XXXIV летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 3–28 июля 2018 г.

9 класс
Материалы занятий

Попов Леонид Андреевич
Брагин Владимир Алексеевич
Исаак Евгений Анатольевич
Смирнов Александр Викторович
Голованов Александр Игоревич
Новиков Владислав Викторович
Долгова Полина Вячеславовна
Езубова Татьяна Павловна
Русаков Вадим Евгеньевич

Оглавление

От авторов

Доброго времени суток!

Здравствуй, неизвестный (а может быть, очень даже известный) читатель. Мы не знаем, сколько дней, месяцев, а может быть и лет прошло с момента окончания смены. Но мы всё равно смеем надеяться, что эта книжка окажется для тебя полезной. Да, в этой книжке нет материалов спецкурсов, гармонично дополнявших программы обычной группы и группы полупрофи. Но и без этого, смеем надеяться, здесь найдётся много занимательного и замечательного.

Мы считаем, что у нас получилась классная смена. И дело не только в том, что М9 затащили Dance-show, а ещё и в том, что часть материалов была придумана нами специально для наших учеников (а некоторая часть — прямо тут, в Вишкиле). Мы бесконечно благодарны всем зрителям наших листков за это и надеемся и дальше регулярно видеться с ними как в Вишкиле, так и во многих других уголках нашей необъятной страны, да и, чего мелочиться, всего мира.

Ну, и закончить наше вступление хотелось бы хокку неизвестного (а может быть, очень даже известного) автора:

Дети Эм-девять
Вы самые лучшие
Мы вас всех любим

С любовью,
преподаватели М9

Общие материалы

Вступительная олимпиада

1. Про коэффициенты a, b, c, d двух квадратных трёхчленов x^2+bx+c и x^2+ax+d известно, что $0<a<b<c<d$. Могут ли эти трёхчлены иметь общий вещественный корень?

2. На дереве висят 2018 шишек. Двое играют в следующую игру: они по очереди сбивают с дерева от одной до трёх шишек. Также в процессе игры ровно один раз кто-то из игроков может пропустить ход (кто успел). Проигрывает тот игрок, кто собьёт последнюю шишку с дерева. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от ходов соперника?

3. Пусть P — точка пересечения диагоналей равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $BC=AD$, $AB<CD$). Описанная окружность треугольника ABP пересекает отрезок BC в точке X. На прямой AX выбрана точка Y так, что $DY \parallel BC$. Докажите, что $\angle YDA = 2\angle YCA$.

4. При каких натуральных n можно выписать по кругу все делители числа n так, что отношение любых двух соседних чисел будет простым числом (1 и n — тоже делители)?

5. Найдите все простые p такие, что и $p+1$, и p^2+1 являются удвоенными квадратами натуральных чисел.

6. Действительное число a таково, что $0<a<1$. Докажите, что для любой возрастающей последовательности неотрицательных целых чисел $k_1<k_2<\ldots<k_n$ выполнено неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a^{k_i}\right)^2 < \frac{1+a}{1-a}\sum_{i=1}^{n} a^{2k_i}.$$

Абака

Алгебра

10. Найдите сумму всех таких целых x, что у числа x^2+2018 нечётное число делителей.

20. Найдите все натуральные решения уравнения $(n+2)!-(n+1)!-n!=n^2+n^4$.

30. Найдите количество натуральных k ($1 \leqslant k \leqslant 2018$), для которых существуют натуральные n и m, удовлетворяющие равенству $m(m+k)=n(n+1)$.

40. Пусть $P(x)$ — многочлен, такой, что $P(1) = 1$ и $\dfrac{P(2x)}{P(x+1)} = 8 - \dfrac{56}{x+7}$ для всех действительных x, для которых оба выражения определены. Найдите $P(-1)$.

50. Пусть вещественные a, b таковы, что $a^2 + b^2 + ab = a + b$. Найдите наибольшее возможное значение $a^2 + b^2$.

Комбинаторика

10. В коробке лежат 900 карт, пронумерованных от 100 до 999. Карты удаляют по одной за раз. Какое минимальное количество карт нужно удалить, чтобы гарантированно нашлись три удалённые карты с одинаковой суммой цифр?

20. Напишите сумму всех различных чётных пятизначных чисел, состоящих из цифр 1, 3, 4, 5 и 9. Цифры в числе не повторяются.

30. Функция $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ удовлетворяет соотношению $f(f(n)) = 2 - n$. Сколько значений из множества $\{1, 3, 5, 7, \ldots, 139\}$ может принимать $f(2)$?

40. Имеется 2010 коробок, промаркированных B_1, B_2, $\ldots$, B_{2010}, и $2010n$ мячиков, распределённых по ним. Разрешено следующее действие: взять из коробки номер i ровно i мячиков и положить их в другую коробку. Для скольких натуральных n $(1 \leqslant n \leqslant 2018)$ можно разложить все мячики по n штук в каждый ящик независимо от начальной позиции?

50. На окружности отмечено 2018 различных точек A_1, A_2, $\ldots$, A_{2018}. Какое минимальное количество тупоугольных треугольников может быть среди треугольников с вершинами в этих точках?

Теория чисел

10. Найдите наибольшее натуральное число, состоящее из различных нечётных цифр, которое делится на все свои цифры.

20. На доску выписали остатки от деления числа A на все числа, меньшие A. Оказалось, что сумма всех различных чисел, встречающихся на доске, равна A. Найдите все такие A.

30. Два числа, не делящихся друг на друга, сложили вместе с их наибольшим общим делителем и наименьшим общим кратным. В результате получилось число 646. Найдите исходные числа.

40. Найти наименьшее значение выражения $|36^y - 5^x|$, где x и y — натуральные числа.

50. Пусть $k(n)$ — наибольший нечетный делитель n. Чему равна сумма $k(m+1) + \cdots + k(2m)$?

Геометрия

10. Про трапецию $ABCD$ $(AD||BC)$ известно, что $AC \perp BD$, $BC = 1$, $AD = 3$. На AD нашлась такая точка E, что $BE = ED$. Найдите AE.

20. На медиану BM треугольника ABC опустили перпендикуляр AL и перпендикуляр DK из некоторой точки D на стороне AB (L и K — различные точки, лежащие внутри BM). Оказалось, что $BK = LM$. Найдите CD, если $BD = 3$, $BA = 7$.

30. Внутри равностороннего треугольника ABC взяли точку M так, что $\angle AMC = 150^\circ$, $AM = 1$, $MC = 4$. Найдите BM.

40. На сторонах BC и AB треугольника ABC выбраны точки A' и C' соответственно. Прямые AA' и CC' пересекаются в точке K. Оказалось, что $AC' = CA'$ и $\angle ABC = \angle A'KC$. На отрезке KC' выбрана точка P такая, что $2PK = A'K + KC'$. Найдите $\angle APC$.

50. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. На прямой, проходящей через точку A параллельно BC, выбрана точка D так, что $\angle CMD = 90^\circ$. Найдите минимальное значение выражения $\dfrac{AB \cdot CD}{S_{AMCD}}$.

Конструктивы

10. Разрежьте квадрат со стороной 4 клетки на прямоугольники, сумма периметров которых равна 25.

20. В квадрате 5×5 расставьте числа от 1 до 25 так, чтобы никакие 2 в соседних (по углу в том числе) клетках в сумме не делились на 4.

30. Расставьте наибольшее количество королей на доске 12×12 так, чтобы каждый король бил ровно одного из остальных.

40. Приведите пример натурального числа, которое обладает следующими свойствами: если его умножить на 2, то сумма его цифр уменьшится в 2 раза, а если умножить его на 3, то сумма цифр уменьшится в 3 раза.

50. Приведите пример такой функции f из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, что $f(f(x)) = x^2 + 6x + 6$.

Внутренний обычный матбой

1. Пусть $\overline{a_0a_1a_2\dots a_n}$ — $(n+1)$-значное простое число ($n \geqslant 10$). Докажите, что у многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ не может быть n различных целых корней.

2. Дан связный граф G, в вершинах которого расставлены неотрицательные числа с суммой 1, после чего для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах, и сложили полученные числа для всех ребер. Выразите максимум рассмотренной суммы через размер максимальной клики в графе.

3. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка X так, что $2BX = BA + BC$. Пусть Y — точка симметричная точке пересечения биссектрис треугольника ABC относительно точки X. Докажите, что $YI_B \perp AB$, где I_B — центр вневписанной окружности треугольника ABC напротив вершины B.

4. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — перестановка чисел от 1 до 100. $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел $S_1, S_2, \ldots, S_{100}$.

5. Радиус описанной окружности треугольника ABC равен радиусу вневписанной окружности того же треугольника напротив вершины A. Вневписанная окружность касается прямых BC, AC, AB в точках M, N, L. Докажите, что O (центр описанной окружности) является ортоцентром треугольника MNL.

6. На шахматной доске 2018×2018 стоят черные и белые пешки (в каждой клетке что-нибудь стоит). Известно, что в каждом «кресте» (объединении столбца и строки) больше пешек того цвета, который не стоит в «центре» креста. Докажите, что на каждой вертикали и каждой горизонтали пешек обоих цветов поровну.

7. На доске написаны натуральные числа 1, 2, $\ldots$, 2018. Два игрока поочередно делают ходы по следующим правилам. Разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них a^b. Через некоторое время на доске останется одно число. Первый игрок выигрывает, если оно оканчивается на 2, 7 или 8, а второй — в противном случае. Кто выиграет при правильной игре?

8. Сколько существует триангуляций выпуклого n-угольника таких, что ровно один получившийся треугольник состоит только из диагоналей n-угольника?

Внутренний полупрофи матбой

1. Последовательность натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots$ строится следующим образом: $x_{n+1} = 2x_n + 1$ для всех натуральных $n \geqslant 1$. Обозначим $y_n = 2^{x_n} - 1$. Какое наибольшее количество начальных членов последовательности (y_n) может быть простыми?

2. Пусть I — центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC. Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки A, а через A_2 — середину дуги BAC. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I, пересекает прямую BC в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой, причём эта прямая перпендикулярна прямой OI, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

3. На доске написаны натуральные числа 1, 2, $\ldots$, 2018. Два игрока поочерёдно делают ходы по следующим правилам. Разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них a^b. Через некоторое время на доске останется одно число. Первый игрок выигрывает, если оно оканчивается на 2, 7 или 8, а второй — в противном случае. Кто выиграет при правильной игре?

4. Дана бесконечная возрастающая последовательность действительных чисел, заданная следующими правилами:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{2018}.$$

Найдите минимальное k такое, что $a_k \geqslant 1$.

5. Для положительных чисел a, b, c и p докажите неравенство:

$$\frac{a^3b}{(3a+b)^p} + \frac{b^3c}{(3b+c)^p} + \frac{c^3a}{(3c+a)^p} \geqslant \frac{a^2bc}{(2a+b+c)^p} + \frac{b^2ca}{(2b+c+a)^p} + \frac{c^2ab}{(2c+a+b)^p}.$$

6. Назовём четвёрку чисел $(a, b, c,$ **(a)** *хорошей*, если числа $ab+1$, $ac+1$, $ad+1$, $bc+1$, $bd+1$, $cd+1$ являются точными квадратами. Докажите, что хороших четвёрок бесконечное количество.

7. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка X так, что $2BX = BA + BC$. Пусть Y — точка, симметричная точке пересечения биссектрис треугольника ABC относительно точки X. Докажите, что $YI_B \perp AB$, где I_B — центр вневписанной окружности треугольника ABC напротив вершины B.

8. Докажите, что количество перестановок n элементов, разбивающихся на k циклов, равно количеству способов выписать числа от 1 до n в ряд в таком порядке, чтобы нашлось ровно k чисел, каждое из которых больше всех написанных перед ним.

9. Обозначим через $S(n)$ количество прямоугольников $a \times b$, где $a \leqslant n$ и $b \leqslant n$, которые можно разбить на квадраты 3×3 и 2×2. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n^2}$.

10. Среди n шаров три радиоактивны. Есть прибор, который за одну проверку может определить для не более, чем двух шаров, сколько из них радиоактивных. Докажите, что за $\left[\frac{n+5}{2}\right]$ проверок с помощью этого прибора можно найти все радиоактивные шары.

Внутренний профи матбой

1. Назовём четвёрку чисел $(a, b, c,$ **(a)** *хорошей*, если числа $ab+1$, $ac+1$, $ad+1$, $bc+1$, $bd+1$, $cd+1$ являются точными квадратами. Докажите, что хороших четвёрок бесконечное количество.

2. Докажите, что из чисел от 1 до 100000 можно выбрать 1000 чисел так, чтобы никакие три из них не образовывали арифметическую прогрессию.

3. Обозначим через $S(n)$ количество прямоугольников $a \times b$, где $a \leqslant n$ и $b \leqslant n$, которые можно разбить на квадраты 3×3 и 2×2. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n^2}$.

4. Точка F на основании AB трапеции $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке E, такова, что $CF = DF$. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ADF и CBF. Докажите, что $EF \perp O_1O_2$.

5. Петя и Вася играют в следующую игру. Изначально перед ними лежит кучка с N камнями. Первым ходом Петя может взять любое число камней, меньшее N. Далее в свой ход каждый игрок может взять число камней, не превосходящее удвоенного числа камней, взятого его соперником на предыдущем ходу (но не менее одного камня). Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. При каких N Вася сможет обеспечить себе победу?

6. В четырехугольнике $ABCD$ оказалось, что $\angle CAD = 59^\circ$, $\angle CAB = 62^\circ$ и $\angle ABD = \angle CBD = 22^\circ$. Найдите $\angle ACD$.

7. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+3a}{a^3+8} + \frac{b^2+3b}{b^3+8} + \frac{c^2+3c}{c^3+8} + \frac{d^2+3d}{d^3+8} \leqslant \frac{16}{9}.$$

8. Каким наименьшим количеством полных графов на n вершинах можно покрыть все ребра полного графа на $2n$ вершинах?

9. Последовательность A_1, A_2,... точек на плоскости такова, что при всех натуральных n точка A_{n+3} является центром описанной окружности треугольника $A_nA_{n+1}A_{n+2}$. Для каких k может оказаться, что $A_{n+k} = A_n$ при всех натуральных n?

10. Пусть $\overline{a_0a_1a_2\ldots a_n}$ — $(n+1)$-значное простое число ($n \geqslant 10$). Докажите, что у многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ не может быть рациональных корней.

Обычный матбой 8–9

1. На продолжении стороны AD прямоугольника $ABCD$ за точку D выбрана точка E. Луч EC вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABE, в точке F. Лучи DC и AF пересекаются в точке P. На прямую ℓ, проходящую через точку E параллельно прямой AF, опущен перпендикуляр CH. Докажите, что прямая PH касается окружности ω.

2. В стране любые два города соединены либо прямым автобусным, либо прямым авиасообщением. *Клика* — это набор городов, попарно соединенных авиарейсами. *Клюка* — это набор городов, попарно соединенных прямыми авиарейсами, и при этом таких, что из них выходит поровну автобусных рейсов. *Кляка* — это набор городов, попарно соединенных прямыми авиарейсами, и при этом таких, что из любых двух из них выходит разное число автобусных рейсов. Докажите, что размер любой клики не превосходит произведения размеров максимальной (по количеству городов) клюки и максимальной кляки.

3. На доске $n \times n$ в каждой клетке лежит некоторое число зефирок и при этом выполняется следующее свойство: в любых двух строках число зефирок не совпадает хотя бы в одном из столбцов. Докажите, что найдется такой столбец, что если съесть все зефирки, которые в нем находятся, то это свойство сохранится.

4. На медиану BM треугольника ABC опустили перпендикуляр AL и перпендикуляр DK из некоторой точки D на стороне AB (L и K — различные точки, лежащие внутри BM). Оказалось, что $BK = LM$. Докажите, что $CD = BD + BA$.

5. Первые k членов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ последовательности (a_n) — различные натуральные числа, а при $n > k$ число a_n — наименьшее натуральное число, не представимое в виде суммы нескольких (возможно, одного) из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Докажите, что $a_n = 2a_{n-1}$ при всех достаточно больших n.

6. Каждая точка плоскости с целыми координатами покрашена в белый или черный цвет. Докажите, что можно выбрать цвет так, чтобы при каждом натуральном n нашёлся треугольник площади n с тремя вершинами выбранного цвета.

7. Пусть n — целое число, большее 10, все цифры которого принадлежат множеству $\{1, 3, 7, 9\}$. Докажите, что у n есть простой делитель, не меньший 11.

8. Дан многочлен $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что среди чисел $P(3)$, $P(4), \ldots$, $P(2004)$ столько же точных квадратов, сколько и среди чисел $P(3) - 1$, $P(4) - 1, \ldots$, $P(2004) - 1$.

Полупрофи матбой 8–9

1. На продолжении стороны AD прямоугольника $ABCD$ за точку D выбрана точка E. Луч EC вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABE, в точке F. Лучи DC и AF пересекаются в точке P. На прямую ℓ, проходящую через точку E параллельно прямой AF, опущен перпендикуляр CH. Докажите, что прямая PH касается окружности ω.

2. В стране любые два города соединены либо прямым автобусным, либо прямым авиасообщением. *Клика* — это набор городов, попарно соединенных авиарейсами. *Клюка* — это набор городов, попарно соединенных прямыми авиарейсами, и при этом таких, что из них выходит поровну автобусных рейсов. *Кляка* — это набор городов, попарно соединенных прямыми авиарейсами, и при этом таких, что из любых двух из них выходит разное число автобусных рейсов. Докажите, что размер любой клики не превосходит произведения размеров максимальной (по количеству городов) клюки и максимальной кляки.

3. На доске $n \times n$ в каждой клетке лежит некоторое число зефирок и при этом выполняется следующее свойство: в любых двух строках число зефирок не совпадает хотя бы в одном из столбцов. Докажите, что найдется такой столбец, что если съесть все зефирки, которые в нем находятся, то это свойство сохранится.

4. Про вписанный четырехугольник $ABCD$ известно, что $AB = AD$. На сторонах BC и CD выбраны точки M и N так, что $MN = BM + DN$. Лучи AM и AN пересекают описанную окружность $ABCD$ в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника APQ лежит на отрезке MN.

5. Дан квадратный трехчлен $p(x)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что существует натуральное n, для которого уравнение $p(x) = \frac{1}{n}$ не имеет рациональных корней.

6. Для положительных чисел $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ докажите неравенство

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \geqslant \frac{2k}{k^2+1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

где $k = \dfrac{a_n}{a_1}$.

7. Правильный шестиугольник со стороной N разбит на правильные треугольники со стороной 1. Этот шестиугольник замостили ромбиками, состоящими из двух треугольников. Докажите, что ромбиков каждого из трех видов (см. рисунок) поровну.

8. Первые k членов a_1, a_2, $\ldots$, a_k последовательности (a_n) — различные натуральные числа, а при $n > k$ число a_n — наименьшее натуральное число, не представимое в виде суммы нескольких (возможно, одного) из чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1}. Докажите, что $a_n = 2a_{n-1}$ при всех достаточно больших n.

9. Каждая точка плоскости с целыми координатами покрашена в белый или черный цвет. Докажите, что можно выбрать цвет так, чтобы при каждом натуральном n нашёлся треугольник площади n с тремя вершинами выбранного цвета.

10. Пусть n — целое число, большее 10, все цифры которого принадлежат множеству $\{1, 3, 7, 9\}$. Докажите, что у n есть простой делитель, не меньший 11.

Полупрофи матбой 9–10

1. В графе есть рёбра веса 1 и рёбра веса 2. Известно, что для каждой вершины сумма весов рёбер с концом в этой вершине нечётна. Докажите, что можно ориентировать рёбра графа так, чтобы для каждой вершины сумма весов входящих в неё ребер отличалась от суммы весов исходящих из неё ребер не более, чем на 1.

2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются окружности ω в точках C и D соответственно, и пересекаются в точках A и B. AM и AN — касательные из A к ω. Оказалось, что точки A, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что прямые AB, CM и ND пересекаются в одной точке.

3. Пусть X — конечное множество. Докажите, что

$$\sum |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = (2^k - 1) \sum |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|,$$

где обе суммы берутся по всем наборам k множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset X$ (подмножества могут быть одинаковыми).

4. Можно ли так покрасить точки трёхмерного пространства в 2018 цветов, чтобы на любом отрезке встречались представители всех 2018 цветов?

5. Найдите все такие натуральные n, что $n! + 8$ делится на $2n + 1$.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки K, L, M и N лежат на сторонах BC, CD, DA, AB, соответственно. Могут ли все части, на которые отрезки AK, BL, CM и DN делят четырёхугольник $ABCD$, иметь равные площади?

7. Для положительных a, b и c выполнено $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{ab}\right) \geqslant 1728.$$

8. Пете и Васе дали колоду из 2018 карт, на каждой из которых написано целое число. Пусть число n таково, что $n < 2^{2007}$. Докажите, что они могут взять поровну карт из этой колоды (не обязательно брать все карты), что суммы чисел на картах каждого из них будут давать один и тот же остаток при делении на n.

9. Дан многочлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом. Докажите, что этот многочлен принимает бесконечно много натуральных значений с одинаковой суммой цифр.

10. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке K. Точки C_1 и A_1 на сторонах BA и BC соответственно таковы, что $\angle C_1LA = \angle A_1LC = \angle ABC$. Точки P и Q таковы, что четырехугольники $AKLP$ и $CKLQ$ — параллелограммы. Докажите, что $PC_1 = QA_1$.

Профи матбой 8–9

1. В стране Дезориентация 2018 городов, каждые два из которых нужно соединить прямым авиарейсом, летающим, увы, только в одну сторону. Однако законы Дезориентации запрещают авиакомпаниям осуществлять транзитные перевозки (то есть если имеются рейсы из города A в город B и из города B в город C, то их не может выполнять одна и та же авиакомпания). Какое наименьшее количество авиакомпаний может справиться с организацией воздушного движения в таких непростых условиях?

2. Стороны AD и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ не параллельны. Его диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Точки F и G лежат на сторонах AB и CD соответственно так, что $\frac{AF}{FB} = \frac{DG}{GC} = \frac{AD}{BC}$. Докажите, что если точки E, F и G лежат на одной прямой, то четырёхугольник $ABCD$ — вписанный.

3. Для любых натуральных a, b и c докажите неравенство

$$(a, b-1)(b, c-1)(c, a-1) \leqslant ab + bc + ca.$$

Как обычно, (x, y) обозначает наибольший общий делитель чисел x и y.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BP и CQ. Точка M — середина BC. Описанная окружность треугольника CMP касается стороны AB. Докажите, что описанная окружность треугольника BMQ касается прямой AC.

5. Можно ли в 18-элементном множестве выбрать 2700 подмножеств M_1, M_2, ..., M_{2700} так, чтобы для любых M_i и M_j выполнялось неравенство $|M_i \setminus M_j| > 1$?

