел.

2. (**Деление с остатком**) Даны два гауссовых числа α и β. Докажите, что существуют такие гауссовы числа γ и δ, что $\alpha = \gamma\beta + \delta$ и $N(\delta) < N(\beta)$.

Вообще говоря, в кольце гауссовых чисел деление с остатком не однозначное. Тем не менее, оно позволяет применять алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя в кольце Гауссовых чисел.

3. Найдите наибольший делитель гауссовых чисел $3 + 4i$ и $11 + 13i$.

4. а) **(Главноидеальность)** Пусть α — простое гауссово число и $\beta\gamma$ делится на α. Докажите, что тогда β делится на α или γ делится на α.

б) **(Факториальность)** Докажите, что любое гауссово число можно представить в виде произведения простых гауссовых чисел, причём такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей и умножения на обратимые.

5. а) Пусть p — целое простое число. Докажите, что либо оно простое гауссово число, либо представляется в виде $(a + bi)(a - bi)$.

б) Пусть p — простое число вида $4k+3$. Докажите, что оно является простым гауссовым числом.

в) Пусть p — простое число вида $4k+1$. Докажите, что оно не является простым гауссовым числом. (*Указание: вспомните, что существует гаусссово число $a+bi$, норма которого на p делится, а действительная и мнимая часть – нет*)

6. Решите в целых числах уравнение $x^2+1=y^3$.

7. Докажите, что простое число можно представить в виде x^2+2y^2 тогда и только тогда, когда оно даёт остатки 1 или 3 при делении на 8.

Комбинаторика.

Сети Форда и Фалкерсона. 6 июля

Определение. Пусть задано множество вершин V, в котором выделены две вершины: s (*вход*) и t (*выход*). Пусть определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$c(x, y) \geq 0, \quad c(x, s) = 0, \quad c(t, y) = 0$$

для любых вершин $x, y \in V$. Тогда $G = (V, s, t, c)$ — сеть, функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Множество $A(G) = \{(x, y) : c(x, y) > 0\}$ называется множеством *стрелок* сети G.

Определение. Пусть G — сеть. Функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *потоком* в сети G, если f удовлетворяет трем условиям для любых $x, y \in V$ и $v \in V \setminus \{s, t\}$:

$$f(x, y) \leq c(x, y), \quad f(x, y) = -f(y, x), \quad \sum_{z \in V} f(v, z) = 0.$$

Число $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$ называется *величиной потока.* Поток в сети G с максимальной величиной называется *максимальным.*

Определение. Пусть G — сеть, а множество ее вершин V разбито на два непересекающихся множества S и T таких, что $s \in S$ и $t \in T$. Тогда (S, T) — разрез сети G.

Величина $c(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза.* Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным.*

Для любого потока f в сети G величина $f(S, T) = \sum_{s \in S, y \in T} f(x, y)$ называется *потоком через разрез* (S, T).

1. Для любого потока f и разреза (S, T) сети G докажите, что $|f| = f(S, T)$.

2. (Теорема Форда-Фалкерсона.) В сети G с пропускной способностью c задан поток f. Докажите, что следующие три утверждения равносильны:

1° поток f максимален;

2° существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$;

3° в остаточной сети нет дополняющего пути.

Следствие. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

3. Пусть (S_1, T_1) и (S_2, T_2) — минимальные разрезы в сети G. Докажите, что разрезы $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ и $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ также являются минимальными.

4. Докажите, что в целочисленной сети (т. е. в сети, пропускные способности всех ребер которой являются целыми числами) существует максимальный поток, причем среди максимальных потоков данной сети найдется целочисленный.

Выведете из теоремы Форда-Фалкерсона следующие утверждения:

5. ("Реберная теорема Менгера.") Даны граф G и его вершины u и v. Пусть при удалении любых $k-1$ ребер в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих ребер.

6. (Теорема Холла.) Если в двудольном графе с долями A и B для любого множества из k вершин $V \subseteq A$ существует не менее k вершин доли B, смежных хотя бы с одной из вершин множества V, то существует паросочетание, содержащее все вершины из A.

7. (Теорема Кёнига.) На клечатой плоскости расставлено несколько ладей. Тогда наибольшее число небьющих друг друга ладей, которые можно выбрать из них, равно наименьшему числу линий (столбцов и строк), покрывающих все данные ладьи.

8. ("Вершинная" теорема Менгера.) Пусть вершины u и v несмежны и при удалении любых $k-1$ вершин в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих внутренних вершин.

Идея локального порядка 1: теория Рамсея. 11 июля

1 Докажите, что из любых 5 точек на плоскости можно выбрать 4, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.

2 а) Докажите, что из любых 6 человек можно выбрать или трех попарно знакомых, или трех попарно незнакомых.

б) Докажите, что из любых 9 человек можно выбрать или трех попарно знакомых, или четырех попарно незнакомых.

в) Степан Юрьевич, незнакомый с внутренней структурой нашей группы профи, тем не менее имеет смелость утверждать, что в ней заведомо найдутся либо четыре человека, любые два из которых когда-нибудь сидели за одной партой, либо четыре человека, никакие два из которых никогда не сидели за одной партой. Прав ли он?

г) Докажите, что из любых 2^{m+n} человек можно выбрать или m попарно знакомых, или n попарно незнакомых.

Определение: Наименьшее такое натуральное R, что из R человек можно выбрать или m попарно знакомых, или n попарно незнакомых, называется *числом Рамсея* и обозначается через $R(m, n)$.

3 Найдите $R(3, 3)$ и $R(3, 4)$.

Более обще, пусть фиксированы натуральные числа $a_1, \dots, a_k$. Тогда наименьшее такое натуральное R, что при раскраске полного графа на R вершинах в k цветов найдется либо полный одноцветный подграф цвета 1 на a_1 вершинах, либо полный одноцветный подграф цвета 2 на a_2 вершинах, ..., либо полный одноцветный подграф цвета k на a_k вершинах, обозначается через $R(a_1, \dots, a_k)$ и также называется числом Рамсея.

4 **Теорема Рамсея для графов** Докажите существование $R(a_1, \dots, a_k)$ и

$$R(a_1, \dots, a_k) \leq k^{a_1+\dots+a_k}.$$

5 а) Докажите, что для любого натурального n существует такое натуральное N, что при любом исходе кругового турнира среди N команд по воллейболу можно выбрать n команд, среди которых первая выиграла у всех остальных, вторая — выиграла у всех остальных, кроме первой, третья — выиграла у всех команд, кроме первой и второй, ..., n-я — всем проиграла.

б) **Теорема Шура** Докажите, что для любого натурального n существует такое натуральное N, что если покрасить числа $1, 2, \dots, N$ в n цветов, то найдутся три числа (не обязательно различных) x, y, z одного цвета, для которых $x + y = z$.

6 а) Каждое из 3-элементных подмножеств множества A из $4^{4^{4^{\cdots^{4}}}}$ ($m + n$ четверок) элементов покрашено в красный или в синий цвет. Докажите, что в A можно выбрать либо m элементов, среди которых все тройки - красные, либо n элементов, среди которых все тройки - синие ($m, n \geq 3$).

б) **Теорема Рамсея для гиперграфов** Для любых натуральных чисел $n_1, \dots, n_k, s$ существует такое натуральное N, если в множестве из N элементов раскрасить все s-элементные подмножества в k цветов, то для какого-то $1 \leq i \leq k$ можно выбрать n_i элементов, среди которых все s-элементные подмножества покрашены в цвет i.

Разборчивая невеста. 14 июля

Постановка задачи: Принцесса выбирает себе жениха. Для этого к ней приехали n царевичей, которые выстроились перед дворцом в очередь и входят знакомиться с принцессой по одному. Узнав очередного претендента, принцесса может либо принять его предложение (и тогда на следующий день играют свадьбу), либо отвергнуть (и тогда гордый королевич уезжает навсегда). Познакомившись с двумя царевичами, принцесса может сказать кто из них лучше (при этом выполняется естественное правило, что если Иван-дурак лучше чем Джон-дурак, а Джон-дурак лучше чем Иоганн-дурак, то Иван-дурак лучше чем Иоганн-дурак). Принцесса хочет выбрать самого лучшего жениха, но в каком порядке они изначально расставлены перед дворцом, не знает. Будем считать этот порядок случайным. Как ей действовать, чтобы иметь максимально возможную вероятность победить (то есть выбрать лучшего жениха)?

1 Решите эту задачу при $n = 2, 3, 4$.

2 Обозначим через g_t вероятность того, что если t-й по счету жених оказался лучше всех предыдущих, то он вообще лучше всех. Это так называемая *условная вероятность*. Вычислите g_t.

