

6 июля

Неравенства о средних

Обсудим! Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для:

- $n = 4$;
- $n = 3$;
- $n = 8$;
- $n = 7$.

Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим по индукции.

Во всех задачах листка переменные положительны (неотрицательны, если возможно).

Упражнение 1. $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})(a + b + c) \geq 9$.

Упражнение 2. $ab + bc + ac \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.

1. $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.

2. $(\frac{1}{a+b})^2 + (\frac{1}{b+c})^2 + (\frac{1}{c+a})^2 \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca})$.

3. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$.

4. $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

5. $\frac{c+a}{a^2+2bc+b^2} + \frac{a+b}{b^2+2ca+c^2} + \frac{b+c}{c^2+2ab+a^2} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$.

6. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$.

7. Докажите, что $(x_1 + \frac{1}{x_1})^2 + \dots + (x_n + \frac{1}{x_n})^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}$, если $x_1 + \dots + x_n = 1$.

8. Докажите, что для любого набора неотрицательных чисел a_1, \dots, a_n выполняется неравенство $\sum_{i < j} \sqrt{a_i a_j} \leq \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$.

9. Докажите, что $\frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(a-b+1)$

10. Пусть $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$. Докажите, что $\frac{a_1 a_2 \dots a_n (1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n))}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}$