10 июля

Многочлены

Определение. *Многочлен* – это выражение вида $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$, где $a_n \neq 0$, а коэффициенты $a_n, \ldots, a_0$ принадлежат некоторому числовому множеству K, замкнутому относительно сложения и умножения.

Определение. *Степень многочлена* – это максимальная из степеней его одночленов.
Обозначение. $deg(P) = n$.

Определение. Коэффициент при одночлене старшей степени называется *старшим коэффициентом*, коэффициент при нулевой степени – *свободным членом.*

Определение. Многочлены равны, если все их соответственные коэффициенты совпадают.

1. Найдите степень и старший коэффициент следующих многочленов:
a) $(x+1)^{10}(1-2x^2)^3$; b) $(x^2+x+1)^6-(x+1)^{12}$.

2. Найдите свободный член и сумму коэффициентов следующих многочленов:
a) $(x^2-x+1)^{2021}$; b) $(3x^2-4x-2)^{20}$.

3. Дан многочлен $(1+x^2+x^4)^{30}+(1+x^3+x^6)^{20}$.
a) Сколько ненулевых коэффициентов имеет этот многочлен?
b) Чему равна сумма всех коэффициентов этого многочлена?
c) Чему равна сумма коэффициентов при четных степенях этого многочлена?

4. Докажите, что если в выражении $(x^2-x+1)^{2021}$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то какой-то коэффициент полученного многочлена будет отрицательным.

Определение. *Разделить* многочлен $P(x)$ на ненулевой многочлен $Q(x)$ *с остатком* означает найти такие многочлены $H(x)$ (*неполное частное*) и $R(x)$ (*остаток*), что $P(x) = H(x)Q(x) + R(x)$ и $deg(R) < deg(Q)$.
Если $R(x) \equiv 0$, то $P(x)$ *делится* на $Q(x)$.
Замечание. Если коэффициенты многочленов принадлежат $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$, то неполное частное и остаток определены однозначно.

Упражнение. Поделите столбиком:
a) $6x^4-7x^3+12x^2-10x+8$ на $2x^2-x+2$; b) $x^{105}+x+1$ на x^2-1.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ равен $P(a)$, т.е. $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$, причем $deg(Q) = deg(P) - 1$.

5. a) Многочлен $P(x)$ делится на $x-a$ тогда и только тогда, когда $P(a)=0$.
b) Число корней многочлена не превосходит его степени.
c) Если значения двух многочленов, степень каждого из которых не превосходит n, совпадают в $n+1$ различных точках, то эти многочлены равны.
d) Если многочлен степени не выше n принимает какое-то фиксированное значение более n раз, то он является константой.
e) Если многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$, то корни многочлена $Q(x)$ являются корнями многочлена $P(x)$.

6. Пусть $P(x)$ – многочлен, такой что $P(x)=P(x+1)$. Докажите, что $P(x)$ – константа.

7. При каких a и b многочлен $P(x)=(a+b)x^5+abx^2+1$ делится на x^2-3x+2?

8. Найдите все целые x, при которых число $x^4+3x^3+2x^2+3x-1$ делится на x^2+1.

9. a) Известно, что многочлен $P(x)$ дает при делении на $x-1$ остаток 5, а при делении на $x+2$ – остаток 14. Найдите остаток от деления $P(x)$ на $(x-1)(x+2)$.
b) Найдите остаток $R(x)$ от деления многочлена x^n+x+2 на x^2-1.

10. Про многочлен $P(x)$ степени 10 с действительными коэффициентами известно, что $P(1)=P(-1)$, $P(2)=P(-2)$, $\ldots$, $P(5)=P(-5)$. Докажите, что $P(x)=P(-x)$ для любого действительного x.

11. Найдите все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству $xP(x-1)=(x-20)P(x)$.

12. Многочлен x^3+px^2+qx+r имеет на интервале $(0,2)$ три различных действительных корня. Докажите, что $-2<p+q+r<0$.

13. Многочлен $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x)=x^2+x+2019$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2019)>164$.