6. Сколькими способами можно расставить плюсы и минусы в клетках таблицы 2016×2016 так, чтобы в каждом квадрате, составленном из клеток таблицы, количества плюсов и минусов отличались не более, чем на 1?

7. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — перестановка чисел 1, 2, ..., n. Найдите максимальное значение суммы

$$S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_n - a_1|.$$

8. На плоскости даны $n \geqslant 3$ точек общего положения. Для каждой посчитали сумму расстояний до остальных, и все эти суммы оказались равными. Докажите, что точки являются вершинами выпуклого многоугольника.

9. Даны две бесконечные возрастающие арифметические прогрессии a_1, a_2, ... и b_1, b_2, ..., состоящие из натуральных чисел; их разности взаимно просты. Оказалось, что в каждой из них бесконечно много палиндромов. Обязательно ли найдётся такое n, что оба числа a_n и b_n — палиндромы?

10. Найдите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами такие, что для любого простого p найдутся натуральные m и n, что $f(p^n) = p^m$.

Профи матбой 9–10

1. На доске написаны 10 натуральных чисел. За один ход разрешается пару чисел a, b заменить на их сумму и модуль разности. Верно ли, что такими операциями всегда можно сделать все числа равными?

2. Многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами таков, что для любого иррационального α число $P(\alpha)$ иррационально. Докажите, что степень многочлена P не больше 1.

3. Существует ли множество точек на плоскости, которое пересекается с любым треугольником площади 1 по конечному непустому подмножеству?

4. В школе 3 класса по n человек. У каждого ученика не менее $\frac{3}{4}n$ знакомых в каждом из других классов. Докажите, что можно разбить всех школьников на группы по

3 попарно знакомых человека так, чтобы в каждой группе были люди из разных классов.

5. Даны взаимно простые натуральные числа m и n. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не превосходят m, а натуральные числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ не превосходят n. Докажите, что можно выбрать по несколько чисел из каждого набора так, чтобы сумма выбранных чисел первого набора была равна сумме выбранных чисел второго набора.

6. Дано натуральное число n и произвольные вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что для любого подмножества $S \in \{1, 2, \ldots n\}$ выполнено неравенство

$$\left(\sum_{i\in S} a_i\right)^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (a_i + \ldots + a_j)^2.$$

7. Даны окружность ω с центром O и точка T вне ее. Касательные из точки T к окружности ω касаются ее в точках B и C. Окружности ω_1 и ω_2 расположены в треугольнике TBC, касаются окружности ω внешним образом и касаются друг друга в точке J; кроме того, ω_1 касается отрезка TB в точке K, ω_2 касается отрезка TC в точке H. Точка I — центр вписанной окружности треугольника OBC. Докажите, что четырехугольник $BKJI$ вписанный.

8. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка P, а на сторонах AC и BC точки S и T таким образом, что $AP = AS$ и $BP = BT$. Описанная окружность треугольника PST вторично пересекает стороны AB и BC в точках Q и R соответственно. Прямые PS и QR пересекаются в точке L. Докажите, что прямая CL делит отрезок PQ пополам.

9. Докажите, что для любых натуральных $d > 1$ и m в последовательности $a_n = 2^{2^n} + d$ найдутся два числа a_k и a_ℓ ($k \neq \ell$), у которых наибольший общий делитель больше m.

10. Существует ли такая функция f, сопоставляющая бесконечным последовательностям целых чисел целые числа, что:

- $f(u + v) = f(u) + f(v)$ (последовательности складываются почленно);
- если у последовательности v конечное число ненулей, то $f(v) = 0$;
- для некоторой последовательности u выполнено $f(u) \neq 0$?

Заключительная олимпиада

Довывод

1. Докажите, что среди любых девяти различных натуральных чисел можно гарантированно выбрать 4 числа a, b, c, d так, что $a + b - c - d$ делится на 20.

2. В таблице 9×9 закрашено 40 клеток. Линию (столбец или строку) назовем *хорошей*, если в нем закрашенных клеток больше, чем не закрашенных. Какое наибольшее количество хороших линий может быть?

3. Прямые AB и BC пересекают касательную к дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки B, в точках X и Y соответственно, при этом $XY \parallel AC$. На лучах BX и BY выбраны точки E и D соответственно так, что $AX = XE$, $CY = YD$. Биссектриса угла ABC пересекает AC в точке K, а ED в точке L. Докажите, что $AK = MC$, где M — проекция L на AC.

4. Найдите такое наименьшее действительное число s, что любыми 5-ю правильными треугольниками с суммой площадей s можно покрыть правильный треугольник площади 1.

5. Существует ли многочлен $P(x, y)$ двух переменных с вещественными коэффициентами, такой, что многочлен $P(x, y)^2 + 1$ делится на $x^2 + y^2 + 1$?

Вывод

6. Для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$x_1\left(1 - x_1^2\right) + x_2\left(1 - (x_1 + x_2)^2\right) + \ldots + x_n\left(1 - (x_1 + \ldots + x_n)^2\right) < \frac{2}{3}.$$

7. На стороне AB описанного четырехугольника $ABCD$ отметили точку M. Точки I_1, I_2 и I_3 — центры вписанных окружностей треугольников AMD, CMD и BMC соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, I_3 и M лежат на одной окружности.

8. Граф G обладает следующим свойством: для любой четвёрки различных вершин A, B, C и D, если существуют рёбра AB и CD, то между этими вершинами есть ещё хотя бы одно ребро. Докажите, что всякий простой путь наибольшей длины в таком графе проходит через каждую вершину максимальной степени.

Программа обычной группы

Первая пятидневка

Комплексные числа

Определение. *Комплексным* числом называется формальная запись вида $a+bi$, где символ i удовлетворяет условию $i^2=-1$, $a,b\in\mathbb{R}$. Действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом последнего условия. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Числом 0 назовем выражение $0+0i$.

1. Пусть $x,y\in\mathbb{C}$. Докажите, что
(a) $x+y, x-y, xy\in\mathbb{C}$;
(b) если $y\neq 0$, то $\frac{x}{y}\in\mathbb{C}$.

2. Упростите выражение: $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$.

3. Решите уравнение
(a) $x^2-(2i+2)x+(2i-1)=0$;
(b) $x^3-1=0$;
в комплексных числах.

Определение. Числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряженными*. Сопряженное к числу z обозначается $\overline{z}$.

Осознайте свойства сопряжения: $\overline{z}+\overline{t}=\overline{z+t}$; $\overline{zt}=\overline{z}\overline{t}$; $\overline{\overline{z}}=z$.

4. **(a)** Пусть x — корень квадратного трехчлена с рациональными коэффициентами. Докажите, что $\overline{x}$ также является корнем этого уравнения.
(b) Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что если $f(x)=0$, то $f(\overline{x})=0$.

Определение. Модуль комплексного числа $a+bi$ равен $\sqrt{a^2+b^2}$.

5. Про три комплексных числа известно, что $|z_1|=|z_2|=|z_3|\neq 0$ и $|z_1+z_2+z_3|=0$. Докажите, что точки z_1,z_2,z_3 образуют равносторонний треугольник на комплексной плоскости.

6. Про комплексные числа x,y,z известно, что $|x|=|y|=|z|=1$. Какие значения может принимать выражение $\left|\frac{x+y+z}{xy+yz+xz}\right|$?

Следствие из основной теоремы алгебры. Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет в нём ровно n комплексных корней, с учётом их кратности.

7. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами существует набор многочленов с вещественными коэффициентами $Q_i(x)$, $\deg Q_i(x)\leqslant 2$ такой, что $P(x)=Q_1(x)Q_2(x)\cdot\ldots\cdot Q_n(x)$.

Процессы и полуинварианты

0. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

1. В двух коробках лежат по 9 шариков. За один ход можно убрать из любой коробки 1 шарик или убрать 1 шарик из левой коробки и положить 9 шариков в правую. Докажите, что ходы рано или поздно закончатся.

2. В квадрате 20×20 стоят 400 ненулевых
(a) целых;
(b) вещественных
чисел. Можно изменить знак у всех чисел, стоящих в одном столбце или в одной строке. Докажите, что за конечное число таких операций можно добиться того, что сумма чисел, стоящих в любой строке или в любом столбце, будет неотрицательной.

3. На доске написаны 3 различных натуральных числа. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое, геометрическое или гармоническое его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее — натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов (если при любом возможном ходе набор чисел не меняется, то будем считать, что ходить больше нельзя).

4. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

5. В каждой из 2018 стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих с данной страной стран правит не та партия, которая правит в данной стране. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.

Лексикографический порядок

В: Надо посчитать количество простых строк, лексикографически меньших данной.
К: Решето Эратосфена написать.

@Jinotega3000

Определение. Рассмотрим две строки одинаковой длины, состоящие из натуральных чисел: $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Будем говорить, что $A \succ B$ (или A *мажорирует* B), если: или $a_1 > b_1$; или $a_1 = b_1$ и $a_2 > b_2$; или $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 > b_3$ и т.д.

1. **Теорема.** Докажите, что
(a) если $A \preceq B$, $B \preceq C$, то $A \preceq C$.
(b) строго убывающая последовательность строк длины n всегда конечна.
(c) в каждом непустом множестве строк длины n есть наименьший элемент.

Таким образом мы можем упорядочить множество строк длины n. Такой порядок называется *лексикографическим.* Своё название лексикографический порядок получил по аналогии с сортировкой по алфавиту в словаре.

2. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

3. Компьютер сортирует массив из 100 натуральных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два любых элемента (возможно, несоседних), где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус новый правый элемент умножает на 10. Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.

4. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x \cdot (p - 1)^k/p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x, а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.

5. Петя ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Докажите, что через несколько операций все точки с натуральными координатами будут закрашены.

6. Двое играют в следующую игру. Есть последовательность из n крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые k ($k = 1, \ldots, n$) подряд идущих знака таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней — нолики (допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её (заменить крестик на нолик и нолики на крестики). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?

7. Петя вырезал из бумаги 2018 различных прямоугольников с целыми сторонами, не превышающими 1000. Докажите, что среди них можно выбрать пять таких, что каждый следующий строго больше предыдущего.

Вектора и скалярное произведение

xxx: купила рыбку, назвала Вектория
yyy: ВИктория
xxx: нет, Вектория
yyy: почему??
xxx: потому что скалярия :)

`https://bash.im/quote/413898`

Примеры

1. Найдите угол между диагоналями AD и BF в правильном шестиугольнике $ABCDEF$.
2. Найдите угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Задачи

1. **(a)** Пусть A, B, C и D — произвольные точки плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
(b) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
(c) Известно, что в тетраэдре две пары скрещивающихся ребер перпендикулярны. Докажите, что и третья пара скрещивающихся ребер обладает этим свойством.

2. **(a)** Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме квадратов расстояний от этой точки до двух других вершин прямоугольника.
(b) Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Докажите, что $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$.
(c) Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

3. Пусть O — центр описанной окружности, H — ортоцентр и M — точка пересечения медиан треугольника ABC.
(a) Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
(b) Выведите из этого, что точки M, H, O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $MH = 2 \cdot OM$.
(c) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Пусть H_a — ортоцентр треугольника BCD, а M_a — середина отрезка AH_a. Аналогично определим M_b, M_c и M_d. Докажите, что M_a, M_b, M_c и M_d совпадают.

5. Пусть O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), D — середина стороны AB, а E — точка пересечения медиан треугольника ACD. Докажите, что $OE \perp CD$.

Тригонометрическая запись комплексного числа

All this sounds pretty damn complex.

Snoop Dogg

Определение. Каждое комплексное число можно однозначно представить в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, причем r определяется единственным образом, а φ — с точностью до кратного 2π (если число не равно нулю). Число r называется *модулем* (и обозначается $|z|$), φ — *аргументом* комплексного числа, а сама форма называется *тригонометрической* записью комплексного числа.

Упр. Представьте в тригонометрической форме числа $2, 1+i, 1-\sqrt{3}i$.

1. **(a)** Докажите, что $|zt| = |z|\cdot|t|$ для любых $z, t \in \mathbb{C}$.
(b) Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.

2. **(a)** Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули умножаются (делятся) друг на друга, а аргументы складываются (вычитаются).
(b) **(Формула Муавра)** Докажите, что

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

3. Пользуясь формулой Муавра, выразите $\sin 7\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

4. Вычислите
(a) $\sqrt{1+i}$; **(b)** $(1+\sqrt{3}i)^{2018}$; **(c)** $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{146}$.

5. Комплексные корни уравнения $x^n - 1 = 0$ называются корнями n-ой степени из единицы.
(a) Представьте их в тригонометрической форме.
(b) Найдите сумму этих чисел.
(c) Найдите их произведение.
(d) Найдите их сумму квадратов.

6. **(a)** Найдите все вещественные корни уравнения

$$(x+i)^{2018} + (x-i)^{2018} = 0.$$

(b) Найдите все его комплексные корни.

7. Упростите выражение:

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha.$$

Снова вектора

<Rodriguez> Камельфо: Вот скажи мне, если чёрный кот перешёл дорогу туда и обратно, что это значит? Он удвоил наказание, или отменил своё решение?
<Камельфо> Rodriguez: кот скалярный или векторный?
<Камельфо> если скалярный, то удвоил
<Камельфо> если векторный, то отменил

`https://bash.im/quote/414140`

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AP и внешняя биссектриса AQ. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$.
(a) Выразите через $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ вектор $\overrightarrow{AP}$;
(b) Выразите через $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ вектор $\overrightarrow{AQ}$;
(c) Используя скалярное произведение, докажите, что $AP \perp AQ$.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BP и CT, а также внешняя биссектриса AQ. Используя вектора, докажите, что P, Q, T лежат на одной прямой.

3. В треугольнике ABC известно, что AA_1 — медиана, AA_2 — биссектриса, K — такая точка на AA_1, для которой $KA_2 \parallel AC$. Докажите, что $AA_2 \perp KC$.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

5. О вписанном четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB > CD$ и $BC > AD$. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AX = CD$ и $AD = CY$. Пусть M — середина XY. Докажите, что угол AMC прямой.

6. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. H — точка пересечения высот. На сторонах AB и BC выбраны точки M и K и соответственно так, что $\angle KMH = 90°$. Докажите, что из отрезков AK, CM и MK можно сложить прямоугольный треугольник.

7. Пусть ABC — равнобедренный треугольник ($AB = AC$). На продолжениях сторон BC, AB и AC выбраны точки P, X, Y таким образом, что $PX \parallel AC$ и $PY \parallel AB$ и точка P лежит на луче CB. Точка T — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC ($T \neq A$). Докажите, что $PT \perp XY$.

Вторая пятидневка

Про цешки

1. Докажите комбинаторно следующие тождества:
(a) $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$;
(b) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;
(c) $C_m^k \cdot C_n^m = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$.

2. Чему равно $C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k$?

3. **Свёртка Вандермонда.** Докажите комбинаторно тождество:

$$C_{r+s}^n = C_r^0 \cdot C_s^n + C_r^1 \cdot C_s^{n-1} + \dots + C_r^r \cdot C_s^{n-r}.$$

4. Чему равно $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots$?

5. Вычислите суммы:
(a) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots$
(b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots$
(c) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$
(d) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots$
(e) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + \dots$
(f) $C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + 4^2C_n^4 + \dots$
(g) $C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2C_n^4 - 3^3C_n^6 + \dots$
(h) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \dots$.

Степень точки

1. **Критерий вписанности четырехугольника.**
(a) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.
(b) На сторонах угла с вершиной P выбраны точки A, B, C и D (A и B на одной стороне угла, C и D на другой). Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM. На луче CA отложен отрезок CN, равный BM. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B; MN — общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.

4. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

5. Дан треугольник ABC. Обозначим через M середину стороны AC, а через P — середину отрезка CM. Описанная окружность треугольника ABP пересекает сторону BC во внутренней точке Q. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$.

6. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке T. Пусть ω — окружность с центром в точке T и радиусом TC. Прямая ℓ, проходящая через точку D, пересекает ω в точках K и N. Докажите, что $\angle KAD = \angle NAD$.

7. Через центр I вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке M. Из точки I на прямую AM опущен перпендикуляр ID. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

8. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, точка H — основание высоты, опущенной из вершины B. Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P $(P \neq H)$. Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN.

9. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

Корни из единицы

Корни из единицы существуют в любом поле и образуют подгруппу мультипликативной группы поля K.

---

1. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — корни n-ой степени из единицы.
(a) Докажите, что среди них можно выбрать корень α такой, что для любого α_i найдется целое число k такое, что $\alpha_i = \alpha^k$.
(b) Сколько существует таких корней?

2. Докажите, что $x^{66}+x^{55}+x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ делится на $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

3. Вычислите сумму k-х степеней корней n-й степени из 1, где k, n — натуральные числа, если
(a) НОД$(k, n) = 1$;
(b) НОД$(k, n) \neq 1$.

4. **(a)** Пусть $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Докажите, что

$$n = (1-\alpha)\cdot(1-\alpha^2)\cdot(1-\alpha^3)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha^{n-1}).$$

(b) Для каких других корней n-ой степени из единицы это тождество выполняется?

(c) Для нечетных n докажите, что

$$\sqrt{n} = \left|(1-\alpha)\cdot(1-\alpha^2)\cdot(1-\alpha^3)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha^{\frac{n-1}{2}})\right|.$$

(d) Выпишите аналогичное равенство для четного n.

5. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный n-угольник, вписанный в окружность единичного радиуса. Найдите произведение длин всех его сторон и диагоналей.

6. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, вписанный в окружность с центром O ($AO = 1$). Точка P симметрична точке О относительно точки А, докажите, что $PB \cdot PC = \sqrt{31}$.

7. Пусть $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}$. Рассмотрим сумму

$$S_n = 1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^9 + \ldots + \alpha^{(n-1)^2}.$$

Докажите, что $|S_n| = \sqrt{n}$.
Стоит рассмотреть произведение $S_n\overline{S_n}$.

Радикальные оси

Самый заклятый враг новых радикалов — старые либералы.

Ленин

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Докажите, что если вершины A и C некоторого прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности ω_1, а вершины B и D — на окружности ω_2, то точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на прямой MN.

2. Дана неравнобедренная трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AP и BQ пересекаются в точке H. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке T. CT вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямые HK и CT перпендикулярны.

4. Дан такой выпуклый четырехугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведенным из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

5. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

6. На сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC выбраны произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке пересечения высот треугольника ABC.

7. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором противоположные стороны попарно параллельны ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$). Точки M, N и K — точки пересечения прямых BD и AE, AC и DF, CE и BF соответственно. Докажите, что перпендикуляры, проведенные из точек M, N и K к прямым AB, CD и EF соответственно, пересекаются в одной точке.

Комбинаторная теория чисел

Сначала комбинаторная геометрия, теперь комбинаторная теория чисел, что потом, комбинаторная топология?

Анри Пуанкаре

1. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько чисел и расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы полученная в результате алгебраическая сумма делилась на 1001.

2. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число l. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l, если

(a) $l = 9$;

(b) l — нечётное число, не делящееся на 5.

3. Докажите, что одно из сравнений

$$x^2 \equiv 1 \pmod{101}$$

$$x^2 \equiv 2 \pmod{101}$$

$$\dots$$

$$x^2 \equiv 50 \pmod{101}$$

не имеет решений.

4. Докажите, что если p — простое число, то разрешимо сравнение

$$1 + x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{p}\,.$$

5. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

6. Назовем число *хорошим*, если у него нет простых делителей, отличных от 2, 3 или 5. На доску выписали 81 хорошее число. Докажите, что из них можно выбрать четыре числа, произведение которых равняется точной четвертой степени некоторого натурального числа.

7. Дано натуральное число k. На бесконечной клетчатой плоскости каждая клетка является суверенным государством, а на каждом ребре стоит таможня, взимающая натуральное число талеров в качестве взятки за ее пересечение (в обоих направлениях — одинаковое, но, возможно, различное для разных границ). Докажите, что существует такой замкнутый маршрут, не заходящий ни в какую клетку дважды, что суммарная взятка на нем кратна k.

Третья пятидневка

Симметрические многочлены

Определение. Многочлен от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках его переменных.

Определение. *(Основные симметрические многочлены)*

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

Основная теорема о симметрических многочленах. Всякий симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

1. Пусть дан симметрический многочлен от n переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его одночлены. Назовем одночлен $q = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ старшим, если упорядоченный набор степеней $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ мажорирует все остальные наборы относительно лексикографического порядка.
(a) Для любого одночлена $q = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ существуют такие неотрицательные целые числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, что старший член многочлена
$\sigma_1^{\beta_1} \sigma_2^{\beta_2} \cdots \sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с q. Причем числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ определены этим условием однозначно.
(b) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

2. Выразите через основные симметрические многочлены
(a) $x^2 + y^2 + z^2$;
(b) $x^3 + y^3 + z^3$;
(c) $x^4 + y^4 + z^4$.

3. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа
(a) $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$, $y_3 = x_1 + x_2$;
(b) $y_1 = x_2 x_3$, $y_2 = x_1 x_3$, $y_3 = x_1 x_2$.

4. Есть многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что любой симметрический многочлен от его (комплексных) корней есть рациональное число.

5. Многочлен $x^{2018} + y^{2018}$ выразили через основные симметрические, как $P(xy, x + y)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P.

6. Пусть α — корень многочлена $f(x)$ с рациональными коэффициентами, β — корень многочлена $g(x)$ с рациональными коэффициентами. Докажите, что найдется многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является
(a) $\alpha + \beta$;
(b) $\alpha\beta$.

Про велосипедистов

А теперь новости: Велосипедист наехал на КАМАЗ, от удара об КАМАЗ велосипедист скрылся в неизвестном направлении.

---

1. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что прямая, соединяющая их, все время проходит через точку B.

2. Даны два правильных пятиугольника с общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются цифрами от 1 до 5 по часовой стрелке, причем в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.

3. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности один по часовой стрелке, другой — против. Угловые скорости у них одинаковые. Четырехугольник AO_1CO_2 — параллелограмм. Докажите, что велосипедисты постоянно равноудалены от точки C.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые.
(a) Докажите, что существует точка, постоянно равноудаленная от велосипедистов.
(b) Докажите, что середина отрезка, их соединяющего, движется по окружности.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. На его диагонали BD выбрана такая точка K, что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' — центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X. Докажите, что точки A, X, I, D лежат на одной окружности.

6. **(a)** На прямой лежат три точки A, B, C. X и Y — точки на плоскости такие, что $AX = XB$ и $BY = YC$. $BXZY$ — параллелограмм. Докажите, что $AZ = CZ$.
(b) $ABCD$ — вписанный четырехугольник. M — точка пересечения его диагоналей. Некоторая прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность, описанную около $ABCD$, в точках M_1 и M_2, и окружности, описанные около треугольников ABM и CDM, в точках N_1 и N_2. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

Турниры

– Мы с тобой подрались недавно.
– Я победил?
– Не, я легко тебя одолел.
– Быть того не может.
– Ну я ж врать не стану.

