5 июля

Квадратный трехчлен

1. Известно, что $b > a + c > 0$. Верно ли, что тогда квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня?

2. Докажите, что уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ при любых действительных a, b, c имеет действительные корни.

3. Положительные числа $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ удовлетворяют неравенствам $b_1^2 \leqslant 4a_1c_1$, $b_2^2 \leqslant 4a_2c_2$. Докажите, что $4(a_1+a_2+7)(c_1+c_2+2) > (b_1+b_2+1)^2$.

4. Может ли при нечетных a, b, c уравнение $ax^2+bx+c=0$ иметь рациональные корни?

5. Существуют ли два квадратных трехчлена x^2+bx+c и $2x^2+(b+1)x+(c+1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня?

6. Известно, что корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ – целые числа, а p, q – простые. Найдите p, q.

7. Найдите сумму квадратов корней уравнения $(x^2+2x)^2-2021(x^2+2x)+2020=0$.

8. Квадратный трехчлен x^2+ax+b имеет целые корни, по модулю большие двух. Докажите, что число $a+b+1$ составное.

9. У квадратного трехчлена $f(x) = x^2+ax+b$ два корня, один из которых принадлежит промежутку $(0,1)$, а второй не принадлежит этому промежутку. Докажите, что $f(b) \leqslant 0$.

10. Учитель написал на доске квадратный трехчлен $x^2+10x+20$. Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на единицу по своему выбору либо коэффициент при x, либо свободный член. В результате получился трехчлен $x^2+20x+10$. Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен с целыми корнями?

11. Учитель выдал каждому ученику квадратный трехчлен, а потом написал на доске четыре числа и велел каждому ученику подставить эти четыре числа в его квадратный трехчлен. У Васи получились значения $2, 3, 5$ и 8. Петя успел подставить только первые три числа и получил $16, 15$ и 13, а когда он собирался подставить четвертое число, оказалось, что учитель уже стер задание с доски. Как Пете найти четвертое значение?