1 июля

Векторы

Определение. *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости.
Обозначение. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overline{AB}$.

Утверждение. Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ назовем *эквивалентными*, если $ABDC$ – параллелограмм (возможно, вырожденный). Тогда все направленные отрезки разбиваются на классы, внутри которых любые два отрезка эквивалентны.

Определение. Классы направленных отрезков называются *векторами*.

Замечание:

(1) Словосочетание «вектор AB» означает класс направленных отрезков, содержащий направленный отрезок $\overline{AB}$;

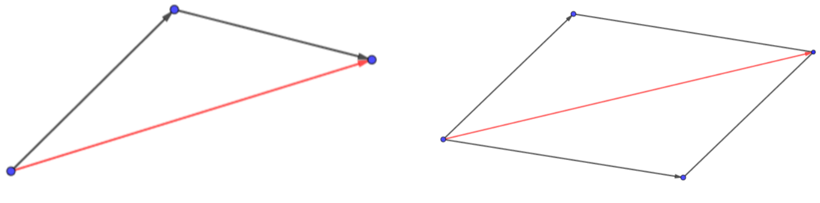
(2) Вектор можно отложить от любой точки плоскости, т.е. если даны точка O и вектор $\overrightarrow{u}$, то существует единственная точка P, такая что $\overline{OP} = \overrightarrow{u}$.

Определение. Векторы называются *коллинеарными*, если соответствующие им направленные отрезки, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой.
Если при этом они лежат на одном луче, исходящем из этой точки, то векторы называются *сонаправленными*. Если на разных – *противоположно направленными*.

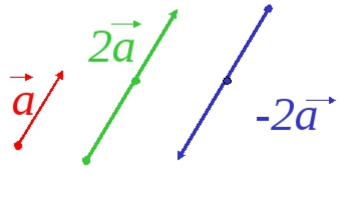
Определение. *Модулем*, или *длиной* вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.
Обозначение. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Действия с векторами:

(1) Сложение (правила треугольника и параллелограмма), вычитание;



(2) Умножение вектора на число.



1. Выполните операции с векторами: a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{ML}$; c) $\overrightarrow{XZ} - 2 \cdot \overrightarrow{YZ}$, где Y – середина отрезка XZ.

2. Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, где $ABCD$ – параллелограмм.

Ходим кругами:

3. Обобщите правило треугольника.

4. Можно ли расположить на плоскости три вектора так, чтобы модуль суммы каждых двух из них был равен 1, а сумма всех трех была равна нулевому вектору?

5. Дано несколько точек, и для некоторых пар (A, B) этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причем в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\overrightarrow{0}$.

Исчезающие векторы:

6. Докажите, что $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$, где AM – медиана треугольника ABC.

7. Дан четырехугольник $ABCD$. Точки M и N – середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что a) $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}}{2}$; b) $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}}{2}$.

8. Клетки доски 2021×2021 раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета так, что угловые клетки черные. Для каждой пары разноцветных клеток рисуется вектор, идущий из центра черной клетки в центр белой. Докажите, что сумма нарисованных векторов равна $\overrightarrow{0}$.

Свободное плавание:

9. Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно, O – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$.

10. Пусть M и N – середины отрезков AB и AC, точка P – середина отрезка MN, точка O – произвольная точка. Докажите, что $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OP}$.

11. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$, где O – произвольная точка.

12. Пусть E и F – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, K, L, M и N – середины отрезков AF, CE, BF и DE. Докажите, что $KLMN$ – параллелограмм.

13. На плоскости даны векторы, среди которых есть неколлинеарные. Сумма векторов без любого из них коллинеарна оставшемуся. Чему равна сумма всех?