

## Уголки в прямоугольнике

04 июля

### Постановка задачи

Дан клетчатый прямоугольник  $m \times n$  ( $m, n \geq 2$ ). Есть неограниченный запас бумажных уголков из трех клеток. Уголки можно располагать внутри прямоугольника так, чтобы их границы шли по линиям сетки. Необходимо выяснить, при каких  $m$  и  $n$  можно разместить уголки так, чтобы каждая клетка была покрыта одинаковым числом слоев бумаги. В этом случае будем говорить, что прямоугольник покрывается уголками.

1. Докажите, что если прямоугольник покрывается уголками, то либо  $mn$ , либо число слоев делится на 3.
2. Докажите, что прямоугольник размером  $2 \times n$  может быть покрыт уголками в 3 слоя.
3. Докажите, что если  $mn$  четно, то прямоугольник покрывается уголками.
4. Докажите, что прямоугольник  $3 \times (2n + 1)$  не покрывается никаким числом слоев.
5. Покройте уголками в один слой какой-нибудь прямоугольник  $5 \times (2n + 1)$ .
6. Покройте уголками прямоугольник  $7 \times 7$ .
7. Укажите все прямоугольники  $m \times n$ , где  $mn$  – нечетно, которые не могут быть покрыты.
8. Укажите все прямоугольники  $m \times n$ , которые могут быть покрыты в один слой.