

9 класс, инверсная добавка для продвинутых, 15 июля

11. Через точки A и B проведены окружности S_1 и S_2 , касающиеся окружности S , и окружность S_3 , перпендикулярная S . Докажите, что S_3 образует равные углы с окружностями S_1 и S_2 .

12. Две окружности, пересекающиеся в точке A , касаются окружности (или прямой) S_1 в точках B_1 и C_1 , а окружности (или прямой) S_2 в точках B_2 и C_2 (причем касание в B_2 и C_2 такое же, как в B_1 и C_1). Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2 , касаются друг друга.

13. Окружность S_A проходит через точки A и C ; окружность S_B проходит через точки B и C ; центры обеих окружностей лежат на прямой AB . Окружность S касается окружностей S_A и S_B внутренним образом, а кроме того, она касается отрезка AB в точке C_1 . Докажите, что CC_1 — биссектриса треугольника ABC .

14. Ортоцентр H треугольника ABC лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами A , B , C , проходящие через H , имеют общую касательную.

15. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BP и CQ . Точка M — середина BC . Описанная окружность треугольника CMP касается стороны AB . Докажите, что описанная окружность треугольника BMQ касается прямой AC .

16. Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I . Касательные к описанной окружности треугольника AIC в точках A , C пересекаются в точке X . Касательные к описанной окружности треугольника BID в точках B , D пересекаются в точке Y . Докажите, что точки X , I , Y лежат на одной прямой.

17. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2 , касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β . Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD , расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α . Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

9 класс, инверсная добавка для продвинутых, 15 июля

11. Через точки A и B проведены окружности S_1 и S_2 , касающиеся окружности S , и окружность S_3 , перпендикулярная S . Докажите, что S_3 образует равные углы с окружностями S_1 и S_2 .

12. Две окружности, пересекающиеся в точке A , касаются окружности (или прямой) S_1 в точках B_1 и C_1 , а окружности (или прямой) S_2 в точках B_2 и C_2 (причем касание в B_2 и C_2 такое же, как в B_1 и C_1). Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2 , касаются друг друга.

13. Окружность S_A проходит через точки A и C ; окружность S_B проходит через точки B и C ; центры обеих окружностей лежат на прямой AB . Окружность S касается окружностей S_A и S_B внутренним образом, а кроме того, она касается отрезка AB в точке C_1 . Докажите, что CC_1 — биссектриса треугольника ABC .

14. Ортоцентр H треугольника ABC лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами A , B , C , проходящие через H , имеют общую касательную.

15. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BP и CQ . Точка M — середина BC . Описанная окружность треугольника CMP касается стороны AB . Докажите, что описанная окружность треугольника BMQ касается прямой AC .

16. Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I . Касательные к описанной окружности треугольника AIC в точках A , C пересекаются в точке X . Касательные к описанной окружности треугольника BID в точках B , D пересекаются в точке Y . Докажите, что точки X , I , Y лежат на одной прямой.

17. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются соответственно хордами окружностей ω_1 и ω_2 , касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны α и β . Окружности ω_3 и ω_4 также имеют хорды AB и CD соответственно. Их дуги AB и CD , расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры β и α . Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.