

Вступительный Тест. 3 июля

Фамилия, имя

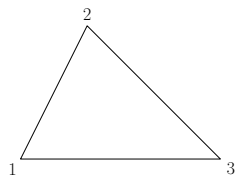
Часть I

1 Найдите сумму векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} на координатной плоскости, где $A = (3, 11)$, $B = (7, 4)$, $C = (1, 0)$, $D = (-2, -2)$

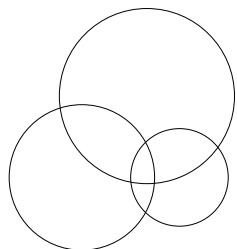
2 На сторонах AB и CD четырехугольника $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, так что $AM = 2BM$, $DN = 2CN$. Выразите \overrightarrow{MN} через \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{BC} .

3 Приведите условия а) параллельности и б) перпендикулярности прямых, содержащих векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} .

4 Дайте определение центра масс системы материальных точек $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$. Найдите центр масс системы точек на рисунке.



5 Постройте радикальный центр трех окружностей.



6 а) Решите в комплексных числах уравнение $x^2 + 1 = 0$.

б) Найдите корни квадратного трехчлена $(1 + i)x^2 - 5ix - 2 + 2i$.

- 7 Найдите все натуральные n , для которых $n^3 - 5n^2 + 3n + 9$ делится на $n^2 + n + 1$.
- 8 Вычислите сумму квадратов корней многочлена $x^3 - 5x + 1$.
- 9 Найдите остаток от деления многочлена $F(x)$ на $x^2 - 5x + 6$, если известно, что $F(2) = 2$, $F(3) = 4$.
- 10 Найдите НОД многочленов $x^3 + 8x^2 + 9x + 2$ и $x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 56x + 16$.
- 11 Вычислите $(1 + \sqrt{3}i)^{16}$
- 12 Для каких комплексных z выполнено $z = \bar{z}$?
- 13 Сформулируйте основную теорему алгебры.
- 14 Какая из перечисленных систем вычетов по модулю 12 является приведенной $\{13, 19, 29, 83, 1\}$; $\{46, 25, 17, -13\}$; $\{41, 37, -5, 23\}$.
- 15 Сформулируйте неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Какова его геометрическая интерпретация для $n = 2$?

16 Пусть $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ и $b_1 > b_2 > b_3 > 0$. Укажите наибольшее и наименьшее среди чисел $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_3, a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1, a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2, a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1, a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2$.

17 а) Дайте определения сюръекции, инъекции.

б) Какие из перечисленных ниже отображений являются инъекциями, какие сюръекциями, а какие биекциями?

1) $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$.

2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$.

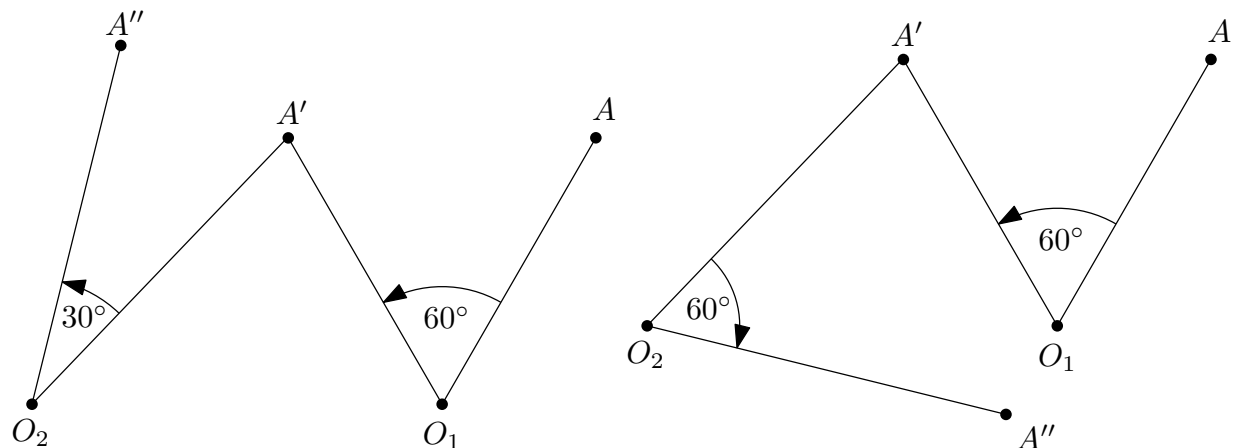
3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = ([x], \{x\})$.

4) $f : \{0, 1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 10\}, f(x) \equiv 5x \pmod{11}$.

18 Рассмотрим отображения $f, g : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, заданные формулами $f(x) = 2^{3\sqrt{x}}$ и $g(x) = (x + 1)^2$. Вычислите $f \circ g, g \circ f, f^{-1}$.

19 Сформулируйте теорему Холла (лемму о девушках).

20 Найти композицию двух поворотов.



21 Выразите степень центра вписанной окружности относительно описанной окружности через R (радиус описанной окружности) и r (радиус вписанной окружности).

22 Кузнечик прыгает по числовой прямой. Он начинает из нуля и каждую секунду смещается на $\alpha > 0$. При каких α он когда-нибудь окажется на расстоянии меньше $\frac{5}{16}$, но больше $\frac{1}{16}$ от ближайшего целого числа?

23 Рассмотрим перестановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Найдите ее порядок, орбиту элемента 1; представьте эту перестановку в виде произведения транспозиций.

24 Объясните, почему не любую перестановку десяти элементов можно представить в виде композиции циклов длины 3.

Часть II

- 25 Сколько существует квадратичных невычетов по модулю 239? Является ли 238 вычетом или невычетом по этому модулю?
- 26 Упростите выражение с символами Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{2p-a}{p}\right)\left(\frac{b+p}{p}\right)\left(\frac{c-2p}{p}\right)$.
- 27 Для каких простых p выполнено $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$?
- 28 Когда многочлен с целыми коэффициентами называется неприводимым над \mathbb{Z} ? Является ли неприводимым многочлен $x^{10} - 4x^7 + 16x^4 + 8x + 2$ и почему?
- 29 Приведите пример многочлена, принимающего в точках 1, 2, 3, 4 значения 7, 3, 9, 24 соответственно.
- 30 Дайте определение понятия группа. Когда группа называется коммутативной?
- 31 Приведите все известные Вам примеры полей.
- 32 Вычислите пределы последовательностей при $n \rightarrow \infty$: $\left\{\frac{5n^3-17}{6n^3+32n+9}\right\}$, $\frac{2^n}{n!}$, $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

- 33 Объясните, почему всякий многочлен пятой степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.
- 34 Среди перечисленных ниже множеств укажите все счетные; имеющие мощность континуум; имеющие мощность больше континуума.
- a) Простые числа.
 - b) Треугольники на плоскости.
 - c) Отрицательные рациональные числа.
 - d) Комплексные числа
 - e) Функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$.
 - f) Функции $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - g) Неприводимые над \mathbb{Z} многочлены.
 - h) Подмножества точек квадрата.
 - i) Конечные подмножества точек куба