

7 июля

## Формула включения-исключения

**Упражнение.** В данной задаче через  $|A|$  обозначается количество элементов множества  $A$ . Пусть  $A, B, C$  - конечные множества. Докажите, что

а)  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

б)  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

в)  $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap \dots \cap A_n|$

1. Внутри фигуры площади 6 расположено три многоугольника площади не менее 3 каждый. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не менее 1.
2. Ульяна, Миша и Саша решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. На сколько отличается количество трудных задач от количества легких?
3. В самолете 50 посадочных мест. Сколькими способами пассажиры могут расположиться так, чтобы никто не сидел на своем месте?
4. Сколько чисел от 1 до 1000000 не являются ни точным квадратом, ни точным кубом, ни четвертой степенью.
5. Каждая сторона в треугольнике  $ABC$  разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки  $A, B, C$  не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника  $ABC$ ?