3 а) Обозначим через h_t вероятность того, что если принцесса пропустит первых t претендентов (просто узнав о них какую-то информацию), а дальше будет действовать неким оптимальным образом (которого мы пока не знаем, но который существует) то она победит. Докажите, что $h_0 \geq h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_{n-1} \geq h_n$.

б) Вычислите h_n, h_{n-1}, h_{n-2}

4 Покажите, что стратегия оптимальных действий для принцессы состоит в следующем. Пусть s - наименьшее такое число, что $g_s > h_s$. Тогда принцессе нужно пропустить первые $s-1$ человек, а затем выбрать первого встречного, который стал условно лучшим (то есть лучше всех предыдущих).

Чтобы решить задачу, осталось научиться считать s. А для этого нужно научиться считать h_t.

5 а) Докажите, что $h_0 = h_1 = h_2 = \ldots. = h_{s-1}$.

б) Докажите, что если $t \geq s$, то $h_t = \frac{1}{n} + \frac{t}{t+1} h_{t+1}$.

в) Докажите, что если $t \geq s$, то $h_t = \frac{t}{n}(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \cdots + \frac{1}{n-1})$.

6 Покажите, что s – это наименьшее такое натуральное число, что $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} < 1$. Еще раз убедитесь в правильности нашего ответа к первой задаче и

определите оптимальное поведение принцессы и вероятность ее выигрыша, если $n = 5, 6, 7, 8$.

Вопрос для размышления: Как хотя бы приблизительно вычислить s и h_{s-1} (наибольшую вероятность выигрыша) для данного n?

Ответ для размышления: Для больших n имеет место приблизительное равенство $s \approx \frac{n}{e}$, соответственно $h_{s-1} \approx \frac{1}{e}$.

Теорема Брукса и теорема Татта. 14-15 июля

1. Пусть u и v — это две несмежные вершины графа G. Докажите, что $G - u - v$ связен тогда и только тогда, когда u и v являются висячими вершинами некоторого остовного дерева графа G.

2. Степени всех вершин связного графа не превосходят d. Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в d цветов, если

а) есть вершина, имеющая степень меньше, чем d;

б) есть вершина, при удалении которой граф теряет связность;

в) $d > 2$ и есть две вершины такие, что при удалении их обеих граф теряет связность;

г) есть три вершины u, v и w такие, что u смежна с v и w, вершины v и w несмежны и при удалении вершин v и w связность не нарушается.

д) **(Теорема Брукса.)** Степени всех вершин связного графа, не являющегося нечетным циклом и полным графом из $d + 1$ вершины, не превосходят d. Докажите, что его вершины можно раскрасить в d цветов правильным образом.

Будем использовать следующие обозначения: если $U \subset V(G)$, то через $G - U$ обозначается граф, полученный удалением из G всех вершин множества U (и всех инцидентных им ребер); если $ab \notin E(G)$, то через $G + ab$ обозначим граф, полученный из G добавлением ребра ab.

Определение. Пусть M — паросочетание графа G. Назовем путь M-*чередующимся*, если в нем чередуются ребра из M и ребра, не входящие в M. Назовем чередующийся путь M-*дополняющим*, если его начало и конец не покрыты M (то есть ни одно из ребер паросочетания M не инцидентно ни одному из концов пути).

3. (Теорема Бержа.) Докажите, что паросочетание M является максимальным тогда и только тогда, когда нет M-дополняющих путей.

4. Вершины $x, y, z, w \in V(G)$ таковы, что $xy, yz \in E(G)$, но $xz, yw \notin E(G)$. Пусть в каждом из графов $G + xz$ и $G + yw$ есть совершенное паросочетание. Докажите, что тогда и в графе G есть совершенное паросочетание.

Определение. Обозначим через $o(G)$ количество нечетных компонент связности графа G (то есть количество компонент связности, содержащих нечетное число вершин).

Теорема Татта о совершенном паросочетании. В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется $o(G - S) \leq |S|$.

5. а) Докажите, что если в графе G есть совершенное паросочетание, то он удовлетворяет условию Татта (то есть для любого $S \subset V(G)$ выполняется $o(G - S) \leq |S|$.)

Пусть граф G удовлетворяет условию Татта. Обозначим через U множество вершин графа G, смежных со всеми остальными вершинами (то есть $U = \{v \in V(G) \mid d(v) = v(G) - 1\}$).

б) Докажите, что если все компоненты связности графа $G - U$ являются полными графами, то в графе G есть совершенное паросочетание.

в) Пусть среди компонент связности графа $G - U$ хотя бы одна не является полным графом и в графе G нет совершенного паросочетания. Докажите, что можно добавить к G некоторое ребро так, чтобы в новом графе по-прежнему не было совершенного паросочетания.

г) Выведите из предыдущих пунктов **теорему Татта**.

Идея локального порядка 2: теорема Ван-дер-Вардена. 20 июля

Теорема Ван-дер-Вардена: Для любых натуральных k и r существует такое натуральное $W(k, r)$, что при любой раскраске чисел $\{1, 2, \ldots, W(k, r)\}$ в r цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины k.

1 Докажите, что можно взять $W(3, 2) = 9$, но не $W(3, 2) = 8$.

2 Заполните пробелы в доказательстве теоремы Ван-дер-Вардена.

Доказательство: Будем вести индукцию по k: база для $k = 1$ очевидна, будем доказывать переход $k - 1 \to k$.

Определение: Пучком прогрессий (ранга d, радиуса k, с корнем в a) назовем набор из d различных арифметическим прогрессий длины k, все из которых начинаются с одного и того же числа a. Тогда каждую из этих прогрессий (без корня) будем называть веткой пучка. Будем говорить, что пучок является *полихроматическим*, если внутри каждой ветки все числа покрашены в один цвет, эти цвета различны для разных веток и отличны от цвета, в который покрашен корень. Нам понадобится

Лемма: Предположим, что теорема Ван-дер-Вардена верна для $k-1$. Тогда для любых натуральных $d \le r$ существует такое натуральное $M(k,d,r)$, что при любой раскраске чисел $\{1,2,\ldots,M(k,d,r)\}$ в r цветов найдется либо одноцветная арифметическая прогрессия длины k, либо полихроматический пучок радиуса k и ранга d.

а) Выведите из леммы переход индукции.

б) Завершите доказательство леммы, приведенное ниже.

Доказательство леммы:

Будем доказывать лемму индукцией по d. База для $d = 1$ очевидна (почему?) Рассмотрим переход $d-1 \to d$. Пусть $N_1 = M(k,d-1,r)$, $N_2 = W(k-1, r^d N_1^d)$, $N = 2N_1N_2$. Покажем, что можно взять $M(k,d,r) = N$. Предположим, что это не так, и возьмем раскраску, для которой условие не выполняется. Тогда для любого $N_2 \le b \le 2N_2-1$ среди чисел $\{bN_1+1,\ldots,bN_1+N_1\}$ найдется полихроматический пучок радиуса k и ранга $d-1$. Покрасим числа $\{N_2, N_2+1,\ldots,2N_2-1\}$ в $\le r^d N_1^d$ цветов следующим образом …

3 а) Пусть $\{a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots\}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел, такая что $a_{i+1} - a_i < 2013$ для любого i. Докажите, что эта последовательность содержит сколь угодно длинные арифметические прогрессии.

б) Докажите, что можно покрасить все натуральные числа в два цвета, так чтобы не нашлось бесконечной одноцветной арифметической прогрессии.

в) На бесконечной полоске клетчатой бумаги записаны целые числа. Докажите, что для любых натуральных m и n найдутся такие m одинаковых отрезков полоски, идущих подряд, что сумма чисел внутри каждого из них делится на n.

г) Докажите, что для любого действительного θ существует такое натуральное n, что θn^2 отличается от целого менее чем на 10^{-100}.

4 **Теорема Фолкмана:** Для любых натуральных k и r существует такое натуральное $F(k,r)$, что при любой раскраске чисел $\{1,2,\ldots,F(k,r)\}$ в r цветов найдется такое подмножество S из k одноцветных чисел, что сумма нескольких различных чисел из S всегда будет иметь тот же цвет.

а) Докажите, что для любых натуральных r и k существует такое натуральное $n(k,r)$, что при любой раскраске чисел $\{1,2,\dots,n(k,r))\}$ в r цветов можно выбрать числа $1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_k \le n(k,r)$, такие что $a_1+a_2+\dots+a_k \le n(k,r)$ и для любых двух подмножеств $\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ с одинаковым максимальным числом, суммы элементов в этих подмножествах имеют один и тот же цвет. (*Подсказка:* Докажите это индукцией по k. Покажите, что для перехода достаточно взять $n(k+1,r) = 2W(r,n(r,k)+1)$).

