8 июля

Векторы-2

1. Из произвольной внутренней точки O выпуклого n-угольника опущены перпендикуляры на прямые, содержащие стороны. На каждом перпендикуляре от точки O по направлению к стороне построен вектор, длина которого равна половине длины той стороны, на которую опущен перпендикуляр. Какова сумма построенных векторов?

2. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам?

3. Докажите, что точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OX} = t \cdot \overrightarrow{OA} + (1-t) \cdot \overrightarrow{OB}$ для некоторого t и любой точки O.

4. Из медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC составлен треугольник KMN, а из медиан KK_1, MM_1 и NN_1 треугольника KMN — треугольник PQR. Докажите, что третий треугольник подобен первому, и найдите коэффициент подобия.

5. На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника, имеющего вершинами точки деления, совпадают.

6. На плоскости нарисованы $n > 2$ различных векторов $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ с равными длинами. Оказалось, что векторы $-\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \ldots + \overrightarrow{a_n}$, $\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} + \ldots + \overrightarrow{a_n}$, $\ldots$, $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \ldots + \overrightarrow{a_{n-1}} - \overrightarrow{a_n}$ тоже имеют равные длины. Докажите, что $\overrightarrow{a_1} + \ldots + \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$.

7. Хорды AC и BD окружности с центром в точке O пересекаются в точке K. Пусть M и N – центры окружностей, описанных около треугольников AKB и CKD соответственно. Докажите, что $OM = KN$.