

Программа Зачета. Теория

Корректность определений, свойства и теоремы требуют доказательства!

Геометрия

1. Определение вектора. Определение коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных векторов, определение модуля вектора. Действия с векторами.
2. Определение направленного угла, свойства. Два основных утверждения.
3. Прямая Симсона. Точка Микеля.
4. Определение преобразования плоскости, движения. Векторные свойства движений. Свойства образов при движении. Теорема о трех гвоздях.
5. Элементарные движения, определение движений первого и второго рода, определение скользящей симметрии. Утверждение о том, что любое движение представимо в виде композиции переноса, поворота и, возможно, осевой симметрии.
6. Теорема Шаля.
7. Композиция элементарных движений. Классификация движений с точки зрения неподвижных точек.
8. Определение материальной точки и центра масс. Основная теорема, единственность центра масс, правила рычага и группировки.
9. Определение степени точки, другая формула степени точки. Радикальная ось и радикальный центр. Радикальная ось точки и окружности.
10. Лемма о трезубце. Формула Эйлера.

Алгебра

1. Метод Штурма: поведение выражений при сближении по сумме и произведению и обоснование процесса для n чисел.
2. Неравенство о средних: доказательство с помощью индукции.
3. Неравенства о средних: доказательство с помощью метода Штурма.
4. Определение многочлена и всех связанных с ним понятий. Теорема Безу.
5. Факты о многочленах и их корнях (задача 5).
6. Транснеравенство.

Теория чисел

1. Определение функции Эйлера. Мультипликативность функции Эйлера. Формула функции Эйлера.
2. Теорема Эйлера. Усиление теоремы Эйлера.
3. КТО: доказательство через полную систему вычетов. Два алгоритма решения систем сравнений.
4. КТО: доказательство через обратный вычет. Два алгоритма решения систем сравнений.

Программа Зачета. Задачи

1. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$, где O – произвольная точка. (Векторы, 11)
2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и B_1 , окружности ω_2 и ω_3 — в точках A_2 и B_2 , окружности ω_3 и ω_4 — в точках A_3 и B_3 , окружности ω_4 и ω_1 — в точках A_4 и B_4 . Докажите, что если точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности или прямой, то точки B_1, B_2, B_3, B_4 тоже лежат на одной окружности или прямой. (Направленные углы, 5)
3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . M – точка Микеля для прямых, содержащих его стороны. Докажите, что прямая MO перпендикулярна EF , где прямые AB и CD пересекаются в точке E , прямые AD и BC – в точке F . (Симсон и Микель, 5)
4. Даны точки A, B, C, D , никакие три из них не коллинеарны. M, N – середины отрезков AB и CD соответственно, K – середина отрезка MN . P – точка пересечения медиан треугольника BCD . Докажите, что точки A, K, P коллинеарны. (Массы, 7)
5. Дан остроугольный треугольник ABC . Окружность с диаметром AB пересекает высоту CC_1 и ее продолжение в точках M и N соответственно. Окружность с диаметром AC пересекает высоту BB_1 и ее продолжение в точках P и Q соответственно. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности. (Степень точки, 9)
6. Из медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC составлен треугольник KMN , а из медиан KK_1, MM_1 и NN_1 треугольника KMN — треугольник PQR . Докажите, что третий треугольник подобен первому, и найдите коэффициент подобия. (Векторы-2, 4)

7. Вписанная окружность (I – центр) касается сторон AB , BC и AC в точках C_0 , A_0 и B_0 соответственно. Прямая BI пересекает A_0C_0 в точке K . Докажите, что центр описанной окружности треугольника $BK B_0$ лежит на прямой AC . (Точка как окружность, 3)
8. В пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и AED прямые, $AB = AE$ и $BC = CD = DE$. Диагонали BD и CE пересекаются в точке F . Докажите, что $FA = AB$. (Лемма о трезубце, 8)
9. Дан четырехугольник $ABCD$. На сторонах AB , BC , CD , DA отмечены точки A_1 и B_1 , B_2 и C_2 , C_1 и D_1 , D_2 и A_2 соответственно, причем стороны делятся ими на три равные части. Докажите, что отрезки A_1D_1 , B_1C_1 , B_2A_2 , C_2D_2 тоже делятся точками пересечения на три равные части. (Георазнобой, 2)
10. $\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$, где $x_1, \dots, x_n \geq 1$. (Метод Штурма, 8)
11. а) $\varphi(x) = 2$; б) $\varphi(x) = 28$; в) $\varphi(x) = 8$; г) $\varphi(x) = 14$. (Формула Эйлера, 8)
12. Найдите остаток числа $2^{3^{96}}$ от деления на 239. (Теорема Эйлера, 8)
13. Докажите, что уравнение $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ при любых действительных a, b, c имеет действительные корни. (Квадратный трехчлен, 2)
14. $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$, где $a, b, c > 0$. (Неравенства о средних, 4)
15. Докажите, что можно переставить все числа натурального ряда так, чтобы для любого n сумма первых n чисел делилась на n . (КТО, 8)
16. Известно, что многочлен $P(x)$ дает при делении на $x-1$ остаток 5, а при делении на $x+2$ – остаток 14. Найдите остаток от деления $P(x)$ на $(x-1)(x+2)$. (Многочлены, 9а)
17. Существует ли квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами, значения которого во всех натуральных числах являются степенями двойки? (Асимптотика, 4)
18. Теорема Минковского: на плоскости дана центрально симметричная относительно нуля выпуклая фигура площади $S > 4$, тогда в ней найдется целочисленная точка, отличная от нуля. (Асимптотика, 5)
19. $\frac{a^3b}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} + \frac{a^3c}{b} + \frac{c^3b}{a} + \frac{b^3a}{c} \geq 6abc$, где $a, b, c > 0$. (Транснеравенство, 7)
20. Каким числом способов можно покрасить клетки прямоугольника 2×6 так, чтобы не было полностью закрашенных квадратов 2×2 ? (Рекуррентные последовательности, 4)