7 июля

Китайская теорема об остатках

Формулировка КТО. Пусть натуральные числа $a_1, ..., a_k$ попарно взаимно просты. Тогда для любого набора целых чисел $r_1, ..., r_k$ существует единственное число x по модулю $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k$, удовлетворяющее системе:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{a_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{a_2} \\ ... \\ x \equiv r_k \pmod{a_k} \end{cases}$$

1. a) Пусть a и b взаимно просты. Докажите, что $\{0, a,\ 2 \cdot a, ...,\ (b-1) \cdot a\}$ - полная система вычетов по модулю b.

b) Существует ли решение системы:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{a_1} \\ x \equiv r_2 \pmod{a_2} \end{cases}$$

c) Докажите КТО по индукции.

2. Другое доказательство КТО.

a) Докажите, что у каждого остатка r по модулю a такого, что $(a, r) = 1$, существует обратный.

Указание: остатки r_1 и r_2 обратные по модулю a, если $r_1 \cdot r_2 \equiv 1 \pmod{a}$

b) Найдите решение системы:

$$\begin{cases} x \equiv r_1 \pmod{a_1} \\ x \equiv 0 \pmod{a_2} \\ ... \\ x \equiv 0 \pmod{a_k} \end{cases}$$

c) Найдите явное решение для КТО.

3. Решите систему сравнений:

a) $a \equiv 2 \pmod{5}$ и $a \equiv 4 \pmod{6}$;

b) $a \equiv 2 \pmod{5}$, $a \equiv 4 \pmod{6}$ и $a \equiv 3 \pmod{7}$;

4. Из натуральных чисел, меньших 1000000, Маша выписала все, дающие остаток 17 при делении на 23 и остаток 5 при делении на 11. Саша из натуральных чисел, меньших 1000000, выписала все, дающие остаток 11 при делении на 21 и остаток 3 при делении на 13.

a) У кого чисел больше?

b) Повторяются ли числа в списках Маши и Саши?

5. Найдите остаток от деления **(a)** 19^{14} на 70; **(b)** 17^9 на 48; **(c)** $14^{14^{14}}$ на 100.

6. При каких целых n число n^2+3n+1 делится на 55?

7. Докажите, что для любого n найдутся n подряд идущих натуральных чисел, делителем каждого из которых является точный куб, больший 1.

8. Докажите, что можно переставить все числа натурального ряда так, чтобы сумма первых n чисел делилась на n.