Разбор задач вступительного теста на кружок по математике для 7 класса

За каждый верный ответ добавлялось 2 балла, за неверный ответ вычитался 1 балл. Отсутствие ответа никак не оценивалось.

Ответы

1				
Найдётся хотя бы одна коробка, в которой лежит не менее 7 шишек				
2	**3**	**4**	**5**	**6**
1494	51	9	14	20
7	**8**	**9**	**10**	**11**
Слесарь – Сидоров, *токарь* – Иванов, *фрезеровщик* – Петров	62	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 41$	242	9

Разбор

Задание 1. Завершите фразу: «Если в 11 коробок разложить 70 шишек, то…», так, чтобы она получилась максимально информативной, но верной.

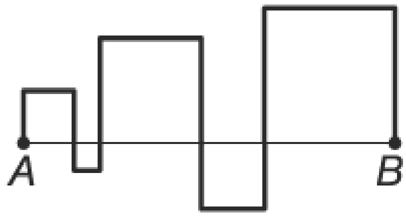
Решение. *... найдётся хотя бы одна коробка, в которой лежит не менее 7 (более 6) шишек.*

Комментарий: *любые ответы, опирающиеся на какой-то конкретный способ раскладывания шишек по коробкам, заведомо неверны — ответ не должен зависеть от распределения шишек по коробкам.*

Задание 2. Подберёзовики растут только под берёзами и осинами. Червяки живут только в подберёзовиках. Под каждой берёзой в роще растёт по 8 подберёзовиков, под каждой осиной – по 6 подберёзовиков. В каждом подберёзовике живёт по 9 червяков. Сколько червяков живёт в роще, если в ней 11 берёз и 13 осин?

Решение. *Под берёзами растёт $11 \cdot 8 = 88$ подберёзовиков, а под осинами $13 \cdot 6 = 78$ подберёзовиков. Всего в роще растёт $78 + 88 = 166$ подберёзовиков. Следовательно, в роще живёт $166 \cdot 9 =$* ***1494 червяка.***

Задание 3. Отрезок AB длины 17 см пересечен ломаной линией, как показано на рисунке. При этом получилось пять квадратов. Чему равна длина ломаной?



Решение. *Заметим, что каждый из маленьких отрезков, на которые ломаная разбивает отрезок АВ, является стороной одного из пяти квадратов. Участок ломаной, начинающийся и заканчивающийся в концах такого отрезка, образует три оставшиеся стороны квадрата. Значит, этот участок ломаной в три раза длиннее, чем отрезок, на который он опирается. Следовательно, длина всей ломаной в три раза больше длины отрезка АВ.* ***Длина ломаной 17 · 3 = 51 (см)****.*

Задание 4. Найдите остаток от деления числа $2019 \cdot 2020 + 1111 \cdot 327$ на 11.

Решение. *Заметим, что число 1111 делится на 11, значит, второе слагаемое делится на 11. Поэтому достаточно найти остаток от деления на 11 числа 2019 · 2020.*

Заметим, что число 2013 делится на 11 без остатка. $2019 \cdot 2020 = (2013 + 6) \cdot 2020 = 2013 \cdot 2020 + 6 \cdot 2020 = 2013 \cdot 2020 + 6 \cdot (2013 + 7) = 2013 \cdot 2020 + 6 \cdot 2013 + 6 \cdot 7 = 2013 \cdot 2020 + 6 \cdot 2013 + 42$.

Первые два слагаемых этой суммы делятся на 11, значит, она даёт такой же остаток от деления на 11, как и 42, то есть ***9****.*

Задание 5. Семеро семиклассников готовили проекты для научно-технической конференции. Известно, что в подготовке каждого проекта участвовало ровно два семиклассника, и каждый семиклассник принял участие в подготовке ровно четырёх проектов. Сколько всего проектов подготовили семиклассники для конференции?

Решение. *Обозначим каждого из 7 семиклассников точкой и будем соединять две точки отрезком, если соответствующие семиклассники готовили проект вместе. Тогда проектов будет столько же, сколько отрезков. Поскольку каждый семиклассник участвовал в подготовке четырёх проектов, из каждой точки выходит по 4 отрезка. Из всех точек выходит 7 · 4 = 28 отрезков, однако при этом каждый отрезок посчитан ровно два раза (как выходящий из одного конца и как выходящий из второго. Следовательно, проведено 28 : 2 = 14 отрезков и было подготовлено* ***14 проектов****.*

Задание 6. Сколько разных слов (необязательно осмысленных) можно получить из слова АБАКА, переставляя (но не убирая) в нём буквы? Перечислять все слова не нужно!

