

2 июля

Направленные углы

Определение. *Направленным углом* между прямыми l и m называют угол $\angle(l, m)$, на который нужно повернуть прямую l против часовой стрелки, чтобы получилась прямая, параллельная m .

Замечание. Значение направленного угла определено с точностью до 180° .

Свойства:

$$(1) \angle(l, l') = 0 \Leftrightarrow l \parallel l' \text{ или } l = l';$$

$$(2) \angle(l, m) = -\angle(m, l);$$

$$(3) \angle(l, n) + \angle(n, m) = \angle(l, m).$$

Утверждение 1. Точки A, B, C и D лежат на одной окружности или коллинеарны тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$.

Утверждение 2. Прямая AD является касательной к окружности, проходящей через точки A, B и C , тогда и только тогда, когда $\angle(DA, AC) = \angle(AB, BC)$.

1. (Лемма Фусса.) Две окружности пересекаются в точках M и N . Через M и N проведены прямые AB и CD , пересекающие первую окружность в точках A и C , а вторую — в точках B и D . Докажите, что $AC \parallel BD$.

2. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. На прямых AB, BC и CA выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, отличные от A, B и C . Точка P не лежит ни на одной из прямых AB, BC и CA . Докажите, что если два из трех четырехугольников $AB_1PC_1, BC_1PA_1, CA_1PB_1$ являются вписанными, то третий — тоже вписанный.

3. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка D . Через точку D проведена касательная к описанной окружности треугольника ADC , она пересекает описанную окружность треугольника BDC в точке M . Докажите, что $BM \parallel AC$.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle BAP = \angle CAQ$. Докажите, что центры описанных окружностей $\triangle ABP, \triangle ABQ, \triangle ACP, \triangle ACQ$ лежат на одной окружности.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и B_1 , окружности ω_2 и ω_3 — в точках A_2 и B_2 , окружности ω_3 и ω_4 — в точках A_3 и B_3 , окружности ω_4 и ω_1 — в точках A_4 и B_4 . Докажите, что если точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности или прямой, то точки B_1, B_2, B_3, B_4 тоже лежат на одной окружности или прямой.