Материалы занятий
9 класс ПРОФИ

Д. А. Белов
Р. С. Ефремов
С. А. Лучинин

Уважаемые школьники!

Наша смена подходит к концу. Надеемся, что за время подготовки к зачёту знания из бесконечно удаленной точки приблизятся к вам на $\forall \epsilon > 0$.

Уверены, что вы сможете спроецировать полученные навыки на будущий учебный год. Желаем, чтобы ваши навыки росли асимптотически быстрее сложности задач. Пусть ваши двойные отношения с геометрией будут взаимны.

До встречи в следующем учебном году! Присоединяйтесь к нашему онлайн-кружку!

Искренне Ваши,

Дмитрий Алексеевич,

Руслан Сергеевич,

Сергей Александрович

Оглавление

1. Вступительная олимпиада . . . 5
2. Серия 0, вступительное занятие . . . 5
3. Серия 1, LTE — то, что надо ЛМШ . . . 6
4. Серия 2, двойные отношения . . . 7
5. Серия 3, лемма Шпернера . . . 8
6. Серия 4, от нескольких переменных . . . 10
7. Серия 5, асимптотика–1 . . . 11
8. Серия 6, рождественская т. Ферма . . . 11
9. Серия 7, теорема Хелли–1 . . . 12
10. Серия 8, гармоническая . . . 13
11. Серия 9, разнобой–1 . . . 15
12. Серия 10, пределы . . . 16
13. Серия 11, LTE–2 . . . 17
14. Серия 12, симедиана . . . 17
15. Серия 13, симметрическая . . . 18
16. Серия 14, Хелли–2 . . . 20
17. Серия 15, непрерывность . . . 21
18. Серия 16, теорема Геринга . . . 22
19. Серия 17, двойная добавка . . . 23
20. Серия 18, производная . . . 24
21. Профи–9. Внутренний матбой . . . 25
22. Серия 19, комплексные числа . . . 26
23. Серия 20, подпор касательной . . . 27
24. Серия 21, поляры . . . 28
25. Серия 21.5, еще задачи . . . 30
26. Серия 22, ваши любимые графы . . . 30

27. Серия 23, ад. комби 31
28. Серия 24, неравенство Йенсена 32
29. Серия 25, pqr–метод 34
30. Серия 26, проективная 35
31. Серия 27, цепочки 36
32. Серия 28, про окружность 37
33. Серия 29, ещё немного неравенств 38
34. Серия 30, КЗВ–1 39
35. Серия 31, асимптотика–2 40
36. Серия 32, КЗВ–2 41
37. Серия 33, построение линейкой 41
38. Серия 34, ван дер Варден 42
39. Серия 35, касательная функция 43
40. Серия 36, теорема Паскаля 43
41. Вопросы к зачёту 45

1. Вступительная олимпиада *4 июля*

1. Дима написал на доске выражение

$$1 \star 2 \star 3 \star \ldots \star 2019,$$

где каждая звездочка — либо знак “+”, либо знак “−”. Сережа может за одно действие выбрать не крайнее число и поменять оба знака рядом с ним на противоположные (плюс на минус, минус на плюс). Докажите, что такими операциями Сережа может получить выражение, значение которого делится на 7.

2. Дана окружность и точка O на ней. Вторая окружность с центром O пересекает первую в точках P и Q. Точка C лежит на первой окружности, а прямые CP и CQ вторично пересекают вторую окружность в точках A и B. Докажите, что $AB = PQ$.

3. Отряд М9 проводит знакомство. На него явились n детей. У Павла Сергеевича они пронумерованы в списке числами от 1 до n. Дети выстроились в круг так, что между каждыми двумя детьми с последовательными номерами стоит одно и то же число других ребят. Соседками Жени оказались Аня и Оля. У Ани в списке номер 11, у Жени — номер 4, у Оли — номер 17. Сколько детей пришло на знакомство?

4. Дан клетчатый квадрат 131×131, из которого вырезана одна угловая клетка. Четно или нечетно количество способов разбить этот квадрат на уголки из трех клеток?

5. На доске выписаны числа x_1, x_2, $\ldots$, x_{100}, такие что $x_1 = 1/2$ и для любого n от 1 до 99 выполняется равенство

$$x_{n+1} = 1 - x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Докажите, что $x_{100} > 0{,}99$.

6. Дано 30 различных трехзначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать несколько и разбить на два равных и по количеству, и по сумме множества.

2. Серия 0, вступительное занятие *4 июля*

Сюжет. Инопланетянин Z живет в двумерном мире, то есть на плоскости. Однажды Z решил позагорать. Z хочет, чтобы каждая точка на границе его тела была освещена лучами солнца не меньше 1 минуты. При этом Z может вертеться в плоскости как угодно (делает он это моментально), а лучи света параллельны и сонаправлены с осью OX. Точка поверхности считается освещенной, если на нее не падает тень ни от какой другой точки тела Z.

1. Какое минимальное время должен загорать Z, если он квадратный?

2. А если Z треугольный?

3. Докажите, что если Z — выпуклый многоугольник, то ему достаточно двух минут, чтобы загореть.

4. Докажите, что если Z — выпуклый многоугольник, то ему нужно не менее 1,5 минут, чтобы загореть.

5. Какое минимальное время должен загорать Z, если он имеет форму сектора круга с острым углом?

6. Какое минимальное время должен загорать Z, если он имеет форму сектора круга с тупым углом?

7. Нарисуйте шестиугольного Z, который может загореть, но на это наверняка потребуется более 2 минут.

8. Верно ли, что любой пятиугольный Z сможет загореть, причем для этого достаточно 2 минут?

3. Серия 1, LTE — то, что надо ЛМШ *5 июля*

Обозначение. Будем обозначать степень, в которой простое число p входит в разложение n на простые множители, через $v_p(n)$.

Лемма об уточнении показателя, ЛоУП, lifting the exponent lemma, LTE. Пусть a и b — различные целые числа, k — натуральное число, а p — *нечетное* простое число, НЕ ДЕЛЯЩЕЕ a и b. ЕСЛИ $a - b \,\vdots\, p$, то

$$v_p(a^k - b^k) = v_p(a - b) + v_p(k).$$

Доказательство.

Будем вести индукцию по $v_p(k)$.

(a) Докажите базу для $v_p(k) = 0$.

(b) Докажите, пожалуйста, базу и для $v_p(k) = 1$. Это пригодится в дальнейшем.

(c) Докажите индукционный переход.

1. На какую максимальную степень пятерки делится выражение $3^{10000} - 2^{10000}$?

2. При каких натуральных n существуют натуральное a и простое p, для которых $3^p + 4^p = a^n$?

3. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

4. Лемма об уточнении показателя для 2. Сформулированная выше лемма не работает в случае $p = 2$ (приведите контрпример и объясните, какой момент в доказательстве ломается). Докажите, что если дополнительно выполнено $a - b \vdots 4$, то все-таки

$$v_2(a^k - b^k) = v_2(a - b) + v_2(k).$$

5. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

6. Известно, что при всех натуральных n число $4(a^n + 1)$ является точным кубом. Докажите, что $a = 1$.

7. Найдите степень вхождения 1991 в

$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}.$$

4. Серия 2, двойные отношения

5 июля

Определение 1. *Двойным отношением* четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется отношение $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$.

Определение 2. *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых a, b, c, d, называется величина

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin\angle(\overline{a}, \overline{c})}{\sin\angle(\overline{b}, \overline{c})} : \frac{\sin\angle(\overline{a}, \overline{d})}{\sin\angle(\overline{b}, \overline{d})},$$

где $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d.

1. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке A. На прямой ℓ_1 отмечены точки B_1, C_1, D_1, а на прямой ℓ_2 — точки B_2, C_2, D_2. Докажите, что прямые B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 *конкурентны* (то есть пересекаются в одной точке или параллельны) тогда и только тогда, когда $(A, B_1, C_1, D_1) = (A, B_2, C_2, D_2)$.

2. **(a)** Докажите, что если $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

(b) Докажите, что $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$.

(c) Пусть $(A, B, C, D) = k$. Какие значения может принимать двойное отношения той же четверки точек, взятых в другом порядке?

3. Четверка точек (прямых) называется *гармонической*, если их двойное отношение равно -1. Докажите, что следующие четверки гармонические.

(a) (B, C, M, N), где M и N — основания внутренней и внешней биссектрис треугольника ABC с основанием BC.

(b) $(A,\ B,\ M,\ P_\infty)$, где M — середина отрезка AB, а P_∞ — бесконечно удаленная точка вдоль прямой AB.

(c) (A, B, X, Y), где X и Y центры окружностей разного радиуса, A и B — точки пересечения общих внешних и внутренних касательных.

(d) На вещественной прямой отметим точки $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$. Докажите, что $(A, B, O, X) = -1$ тогда и только тогда, когда координата X равна среднему гармоническому чисел a и b. (Отсюда и взялось название *гармоническая четверка*).

4. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, продолжения BC и AD — в точке F, прямые AC и BD пересекают EF в точках M и N. Докажите, что $(E, F, M, N) = -1$.

5. Продолжения противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. Через точку O пересечения его диагоналей проводится прямая, параллельная PQ. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.

6. Дан угол с вершиной O и внутри него точка A. Рассмотрим такие точки M, N на разных сторонах данного угла, что углы MAO и OAN равны. Докажите, что все прямые MN проходят через одну точку (или параллельны).

7. Внутренняя и внешняя биссектрисы угла A неравнобедренного треугольника ABC пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Точка M — середина стороны AB. Прямая KM пересекает прямую AC в точке N. Докажите, что $NL = NA$.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH_A и отмечены центры I, I_A вписанной и вневписанной окружностей. Докажите, что прямые H_AI, H_AI_A симметричны относительно прямой BC.

9. Постройте с помощью одной линейки к трем данным прямым, проходящим через одну точку, четвертую так, чтобы эти прямые образовывали гармоническую четверку.

10. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE и CF пересекаются в точке H. P и Q — проекции точек A и H на EF соответственно. Пусть R — точка пересечения DP и QH. Найдите HQ/HR.

11. Пусть в треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Пусть X такая точка внутри треугольника ABC, что вписанная окружность треугольника XBC касается XB, XC и BC в Z, Y и D соответственно. Докажите, что $EFZY$ вписанный.

5. Серия 3, лемма Шпернера *5 июля*

1. Дом имеет вид клетчатого прямоугольника, в котором клетки — это комнаты, стороны клеток — двери. Дверь на стороне прямоугольника назовем наружной. Тупиком назовем комнату, в которой открыта ровно одна дверь, причем не наружная. Известно, что в каждой комнате открыто не более двух дверей. Докажите, что число тупиков и число наружных дверей имеют одинаковую четность.

Определение 1. *Триангуляцией* многоугольника называется такое разбиение его на треугольники, что любые два треугольника разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или целую сторону. Эти треугольники называются *гранями* триангуляции, их стороны — ее *ребрами*, их вершины — ее *вершинами*. Используя предыдущие задачи решите следующую.

2. Лемма Шпернера. Вершины триангуляции треугольника ABC помечены числами 1, 2 или 3 таким образом, что каждая вершина триангуляции, лежащая на стороне AB, имеет пометку 1 или 2; на стороне BC — пометку 2 или 3; на стороне CA — пометку 3 или 1. Докажите, что число граней триангуляции, несущих три различные пометки, нечетно.

3. Вершины клеток клетчатого прямоугольника $ABCD$ помечены числами 1, 2, 3 или 4. При этом соблюдается граничное условие: вершина, лежащая на AB, помечена числом 1 или 2; на BC — 2 или 3; на CD — 3 или 4; на DA — 4 или 1. Докажите, что найдется клетка, имеющая не менее трех различных пометок.

4. Каждую сторону треугольника поделили на n равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные его сторонам. В результате получилась триангуляция треугольника. Каждую вершину триангуляции покрасили в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что число двуцветных ребер триангуляции четно.

5. Дан куб $100 \times 100 \times 100$. Его покрыли квадратиками 1×1 без пропусков и наложений. В каждом квадрате провели обе диагонали, а стороны всех квадратиков стерли. Докажите, что из любой вершины куба есть путь в какую-то другую вершину куба, проходящий по отмеченным диагоналям.

6. Для произвольной триангуляции многоугольника докажите равносильность условий:

(a) вершины триангуляции можно отметить так, что каждая грань несет три разных отметки 0, 1 и 2;

(b) все грани триангуляции можно правильно раскрасить в два цвета так, что любые две соседние грани окрашены различно;

(c) из каждой внутренней вершины триангуляции выходит четное число ребер.

7. Квадрат $[0, 2n+1] \times [0, 2n+1]$ координатной плоскости разрезан на треугольники так, что координаты всех вершин целочисленны. Докажите, что найдется треугольник с нецелой площадью.

6. Серия 4, от нескольких переменных *6 июля*

Определение 1. *Многочлен от нескольких переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — это сумма одночленов, каждый из которых имеет вид $cx_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$, где c — некоторая константа.

Определение 2. *Степенью одночлена* $cx_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ называется сумма $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Определение 3. *Степенью многочлена* называется максимальная из степеней его одночленов.

Определение 4. Будем называть *высшим членом* многочлена наибольший одночлен с точки зрения лексикографического порядка.

1. Известно, что многочлен $P(a_1, a_2, ..., a_k) = 0$ при любых $a_1, a_2, ..., a_k$. Докажите, что $P \equiv 0$, то есть что P — тождественнный 0.

