1 июля

Метод Штурма

1. Пусть $0 \leqslant a < b$. Как меняются (увеличиваются или уменьшаются) следующие выражения при «сближении» a и b с фиксированной суммой $a+b$? (Т.е. $a < a' < b' < b$ и $a'+b' = a+b$).

ab	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$	a^2+b^2	a^n+b^n	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$

2. Пусть $0 \leqslant a < b$. Как меняются (увеличиваются или уменьшаются) следующие выражения при «сближении» a и b с фиксированным произведением ab? (Т.е. $a < a' < b' < b$ и $a'b' = ab$).

$a+b$	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$	a^2+b^2	a^n+b^n	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$

3. Числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n положительны. Докажите, что если «сближать» числа так, чтобы a) сумма; b) произведение чисел оставалось неизменным, можно получить набор из одинаковых чисел.

Суть метода. Пусть есть выражение от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Чтобы оценить его, можно, сохраняя сумму $x_1+\ldots+x_n$ или произведение $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, сближать или наоборот отдалять пары переменных и следить за тем, как меняется выражение.

4. Пусть $x_1, \ldots, x_n > 0, x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Тогда $x_1 + \ldots + x_n \geqslant n$.

5. Докажите, что если $x_1, \ldots, x_n > 0, x_1 + \ldots + x_n = 1$, то $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{1}{n}$.

6. Докажите, что $(1+\frac{1}{a_1}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{1}{a_n}) \geqslant (n+1)^n$, где $a_1, \ldots, a_n$ – положительные числа и $a_1 + \ldots + a_n = 1$.

7. Докажите, что $\sqrt{1+4a}+\sqrt{1+4b}+\sqrt{1+4c}+\sqrt{1+4d} \leqslant 4\sqrt{2}$, где $a, b, c, d \geqslant 0$ и $a+b+c+d = 1$.

8. Докажите, что $\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}}$, где $x_1, \ldots, x_n \geqslant 1$.

9. Пусть $x_1, \ldots, x_n > 0, x_1 + \ldots + x_n = 1$. Тогда $\frac{(1+x_1)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)}{(1-x_1)\cdot\ldots\cdot(1-x_n)} \geqslant (\frac{n+1}{n-1})^n$.

10. **(Неравенство о средних.)** Докажите, что для положительных чисел a_1, $\ldots$, a_n верно

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$