

9 класс, подсчет не только в графах, 11 июля

В следующих четырёх задачах нужно посчитать какие-то треугольники.

1. В компании из 10 человек, где каждый дружил с каждым, произошло 14 попарных ссор. Докажите, что все равно можно составить компанию из трех друзей.
2. В зоопарке у каждой двух мартышек ровно пять общих друзей-мартышек. Докажите, что количество пар друзей-мартышек делится на 3.
3. Ровно 19 вершин правильного 97-угольника покрашено в белый цвет, остальные вершины покрашены в чёрный. Докажите, что число равнобедренных одноцветных треугольников с вершинами в вершинах 97-угольника не зависит от способа раскраски.
4. Даны числа $n > k$ и множество S из n точек на плоскости такое, что любые три точки из множества S не лежат на одной прямой. Известно, что для любой точки $P \in S$ существуют хотя бы k различных точек из множества S , равноудаленных от P . Докажите, что $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Подсчёты рёбер

5. Каждый из учеников М-9 решил не менее половины задач, а каждая задача решена не более чем половиной учеников. Докажите, что каждый ученик решил ровно половину всех задач.
6. В графе $2n$ вершин. Степень каждой вершины хотя бы n . Докажите, что при удалении любых $n-1$ рёбер граф не потеряет связность.
7. В кружок записались 2016 мальчиков и 2016 девочек, причем каждый из мальчиков знаком хотя бы с 10 девочками. Докажите, что можно выбрать 100 мальчиков и 10 девочек так, чтобы каждый из выбранных мальчиков был знаком хотя бы с одной из выбранных девочек.

Подсчёты «растопырок»

8. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причём для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (то есть 1, 2, 4, 8, ...). Для каждого города А статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих А с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100000. Докажите, что статистик ошибся.

9. а) В компании из 20 человек у каждого хотя бы 10 знакомых. Докажите, что найдутся такие две тройки людей, что любые два человека из разных троек знакомы.

б). Известно, что в любом графе, в котором 20 вершин, степень каждой не меньше k , можно выбрать граф $K_{2,3}$ (полный двудольный граф на 2 и 3 вершинах). Чему равно минимальное значение k ?

10. В стране $n \geq 2$ городов, каждые два из которых соединены прямым автобусным сообщением в обе стороны. Сколькими способами можно попасть из города А в другой город В, проехав на автобусе ровно k раз? Маршрут может проходить через любой город (в том числе А и В), а также использовать любой рейс между городами более одного раза