

9 класс, теория Рамсея, 14 июля

T1. Теорема Рамсея. Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что существует такое натуральное $r(m, n)$, что при любой раскраске полного графа K с $r(m, n)$ вершинами в два цвета или существует полный подграф K_1 с m вершинами графа K , покрашенный в первый цвет, или существует полный подграф K_2 с n вершинами, покрашенный во второй цвет.

T2. Теорема Рамсея для k цветов. Сформулируйте и докажите.

1. Каждое из рёбер полного графа с 17 вершинами покрашено в один из трех цветов. Докажите, что есть три вершины, все ребра между которыми одного цвета.

2. а) Докажите, что в любой компании из 10 человек, в которой среди любых трех есть двое знакомых между собой, найдутся 4 человека, попарно знакомых друг с другом. б) Верно ли то же самое для 9 человек?

3. Каждое из рёбер полного графа с 18 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть 4 вершины, все ребра между которыми – одного цвета.

4. Доказать, что в компании из 17 человек, в которой каждый знаком ровно с 4 другими, найдутся двое, не знакомых друг с другом и не имеющих общих знакомых.

5. Докажите, что среди 4^n человек найдётся n попарно знакомых или попарно незнакомых.

6. а) В компании из 14 человек, среди любых пяти найдутся по крайней мере двое знакомых. Доказать, что в компании найдутся трое попарно знакомых.

б) В компании из 19 человек, среди любых шести найдутся по крайней мере двое знакомых. Доказать, что в компании найдутся трое попарно знакомых.

в) Известно, что если в компании из k человек среди любых семи найдутся по крайней мере двое знакомых, то там точно есть трое попарно знакомых. Найдите минимальное значение k (пример приводит не надо).

7. Пусть в полном графе 11^{11n+1} вершин и его ребра раскрашены в 11 цветов. Докажите, что в нем найдётся полный одноцветный граф с $n+2$ вершинами.

8. Обозначим через $r(m, n)$ наименьшее целое число такое, что при покраске полного графа на $r(m, n)$ вершинах в красный и синий цвета найдётся или красный подграф K_m , или синий подграф K_n . Докажите, что а) $r(m, n) \leq r(m, n-1) + r(m-1, n)$; б) $r(m, n) \leq C_{m+n-2}^{m-1}$.

9 класс, теория Рамсея, 14 июля

T1. Теорема Рамсея. Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что существует такое натуральное $r(m, n)$, что при любой раскраске полного графа K с $r(m, n)$ вершинами в два цвета или существует полный подграф K_1 с m вершинами графа K , покрашенный в первый цвет, или существует полный подграф K_2 с n вершинами, покрашенный во второй цвет.

T2. Теорема Рамсея для k цветов. Сформулируйте и докажите.

1. Каждое из рёбер полного графа с 17 вершинами покрашено в один из трех цветов. Докажите, что есть три вершины, все ребра между которыми одного цвета.

2. а) Докажите, что в любой компании из 10 человек, в которой среди любых трех есть двое знакомых между собой, найдутся 4 человека, попарно знакомых друг с другом. б) Верно ли то же самое для 9 человек?

3. Каждое из рёбер полного графа с 18 вершинами покрашено в один из двух цветов. Докажите, что есть 4 вершины, все ребра между которыми – одного цвета.

4. Доказать, что в компании из 17 человек, в которой каждый знаком ровно с 4 другими, найдутся двое, не знакомых друг с другом и не имеющих общих знакомых.

5. Докажите, что среди 4^n человек найдётся n попарно знакомых или попарно незнакомых.

6. а) В компании из 14 человек, среди любых пяти найдутся по крайней мере двое знакомых. Доказать, что в компании найдутся трое попарно знакомых.

б) В компании из 19 человек, среди любых шести найдутся по крайней мере двое знакомых. Доказать, что в компании найдутся трое попарно знакомых.

в) Известно, что если в компании из k человек среди любых семи найдутся по крайней мере двое знакомых, то там точно есть трое попарно знакомых. Найдите минимальное значение k (пример приводит не надо).

7. Пусть в полном графе 11^{11n+1} вершин и его ребра раскрашены в 11 цветов. Докажите, что в нем найдётся полный одноцветный граф с $n+2$ вершинами.

8. Обозначим через $r(m, n)$ наименьшее целое число такое, что при покраске полного графа на $r(m, n)$ вершинах в красный и синий цвета найдётся или красный подграф K_m , или синий подграф K_n . Докажите, что а) $r(m, n) \leq r(m, n-1) + r(m-1, n)$; б) $r(m, n) \leq C_{m+n-2}^{m-1}$.