б) Выведите теорему Фолкмана из предыдущей задачи; покажите, что можно взять $W(k,r) = n(r,(r-1)k+1)$.

5 Докажите, что из $\{0,1,\dots 3^n-1\}$ можно выбрать 2^n чисел, никакие три из которых не образуют арифметическую прогрессию.

Дележ драгметаллов. 22 июля

1 а) Докажите, что 100 золотых слитков (возможно разных по весу) можно разложить на две кучи по пятьдесят слитков, так чтобы веса этих куч различались не более чем на вес самого тяжелого слитка.

б) Имеется 25 слитков разного веса. Всегда ли можно один из этих слитков распилить на две части и разложить их в два сейфа так, что части разрезанного слитка окажутся в разных сейфах, веса золота в сейфах будут одинаковы и в каждом сейфе будет по 12 целых слитков?

2 Имеется 301 ящик, в которых разложены золото и серебро.

а) Али Баба имеет право выбрать себе 151 ящик. Докажите, что он может получить не менее половины всего золота и не менее половины всего серебра. Покажите, что 150 ящиков для этого может и не хватить.

б) Какое наименьшее количество ящиков должен иметь право забрать Али Баба, чтобы он гарантированно мог получить не менее трети всего золота и не менее трети всего серебра?

в) Тот же вопрос для двух пятых.

Теорема о блинах: На плоскости расположены две фигуры (возможно несвязных). Тогда существует прямая, которая делит каждую из этих фигур на две части равной площади. Иначе говоря, если на сковородке жарятся два блина, то можно одним прямым разрезом разделить каждый из блинов на две равных по площади части.

3 Выведите пункт а) предыдущей задачи из теоремы о блинах.

4 а) Имеется четное число ящиков, в которых разложены золото и серебро, причем каждый ящик содержит не более a кг золота и не более b кг серебра. Докажите, что ящики можно разбить на две равные по количеству группы, так что суммарная масса золота отличается в двух группах не более чем на a кг, а суммарная масса серебра отличается в двух группах не более чем на b кг.

б) Имеется 100 ящиков, в которых разложены золото, серебро и платина. Али Баба имеет право выбрать себе 51 ящик. Докажите, что он может получить не менее половины всего золота, не менее половины всего серебра и не менее половины всей платины. Покажите, что 50 ящиков для этого может и не хватить.

Теорема о сэндвиче: В пространстве расположены три тела (возможно несвязных). Тогда существует плоскость, которая делит каждое из тел на две части равного объема. Иначе говоря, сэндвич, состоящий из хлеба, сыра и ветчины, можно одним ударом ножа разрезать на две части, содержащие поровну хлеба, сыра и ветчины.

5 Выведите пункт б) предыдущей задачи из теоремы о сэндвиче.

6 Имеется N ящиков, в которых разложены n драгметаллов.

а) На ящики нужно наклеить ярлык с ценой, и все драгметаллы из этого ящика будут продаваться по этой цене. Каждая цена должна быть действительным числом от 0 до 1 (условных единиц за килограмм) и суммарная стоимость каждого металла (в условных единицах) должна составлять половину суммарной массы каждого металла (в килограммах). Докажите, что это можно сделать так, чтобы хотя бы $N - n$ цен равнялись 0 или 1.

б) Али Баба имеет право выбрать себе $n + [(N - n)/2]$ ящик. Докажите, что он может получить не менее половины от общего количества каждого из металлов. Покажите, что меньшего числа ящиков для этого может и не хватить.

Геометрия.

Поворотная гомотетия. 05.07.2013

Определение. *Поворотной гомотетией* с коэффициентом k и углом φ называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ, имеющих общий центр ($H_O^k \circ R_O^\varphi$). При этом можно считать, что $k > 0$ и $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$.

1. Докажите, что преобразование подобия является поворотной гомотетией с коэффициентом $k \neq 1$ и углом φ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\overrightarrow{a}$ данное преобразование переводит его в вектор $k \cdot \overrightarrow{a_\varphi}$ (где $\overrightarrow{a_\varphi}$ — вектор, полученный из вектора $\overrightarrow{a}$ поворотом на угол φ).

2. а) Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P, причем все точки A, B, A_1, B_1, P различны. Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая точку A в A_1, а B в B_1, причем её центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P. б) Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1 совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1. в) Даны четыре прямые общего положения. Выведете из пунктов а) и б) то, что описанные окружности четырех треугольников, образованных этими прямыми, пересекаются в одной точке.

3. Середины сторон BC и B_1C_1 правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают (вершины обоих треугольников перечислены по часовой стрелке). Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1, а также отношение длин отрезков AA_1 и BB_1.

4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Прямые p и q, проходящие через точку A, пересекают окружность S_1 в точках P_1 и Q_1, а окружность S_2 — в точках P_2 и Q_2. Докажите, что угол между прямыми P_1Q_1 и P_2Q_2 равен углу между окружностями S_1 и S_2.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1; точки M и M_1 — середины отрезков AC и A_1C_1 соответственно. Прямая BM пересекает описанную окружность треугольника A_1BC_1 в точке K_1, а прямая BM_1 — описанную окружность треугольника ABC в точке K. Сами описанные окружности пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC — в точке T. Докажите, что точки M, M_1, K, K_1, P и T лежат на одной окружности.

Инверсия. 9 июля

Определение. Пусть S — окружность с центром O радиуса r. *Инверсией* относительно окружности S называется преобразование плоскости, которое любую точку $A \neq O$ переводит в такую точку A', лежащую на луче OA, что $|OA| \cdot |OA'| = r^2$. Для точки O это преобразование не определено. Точка O называется *центром инвесии*, S — *окружность инвесии*, r^2 — *степень инвесии.*

1. а) Пусть преобразование плоскости $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ — это инверсия с центром O. Докажите, что f является инволюцией (то есть $f \circ f = id$ — тождественное преобразование).

Рассмотрим инверсию на комплексной плоскости. б) Пусть центром инверсии является 0, а ее степень равна 1. Докажите, что z переходит в $\frac{1}{\bar{z}}$. в) Найдите образ z при инверсии относительно окружности радиуса r с центром в a.

2. Инверсия относительно окружности с центром в точке O и радиусом R переводит точки A и B в точки A' и B' соответственно. Докажите, что $|A'B'| = \frac{|AB| \cdot R^2}{|OA| \cdot |OB|}$.

3. Докажите, что инверсия с центром O

а) переводит прямую, проходящую через O, в себя;

б) переводит окружность, проходящую через O, в прямую, не проходящую через O. Куда при переходит центр этой окружности?

в) переводит прямую, не проходящую через O, в окружность, проходящую через O. Какая точка переходит в центр этой окружности?

г) переводит окружность, не проходящую через O, в окружность, не проходящую через O. Переходит ли при этом центр одной окружности в центр другой?

4. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, CAP и точка P лежат на одной окружности.

5. Две окружности, пересекающиеся в точке A, касаются третьей окружности в точках B_1, C_1 и четвертой в B_2, C_2. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2 касаются.

6. Точки L и M выбраны на описанной окружности треугольника ABC таким образом, что AL и AM — биссектрисы соответственно внутреннего и внешнего углов треугольника. На продолжениях отрезков AM и AL выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $AM = MP$, $AL = LQ$. Описанные окружности треугольников AMQ и ALP вторично пересекаются в точке S. Докажите, что прямые AS и BC параллельны.

Геометрический разнобой. 12 июля

1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC образуют прямоугольник.

2. На плоскости даны четыре окружности. Каждая из них касается внешним образом ровно двух из оставшихся окружностей. Докажите, что все четыре получившиеся точки касания лежат на одной окружности.

3. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Найдите $\angle DHQ$.

4. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D, а прямую AB — в точке M. Пусть K — отличная от O точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB. Докажите, что угол MKO — прямой.

5. Внутри треугольника расположены 4 равных окружности следующим образом — 3 из них касаются двух сторон треугольника, а четвертая касается внешним образом первых трех. Докажите, что центр четвертой окружности, центр вписанной окружности и центр описанной окружности лежат на одной прямой.

6. Даны два правильных пятиугольника с общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются цифрами от 1 до 5 по часовой стрелке, причем в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.

Аффинные преобразования. 14 июля.

Определение. Биекция плоскости, переводящая прямые в прямые, называется *аффинным преобразованием плоскости.*

1. Пусть f — аффинное преобразование.

