Разбор задач вступительного теста на кружок по математике для 8 класса

Каждая верно решённая задача добавляла 1 балл, баллы не вычитались.

Ответы

1	2	3	4	5
80	45	$\angle A = 50°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 20°$	24	3 км/ч
6	**7**	**8**	**9**	**10**
45	$d < c < a < b$	15°, 45°, 120°	38	б, в, г (*все ответы!*)

Разбор

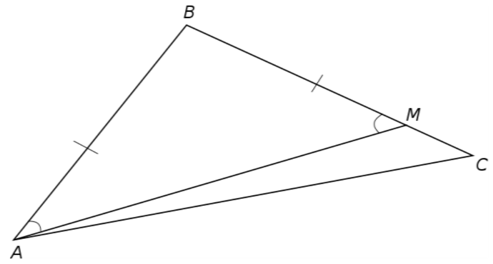
1. С 1 января 2019 года цену за коробку конфет «Ну-ка, отними!» два раза поднимали на 50%, а 1 сентября 2019 года такие коробки стали продавать за полцены. Сколько стоила коробка конфет «Ну-ка, отними!» 1 января 2019 года, если 1 сентября 2019 года она стоила 90 рублей?

Решение. *90 рублей — половина цены коробки конфет, значит, после второго повышения цен коробка конфет стоила 180 рублей. 180 рублей составляют 150% от предыдущей цены, значит, после первого повышения коробка конфет стоила (180 : 150) · 100 = 120 рублей, а 1 января — (120 : 150) · 100 =* ***80 рублей.***

2. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

Решение. *Рассмотрим некоторое натуральное число a. Пусть x — цифра, стоящая в числе a в разряде единиц ($x \le 9$), b — число, которое получится, если зачеркнуть цифру единиц числа a ($b \ge 1$; например, при $a = 128$ $x = 8$ и $b = 12$). Тогда $a = 10 \cdot b + x$, и если вставить 0 между цифрой единиц и цифрой десятков, получится число $100 \cdot b + x$. По условию, $100 \cdot b + x = 9 \cdot (10 \cdot b + x)$. Преобразовав это выражение, получим такое равенство: $5 \cdot b = 4 \cdot x$. Левая часть равенства делится на 5, значит и правая должна делиться на 5. Следовательно, x делится на 5. Поскольку x — цифра, она может быть равной только 0 или 5. При $x = 0$ $b = 0$ и $a = 10 \cdot b + x = 0$ не является натуральным. При $x = 5$ получаем $b = 4$, следовательно,* ***искомое число ровно одно и это 45****.*

3. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M. При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35°$, $\angle CAM = 15°$. Найдите углы треугольника ABC.



Решение. *$\angle A = \angle BAM + \angle CAM = 50°$.*

$\angle BAM = \angle AMB$ как углы при основании равнобедренного треугольника ABM. Воспользуемся теоремой о сумме углов треугольника. В треугольнике ABM $\angle B = 180° – 2\angle BAM = 110°$. В треугольнике ABC $\angle C = 180° – \angle A – \angle B = 20°$.

Ответ: $\angle A= 50°$, $\angle B =110°$, $\angle C =20°$.

4. Сколько различных натуральных делителей имеет число 360?

Решение. *Разложим 360 на простые множители: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Таким образом, в разложение на простые множители некоторого натурального делителя 360 два может входить не более, чем в 3й степени (в 0й, 1й, 2й или 3й); три — не более, чем во 2й; пять — не более, чем в 1й.* ***Количество различных натуральных делителей числа 360*** *равно количеству способов составить произведение из не более, чем трёх, двоек, не более, чем двух, троек и не более, чем одной пятёрки, то есть* ***$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.***

5. Катер плыл против течения реки. Когда катер проходил мимо деревни Петушково, оттуда вниз по течению отправился плот. Проплыв еще 20 минут против течения, катер развернулся и догнал плот у деревни Коровкино. Расстояние между деревнями равно 2 км. Найдите скорость течения реки (в км/ч).

