МатБой

8 июля

1. Иррациональные числа x и y таковы, что все три числа xy, x^2+y, y^2+x рациональны. Найдите все возможные значения $x+y$.

2. На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых $n+1$ дуг с длинами 1, 2, $\ldots$, $n+1$ и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.

3. Даны положительные a, b, c, d, такие что $a+b+c+d=4$. Докажите неравенство

$$\tfrac{1+ab}{1+b^2c^2}+\tfrac{1+bc}{1+c^2d^2}+\tfrac{1+cd}{1+d^2a^2}+\tfrac{1+da}{1+a^2b^2}\geqslant 4$$

4. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает вторично его стороны AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке P. Точка H — проекция P на BC. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков CP, BP и AB проходит через точку H.

5. Двое играют в следующую игру. Имеется доска, на которой написано число 1000, и кучка из 1000 спичек. За ход каждый из игроков (ходят по очереди) может либо взять из кучки, либо положить в нее не более 5 спичек (исходно у обоих игроков нет ни одной спички), а затем на доску записывается число спичек в кучке после данного хода. Проигрывает тот, после чьего хода на доске появится уже имеющееся на ней число. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

6. Пусть $x_1=20, x_2=21, x_{n+1}=x_{n-1}-1/x_n$ при x_n не равном 0 и 0 иначе. Доказать, что рано или поздно в последовательности появится 0, и найти индекс первого x_i, равного 0.

7. На бесконечной клетчатой плоскости в каждой клетке записано рациональное число. Известно, что существует фигура из 20 клеток такая, что для любого её расположения на плоскости, сумма чисел в накрытых клетках положительна. Докажите, что для любой фигуры из 21 клетки существует её расположение на плоскости такое, что сумма чисел в накрытых клетках будет положительна.

8. У человека есть 20 чашек, выстроенных в ряд, пустой мешок и неограниченный запас камешков. В начале в каждой чашке лежит по одному камешку. Каждым ходом человек может совершить одно из двух действий:

(i) изъять один камешек из любой чашки, кроме последней, и добавить в следующую чашку два камешка;

(ii) изъять один камешек из любой чашки, кроме последней, и переложить один камешек из следующей чашки в мешок.

Игра заканчивается, когда человек не может сделать ход. Какое наибольшее количество камешков может оказаться в мешке к этому моменту?

9. Найдите все натуральные числа n, при которых число 5^n-1 является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.

10. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. На его сторонах AB и AC выбраны соответственно точки E и F. Прямые BF и CE пересекаются в точке K. Прямая, проведенная через C параллельно AB, и прямая, проведенная через B параллельно CE, пересекаются в точке L. Прямые AM и CL пересекаются в точке N. Докажите, что $KN \parallel FL$.

МатБой
8 июля

1. Иррациональные числа x и y таковы, что все три числа xy, x^2+y, y^2+x рациональны. Найдите все возможные значения $x+y$.

2. На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых $n+1$ дуг с длинами 1, 2, $\ldots$, $n+1$ и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.

3. Даны положительные a, b, c, d, такие что $a+b+c+d=4$. Докажите неравенство

$$\tfrac{1+ab}{1+b^2c^2}+\tfrac{1+bc}{1+c^2d^2}+\tfrac{1+cd}{1+d^2a^2}+\tfrac{1+da}{1+a^2b^2}\geqslant 4$$

4. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает вторично его стороны AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке P. Точка H — проекция P на BC. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков CP, BP и AB проходит через точку H.

5. Двое играют в следующую игру. Имеется доска, на которой написано число 1000, и кучка из 1000 спичек. За ход каждый из игроков (ходят по очереди) может либо взять из кучки, либо положить в нее не более 5 спичек (исходно у обоих игроков нет ни одной спички), а затем на доску записывается число спичек в кучке после данного хода. Проигрывает тот, после чьего хода на доске появится уже имеющееся на ней число. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

6. Пусть $x_1=20, x_2=21, x_{n+1}=x_{n-1}-1/x_n$ при x_n не равном 0 и 0 иначе. Доказать, что рано или поздно в последовательности появится 0, и найти индекс первого x_i, равного 0.

7. На бесконечной клетчатой плоскости в каждой клетке записано рациональное число. Известно, что существует фигура из 20 клеток такая, что для любого её расположения на плоскости, сумма чисел в накрытых клетках положительна. Докажите, что для любой фигуры из 21 клетки существует её расположение на плоскости такое, что сумма чисел в накрытых клетках будет положительна.

8. У человека есть 20 чашек, выстроенных в ряд, пустой мешок и неограниченный запас камешков. В начале в каждой чашке лежит по одному камешку. Каждым ходом человек может совершить одно из двух действий:

(i) изъять один камешек из любой чашки, кроме последней, и добавить в следующую чашку два камешка;

(ii) изъять один камешек из любой чашки, кроме последней, и переложить один камешек из следующей чашки в мешок.

Игра заканчивается, когда человек не может сделать ход. Какое наибольшее количество камешков может оказаться в мешке к этому моменту?

9. Найдите все натуральные числа n, при которых число 5^n-1 является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.

10. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. На его сторонах AB и AC выбраны соответственно точки E и F. Прямые BF и CE пересекаются в точке K. Прямая, проведенная через C параллельно AB, и прямая, проведенная через B параллельно CE, пересекаются в точке L. Прямые AM и CL пересекаются в точке N. Докажите, что $KN \parallel FL$.