а) Докажите, что f переводит параллельные прямые в параллельные.

б) Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$. Тем самым можно индуцировать наше отображение на вектора, получим отображение φ.

Обозначения f и φ сохраним и на следующие задачи.

2. Пусть прямая l под действием f переходит в l_1 и $A, B \in l$. Введём на каждой из прямых координаты так, чтобы у A и $f(A)$ координаты были 0, а у B и $f(B)$ — 1. Тогда f задаёт некоторую биекцию вещественной прямой — отображение F. Докажите, что для любых a и b:

а) $F(a + b) = F(a) + F(b)$;

б) $F(ab) = F(a)F(b)$.

Тем самым будет доказано, что F — изоморфизм полей, а это значит, что $F(x) \equiv x$. (смотри задачу 10 из листочка про поля.)

3. а)Докажите, что $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ и $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.
б) Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношения длин отрезков на прямой.

4. Докажите, что f — непрерывное отображение плоскости.

5. Докажите, что аффинные преобразования плоскости образуют группу с операцией композиции.

6. а) Даны точки O и O', а также пары неколлинеарных векторов e_1, e_2 и e'_1, e'_2. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее O в O', e_1 в e'_1, e_2 в e'_2.

б)Докажите, что для любых двух невырожденных треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, переводящее A в A', B в B', а C в C'.

7. Докажите, что всякий четырёхугольник аффинным преобразованием можно перевести в четырёхугольник с двумя прямыми углами.

8. Докажите, что пятиугольник можно перевести в правильный тогда и только тогда, когда у него каждая диагональ параллельна одной из сторон.

9. Дано биективное преобразование плоскости, для которого прообраз любой окружности есть окружность. Докажите, что это
а) аффинное преобразование;
б) преобразование подобия.

Планиметрия алгебраических кривых. 20 июля

Определение: **Алгебраической кривой** на координатной плоскости называется множество нулей (ненулевого) многочлена $f(x, y)$ с действительными коэффициентами. Например, прямая - это множетсво нулей некоторого линейного многочлена $ax + by + c$, $(a, b) \neq (0, 0)$, а окружность радиуса r с центром в точке (x_0, y_0) - множество нулей многочлена $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2$.

1 а) Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ - две декартовы системы координат на плоскости, C - алгебраическая кривая, заданная в системе $\mathfrak{A}$ многочленом степени n. Докажите, что и в системе $\mathfrak{B}$ кривая C задается многочленом степени n.

б) Докажите, что и в любой косоугольной системе координат C задается многочленом степени n.

в) Докажите, что если кривая, задаваемая многочленом степени n пересекает некоторую прямую больше чем в n точках, то она содержит эту прямую.

Определение: Пусть F_1, F_2 - точки на плоскости (не обязательно различные), ℓ - прямая. **Эллипсом** с фокусами F_1 и F_2 называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до фокусов постоянна и равна некоторому $a > F_1F_2$. **Гиперболой** с фокусами F_1 и F_2 называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до фокусов постоянен и равен некоторому $a > F_1F_2$. **Параболой** с фокусом F и директрисой ℓ называется геометрическое место точек, расстояние от которых до фокуса и директрисы совпадает.

2 Докажите, что эллипс, гипербола и парабола являются алгебраическими кривыми, задаваемыми многочленами второй степени.

Вспоминаем и разбираем задачу 3 из листочка "Многочлены от нескольких переменных. Овертайм".

3 а) Для любой прямой ℓ на плоскости через P_ℓ обозначим линейный многочлен, множеством нулей которого является прямая ℓ. Пусть точки A, B, C, D лежат на кривой, заданной многочленом F степени 2. Докажите, что тогда можно подобрать действительные числа μ и λ так, что будет выполнено равенство $F = \mu P_{AB}P_{CD} + \lambda P_{AC}P_{BD}$ (*Подсказка:* Рассмотрите систему координат с осями AB и AC).

б) **Теорема о бабочке:** Дана окружность ω. Пусть хорды KL и MN проходят через середину O хорды AB. Тогда прямые KN, ML пересекают прямую AB в точках, равноудалённых от точки O.

в) **Теорема о двух бабочках:** Пусть стороны самопересекающихся четырехугольников $KLMN$ и $K'L'M'N'$, вписанные в одну и ту же окружность, пересекают хорду AB этой окружности в точках P, Q, R, S и P', Q', R', S' соответственно. Тогда если три из точек P, Q, R, S совпадают с тремя из точек P', Q', R', S', то и оставшиеся точки тоже совпадают.

4 **Теорема о девяти точках на кубической кривой:** На плоскости проведены три красные и три синие прямые и отмечено 9 точек пересечения разноцветных прямых (будем считать, что все эти точки существуют и различны). Тогда, если восемь из этих точек лежат на кривой, заданной многочленом третьей степени, то и девятая точка также лежит на этой кривой.

а) Выведите из теоремы о девяти точках на кубической кривой следующие утверждения.

Теорема Паскаля: Точки $1,2,3,4,5,6$ расположены на окружности, так что прямые 12 и 45 пересекаются в точке A, прямые 23 и 56 пересекаются в точке B, а прямые 34 и 61 - в точке C. Тогда точки A,B,C лежат на одной прямой.

Теорема Паппа: Точки $1,2,3,4,5,6$ расположены на двух прямых ($1,3,5$ - на первой, $2,4,6$ - на второй) так что прямые 12 и 45 пересекаются в точке A, прямые 23 и 56 пересекаются в точке B, а прямые 34 и 61 - в точке C. Тогда точки A,B,C лежат на одной прямой.

Обозначим красные прямые через R_1,R_2,R_3, синие через B_1,B_2,B_3, а точку пересечения R_i и B_j через A_{ij}. Будем считать, что данная кубическая кривая проходит через все точки, кроме A_{22} и задается многочленом $F(x,y)$ третьей степени в косоугольной системе координат с осями R_1 (ось x) и B_1 (ось y).

б) Докажите, что можно подобрать действительные числа μ и λ, так что $F(x,0)=\mu P_{B_1}(x,0)P_{B_2}(x,0)P_{B_3}(x,0)$ и $F(0,y)=\lambda P_{R_1}(0,y)P_{R_2}(0,y)P_{R_3}(0,y)$.

в) Докажите, что $F(x,y)=\mu P_{B_1}(x,y)P_{B_2}(x,y)P_{B_3}(x,y)+\lambda P_{R_1}(x,y)P_{R_2}(x,y)P_{R_3}(x,y)$ и выведите теорему о девяти точках на кубической кривой.

Останки геометрии. 21 июля.

1. Докажите, что биекция плоскости на себя является аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда она переводит центры масс в центры масс.

2. Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношение площадей треугольников.

3. Даны две параллельные прямые. На одной из них отмечен отрезок длины 1. Докажите, что можно с помощью одной линейки построить отрезок любой рациональной длины.

4. Докажите, что с помощью одной линейки нельзя построить биссектрису угла.

5. Точки A_1, B_1, C_1 делят соответственно стороны BC, CA, AB треугольника ABC в одном и том же отношении. Доказать, что совпадают точки пересечения медиан треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и треугольника с вершинами в точках пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1.

6. Дана треугольная призма. Проводятся два сечения, не пересекающие основания призмы и не задевающие друг друга. Могли ли эти сечения оказаться правильными треугольниками со стороной 1 и со стороной $1,01$?

Определение Дана окружность ω с центром в точке O радиусом R. *Полярой* точки $X \neq O$ относительно окружности ω называется геометрическое множество точек Y таких, что $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY} = R^2$.

7. Докажите, что поляра точки является прямой.

Если x — поляра точки X, то точку X называют *полюсом* прямой x.

8. а) Даны две точки A и B, прямые a и b — их поляры. Докажите, что $A \in b \iff B \in a$.

б) Пусть A, B, C — точки плоскости, a, b, c — их поляры. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда прямые a, b, c пересекаются в одной точке или параллельны.

в) Отрезки KA и KB касаются окружности ω. Докажите, что прямая AB — поляра точки K.

г) **(Гармонический четырёхугольник.)** Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Касательные к описанной окружности, проведённые в точках B и D пересекаются на прямой AC. Докажите, что касательные к описанной окружности, проведённые в точках A и C пересекаются на прямой BD.

9. (Теорема Брианшона.) Каждая сторона шестиугольника $ABCDEF$ касается окружности ω. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке. (*Указание: воспользуйтесь теоремой Паскаля.*)

Математический анализ.