(a) База для $k = 2$. *Подсказка.* Представьте P как $P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + P_1(x)y + P_0(x)$, где $P_i(x)$ — многочлен от одной переменной.

(b) Сделайте переход для любого k.

Как следствие, $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \iff P(a_1, a_2, \ldots, a_k) = Q(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ при любых $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

2. Пусть f и g — два многочлена от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, и при любых значениях переменных выполнено $fg = 0$. Докажите, что тогда $f = 0$ или $g = 0$.

3. Докажите, что многочлен вида $x^{200}y^{200} + 1$ нельзя представить в виде $P(x)Q(y)$.

4. Для каждого из нижеперечисленных подмножеств A точек на координатной плоскости установите, найдется ли многочлен $P(x, y)$, для которого A есть в точности множество точек, в которых он обращается в нуль.

(a) A — точка. **(b)** A — конечное множество точек.

(c) A — объединение конечного числа прямых. **(d)** A — луч.

(e) $A = \{(x, y) \mid x, y > 0; xy = 1\}$. **(f*)** $A = \{(x, y) \mid y = 2^x\}$.

5. Всегда ли можно восстановить многочлен от двух переменных степени не больше 3 по значениям в 100 точках?

6. **(a)** Существуют ли многочлены $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ и $R = R(x, y, z)$ от переменных x, y, z, удовлетворяющие тождеству

$$(x - y + 1)^3P + (y - z - 1)^3Q + (z - 2x + 1)^3R = 1?$$

(b) Тот же вопрос для тождества

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-x+1)^3R=1.$$

7. Дан многочлен $P(x,y)$ степени меньше n. Докажите, что можно выбрать n^2 точек и по значениям в них узнать значение P в любой другой точке.

8. Пусть $P(\pm x_, \pm x_2, ..., \pm x_n) = P(x_1, x_2, ..., x_n)$ для любого набора знаков плюс и минус. Докажите, что существует многочлен $Q(y_1, y_2, ..., y_n)$ такой, что $P(x_1, x_2, ..., x_n) = Q(x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2)$.

7. Серия 5, асимптотика–1 *6 июля*

1. У Пети есть бесконечно много одинаковых треугольных салфеток. Докажите, что для достаточно больших R Петя сможет покрыть этими салфетками более 99% площади круглого стола радиуса R (салфетки не перекрываются, не вылезают за край стола, их можно переворачивать).

2. Существует ли квадратный трехчлен, все значения которого в натуральных точках — кубы натуральных чисел?

3. Существует ли многочлен с вещественными коэффициентами, значения которого во всех натуральных числах — степени двойки?

4. Докажите, что для подходящего N уравнение $x^3+y^3+z^3+t^3=N$ имеет не менее 1000 решений в натуральных числах.

5. Верно ли, что из любого числа можно получить квадрат, вставляя в его десятичную запись не более 10 цифр? Цифры можно вставлять в любые места.

6. Все значения унитарного (то есть с коэффициентом 1 при старшей степени) целочисленного многочлена в целых точках — точные квадраты. Докажите, что сам многочлен представим как квадрат некоторого многочлена.

7. Найдите все многочлены, которые в рациональных точках принимают рациональные, а в иррациональных — иррациональные значения.

8. Серия 6, рождественская т. Ферма *6 июля*

Упражнение. Докажите, что в виде суммы двух квадратов целых чисел представляются число 2 и число p^2.

1. Два числа представляются в виде суммы двух квадратов. Докажите, что их произведение представляется в виде двух квадратов.

2. Число n представляется в виде суммы двух квадратов. Докажите, что в разложении n на простые множители все простые делители вида $4k+3$ входят в четной степени.

3. *Лемма Туэ.* Пусть n — натуральное число, а a — целое. Тогда найдутся такие целые x и y, что $(x, y) \neq (0, 0)$, $ax - y \vdots n$, и $|x|, |y| \leqslant \sqrt{n}$.

4. С помощью леммы Туэ докажите, что простое $p = 4k+1$ представляется в виде суммы двух квадратов.

5. Опишите все числа, представимые в виде суммы двух квадратов.

6. Докажите, что $p = 4k+1$ представляется в виде суммы двух квадратов единственным способом.

7. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = z^5 + z$ имеет бесконечно много целых решений, в которых x, y и z попарно взаимно просты.

8. Какие простые числа p представляются в виде $p = a^2 + 2b^2$?

9. Скольками способами n представляется в виде суммы двух квадратов?

9. Серия 7, теорема Хелли–1 *7 июля*

Теорема Хелли для прямой. На прямой дано конечное множество отрезков. Известно, что любые два имеют общую точку. Тогда все отрезки имеют общую точку.

1. Пусть дано множество A точек на прямой, являющееся объединением нескольких отрезков. Докажите, что из этих отрезков можно выбрать несколько так, чтобы выполнялось два условия:

- множество A покрыто этими отрезками;
- никакие три отрезка не имеют общую точку.

2. На прямой дано $2n+1$ отрезков. Известно, что каждый пересекает не менее n других. Докажите, что существует отрезок, пересекающий все остальные.

3. На прямой дано $2n-1$ черных и $2n-1$ белых отрезков. Каждый пересекает хотя бы n отрезков другого цвета. Докажите, что найдется отрезок одного из двух цветов, пересекающий все отрезки другого цвета.

4. Даны несколько прямоугольников с параллельными сторонами. Известно, что любые два имеют общую точку. Докажите, что все прямоугольники имеют общую точку.

5. Дано $[4n/3]$ прямоугольников с параллельными сторонами. Каждый пересекает хотя бы n других. Докажите, что существует прямоугольник, пересекающий все остальные.

6. Пусть на прямой даны $nk+1$ отрезок. Докажите, что из этих отрезков можно выделить или $n+1$ попарно непересекающихся, или $k+1$, имеющих общую точку.

7. На плоскости дано конечное множество квадратов A с параллельными сторонами. Докажите, что можно выделить подмножество B множества A так, чтобы квадраты из B не пересекались, а также квадраты B, раздутые в 3 раза, покрывали A.

8. На плоскости дано конечное множество A квадратов с параллельными сторонами. Докажите, что можно выкинуть часть квадратов так, чтобы оставшиеся покрывали все центры квадратов из множества A, а также никакая точка плоскости не была покрыта более 4-х раз.

9. На плоскости дано несколько единичных квадратов с параллельными сторонами. Пусть площадь, которую они покрывают, равна S. Докажите, что можно выкинуть часть квадратов так, чтобы оставшиеся не пересекались и покрывали площадь, не меньшую $S/4$.

10. Серия 8, гармоническая *7 июля*

Определение. Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

Определение. Прямая, симметричная медиане треугольника относительно биссектрисы проведенной из той же вершины, называется *симедианой*.