Решение. *Пусть V_p км/ч — скорость течения реки (и скорость плота), V_k км/ч — собственная скорость катера, t ч — время, прошедшее с момента отправления плота до его встречи с катером.*

<u>Способ 1</u> По течению реки катер двигался $(t – 1/3)$ ч со скоростью $(V_k + V_p)$ км/ч, пройденное расстояние составило $(V_k + V_p)\cdot(t – 1/3)$ км.

Против течения реки катер двигался 1/3 ч со скоростью $(V_k – V_p)$ км/ч, пройденное расстояние составило $(V_k – V_p) /3$ км.

Заметим, что $(V_k + V_p)\cdot(t – 1/3) = (V_k – V_p) /3 + 2$. Преобразуем:

$$(V_k + V_p)\cdot t =2V_k /3 + 2$$

$$V_k t + V_p t =2V_k /3 + 2$$

Поскольку $V_p t$ — расстояние, пройденное плотом, $V_p t = 2$, $V_k t =2V_k /3$, $t = 2/3$.

Итак, плот находился в пути 2/3 часа и проплыл за это время 2 км. Скорость течения реки равна ***3 км/ч****.*

<u>*Способ 2*</u> *Перейдём в систему отсчёта, связанную с плотом. Когда катер удаляется от плота, он движется относительно него со скоростью* $(V_k - V_p)+V_p = V_k$. *Когда катер приближается к плоту, он движется относительно него со скоростью* $(V_k + V_p) - V_p = V_k$. *Таким образом, в этой системе отсчёта в обе стороны катер движется с одной и той же скоростью, значит, против течения и по течению он шёл по 20 минут. За 40 минут река сносит плот на 2 км, значит, скорость течения равна* ***3 км/ч****.*

6. 15 восьмиклассников готовили номера для конкурса талантов. Известно, что в подготовке каждого номера участвовало ровно два восьмиклассника и каждый восьмиклассник принял участие в подготовке шести номеров. Сколько всего номеров подготовили восьмиклассники для конкурса талантов?

Решение. *Обозначим каждого из 15 восьмиклассников точкой и будем соединять две точки отрезком, если соответствующие восьмиклассники готовили номер вместе. Тогда номеров будет столько же, сколько отрезков. Поскольку каждый восьмиклассник участвовал в подготовке шести номеров, из каждой точки выходит по 6 отрезков. Из всех точек выходит* $15 \cdot 6 = 90$ *отрезков, однако при этом каждый отрезок посчитан ровно два раза (как выходящий из одного конца и как выходящий из второго. Следовательно, проведено 90 : 2 = 45 отрезков и было подготовлено* ***45 номеров****.*

7. Расположите дроби $a = \frac{2019}{2020},\ b = \frac{2019}{2018},\ c = \frac{2018}{2019},\ d = \frac{2018}{2020}$ в порядке возрастания.

Решение. *Заметим, что* $b = \frac{2019}{2018} > 1$, *а остальные дроби меньше* 1. *Из двух дробей с одинаковым знаменателем больше та, у которой числитель больше, поэтому* $a = \frac{2019}{2020} > \frac{2018}{2020} = d$. *Из двух дробей с одинаковым числителем больше та, знаменатель которой меньше, поэтому* $c = \frac{2018}{2019} > \frac{2018}{2020} = d$. *Осталось сравнить дроби* $\frac{2019}{2020}, \frac{2018}{2019}$.

<u>*Способ 1.*</u> *Приведём дроби к общему знаменателю.* $a = \frac{2019 \cdot 2019}{2020 \cdot 2019}$, $c = \frac{2018 \cdot 2020}{2019 \cdot 2020}$. *Рассмотрим разность 2019·2019 – 2018·2020 =*
$= 2019 \cdot 2019 - 2018 \cdot 2020 = (2020 - 1) \cdot 2019 - 2018 \cdot 2020 =$

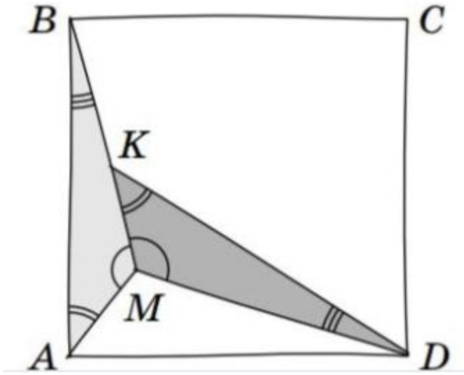
$= 2020 \cdot (2019 - 2018) - 2019 = 2020 - 2019 = 1$. *Следовательно,* $a > c$.