Предел. 7 июля

Определение. Последовательность — это функция от натурального аргумента. Если a — такое функция, то элементы последовательности записывают как $a_1 = a(1)$, $a_2 = a(2)$, …, а саму последовательность обозначают $\{a_n\}$.

Определение. Интервал (a, b) мы будем называть *ловушкой* для последовательности $\{x_n\}$, если в этом отрезке содержатся почти все (т. е. все, кроме, может быть, конечного числа) члены данной последовательности. Интервал (a, b) мы будем называть *кормушкой* для последовательности $\{x_n\}$, если в этом отрезке содержится бесконечно много членов данной последовательности.

1. Существует ли последовательность, для которой интервалы $(0, 1)$ и $(2, 3)$ одновременно являются а) ловушками; б) кормушками?

Пусть отрезки $(0, 1)$ и $(9, 10)$ являются кормушками для последовательности $\{x_n\}$. Может ли для этой последовательности существовать в) ловушка длины 1; г) ловушка длины 9? д) Существует ли последовательность без кормушек? е) Существует ли последовательность, для которой любой отрезок является кормушкой?

Определение. Число a является точкой сгущения последовательности $\{x_n\}$, если любой открытый интервал, содержащий a является кормушкой для $\{x_n\}$. Число a является пределом последовательности, если любой открытый интервал, содержащий a является ловушкой для $\{x_n\}$. В этом случае говорят, что последовательность x_n сходится (к a) и пишут $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

2. а) Докажите, что если a является пределом последотальности $\{x_n\}$, то a является ее точкой сгущения. б) Докажите, что у всякой последовательности есть не более одного предела. в) Приведите пример последовательности, у которой несколько точек сгущения. Есть ли у нее предел?

3. Сложение пределов. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, а последовательность $\{z_n\}$ определяется как сумма $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, т. е. $z_n = x_n + y_n$. Тогда $\{z_n\}$ сходится, причем $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если найдется такое число M, что $|x_n| < M$ для всякого $n \in \mathbb{N}$.

4. а) Докажите, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. б) Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, а последовательность y_n ограничена. Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = 0$. в) **Умножение пределов.** Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся. Докажите, что произведение этих двух последовательностей также сходится, причем $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

5. Вычислите а) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

6. Теорема о двух милиционерах. Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ таковы, что $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Известно, что $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся, причем предел у них один и тот же. Докажите, что $\{y_n\}$ тоже сходится, причем к этому же пределу.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонно возрастающей, если $x_n \leq x_{n+1}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Монотонно убывающая последовательность определяется аналогично.
Последовательность называется монотонной, если она является монотонно возрастающей или монотонно убывающей.

Аксиома полноты. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

7. Лемма о вложенных промежутках. Пусть имеется бесконечная последовательность замкнутых промежутков, так что последующий содержится в предыдущем. Докажите, что если длина промежутка стремится к нулю, то пересечение всех отрезков является точкой.

8. Дана последовательность $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... $(x_{n+1} = \sqrt{2+x_n})$. а) Докажите, что эта последовательность имеет предел. б) Найдите этот предел.

Непрерывность. 11 июля

Определение. *Подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$ называется всякая последовательность $\{x_{n_k}\}$, где n_k — это некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел.

1. а) Докажите, что a является точкой сгущения последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда некоторая ее подпоследовательность сходится к a. б) Докажите, что из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. в) Докажите, что у всякой ограниченной последовательности есть точка сгущения.

Определение. Функция f называется *непрерывной* в a, если она определена в a и для всякой последовательности x_n, сходящейся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(a)$.

Говорят, что f непрерывна на некотором множестве, если она непрерывна в каждой его точке.

2. Непрерывность монотонной функции. Функция f монотонна на промежутке $\mathfrak{X}$ и принимает на нем все значения из промежутка $\mathfrak{Y}$ и только их. Докажите, что f непрерывна на $\mathfrak{X}$. (Промежутки могут быть как открытыми, так и замкнутыми, как ограниченными, так и неограниченными.)

3. а) Докажите, что функция $f(x) = x^n$ непрерывна на всей вещественной оси для всякого $n \in \mathbb{N}$. б) Докажите, что всякий многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ непрерывен на $\mathbb{R}$.

4. Теоремы Больцано-Коши о среднем значении. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. а) Известно, что $f(a)f(b) \leq 0$. Докажите, что найдется такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = 0$. б) Пусть $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Докажите, что для всякого C между A и B найдется такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

5. Пусть f — непрерывная функция, определенная на отрезке $[0, 1]$ такая, что $f(0) = f(1) = 0$. а) Верно ли, что на графике f найдется хорда длины $\frac{1}{3}$, параллельная оси (OX)? б) При каких ℓ на графике f заведомо найдется хорда длины ℓ, параллельная оси (OX)?

6. Теоремы Вейерштрасса. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. а) Докажите, что $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ сверху и снизу. б) Докажите, что найдутся такие $x_0, x_1 \in [a, b]$, что $f(x_0)$ и $f(x_1)$ будут, соответственно, наибольшим и наименьшим из всех значений $f(x)$ на $[a, b]$.

7. Найдите пределы следующих последовательностей: а) $\sqrt[n]{n}$; б) $\frac{n^{2013}}{1.01^n}$.

План доказательства основной теоремы алгебры. 19 июля.

Основная теорема алгебры. Всякий непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

План доказательства.

Будем доказывать, что у многочлена $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ есть комплексный корень.

Шаг 1. Функция $|f(z)|$ непрерывна на всей комплексной плоскости.

Шаг 2. (Лемма о поведении многочлена “вдали”). Для любой контстанты $c \in \mathbb{R}$ существует такое R, что при $|z| > R$ выполнено $|f(z)| > c$.

Шаг 3. Подбираем c и соответствующее R так, чтобы минимум $|f(z)|$ на круге радиуса R стал и глобальным минимумом функции. (Для этого достаточно взять $c > |f(0)|$.)

Шаг 4. На круге радиуса R непрерывная функция достигает минимум. (Который в итоге является и глобальным.)

Шаг 5. Если минимальное значение $|f(z)| = 0$, то доказательство завершено. если же минимум достигается в точке z_0 и $f(z_0) = q \neq 0$, то рассмотрим разностый многочлен $g(\delta) = f(z_0 + \delta) - f(z_0)$. У этого многочлена свободный член равен 0.

Шаг 6. (Лемма о поведении многочлена "вблизи"). Пусть

$$g(\delta) = b_m\delta^m + b_{m+1}\delta^{m+1} + \dots b_n\delta^n,$$

причём степени здесь расположены в порядке возрастания, то есть b_m — коэффициент при самой младшей степени из тех, коэффициент при которых не равен 0. Введём обозначение $h(\delta) = g(\delta) - b_m\delta^m$. Тогда существует такое r, что для любого $\delta \in \mathbb{C}$ такого, что $|\delta| < r$ выполнены неравенства:

$$\frac{|q|}{2} > |b_m\delta^m| > 2|h(\delta)|.$$

Шаг 7. Существует такое $\delta \in \mathbb{C}$, что $|\delta| < r$ и $q + b_m\delta^m$ лежит на отрезке между 0 и q.

Шаг 8. Для выбранного δ выполнено неравенство $|q + g(\delta)| < |q|$, что противоречит тому, что q — минимум функции.

Следствие 1. Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ имеют степень 1.

Следствие 2. Всякий многочлен $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ степени n раскладывается на n сомножителей первой степени $f(z) = a(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ — корни многочлена f.

Следствие 3. Неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ — это многочлены степени 1 или квадратные трёхчлены с отрицательным дискриминантом.

Разное.

Вступительная олимпиада. 04.07.2013

1. Вещественные числа a, b и c таковы, что графики функций $y = ax + b$, $y = bx + c$ и $y = cx + a$ пересекаются в одной точке. Докажите, что $a = b = c$.

2. На свой день рождения Коля Будин угощал любимых преподавателей треугольным тортом, который он разрезал на 6 кусков по трем биссектрисам. Задержавшемуся Александру Львовичу достался последний кусок в форме прямоугольного треугольника, на основании чего он заявил, что торт имел форму равнобедренного треугольника. Прав ли Александр Львович?

3. У старика Хоттабыча есть три палочки. Вырвав из бороды волосок, он может удлинить любую выбранную им палочку ровно в три раза. Он может сделать такую операцию сколько угодно раз. Обязательно ли Хоттабыч сможет добиться, чтобы из его палочек можно было составить невырожденный треугольник (вне зависимоти от первоначальных длин палочек)?