1. (a) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что

$$\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{|AB|^2}{|BC|^2}=\frac{|AD|^2}{|DC|^2}.$$

(b) Докажите, что каждая диагональ гармонического четырехугольника является симедианой треугольников, на которые разбивает четырехугольник другая диагональ.

(c) Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является симедианой треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ гармонический.

Следствие. Гармонический четырехугольник однозначно задается тремя своими вершинами (порядок обхода вершин также известен).

Определение. Точки A, B, C, D лежат на окружности S. Пусть X — произвольная точка на окружности. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D называется величина $(A, B, C, D) = (XA, XB, XC, XD)$.

Эта величина не зависит от выбора точки X. В случае, если одна из точек A, B, C, D совпадает с X, в качестве соответствующей прямой рассматривается касательная к окружности S.

2. **(a)** Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей, P — точка пересечения касательной к его описанной окружности в точке B и прямой AC. Докажите, что $(A, C, M, P) = -1$.

(b) Докажите, что вписанный четырехугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда касательные к его описанной окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC, либо параллельны этой прямой.

3. Обозначим через N середину диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$. Докажите, что четыреугольник $ABCD$ гармонический тогда и только тогда, когда $\angle BNC = \angle DNC$.

4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, в котором биссектрисы углов A и C пересекаются на диагонали BD. Докажите, что биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC.

5. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены касательные AB и AC к этой окружности, а также прямая, пересекающая окружность в точках X и Y. Докажите, что точки A, B, C, и середина отрезка XY лежат на одной окружности.

6. В окружности S проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведенная через C и середину AB, вторично пересекает S в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

7. В угол BAC вписана окружность ω, касающаяся сторон угла в точках B, C. Хорда CD окружности ω параллельна прямой AB. Прямая AD второй раз пересекает окружность ω в точке E. Докажите, что прямая CE делит отрезок AB пополам.

8. Из точки P к окружности ω проведены отрезки касательных PA, PB, точка C диаметрально противоположна точке B. Докажите, что прямая CP делит пополам перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую BC.

9. Две неравные окружности ω_1 и ω_2 касаются внутренним образом окружности ω в точках A и B. Пусть C и D точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Прямая CD пересекает ω в точках E и F. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках E и F, пересекаются на прямой AB.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O. Биссектриса угла ABD пересекает отрезок AD в точке K и окружность ω второй раз в точке M. Биссектриса угла CBD пересекает отрезок CD в точке L и окружность ω второй раз в точке N. Известно, что прямые KL и MN параллельны. Докажите, что описанная окружность треугольника MON проходит через середину отрезка BD.

11. Серия 9, разнобой–1

7 июля

1. Дано целое число $n > 1$. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим. Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше — тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

2. Прачечная в ЛМШ работает так. В прачечной есть три одинаковых бака для одежды: для белого, для цветного и для темного белья. После каждого учебного дня дети приносят суммарно 50 кг одежды. Это все распределяется по бакам. Самый заполненный бак целиком сваливают в машину и стирают. При каком наименьшем объеме баков они никогда не переполнятся, как бы ни старались дети? Как известно, смена в ЛМШ бесконечна.

3. Существует ли многочлен $f(x, y)$ от двух вещественных переменных, который всюду отличен от нуля, но принимает значения, сколь угодно близкие к нулю?

4. **(a)** Пусть дано множество A точек на прямой, являющееся объединением счетного числа отрезков. Можно ли из этих отрезков выделить счетное подмножество так, чтобы выполнялось два условия:

- множество A покрыто этими отрезками;
- никакие три отрезка не имеют общую точку.

(b) А если каждая точка покрыта конечным количеством отрезков?

5. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон BC, CA и AB в точках X, Y и Z соответственно. На плоскости отметили точку K. Серединные перпендикуляры к отрезкам KX, KY и KZ пересекают прямые BC, CA и AB в точках X_1, Y_1 и Z_1 соответственно. Докажите, что точки X_1, Y_1 и Z_1 лежат на одной прямой.

6. Даны окружность, её хорда AB и середина W меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности, проведённая из точки C, пересекает касательные, проведённые из точек A и B, в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

12. Серия 10, пределы

8 июля

Загадка 1. Почему площадь квадрата со стороной a равна a^2?

Загадка 2. **(a)** Как определяется число 2^{100}? Как его вычислить?

(b) Как определяется число $2^{3/2}$? Как его вычислить?

(c) Как определяется число $2^{\sqrt{2}}$? Как его вычислить?

1. Найдите хотя бы одно такое N, чтобы для любого $n > N$ выполнялось $a_n > 10^9$, если a_n равно

(a) $1,02^n$; **(b)** $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$; **(c)** $\dfrac{n^3 + 2n^2 + 3n + 4}{5n^2 + 6n + 7}$.

2. Найдите хотя бы одну такую пару $a \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < 10^{-8}$ при всех $n > N$, где a_n равно

(a) $\dfrac{n^2 - n + 28}{n - 2n^2}$; **(b)** $n\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - 1\right)$; **(c)** $0,99^n$; **(d)** $\sqrt[n]{2}$;

(e) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$.

Определение 1. Число, которое данная последовательность может уточнить с любой наперед заданной точностью назовём *пределом* этой последовательности. Более формально:

Определение 2. Число a назовём *пределом* последовательности a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$ (или просто $\{a_n\}$), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ |a_n - a| < \varepsilon$. В этом случае говорят, что последовательность стремится или сходится к a, пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$.

3. Докажите, что у последовательности не может быть более одного предела. Приведите пример последовательности, у которой нет предела.

4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Докажите, что:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$, где c — константа;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = a/b$, если b_n, $b \neq 0$.

5. Найдите пределы последовательностей при $n \to \infty$ **(a)** $\dfrac{1}{n}$; **(b)** $\dfrac{(n+1)^2}{3n^2}$; **(c)** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Определение 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если для некоторого M выполнено $\forall n : |a_n| < M$.

6. Аксиома полноты. Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

7. Теорема о двух милиционерах. Последовательности a_n, b_n и c_n таковы, что $\forall n\ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Оказалось, что a_n и c_n стремятся к одному и тому же числу d. Докажите, что b_n стремится к d.

8. Докажите, что существует предел последовательности при $n \to \infty$ **(a)** $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; **(b)** $\sqrt[n]{n}$.

9. Определим последовательность a_n рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Найдите предел a_n.

13. Серия 11, LTE–2

9 июля

1. Для всех простых p решите уравнение $a^p - 1 = p^k$.

2. Решите в натуральных числах уравнение

$$x^{2009} + y^{2009} = 7^z.$$

3. Пусть p — простое число, а $m > 1, x > 1, y > 1$ — натуральные числа. Оказалось, что $\dfrac{x^p + y^p}{2} = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^m$. Докажите, что $m = p$.

4. Пусть a и b — вещественные числа. Оказалось, что $a-b, a^2-b^2, a^3-b^3, \ldots$ — целые числа. Докажите, что a и b целые.

5. Пусть p — простое число, a и n — натуральные числа такие, что $\frac{p^a-1}{p-1} = 2^n$. Каким может быть количество натуральных делителей числа na?

6. Найдите все такие натуральные n, что $\frac{2^n+1}{n^2}$ целое.

7. Решите в натуральных числах уравнение $(n-1)! + 1 = n^k$.

8. На доске написаны n цифр в ряд. Докажите, что к ним можно приписать несколько цифр слева и не более n цифр справа так, чтобы получилась степень двойки.

14. Серия 12, симедиана

9 июля

1. Дан треугольник ABC, в котором $AC = BC$, и точка P внутри такая, что $\angle PAB = \angle PBC$. Обозначим середину AB через M. Докажите, что $\angle APM + \angle BPC = 180°$.

2. Три различные точки A, B, C расположены на прямой в указанном порядке. Пусть окружность ω проходит через A и C, и ее центр не лежит на AC. Обозначим через P точку пересечения касательных к ω в точках A

и C. Пусть отрезок PB пересекает ω в точке Q. Докажите, что основание биссектрисы угла $\angle Q$ треугольника AQC не зависит от выбора ω.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B и касаются их общей касательной в точках P и Q. Пусть S — точка пересечения касательных в точках P и Q к описанной окружности треугольника APQ, а точка H симметрична B относительно PQ. Докажите, что A, S и H лежат на одной прямой.

4. Дан треугольник ABC. Пусть X — центр поворотной гомотетии, переводящей B в A и A в C. Докажите, что AX содержит семидиану треугольника ABC.

5. Дан треугольник ABC. На стороне BC выбирается точка P. Точки Q и R на AC и AB соответственно таковы, что $PQ \parallel AB$ и $PR \parallel AC$. Докажите, что описанная окружность треугольника AQR проходит через точку X, не зависящую от выбора точки P.

6. Пусть ABC — остроугольный треугольник, M, N, P — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Пусть серединные перпендикуляры к AB и AC пересекают AM в точках D и E соответственно. Прямые BD и CE пересекаются в точке F внутри треугольника ABC. Докажите, что точки A, N, F, и P лежат на одной окружности.

7. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω в точках B и C пересекаются в T. Точка S на прямой BC такова, что $AS \perp AT$. Точки B_1 и C_1 лежат на прямой ST так, что $B_1T = BT = C_1T$. Докажите, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны.

8. Пусть A — одна из точек пересечения окружностей ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2. Общая касательная к ω_1 и ω_2 касается их в точках B и C. Пусть O_3 — центр описанной окружности треугольника ABC. Обозначим через D такую точку, что A — середина отрезка O_3D. Пусть M — середина O_1O_2. Докажите, что $\angle O_1DM = \angle O_2DA$.

15. Серия 13, симметрическая

10 июля

Напоминание. Обозначим $\mathbb{N}^m = \{a_1, a_2, .., a_m \mid a_i \in \mathbb{N}\}$. Пусть $A, B \in \mathbb{N}^m$. Будем говорить, что строка $A = (a_1, \ldots, a_m)$ *меньше* строки $B = (b_1, \ldots, b_m)$, если первый символ, в котором A и B различаются, у строки A меньше.

(a) Убывающая последовательность строк из $\mathbb{N}^m$ конечна.

(b) В любом непустом множестве $\mathbb{N}^m$ есть наименьший элемент.

Определение 1. Многочлен от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках переменных.

Определение 2. *Элементарным симметрическим многочленом* называется

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}.$$

Также примем $\sigma_0 = 1$.

Основная теорема. Всякий симметрический многочлен единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Коэффициенты этого многочлена — целочисленные линейные комбинации коэффициентов исходного многочлена.

Лемма 1. Пусть $u = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}, a \neq 0$ — высший член (относительно лексикографического порядка) симметрического многочлена. Тогда выполнено $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n$.

Лемма 2. Для любого одночлена $u = x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ с $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0$ существуют такие неотрицательные целые числа $l_1, l_2, \ldots, l_n$, что высший член многочлена $\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\ldots\sigma_n^{l_n}$ совпадает с u. Числа $l_1, l_2, \ldots, l_n$ определены этим условием однозначно.

1. Выразите $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ через элементарные симметрические многочлены.

2. Докажите, что значение любого симметрического многочлена с целыми коэффициентами от корней унитарного многочлена с целыми коэффициентами является целым числом. (Считаем, что все корни вещественные).

3. Докажите основную теорему о симметрических многочленах от нескольких наборов переменных. Если многочлен не меняется от перестановки переменных внутри наборов $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \ldots$, то его можно выразить через основные симметрические многочлены от $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \ldots$(и через оставшиеся переменные). Пример: $(t-x_1-y_1)(t-x_1-y_2)(t-x_2-y_1)(t-x_2-y_2)$ выражается через t и $x_1 + x_2$, x_1x_2, $y_1 + y_2$, y_1y_2.

4. Обозначим через $p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k$. Тогда для p_k существуют рекуррентные формулы Ньютона:

(a) $p_k - p_{k-1}\sigma_1 + p_{k-2}\sigma_2 + \ldots + (-1)^{k-1}p_1\sigma_{k-1} + (-1)^k\sigma_k = 0$ при $1 \leqslant k \leqslant n$;

(b) $p_k - p_{k-1}\sigma_1 + p_{k-2}\sigma_2 + \ldots + (-1)^{n-1}p_{k-n+1}\sigma_{n-1} + (-1)^n p_{k-n}\sigma_n = 0$ при $k > n$.

5. Докажите, что произведение всех чисел вида $\pm\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \ldots \pm \sqrt{10}$ является

(a) целым числом;

(b) квадратом.

6. Докажите, что у многочлена $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_i - x_j)$ все коэффициенты равны $+1$, -1 или 0.

7. Пусть $p \geqslant 3$ — простое. Докажите, что

(a) $\sigma_k(1, 2, \ldots, p-1) \mathrel{\vdots} p$ для $1 \leqslant k \leqslant p-2$;

(b) $\sigma_{2k+1}(1, 2, \ldots, p-1) \mathrel{\vdots} p^2$ для $1 \leqslant k \leqslant \frac{(p-3)}{2}$.

16. Серия 14, Хелли–2

10 июля

Определение 1. Множество называется *выпуклым*, если любой отрезок между его точками также принадлежит этому множеству.

Упр. 1. Докажите, что пересечение любого семейства выпуклых множеств является выпуклым множеством. Верно ли то же самое для объединения?

1. Теорема Хелли. На плоскости даны n выпуклых множеств, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все эти множества имеют общую точку

(a) для $n = 4$. *Подсказка.* Рассмотрите точки пересечения троек множеств.

(b) Для произвольного n.

2. (a) Докажите, что для любого выпуклого семиугольника все пятиугольники с вершинами в вершинах данного семиугольника имеют общую точку.

(b) Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

3. На плоскости заданы несколько полуплоскостей, которые покрывают всю плоскость. Докажите, что из этих полуплоскостей можно выбрать три, которые также покрывают всю плоскость.

4. На плоскости даны несколько точек, любые три из которых можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все эти точки можно покрыть кругом радиуса 1.

5. На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя из которых не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

6. Назовем *полосой* ширины w множество всех точек между двумя параллельными прямыми на расстоянии w, включая сами прямые. На плоскости дано конечное множество точек, любые три из которых можно покрыть полосой ширины 1. Докажите, что это множество можно покрыть полосой ширины 2.

7. Дано несколько параллельных отрезков, причем для любых трех из них найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все отрезки.

8. На плоскости дано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой. Докажите, что можно провести горизонтальную и вертикальную прямые так, чтобы любой прямоугольник пересекался хотя бы с одной из этих прямых.

17. Серия 15, непрерывность *10 июля*

Определение 1. *Подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$ называется любая последовательность $\{x_{n_k}\}$, где n_k — возрастающая последовательность натуральных чисел.

Теорема. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Определение 2. Функция f называется *непрерывной в точке* a, если для любой последовательности x_n, сходящейся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(a)$.

Определение 3. Функция f называется *непрерывной в точке* a, если выполнено $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$: при $|a - x| < \delta$ имеем $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$.

Теорема. Определения 2 и 3 равносильны.

Определение 4. Функция называется *непрерывной*, если она непрерывна во всех точках определения.

Определение 5. Пусть функции f и g непрерывны в точке a. Тогда функции $f+g$ и $f\cdot g$ непрерывны в точке a. Если $g(a) \neq 0$, то f/g тоже непрерывна в точке a.

Определение 6. Если функция g непрерывна в точке a, а функция f непрерывна в точке $g(a)$, то функция $f(g)$ непрерывна в a.

Две теоремы выше позволяют без труда доказывать непрерывность разнообразных функций. Например, непрерывность любого многочлена или функции $\sin(x^2 + 3x + \ln x)$.

Теорема. (О промежуточном значении) Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Теорема. (Вейерштрасса) Множество значений, которые принимает непрерывная функция, определенная на отрезке, образует отрезок.

1. Пусть $f\colon [0,1] \to [0,1]$ — непрерывная функция. Докажите, что найдётся $x \in [0,1]$ такой, что $f(x) = x$.

2. Пусть $f\colon [0,1] \to [0,1]$ — непрерывная функция, причём $f(0) = f(1) = 0$.

(a) Верно ли, что на графике f найдётся горизонтальная хорда длины $1/3$?

(b) При каких ℓ обязательно найдётся горизонтальная хорда длины ℓ?

3. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

4. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что образом любого отрезка является отрезок такой же длины.

18. Серия 16, теорема Геринга *11 июля*

Определение 1. Пусть V_1 и V_2 — подмножества вершин графа G. Множество вершин M называется (V_1, V_2)-*разделяющим множеством*, если любой путь из V_1 в V_2 пересекается с M.

1. Теорема Геринга. Пусть V_1 и V_2 — подмножества вершин графа G, а $k \in \mathbb{N}$. Тогда верно одно из двух Утверждений:

Утверждение 1. В G найдётся (V_1, V_2)-разделяющее множество мощности $\leqslant k - 1$.

Утверждение 2. В G найдётся k непересекающихся путей из V_1 в V_2 (в том числе по вершинам множеств V_1 и V_2).

(a) Докажите, что оба условия не могут выполняться одновременно.

(b) Докажите, что если Утверждение 1 неверно, то верно второе, индукцией по количеству вершин. Преобразуйте граф так, чтобы 1-е утверждение не выполнялось, и при убирании некоторого ребра xy существовало (V_1, V_2)-разделяющее множество Z, где $|Z| < k$. Исследуйте множества $Z \cup x$ и $Z \cup y$.

2. Теорема Менгера. Пусть a и b — две вершины связного графа G, не соединенные ребром. Тогда наименьшее количество вершин (a, b)-разделяющего множества, не содержащего вершин a и b, равно количеству непересекающихся путей между a и b (исключая вершины a и b).

3. Лемма Холла. Даны m юношей и несколько девушек. Если для любого $k = 1, 2, \ldots, m$ любые k юношей знакомы в совокупности хотя бы с k девушками, то можно одновременно поженить каждого юношу на знакомой девушке (иными словами, существует паросочетание, покрывающее всех мальчиков).

4. Обобщенная лемма Холла. Даны натуральное число s, а также m юношей и несколько девушек. Если Для любого $k \geqslant s$ любые k юношей знают не меньше, чем $k - s$ девушек, то можно одновременно поженить хотя бы $m - s$ юношей.

5. Теорема Кёнига. Наибольшее количество рёбер в паросочетании в двудольном графе равно наименьшему количеству вершин в вершинном покрытии графа G (вершинное покрытие — это такое множество вершин, что каждое ребро содержит хотя бы одну из них).

Определение 2. Граф G называется *k-связным*, если он имеет больше чем k вершин и после удаления менее чем k любых вершин граф остаётся связным.

6. Теорема Дирака. Пусть $k \geqslant 2$. В k-связном графе для любых k вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.

7. Пусть A, B — два множества вершин в ориентированном (возможно, с кратными ребрами и петлями) конечном графе G. Назовем множество $C \subseteq A$ *хорошим*, если из C в B существует $|C|$ непересекающихся по вершинам путей. Докажите, что все максимальные по включению хорошие множества содержат одинаковое количество элементов.

19. Серия 17, двойная добавка *11 июля*

1. (a) На окружности ω отмечены различные точки A, B, C, D. Точка P не лежит на окружности ω. Прямые PA, PB, PC, PD второй раз пересекают окружность ω в точках A', B', C', D'. Докажите, что $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$.

(b) Докажите, что при инверсии сохраняется двойное отношение четырех точек.

2. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H и пересекают его описанную окружность ω в точках A', B', C'; M — середина BC. Луч MH пересекает ω в точке X. В треугольники $A'B'X$ и $A'C'X$ вписаны окружности с центрами U и V. Докажите, что $UV \parallel BC$.

3. Теорема о бабочке. Хорды AC и BD окружности проходят через середину хорды MN. Отрезки AD и BC пересекают отрезок MN в точках X и Y. Докажите, что $XM = YN$.

4. Четыре окружности ω_A, ω_B, ω_C и ω_D касаются окружности ω в точках A, B, C, D соответственно и касаются друг друга по циклу. Все касания внешние. Докажите, что $ABCD$ — гармонический четырёхугольник.

5. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $BD = DE = EC$. Прямая p пересекает отрезки AB, AD, AE, AC в точках K, L, M, N, соответственно. Докажите, что $KN \geqslant 3LM$.

6. Пусть M_1 — точка на стороне AB четырехугольника $ABCD$. Пусть M_2 — проекция M_1 на прямую BC из точки D, M_3 — проекция M_2 на CD из A, M_4 — проекция M_3 на DA из B, M_5 — проекция M_4 на AB из C, и так далее. Докажите, что $M_{13} = M_1$.

7. Дан треугольник ABC и точка M; прямая, проходящая через M, пересекает AB, BC, CA в C_1, A_1, B_1 соответственно. Прямые AM, BM, CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2, C_2

соответственно. Докажите, что A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC.

8. Окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q, а также описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке PQ.

9. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Окружность ω_A касается его сторон AB, AC и окружности Ω внутренним образом в точке T (такая окружность, кстати, называется *полувписанной*). Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

(a) Прямые BI, CI второй раз пересекают окружность Ω в точках B_0, C_0 соответственно. Докажите, что четырёхугольник AB_0TC_0 — гармонический.

(b) Докажите, что прямая TI делит дугу BAC пополам.

20. Серия 18, производная *12 июля*

Упражнение. У функции $f(x) = x^3 - 6x + 2$. Найдите **(a)** промежутки монотонности; **(b)** минимум и максимум на $[0;3]$. *Указание.* Рассмотрите выражение $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

Определение 1. *Производной* функции f в точке a называется значение предела $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Если такой предел существует, то функция f называется *дифференцируемой* в точке a.

Определение 2. Определим n-ю производную: $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$.

Лемма 1. Функция f имеет производную $f'(a)$ в точке a тогда и только тогда, когда $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$, где остаточный член $r(x)$ “мал” по сравнению с линейной частью, то есть $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$.

Следствие. Если функция f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в a.

Лемма 2. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке a. Тогда функции $f+g$ и fg тоже дифференцируемы в a, причём $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ и $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.

Лемма 3. Пусть функции g и f дифференцируемы в точках a и $g(a)$ соответственно. Тогда функция $f(g(x))$ дифференцируема в a, причём $(f(g(a)))' = f'(g(a))g'(a)$.

Следствие. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке a и $f'(a)$ не равно 0. Тогда $\left(\frac{f}{g}\right)$ дифференцируема в точке a и $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Упражнение. Найдите производную

(a) $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$; **(b)** $\frac{1}{x}$; **(c)** $\sin x$; **(d)** $\sqrt{x}$.

Теорема. (Ролля, или о корне производной.) Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), причём $f(a) = f(b)$. Тогда найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема. (Лагранжа.) Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Функция f монотонно возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$. Аналогично функция монотонно убывает тогда и только тогда, когда $f'(x) < 0$ при всех $x \in (a, b)$.

1. На доске написан многочлен $x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$. Двое по очереди ставят коэффициенты на пропущенные места. Первый хочет добиться того, чтобы многочлен имел единственный вещественный корень. Сможет ли второй ему помешать?

2. Исходно на доске написаны многочлены $x^2 - 4x$ и $x^3 - 3x^2 + 5$. Если на доске написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на неё многочлены $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться многочлен вида $x^n - 1$ (при натуральном n)?

21. Профи–9. Внутренний матбой *12 июля*

1. Существует ли такой многочлен $P(x, y)$, что при подстановке всех пар натуральных x и y будут получаться натуральные значения, причём каждое натуральное значение получится ровно один раз?

2. Найдите все вещественнные числа x такие, что $4x^5 - 7$ и $4x^{13} - 7$ — точные квадраты.

3. Граф G можно нарисовать на плоскости так, что каждое ребро — отрезок единичной длины (рёбра могут пересекаться и накладываться друг на друга, разные вершины должны соответствовать различным точкам). Может ли оказаться, что в любом таком рисунке найдутся две вершины на расстоянии $\frac{1}{2016}$?

4. Дан остроугольный треугольник ABC с $AB > AC$, пусть M — середина BC. P — точка внутри треугольника AMC такая, что $\angle MAB = \angle PAC$. Пусть O, O_1, O_2 центры описанных окружностей треугольников ABC, ABP, ACP соответственно. Докажите, что прямая AO делит отрезок O_1O_2 пополам.

5. На плоскости отмечены 2000 точек. Оказалось, что среди любых семи из них есть четыре, лежащие на одной окружности. Докажите, что найдется хотя бы 1000 отмеченных точек, лежащих на одной окружности.

6. Какое наибольшее число шашек можно расставить в клетках таблицы $n \times n$ так, чтобы выполнялось условие: если шашка A находится ниже и правее шашки B, то они находятся в соседних по диагонали клетках.

7. Дан треугольник ABC. На лучах AB и CB выбраны точки L и N соответственно такие, что $AL = CN = p$, где p — полупериметр треугольника ABC. Пусть точка K диаметрально противоположна точке B на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что перпендикуляр из точки K на LN содержит центр вписанной окружности треугольника ABC.

8. Существует ли многочлен $P(x)$ пятой степени, который любое число вида $11\dots1$ переводит в число такого же вида?

22. Серия 19, комплексные числа *13 июля*

Определение 1. *Комплексным числом* называют выражение вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, а i — символ, удовлетворяющий соотношению $i^2 = -1$. Если $z = a + bi$, то числа a и b называют соответственно *вещественной* и *мнимой* частью числа z. ($Re(z) = a, Im(z) = b$).

Определение 2. *Сопряженным* числом к $z = a + bi$ называют $\overline{z} = a - bi$

Комлексные числа можно интерпретировать геометрически как координатную плоскость с базисными векторами 1 (ось OX) и i (ось OY).

Определение 3. *Модулем* комплексного числа называется длина вектора, то есть $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\overline{z}$.

Отсюда получаем, что если $|z| = r$, а угол наклона вектора равен φ (это называется *аргументом* комплексного числа z), то

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

.

Упражнение. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ — комплексные числа. Найдите $\frac{z_1}{z_2}$, то есть представьте это отношение в виде $x + yi$.

Некоторые интересные тождества. Пусть a и b — комплексные числа. Докажите, что

1. $Re(a\overline{b}) = Re(\overline{a}b)$.

2. $|a + b|^2 - |a - b|^2 = 4Re(a\overline{b})$.

3. $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$.

4. Докажите равносильность двух утверждений:

(a) $Re((a - c)(\overline{c} - \overline{b})) \geqslant 0$.

(b) $|c - \frac{(a+b)}{2}| \leqslant \frac{1}{2}|a - b|$.

