Билет 1

1. Определение многочлена и всех связанных с ним понятий. Теорема Безу.

2. Композиция элементарных движений. Классификация движений с точки зрения неподвижных точек.

3. Найдите остаток числа $2^{3^{96}}$ от деления на 239.

4. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$, где O – произвольная точка.

Билет 2

1. Транснеравенство.

2. Лемма о трезубце. Формула Эйлера.

3. Известно, что многочлен $P(x)$ дает при делении на $x-1$ остаток 5, а при делении на $x+2$ – остаток 14. Найдите остаток от деления $P(x)$ на $(x-1)(x+2)$.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. M – точка Микеля для прямых, содержащих его стороны. Докажите, что прямая MO перпендикулярна EF, где прямые AB и CD пересекаются в точке E, прямые AD и BC – в точке F.

Билет 3

1. Неравенства о средних: доказательство с помощью метода Штурма.

2. Теорема Шаля.

3. Каким числом способов можно покрасить клетки прямоугольника 2×6 так, чтобы не было полностью закрашенных квадратов 2×2?

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и B_1, окружности ω_2 и ω_3 — в точках A_2 и B_2, окружности ω_3 и ω_4 — в точках A_3 и B_3, окружности ω_4 и ω_1 — в точках A_4 и B_4. Докажите, что если точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности или прямой, то точки B_1, B_2, B_3, B_4 тоже лежат на одной окружности или прямой.

Билет 4

1. Метод Штурма: поведение выражений при сближении по сумме и произведению и обоснование процесса для n чисел.

2. Определение степени точки, другая формула степени точки. Радикальная ось и радикальный центр. Радикальная ось точки и окружности.

3. a) $\varphi(x) = 2$; b) $\varphi(x) = 28$; c) $\varphi(x) = 8$; d) $\varphi(x) = 14$.

4. Дан четырехугольник $ABCD$. На сторонах AB, BC, CD, DA отмечены точки A_1 и B_1, B_2 и C_2, C_1 и D_1, D_2 и A_2 соответственно, причем стороны делятся ими на три равные части. Докажите, что отрезки A_1D_1, B_1C_1, B_2A_2, C_2D_2 тоже делятся точками пересечения на три равные части.

Билет 5

1. КТО: доказательство через полную систему вычетов. Два алгоритма решения систем сравнений.

2. Прямая Симсона. Точка Микеля.

3. $\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}}$, где $x_1, \ldots, x_n \geqslant 1$.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность с диаметром AB пересекает высоту CC_1 и ее продолжение в точках M и N соответственно. Окружность с диаметром AC пересекает высоту BB_1 и ее продолжение в точках P и Q соответственно. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.

Билет 6

1. КТО: доказательство через обратный вычет. Два алгоритма решения систем сравнений.

2. Элементарные движения, определение движений первого и второго рода, определение скользящей симметрии. Утверждение о том, что любое движение представимо в виде композиции переноса, поворота и, возможно, осевой симметрии.

3. Теорема Минковского: на плоскости дана центрально симметричная относительно нуля выпуклая фигура площади $S > 4$, тогда в ней найдется целочисленная точка, отличная от нуля.

4. Докажите, что уравнение $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ при любых действительных a, b, c имеет действительные корни.

Билет 7

1. Определение функции Эйлера. Мультипликативность функции Эйлера. Формула функции Эйлера.

2. Определение вектора. Определение коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных векторов, определение модуля вектора. Действия с векторами.

3. $\frac{a^3b}{c}+\frac{b^3c}{a}+\frac{c^3a}{b}+\frac{a^3c}{b}+\frac{c^3b}{a}+\frac{b^3a}{c}\geqslant 6abc$, где $a,b,c>0$.

4. В пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и AED прямые, $AB=AE$ и $BC=CD=DE$. Диагонали BD и CE пересекаются в точке F. Докажите, что $FA=AB$.

Билет 8

1. Неравенство о средних: доказательство с помощью индукции.

2. Определение направленного угла, свойства. Два основных утверждения.

3. Докажите, что можно переставить все числа натурального ряда так, чтобы для любого n сумма первых n чисел делилась на n.

4. Даны точки A,B,C,D, никакие три из них не коллинеарны. M,N – середины отрезков AB и CD соответственно, K – середина отрезка MN. P – точка пересечения медиан треугольника BCD. Докажите, что точки A,K,P коллинеарны.

Билет 9

1. Теорема Эйлера. Усиление теоремы Эйлера.

2. Определение преобразования плоскости, движения. Векторные свойства движений. Свойства образов при движении. Теорема о трех гвоздях.

3. Существует ли квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами, значения которого во всех натуральных числах являются степенями двойки?

4. Из медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC составлен треугольник KMN, а из медиан KK_1, MM_1 и NN_1 треугольника KMN — треугольник PQR. Докажите, что третий треугольник подобен первому, и найдите коэффициент подобия.

Билет 10

1. Факты о многочленах и их корнях.

2. Определение материальной точки и центра масс. Основная теорема, единственность центра масс, правила рычага и группировки.

3. $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a + b + c)$, где $a, b, c > 0$.

4. Вписанная окружность (I – центр) касается сторон AB, BC и AC в точках C_0, A_0 и B_0 соответственно. Прямая BI пересекает A_0C_0 в точке K. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BKB_0 лежит на прямой AC.