12 июля

Транснеравенство

Упражнение. Пусть $x_1 \geqslant x_2$, $y_1 \geqslant y_2$. Докажите, что $x_1y_1 + x_2y_2 \geqslant x_1y_2 + x_2y_1$.

Транснеравенство. Имеется два упорядоченных набора чисел: $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ – некоторая перестановка чисел $b_1, \ldots, b_n$. Тогда

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + \ldots + a_nc_n \geqslant a_1b_n + \ldots + a_nb_1.$$

Замечание. В транснеравенстве не требуется положительности чисел!

Идея! Транснеравенство можно использовать при доказательстве симметричных неравенств (не меняющихся при любой перестановке переменных), хотя, казалось бы, об упорядоченнгости значений переменных в условии ничего не сказано. Так как перестановки переменных ничего не меняют, можно без ограничения общности предположить, что $a \geqslant v \geqslant c$.

Упражнение 1. Для произвольных a, b, c докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

Упражнение 2. Для произвольных положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ докажите, что $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n$.

Упражнение 3. Для любых положительных x, y, z докажите, что $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leqslant \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$.

1. Для положительных a, b, c, d докажите, что $a^3+b^3+c^3+d^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2d+d^2a$.

2. Для произвольных a, b, c докажите, что $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^3b + b^3c + c^3a$.

Далее все переменные положительны! Докажите следующие неравенства:

3. $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \leqslant \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$.

4. $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant 1$, если $a + b + c = 1$.

5. $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab$.

6. $2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$.

7. $\frac{a^3b}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} + \frac{a^3c}{b} + \frac{c^3b}{a} + \frac{b^3a}{c} \geqslant 6abc$.

8. $\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

9. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.