

9 класс, инверсия – теория, 14 июля

Возьмем на плоскости окружность S с центром O радиуса r . **Инверсией относительно окружности S** называется преобразование ПОЧТИ ВСЕЙ плоскости, которое любую точку M , не совпадающую с O переводит в точку M_1 , лежащую на луче OM , такую, что $|OM| \cdot |OM_1| = r^2$.

Точка O называется **центром инверсии**, S – **окружность инверсии**, r – **радиус инверсии**.

Вопросики на инверсию:

1. Является ли инверсия инъекцией? Сюръекцией?
2. Какое преобразование является обратное к инверсии?
3. Что будет, если сделать инверсию дважды относительно одного и того же центра с тем же радиусом?
4. Найдите неподвижные точки инверсии.
5. Найдите инвариантные множества инверсии (хотя бы навскидку).
6. Докажите, что точки лежащие вне окружности переходят внутрь неё, и наоборот

Определение. Углом между двумя кривыми (в частности, окружностями), пересекающимися в точке A , называется угол между касательными к ним, проведенными в точке A .

Замечание. Заметьте, что в определении угла между кривыми присутствует точка A .

T1. Построение. Дана окружность S с центром O . а) MT – касательная из точки M к окружности S . Из точки T опускаем перпендикуляр на OM . Получаем точку M_1 . б) Пусть AB – диаметр, перпендикулярный OM . P – точка пересечения AM и окружности S . Прямые BP и OM пересекаются в точке M_1 . Докажите, что точки M_1 и M инверсны.

Как строить инверсную точку, если M находится внутри?

T2. Ортогональность. Доказать, что окружность, проходящая через две взаимно инверсные точки, при инверсии преобразуется в себя. (Использовать теорему о квадрате касательной).

T3. Инвариант. Окружность, ортогональная окружности инверсии, инвариантна.

T4. Обратно – инвариант. Если окружность при инверсии переходит сама в себя и не совпадает с окружностью инверсии, то она ей ортогональна.

T5. Памятка супершкольнику, использующему инверсию. При инверсии

ЧТО	ВО ЧТО
Прямая не через O	Окружность не через O
Прямая через O	В СЕБЯ
Окружность через O	Прямая не через O
Окружность не через O	Окружность не через O

T6. Изогональность. При инверсии сохраняются углы.

T7. Изменение расстояний. Пусть A_1 и B_1 – образы точек A и B при инверсии с радиусом R . Тогда $A_1B_1 = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$

T8. Связь с гомотетией. Если две окружности инверсны с центром в точке O , то они и гомотетичны с центром в точке O .

T9. Связь с гомотетией-2. Если две окружности пересекаются, то оба центра их гомотетий являются центрами инверсий, при которой одна окружность переходит в другую. Если окружности касаются или не пересекаются, то ровно один из центров гомотетий является центром инверсии, отображающей одну окружность на другую

T10. Как использовать инверсию. Любые две окружности, не пересекающиеся друг с другом, можно отобразить инверсией на две концентрические (или две параллельные прямые).

T11. Как использовать инверсию- 2. Любые две окружности можно с помощью инверсии отобразить на две равные.

Упражнение 1. Нарисуйте образ окружности и двух касательных к ней, проведенных из одной точки, при инверсии а) относительно точки пересечений касательных; б) относительно точки касания; в) относительно центра окружности.

Упражнение 2. Нарисуйте образ треугольника и его высот при инверсии. Симпатичная картинка!