2 июля

Функция Эйлера

Определение. Пусть m – натуральное число. Количество чисел, взаимно простых с m и не превосходящих m, обозначается $\varphi(m)$. Функция $\varphi(m)$ называется *функцией Эйлера.*

Упражнение. Найдите значения функции Эйлера для первых двадцати натуральных чисел.

1. Докажите, что $\varphi(m)$ четно при всех $m > 2$.

2. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем m.

3. Пусть p, q – простые числа. Найдите: a) $\varphi(p)$; b) $\varphi(p^n)$; c) $\varphi(pq)$; d) $\varphi(p^a q^b)$.

4. Чему равна сумма $\varphi(1)+\varphi(p)+\varphi(p^2)+\ldots+\varphi(p^n)$, где n – некоторое натуральное число.

5. Докажите, что $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$.

6. **(Мультипликативность функции Эйлера.)** Если m и n взаимно просты, то $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

1	2	3	....	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	....	$2n$
...	...	...	...	...
$(m-1)n+1$	$(m-1)n+2$	$(m-1)n+3$	....	mn

- Сколько чисел, взаимно простых с n, в каждой строке таблицы?
- Сколько чисел, взаимно простых с m, в каждом столбце таблицы?
- Докажите мультипликативность.

7. Пусть $m = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$. Докажите, что

$$\varphi(m) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}) \cdot \ldots \cdot (p_n^{k_n} - p_n^{k_n-1}) = m \cdot (1 - \tfrac{1}{p_1}) \cdot \ldots \cdot (1 - \tfrac{1}{p_n}).$$

8. Решите уравнения: a) $\varphi(x) = 2$; b) $\varphi(x) = 28$; c) $\varphi(x) = 8$; d) $\varphi(x) = 14$.