11 июля

Точка как окружность

1. Прямые AB и AC – касательные к окружности ω. Точки M и N – середины отрезков AB и AC соответственно. Точка P – произвольная точка на прямой MN. Докажите, что $PA = PD$, где PD – касательная к ω.

2. Дана окружность ω и фиксированная точка A вне окружности. Через точку A проводятся окружности ω', которые касаются окружности ω в точке B. Касательные, проведенные в точках A и B к окружности ω', персекаются в точке M. Докажите, что все точки M лежат на одной прямой.

3. Вписанная окружность (I – центр) касается сторон AB, BC и AC в точках C_0, A_0 и B_0 соответственно. Прямая BI пересекает A_0C_0 в точке K. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BKB_0 лежит на прямой AC.

4. Из точки A, лежащей вне окружности ω, проведены касательные AB и AC (B и C лежат на окружности ω). Точки E и F – середины отрезков AB и AC соответственно. На прямой EF выбрана произвольная точка D, из которой к ω проводятся касательные DP и DQ (P и Q лежат на ω). Прямая PQ пересекает прямую EF в точке M. Докажите, что $\angle DAM = 90^\circ$.

5. Точка I – инцентр треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку I перпендикулярно прямой BI, пересекает прямую AC в точке B_1. Аналогично определяются точки A_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.