4. На плоском ровном поле растут 6 деревьев: А, Б, В, Г, Д и Е. По полю проходит прямая дорога. Землеустроитель установил на дороге 17 столбов, и на каждом прикрепил табличку, на которой перечислены имена деревьев, причем первым указано ближайшее, вторым – второе по удаленности и т.д. Докажите, что найдутся два столба с одинаковыми табличками.

5. Решите в натуральных числах уравнение $abc + ab + c = a^3$.

6. На международной конференции используются 4 официальных языка. Известно, что любые два участника могут общаться на одном из этих языков. Докажите, что есть язык, на котором говорят не менее 60% участников.

Декомпозиция. 05.07.2013

Вспоминаем: Разложение натуральных чисел в произведение простых, многочленов с целыми коэффициентами в произведение неприводимых над $\mathbb{Z}$ многочленов, перестановок в произведение непересекающихся циклов (или транспозиций), графов в объединение компонент связности, движений в композицию осевых симметрий, натуральных чисел в сумму различных степеней двойки и тп.

1. В графе степень каждой вершины четна. Докажите, что его ребра можно раскрасить в несколько цветов так, что ребра каждого цвета образуют простой цикл.

2. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи (числами Фибоначчи называются элементы рекуррентной последовательности $\{F_n\}$, заданной условиями $F_1 = F_2 = 1$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geq 2$).

3. Докажите, что любое положительное рациональное число можно представить в виде суммы различных чисел вида $\frac{1}{n}$ (n — натуральное)

а) При помощи *жадного алгоритма*: в начале свести к случаю числа меньшего 1, а затем на каждом шаге вычитать наибольшее $\frac{1}{n}$, не превосходящее имеющееся на данный момент число.

б) При помощи *метода парных замен*: $\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \to \frac{2}{y}$, если y четно; $\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \to \frac{2}{y+1} + \frac{2}{y(y+1)}$, если y — нечетно.

4. Многочлен $p(x)$ (с действительными коэффициентами) называется *целозначным*, если он принимает целые значения при всех целых x

а) Докажите, что многочлен $\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ является целозначным.

б) Докажите, что многочлен является целозначным тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-1)}{2!} + a_3 \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \cdots + a_n \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!},$$

где числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые.

в) Какую наименьшую степень может иметь *унитарный* (то есть с единичным старшим коэффициентом) многочлен $f(x)$, такой что $f(a)$ делится на 100 при любом целом a.

5. Среди многочленов степени не выше n с целыми коэффициентами некоторые особенно раздражают Владимира Алексеевича, причем сумма и разность двух раздражающих многочленов сама является раздражающей. Докажите, что из раздражающих многочленов можно выбрать $n+1$ так, что любой раздражающий многочлен представляется как линейная комбинация выбранных с целыми коэффициентами

а) Для $n = 0$.

б) Для $n = 1$.

в) Для произвольного n.

6. У Карлсона есть 1000 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем сотая часть всего варенья. Карлсон считает завтрак правильным, если во время него он съедает поровну варенья из каких-то 100 банок и не трогает остальные. Докажите, что Карлсон может съесть все варенье за несколько правильных завтраков.

7. Будем называть многочлен $p(x)$ почти целозначным, если $p(2^k)$ — целое число для любого целого неотрицательного k.

а) Докажите, что многочлен $p_k(x) = 2^{-k(k-1)/2} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-2^{k-1})}{(2-1)(2^2-1)\cdots(2^k-1)}$ является почти целозначным.

б) Сформулируйте и докажите аналог утверждения б) из задачи 4.

Разнобой-1. 05.07.2013

1. Докажите, что найдется такое натуральное число n, что у числа 2^n+3 не менее 2013 различных простых делителей.

2. Расстояния от ортоцентра до вершин треугольника равны x, y и z. Радиус описанной окружности равен R. Докажите, что $x^2+y^2+z^2 \geq 3R^2$.

3. Даны два многочлена положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причем выполнены тождества $P(P(x)) = Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли тогда выполнено тождество $P(x) = Q(x)$?

4. Дана бесконечная последовательность вещественных чисел x_1, x_2, $\ldots$ Докажите, что если среди всевозможных упорядоченных t-элементных наборов вида $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+t}$ имеется не более t различных, то последовательность переодична (возможно, с предпериодом).

5. Найдите количество маршрутов хромой ладьи на доске $3\times n$, которые начинаются в левом нижнем углу, проходят по всем клеткам ровно один раз и заканчиваются в правом верхнем углу. (Хромой ладьей называется фигура, которая может ходить только в соседнюю по стороне клетку.)

6. Числа $a, b, c \in \mathbb{R}$ таковы, что $a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$. Докажите, что одно из чисел a, b и c равно 1.

7. Числа $k, n \in \mathbb{N}$ таковы, что $k < n$. Дана таблица $k\times n$, в каждой клетке которой записано целое число от 1 до n. При этом в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Докажите, что эту таблицу можно дополнить до квадрата $n \times n$, записав в каждую новую клетку какое-нибудь целое число от 1 до n так, чтобы по-прежнему в в каждой строке и в каждом столбце все числа были различны.

8. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки M, N и K, соответственно. Окружности, описанные около треугольников AMK и CNK, касаются прямой MN. Радиусы этих окружностей — R_1 и R_2. Найти радиус окружности, описанной около тругольника MNB.

Разнобой-2. 05 июля

1. Дан вписанный шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Докажите, что $CD \parallel AF$.

2. Вещественные числа x, y, z принадлежат отрезку $[0,1]$. Докажите, что

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant x^2y+y^2z+z^2x+1.$$

3. У каждого жителя города N знакомые составляют не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы мэра, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Выборы считаются состоявшимися, если явка избирателей не меньше

50%. Докажите, что можно провести выборы с двумя кандидатами, на которых будет необходимая явка.

4. Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы трех точных квадратов не менее чем миллионом различных способов.

5. В треугольнике ABC точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей. Вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках K и M соответственно, а стороны BC — в точке N. Оказалось, что середина отрезка KM лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки O, I и N лежат на одной прямой.

6. Положительные иррациональные числа p и q таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что каждое натуральное число является членом ровно одной из последовательностей $[np]$ и $[nq]$.

7. Существует ли многочлен степени 2013 с целыми коэффициентами такой, что его значения в точках $1, 2, \ldots 2014$ — это различные степени двойки?

8. В клетках таблицы $m \times n$ записаны различные числа. В каждой строке подчеркнули k наибольших чисел, а каждом столбце — ℓ наибольших чисел. Докажите, что по меньшей мере $k\ell$ чисел подчёркнуты дважды.

Внутренний матбой. 13 июля

1. Петя и Вася показывают Коле карточный фокус. Коля выбирает пять карт из колоды, содержащей 52 карты, и передает их Пете. Он смотрит в них, прячет одну из карт в карман, а четыре оставшиеся выкладывает слева направо в каком-либо порядке картинками вверх. После этого они зовут Васю, который отгадывает спрятанную карту. Докажите, что Петя и Вася могут так сговориться, что фокус всегда будет удаваться.

2. Даны полуокружность с диаметром AB и центром O и прямая, пересекающая полуокружность в точках C и D, а прямую AB — в точке M. Пусть K — отличная от O точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AOC и DOB. Докажите, что угол MKO — прямой.

3. Вася написал на доске n положительных чисел. После этого Петя, выбирая всеми возможными способами несколько из них, подсчитал сумму выбранных чисел и записал ответы на карточках — получилась $2^n - 1$ карточка. Докажите, что Вася может разложить все карточки на стопки таким образом, чтобы числа на карточках в одной стопке отличались не больше, чем в два раза.

4. Дан треугольник ABC. Каждая точка плоскости окрашена в синий или красный цвет. Докажите, что либо какие-то 3 красные точки образуют треугольник, равный ABC, либо найдутся две синие точки на расстоянии 1.

5. Пусть $n \geq a_1 > a_2 > \dots > a_k$ — натуральные числа такие, что $\text{НОК}(a_i, a_j) \leq n$ при любых i и j. Докажите, что $ia_i \leq n$ при всех i.

6. Дано натуральное $n > 4$. В правильном n-угольнике проведены $n-3$ непересекающиеся диагонали, разбивающие его на треугольники. Найдите максимальное возможное количество различных треугольников среди треугольников разбиения.

7. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая, отличная от AB, пересекает окружность ω_1 в точках C и D, окружность ω_2 в точках E и F, а прямую AB — в точке P, лежащей на отрезке AB. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников ACE и BDF, проходит через точку P.

8. Существует ли такой квадратный трехчлен с действительными коэффициентами, что для любого натурального n уравнение $f(f(\dots(f(x))\dots)) = 0$ (n букв f) имеет ровно 2^n различных действительных корней?