Разговор Брюса Бэннера и Тора

Определение. Турнир — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно одно ориентированное ребро. Он называется турниром, поскольку моделирует однокруговой турнир, в котором нет ничьих.

1. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). Доказать, что можно выделить такие четыре команды A, B, C и D, что A выиграла у B, C и D; B выиграла у C и D, C выиграла у D.

2. 12 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Две команды одержали ровно по 7 побед. Доказать, что найдутся такие команды A, B, C, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C — у A.

3. В турнире в каждую вершину входит хотя бы одно ребро и из каждой хотя бы одно выходит. Докажите, что найдется цикл длины 3.

Определение. Гамильтонов путь — это путь (ориентированный), который проходит через каждую вершину ровно один раз. По аналогии с путём определяется Гамильтонов цикл.

Определение. Граф называется сильно связным, если из любой вершины можно попасть в любую перемещаясь только по стрелкам.

4. **(a)** Докажите, что в любом турнире существует Гамильтонов путь.
(b) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть Гамильтонов цикл.

5. В одном государстве 100 городов и каждый соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения не более чем на одной дороге так, чтобы от каждого города можно было доехать до любого другого.

6. В турнире по волейболу n команд сыграли в один круг (каждая играла с каждой по одному разу, ничьих в волейболе не бывает). Пусть P — сумма квадратов чисел, задающих количество побед каждой команды, Q — сумма квадратов чисел, задающих количество их поражений. Докажите, что $P = Q$.

7. Докажите, что в сильно связном турнире с $n > 4$ вершинами существует хотя бы **(a)** 1; **(b)** 2 вершины такие, что при удалении одной из них сильная связность графа не теряется.

Квадратичные вычеты

> $1 \pmod 7$, $2 \pmod 7$, $3 \pmod 7$, $4 \pmod 7$, $5 \pmod 7$, $6 \pmod 7$
> *Сколько квадратов изображено на этом рисунке? Говорят, что только один из пяти может дать правильный ответ на эту задачку!*

Определение. Пусть $p > 2$ — простое число и a — целое число, взаимно простое с p. Число a называется квадратичным вычетом по модулю p, если существует $x \in \mathbb{N}$ такое, что $a \equiv x^2 \pmod p$. В противном случае число a называется квадратичным невычетом по модулю p.

1. Докажите, что если p — нечетное простое число, то по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов.

Таким образом можно сделать вывод, что квадратичное сравнение вида $x^2 \equiv a \pmod p$ *при простых p имеет либо ноль решений, либо два решения, либо одно решение в случае* $a \equiv 0 \pmod p$.

2. Докажите, что для данного модуля p
(a) произведение двух квадратичных вычетов — вычет;
(b) произведение вычета на невычет — невычет;
(c) произведение двух невычетов — вычет.

3. Будем решать следующее сравнение $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Из малой теоремы Ферма мы знаем, что у этого сравнения есть корни $x \equiv 1, 2, \ldots, p-1$.
(a) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$.
(b) Докажите, что если а — квадратичный невычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$.

Определение. *Символом Лежандра* называется выражение, обозначаемое $(\frac{a}{p})$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p; -1, если a — невычет по модулю p и 0, если a кратно p. Из задачи 3 следует, что $(\frac{a}{p}) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

4. **(Теорема Жирара)** Пусть $x^2 + y^2$ делится на простое число $p = 4k + 3$. Докажите тогда, что x и y делятся на p.

5. Пусть F_n — n-ое число Фибоначии.
(a) По индукции докажите формулу Бине

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

(b) Докажите, что $F_p - (\frac{5}{p})$ делится на p при всех простых $p > 5$.

6. Докажите, что если n — нечетное натуральное число, то любой делитель числа 2^n-1 имеет вид $8k \pm 1$.

Поворотная гомотетия

Как говорится, мастерство проявляется не на прямой, а именно на поворотах.

Определение. Поворотной гомотетией с коэффициентом k и углом φ ($k > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$) называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ, имеющих общий центр.

1. **(a)** Выразите функцию $f(z), z \in \mathbb{C}$, задающую поворотную гомотетию комплексной плоскости относительно точки a с коэффициентом k и углом φ.
(b) Докажите, что композицию двух поворотных гомотетий — это поворотная гомотетия.

2. **(a)** Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P, причем все точки A, B, A_1, B_1, P различны. Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая точку A в A_1, а B в B_1, причем её центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P.
(b) Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1.
(c) **(Точка Микеля)** Из предыдущих пунктов выведите, что если даны четыре прямые общего положения, тогда описанные окружности четырех треугольников, образованных этими прямыми, пересекаются в одной точке.

3. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Точка M — середина AB, N — середина CD. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BCE, ADE и MNE лежат на одной прямой.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены две прямые, пересекающие окружности в точках в P_1 и P_2, Q_1 и Q_2 соответственно. Докажите, что угол между окружностями равен углу между P_1P_2 и Q_1Q_2 (угол между окружностями равен углу между касательными, проведенными в их общей точке).

5. Боковые стороны AD и BC трапеции $ABCD$ повернуты около своих середин на угол 90° против часовой стрелки, после чего они занимают положение A_1D_1 и B_1C_1. Докажите, что $A_1B_1 = C_1D_1$.

6. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Описаная окружности треугольника BCD вторично пересекает окружности, проходящую через точки A и D

и касающуюся прямой CD, в точке K. Точка M — середина BC, N — середина AD. Докажите, что точки B, M, N и K лежат на одной окружности.

Четвёртая пятидневка

Квадратичный закон взаимности

God does arithmetic.

Carl Friedrich Gauss

(Квадратичный закон взаимности Гаусса)
Пусть p и q — два простых нечетных числа. Докажите, что

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

1. Пусть p — нечетное простое число вида $3k+2$. Докажите, что если $3a^2+b^2$ делится на p, то a и b делится на p.

2. Докажите, что при любом натуральном a все простые делители a^2-5a+5 большие 5 имеют вид $5k\pm1$.

3. Про натуральные числа a, b, p, где p — простое, известно, что $a^2+b^2=p$. Докажите, что a — квадратичный вычет по модулю p, если
(a) a — нечетное простое;
(b) a — нечетное.

4. Найдите наименьший простой делитель числа $12^{2^{15}}+1$.

5. Пусть $k=2^{2^n}+1$ для некоторого натурального n. Докажите, что k является простым тогда и только тогда, когда k — делитель числа $3^{\frac{k-1}{2}}+1$.

Рёберные обходы графов

Насчёт того, где я — я, признаться, на мгновение потерялся между Чаринг-Кросс и Робоном, но меня спасла булочная на Сефрон-Хилл, единственная пекарня, где используют французскую глазурь: бретонский шалфей. После экипаж повернул налево, направо, по ухабистой переправе через Флит.

Шерлок Холмс

1. Можно ли выложить в ряд все 28 косточек домино согласно правилам игры так, чтобы на одном конце ряда оказалось 5, а на другом 6 очков?

2. **(a)** Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

(b) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?

3. Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы — квадраты со стороной 1, всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A (стороны квадрата — тоже улицы)?

4. Турист приехал на вокзал и отправился гулять по улицам города (каждая улица соединяет ровно два перекрестка). Докажите, что он в любой момент может вернуться на вокзал, проходя только по тем участкам улиц, по которым он уже проходил нечетное число раз.

5. Пусть G — сильно связный ориентированный граф без чётных простых ориентированных циклов. Докажите, что для любой раскраски вершин графа G в два цвета найдётся вершина, имеющая тот же цвет, что и все вершины, в которые из неё ведут рёбра.

6. В некоторой стране два вида транспорта: автомобильный и железнодорожный, причем из каждого города выходит одинаковое число дорог того и другого вида, и от любого города можно добраться в любой другой. Джеймсу Бонду не разрешается пользоваться одним и тем же видом транспорта два раза подряд. Докажите, что он сможет добраться из любого города в любой, не нарушая запрета.

7. Докажите, что для любого n можно написать по кругу несколько цифр от 0 до 9 так, чтобы среди них встретились ровно по разу всевозможные n-значные комбинации из цифр, идущие подряд по часовой стрелке.

Инверсия

> *Помещаем в заданную точку пустыни клетку, имеющую форму окружности, входим в нее и запираем изнутри. Производим инверсию пространства по отношению к клетке. Теперь лев внутри клетки, а мы — снаружи.*
>
> Как поймать льва

Определение. Пусть S — окружность с центром O радиуса r. *Инверсией* относительно окружности S называется преобразование плоскости, которое любую точку $A \neq O$ переводит в такую точку A', лежащую на луче OA, что $|OA| \cdot |OA'| = r^2$. Для точки O это преобразование не определено. Точка O называется центром инверсии, S — окружность инверсии.

1. **(a)** При инверсии относительно окружности S с центром O точки A, B перешли в точки A', B' соответственно. Докажите, что $ABA'B'$ — вписанный.
(b) Дана окружность ω и точка O вне неё. Что происходит с окружностью ω при инверсии с центром в O и радиусом равным длине касательной из O к ω.

2. Докажите, что инверсия с центром O

(a) переводит прямую, проходящую через O, в себя;

(b) переводит окружность, проходящую через O, в прямую, не проходящую через O.

(c) переводит прямую, не проходящую через O, в окружность, проходящую через O. Какая точка переходит в центр этой окружности?

(d) переводит окружность, не проходящую через O, в окружность, не проходящую через O. Переходит ли центр одной окружности в центр другой?

(e) переводит касающиеся окружности (окружность и прямую) в касающиеся окружности или в окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.

3. **(a)** Как построить образ точки относительно заданной окружности с помощью циркуля и линейки?

(b) Даны окружность ω и точки A и B, лежащие снаружи. Постройте окружность, проходящую через A и B, касающуюся окружности ω.

(c) Даны две окружности ω_1 и ω_2 и точка A, лежащая вне окружностей. Постройте окружность, касающуюся двух данных окружностей и проходящую через A.

4. **(Неравенство Птолемея)** Для выпуклого четырехугольника $ABCD$ докажите неравенство $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD$. Когда достигается равенство?
Стоит сделать инверсию с центром в точке A.

5. **(a)** **(Лемма Архимеда)** В окружности Ω проведена хорда AB. Окружность ω касается Ω в точке P и AB в точке Q; M — середина дуги AB. Докажите, что P, Q и M лежат на одной прямой.

(b) В обозначениях предыдущего пункта докажите, что касательная из точки M к ω равна MA.

Квадратичная добавка

Как добавить квадрат ярлыка с цветовой кодировкой в диаграмму, которую я сделал с Chart.js?

С сайта `https://stackoverrun.com`

Чтобы решать первые две задачи, Вам необходимо вычислить несколько величин. Пусть n — количество букв в Вашем полном имени (если Вас зовут Саша, то Ваше полное имя Александр, и $n = 9$), k — количество букв в Вашей фамилии, m — номер месяца Вашего рождения.
Впишите получившиеся значения:

$$n = \qquad\qquad k = \qquad\qquad m =$$

1. Сколько решений имеет сравнение

$$nx^2 + mx + k \equiv 0 \pmod{61}?$$

2. Сколько решений имеет сравнение

$$(n+3)x^2 + (m-5)x + (k+2) \equiv 0 \pmod{101}?$$

3. Дано простое число p. Докажите, что существует натуральное число α такое, что $\alpha(\alpha-1)+3$ делится на p, тогда и только тогда, когда существует натуральное β такое, что $\beta(\beta-1)+25$ делится на p.

4. Докажите, что для любого простого p найдется натуральное x такое, что $x^8 - 16$ делится на p.

Скрытый граф

– Видишь суслика?
– Нет. . .
– И я не вижу. . . А он есть!

Фильм “ДМБ”

1. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

2. Муравей ползает по поверхности кубика $11 \times 11 \times 11$ вдоль диагоналей квадратиков 1×1 (поворачивать в центре клетки нельзя). Могло ли так оказаться, что он побывал в каждом квадратике ровно один раз?

3. На прямой сидят три кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого. Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 101 прыжок?

4. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

5. Из кубиков $1 \times 1 \times 1$ склеен куб $3 \times 3 \times 3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

- со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (глядя перпендикулярно этой грани, мы не увидим просвета — видны 9 кубиков фигуры);
- переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от каждого кубика добраться до любого другого?

6. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

Еще немного инверсии

Из наших наблюдений стало ясно, что практически все невротики имеют склонность к инверсии...

Зигмунд Фрейд

Определение. *Обобщённая окружность* — это либо окружность, либо прямая (считается, что это тоже окружность, но имеющая бесконечный радиус).

1. Докажите, что инверсия сохраняет углы между обощенными окружностями.

2. Никакие три из четырёх точек A, B, C, D не лежат на одной прямой. Докажите, что между описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен углу между описанными окружностями треугольников ACD и BCD.

3. Через точки A и B проведены две окружности ω_1 и ω_2, касающиеся окружности Ω. Также через точки A и B провели окружность ω_3, перпендикулярную Ω. Докажите, что ω_3 образует равные углы с окружностями ω_1 и ω_2.

4. В треугольнике ABC A_1, B_1 — середины сторон BC и AC соответственно. Описанные окружности треугольников CBB_1 и CAA_1 вторично пересекаются в точке P. Прямая CP вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q. Найдите отношение CP к CQ.

5. На окружности расположены точки A, B, C и D. Обозначим через K середину дуги AB, не содержащей точек C и D. Прямые CK и DK пересекают прямую AB в точках M и N. Докажите, что точки M, N, C и D лежат на одной окружности.

6. Дана полуокружность с центром в точке O. Прямая ℓ пересекает эту полуокружность в точках C и D. M — точка пересечения ℓ с прямой, содержащей диаметр AB полуокружности. Пусть K — точка пересечения описанных окружностей треугольников AOC и BOD, отличная от O. Докажите, что $\angle MKO = 90°$.

Список вопросов к зачёту

1. Комплексные числа. Операции с ними. Сопряжение и его свойства. Формулировка основной теоремы алгебры. Доказательство того, что любой многочлен с вещественными коэффициентами можно представить в виде произведения многочленов с вещественными коэффициентами не более, чем второй степени.

2. Тригонометрическая запись комплексного числа. Формула Муавра. Корни из единицы. Их сумма, произведение, сумма квадратов.

3. Биномиальные суммы

- $C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k$;
- $C_r^0 \cdot C_s^n + C_r^1 \cdot C_s^{n-1} + \dots + C_r^r \cdot C_s^{n-r}$;
- $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots$;
- $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots$;
- $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$;
- $C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + 4^2 C_n^4 + \ldots$;
- $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots$.

4. Лексикографический порядок. Его свойства.

5. Основная теорема о симметрических многочленах. Пусть α — корень многочлена $f(x)$ с рациональными коэффициентами, β — корень многочлена $g(x)$ с рациональными коэффициентами. Доказательство того, что найдется многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является $\alpha + \beta$.

6. Векторные доказательства: существование ортоцентра, прямая Эйлера.

7. Степень точки. Критерий вписанности четырехугольника через степень точки. Радикальная ось. Радикальный центр.

8. Лемма о велосипедистах. Поворотная гомотетия. Её связь с комплексными числами. Композиция двух поворотных гомотетий.

9. Инверсия. Свойства. Неравенство Птолемея. Лемма Архимеда.

10. Существование Гамильтонова пути в турнире. Существование Гамильтонова цикла в сильно связном турнире. Удаление вершин в сильно связном турнире без потери сильной связности. Эйлеров граф: определение и критерий.

11. Квадратичные вычеты. Их количество и свойства. Символ Лежандра. Теорема Жирара.

12. Символ Лежандра $(\frac{2}{p})$. Доказательство формулы $(\frac{a}{p}) = (-1)^{\sum_{x=1}^{t}[\frac{2ax}{p}]}$.

13. Квадратичный закон взаимности.

Программа полупрофи

Первая пятидневка

Ориентированные графы

> В Монголии прошёл второй турнир по фехтованию, посвящённый памяти жертв первого турнира.
>
> Анекдот

Определение. Две вершины a и b в ориентированном графе называются *связанными*, если существует путь по ориентированным рёбрам из a в b, и из b в a.
Определение. Орграф G называется *сильно связным*, если любые две его вершины связаны.
Замечание: Таким образом, множество вершин $V(G)$ графа G оказывается разбито на классы попарно связанных вершин, которые мы будем называть *компонентами сильной связности.*
Определение. *графом компонент* (сильной связности) $C(G)$ для орграфа G называется граф, построенный по следующему принципу: вершины нашего графа — это компоненты связности исходного графа, при этом, вершины, соответствующие компонентам связности A и B соединены ориентированным стрелкой в том и только том случае, если в графе G есть стрелка из вершины компоненты A в вершину компоненты B.

1. **(a)** Докажите, что в $C(G)$ нет ориентированных циклов.
(b) В ориентированном графе для любой вершины есть стрелка, входящая в неё и стрелка, исходящая из неё. Верно ли, что заданная вершина лежит в каком-либо цикле?

2. В графе 200 вершин, и **(a)** каждая лежит в каком-либо ориентированном цикле **(b)** из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро, и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно провести не более, чем 100 новых рёбер, чтобы получившийся граф стал сильно связным. (между двумя вершинами может быть проведено несколько рёбер)

Определение. турниром называется ориентированный граф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой.

3. (*немного про остовное дерево*)
(a) Докажите, что в сильно связном ориентированном графе на n вершинах можно оставить не более $2n-2$ рёбер, чтобы он остался сильно связным.
(b) Докажите, что оценка точная (то есть, что для любого n можно найти ориентированный граф, где нельзя оставить меньше рёбер, сохранив сильную связность).
(c) Докажите, что если между любыми двумя вершинами проведено не более одной стрелки, то можно оставить даже $2n-3$ рёбер, чтобы сильная связность сохранилась.

4. **(a)** **(Теорема Муна.)** Пусть G — сильно связный турнирный граф, $3 \le k \le v(G)$. Докажите, что для любой вершины $v \in V(G)$ существует простой цикл длины k, проходящий через v. **(b)** Докажите, что в графе G существует хотя бы $v(G) - k + 1$ простых циклов длины k.

5. **(a)** Докажите, что если в сильно связном турнире более трёх вершин, то в нём можно удалить вершину без потери сильной связности. **(b)** Докажите, что таких вершин хотя бы две. **(c)** Докажите, что если в турнире более шести вершин, то существует вершина, что можно изменить ориентацию всех рёбер, выходящих из этой вершины, чтобы граф стал сильно связным.

6. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A доступен для города B, если из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.)

7. В городе Никитовка двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в каждый момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Доказать, что в Никитовке можно ввести одностороннее движение так, что из каждой точки города удастся проехать в любую другую точку.

Разнобой

1. В квадрате 5×5 два игрока играют в крестики-нолики. Первый игрок ставит крестики, а второй — нолики. Цель первого — добиться того, чтобы в каком-то из квадратов 3×3 стояло хотя бы k крестиков. При каком наибольшем k первый игрок может этого добиться?

2. В графе степень каждой вершины не больше 2018. Докажите, что его рёбра можно раскрасить в 11 цветов так, чтобы рёбра каждого цвета образовывали двудольный граф.

3. Докажите, что $(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1})$ делится на $n!$.

4. В последовательности a_n, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, а число a_n равно наименьшему натуральному числу, не взаимно простому с a_{n-1} и ещё не вошедшему в последовательность. Докажите, что каждое натуральное число встретится в этой последовательности.

5. В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 — рациональное число, большее 1, и $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число.

6. Конечное множество точек на плоскости таково, что любой треугольник с вершинами в этих точках тупоугольный. Докажите, что к этому множеству можно добавить ещё одну точку так, чтобы это условие сохранилось.

Порядок роста

Дети любят решать задачи, которые им не по плечу. Для них это единственная возможность расти.

Джанни Родари

Будем считать, что имеем дело с бесконечными вправо последовательностями, состоящими из положительных вещественных чисел. Будем говорить, что последовательность $\{a_i\}$ *намного меньше*, чем $\{b_i\}$, и обозначать это $\{a_i\} \ll \{b_i\}$, если для любого положительного C существует такой индекс $n(C)$, что при $i > n(C)$ выполнено $Ca_i < b_i$. Аналогично определяется *намного больше.*

Будем говорить, что последовательности *эквивалентны*, если существует число C такое, что для всех i выполняется $\frac{1}{C} < \frac{a_i}{b_i} < C$. Будем это обозначать как $\{a_i\} \sim \{b_i\}$.

1. **(a)** Пусть есть две последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Обязательно ли выполняется что-нибудь из $\{a_i\} \ll \{b_i\}$, $\{a_i\} \sim \{b_i\}$, $\{a_i\} \gg \{b_i\}$?
(b) Можно ли выбрать счётное число последовательностей так, что любая другая последовательность намного меньше какой-нибудь из выбранных?

2. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$. Когда последовательности $P(n)$ и $Q(n)$ эквивалентны?

3. **(a)** Докажите, что $n^2 \ll 2^n$;
(b) Докажите, что $n^{1000} \ll 1,001^n$.

В задачах 4-6 сравните следующие последовательности (принимаются любые частичные результаты).

4.
1. $a_n = n^n$
2. $b_n = (n-1)^n$
3. $c_n = n^{n-1}$
4. $d_n = 1^1 + 2^2 + \ldots + n^n$

5.
1. $a_n = n^n$
2. $e_n = n!$
3. $i_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$
4. $g_n = [1.5n]!$

6.
1. $g_n = [1.5n]!$
2. $h_n = (1.01)^{n^2}$
3. $i_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$
4. $j_n = C_{n^2}^{n}$

Симметрические многочлены

Как они могут быть там разложены в другом порядке?

Возмущённый игрок в казино

Определение. Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *симметрическим*, если

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

для любой перестановки $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. *Элементарным симметрическим многочленом* степени k от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется многочлен

$$e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}.$$

В частности, $e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ и $e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$. Мы также считаем, что $e_0 = 1$.

Для краткости будем обозначать любой многочлен $P(x_1, \ldots x_n)$ просто $P(\overline{x})$.

Основная теорема о симметрических многочленах

Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами является симметрическим тогда и только тогда, когда найдется такой многочлен $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с целыми коэффициентами, что

$$P(\overline{x}) = Q(e_1(\overline{x}), e_2(\overline{x}), \ldots, e_n(\overline{x})).$$

Определение. Для строчек $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где a_i и b_i — неотрицательные целые числа, будем говорить, что α больше β в **лексикографическом порядке** и писать $\alpha \succ \beta$, если $\alpha \neq \beta$ и $a_i > b_i$ для наименьшего i, такого что $a_i \neq b_i$.

(a) Покажите, что для $\alpha \neq \beta$ выполнено ровно одно из условий $\alpha \succ \beta$ и $\beta \succ \alpha$.

(b) Покажите, что $\alpha \succ \beta$ и $\beta \succ \gamma \Rightarrow \alpha \succ \gamma$.