<u>Способ 2.</u> Заметим, что $1-\frac{2019}{2020}=\frac{1}{2020}$ *и* $1-\frac{2018}{2019}=\frac{1}{2019}$,

то есть $1-a<1-c$. *Следовательно,* $a=\frac{2019}{2020}>\frac{2018}{2019}=c$.

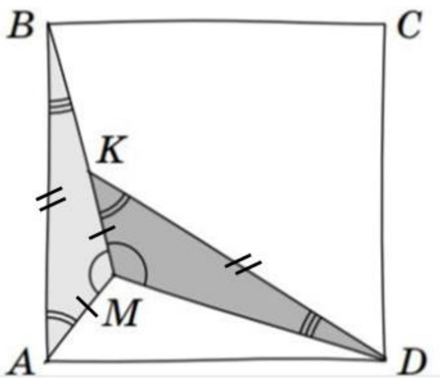
В порядке возрастания дроби располагаются так: $\mathbf{d<c<a<b}$.

8. На приведённом ниже чертеже *ABCD* — квадрат, а треугольники *BMA* и *KDM* равны. Найдите углы этих треугольников.



Решение. *В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны. Отметим их на рисунке.*

Заметим, что AB = AD как стороны квадрата, следовательно, AD = KD. Тогда треугольники KDM и AMD равны по трём сторонам (MD общая, KD = AD, AM = MK).



Значит, $\angle MKD=\angle BAM=\angle MAD=45°$ *(*$\angle BAM+\angle MAD=\angle BAD$*, углу квадрата);* $\angle KMD=\angle AMK=\angle AMD=120°$ *(в сумме эти три угла дают 360°);* $\angle KDM=\angle MBA=\angle MDA=15°$ *(по теореме о сумме углов треугольника).*

Ответ: углы треугольников равны 15°, 45° и 120°.

9. На сколько нулей оканчивается произведение $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot157$?

Решение. *Если число оканчивается на k нулей, оно делится на* 10^k. *Если число делится на* 10^k, *оно делится на* 5^k *и на* 2^k. *Таким образом, нужно понять, сколько раз 2 и 5 встречаются в разложении этого произведения на простые множители. Заметим, что 2 встречается не менее 78 раз, в разложении каждого чётного числа из произведения, а 5 — реже, в разложении каждого пятого. Поэтому достаточно посчитать, сколько раз встречается 5.*

5 как простой множитель один раз встречается в разложении каждого пятого числа (157 : 5 = 31 число), ещё один раз — каждого 25-го (157 : 25 = 6 чисел) и ещё один раз — в каждого 125-го, такое число в этом ряду одно.

Таким образом, данное произведение делится на $5^{31+6+1} = 5^{38}$ *и* ***оканчивается 38 нулями****.*

10. В лесу растут яблони и сосны, причем каждая яблоня ниже какой-то сосны. Какие из следующих утверждений могут оказаться верными? Перечислите все варианты.

(*а*) Каждая сосна ниже любой яблони.
(*б*) Каждая сосна выше любой яблони.
(*в*) Какая-то сосна ниже любой яблони.
(*г*) Какая-то сосна выше любой яблони.

Решение. *Посмотрим на самую низкую яблоню из этого леса: какая-то из сосен должна быть выше неё. В случае (а) все сосны ниже любой, в том числе и самой низкой, яблони, значит, утверждение (а) не может оказаться верным. Заметим, что если одна из сосен (но не все) ниже любой яблони (в), утверждение может оказаться верным, если для каждой яблони можно показать сосну, которая её выше. Например, представьте себе лес, в котором одна сосна выше всех яблонь, а вторая ниже всех яблонь (возможно, есть какие-то ещё сосны, они могут быть любой высоты).*

Посмотрим на самую высокую сосну этого леса. Если она выше любой яблони (б, г) — то фраза «каждая яблоня ниже какой-то сосны» верна: все яблони оказались ниже самой высокой сосны.

Верными могут быть утверждения б, в, г.