

5 июля

Теорема Шаля

Определение. *Преобразованием плоскости* называется взаимнооднозначное отображение плоскости на себя.

Определение. *Движением* называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

Векторные свойства. Пусть F – произвольное движение (на самом деле, ниже перечисленные свойства верны для любого преобразования подобия). Тогда:

- (1) Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{F(A)F(B)} = \overrightarrow{F(C)F(D)}$; из этого следует, что мы можем однозначно определять образ произвольного вектора \vec{u} и обозначать его $F(\vec{u})$;
- (2) Для любых векторов \vec{u} и \vec{v} и числа $k \in \mathbb{R}$ верны равенства $F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v})$ и $F(k\vec{u}) = kF(\vec{u})$.

Свойства. Из векторных свойств и других соображений несложно вывести, что движение переводит:

- (1) прямую в прямую, отрезок в равный ему отрезок, луч в луч;
- (2) угол в равный ему угол;
- (3) треугольник в равный ему треугольник;
- (4) окружность в равную ей окружность;
- (5) параллельные прямые в параллельные прямые.

Теорема. Движение задается образами трех неколлинеарных точек.

Элементарные движения:

- (1) *Тождественное отображение, id :*
 $A \rightarrow A$.
- (2) *Параллельный перенос на вектор \vec{u} , $T_{\vec{u}}$:*
 $A \rightarrow A'$, при этом $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.
- (3) *Осевая симметрия относительно прямой l , S_l :*
 $A \rightarrow A'$, при этом прямая l является серединным перпендикуляром к отрезку AA' .
- (4) *Поворот на угол α вокруг точки O , R_O^α :*
 $A \rightarrow A'$, при этом $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha$.
(Центральная симметрия – частный случай поворота при $\alpha = 180^\circ$.)

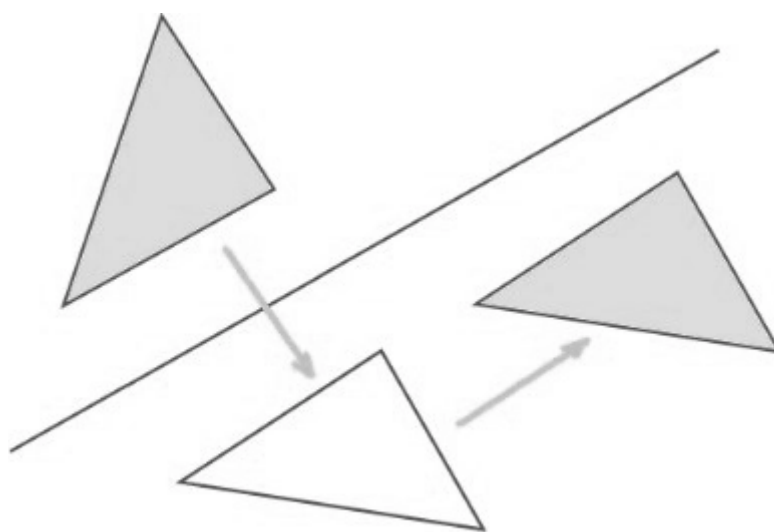
Определение. Композицией движений F и G называется отображение $G \circ F$, т. е. результат последовательного применения движений F и G .

1. Покажите, что любое движение плоскости представимо в виде композиции параллельного переноса, поворота и, возможно, осевой симметрии.

Определение. Движением первого рода называется движение, которое не меняет ориентацию. Движением второго рода называется движение, которое меняет ориентацию.

Определение. Скользящей симметрией называется композиция осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии.

Замечание. Композицию можно выполнять в любом порядке.



2. **Теорема Шаля.** Любое движение плоскости первого рода является параллельным переносом или поворотом, а второго рода – скользящей симметрией.

- (1) Покажите, что композиция переноса и поворота есть поворот, докажите теорему Шаля для движений первого рода;
- (2) Представьте поворот в виде композиции нескольких симметрий;
- (3) Представьте движение второго рода в виде композиции симметрии и переноса;
- (4) Докажите теорему Шаля для движений второго рода.

3. Определите, что получится в результате композиции любых двух элементарных движений. Исследуйте все девять случаев. Если возможно, выразите характеристики композиции через характеристики движений.

4. Классифицируйте движения с точки зрения множества неподвижных точек.