(c) Покажите, что $\alpha \succ \beta$ и $\alpha' \succ \beta' \Rightarrow \alpha + \alpha' \succ \beta + \beta'$ (сложение α и β производится покомпонентно).

1. Докажите, что не существует такой бесконечной последовательности $\{\alpha_n\}$, что $\alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \ldots \alpha_n \succ \ldots$.

Определение. Для многочлена $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *старшей степенью* называется наибольшая в лексикографическом порядке строчка $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, такая, что одночлен $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$ входит в P с ненулевым коэффициентом.

2. **(a)** Докажите, что старшая степень многочлена PQ равна сумме старшей степени многочлена P и старшей степени многочлена Q.

(b) Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — старшая степень симметрического многочлена P. Докажите, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$.

(c) Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Покажите, что эта строчка является старшей степенью многочлена

$$e_1(\overline{x})^{a_1-a_2} e_2(\overline{x})^{a_2-a_3} \ldots e_{n-1}(\overline{x})^{a_{n-1}-a_n} e_n(\overline{x})^{a_n}.$$

(d) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

3. Докажите, что симметрический многочлен от переменных $h_1 = x_1x_2 + x_3x_4$, $h_2 = x_1x_3+x_2x_4$ и $h_3 = x_1x_4+x_2x_3$, является симметрическим от переменных x_1, x_2, x_3, x_4.

4. Есть многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что любой симметрический многочлен с рациональными коэффициентами от его (комплексных) корней есть рациональное число.

5. **Формула Ньютона.** Пусть $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$.

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-2}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^{k-1}k\sigma_k.$$

При этом мы считаем, что при $i > n$, $\sigma_i = 0$.
(a) Докажите эту формулу при $n = k$.
(b) Докажите эту формулу при произвольных n и k.

Степень точки, радикальные оси и иже с ними

Я радикально мыслю, но консервативно действую.

Х. Ратерфорд

Определение. *Степенью точки A относительно окружности ω* называется величина $d^2 - R^2$, где d — расстояние от точки до центра окружности, а R — радиус окружности.

Определение. *Радикальной осью* двух неконцентрических окружностей называется ГМТ, для которых степени относительно двух данных окружностей равны.

Определение. *Радикальным центром* трёх окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, называется ГМТ, для которых степени относительно трёх данных окружностей равны.

1. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$. Точка A_1 — это точка пересечения описанной окружности треугольника BCD с прямой AC, отличная от C. Аналогично определяются точки B_1, C_1 и D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ — тоже трапеция.

2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны пары точек (X, Y), (Z, T) и (U, V) соответственно. Оказалось, что четырехугольники $XYZT$, $ZTVU$ и $XYVU$ вписанные. Докажите, что шестиугольник $XYZTUV$ тоже вписанный.

3. **Теорема Паскаля.** На окружности отмечены 6 точек A, B, C, D, E, F. AB и DE пересекаются в точке Y, BC и EF пересекаются в точке Z, CD и FA пересекаются в точке X. Прямая XY пересекается с описанной окружностью треугольника BEY в точке R.

(a) Докажите, что точки R, F, E, X лежат на одной окружности;

(b) Докажите, что точки R, B, C, X лежат на одной окружности;

(c) Докажите, что точка Z лежит на прямой RX (то есть, точки X, Y и Z лежат на одной прямой).

4. На медиане CD треугольника ABC отмечена точка E. Окружность S_1, проходящая через точку E и касающаяся прямой AB в точке A, пересекает сторону AC в точке M. Окружность S_2, проходящая через точку E и касающаяся прямой AB в точке B, пересекает сторону BC в точке N. Докажите, что описанная окружность треугольника CMN касается окружностей S_1 и S_2.

5. В остроугольном треугольнике провели высоты AA_1, BB_1, CC_1. Пары прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 пересекаются соответственно в точках M, N, K. Докажите, что точки M, N, K лежат на одной прямой.

6. При помощи циркуля и линейки постройте окружность, касательные к которой из трёх данных точек A, B, C были бы равны трём данным отрезкам: a, b и c соответственно.

7. Вписанная окружность (с центром в точке I) треугольника ABC касается сторон AB, BC и AC в точках C_0, A_0 и B_0, соответственно. Прямая BI пересекает A_0C_0 в точке K. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BKB_0 лежит на прямой AC.

Разнобой по теории чисел

зачем эпиграфы к разнобоям, вы че

А. И. Голованов

1. Докажите, что число $1997!! + 1998!!$ делится на 1999. Напомним, что $(2n)!! = 2n \times (2n-2) \times \ldots \times 2$ и $(2n+1)!! = (2n+1) \times (2n-1) \times \ldots \times 1$.

2. Докажите, что для каждого простого p целое число x, такое что $x^2 - x + 3$ делится на p, существует тогда и только тогда, когда существует такое целое y, что $y^2 - y + 25$ делится на p.

3. Пусть p — простое число. Докажите, что все простые делители числа p^p-1 и большие p дают остаток 1 при делении на p.

4. Найдите все простые p и q для которых 5^p+5^q делится на pq.

5. Пусть $p>3$ и имеет вид $4k+3$. Докажите, что выполнено сравнение:

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv (-1)^N \pmod{p},$$

где N — число квадратичных невычетов по модулю p, лежащих между 1 и $\frac{p}{2}$.

6. Докажите, что для каждого натурального числа n число 3^n-2^n не делится на n.

7. Натуральные числа a и b таковы, что $2a-1$, $2b-1$ и $a-b$ — простые. Докажите, что ни a^b+b^a, ни a^a+b^b не делятся на $a+b$.

8. Вычислите сумму

$$\sum_{k=1}^{p-2}\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{k+1}{p}\right).$$

Разнобой по комплексным числам

All this sounds pretty damn complex.

Snoop Dogg

1. Докажите, что многочлен $x^{66}+x^{55}+x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ делится на $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

2. Вычислите сумму l-х степеней корней n-й степени из 1, где l, n — натуральные числа.

3. Пусть x, y и z — комплексные числа, для которых выполнено $|x|=|y|=|z|=1$. Найдите

$$\left|\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}\right|.$$

4. Многочлен $x^{2016}+y^{2016}$ выразили через основные симметрические, как $P(xy, x+y)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена P.

5. Пусть n — нечётное натуральное число. Докажите, что

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(5-4\cos\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Изогональное сопряжение

Да, мы теперь официально называемся “Конфлюкс”, потому что так красивее, чем “Сопряжение”.

Королева фей

Определение: Две чевианы называются *изогональными*, если выходят из одного угла и симметричны относительно биссектрисы этого угла.
Определение: Точка N называется *изогонально сопряжённой* для точки M в треугольнике ABC, если получается как пересечение прямых, изогональных прямым AM, BM и CM.
Определение: Прямая, изогональная медиане треугольника, называется *симедианой* этого треугольника.

1. **(a)** Докажите, что симедиана делит противоположную сторону треугольника в отношении, равном отношению квадратов боковых сторон этого треугольника.
(b) **Точка Лемуана.** Докажите, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

2. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Точки P_a, P_b и P_c симметричны точке P относительно понятно каких сторон треугольника. Точка Q — центр описанной окружности треугольника $P_aP_bP_c$. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены в этом треугольнике.

3. **(a)** Докажите, что если точка лежит на описанной окружности, то для неё не существует изогонально сопряжённой.
(b) Докажите, что для любой другой точки можно получить изогонально сопряжённую, используя алгоритм задачи 2.

Определение: Точкой Торричелли треугольника ABC называется такая точка T, что все стороны видны из неё под углом 120°. Точка, изогонально сопряжённая точке Торричелли, называется точкой Аполлония.

4. В треугольнике ABC нашлась такая точка T, что все стороны видны из неё под углом 120°. Её отразили симметрично относительно сторон треугольника ABC и получили точки T_a, T_b и T_c. Точка T' — центр описанной окружности треугольника $T_aT_bT_c$, а точки T_A, T_B и T_C получаются, если T' отразить симметрично относительно сторон треугольника ABC.
(a) Докажите, что T и T' — изогонально сопряжены относительно треугольника ABC.
(b) Докажите, что T — центр описанной окружности треугольника $T_AT_BT_C$.
(c) Докажите, что треугольник $T_AT_BT_C$ — правильный.
(d) Докажите, что точки T_C и C изогонально сопряжены относительно треугольника TAB.
(e) Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT и CT относительно

прямых BC, CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что расстояния от точки Аполлония до вершин треугольника обратно пропорциональны противолежащим сторонам этого треугольника.

6. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

7. Докажите, что при изогональном сопряжении окружность, проходящая через вершины B и C и отличная от описанной окружности, переходит в окружность, проходящую через вершины B и C.

Вторая пятидневка

Квадратичный закон взаимности

Квадратичный закон взаимности естественно обобщается на символы Якоби, это позволяет ускорить нахождение символа Лежандра, поскольку более не требует проверки на простоту.

Википедия

1. Пусть число p — простое.

(a) Докажите, что если $p = 8k \pm 3$, то $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

Указание. Посмотрите, во что перейдут остатки $\left(1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$ при умножении на 2. Как изменится их произведение?

(b) Докажите, что если $p = 8k \pm 1$, то $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.

(c) Докажите, что

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

2. **Квадратичный закон взаимности.** $p > 2$ — простое, $a \not\vdots\, p$.

(a)

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{2ax}{p}\right]}.$$

Указание. Посмотрите, во что перейдут остатки $\left(1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$ при умножении на a. Научитесь отличать случай $ax \in \{1, 2, \ldots, (p-1)/2\}$ от противного.

(b) Если a нечётно, то $\left(\frac{2a}{p}\right) = \left(\frac{(a+p)/2}{p}\right)$.

(c) Если a нечётно, то

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{ax}{p}\right]}.$$

(d)

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}},$$

если p и q — простые нечётные числа.

3. Про натуральные числа a, b, p, где p — простое, известно, что $a^2 + b^2 = p$. Докажите, что a — квадратичный вычет по модулю p, если
(a) a — нечетное простое;
(b) a — нечетное.

4. Найдите наименьший простой делитель числа $12^{2^{15}} + 1$.

5. Пусть $k = 2^{2^n} + 1$ для некоторого натурального n. Докажите, что k является простым тогда и только тогда, когда k — делитель числа $3^{\frac{k-1}{2}} + 1$.

6. Натуральные числа a, b, c взаимно просты в совокупности, и выполняется $a^2 - ab + b^2 = c^2$. Докажите, что все делители числа c имеют вид $6k + 1$.

7. Найдите все простые p такие, что $p! + p$ — точный квадрат.

8. Докажите, что любой нечётный делитель числа вида $5k^2 + 1$ имеет чётную цифру в разряде десятков.

Связность графов

xxx: В Кремле после выборов серьезные перестановки. Теперь кактус стоит справа от входа.

`https://bash.im/quote/415939`

Определение: Вершина v связного графа G называется *точкой сочленения*, если при удалении вершины v граф G теряет связность. Граф G называется *двусвязным*, если он связен и сохраняет связность при удалении любой вершины.

Определение: *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению двусвязный подграф графа G.

1. В графе G хотя бы три вершины. Докажите, что вершина v — точка сочленения тогда и только тогда, когда существует пара вершин u и w, для которых любой путь из u в w проходит через v.

2. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков B_1 и B_2 либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

Определение: Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — все блоки связного графа G, а $a_1, \ldots, a_m$ — все точки сочленения графа G. Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, \ldots, B_n, a_1, \ldots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i является одной из вершин блока B_j.

3. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причем все его висячие вершины соответствуют блокам.

Определение: граф называется кактусом, если любое его ребро лежит ровно в одном простом цикле.

4. **(a)** Докажите, что все блоки кактуса — простые циклы.
(b) Докажите, что если в связном графе без мостов все простые циклы нечётные — это кактус.

Теорема Менгера. Граф двусвязен тогда и только тогда, когда любые две вершины лежат на простом цикле. *Мы, как обычно, докажем нечто большее.*

5. Докажите равносильность следующих условий:

- граф двусвязен;
- любые две вершины принадлежат простому циклу;
- любая вершина и ребро принадлежат простому циклу.

6. Докажите равносильность следующих условий:

- граф двусвязен;
- любые два ребра принадлежат простому циклу;
- для любых двух вершин и ребра существует простая цепь с концами в этих вершинах, проходящая через это ребро.

7. Докажите равносильность следующих условий:

- граф двусвязен;
- для любых трех вершин существует цепь, соединяющая первые две из них и проходящая через третью;
- для любых трех вершин существует цепь, соединяющая первые две из них и не проходящая через третью.

8. В стране 100 городов, соединенных друг с другом дорогами так, что даже если любой город A закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города A). Докажите, что страну можно разбить на два суверенных государства, по 50 городов в каждом, так, что в обоих государствах из любого города можно проехать в любой другой.

Полярное соответствие

Как в одном человеке может поместиться столько грусти?

А. Полярный, “Сказка о самоубийстве”

Определение: Точки A и B называются сопряжёнными относительно окружности $\omega(O, R)$, если $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2$.

1. Докажите, что множеством всех точек, сопряжённых с данной точкой A относительно окружности ω, является прямая BB_0, перпендикулярная прямой OA. Эта прямая называется *полярой* точки A относительно данной окружности ω. Точка A по отношению к своей поляре называется полюсом этой поляры.

2. Докажите, что если точка B лежит на поляре a точки A, то точка A лежит на поляре b точки B.

3. Докажите, что если три точки лежат на одной прямой, то их поляры пересекаются в одной точке.

4. **(a)** Пусть точка A лежит вне окружности ω. Докажите, что её поляра — это прямая, соединяющая точки касания касательных к ω, проведённых из точки A.
(b) Пусть CD — диаметр окружности ω, перпендикулярный OA. Пусть $AC \cap \omega = P$, $PA \cap OA = B$. Докажите, что прямая, проходящая через B перпендикулярно OA, является полярой OA.
(c) $MKLN$ — вписанный четырёхугольник. A — точка пересечения прямых MN и KL. B — точка пересечения диагоналей MK и NL. Докажите, что A и B сопряжены относительно окружности ω.

5. Дана окружность и точка A, не лежащая внутри окружности. С помощью одной линейки постройте касательную к окружности в точке A.

6. Сформулируйте и докажите двойственную теорему к теореме Паскаля.

7. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Его вписанная окружность касается сторон AB и CD в точках M и N. Докажите, что прямые AC, BD и MN пересекаются в одной точке.

8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O. Прямые AB и CD пересекаются в точке E. Описанные окружности треугольников AOD и BOC пересекаются второй раз в точке K. Прямая EK пересекает окружность BOC второй раз в точке P. Докажите, что PC касается ω.

9. Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Прямая AB пересекается с CD в точке E, F — точка пересечения диагоналей. Описанные окружности треугольников AFD и BFC пересекаются в точке H. Докажите, что $\angle EHF = 90^\circ$.

Полнота $\mathbb{R}$

Аксиома непрерывности или аксиома полноты

У всякого ограниченного множества есть *точная верхняя грань.*

Определение. Число s называется *верхней гранью* множества A, если для любого $a \in A$ имеет место неравенство $a \leqslant s$.

Если, вдобавок, никакое число, меньшее s, не является верхней гранью, то число s называется *точной верхней гранью.*

Определение. Последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *фундаментальной* или *сходящейся в себе*, если $\forall\varepsilon \quad \exists N \quad \forall n_1, n_2 > N : |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon$.

1. Докажите, что любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

2. Докажите, что следующие утверждения равносильны аксиоме полноты:

(a) Любая ограниченная возрастающая последовательность имеет предел.

(b) Любая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.

(c) Любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Третья пятидневка

Лемма об уточнении показателя

Обозначение. Для натурального числа n и простого p будем обозначать через $\mathrm{ord}_p(n)$ степень, в которой p входит в n в разложении на простые множители. Это число называют степень вхождения простого p в число n.

Лемма об уточнении показателя (лемма Гензеля). Для простого p, целых a и b, не кратных p и натурального n выполнено равенство $\mathrm{ord}_p(a^n - b^n) = \mathrm{ord}_p(a-b) + \mathrm{ord}_p(n)$, если выполняется одно из условий:
1) $p \neq 2, \mathrm{ord}_p(a-b) > 0$;
2) $p = 2, \mathrm{ord}_p(a-b) > 1$.

1. **Доказательство леммы.**
(a) Докажите, что $\mathrm{ord}_p(a^p - b^p) > \mathrm{ord}_p(a-b)$;
(b) Докажите, что при s, не кратном p, выполняется $\mathrm{ord}_p(a^s - b^s) = \mathrm{ord}_p(a-b)$;
(c) Докажите, что $\mathrm{ord}_p(a^n - b^n) \geqslant \mathrm{ord}_p(a-b) + \mathrm{ord}_p(n)$;
(d) Докажите, что при $p > 2$ $\mathrm{ord}_p(a^p - b^p) = \mathrm{ord}_p(a-b) + 1$;
(e) Докажите ЛОУП для случая $p > 2$;
(f) Докажите ЛОУП для случая $p = 2$.

2. Докажите, что при чётных n, если $\mathrm{ord}_2(a-b) = 1$, то $\mathrm{ord}_2(a^n - b^n) > 1 + \mathrm{ord}_2(n)$

3. В какой степени 5 входит в разложение на простые множители числа
(a) $3^{10000} - 2^{10000}$; **(b)** $3^{10025} + 2^{10025}$?

4. Докажите, что 2 является первообразным корнем по модулю 3^k.

5. **Числа Новака.** Докажите, что таких натуральных N, что $2^N + 1$ кратно N, бесконечно много.

6. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

7. Найдите все четверки натуральных чисел $(n; k; p; x)$, для которых $x > 2$, $n > 1$, p простое и $x^n = p^k + 1$.

8. **(a)** Какое наибольшее число нулей может быть среди шести последних цифр числа 2^n для $n > 100$?
(b) Докажите, что для любого $k > 1$ найдётся такая степень двойки, что среди k последних её цифр не менее половины составляют девятки.

Пределы и предельный переход

$$\lim_{x\to 8}\frac{1}{x-8}=\infty \Rightarrow \lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}=\rotatebox{90}{5}.$$

Анекдот

1. Проверьте по определению предела последовательности, что число 5 не является пределом последовательности $a_n=\frac{s(n)}{k(n)}$, где $s(n)$ — сумма цифр числа n, а $k(n)$ — количество цифр в десятичной записи числа n.

2. Последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют пределы a и b, соответственно. Докажите, что

(a) если для некоторого c при всех n выполнено $a_n \geqslant c$, то $a \geqslant c$.

(b) если при всех n выполнено $a_n \geqslant b_n$, то $a \geqslant b$.

(c) Что можно сказать, если $a_n > b_n$?

3. **Теорема о двух милиционерах.** Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ таковы, что $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ для всех n. Также существует такое число l, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = l.$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ также существует и равен l.

4. Докажите, что любая ограниченная числовая последовательность $\{a_n\}$ имеет подпоследовательность номеров n_k, что последовательность $\{a_{n_k}\}$ — сходится.

5. Найдите предел последовательности $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$.

6. На экране калькулятора написано число $x>0$. Петя нажимает кнопки $\times$, 4, $\sqrt{\cdot}$, $\sqrt{\cdot}$ в таком порядке (после последнего $\sqrt{\cdot}$ он нажимает снова $\times$, и так далее). В какой-то момент число на экране перестало меняться после этой четвёрки нажатий (потому что экран конечен). К чему стремится это число при увеличении числа разрядов калькулятора?

7. **Метод Герона.** Приближенное извлечение квадратного корня из числа x осуществляется так: выбираем начальное приближение $a_1 \approx \sqrt{x}$ и строим последовательность $a_{n+1}=\frac{a_n+\frac{x}{a_n}}{2}$. Докажите, что при правильном выборе начального приближения (каком?) $a_n \to \sqrt{x}$.

8. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. Один называет два числа, являющихся концами отрезка. Следующий должен назвать два других числа, являющихся концами отрезка, вложенного в предыдущий. Игра продолжается бесконечно долго. Первый стремится, чтобы в пересечении всех названных отрезков было хотя бы одно рациональное число, а второй стремится ему помешать. Кто выигрывает?

Про непрерывные функции

Определение по Гейне. Функция f называется *непрерывной* в a, если она определена в a и для всякой последовательности x_n, сходящейся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(a)$.

Определение по Коши. Функция f называется *непрерывной* в a, если она определена в a и в некоторой её окрестности и

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x : (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Говорят, что f непрерывна на некотором множестве, если она непрерывна в каждой его точке.

1. Докажите, что определения по Коши и по Гейне равносильны.

2. Пусть $a > 1$.

(a) Докажите, что если $p < q$ — рациональные числа, то $a^p < a^q$.
(b) Докажите, что множество $\{a^r \mid r \in \mathbb{Q},\, r < p\}$ имеет точную верхнюю грань, а $\{a^r \mid r \in \mathbb{Q},\, r > p\}$ — точную нижнюю грань.
(c) Докажите, что эти две грани равны.
(d) Докажите, что для любой сходящейся последовательности $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ рациональных чисел последовательность $\{a^{d_n}\}$ имеет предел, равный этим граням.

Так определяется a^p для $p \in \mathbb{R}$. $(1/a)^p \overset{\text{def}}{=} 1/(a^p)$. $\sqrt[p]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{1/p}$.

Замечание. В этом определении неочевидно, почему $a^{b+c} = a^b a^c$, однако мы это обсудим на разборе, а пока этим можно пользоваться.

3. **(a)** Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

(функция Дирихле) разрывна (не непрерывна) во всех точках.

(b) Докажите, что функция

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \end{cases}$$

(функция Римана) разрывна во всех рациональных точках и непрерывна во всех иррациональных.

4. **(a)** Для натуральных a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt[a+b+c]{a^a \times b^b \times c^c} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

(b) Докажите это неравенство для любых рациональных положительных a, b и c.
(c) Докажите, это неравенство для любых положительных a, b, c.

5. Докажите, что для положительных чисел $a_1, \ldots, a_n, p_1, \ldots, p_n$ верно следующее:

$$\frac{p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + \ldots + p_n} \geqslant \sqrt[p_1+\ldots+p_n]{a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n}} \geqslant \frac{p_1 + \ldots + p_n}{\frac{p_1}{a_1} + \ldots + \frac{p_n}{a_n}}.$$

6. **Теорема Больцано-Коши.** $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Докажите, что $f(x)$ имеет корень на отрезке $[a, b]$.

7. Существует ли непрерывная функция, которая в рациональных точках принимает иррациональные значения, а в иррациональных — рациональные?

8. **Локальное неравенство.** При $p > q$ верно следующее:

$$\frac{a^p}{b^q} \geqslant \frac{pa^{p-q} - qb^{p-q}}{p-q}.$$

Когда достигается равенство?

Аффинные преобразования

– Что это тебя перекосило?
– Вспомнил, как ты готовишь!

