

## 9 класс, комплексные корни, 11 июля

**Упражнение 1.** В окружность вписан правильный  $d$ -угольник, в одной из вершин которого сидит блоха. Она прыгает по часовой стрелке прыжком длины  $k$ . Через сколько прыжков она вернется в первоначальную вершину? Сколько оборотов при этом сделает?

**Упражнение 2.** Докажите, что если сумма трех комплексных чисел равна 0, и они равны по модулю, то точки, соответствующие им, являются вершинами правильного треугольника.

**Упражнение 3.** Вычислите все корни  $\sqrt{1}, \sqrt{-1}, \sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{i}$ . Нарисуйте их на комплексной плоскости.

**Упражнение 4.** Какую фигуру будут образовывать  $\sqrt[6]{1}$ ?

**Упражнение 5.** Вычислите  $\sqrt[2]{1 + i\sqrt{3}}$ , пользуясь сначала только алгеброй, а потом – формулой Муавра в обратную сторону.

**Теорема (формула корней  $n$ -ной степени).** Найдите формулу корней  $n$ -ой степени из комплексного числа  $z = r(\cos \varphi + i\sin \varphi)$ . (учтите, что  $\varphi \equiv \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .)

Корни степени  $n$  из 1 принято обозначать  $\varepsilon_k$ , то есть  $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$  ( $0 < k < n$ ).

## Теория по комплексным корням

1. Рассмотрим множество корней 12 степени из 1.

а) Докажите, что если отметить их на комплексной плоскости, то получится правильный 12-тиугольник;

б) Докажите, что это множество симметрично относительно действительной оси, т.е. корни разбиваются на пары сопряженных;

в) докажите, что все эти корни можно представить как степени одного какого-то корня (назовем его ПЕРВООБРАЗНЫМ);

г) сколько корней могут претендовать на роль первообразных?

д) найдите сумму и произведение всех корней 12-той степени из 1.

2. Разложите на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами многочлен  $x^{12}-1$ .

3. Докажите, что натуральное число  $k$  является делителем натурального числа  $d$  тогда и только тогда, когда корень степени  $k$  из 1 является корнем степени  $d$  из 1.

4. Найдите а) произведение, б) сумму квадратов всех корней  $n$ -ной степени из 1.

5. Решите уравнение  $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ .

6. Докажите, что если  $p$  – простое, то любой корень степени  $p$  из 1 является первообразным.

7. Сколько корней  $n$ -й степени из 1 являются первообразными?

**Определение** Корень  $n$ -ной степени из 1  $\varepsilon_k$  имеет порядок  $d$ , если  $d$  – наименьшее натуральное число такое, что  $\varepsilon_k^d = 1$

8. Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d$  – делитель  $n$ . а) Сколько корней уравнения  $x^d-1=0$  есть среди чисел  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ?

б) Для каких  $d$  есть хотя бы один элемент порядка  $d$  среди чисел  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ??

в) Сколько элементов порядка  $d$  есть среди чисел  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ?