

8 июля

Внутренний матбой

1. Положительные числа a , b , c удовлетворяют условию $a^2 < bc$. Докажите, что $b^3 + ac^2 > ab(a + c)$
2. Маша Александровна выложила в Твиттер пять постов. Каждый пост понравился более, чем половине ее друзей (а друзей у Маши больше одного). Докажите, что найдутся два друга таких, что каждый пост понравился хотя бы одному из них.
3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 30^\circ$, $BC + CD + DB = AC$. Найдите $\angle C$.
4. Докажите, что натуральное число a является точным квадратом тогда и только тогда, когда для любого натурального числа b найдется такое натуральное число c , что $a + bc$ - точный квадрат.
5. Пусть $x_1 = 20$, $x_2 = 21$, $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{x_n}$ при x_n не равном 0 и 0 иначе. Доказать, что рано или поздно в последовательности появится 0 и найти индекс первого x , равного 0.
6. Вупсень и Пупсень играют в следующую игру: изначально есть три кучки, в каждой по 2021 камню. Первой ходит Пупсень. Каждый ход состоит из выбора одной из кучек, удаления остальных из игры и последующего деления выбранной кучки на 2 или 3 непустых. Игрок проигрывает, если не может сделать ход. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?
7. MN - диаметр окружности ω . Из точки X , лежащей на окружности, опущен перпендикуляр XH на MN . Проведена окружность с центром в X и радиусом XH . Она пересекает ω в точках K и L . Докажите, что KL делит XH пополам.
8. Пусть N - количество 2021-значных чисел, из которых можно вычеркиванием 2017 цифр получить число 2021. Найдите остаток от деления N на 9.