Турецкий для начинающих

Аффинным преобразованием плоскости называется биекция плоскости на себя, переводящая прямые в прямые.

Точки A и B лежат на прямой l, а их образы при аффинном преобразовании F, точки A' и B' — на прямой l'. Введем на прямых l и l' системы координат так, что точкам A и A' соответствует координата 0, а точкам B и B' — координата 1. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие числу a координату образа точки с координатой a. Оказывается, что

$f(a + b) = f(a) + f(b)$;
$f(ab) = f(a)f(b)$;
функция f монотонна.

(Теорема Дарбу.) Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой. Докажите, что $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{F(A)F(B)}}{\overline{F(B)F(C)}}$.

1. Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношение площадей треугольников.

2. Докажите, что аффинное преобразование сохраняет вектор, то есть: если $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $\overline{F(A)F(B)} = \overline{F(C)F(D)}$.

3. **(a)** Докажите, что аффинное преобразование переводит центр масс в центр масс.
(b) Докажите, что биекция плоскости, переходящая центр масс в центр масс есть аффинное преобразование.

Определение. *Растяжением* плоскости относительно оси ℓ с коэффициентом k называется преобразование плоскости, при котором каждая точка M переходит в такую точку M', что $\overline{OM'} = k\overline{OM}$, где O — проекция точки M на прямую ℓ (растяжение с коэффициентом меньше единицы называется *сжатием*).

4. Докажите, что существует **(a)** не более одного **(b)** не менее одного аффинного преобразования, переводящего треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$.

5. Докажите, что с помощью одной линейки нельзя построить равносторонний треугольник.

Теорема Турана

Определение. *кликой* назовём полный граф. Клику на n вершинах обозначим K_n.

1. Докажите, что в графе на n вершинах, не содержащем K_3 не может быть больше, чем $\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$ рёбер.

Определение. *клонированием* вершины v в графе G назовём добавление в граф новой вершины v'. При этом вершина v' будет соединена с теми и только с теми вершинами, с которыми соединена вершина v.

2. **(a)** Докажите, что в графе без K_n при клонировании любой вершины не появится подграфа K_n.
(b) Пусть граф G не содержит K_n и имеет наибольшее количество рёбер среди всех графов с m вершинами, не содержащих K_n. Докажите, что степени любых двух вершин, не соединённых ребром, равны.
(c) Докажите, что в графе из предыдущего пункта степени двух любых соединённых ребром вершин отличаются не более, чем на 1.
(d) Найдите пример графа на m вершинах, не содержащего K_n, у которого наибольшее число рёбер.

3. За круглым столом сидят n человек. Разрешается любых двух людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?

4. В графе $2n$ вершин и среди любых четырёх вершин не более четырёх рёбер. Какое наибольшее количество рёбер может быть в этом графе?

5. В графе на $2n$ вершинах n^2+1 ребро. Докажите, что в этом графе есть хотя бы n треугольников.

6. В стране 210 городов и совсем нет дорог. Король хочет построить несколько дорог с односторонним движением так, чтобы для любых трех городов A, B, C, между которыми есть дороги, ведущие из A в B и из B в C, не было бы дороги, ведущей из A в C. Какое наибольшее число дорог он сможет построить?

Четвёртая пятидневка

Что я знаю о блинах

Где блины, там и мы.

Поговорка

Замечание: Вообще, блином можно назвать любую связную, ограниченную и замкнутую фигуру, что бы эти слова ни значили, но при решении для определённости можно считать, что блином является выпуклый многоугольник.

1. Докажите, что непрерывная функция на окружности принимает одинаковые значения в некоторой паре диаметрально противоположных точек.

2. На столе лежит первый блин. Гриша хочет разрезать его на два куска одинаковой площади одним прямолинейным разрезом, проходящим параллельно прямой, которую на предыдущем матбою нарисовал какой-то шестиклассник. Докажите, что Гриша может это сделать.

3. На столе лежит второй блин. Гриша хочет сделать один прямолинейный разрез таким образом, чтобы он проходил через указанную Артёмом точку. Докажите, что Гриша может сделать это, если **(a)** точка находится вне блина; **(b)** точка находится внутри блина.

4. На столе лежит третий блин. Гриша хочет одним прямолинейным разрезом разрезать его на две части, равные как по площади, так и по периметру. Всегда ли Гриша может это сделать?

5. Четвёртый и пятый блин также расположились на плоскости. Докажите, что можно провести прямолинейный разрез таким образом, чтобы разрезать на фигуры равной площади оба этих блина одновременно.

Целые гауссовы числа

Зачем складывать простые числа? Простые числа созданы для того, чтобы их умножать, а не складывать!

Л. Ландау

Определение. Комплексное число $a+bi$ называют *целым гауссовым*, если a и b — целые числа.

Определение. Целое гауссово число u *кратно* целому гауссову числу v, если существует такое целое гауссово число w, что $u = vw$.

Определение. Целое гауссово число p называют *простым*, если оно имеет ровно 8 делителей: $p, -p, ip, -ip, 1, -1, i, -i$.

Определение. *Нормой* ц.г. числа $a+bi$ называют неотрицательное целое число $N(a+bi) = |a+bi|^2 = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$.

Определение. Число r называется *остатком* при делении ц.г. числа a на число b, если существует такое k, что $a = kb + r$ и $N(r) < N(b)$.

Определение. Множители *ассоциированы*, если отличаются домножением на делитель единицы $(1, -1, i, -i)$.

1. Докажите, что числа 2 и 5 не являются простыми целыми гауссовыми числами.

2. Докажите, что если a и b взаимно просты, то наименьшее натуральное число, которое делится на $(a+bi)$, равно a^2+b^2.

3. **(Основная теорема арифметики для целых гауссовых чисел)** Докажите, что любое целое гауссово число разлагается в произведение простых ц.г., причём такое разложение единственно с точностью до порядка и ассоциированности множителей.
(a) Допустим, $z = p_1 \dots p_r = q_1 \dots q_s$. Пусть $P = p_2 \dots p_r$, $Q = q_2 \dots q_s$, $|p_1| \leqslant |q_1|$. Докажите, что можно выбрать такой делитель ε единицы, что число $w = \varepsilon z - p_1 Q$ по модулю меньше $|z|$.
(b) Разложите w двумя способами в произведение простых и докажите утверждение.

4. Никакое простое число не может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел существенно разными (т. е. не получающимися один из другого перестановкой слагаемых) способами.

5. **(a)** Докажите, что простое число p либо является простым гауссовым числом, либо представляется в виде $z\overline{z}$, где $z = a + bi$.
(b) Докажите, что простое число число вида $4k+3$ является простым гауссовым.
(c) Докажите, что для простого $p = 4k+1$ существует m, что m^2+1 делится на p.
(d) Докажите, что p из предыдущего пункта представляется в виде произведения двух сопряженных простых ц.г.

Итог. Все простые числа вида $4k+1$ и 2 раскладываются в сумму двух квадратов, а простые числа вида $4k+3$ — нет.

6. **(Рождественская теорема Ферма)** Выведите, какие натуральные числа представляются в виде суммы двух квадратов.

7. Докажите, что все пифагоровы тройки, взаимнопростые в совокупности, имеют вид $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$

8. Найдите все решения уравнения $a^2+b^2 = n!$ для натуральных a, b и n при $n < 14$.

9. Найдите все решения уравнения $a^b = n^2 + 1$.

Неравенства

Всякая задача, что я решал, становилась правилом, которое затем помогало решать другие задачи.

Р. Декарт

Напоминание. Обычное неравенство о средних:

$$\frac{a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1^1 a_2^1 \cdots a_n^1}.$$

Взвешенное неравенство о средних:

$$\frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \ldots + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \geqslant \sqrt[p_1+p_2+\ldots+p_n]{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}}.$$

1. **Неравенство Юнга.** Для положительных a, b, p, q и $1/p + 1/q = 1$ выполнено

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab.$$

2. **Неравенство Бернулли.**

(a) Если $x > -1$, $p > 1$, то

$$(1+x)^p \geqslant 1 + px.$$

(b) Если $x > -1$, $0 < p < 1$, то

$$(1+x)^p \leqslant 1 + px.$$

Указание. Попробуйте воспользоваться первой задачей.

Определение. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* (или *выпуклой вниз*), если для любых $x, y \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ верно

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geqslant f(tx + (1-t)y).$$

Если знак всегда в другую сторону, то функция называется *вогнутой* или *выпуклой вверх*.

3. **(a)** Докажите, что если

$$\forall x, y \quad \frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

то

$$\forall x, y \quad \frac{3f(x)+f(y)}{4} \geqslant f\left(\frac{3x+y}{4}\right).$$

(b) Докажите, что в предыдущей задаче также верно

$$\forall x, y \quad \frac{af(x)+bf(y)}{a+b} \geqslant f\left(\frac{ax+by}{a+b}\right)$$

для любых неотрицательных целых a и b таких, что $a+b$ есть степень двойки.

(c) Докажите, что если функция f ещё и непрерывна, то она выпукла.

4. **Неравенство Йенсена.** Если f выпукла, то для любых вещественных $x_1, \ldots, x_n$ и положительных $p_1, \ldots, p_n$ выполнено

$$\frac{p_1 f(x_1)+\ldots+p_n f(x_n)}{p_1+\ldots+p_n} \geqslant f\left(\frac{p_1 x_1+\ldots+p_n x_n}{p_1+\ldots+p_n}\right).$$

В частности, верно

$$\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} \geqslant f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right).$$

5. Докажите, что следующие функции выпуклы:

(a) x^2; **(b)** a^x при фиксированном $a>1$; **(c)** $1/x$; **(d)** x^p при фиксированном $p>1$ на луче $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

---

6. Среднее гармоническое положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ равно 1. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \ldots + \frac{x_n^n}{n}.$$

7. **(a)** Сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна $p \geqslant 1$. Докажите неравенство

$$\sqrt[p]{a_1+1} + \ldots + \sqrt[p]{a_n+1} \leqslant n+1.$$

(b) При $p < 1$ докажите неравенство с противоположным знаком.

8. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа с суммой s. Докажите, что

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Долгожданный разнобой

1. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.

2. Все углы треугольника ABC меньше 120° и $AB \neq AC$. Рассмотрим точку T внутри треугольника, для которой $\angle BTC = \angle CTA = \angle ATB = 120^\circ$. Пусть прямая BT пересекает сторону AC в точке E, а прямая CT пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что EF и BC пересекаются в некоторой точке M, причём $MB : MC = TB : TC$.

3. Решите в натуральных числах уравнение: $z^x + 1 = (z+1)^y$

4. Неориентированный граф G имеет нечетный цикл. Его ребра ориентировали так, что после этого из любой вершины можно попасть в любую другую, двигаясь по ребрам в соответствии с их ориентацией. Докажите, что в полученном графе есть простой ориентированный цикл нечетной длины.

5. Дан треугольник ABC с высотами BB' и CC'. Прямые BC и $B'C'$ пересекают биссектрису угла A в точках J и J' соответственно. Докажите, что центр окружности, которая касается BC в точке J и $B'C'$ в точке J', лежит на медиане из A.

6. Дано множество из n элементов. Егор и Миша играют в игру. Сначала Егор выбирает подмножество A, а затем Миша выбирает подмножество B, не совпадающее с подмножеством A. Затем на доску выписывается количество элементов в множестве $A \cap B$, и начинается новый ход. В конце игры все возможные сочетания подмножеств встретились ровно по одному разу. Чему равна сумма всех чисел, выписанных на доску в этот момент?

Геометрический разнобой

1. В неравнобедренном треугольнике ABC касательные к описанной окружности в точках A и B пересекаются в точке C_1. Аналогично определяются точки A_1 и B_1.

(a) Докажите, что AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
(b) Докажите, что точка, полученная в предыдущем пункте, является точкой Лемуана треугольника ABC.
(c) Обозначим через A' точку пересечения касательной к описанной окружности треугольника в точке A со стороной BC. Аналогично определяются точки B' и C'. Докажите, что A', B' и C' лежат на одной прямой.
(d) Точка A^* — точка пересечения стороны BC и касательной к описанной окружности, проведённой в точке, диаметрально противоположной точке A. Аналогично определяются точки B^* и C^*. Докажите, что точки A^*, B^* и C^* лежат на одной прямой.

2. На сторонах треугольника ABC построили вовне равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и ACB_1. Докажите, что AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

3. Через каждую вершину треугольника ABC проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Докажите, что три прямые, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими шестью прямыми, пересекаются в одной точке.

4. I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая, проходящая через I перпендикулярно AI, пересекает BC в точке A_1; аналогично определяется точка C_1. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $KI \perp AC$.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая диагональ AC в точке P, а через точку C — прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке Q. Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции.

6. В треугольнике ABC, все углы которого меньше 120°, отмечена точка Торричелли T.
(a) Докажите, что прямая Эйлера треугольника ATB параллельна прямой CT.
(b) Прямые Эйлера треугольников ATC, BTC, ATB и ABC конкурентны.

7. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса внешнего угла A пересекла прямую BC в точке A_0, а биссектриса внешнего угла B пересекла прямую AC в точке B_0. Докажите, что прямая A_0B_0 перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружности треугольника ABC.

Игрушки!

Человек бывает вполне человеком лишь тогда, когда играет.

Фридрих Шиллер

1. Поля на ленте пронумерованы $1, 2, 3, \ldots$. В поле с номером 2 находится фишка. Двое играют в игру. За ход фишку можно подвинуть вправо хотя бы на одно поле, но не более, чем на 2018 полей. Проигрывает тот, кто поставит фишку на клетку с составным номером. Кто выиграет при правильной игре?

2. Фома и Ерёма делят кучку из 25 монет в 1, 2, 3, ..., 25 алтынов. На каждом ходу один из них выбирает монету из кучки, а другой говорит, кому её отдать. Первый раз выбирает Фома, далее тот, у кого сейчас больше алтынов, при равенстве — тот же, кто в прошлый раз. Может ли Фома действовать так, чтобы в итоге обязательно получить больше алтынов, чем Ерёма, или Ерёма всегда сможет Фоме помешать?

3. На столе лежат 2002 карточки с числами 1, 2, 3,..., 2002. Двое играющих берут по одной карточке по очереди. После того, как будут взяты все карточки, выигравшим считается тот, у кого больше последняя цифра суммы чисел на взятых карточках. Выясните, кто из играющих может всегда выигрывать независимо от игры противника, и объясните, как он должен при этом играть.

4. На столе лежит 200 карточек с цифрами от 1 до 9. Двое берут по очереди по одной карточке. Выигрывает тот, у кого первым либо сумма *всех* взятых карточек, либо произведение *всех разных* взятых карточек будет больше 99. Докажите, что первый всегда может выиграть.

5. На столе лежит куча из более, чем n^2 камней. Петя и Вася по очереди берут камни из кучи, первым берёт Петя. За один ход можно брать любое простое число камней, меньшее n, либо любое кратное n число камней, либо один камень. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

6. В игре “Десант” две армии захватывают страну. Они ходят по очереди, каждым ходом занимая один из свободных городов. Первый свой город армия захватывает с воздуха, а каждым следующим ходом она может захватить любой город, соединённый дорогой с каким-нибудь уже занятым этой армией городом. Если таких городов нет, армия прекращает боевые действия (при этом, возможно, другая армия свои действия продолжает). Найдётся ли такая схема городов и дорог, что армия, ходящая второй, сможет захватить более половины всех городов, как бы ни действовала первая армия? (Число городов конечно, каждая дорога соединяет ровно два города.)

Первообразные корни

Учёность — это сладкий плод горького корня.

Исократ

В следующих задачах p — простое нечетное число.

Напоминание. *Первообразным корнем* по модулю n называется такое число a, что показатель числа a по модулю n равен $\varphi(n)$.

Напоминание. Для простого p существуют первообразные корни, ровно $\varphi(p-1)$ штук.

Цель. Доказать, что первообразный корень существует только по модулям $1, 2, 4, p^k, 2p^k$.

1. Доказать, что для всех остальных чисел первообразных корней не существует.

2. Доказать, что если g является первообразным корнем по нечетному модулю m, то одно из чисел g и $g + m$ является первообразным корнем по модулю $2m$.

3. **(a)** Пусть g — первообразный корень по модулю p. Докажите, что существует такое число t, что $(g + pt)^{p-1} - 1$ не кратно p^2.
(b) Доказать, что для g и t из предыдущего пункта $(g+pt)$ является первообразным корнем по модулю p^2.
(c) Пусть ξ — первообразный корень по модулю p^2. Тогда ξ является первообразным корнем по модулю p^k для любого $k > 2$.

4. Найдите количество первообразных корней по модулю p^k.

5. **(a)** Доказать, что существует n, что $8^n + 2018$ делится на 5^{2018}.
(b) На доске выписано число из n цифр. Докажите, что всегда можно написать n цифр справа и сколько угодно цифр слева так, чтобы получилась степень двойки.

6. **(a)** Докажите, что если a первообразный по модулю n, то a^{-1} тоже первообразный.
(b) Докажите, что существует первообразный корень ξ по модулю p^2 такой, что $0 < \xi < p$.

Список вопросов к зачёту

Графы

1. Ориентированные графы. Сильная связность ориентированных графов. Ацикличность графа компонент.

2. Минимальные сильно связные ориентированные графы. Аналог дерева для связных графов.

3. Турниры. Теорема Муна. Удаление вершин в сильно связном турнире без потери сильной связности.

4. Двусвязные графы. Дерево блоков и точек сочленения.

5. Кактусы, равносильность определений.

6. Теорема Менгера. Равносильные определения двусвязного графа (не менее пяти)

7. Теорема Турана.

Алгебра и математический анализ

8. Предел последовательностей. Арифметические свойства сходящихся последовательностей.

9. Фундаментальные последовательности. Арифметические свойства фундаментальных последовательностей. Фундаментальность сходящихся последовательностей.

10. Предельный переход в неравенствах. Лемма о двух милиционерах. Существование сходящейся подпоследовательности в ограниченной последовательности.

11. Полнота вещественных чисел. Равносильность следующих утверждений:

- у всякого ограниченного множества есть точная верхняя грань;
- всякая ограниченная возрастающая последовательность имеет предел;
- всякая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.

12. Полнота вещественных чисел. Равносильность следующих утверждений:

- у всякого ограниченного множества есть точная верхняя грань;
- всякая фундаментальная последовательность сходится.

13. Непрерывность функции в точке. Равносильность определений по Коши и Гейне, теорема Больцано-Коши

14. Показательная функция. Непрерывность показательной функции.

15. Порядок роста. Сравнение роста степенной и показательной функции, критерий эквивалентности многочленов.

16. Весовое неравенство о средних

17. Неравенство Юнга. Неравенство Бернулли.

18. Неравенство Йенсена

19. Основная теорема о симметрических многочленах.

20. Формула Ньютона.

Теория чисел

21. Критерий того, что 2 является квадратичным вычетом по модулю p.

22. Квадратичный закон взаимности.

23. Лемма об уточнении показателя (со случаем $p = 2$).

24. Числа Новака. Повышение показателя простого числа в числе Новака.

25. Первообразный корень. Случай существования.

26. Первообразный корень. Случай несуществования.

27. Целые гауссовы числа. Норма, деление с остатком, ассоциированные элементы, алгоритм Евклида.

28. Целые гауссовы числа. Основная теорема арифметики для целых гауссовых чисел.

29. Рождественская теорема Ферма. Критерий представимости числа в виде суммы двух квадратов.

30. Общий вид пифагоровых троек. Доказательство через гауссовы числа.

Геометрия

31. Теорема Паскаля. Доказательство с помощью радикальных осей. Вырожденный случай при $A = B$, $D = E$.

32. Изогональное сопряжение. Существование изогонально сопряжённой точки, отсутствие изогонально сопряжённой точки для точек описанной окружности.

33. Построение изогонально сопряжённой точки с помощью педального треугольника.

34. Симедианы в треугольнике. Отношение, в котором симедиана треугольника делит противоположную сторону. Точка Лемуана. Построение через касательные к описанной окружности.

35. Точка Торричелли. Построение с помощью равносторонних треугольников, изогональное сопряжение с точкой Аполлония.

36. Полярное соответствие. Определение сопряжённых точек, основные свойства полярного соответствия. Построение поляры с помощью циркуля и линейки.

37. Аффинные преобразования. Теорема Дарбу.

38. Аффинные преобразования. Корректность отображения вектора при аффинном преобразовании. Сохранение отношения площадей.

39. Аффинные преобразования. Эквивалентность определений (прямые в прямые, базис в базис, центр масс в центр масс).

Программа профи

Первая пятидневка

Многомерное пространство

Стартовые задачи.

1. В клетках бесконечной клетчатой плоскости расставлены числа так, что число в каждой клетке равно среднему арифметическому соседей.
(a) Верно ли, что все числа равны?
(b) Пьер-Симон знал все числа в клетках, у которых обе координаты чётные, а потом забыл число в клетке $(0,0)$. Сможет ли он его восстановить?

2. Есть n пронумерованных лампочек и k пронумерованных выключателей. Можно соединить каждый выключатель с несколькими лампочками. У каждого выключателя есть два состояния: нажат/не нажат, у каждой лампочки есть два состояния: горит/не горит. При нажатии на выключатель он меняет своё состояние, а ещё меняются состояния у всех лампочек, соединённых с ним. Сколькими способами можно соединить выключатели с лампочками так, чтобы нажимая на выключатели можно было получить все конфигурации лампочек?

Основной разговор.

В обозримом мире нам кажется, что мы понимаем что-то про двухмерное пространство (плоскость) и трёхмерное. После введения декартовой системы координат кажется естественным думать и о пространствах большей размерности, как о *множестве строк из n координат.* Будем обозначать такое пространство $\mathbb{R}^n$.
Расстояние между двумя точками $X = (x_1, x_2 \dots x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ определим

$$\rho(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Скалярное произведение векторов $\overline{u} = (u_1, u_2, \dots u_n)$ и $\overline{v} = (v_1, v_2, \dots v_n)$ определим

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots u_n v_n.$$

3. Докажите неравенство треугольника в $\mathbb{R}^n$

Упр. Как определять углы в $\mathbb{R}^n$?

4. В n-мерном пространстве выбраны k точек, попарные расстояния между которыми равны 1. Докажите, что *центр масс* этих точек равноудалён от них.

Векторное пространство.

Определение. Пусть даны: 1) Множество V элементов произвольной природы, называемых *векторами*;
2) Поле F, называемое в дальнейшем *полем скаляров*;
3) Операция сложения на множестве V, сопоставляющая паре элементов $u, v \in V$ элемент $u + v \in V$;
4) Операция умножения элемента множества V на скаляр, сопоставляющая паре элементов (λ, v), где $\lambda \in F$, $v \in V$ элемент $\lambda v \in V$.

При этом выполнены следующие свойства *(аксиомы векторного пространства)*:

- $x + y = y + x$ для любых $x, y \in V$;
- $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- существует такой элемент $0 \in V$, что $x + 0 = x$ для любого $x \in V$;
- для любого $x \in V$ существует $y \in V$ такой, что $x + y = 0$;
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для любых $\alpha, \beta \in F$ и $x \in V$;
- $1 \cdot x = x$ для единицы из поля F и любого $x \in V$;
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для любых $\alpha, \beta \in F$, $x \in V$;
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любых $\alpha \in F$, $x, y \in V$.

Тогда множество V называется *линейным пространством* или *векторным пространством* над полем F.

Примеры, говорящие о том, что ничего нового не произошло.

Упр. В рассмотренных ниже примерах укажите, как определить операции сложения и умножения на скаляр, чтобы получилось векторное пространство:
(a) V — множество комплексных чисел, F — поле действительных чисел;
(b) V — множество комплексных чисел, F — поле комплексных чисел;
(c) V — множество строк действительных чисел длины 3, F — поле действительных чисел;
(d) V — множество строк действительных чисел длины 4, сумма чисел в которых равна 0, F — поле действительных чисел;
(e) V — множество последовательностей действительных чисел $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ для всех $n \geqslant 4$, F — действительные числа.
(f) V — множество достижимых конфигураций лампочек из задачи 2, F — поле из двух элементов;
(g) V — множество бесконечных последовательностей элементов поля F_0, F — поле F_0;
(h) V — множество таких расстановок действительных чисел в клетки плоскости, что каждое число равно среднему арифметическому соседей; F — поле действительных чисел.

Упр. Какие из примеров упражнения “одинаковые”?

Линейные отображения.

Даны два линейных пространства U и V над полем F. Отображение $f\colon U \longrightarrow V$ назовём *линейным*, если для любых $u_1, u_2 \in U$, $\alpha, \beta \in F$ выполнено равенство $f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2)$.

Линейное отображение из пространства V в себя будем называть *оператором.*

Если линейное отображение является биекцией, то его ещё называют *изоморфизмом*, а сами пространства *изоморфными.*

Вопрос: где мы в прошлом году сталкивались с изоморфизмом двумерного пространства в себя?

5. Докажите, что обратное отображение к изоморфизму тоже является изоморфизмом.

6. V — линейное пространство над полем F. Докажите, что множество операторов на пространстве V (обозн. $GL(V)$) тоже является линейным пространством над полем F.

7. Можно ли ввести на множестве операторов операцию "умножения"? То есть отображение, сопоставляющее паре $A, B \in GL(V)$ оператор $A \cdot B$ так, что:

- $(AB)C = A(BC)$;
- $A(B + C) = AB + AC$;
- $(B + C)A = BA + CA$

(тождество $AB = BA$ не подразумевается).

По-умному решаем задачу про клетки.

Обозначим H линейное пространство из упражнения **(a)** . Рассмотрим оператор $L\colon H \longrightarrow H$, сдвигающий расстановку на одну клетку влево, оператор U, сдвигающий расстановку на одну клетку вверх, оператор E — тождественное отображение и оператор 0 — нулевое отображение.

8. **(a)** Что такое L^2U^2 и U^2L^2?
(b) Докажите, что $L + U + L^{-1} + U^{-1} - 4E = 0$.
(c) Напишите выражение, содержащее L и H только в чётных степенях, равное нулевому оператору.
(d) Напишите короткую формулу, как Пьеру-Симону найти число в клетке $(0; 0)$.

Порядок роста

Дети любят решать задачи, которые им не по плечу. Для них это единственная возможность расти.

Джанни Родари

Будем считать, что имеем дело с бесконечными вправо последовательностями, состоящими из положительных вещественных чисел. Будем говорить, что последовательность $\{a_i\}$ *намного меньше*, чем $\{b_i\}$, и обозначать это $\{a_i\} \ll \{b_i\}$, если для любого положительного C существует такой индекс $n(C)$, что при $i > n(C)$ выполнено $Ca_i < b_i$. Аналогично определяется *намного больше*.

Будем говорить, что последовательности *эквивалентны*, если существует число C такое, что для всех i выполняется $\frac{1}{C} < \frac{a_i}{b_i} < C$. Будем это обозначать как $\{a_i\} \sim \{b_i\}$.

1. **(a)** Пусть есть две последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Обязательно ли выполняется что-нибудь из $\{a_i\} \ll \{b_i\}$, $\{a_i\} \sim \{b_i\}$, $\{a_i\} \gg \{b_i\}$?
(b) Можно ли выбрать счётное число последовательностей так, что любая другая последовательность намного меньше какой-нибудь из выбранных?

2. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$. Когда последовательности $P(n)$ и $Q(n)$ эквивалентны?

3. **(a)** Докажите, что $n^2 \ll 2^n$;
(b) Докажите, что $n^{1000} \ll 1,001^n$.

В задачах 4-6 сравните следующие последовательности (принимаются любые частичные результаты).

4.
1. $a_n = n^n$
2. $b_n = (n-1)^n$
3. $c_n = n^{n-1}$
4. $d_n = 1^1 + 2^2 + \ldots + n^n$

5.
1. $a_n = n^n$
2. $e_n = n!$
3. $i_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$
4. $g_n = [1.5n]!$

6.
1. $g_n = [1.5n]!$
2. $h_n = (1.01)^{n^2}$
3. $i_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$
4. $j_n = C_{n^2}^{n}$

Булев куб

Галина Бланка, буль-буль, буль-буль!

Реклама булевых кубиков “Галина Бланка”

1. Сколько у n-мерного булева куба
(a) рёбер;
(b) циклов длины 4.

2. При каких n весь n-мерный куб $2 \times 2 \times \ldots \times 2$ без двух противоположных клеток можно разбить на доминошки $2 \times 1 \times 1 \times 1 \ldots \times 1$? Доминошки можно вращать любым из n способов.

3. Пусть S — 2018-элементное множество, n — целое число, и $0 \leqslant n \leqslant 2^{2018}$. Докажите, что все подмножества S можно раскрасить в черный и белый цвета с соблюдением следующих условий:

- объединение любых двух белых подмножеств — белое;
- объединение любых двух черных подмножеств — черное;
- белых подмножеств ровно n.

4. Пусть $X_1, X_2, \ldots X_n$ — различные подмножества n-элементного множества R. Докажите, что существует такой $x \in R$, что множества $X_1 \cup \{x\}, X_2 \cup \{x\}, \ldots, X_n \cup \{x\}$ попарно различны.

5. **Теорема Шпернера.** В множестве из n элементов отметили несколько подмножеств так, что никакое отмеченное подмножество не содержится ни в одном другом отмеченном.

(a) Докажите, что можно отметить $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ подмножеств;

(b) Докажите по индукции, что можно разделить все элементы на цепочки, симметричные относительно центрального слоя;

(c) Докажите, что можно разделить все элементы на $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ цепочек, используя лемму Холла.

6. Пусть задано некоторое дерево T на $n+1$ вершине. Докажите, что рёбра n-мерного булева куба можно разбить на несколько непересекающихся частей так, что каждая часть будет изоморфна T.

7. Все 512 подмножеств 9-ти элементного множества разбили на пары. Докажите, что эти 512 подмножеств можно расставить по кругу так, чтобы два подмножества из каждой пары стояли рядом и чтобы любые два стоящие рядом подмножества, не принадлежащие одной паре, имели бы симметрическую разность мощности 1.

Многочлены от нескольких переменных

Обсуждаем: Одночлен от данного набора переменных, степень одночлена, многочлен, как сумма одночленов, однородный многочлен, однородная компонента многочлена, степень многочлена, коэффициенты.

1. **(a)** Пусть f и g — два многочлена от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $fg = 0$. Докажите, что тогда либо $f = 0$, либо $g = 0$.

(b) Докажите, что степень произведения двух многочленов равна сумме их степеней.

2. **(a)** Многочлен $f(x_1, x_2)$ обращается в нуль при любых целых значениях x_1 и x_2. Докажите, что $f = 0$.

(b) Докажите тот же результат для многочлена от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

3. Существуют ли многочлены от трёх переменных $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, для которых выполнено тождество

$$(x-y+1)^3P + (y-z-1)^3Q + (z-2x+1)^3R = 1?$$

4. Для каждого из нижеперечисленных подмножеств A точек на координатной плоскости установите, найдется ли многочлен $P(x,y)$, для которого A есть в точности множество точек, в которых он обращается в нуль?

(a) A — конечное множество.

(b) A — объединение конечного числа прямых.

(c) A — луч.

(d) $A = \{(x,y) \mid x, y > 0; xy = 1\}$.

(e) $A = \left\{ \left(\frac{1}{n^3}, 1 - \sqrt{\frac{1}{n}} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

(f) $A = \{(x,y) \mid y = 2^x\}$.

Симметрические многочлены.

Определение. Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **симметрическим**, если $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для любой перестановки $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Например, многочлен $x^4y + y^4x + x^4z + z^4x + y^4z + z^4y$ является симметрическим, а многочлены $x^2y + y^2z + z^2x$ и $x^2 + y^3 + z^2$ — нет.

Элементарным симметрическим многочленом степени k от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется многочлен

$$e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}.$$

В частности, $e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ и $e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$. Мы также считаем, что $e_0 = 1$.

Для краткости будем обозначать любой многочлен $P(x_1, \ldots x_n)$ просто $P(\overline{x})$.

Основная теорема о симметрических многочленах

Многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами является симметрическим тогда и только тогда, когда найдется такой многочлен $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с целыми коэффициентами, что

$$P(\overline{x}) = Q(e_1(\overline{x}), e_2(\overline{x}), \ldots, e_n(\overline{x})).$$

Определение. Для строчек $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где a_i и b_i - неотрицательные целые числа, будем говорить, что α больше β в **лексикографическом порядке** и писать $\alpha \succ \beta$, если $\alpha \neq \beta$ и $a_i > b_i$ для наименьшего i, такого что $a_i \neq b_i$.

Упр. **(a)** Покажите, что для $\alpha \neq \beta$ выполнено ровно одно из условий $\alpha \succ \beta$ и $\beta \succ \alpha$.
(b) Покажите, что $\alpha \succ \beta$ и $\beta \succ \gamma \Rightarrow \alpha \succ \gamma$.
(c) Покажите, что $\alpha \succ \beta$ и $\alpha' \succ \beta' \Rightarrow \alpha + \alpha' \succ \beta + \beta'$ (сложение α и β производится покомпонентно).

5. Докажите, что не существует такой бесконечной последовательности $\{\alpha_n\}$, что $\alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \ldots \alpha_n \succ \ldots$.

Определение. Для многочлена $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **старшей степенью** называется наибольшая в лексикографическом порядке такая строчка $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, что одночлен $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$ входит в P с ненулевым коэффициентом.

6. **(a)** Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Покажите, что эта строчка является старшей степенью многочлена

$$e_1(\overline{x})^{\alpha_1 - \alpha_2} e_2(\overline{x})^{\alpha_2 - \alpha_3} \ldots e_{n-1}(\overline{x})^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} e_n(\overline{x})^{\alpha_n}.$$

(b) Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

7. Докажите, что значение любого симметрического многочлена от корней унитарного многочлена с целыми коэффициентами является целым числом.

8. Докажите, что многочлен Q из формулировки теоремы единственный.

9. Сумма десяти чисел равна 0. Во сколько раз сумма их кубов больше значения e_3 от них?

10. **(a)** Пусть $P(x_1, \ldots x_{10}) = \prod\limits_{i<j\leqslant 10} (x_i - x_j)^2$. Найдите сумму коэффициентов соответствующего многочлена Q.

(b) Тот же вопрос для $P(x_1, \ldots x_{10}) = \sum\limits_{i=1}^{10} x_i^{2018}$.

11. Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n$ — взамно простые в совокупности натуральные числа, а $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$. Докажите, что $[1, 2, 3, \ldots n]$ делится на $(s_1, s_2, \ldots s_n)$.

Разнобой

1. Докажите, что вершины планарного графа можно так раскрасить в 3 цвета, что в нём не будет одноцветных циклов.

2. Натуральные числа b и c таковы, что $(c+1) \vdots b$. Всегда ли найдутся такие натуральные числа x, y, z, что $x + y = bz$, $xy = cz$?

3. Найдите наименьшее такое n, что среди любых n точек с целыми координатами на плоскости, найдутся две точки, квадрат расстояния между которыми делится на 2016.

4. Можно ли разбить пространство на прямые, никакие две из которых не параллельны?

5. Существует ли такой многочлен $P(x, y)$, что при подстановке всех пар натуральных x и y будут получаться натуральные значения, причём каждое натуральное значение получится ровно один раз?

6. Дано натуральное число k. Для каждого натурального n обозначим $f(n)$ наименьшее значение выражения $\left|\pm 1^k \pm 2^k \pm \ldots \pm n^k\right|$ по всем расстановкам знаков. Докажите, что функция $f(n)$ периодична, начиная с некоторого места.

7. Назовём *шаблоном* таблицу 100×100, в клетках которой расставлены числа от 1 до 100. Докажите, что существует такая прямоугольная таблица, что для любого шаблона и любых 100 строк существуют 100 столбцов такие, что таблица на их пересечении совпадает с выбранным шаблоном, а кроме того для любых 100 столбцов существуют 100 строк такие, что таблица на их пересечении совпадает с выбранным шаблоном.

8. На полуокружности с диаметром AB выбраны точки C и D. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Лучи AB и DC пересекаются в точке F. Докажите, что точки пересечения отрезков AD и BC с прямой OF и середины этих отрезков лежат на одной окружности.

Пределы

$$\forall a \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N : |a_n - a| > \varepsilon.$$

Беспредел.

Определение. Для последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ скажем, что число a является её пределом, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что для любого $i > N$ выполнено $|a_i - a| < \varepsilon$.

Основные свойства.

1. Докажите, что у последовательности не может быть больше одного предела.

2. Что можно сказать про предел последовательности, все члены которой положительны?

3. Докажите, что сумма двух сходящихся последовательностей сходится и её предел равен сумме пределов двух последовательностей.

4. Докажите, что произведение двух сходящихся последовательностей сходится и её предел равен произведению пределов двух последовательностей.

5. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{b}{a}$.

6. Найдите пределы следующих последовательностей:
(a) $a_n = \dfrac{n^3 - 4n^2 - 7n - 12}{2n^3 + n^2 + n + 1}$; **(b)** $b_n = \sqrt{n^2 + 5n + 7} - \sqrt{n^2 - 7n + 5}$.

7. Для какого k последовательность $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1}$ эквивалентна $\dfrac{1}{n^k}$?

Что-то ещё про пределы.

8. Последовательность a_i такова, что $a_1 = 1$, $a_{i+1} = a_i - \left(\frac{a_i}{2}\right)^{1000}$. Доказать, что какое-то из a_i станет меньше 0.00000001.

9. Дан квадрат со стороной 1. От него отсекают четыре уголка — четыре треугольника, у каждого из которых две стороны идут по сторонам квадрата и составляют $\frac{1}{3}$ их длины. С полученным 8-угольником делают то же самое: от каждой вершины отрезают треугольник, две стороны которого составляют по $\frac{1}{3}$ соответствующих сторон 8-угольника, и так далее. Получается последовательность многоугольников (каждый содержится в предыдущем). Найдите площадь фигуры, являющейся пересечением всех этих многоугольников (то есть образованной точками, принадлежащими всем многоугольникам).

10. Последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $\forall m, n \in \mathbb{N}$ $|a_n + a_m - a_{m+n}| < \frac{1}{m+n}$. Докажите, что $\exists x\ \forall k\ \ a_k = kx$.

11. **Китайская математическая олимпиада.** Дана ограниченная последовательность $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, для которой

$$a_n < \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2007} \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Докажите, что

$$a_n < \frac{1}{n} \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Вторая пятидневка

Квадратичный закон взаимности

Квадратичный закон взаимности естественно обобщается на символы Якоби, это позволяет ускорить нахождение символа Лежандра, поскольку более не требует проверки на простоту.

Википедия

Определение. Ненулевой остаток a при делении на p называется *квадратичным вычетом* по модулю p, если сравнение $x^2 \equiv a\,(mod\,p)$ разрешимо и *квадратичным невычетом* в противном случае.

Определение. Пусть $p \in \mathbb{P}$. *Символом Лежандра* называется выражение, обозначаемое $\left(\frac{a}{p}\right)$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p, -1, если a — невычет по модулю p и 0, если a кратно p.

Упр. Докажите, что $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$.

Упр. Докажите, что если a не делится на p и $p > 2$, то $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

(Квадратичный закон взаимности Гаусса.) Имеют место три соотношения:

(a) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

(b) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

(c) $\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$ для любых различных нечетных простых чисел p и q.

Определение. Комплексное число α называется **алгебраическим**, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами; **целым алгебраическим**, если оно является корнем унитарного многочлена с целыми коэффициентами; **трансцендентным**, если оно не является алгебраическим. Числа e и π трансцендентны, но доказать это очень непросто.

1. **(a)** Пусть $p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ - многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что у многочлена $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x - \alpha_i\alpha_j)$ все коэффициенты также целые.

   (b) Докажите, что сумма, разность и произведение целых алгебраических чисел также является целым алгебраическим.

   (c) Докажите, что алгебраические числа образуют поле.

   (d) Докажите, что все корни многочлена с алгебраическими коэффициентами являются алгебраическими числами, а корни всех унитарных многочленов с целыми алгебраическими коэффициентами являются целыми алгебраическими числами.

2. Пусть $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{8}) + i\sin(\frac{2\pi}{8})$.
(a) Покажите, что ζ является целым алгебраическим числом.
(b) Докажите, что для любого нечетного простого p выполнена цепочка сравнений (по модулю p) и равенств $\zeta^p + \zeta^{-p} \equiv (\zeta+\zeta^{-1})^p = 2^{\frac{p-1}{2}}(\zeta+\zeta^{-1}) \equiv (\frac{2}{p})(\zeta+\zeta^{-1})$.
(c) Докажите, что $(\frac{2}{p}) = 1$, если $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, и $(\frac{2}{p}) = -1$, если $p \equiv \pm 3 \pmod 8$.

3. Пусть $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{p}) + i\sin(\frac{2\pi}{p})$. Для $1 \leqslant a \leqslant p-1$ обозначим $g_a = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)\zeta^{ak}$. Числа g_a называются **квадратичными суммами Гаусса.**
(a) Докажите, что числа g_a являются целыми алгебраическими.
(b) Докажите, что $g_a = (\frac{a}{p})g_1$.
(c) Докажите, что $g_1^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$. (*Подсказка:* рассмотрите выражение $\sum\limits_{a=1}^{p-1} g_a g_{-a}$ и докажите, что оно одновременно равно и $(\frac{-1}{p})(p-1)g_1^2$, и $p(p-1)$).
(d) Докажите цепочку сравнений (по модулю q) и равенств

$$\left(\frac{q}{p}\right)g_1 = g_q \equiv g_1^q = ((-1)^{\frac{p-1}{2}}p)^{\frac{q-1}{2}}g_1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)g_1.$$

(e) Выведите квадратичный закон взаимности.

4. Найдите $\left(\frac{2018}{10007}\right)$.

5. Про натуральные числа a, b, p, где p — простое, известно, что $a^2 + b^2 = p$. Докажите, что a — квадратичный вычет по модулю p, если
(a) a — нечетное простое;
(b) a — нечетное.

6. Докажите, что если $2^{2^n}+1$ простое, то 3 является первообразным корнем по модулю $2^{2^n}+1$.

7. Докажите, что уравнение $x^2 - 3y^2 = p$ имеет решение **(a)** тогда; **(b)** только тогда когда $p \equiv 1 \pmod{12}$.

8. При каких целых n, число $n^2 + 3$ делится на $\varphi(n)$.

9. Найдите все простые p такие, что $p! + p$ — точный квадрат.

10. Пусть $x_1 = 1, y_1 = 100,\ x_{n+1} = x_n^{237} + y_n,\ y_{n+1} = y_n^{237} + x_n$. Докажите, что $x_n y_n$ не делится на 239 ни при каком натуральном n.

11. Решите в целых числах $x^3 - x + 9 = 5y^2$.

Про сумму ряда

Сумма натуральных чисел равна $-\frac{1}{12}$, приятного просмотра.

Определение. Скажем, что число S является *суммой ряда* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$, если число S является пределом последовательности $S_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i$. Скажем, что ряд *сходится*, если у него есть сумма и *расходится* — иначе.

1. **(a)** Чему равен предел последовательности $a_n = q^n$?
(b) Дано число q такое, что $|q| < 1$. Найдите сумму ряда $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$.

2. Докажите, что ряд $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ сходится.

3. Докажите, что ряд $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$ сходится.
Обозначим сумму этого ряда константой e.

4. Докажите, что для любого натурального n существует такое натуральное m, что $\frac{m}{n} < e < \frac{m+1}{n}$ и сделайте соответствующий вывод.

5. **(a)** Докажите, что $\lim\limits_{k=0\to\infty} (1 + \frac{1}{k})^k = e$.
(b) Верна ли в общем случае следующая теорема:
Если для каждого натурального k последовательность $\{a_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к a_k, и для каждого натурального i ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k,i} = X_k$, последовательность X_k сходится к числу X, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма равна X?

6. **(a)** Докажите, что любого x ряд $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots +$ сходится.
(b) Докажите, что его сумма равна $\lim\limits_{k=1\to\infty} (1 + \frac{x}{k})^k$.

7. Обозначим предел из прошлой задачи $exp(x)$.
Докажите, что $exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.

Сети Форда и Фалкерсона

Определение. Пусть задано множество вершин V, в котором выделены две вершины: s (*вход*) и t (*выход*). Пусть определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$c(x, y) \geqslant 0, \quad c(x, s) = 0, \quad c(t, y) = 0$$

для любых вершин $x, y \in V$. Тогда $G = (V, s, t, c)$ — сеть, функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Множество $A(G) = \{(x, y) : c(x, y) > 0\}$ называется множеством *стрелок* сети G.

Определение. Пусть G — сеть. Функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *потоком* в сети G, если f удовлетворяет трем условиям для любых $x, y \in V$ и $v \in V \setminus \{s, t\}$:

$$f(x, y) \leqslant c(x, y), \quad f(x, y) = -f(y, x), \quad \sum_{z \in V} f(v, z) = 0.$$

Число $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$ называется *величиной потока*. Поток в сети G с максимальной величиной называется *максимальным*.

Определение. Пусть G — сеть, а множество ее вершин V разбито на два непересекающихся множества S и T таких, что $s \in S$ и $t \in T$. Тогда (S, T) — разрез сети G.

Величина $c(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*. Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.

Для любого потока f в сети G величина $f(S, T) = \sum_{s \in S, y \in T} f(x, y)$ называется *потоком через разрез* (S, T).

Пусть f — поток в сети G. Рассмотрим сеть G_f с теми же V, s, t и пропускной способностью $c_f(x, y) = 0$ при $y = s$ или $x = t$, $c_f(x, y) = c(x, y) - f(x, y)$ в остальных случаях. Назовем G_f *остаточной сетью* потока f.

