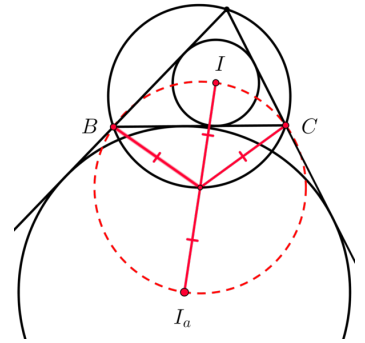


12 июля

Лемма о трезубце

1. (**Лемма о трезубце.**) Дан треугольник ABC . Биссектриса угла A пересекает описанную окружность треугольника в точке F , I – центр вписанной окружности, а I_a – центр внеписанной окружности, касающейся стороны BC . Тогда $FI = FB = FC = FI_a$.



2. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Рассмотрим треугольник, вершинами которого являются центры описанных окружностей треугольников IAB , IBC , ICA . Докажите, что центры описанных окружностей этого треугольника и треугольника ABC совпадают.

3. Постройте треугольник по центру описанной окружности O , центру вписанной окружности I и вершине A .

4. Пусть H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC , а H_a , H_b , H_c – основания высот из A , B , C на противоположные стороны. Докажите, что середины отрезков AH , BH и CH лежат на описанной окружности треугольника $H_aH_bH_c$.

5. Вокруг прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность, на меньших дугах AC и BC взяты их середины – K и P соответственно. Отрезок KP пересекает катет AC в точке N . Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Найдите угол NIC .

6. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Отметили центры окружностей, вписанных в треугольники BCD , CDA , DAB , ABC . Докажите, что отмеченные точки являются вершинами прямоугольника.

7. Радиусы описанной и вписанной окружности треугольника ABC равны R и r соответственно.

а) Точка I – центр вписанной окружности. Прямая AI вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A' . Докажите, что $IA \cdot IA' = 2Rr$.

б) (**Формула Эйлера.**) $d^2 = R^2 - 2Rr$, где d – расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника ABC .

8. В пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и AED прямые, $AB = AE$ и $BC = CD = DE$. Диагонали BD и CE пересекаются в точке F . Докажите, что $FA = AB$.