Профи-9 — Профи-10. 17 июля

1. В некоторой стране из каждого города можно проехать в любой другой, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлено два маршрута поездок по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом — начальный пункт маршрута выбирали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не прошел, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирали любой из них), и так до тех пор, пока не пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбрали произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не прошел, выбирали тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршурту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.

2. На плоскости дано конечное множество кругов с суммой радиусов R. Известно, что все круги лежат по одну сторону от любой прямой, не пересекающей ни одного из кругов. Докажите, что все круги можно накрыть одним кругом радиуса R.

3. Докажите, что существует бесконечно много троек (a, b, c) натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $2a^2 + 3b^2 - 5c^2 = 2013$.

4. На бесконечной клетчатой плоскости расставлены действительные числа так, что число в каждой клетке равно среднему арифметическому чисел в соседних клетках. Известны значения во всех клетках, у которых обе координаты четные, кроме клетки $(0, 0)$. Всегда ли можно восстановить значение в клетке $(0, 0)$?

5. В треугольнике ABC вписанная окружность с центром I касается сторон AC и AB в точках E и F соответственно. Точка M – середина стороны BC, а N – точка пересечения AM и EF. Прямые BI и CI вторично пересекают окружность, построенную на BC, как на диаметре, в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\frac{NX}{NY} = \frac{AC}{AB}$.

6. Существуют ли два 2013-значных числа, отличающиеся только порядком цифр, такие что одно из них является точным квадратом, другое — точным кубом и каждое из них делится на 12345678987654321.

7. Петя и Маша играют в игру. На доске написаны все целые числа от 0 до 1024. На первом ходу Маша зачеркивает 2^9 чисел, на втором Петя зачеркивает 2^8 чисел из оставшихся, потом Маша снова 2^7 чисел и так пока на доске не останется 2 числа. Разность этих чисел Петя платит Маше в конфетах. Какое наибольшее количество конфет Маша может себе обеспечить?

8. Дано четное натуральное число n. Многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + 1$ с вещественными коэффициентами имеет по крайней мере один вещественный корень. Найдите наименьшее возможное значение выражения $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2$.

9. Вписанная окружность ω остроугольного треугольника ABC касается стороны BC в точке K; J — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Окружность ω_1 проходит через точки B и C и касается окружности ω. Докажите, что ω_1 проходит через середину отрезка KJ.

10. Пусть $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и p — нечетное простое число. Докажите, что если $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает значения, равные точным квадратам в $2p - 1$ последовательной целой точке, то $b^2 - 4ac$ делится на p.

Математический бой "Профи-8 – Профи-9". Вариант M. 17 июля

1 Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в какие-то две вершины находящегося в невесомости прямоугольного

параллелепипеда $1 \times 1 \times 2$ м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравьи отличают вершины от не вершин, но все вершины изначально для них равноправны и направления тоже. Муравей знает, сколько он прополз, и сможет отличить длинное ребро от короткого, добравшись до его середины. Муравей запоминает направления поворотов в пространстве и направления ребер, выходящих из вершин, где он бывал. Друг друга муравьи заметят только оказавшись в одной точке).

2 210 точек расположены на плоскости таким образом, что любые 209 из них лежат на 14 прямых. Докажите, что все точки лежат на 14 прямых.

3 Натуральные числа a и b таковы, что числа $2a-1$, $2b-1$ и $a+b$ – простые. Докажите, что ни a^b+b^a, ни a^a+b^b не делятся на $a+b$.

4 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов B и D параллельны. Биссектриса угла B пересекает диагональ AC в точке K, а биссектриса угла D пересекает её в точке M так, что $AK = CM$ (точки K и M различны). Докажите, что отрезки KD и BM равны.

5 На доске можно либо написать две единицы, либо стереть любые два уже написанных одинаковых числа n и написать вместо них числа $n+1$ и $n-1$. Какое минимальное количество таких операций требуется, чтобы получить число 2013? (Сначала доска была чистой.)

6 Существует ли такая последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$, что $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}}$ при всех натуральных n?

7 Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC; O_A, O_B, O_C – центры вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно; T_A, T_B, T_C – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны.

8 Вершины графа занумерованы натуральными числами от 1 до 10^5, причем каждое натуральное число встречается ровно один раз. Известно, что в этом графе нет циклов из четырех вершин. Докажите, что существует арифметическая прогрессия из пяти не превосходящих 10^5 натуральных чисел такая, что никакие две вершины с номерами из этой прогрессии не соединены ребром.

9 На прямой отмечено конечное число точек. Известно, что для любых двух из них можно выбрать третью так, что среди этих трех одна лежит ровно посредине между двумя другими. Каково наибольшее возможное число отмеченных точек?

10 Действительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что все числа $2a - \frac{1}{b}, 2b - \frac{1}{c}, 2c - \frac{1}{a}$ не могут быть одновременно больше 1.

Математический бой "Профи-8 – Профи-9". Вариант N. 17 июля

1 Двум разумным муравьям заранее объявили, что их ночью высадят одновременно в какие-то две вершины находящегося в невесомости прямоугольного параллелепипеда $1 \times 1 \times 2$ м. Муравьи ползают только по ребрам, их максимальная скорость 1 м/мин. Могут ли они договориться действовать так, чтобы гарантированно встретиться ранее чем через 9 минут после высадки? (Муравьи отличают вершины от не вершин, но все вершины изначально для них равноправны и направления тоже. Муравей знает, сколько он прополз, и сможет отличить длинное ребро от короткого, добравшись до его середины. Муравей запоминает направления поворотов в пространстве и направления ребер, выходящих из вершин, где он бывал. Друг друга муравьи заметят только оказавшись в одной точке).

2 210 точек расположены на плоскости таким образом, что любые 209 из них лежат на 14 прямых. Докажите, что все точки лежат на 14 прямых.

3 Для каких простых p все числа вида $4n^2 + p$ – простые для любого $n = 1, 2, \ldots, p - 1$?

4 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов B и D параллельны. Биссектриса угла B пересекает диагональ AC в точке K, а биссектриса угла D пересекает её в точке M так, что $AK = CM$ (точки K и M различны). Докажите, что отрезки KD и BM равны.

5 На доске выписаны N различных иррациональных чисел. Известно, что для любых выписанных a и b хотя бы одно из чисел $\frac{a}{b+1}$, $\frac{b}{a+1}$ рационально. Каково наибольшее возможное значение N?

6 В треугольнике есть сторона больше 1. Всегда ли его можно разрезать на несколько треугольников, в каждом из которых есть сторона, равная 1?

7 Правильный треугольник с стороной длины 99 разбит на 99^2 клеток – правильных треугольников со стороной 1. У клеток всего 5050 вершин, в каждую вершину положили по монете. Монеты могут быть разного веса. Известно, однако, что у всех клеток, кроме одной, суммарные веса трех монет в вершинах одинаковы, а у этой одной клетки эта сумма меньше. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти «легкую» клетку?

8 Треугольник ABC вписан в окружность. Через точку A проведены хорды, пересекающие сторону BC в точках K и L и дугу BC в точках M и N. Докажите, что если вокруг четырехугольника $KLNM$ можно описать окружность, то треугольник ABC – равнобедренный.

9 На прямой отмечено конечное число точек. Известно, что для любых двух из них можно выбрать третью так, что среди этих трех одна лежит ровно посредине между двумя другими. Каково наибольшее возможное число отмеченных точек?

10 Действительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что все числа $2a - \frac{1}{b}, 2b - \frac{1}{c}, 2c - \frac{1}{a}$ не могут быть одновременно больше 1.

Заключительная олимпиада.

Довывод

1 У трех братьев день рождения в один день. Когда старшему из них исполнилось двенадцать, оказалось что сумма возрастов всех братьев делится на двенадцать. То же самое случилось, когда среднему исполнилось двенадцать. Докажите, что то же самое случится, когда третьему исполнится двенадцать.

2 Найдите все решения в действительных числах уравнения

$$\max\{x^2 + y^2, 2\} = \min\{-2x, 2y\}.$$

3 Василий Иванович и его верный ординарец Петька пленили 999 белогвардейцев и начали их допрашивать. Известно, что любой белогвардеец "расколется"после трех заданных ему вопросов (но не раньше!), а "расколовшего"(то есть задавшего третий вопрос) его героя гражданской войны награждают орденом. Допрос происходит следующим образом. Сначала Василий Иванович выбирает любого еще "нерасколовшегося" белогвардейца и задает ему вопрос, затем то же самое делает Петька, затем - снова Василий Иванович и т.д. Какое наибольшее количество орденов может обеспечить себе легендарный комдив?