Дополняющий путь потока f — это любой путь из входа в выход вдоль рёбер ненулевой пропускной способности.

1. Для любого потока f и разреза (S, T) сети G докажите, что $|f| = f(S, T)$.

2. **(Теорема Форда-Фалкерсона.)** В сети G с пропускной способностью c задан поток f. Докажите, что следующие три утверждения равносильны:

- поток f максимален;
- существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$;
- в остаточной сети нет дополняющего пути.

Следствие. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

3. Пусть (S_1, T_1) и (S_2, T_2) — минимальные разрезы в сети G. Докажите, что разрезы $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ и $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ также являются минимальными.

4. Докажите, что в целочисленной сети (т. е. в сети, пропускные способности всех ребер которой являются целыми числами) существует максимальный поток, причем среди максимальных потоков данной сети найдется целочисленный.

5. В прямоугольной таблице расставлены действительные числа так, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке целая. Всегда ли можно округлить каждое нецелое число (то есть заменить на одно из двух ближайших целых чисел) так, чтобы сумма чисел в каждой строчке и каждом столбце не изменилась?

Выведите из теоремы Форда-Фалкерсона следующие утверждения:

6. **("Реберная теорема Менгера.")** Даны граф G и его вершины u и v. Пусть при удалении любых $k-1$ ребер в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих ребер.

7. **(Теорема Холла.)** Если в двудольном графе с долями A и B для любого множества из k вершин $V \subseteq A$ существует не менее k вершин доли B, смежных хотя бы с одной из вершин множества V, то существует паросочетание, содержащее все вершины из A.

8. **(Теорема Кёнига.)** На клетчатой плоскости расставлено несколько ладей. Тогда наибольшее число небьющих друг друга ладей, которые можно выбрать из них, равно наименьшему числу линий (столбцов и строк), покрывающих все данные ладьи.

9. Если в двудольном графе с долями A и B для любого множества из k вершин $V \subseteq A$, сумма количества вершин доли B, смежных хотя бы с одной из вершин множества V и количества вершин доли B, смежных хотя бы с двумя из вершин множества V, не менее $2k$, то существуют два непересекающихся по рёбрам паросочетания, каждое из которых содержит все вершины из A.

Теорема о бабочке

Маленький ликбез.

Рассмотрим на плоскости окружность s с центром O и радиусом r.

Определение. *Расширенной плоскостью* называется плоскость, пополненная бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$.

Определение. *Инверсией относительно окружности s* называется преобразование, переводящее каждую точку A расширенной плоскости в такую точку A' луча OA, что $OA \cdot OA' = r^2$.

Определение. *Окружностью на расширенной плоскости* называется либо обычная окружность, либо прямая, пополненная бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$.

Инверсия в пространстве.

Теорема. Инверсия переводит окружность в окружность.

1. Определите понятия расширенного пространства, инверсии в расширенном пространстве и сферы в расширенном пространстве.

2. Докажите, что при инверсии из задачи 1 сфера переходит в сферу.

3. Докажите, что при инверсии из задачи 1 окружность переходит в окружность.

Рассмотрим в пространстве сферу s с центром O и радиусом r, диаметрально противоположные точки сферы N и S и плоскость. которая касается сферы в точке S.

Определение. *Стереографической проекцией* называется биекцией сферы s в расширенную плоскость α, сопоставляющая каждой точке A сферы s точку A' пересечения луча NA с плоскостью α. пополненная бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$.

4. Докажите, что стереографическая проекция переводит окружности в окружности.

Предельный переход.

Определение. Будем говорить, что последовательность точек $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к точке* $X \neq \infty$, если $\lim\limits_{n \to infty} dist(X_n, X) = 0$. Обозначать это мы будем так: $X_n \to X$.

5. Определите сходимость к бесконечной точке на расширенной плоскости.

6. Пусть $A_n \to A$, $B_n \to B$, $C_n \to C$, $D_n \to D$ в трехмерном пространстве.

(a) Докажите, что $\lim\limits_{n \to infty} dist(A_n, B_n) = dist(A, B)$.
(b) Докажите, что если для любого $n \in \mathbb{N}$ точки A_n, B_n, C_n лежат на одной прямой, то и точки A, B, C лежат на одной прямой.
(c) Докажите, что если для любого $n \in \mathbb{N}$ точки A_n, B_n, C_n, D_n лежат в одной плоскости, то и точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

(d) Докажите, что если для любого $n \in \mathbb{N}$ точки A_n, B_n, C_n, D_n лежат на одной окружности, то и точки A, B, C, D лежат на одной окружности или одной прямой.

Лемма о центральной проекции.

Рассмотрим в пространстве сферу s и точку P.

Определение. *Центральной проекцией* с центром в точке P называется преобразование сферы s, переводящее каждую точку A сферы s в точку A' пересечения прямой PA со сферой s.

Рассмотрим на сфере s окружность ω.

7. Докажите, что при центральной проекции ω переходит в окружность (обозначим ее ω').

8. Пусть точки A, B, C и D лежат на окружности ω, а точки A', B', C' и D' — их соответственные образы при центральной проекции. Пусть $AB \cap CD = E$ и $A'B' \cap C'D' = E$. Докажите, что точки P, E и F лежат на одной прямой.

9. Докажите задачу 8 в случае, когда $\omega = \omega'$.

10. Выведите из задачи 9 теорему о бабочке.

Теорема о бабочке. Пусть хорды окружности AC, BD и XY пересекаются в точке M, а прямая XY пересекает прямые AB и CD в точках P и Q соответственно. Если точка M является серединой хорды XY, то $MP = MQ$.

Задачи для самостоятельного решения.

11. Докажите, что через две данные точки можно провести не более двух окружностей, касающихся данной окружности.

12. Докажите, что любые две окружности можно при помощи инверсии перевести в пару равных окружностей.

13. Докажите, что если последовательность $\{X_n\}$ точек расширенной плоскости сходится к точке X, то последовательность $\{X'_n\}_{n=1}^{\infty}$ их образов при стереографической проекции сходится к точке X' — образу при стереографической проекции точки X.

Системы линейных уравнений

Определение. Две системы линейных уравнений (от одинакового набора переменных) называются *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Определение Рассмотрим *элементарные преобразования* системы линейных уравнений трех типов:

ЭП1. к строке прибавляем другую строку, умноженную на число;

ЭП2. строку умножаем на ненулевое число;

ЭП3. меняем местами две строки.

Упр. Если одна система линейных уравнений получается из другой путем применения ЭП1-ЭП3, то эти системы эквивалентны.

1. **Метод Гаусса.** При помощи ЭП1-ЭП3 каждую систему линейных уравнений можно привести к ступенчатому виду, т.е. к виду

$$\left\{\begin{array}{rcl}
b_{1e}x_e + \cdots\cdots\cdots\cdots + b_{1n}x_n & = & d_1 \\
b_{2k}x_k + \cdots\cdots\cdots + b_{2n}x_n & = & d_2 \\
b_{3l}x_l + \cdots\cdots + b_{3n}x_n & = & d_3 \\
\ddots \qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{rs}x_s + \cdots + b_{rn}x_n & = & d_r \\
0 & = & d_{r+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
0 & = & d_m
\end{array}\right. ,$$

где $b_{1e}b_{2k}b_{3l}\dots b_{rs} \neq 0$, $e < k < l < \cdots < s$.

Определение. Система линейных уравнений называется *однородной*, если все правые части равны 0.

Упр. Как найти все решения системы линейных уравнений? Сколько их вообще может быть?

2. Докажите, что если в однородной системе неизвестных больше, чем уравнений, то у неё есть ненулевое решение.

Определение. Систему линейных уравнений, у которой уравнений столько же, сколько неизвестных, будем называть *квадратной*.

3. **(a)** Докажите, что если у квадратной однородной системы не одно решение, то одно из её уравнений *следует* из остальных, то есть множество его решений содержит пересечение множеств решений остальных. **(b)** В однородной системе уравнений на одно меньше, чем неизвестных. Докажите, что если не все решения пропорциональны, то одно из уравнений следует из остальных.

4. На плоскости даны 5 точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует единственная кривая второго порядка, проходящая через них.

5. **Теорема о девяти точках на кубической кривой.** На плоскости проведены три красные и три синие прямые и отмечено 9 точек пересечения разноцветных прямых (будем считать, что все эти точки существуют и различны). Тогда, если восемь из этих точек лежат на кривой, заданной многочленом третьей степени, то и девятая точка также лежит на этой кривой.

(a) Выведите из теоремы о девяти точках на кубической кривой следующие утверждения.

Теорема Паскаля: Точки $1, 2, 3, 4, 5, 6$ расположены на окружности, так что прямые 12 и 45 пересекаются в точке A, прямые 23 и 56 пересекаются в точке B, а прямые 34 и 61 — в точке C. Тогда точки A, B, C лежат на одной прямой.

Теорема Паппа: Точки $1, 2, 3, 4, 5, 6$ расположены на двух прямых ($1, 3, 5$ — на первой, $2, 4, 6$ — на второй) так что прямые 12 и 45 пересекаются в точке A, прямые 23 и 56 пересекаются в точке B, а прямые 34 и 61 - в точке C. Тогда точки A, B, C лежат на одной прямой.

(b) Докажите, что никакое из линейных уравнений на коэффициенты не следует из семи остальных и выведите отсюда теорему о девяти точках на кубической кривой.

Третья пятидневка

Про непрерывные функции

$$\lim_{x\to 8}\frac{1}{x-8}=\infty \Rightarrow \lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}=\rotatebox{90}{5}.$$

Анекдот

Действие первое. Введение.

Определение по Гейне. Функция f называется *непрерывной* на множестве A, если она определена на всех точках множества A и для всякой последовательности $\{x_n\}$, где $x_i \in A$, сходящейся к $a \in A$, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(a)$.

Определение по Коши. Функция f называется *непрерывной* на множестве A, если она определена на множестве A

$$\forall a \in A \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in A : (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$$

1. Докажите, что определения по Коши и по Гейне равносильны.

2. **Непрерывность монотонной функции.** Функция f монотонна на промежутке $\mathfrak{X}$ и принимает на нем все значения из промежутка $\mathfrak{Y}$ и только их. Докажите, что f непрерывна на $\mathfrak{X}$. (Промежутки могут быть как открытыми, так и замкнутыми, как ограниченными, так и неограниченными.)

3. **(a)** Для натуральных a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt[a+b+c]{a^a \cdot b^b \cdot c^c} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

(b) Докажите это неравенство для любых рациональных положительных a, b и c.
(c) Докажите, это неравенство для любых положительных a, b, c.

Полезно осознать, что грубо говоря, всё, что задаётся формулой, непрерывно...

Про теорему о промежуточном значении.

4. **Теорема Больцано-Коши.** Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, $f(a) > 0, f(b) < 0$. Докажите, что $f(x)$ имеет корень на отрезке $[a, b]$.

5. Турист в 9 утра вышел из Котельнича и в 9 вечера оказался на турбазе “Вишкиль”. На следующий день он в 9 утра вышел с турбазы и в 9 вечера оказался в Котельниче. Туда и обратно он шел одним и тем же маршрутом. Докажите, что была точка, которую он оба раза прошел в одно и то же время.

6. Существует ли непрерывная функция, которая в рациональных точках принимает иррациональные значения, а в иррациональных — рациональные?

7. Центры масс точек на плоскости $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ различны. Докажите, что на плоскости существует такая точка X, что **(a)** $\sum\limits_{i=1}^{n} XA_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} XB_i^2$;
(b) $\sum\limits_{i=1}^{n} |XA_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |XB_i|$

Про теорему Вейештрасса

Определение. Назовём множество *секвенциальным компактом* или просто *компактом*, если в нём из любой последовательности можно выбрать сходящуюся к элементу из этого множества подпоследовательность.

Упр. Выясните, какие из следующих множеств являются секвенциальными компактами: **(a)** отрезок; **(b)** интервал; **(c)** окружность; **(d)** круг; **(e)** гипербола $xy = 1$; **(f)** замкнутый куб в четырёхмерном пространстве, заданный неравенствами $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$.

8. Дан компакт K и функция $f : K \to \mathbb{R}$, непрерывная в каждой его точке. Докажите, что она достигает на нём своё наибольшее (наименьшее) значение.

9. **(a)** Может ли множество значений многочлена $P(x)$ быть в точности множеством всех положительным чисел?
(b) Тот же вопрос для многочлена от двух переменных $P(x, y)$.

10. **(a)** Докажите, что существует n-угольник периметра 1 наибольшей площади.
(b) Докажите, что этот многоугольник вписан в окружность.
(c) Докажите, что он правильный.

11. Рассмотрим многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени выше первой.
(a) Докажите, что функция $|f(x)|$ принимает на комплексной плоскости глобальный минимум.
(b) **Лемма о поведении многочлена “вблизи”.** Пусть

$$g(\delta) = b_m\delta^m + b_{m+1}\delta^{m+1} + \ldots b_n\delta^n,$$

причём степени здесь расположены в порядке возрастания, то есть b_m — коэффициент при самой младшей степени из тех, коэффициент при которых не равен 0, при этом $m > 0$. Введём обозначение $h(\delta) = g(\delta) - b_m\delta^m$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое r, что для любого $\delta \in \mathbb{C}$ такого, что $|\delta| < r$ выполнены неравенства:

$$\varepsilon > |b_m\delta^m| > 2|h(\delta)|.$$

(c) Докажите основную теорему алгебры.

Поляра. Полярное соответствие

Определение. *Полярой* точки P относительно окружности S называется прямая p, проходящая через точку P', инверсный образ точки P при инверсии относительно S, и перпендикулярная прямой OP. Точка P называется *полюсом* прямой p относительно окружности S.

1. Пусть прямая a — поляра точки A. Оказалось, что $B \in a$. Докажите, что $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = r^2$.

2. Пусть A и B — две точки, a и b — их поляры относительно окружности S с центром O, AP и BQ — расстояния от A до b и от B до a. Докажите, что $\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$.

3. **Лемма о поляре.** Пусть a — поляра A, b — поляра B. Оказалось, что $A \in b$. Докажите, что $B \in a$.

4. Пусть P — точка вне окружности S. Касательные из точки P к S касаются окружности в точках X и Y. Докажите, что XY — поляра точки P относительно окружности S.

Определение. *Полярным соответствием* относительно окружности S называется сопоставление каждой точке P, отличной от центра этой окружности, ее поляры относительно этой окружности.

5. Пусть A, B, C — точки плоскости, a, b, c — соответственно их поляры относительно окружности S. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда прямые a, b, c проходят через одну точку.

6. Пусть P — точка вне окружности S с центром O. Точка P' — образ точки P при инверсии относительно S. Касательная из точки P к S касается окружности в точке M. Докажите, что $PP' \cdot PO = PM^2$.

7. Куда перейдут биссектрисы внешних углов треугольника при полярном преобразовании относительно его вписанной окружности?

8. В какую теорему при полярном преобразовании перейдет теорема «медианы треугольника пересекаются в одной точке», если за окружность полярного преобразования взять окружность описанную вокруг треугольника?

Определение. *Двойным отношением* четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной (вещественной или комплексной) прямой, называют число

$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

9. Пусть даны точка P и окружность S с центром O. Через точку P провели секущую к окружности, которая пересекла окружность в точках A и B. Найдите ГМТ P' таких, что $(A, B; P, P') = -1$.

10. **(a)** Из точки P вне окружности S провели две секущие AB и CD. Тогда точка пересечения прямых AC и BD лежит на поляре точки P.

(b) Из точки P внутри окружности S провели две секущие AB и CD. Докажите, что точка пересечения прямых AC и BD лежит на поляре точки P.

11. Пусть дан четырехугольник $ABCD$ **(a) вписанный** в окружность S; **(b) описанный** вокруг окружности S. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из центра S на прямую, соединяющую точки пересечения противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей.

12. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Его вписанная окружность касается сторон AB и CD в точках M и N. Докажите, что прямые AC, BD и MN пересекаются в одной точке.

13. Пусть ℓ — произвольная касательная к вписанной окружности S треугольника ABC; M, N и P — точки пересечения l со сторонами треугольника. Восставим из центра I окружности S перпендикуляры к прямым IM, IN и IP; пусть M_1, N_1 и P_1 — точки пересечения этих перпендикуляров с соответствующими сторонами треугольника. Докажите, что точки M_1, N_1 и P_1 лежат на одной прямой ℓ_1 касающейся окружности S.

14. Докажите, что основания биссектрис внешних углов треугольника лежат на одной прямой и эта прямая перпендикулярна прямой OI.

Проективная параметризация

Определение. Рассмотрим на плоскости окружность s с центром в точке O. Для каждой четверки точек A, B, C, D на ней определим *двойное отношение* как число

$$(A, B, C, D) := -\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

если пара A, B разбивает пару B, C и как число

$$(A, B, C, D) := \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

если пара A, B не разбивает пару B, C. Получившийся объект мы будем называть *проективной прямой.*

Основная идея дальнейшего состоит в том, что проективная прямая повсюду.

Примеры.

- Окружность на плоскости или в пространстве.
- Прямая, пополненная бесконечно удаленной точкой.
- Пучок прямых, проходящих через одну точку.

0. Вспомните или придумайте определения двойного отношения точек на окружности, прямой или прямых и осознайте, что все примеры дают проективную прямую.

Определение. *Проективным преобразованием* проективной прямой называется преобразование, которое сохраняет двойное отношение.

Примеры.

- Центральное проектирование одной прямой на плоскости на другую.
- Параллельное проектирование.
- Центральное проектирование окружности на плоскости на себя.
- Центральное проектирование окружности на прямую в случае, когда центр проектирования лежит на той же окружности.

1. Докажите, что приведенные в примерах преобразования являются проективными.

2. На проективной прямой даны точки A и B. Докажите, что на проективной прямой можно задать проективные координаты так, чтобы точка имела координату 0, а точка B — координату 1.

3. Докажите, что любые три точки проективной прямой **можно** перевести в любые три точки проективной прямой **единственным** проективным преобразованием.

4. Докажите, что двойное отношение сохраняется при полярном преобразовании.

5. Докажите, что если $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

6. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, BC и AD — в точке F диагонали AC и BD пересекают EF в точках M и N. Тогда $(E, F, M, N) = -1$.

7. Докажите, что
(a) $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)^{-1} = (A, B, D, C)^{-1}$;
(b) $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$.

8. Дана такая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

- $f(0) = 0, f(1) = 1$.
- $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

Докажите, что $f(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

9. **Теорема фон Штаудта.** Докажите, что преобразование проективной прямой является гармоническим тогда и только тогда, когда оно переводит гармонические четверки в гармонические.

Спаривающие многочлены

Теорема Фуетера-Полиа. Существуют только два многочлена второй степени от двух переменных, осуществляющих биекцию из $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ в $\mathbb{N}_0$: $C_1 = \frac{x^2+2xy+y^2+3x+y}{2}$ и $C_2 =$

$\frac{x^2+2xy+y^2+x+3y}{2}$.

Для краткости будем называть такой многочлен *спаривающим.*

1. Многочлен $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ при натуральных x, y принимает целые значения. Докажите, что числа $2a$, b, $2c$, $2d$, $2e$, f — целые, причём $2a - 2d$ и $2c - 2e$ — чётные числа.

2. Многочлен $f(x,y)$ положителен при натуральных x и y. Докажите, что $P_2(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ принимает положительные значения при любых $x, y > 0$.

3. Предположим, $b \geqslant 2$, $a \geqslant \frac{1}{2}$, $c \geqslant \frac{1}{2}$, $f \geqslant 0$. Докажите, что для некоторого натурального n целых неотрицательных решений неравенства $f(x,y) < n$ меньше n.

4. Рассмотрим нечётное простое число p. Обозначим через $N(f,p,w)$ количество пар $(x,y) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, для которых $f(x,y) \equiv w \pmod p$. Докажите, используя соображения роста, что если f — спаривающий многочлен, то $N(f,p,w) = p$ для всех w.

5. Попробуем посчитать $N(f,p,w)$ по-другому.
   (a) Докажите, что $N(f,p,w) \equiv -\sum\limits_{x=0}^{p-1}\sum\limits_{y=0}^{p-1}((f(x,y)-w)^{p-1}-1) \pmod p$.
   (b) Докажите, что $N(f,p,w) \equiv \sum\limits_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} C_{2j}^{j}\left(\frac{ac}{4}\right)^j b^{p-1-2j} \equiv \left(1-\frac{ac}{b^2}\right)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.
   (c) Выведите отсюда, что $ac - b^2 = 0$.

6. **(a)** Докажите, что $f(0, \frac{(d-e)m-e-1}{2}) = f(m, \frac{(d-e-2)m-e-1}{2})$.
   (b) Докажите, что если $d > e$, то $d - e = 2$.

7. Выведите из всего этого теорему Фуетера-Полиа.

Геометрический разнообой

1. На продолжении стороны BC треугольника ABC отмечены точки E и F такие, что $2AE = 2AF = AB + BC + CA$. Докажите, что описанная окружность треугольника AEF касается вневписанной окружности треугольника ABC.

2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Касательная к ω в вершине B, пересекает, прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке P. Касательная к ω, в вершине C, пересекает, прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке Q. Докажите, что PQ касается ω.

3. Точки A и B движутся по двум фиксированным лучам с общим началом O так, что величина $\frac{p}{OA} + \frac{q}{OB}$ остается постоянной. Докажите, что прямая AB при этом проходит через фиксированную точку.

4. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая g проходит через вершину A и пересекает лучи BC и DC в точках X и Y, соответственно. Точки K и L — центры вневписан-

ных окружностей, напротив вершины A треугольников ABX и ADY. Докажите, что $\angle KCL$ не зависит от прямой g.

5. **Теорема Паскаля.** Даны 6 точек $A_1, \ldots, A_6$ на одной окружности. Докажите, что точки пересечения прямых A_iA_{i+1} и $A_{i+3}A_{i+4}$, при $i = 1, 2, 3$ лежат на одной прямой. (Нумерация берется по модулю 6).

6. **Теорема Брианшона.** Прямые $\ell_1, \ldots, \ell_6$ касаются одной окружности. Обозначим $\ell_i \cap \ell_{i+1}$ через A_i, при $i = 1, 2, \ldots, 6$. (Нумерация берется по модулю 6). Докажите, что прямые A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 пересекаются в одной точке.

Четвёртая пятидневка

Полицейские и грабители

По-настоящему, обязанность полицейских — защищать население от грабителей, в действительности же они защищают лишь богачей. А богачи-то и есть самые настоящие грабители. Только грабят они нас, прикрываясь законами, которые сами придумывают.

