7 июля

Степень точки

Определение. *Степенью точки* X относительно окружности ω называется число $d^2 - r^2$, где d – расстояние от точки X до центра окружности ω, а r – радиус окружности ω.
Обозначение: $deg_\omega(X)$.

1. **(Утверждение.)** Если X лежит вне окружности ω на прямой, содержащей хорду BC, то $deg_\omega(X) = XB \cdot XC$.
Если X лежит внутри окружности ω на хорде BC, то $deg_\omega(X) = -XB \cdot XC$.
Если X лежит на окружности ω, то $deg_\omega(X) = 0$.

2. На прямой l отмечены точки A, B. Дано некоторое число c. Докажите, что на прямой l существует ровно одна точка X, такая что $AX^2 - BX^2 = c$.

3. **(Радикальная ось.)** Пусть ω_1, ω_2 – две неконцентрические окружности. Докажите, что ГМТ, для которых степень относительно ω_1 равна степени относительно ω_2, – это прямая.

4. Даны треугольник ABC и точка P внутри него. Описанные окружности треугольников ABP и ACP касаются прямой BC. Докажите, что точка P лежит на медиане, проведенной из вершины A.

5. **(Радикальный центр.)** Даны три окружности, центры которых не совпадают и не лежат на одной прямой. Найдите ГМТ, степени которых относительно этих окружностей одинаковые.

6. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

7. Дан треугольник ABC, AP и BQ – его чевианы. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей, построенных на AP и BQ как на диаметрах, проходит через ортоцентр треугольника ABC.

8. На отрезке AB выбрали точку M. На отрезках AM и BM в одну и ту же сторону построены равносторонние треугольники AMC и BMD. Их описанные окружности пересекаются по прямой MN. Докажите, что вне зависимости от выбора точки M прямая MN всегда проходит через какую-то фиксированную точку.

9. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность с диаметром AB пересекает высоту CC_1 и ее продолжение в точках M и N соответственно. Окружность с диаметром AC пересекает высоту BB_1 и ее продолжение в точках P и Q соответственно. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.

10. Дан треугольник ABC и точки P и Q на сторонах AB и AC соответственно, такие что $AP = AQ$. На стороне BC выбраны точки S и R (S лежит между B и R), такие что $\angle BPS = \angle PRS$ и $\angle CQR = \angle QSR$. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.