4 D - основание высоты, проведенной из точки A в треугольнике ABC. На некоторой прямой, проходящей через точку D, нашлись такие точки E и F, лежащие вне треугольника ABC, что $BE \perp AE$ и $AF \perp CF$. M и N - середины BC и EF соответственно. Докажите, что угол ANM - прямой.

5 Последовательность натуральных чисел $\{a_k\}$ такова, что $a_{k+3} = a_k a_{k+1} a_{k+2} + 1$ при любом $k \geq 1$. Докажите, что число $a_k - 43$ — составное для любого $k > 100$.

Вывод

6 На плоскости проведено бесконечно много прямых, никакие две из которых не параллельны. Известно, что для любого квадрата со стороной 1 найдется проведенная прямая, которая его пересекает. Докажите, что можно нарисовать квадрат со стороной $0,8$, который пересекают не менее чем три проведенные прямые.

7 В n-элементном множестве M выбрано n различных подмножеств $A_1, \ldots, A_n$. Докажите, что для некоторого $x \in M$ множества $A_1 \cup \{x\}, \ldots, A_n \cup \{x\}$ также различны.

8 Александр Львович задумал три целых неотрицательных числа, такие что сумма их попарных произведений составляет половину точного квадрата, а сумма их квадратов является степенью простого числа. Какие значения могло принимать это простое число?

Послевывод

9 Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до n. Известно, что сумма чисел на всех карточках равна $n! \cdot k$, где k – целое число. Доказать, что карточки можно разложить на k групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, написанных на карточках, равнялась $n!$.

Билеты на теоретический зачет.

Билет 1

1. Алгебраические кривые. Переход из одной системы координат в другую. Эллипс, гипербола и парабола являются кривыми второго порядка.

2. Доказательство Золотарева квадратичного закона взаимности через перестановки.

3. Теорема Фолкмана.

Билет 2

1. Алгебраическое доказательство теоремы о бабочке; теоремы о двух бабочках.

2. Построение поля из p^2 элементов. Существование первообразного корня в поле.

3. Теорема Больцано-Коши и теорема Вейерштрасса.

Билет 3

1. Теорема о девяти точках на кубической кривой. Вывод невырожденной теоремы Паскаля и теоремы Паппа.

2. Доказательство квадратичного закона взаимности через подсчет произведения двумя способами.

3. Ловушки, кормушки, пределы и точки сгущения последовательностей. Операции с пределами. Вычисление предела $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

Билет 4

1. Определение поля и числового поля. Описание наименьшего числового поля, содержащего $\sqrt{2}$; содержащего $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; содержащего $\sqrt[3]{2}$. Изоморфизм полей. Поле F_p. Отсутствие нетождественного автоморфизма $\mathbb{R}$.

2. Корни многочленов с алгебраическими коэффициентами являются алгебраическими числами, корни унитарных многочленов с целыми алгебраическими коэффициентами являются целыми алгебраическими числами.

3. Теорема Брукса.

Билет 5

1. Симметрические многочлены. Теорема Виета. Формула Ньютона. Лексикографический порядок. Основная теорема о симметрических многочленах.

2. Сравнения целых алгебраических чисел по модулю. $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Задача про рекурренту.

3. Инверсия, определение, образы прямых и окружностей при инверсии, формула для расстояния между образами.

Билет 6

1. **1.** Алгебраические и целые алгебраические числа. Число, являющееся одновременно целым алгебраическим и рациональным, является целым. Сумма, разность, произведение целых алгебраических чисел является целым алгебраическим. Алгебраические числа образуют поле.

2. Показатели. Бесконечность множества простых чисел вида $2^n x + 1$ для фиксированного натурального n. Существование первообразного корня по простому модулю; по модулю p^k, $2p^k$ (p — нечетное простое).

3. Поворотная гомотетия, определение, свойство поворотной гомотетии, переводящей одну окружность в другую.

Билет 7

1. Корни многочленов с алгебраическими коэффициентами являются алгебраическими числами, корни унитарных многочленов с целыми алгебраическими коэффициентами являются целыми алгебраическими числами.

2. Определение группы. Примеры. Подгруппы, левые классы смежности, порядок элемента, индекс подгруппы, теорема Лагранжа.

3. Полярное соответствие, свойства, гармонический четырёхугольник.

Билет 8

1. Многочлены деления круга. $\prod\limits_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$. Доказательство бесконечности множества простых чисел вида $nx + 1$ для фиксированного натурального n.

2. Доказательство того, что существует поле из n элементов $\Rightarrow n = p^k$.

3. Центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок в отрезок. Точка Микеля.

Билет 9

1. Неприводимость многочленов деления круга

2. Непрерывность функции в точке. Непрерывность монотонных сюръективных функций. Непрерывность многочленов.

3. Аффинное преобразование. Сохранение отношений площадей. Сохранение центров масс. Построения линейкой.

Билет 10

1. Определение группы. Примеры. Подгруппы, левые классы смежности, порядок элемента, индекс подгруппы, теорема Лагранжа.

2. Доказательство основной теоремы алгебры (в предположении, что модуль многочлен достигает минимума на комплексной плоскости).

3. Теорема Татта

Билет 11

1. Сравнения целых алгебраических чисел по модулю. $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Задача про рекурренту.

2. Трансцендентные числа. Описание наименьшего числового поля, содержащего π. Несчетность множества трансцендентных чисел. Теорема Лиувилля.

3. Теорема о милиционерах. Аксиома полноты и лемма о вложенных промежутках.

Билет 12

1. Многочлены от нескольких переменных. Степень многочлена; степень произведения двух многочленов равна сумме их степеней. Ненулевой многочлен с действительными коэффициентами принимает ненулевое значение. Многочлен, обращающийся в нуль во всех точках прямой, делится на линейный многочлен, задающий эту прямую.

2. Предел последовательности комплексных чисел. Равносильноести определений. Непрерывность функции комплексного переменного. Непрерывность модуля многочлена от одной переменной. Достижение максимума и минимума на круге.

3. Сети, потоки, теорема Форда-Фалкерсона.

Билет 13

1. Доказательство квадратичного закона взаимности через квадратичные суммы Гаусса.

2. Многочлены от нескольких переменных. Степень многочлена; степень произведения двух многочленов равна сумме их степеней. Ненулевой многочлен с действительными коэффициентами принимает ненулевое значение. Многочлен, обращающийся в нуль во всех точках прямой, делится на линейный многочлен, задающий эту прямую.

3. Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Билет 14

1. Доказательство Золотарева квадратичного закона взаимности через перестановки.

2. Доказательство основной теоремы алгебры (в предположении, что модуль многочлен достигает минимума на комплексной плоскости).

3. Реберная теорема Менгера

Билет 15

1. Доказательство квадратичного закона взаимности через подсчет произведения двумя способами.

2. Построение поля из p^k элементов.

3. Теорема Рамсея для гиперграфов.

Билет 16

1. Доказательство того, что существует поле из n элементов $\Rightarrow n = p^k$.

2. Теорема о девяти точках на кубической кривой. Вывод невырожденной теоремы Паскаля и теоремы Паппа.

3. Теорема Холла

Билет 17

1. Построение поля из p^k элементов.

2. Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

3. Вершинная теорема Менгера.

Билет 18

1. Конечные плоскости.

2. Симметрические многочлены. Теорема Виета. Формула Ньютона. Лексикографический порядок. Основная теорема о симметрических многочленах.

3. Аффинное преобразование, определение, сохранение отношений длин параллельных отрезков. Сохранение отношений площадей. Сохранение центров масс. Построения линейкой.

Билет 19

1. Построение поля из p^2 элементов. Существование первообразного корня в поле.

2. Многочлены деления круга. $\prod\limits_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$. Доказательство бесконечности множества простых чисел вида $nx+1$ для фиксированного натурального n.

3. Теорема Ван-дер-Вардена.

Билет 20

1. Показатели. Бесконечность множества простых чисел вида $2^n x + 1$ для фиксированного натурального n. Существование первообразного корня по простому модулю; по модулю p^k, $2p^k$ (p — нечетное простое).

2. Алгебраические кривые. Переход из одной системы координат в другую. Эллипс, гипербола и парабола являются кривыми второго порядка.

3. Теорема Кенига

Билет 21

1. Трансцендентные числа. Описание наименьшего числового поля, содержащего π. Несчетность множества трансцендентных чисел. Теорема Лиувилля.

2. Алгебраическое доказательство теоремы о бабочке; теоремы о двух бабочках.

3. Теорема Бержа.