6 июля

Массы

Определение. *Материальной точкой* (M, m) называется пара из точки плоскости M и ненулевого числа m, а само m называется *массой* материальной точки.

Определение. *Центром масс* системы материальных точек $(M_1, m_1), \ldots, (M_n, m_n)$ с ненулевой суммой масс называется такая точка Z, для которой имеет место равенство $m_1\overrightarrow{ZM_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{ZM_n} = \overrightarrow{0}$.

1. **(Основная теорема.)** Если точка Z является центром масс системы материальных точек $(M_1, m_1), \ldots, (M_n, m_n)$ с ненулевой суммой масс, то для любой точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1}+\ldots+m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1+\ldots+m_n}$.
Обратно, если для некоторой точки O выполняется это равенство, то точка Z – центр масс данной системы материальных точек.

Следствие. Для конечной системы материальных точек центр масс определяется однозначно.

2. a)**(Правило рычага.)** Центр масс Z двух материальных точек (M_1, m_1) и (M_2, m_2) расположен на прямой M_1M_2.
b) Исследуйте, где лежит центр масс в зависимости от того, какого знака массы.

3. **(Правило группировки.)** Пусть дана система материальных точек (M_1, m_1), $\ldots, (M_n, m_n)$, точка O_k – центр масс системы, состоящей из первых k из них. Тогда центр масс всей системы совпадает с центром масс системы материальных точек $(O_k, m_1 + \ldots + m_k), (M_{k+1}, m_{k+1}), \ldots, (M_n, m_n)$.

Идея! Если разделить точки на две группы и рассмотреть центры масс обеих групп, то центр масс всей системы будет лежать на прямой, их содержащей. Если сделать это еще раз, но по-другому, узнаем, что центр масс лежит на какой-то другой прямой. Из этого можно сделать вывод, что центр масс – это пересечение прямых, так как он обязан лежать на обеих и он единственен.

4. Найдите центр масс треугольника, в вершинах которого расположены одинаковые массы.

5. Пусть $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ – середины сторон AB, BC, CD, DE, EF, FA произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.

6. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD и DA. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также отрезка, соединяющего середины диагоналей.

7. Даны точки A, B, C, D, никакие три из них не коллинеарны. M, N – середины отрезков AB и CD соответственно, K – середина отрезка MN. P – точка пересечения медиан треугольника BCD. Докажите, что точки A, K, P коллинеарны.

8. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину K медианы B_1B. В каком отношении делит эта прямая сторону BC?

9. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно, такие что $AK : KB = DM : MC = a$ и $BL : LC = AN : ND = b$. Пусть P – точка пересечения отрезков KM и LN. Докажите, что $NP : PL = a$ и $KP : PM = b$.

10. В треугольнике ABC точка A_1 делит сторону BC в отношении $p : q$, считая от вершины B, а точка C_1 – сторону AB в отношении $m : n$, считая от вершины A. K – точка пересечения AA_1 и CC_1. Докажите, что $\frac{AK}{KA_1} = \frac{m}{n}(1 + \frac{p}{q})$.

11. Какие массы нужно поместить в вершины треугольника со сторонами a, b и c, чтобы центр полученной системы материальных точек оказался в:
a) точке пересечения биссектрис;
b) центре вневписанной окружности, касающейся стороны a;
c) точке Нагеля (точке пересечения отрезков, соединяющих вершину треугольника с точкой касания вневписанной окружности противоположной стороны);
d) точке Жергонна (точке пересечения отрезков, соединяющих вершину треугольника с точкой касания вписанной окружности противоположной стороны);
e) ортоцентре.