XXIX Кировская Летняя Многопредметная Школа
Вишкиль, 3–28 июля 2013 года. Профи 9.

Поворотная гомотетия. 05.07.2013

Определение. *Поворотной гомотетией* с коэффициентом k и углом φ называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ, имеющих общий центр ($H_O^k \circ R_O^\varphi$). При этом можно считать, что $k > 0$ и $0^\circ \le \varphi < 360^\circ$.

1. Докажите, что преобразование подобия является поворотной гомотетией с коэффициентом $k \ne 1$ и углом φ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\vec{a}$ данное преобразование переводит его в вектор $k \cdot \vec{a_\varphi}$ (где $\vec{a_\varphi}$ — вектор, полученный из вектора $\vec{a}$ поворотом на угол φ).

2. а) Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P, причем все точки A, B, A_1, B_1, P различны. Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая точку A в A_1, а B в B_1, причем её центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P. б) Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1 совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1. в) Даны четыре прямые общего положения. Выведете из пунктов а) и б) то, что описанные окружности четырех треугольников, образованных этими прямыми, пересекаются в одной точке.

3. Середины сторон BC и B_1C_1 правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают (вершины обоих треугольников перечислены по часовой стрелке). Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1, а также отношение длин отрезков AA_1 и BB_1.

4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Прямые p и q, проходящие через точку A, пересекают окружность S_1 в точках P_1 и Q_1, а окружность S_2 — в точках P_2 и Q_2. Докажите, что угол между прямыми P_1Q_1 и P_2Q_2 равен углу между окружностями S_1 и S_2.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1; точки M и M_1 — середины отрезков AC и A_1C_1 соответственно. Прямая BM пересекает описанную окружность треугольника A_1BC_1 в точке K_1, а прямая BM_1 — описанную окружность треугольника ABC в точке K. Сами описанные окружности пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC — в точке T. Докажите, что точки M, M_1, K, K_1, P и T лежат на одной окружности.

XXIX Кировская Летняя Многопредметная Школа
Вишкиль, 3–28 июля 2013 года. Профи 9.

Поворотная гомотетия. 05.07.2013

Определение. *Поворотной гомотетией* с коэффициентом k и углом φ называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ, имеющих общий центр ($H_O^k \circ R_O^\varphi$). При этом можно считать, что $k > 0$ и $0^\circ \le \varphi < 360^\circ$.

1. Докажите, что преобразование подобия является поворотной гомотетией с коэффициентом $k \ne 1$ и углом φ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\vec{a}$ данное преобразование переводит его в вектор $k \cdot \vec{a_\varphi}$ (где $\vec{a_\varphi}$ — вектор, полученный из вектора $\vec{a}$ поворотом на угол φ).

2. а) Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P, причем все точки A, B, A_1, B_1, P различны. Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая точку A в A_1, а B в B_1, причем её центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P. б) Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1 совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1. в) Даны четыре прямые общего положения. Выведете из пунктов а) и б) то, что описанные окружности четырех треугольников, образованных этими прямыми, пересекаются в одной точке.

3. Середины сторон BC и B_1C_1 правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают (вершины обоих треугольников перечислены по часовой стрелке). Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1, а также отношение длин отрезков AA_1 и BB_1.

4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Прямые p и q, проходящие через точку A, пересекают окружность S_1 в точках P_1 и Q_1, а окружность S_2 — в точках P_2 и Q_2. Докажите, что угол между прямыми P_1Q_1 и P_2Q_2 равен углу между окружностями S_1 и S_2.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1; точки M и M_1 — середины отрезков AC и A_1C_1 соответственно. Прямая BM пересекает описанную окружность треугольника A_1BC_1 в точке K_1, а прямая BM_1 — описанную окружность треугольника ABC в точке K. Сами описанные окружности пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC — в точке T. Докажите, что точки M, M_1, K, K_1, P и T лежат на одной окружности.