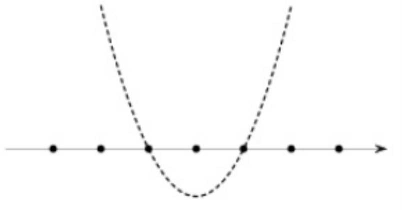
Доза 1

1. Докажите, что $2021^{3000} - 1$ делится на 1001.

2. На рисунке изображен график приведенного квадратного трехчлена (ось ординат стерлась, расстояние между соседними отмеченными точками равно 1). Чему равен дискриминант этого трехчлена?



3. $M_1, \ldots, M_6$ – середины сторон выпуклого шестиугольника $A_1 \ldots A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.

4. Докажите, что при $x \geqslant 0$ имеет место неравенство $2x + \frac{3}{8} \geqslant \sqrt[4]{x}$.

Доза 2

1. Решите систему сравнений: $\begin{cases} x \equiv 3 \ (mod\ 8) \\ x \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ x \equiv 10 \ (mod\ 25) \end{cases}$

2. Определите отношение двух чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно 25 : 24.

3. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC, M – середина стороны AC, а W – середина дуги AB описанной окружности, не содержащей C. Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении точка I делит отрезок CW?

4. Докажите, что $\sqrt{x_1^2 + (1-x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1-x_3)^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2 + (1-x_1)^2} \geqslant \frac{n}{\sqrt{2}}$.

Доза 3

1. Найдите все решения уравнения $\varphi(x) = 30$.

2. Известно, что $x + y = u + v$, $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство $x^n + y^n = u^n + v^n$.

3. В остроугольном треугольнике ABC угол C не равен углу A. M – середина стороны AC, A_1 и C_1 – основания высот из вершин A и C соответственно. A_0 и C_0 – середины отрезков A_1M и C_1M соответственно. Через вершину B провели прямую l, параллельную прямой AC. T – точка пересечения прямых A_0C_0 и l. Докажите, что $TB = TM$.

4. Докажите, что $\sqrt{(a_1 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + \ldots + b_n)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Доза 4

1. Докажите, что для любого натурального n существуют такие целые a, b, что $4a^2 + 9b^2 - 1$ делится на n.

2. Даны два многочлена натуральной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причем для них верно, что $P(P(x)) \equiv Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) \equiv Q(Q(Q(x)))$. Верно ли, что выполнено тождество $P(x) \equiv Q(x)$?

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, I – центр вписанной окружности треугольника ABD. Найдите наименьшее значение BD, если $AI = BC = CD = 4$.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы двадцать первых степеней двадцати натуральных чисел.

Доза 5

1. Докажите, что для любого натурального n существует множество S из n натуральных чисел, такое что для любых $a, b \in S$ верно, что $a - b$ делит a и b, но не делит никакие другие числа из S.

2. Даны два различных приведенных кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$, $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны восемь различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.

3. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACP и BCQ. Точка M – середина AB, точка O – центр треугольника BCQ. Докажите, что $OP = 2OM$.