Н. Носов, "Незнайка на Луне"

На графе G рассматривается следующая игра: первый игрок играет за *полицейских*, а второй за *грабителя*. Сначала первый игрок ставит фишки полицейских в некоторые вершины графа, затем второй игрок ставит одну фишку грабителя в некоторую вершину. После этого игроки ходят по-очереди: первый игрок перемещает каждого полицейского, а второй игрок перемещает грабителя. Перемещаться можно либо в соседнюю вершину, либо в текущую (т.е. оставаться на месте). Полицейские выигрывают, если за конечное время им удастся поймать грабителя, т.е. сделать так, чтобы какая-то фишка полицейского оказалась в одной вершине с фишкой грабителя. Иначе выигрывает грабитель.

Определение. *Полицейским числом* графа G называется наименьшее количество полицейских, способных гарантированно поймать грабителя. Полицейское число обозначается $c(G)$.

Упр. **(a)** Найдите полицейское число полного графа, дерева, цикла.

(b) Докажите, что если граф G разбивается на компоненты связности $G_1, G_2, \dots G_k$, то $c(G) = c(G_1) + c(G_2) + \ldots + c(G_k)$.

Определение. Назовём вершину u *углом*, если существует такая вершина v, что v соединена с u и всеми соседями u.

Упр. **(a)** Докажите, что если $c(G) = 1$, то в G есть угол.

(b) Пусть в G есть угол u. Обозначим за $G \setminus u$ граф, получаемый из G удалением вершины u. Докажите, что $c(G) = c(G \setminus u)$.

(c) Докажите, что следующие условия эквивалентны для графа G на n вершинах:

$c(G) = 1 \iff$ существует такая последовательность вершин $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, что v_1 — угол в G, и для всех $0 < i < n$ верно, что v_i — угол в $G \setminus v_1 \setminus \ldots \setminus v_{i-1}$.

1. Найдите полицейское число прямоугольника $n \times m$. (Вершины графа — единичные квадратики, ребром соединены соседние по стороне квадратики).

2. Рассмотрим треугольную решётку. Пусть G — правильный шестиугольник со стороной n с вершинами в узлах решётки. Рассмотрим граф, ограниченный этим шестиугольником. Найдите его полицейское число.

3. Назовём граф *хордальным*, если каждый из его циклов, имеющий четыре и более рёбер, имеет ребро, соединяющее две вершины, не смежные в цикле. Найдите полицейское число связного хордального графа.

Указание. Докажите, что в хордальном графе существует вершина, все соседи которой соединены между собой.

4. Найдите полицейское число торической решётки $n \times n$. (Торической решёткой назовём граф, состоящий из вершин $(a_{i,j})$, где $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$, при этом вершины $a_{i,j}$ и $a_{k,l}$ соединены ребром, если либо $i = k, j \equiv l \pm 1 \pmod{n}$, либо $j = l, i \equiv k \pm 1 \pmod{n}$).

5. **(a)** Предположим, что грабителю запрещено бесконечно долго стоять на месте. Докажите, что тогда в прямоугольнике $n \times m$ 1 полицейский сможет поймать грабителя.

(b) Найдите полицейское число 3-мерного прямоугольного параллелепипеда $a_1 \times a_2 \times a_3$.

(c) Найдите полицейское число n-мерного прямоугольного параллелепипеда $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n$.

Пусть H — некоторый подграф графа G. Будем говорить, что H k-охраняем, если у k полицейских существует стратегия, при которой они, перемещаясь внутри графа H могут через некоторое время t_0 добиться следующего: если грабитель в некоторый момент времени $t > t_0$ заходит в H, то в момент $t+1$ он будет пойман.

6. **(a)** Докажите, что кратчайший путь между некоторыми вершинами u и v является 1-охраняемым.

(b) Пусть в G n вершин, диаметр равен $D > 3$, а максимальная степень вершины равна $\Delta > 2$. Докажите, что $n \leqslant \Delta^D$.

(c) Докажите, что тогда хотя бы одно из чисел D или Δ не меньше $\frac{\log_2 n}{\log_2 \log_2 n}$

(d) Выведите отсюда, что $c(G) \leqslant \frac{c_1 n \log_2 \log_2 n}{\log_2 n}$ для некоторой константы c_1.

Про базисы и размерности

– Чем отличается шар от сферы?
– Размерностью.

Роман Михайлов

Определение. Дано векторное пространство V над полем F. Назовём множество векторов E *линейно независимым*, если нельзя выбрать $e_1, e_2 \ldots e_n \in E$ и ненулевые $c_1, c_2 \ldots c_n \in F$ такие, что $c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_n e_n = 0$.

Назовём множество векторов $E \subset V$ *порождающим*, если для любого вектора $v \in V$ существуют такие $e_1, e_2 \ldots e_n \in E$ и $a_1, a_2 \ldots a_n \in F$, что $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n = v$.

Порождающее и линейно независимое множество будем называть *базисом* пространства V.

Назовём множество $U \subset V$ *подпространством* пространства V, если оно само по себе является линейным пространством над тем же полем.

Назовём пространство *конечномерным*, если любое бесконечное множество векторов является линейно зависимым.

1. Докажите, что конечное множество $\{e_1, e_2 \ldots e_n\}$ является линейно независимым тогда и только тогда, когда равенство $a_1e_1 + \ldots a_ne_n = 0$ равносильно тому, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

2. **Основная лемма о линейной зависимости.** Даны натуральные числа $m > n$. Даны векторы $e_1, e_2 \ldots e_n$, через них выражены векторы $v_1, v_2 \ldots v_m$. Докажите, что они линейно зависимы.

3. Докажите, что если у линейного пространства есть базис из n векторов, то любой его базис содержит ровно n векторов.

Мощность базиса линейного пространства называется его *размерностью.*

4. Чему равна размерность пространства:
(a) многочленов от одной переменной;
(b) симметрических многочленов от k переменных степени не более n;
(c) последовательностей $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$?

5. Докажите, что любое линейно независимое множество конечномерного пространства можно дополнить до базиса.

Самое собой, слово "конечномерного" можно убрать, но доказывать мы этого не будем.

6. Какое наибольшее количество векторов можно выбрать в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы любые два из них
(a) были перпендикулярны;
(b) образовывали тупой угол.

7. В университете проводится n лекций, их посещают m студентов. Каждый студент посетил нечётное число лекций, а любые два студента вместе побывали на чётном числе лекций. Докажите, что $n \geqslant m$.

8. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое положительное количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участником баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определить сложность вопросов, чтобы места между участниками распределились любым наперед заданным образом. При каком наибольшем числе участников это могло быть?

9. Докажите, что у пространства бесконечных последовательностей над полем F нет счётного базиса.

Проективные преобразования

Определение. *Проективной плоскостью* называется плоскость, пополненная бесконечно удаленной прямой.

Определение. *Проективным преобразованием* называется преобразование проективной плоскости, переводящее прямые в прямые.

Напоминание. Проективное преобразование, оставляющее на месте бесконечно удаленную прямую, называется *аффинным.*

Теорема. Существует проективное преобразование, переводящее данную прямую в бесконечно удаленную.

Определение. *Особой* прямой называется прямая, переходящая в бесконечно удаленную.

Теорема. Отношение векторов коллинеарных особой прямой сохраняется.

1. Докажите, что существует единственное проективное преобразование, переводящее данные четыре точки не лежащие на одной прямой в данные четыре точки не лежащие на одной прямой.

2. Докажите, что двойное отношение сохраняется при проективных преобразованиях.

3. **Теорема Паппа.** Рассмотрим на плоскости пару прямых ℓ_1 и ℓ_2, и пусть точки $A_1, B_1, C_1 \in \ell_1$, а точки $A_2, B_2, C_2 \in \ell_2$. Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1; B_1C_2 и B_2C_1; A_1C_2 и A_2C_1 лежат на одной прямой.

4. **Теорема Дезарга.** Рассмотрим два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ на плоскости. Докажите,что точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2; B_1C_1 и B_2C_2; A_1C_1 и A_2C_2 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 проходят через одну точку.

5. **(a)** На плоскости даны две прямые ℓ_1 и ℓ_2 и точка P не лежащая не на одной из них. Через P проводятся пары прямых, пересекающие ℓ_1 и ℓ_2 в точках A и C, соответственно B и D. Докажите, что точки пересечения прямых AD и BC для всевозможных пар прямых ℓ_1 и ℓ_2 лежат на одной прямой p. Если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке Q, то и p проходит через точку Q.
(b) На плоскости даны прямая q и две точки A и B не лежащие на этой прямой. Пусть U и V — пара точек на q, M — точка пересечения прямых UA и VB, N — точка пересечения прямых VA и UB. Докажите, что прямые MN пересекаются в одной и той же точке Q лежащей на прямой AB.

6. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке и прямые AB_1, BC_1 и CA_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые AC_1, BA_1 и CB_1 пересекаются в одной точке.

Про группы, слова, образующие и соотношения

Определение. Множество G с бинарной операцией $\circ$, сопоставляющей паре элементов $f, g \in G$ элемент $f \circ g \in G$, называется группой, если выполнены следующие свойства:
1) ассоциативность: $\forall f, g, h \in G\ f \circ (g \circ$ **(a)** $= (f \circ$ **(b)** $\circ h$;
2) существование нейтрального элемента: $\exists e : \forall f \in G\ e \circ f = f \circ e = f$;
3) существование обратного элемента: $\forall g \in G \exists f \in G\ f \circ g = g \circ f = e$.

Вопрос. Следует ли из этих аксиом коммутативность?

1. **Из прошлого года.** В алфавите племени “ABBA” две буквы a и b. Смысл слова не меняется, если сделать одно из следующих преобразований:

- Убрать из любого места две буквы a подряд;
- Вставить в любое место две буквы a подряд;
- Убрать из любого места три буквы b подряд;
- Вставить в любое место три буквы b подряд;
- Заменить сочетание ab на bba;
- Заменить сочетание bba на ab;

Сколько различных по смыслу слов есть в словаре племени “ABBA”?

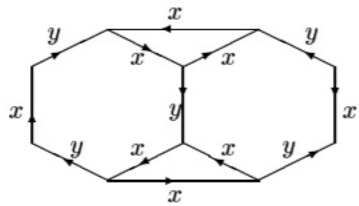
2. В марсианском алфавите 100 букв. Смысл слова не меняется, если в любое его место дважды подряд вставить один и тот же кусок или из любого места убрать два одинаковых подслова, идующих подряд. Докажите, что смысл слова не зависит от порядка букв.

Основная часть.

3. Предположим, что некоторое слово $g_1 g_2 \ldots g_k$ равно единице группы. Докажите, что любой его циклический сдвиг тоже равен единице.

4. На каждом ребре плоского графа написан символ g_i или g_i^{-1}. Оказалось, что слово, получаемое при обходе любой ограниченной грани по часовой стрелке, равно 1. Докажите, что слово, получаемое при обходе внешней грани по часовой стрелке, тоже равно единице, если:
(a) граней всего две;
(b) в общем случае.

5. Назовём элементы f и g *сопряжёнными*, если для некоторого элемента h выполнено $f = hgh^{-1}$. Из диаграммы ниже выведите, что в группе, в которой порядок каждого неединичного элемента равен 3, всякий элемент коммутирует со своим сопряжённым.



Эта задача является первым шагом в разборе одного из случаев проблемы Бернсайда.

Предполагается, что задачи 6-9 вы будете решать, используя диаграммы ван Кампена.

6. **(a)** В группе x^2 и y^2 коммутируют, x^3 и y^3 тоже коммутируют. Обязательно ли коммутируют x и y?

(b) Какие прямоугольники можно разрезать на квадраты 2×2 и 3×3?

(c) Какие прямоугольники, со сторонами, большими 1000 можно разрезать на квадраты 5×5 и 11×11?

7. При каких k правильный восьмиугольник со стороной k можно разрезать на доминошки 1×2 и ромбы со стороной 1 и углом 45°?

8. Докажите, что если прямоугольник можно разрезать на прямоугольники $m \times n$, то одна из его сторон делится на m и одна из его сторон делится на n.

9. Прямоугольник R разрезан на меньшие прямоугольники, у каждого из которых есть целая сторона. Докажите, что у R тоже есть целая сторона.

Вопрос для размышления. Почему при нахождении контрипримеров, опровергающих то, что из заданных соотношений выводится какое-то другое, нужно начинать с перебора перестановок?

Ещё немного про слова без диаграмм.

10. **(a)** Докажите, что группа, порождённая a, b, связанными соотношениями $a^3 = b^7 = e$, $aba^{-1} = b^2$ содержит 21 элемент и не является коммутативной.

(b) Подберите такие перестановки a и b.

11. В алфавите племени любителей планиметрии всего три буквы: A, B и C. Смысл слова не меняется, если сделать одно из следующих преобразований:

- Убрать две одинаковые рядом стоящие буквы;
- Вставить две одинаковые буквы в любое место;
- Поменять местами буквы A и C;
- Заменить фрагмент ABA на BAB или наоборот;

- Заменить фрагмент BCB на CBC или наоборот;

Если указанными преобразованиями из одного слова нельзя получить другое, то их значения разные. Сколько разных по смыслу слов есть в словаре племени любителей планиметрии?

12. У коллекционера есть замечательная коллекция из n статуэток. Он притворяется ценителем искусства и делает вид, что различает на вид любые две из них. На самом же деле он не различает никакие две. Несмотря на это, ему важно, чтобы статуэтки стояли на полке в определённом порядке. Если статуэтки стоят в нужном порядке, над полкой горит зелёная лампочка. У него есть несколько кнопок. При нажатии каждой кнопки происходит какая-то перестановка статуэток (какая именно, коллекционер, естественно понять не может, потому что он не различает статуэтки). Докажите, что коллекционер может проверить, сможет ли он, нажимая на кнопки, получить все перестановки.

Проективные преобразования и окружность

Теорема. Существует проективное преобразование, переводящее данную точку внутри окружности в центр, а окружность в себя.

1. Существует проективное преобразование, переводящее данную прямую не пересекающую окружность в бесконечно удаленную, а окружность в себя.

2. Докажите, что если проективное преобразование переводит данную окружность в окружность, а точку P — в её центр, то особая прямая перпендикулярна диаметру, проходящему через P.

3. Проективное преобразование некоторую окружность переводит в себя, а её центр оставляет на месте. Докажите, что это — поворот или симметрия.

4. Дана окружность и точка C внутри нее. Через точку C проведены четыре хорды A_iB_i, $i = 1, \ldots, 4$. D — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, E — точка пересечения прямых B_1B_2 и B_3B_4. Докажите, что точки C, D и E лежат на одной прямой.

5. Окружность Γ касается прямых, содержащих стороны AB и BC треугольника ABC, в точках D и E соответственно. Вторые касательные, проведенные из A и C к Γ касаются ее в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DG, FE и AC пересекаются в одной точке.

6. Внутри треугольника ABC выбрана точка P. Прямые AP, BP и CP пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Описанная вокруг треугольника $A_1B_1C_1$ окружность вторично пересекает прямую BB_1 в точке L. Пусть $A_2 = AL \cap B_1C_1$, $C_2 = CL \cap B_1A_1$. Докажите, что прямые A_1A_2, BB_1 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

7. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D, а продолжений сторон AB и AC — в точках E и F. Пусть T — точка пересечения прямых BF и CE. Докажите, что точки A, D и T лежат на одной прямой.

8. Даны четырёхугольник $ABCD$ и прямая ℓ. Обозначим через P, Q, R точки пересечения прямых AB и CD, AC и BD, BC и AD, а через P_1, Q_1, R_1 — середины отрезков, которые эти пары прямых высекают на прямой ℓ. Докажите, что прямые PP_1, QQ_1 и RR_1 пересекаются в одной точке.

Ещё немного линейной алгебры

1. **(a)** Докажите, что множество решений однородной системы линейных уравнений является подпространством пространства строк, а его размерность равна количеству параметров в ступенчатом виде.
(b) Верно ли, что любое подпространство пространства строк является множеством решений некоторой однородной системы?
(c) Для данного подпространства $U \subset V$ обозначим $U^\perp$ подпространство векторов, перпедникулярных всем векторам пространства V. Как связаны размерности U, $U^\perp$ и V?

2. **(a)** Докажите, что разность любых двух решений неоднородной системы является решением однородной системы.
(b) Докажите, что у неоднородной системы либо нет решений, либо их столько же, сколько у однородной.

3. **Вектор Шепли.** В силиконовой долине собралась группа из n друзей. Про любое подмножество из них известно, сколько денег они смогут заработать, если организуют свой стартап. Они поняли, что выгоднее всего объединиться всем вместе. Встал вопрос о том, как делить потенциальную прибыль. По большому счёту нужно построить отображение $S\colon \mathbb{R}^{2^n-1} \to \mathbb{R}^n$, чтобы были выполнены свойства:

- S — линейное (ну а вы что думали?);
- Равнозначные люди получают поровну.
- Те, кто не меняют прибыль при добавлении к любому подмножеству, ничего не получают.

Докажите, что есть только одно такое отображение и найдите, сколько должен получить каждый работник, если среди них есть менеджер, без которого никто не заработает ничего, и разработчики, при этом менеджер вместе с k разработчиками заработают k^2 миллиардов долларов.

4. Имеется клетчатая таблица $(k+2)\times(l+2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника

$k \times l$ можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

5. **(a)** Докажите, что если все коэффициенты в системе линейных уравнений — рациональные числа, и у системы есть хотя бы одно решение, то есть и рациональное решение. **(b)** Внутри отрезка $[0, 1]$ выбрали n различных точек. Отмеченной точкой назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.

6. У лаборанта есть 101 гирька. Оказалось, что если отложить любую гирьку, то остальные можно разложить на две группы по 50 равной массы. Докажите, что массы всех гирь равны, если массы гирь
(a) натуральные; **(b)** рациональные; **(c)** действительные.

Конструктивы

1. В стране 16 городов. Можно ли установить между ними дорожное сообщение так, чтобы из каждого города выходило не более 5 дорог и между любыми двумя городами был путь из не более чем двух дорог?

2. **(a)** Можно ли покрасить вершины трёх кубов (обычных трёхмерных) в два цвета так, чтобы у каждого куба было 4 синих и 4 красных вершины и при любом совмещении двух разных кубов у них было 4 совпадающих по цвету вершины.
(b) Можно ли выбрать в 7-элементном множестве 7 четырёхэлементных подмножеств так, чтобы любые два из них пересекались по двум элементам?
(c) Можно ли в 15-элементном множестве выбрать 15 семиэлементных подмножеств так, чтобы любые два из них пересекались по трём элементам?

3. Докажите, что рёбра полного графа на 16 вершинах можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы не было одноцветных треугольников.

4. *Конечной проективной* плоскостью порядка n назовём набор из $n^2 + n + 1$ точки и $n^2 + n + 1$ прямой такой, что через любые две точки проходит единственная прямая и любые две прямые пересекаются ровно в одной точке, причём существуют четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что если n простое, то конечная проективная плоскость существует.

5. Какое наибольшее количество клеток в квадрате 57×57 можно закрасить так, чтобы никакие 4 не были вершинами прямоугольника?

6. Несколько команд сыграли однокруговой волейбольный турнир. Скажем, что турнир оказался *сбалансированным*, если для каждой пары команд нашлись хотя бы k команд, которые выиграли у них обеих. Пусть $p = 4k+3$ — простое число. Докажите, что возможен сбалансированный турнир на p командах.

Что ещё сказать про пределы..?

1. **(a)** Докажите, что для любого $a > 0$ функция a^x непрерывна на множестве всех действительных чисел.
(b) Докажите, что функция $f(x) = \ln x$ непрерывна на множестве положительных чисел.

2. Найдите предел последовательности

$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}.$

3. Докажите, что непрерывная функция на окружности принимает одинаковые значения в некоторой паре диаметрально противоположных точек.

4. Последовательность действительных чисел такова, что как бы мы ни покрасили её члены в синий и красный цвет, и синяя и красная последовательности будут сходиться. Докажите, что исходная последовательность тоже сходится.

5. Докажите, что в любой сети существует максимальный поток.

6. **Неравенство Бернулли.** **(a)** Если $x > -1$, $p > 1$, то

$$(1 + x)^p \geqslant 1 + px.$$

(b) Если $x > -1$, $0 < p < 1$, то

$$(1 + x)^p \leqslant 1 + px.$$

7. На столе лежит блин (многоугольник). Костя хочет сделать один прямолинейный разрез таким образом, чтобы он проходил через указанную Артёмом точку. Докажите, что Костя может сделать это, если **(a)** точка находится вне блина; **(b)** точка находится внутри блина.
(c) На плоскости нарисованы два блина. Докажите, что можно провести прямолинейный разрез таким образом, чтобы разрезать на фигуры равной площади оба этих блина одновременно.

8. Пусть положительное число c фиксировано, $a_n = (\frac{n}{c})^n$, $b_n = n!$.

Докажите, что $a_n \ll b_n$ при $c > e$ и $a_n \gg b_n$ при $c < e$.

Список вопросов к зачёту

1. Теорема Франкла-Уилсона.

2. Контрпример Алона для гипотезы Борсука.

3. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в n-элементном множестве так, чтобы никакое из них не содержало другое?

4. Критерий того, что полицейское число графа равно 1. Полицейское число n-мерного параллелепипеда.

5. Докажите оценку для графа с n вершинами: $c(G) \leqslant \frac{c_1 n \log\log n}{\log n}$ для некоторой константы c_1.

6. Существование конечной проективной плоскости простого порядка. Пример, как построить $2^n - 1$ подмножеств размера 2^{n-1} в $2^n - 1$-элементном множестве, так, чтобы любые два из них пересекались по 2^{n-2} элементам.

7. Теорема Форда-Фалкерсона. Существование максимального потока. Доказательство рёберной теоремы Менгера.

8. Основная теорема о симметрических многочленах. Алгебраическая замкнутость поля алгебраических чисел.

9. Квадратичный закон взаимности. Доказательство через гауссовы суммы.

10. Основная теорема алгебры.

11. Задача о поиске n-угольника с данным периметром максимальной площади.

12. Теорема о девяти точках на кубической кривой и вывод теорем Паскаля и Паппа из неё.

13. Два определения числа e, а также e^x. Сравнение скорости роста $n!$ и $\left(\frac{n}{c}\right)^n$ при $c < e$ и при $c > e$.

14. Вектор Шепли.

15. Группы. Задание некоммутативной группы из 21 элемента через образующие и соотношения. Решение задач на разрезание с помощью диаграмм. Решение задачи про прямоугольник, разрезанный на меньшие прямоугольники с целой стороной.

16. Доказательство существования единственности проективного преобразования, переводящего данные 4 точки общего положения в другие 4 точки общего положения.

17. Предельный переход в геометрии и теорема о бабочке.

18. Теорема фон Штаудта.

Редактор *Голованов А. И.*
TEXнический редактор *Попов Л. А.*
Корректор *Волянский Дмитрий*
Корректор *Минаев Глеб*
Корректор *Петров Сергей*

Сдано в набор 22.07.18. Подписано к печати 24.07.18. Формат A5
Бумага белая. Печать нормальная.
Заказ 146. Тираж 100.
Издательство «Ильдар»