

3 июля

## Направленные углы - 2. Прямая Симсона и точка Микеля

1. Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $M$  и  $K$ . На одной окружности отметили точки  $A$  и  $B$ , а на другой –  $C$  и  $D$  так, что треугольники  $ABM$  и  $CDM$  оказались равными (точки  $B$  и  $C$  лежат в одной полуплоскости относительно прямой  $AD$ ). Докажите, что  $A$ ,  $K$  и  $C$  лежат на одной прямой и  $B$ ,  $K$  и  $D$  лежат на одной прямой.
2. (**Прямая Симсона.**) Основания перпендикуляров, опущенные из точки  $P$  на прямые, содержащие стороны треугольника  $ABC$ , лежат на одной прямой – прямой Симсона – тогда и только тогда, когда точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .
3. (**Точка Микеля.**) Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку – точку Микеля.
4. Докажите, что центры описанных окружностей четырех треугольников, полученных в результате пересечения четырех прямых, лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.
5. Центр  $O$  описанной окружности четырехугольника  $ABCD$  не лежит на диагоналях этого четырехугольника. Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ , а прямые  $AD$  и  $BC$  – в точке  $F$ . Докажите, что все пять описанных окружностей треугольников  $ABF$ ,  $CDF$ ,  $BEC$ ,  $ADE$ ,  $AOC$  пересекаются в некоторой точке  $M$ .
6. Четырехугольник  $ABCD$  вписанный. Докажите, что а) точка Микеля для прямых, содержащих его стороны, лежит на отрезке, соединяющем точки пересечения продолжений сторон, и б) прямая, проходящая через центр окружности и точку Микеля, перпендикулярна прямой, проходящей через точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны четырехугольника.
7. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой, точка  $P$  – вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $ACP$  и точка  $P$  лежат на одной окружности.