

11 июля

## Асимптотика

1. У Ульяны есть бесконечно много одинаковых треугольных пирожков с рыбой. Докажите, что для достаточно больших  $R$  Ульяна сможет покрыть этими пирожками более 99% круглого стола радиуса  $R$ . Вожатые разрешили Ульяне крутить пирожки, но их нельзя накладывать друг на друга и оставлять частично висящими в воздухе.

2. а) На доске написаны числа от 1 до  $10^{12}$ . Саша выписывает в тетрадку те из них, которые являются квадратами, а Маша – те, которые представимы в виде суммы куба и шестой степени. У кого получилось больше?

б) Докажите, что для подходящего  $N$  уравнение  $m^3 + t^3 + k^3 + l^3 = N$  имеет хотя бы 1000 решений в натуральных числах.

3. Дана клетчатая плоскость. Егор захотел обойти все клетки ходом коня, а Миша вырезал все клетки, обе координаты которых делятся на 10, и запретил Егору их использовать. Справится ли Егор?

4. Существует ли квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами, значения которого во всех натуральных числах являются степенями двойки?

5. (**Теорема Минковского.**) На плоскости дана центрально симметричная относительно нуля выпуклая фигура площади  $S > 4$ . Тогда в ней найдется целочисленная точка, отличная от нуля.

Доказательство. Сделайте гомотетию с коэффициентом  $\frac{1}{2}$  с центром в нуле, рассмотрите все фигуры, полученные из данной переносом на целочисленный вектор.

а) Докажите, что если какие-то две из полученных фигур пересекаются, то теорема верна.

б) Докажите, что какие-то две из полученных фигур обязательно пересекутся.

с) Приведите контрпример к теореме для  $S = 4$ .