3 июля

Теорема Эйлера

1. a) Пусть $x_1, \ldots, x_{\varphi(m)}$ – приведенная система вычетов по модулю m. Докажите, что для любого a, взаимно простого с m, числа $a \cdot x_1, \ldots, a \cdot x_{\varphi(m)}$ тоже образуют приведенную систему вычетов по модулю m; b) **(Теорема Эйлера.)** Пусть $(a, m) = 1$. Тогда $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mod\ m)$.

Упражнение 1. Найдите остаток от деления 3^{25} на 7.

Упражнение 2. Найдите остаток от деления 243^{129} на 34.

Упражнение 3. Найдите остаток от деления числа $2 + 2^{18} + 3^{18} + 4^{18} + 5^{18} + 6^{18}$ на 7.

2. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?

3. Докажите, что если $(a, 1001) = 1$, то $a^{3000} - 1 \vdots 1001$.

4. Найдите все такие целые числа a, что $a^{10} + 1$ делится на 10.

5. Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.

6. Известно, что $a + b + c \vdots 39$. Докажите, что $a^{37} + b^{37} + c^{37} \vdots 39$.

7. Пусть $p > 5$ – простое число. Докажите, что число $1 \ldots 1$, состоящее из $p - 1$ единицы, делится на p.

8. Найдите остаток числа $2^{3^{96}}$ от деления на 239.

9. **(Усиление теоремы Эйлера.)** Пусть $m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, а $t =$НОК$(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \ldots, \varphi(p_k^{\alpha_k}))$. Пусть $(a, m) = 1$. Тогда $a^t \equiv 1 \ (mod\ m)$.