Решение. *Если бы все буквы в слове были разными ($А_1БА_2КА_3$), то на первое место в слове можно было бы поставить одну из 5 букв, на второе – одну из четырёх оставшихся и так далее. Получилось бы 5·4·3·2·1 = 120 слов. Но из-за того, что буквы $А_1$, $А_2$ и $А_3$ на самом деле одинаковые, те слова, которые отличаются только порядком этих букв, будут совпадать (например, $А_1БА_2КА_3$ и $А_1БА_3КА_2$ — одинаковые слова). Из трёх различных букв можно составить 3·2·1 = 6 различных слов, то есть все слова можно разбить на группы по 6 слов, отличающихся только порядком пронумерованных букв А (и совпадающих, если* *буквы* А *не пронумерованы). Значит, из букв слова* АБАКА *можно составить* $120 : 6 = 20$ *слов.*

Задание 7. На заводе работают слесарь, токарь и фрезеровщик: Иванов, Петров и Сидоров. Слесарь младше всех и у него нет ни братьев, ни сестёр. Петров старше токаря и женат на сестре Иванова. Назовите фамилии слесаря, токаря и фрезеровщика (напишите только фамилии рабочих, объяснения писать не надо!).

Решение. *Петров не может быть ни токарем, ни слесарем, так как слесарь младше всех, а Петров старше токаря. Следовательно,* ***Петров — фрезеровщик****. Иванов не может быть слесарем, поскольку у Иванова есть сестра, а у слесаря – нет. Значит,* ***фамилия слесаря — Сидоров, а токаря — Иванов.***

Задание 8. Летели сколько-то гусей. На первом озере села половина гусей и ещё один гусь, остальные полетели дальше; на втором озере снова села половина гусей и ещё один гусь, остальные полетели дальше; на третьем озере снова села половина гусей и ещё один гусь, остальные полетели дальше; на четвёртом озере снова села половина гусей и ещё один гусь, остальные полетели дальше; а когда на пятом озере села половина гусей и ещё один гусь, – дальше лететь стало некому. Сколько гусей летело изначально? Пишите только ответ!

Решение. *На последнем озере села половина гусей и ещё один гусь, и дальше лететь стало некому. Значит, 1 гусь составляет половину от всех, кто прилетел на последнее озеро. Значит, с четвёртого озера улетело 2 гуся. Заметим, что половина количества гусей, прилетевших на озеро, на 1 больше, чем количество гусей, улетевших с этого озера. Значит, количество гусей улетевших с озера, на 2 меньше, чем количество гусей, севших на нём. Заполним таблицу:*

Номер озера	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Сколько гусей улетело	*2*	*2*	*6*	*14*	*30*
Сколько гусей село	-	*4*	*8*	*16*	*32*
Сколько гусей прилетело	*2*	*6*	*14*	*30*	***62***

Ответ: на первое озеро прилетело 62 гуся.

Задание 9. Разложите на простые множители число 32472.

Решение. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 41$.

Задание 10. Сколько чисел, делящихся на 5, находится между 809 и 2019?

Решение. *Каждое пятое натуральное число делится на 5. 809 : 5 = 161 (ост. 4); 2019 : 5 = 403 (ост. 4). Значит, чисел, меньших 2019 и делящихся на 5, 403, а чисел,* *меньших 809 и делящихся на 5, 161. Следовательно, между 809 и 2019 находится 403 – 161 = 242 числа, делящихся на 5.*

Задание 11. Сколько существует десятизначных чисел, делящихся на 9, в которых присутствуют только цифры 0 и 5?

Решение. *Если число делится на 9, то его сумма цифр делится на 9. Следовательно, сумма всех пятёрок, присутствующих в записи числа, делится на 9. Такое возможно только если количество пятёрок делится на 9. Поскольку речь идёт о десятизначном числе, в нём будет ровно 9 пятёрок и один ноль. В старшем разряде 0 стоять не может, а в любом из остальных — может. Значит,* ***таких десятизначных чисел 9.***