5. Докажите формулу Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

6. Описать множество точек, удовлетворяющих уравнению $z^n = 1$.

7. Выразите $\cos(n\varphi)$ и $\sin(n\varphi)$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

8. **(a)** Напишите уравнение прямой, проходящей через точки z_1 и z_2.

(b) Покажите, что уравнение любой прямой имеет вид $az + b\overline{z} + c = 0$.

9. Каждую сторону n-угольника в процессе обхода против часовой стрелки продолжили на ее длину. Оказалось, что концы построенных отрезков лежат в вершинах правильного n-угольника. Докажите, что исходный n-угольник тоже правильный.

23. Серия 20, подпор касательной *14 июля*

Определение 1. Пусть функция f дифференциируемая в точке a. Тогда прямая $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ называется *касательной* к графику f в точке a.

Упражнение. Пусть $a, b, c, d > 0, a + b + c + d = 4$. Докажите, что

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leqslant \frac{4}{9}.$$

1. Пусть $a, b, c, d > 0, a + b + c + d = 4$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geqslant 2.$$

2. Пусть a, b, c — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

3. Пусть даны положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$. Докажите, что для любого натурального k верно

$$a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \ldots + a_n^{k+1} \geqslant a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k.$$

4. Пусть a, b, c, d — положительные. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{a+c+d}{b} + \frac{a+b+d}{c} + \frac{a+b+c}{d}.$$

5. Сумма положительных a, b, c равна $\frac{\pi}{2}$. Докажите, что

$$\cos a + \cos b + \cos c > \sin a + \sin b + \sin c.$$

6. Для положительных $a_2, a_3, \ldots, a_n$ верно, что $a_2 a_3 \ldots a_n = 1$. Докажите, что

$$(a_2+1)^2(a_3+1)^3 \ldots (a_n+1)^n > n^n.$$

7. Для положительных a, b, c верно, что $a+b+c=1$. Докажите, что

$$10(a^3+b^3+c^3) - 9(a^5+b^5+c^5) > 1.$$

24. Серия 21, поляры *14 июля*

Определение 1. Точки X и Y называются *полярными* относительно окружности w с центром O радиуса R, если $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}) = R^2$.

Упр. 1. Докажите, что полярны: **(a)** точка на окружности сама себе; **(b)** две инверсные относительно окружности точки; **(c)** точка вне окружности и основание касательной из нее к окружности.

Упр. 2. Дана точка A и окружность ω с центром O. Докажите, что все точки, полярные точке A, лежат на одной прямой a, проходящей через точку A' (A' инверсна A), и $a \perp OA$.

Определение 2. Прямая a, составленная из точек, полярных A, называется *полярой* точки A. Точка A называется *полюсом* прямой a.

Основное свойство поляры. Точка A лежит на поляре точки B. Тогда B лежит на поляре A.

Упр. 3. **(a)** Поляры точек A и B пересекаются в точке C. Чем является поляра точки C?

(b) Дана прямая a и окружность ω. Докажите, что поляры всех точек на a проходят через некоторую точку A.

1. **(a)** Точка A находится вне окружности ω. Докажите, что поляра точки A — это прямая через основания касательных из A к ω.

(b) Через точку X проводится секущая, которая пересекает окружность ω в точках A и B. Докажите, что точка пересечения касательных к ω в точках A и B лежит на поляре X. В частности, все такие точки пересечения пар касательных лежат на одной прямой.

(c) Окружность ω с центром I касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1. Прямая A_1B_1 пересекается с прямой AB в точке X. Докажите, что точки C, C_1 и основание второй касательной из X к окружности ω лежат на одной прямой.

(d) Докажите, что в предыдущей задаче $IX \perp CC_1$.

2. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их поляры a, b и c пересекаются в одной точке.

3. (a) Через точку X проведена прямая, которая пересекает окружность ω в точках A и B, а поляру X — в точке Y. Докажите, что $(X, Y, A, B) = -1$.

(b) Полярное свойство секущих. Через точку X провели две прямые, которые пересекли окружность ω в точках A, B и C, D соответственно. Докажите, что точка пересечения AC и BD и точка пересечения AD и BC лежат на поляре точки X.

В следующих трех задачах дан четырехугольник $ABCD$, прямые AB и CD пересекаются в точке P, BC и AD — в точке Q, прямые AC и BD — в точке R.

4. Теорема Брокара. Пусть $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Докажите, что поляры точек P, Q и R есть прямые QR, PR и PQ соответственно. Как следствие, точки O, P, Q и R образуют *ортоцентрическую четверку.*

5. Пусть в $ABCD$ вписана окружность ω, которая касается сторон AB, BC, CD и DA в точках K, L, M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке S, а прямые LM и NK — в точке T. Докажите, что тогда

(a) P, Q, S и T лежат на одной прямой;

(b) AC, BD, KM и LN пересекаются в одной точке.

6. Пусть $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Ω с центром O. Докажите, что точки O, I и R лежат на одной прямой.

7. В окружности ω проведены хорда MN и диаметр AB. Прямые AM и BN пересекаются в точке X. Докажите, что перпендикуляр из точки X на диаметр AB проходит через некоторую точку, не зависящую от диаметра AB.

8. Пусть высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X. Докажите, что прямая XH перпендикулярна медиане из вершины C.

9. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1. Оказалось, что прямые BC, B_1C_1 и касательная к описанной окружности ABC в точке A пересекаются в одной точке D. Докажите, что D, центр вписанной окружности I и центр описанной окружности O лежат на одной прямой.

25. Серия 21.5, еще задачи *14 июля*

1. Точка O не лежит на сторонах и их продолжениях треугольника ABC. A_1 — точка пересечения прямой BC с перпендикуляром к OA, проходящим через точку O. Аналогично определяются точки B_1, C_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

2. Две окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке M. На окружности ω_2 выбрана произвольная точка A. Точки B и C на ω_1 таковы, что AB и AC — касательные к ω_1. Прямые BM и CM пересекают ω_2 в точках E и F. Пусть D — точка пересечения касательной из A к ω_2 с прямой EF. Докажите, что все такие точки D лежат на одной прямой.

3. A_1, B_1, C_1 — основания высот остроугольного треугольника ABC. A_1B_1 пересекает AB в точке K, CC_1 пересекает описанную окружность треугольника в точке L, M — середина AB. Докажите, что точки C, K, L, M лежат на одной окружности.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. AB пересекает CD в точке E, AD пересекает BC в точке F. Описанная окружность треугольника AEF пересекает ω в точке G, а описанная окружность треугольника CEF пересекает ω в точке H. Докажите, что AC, BD, и GH пересекаются в одной точке.

5. Дан описаный четырехугольник $ABCD$. Диагональ AC пересекает вписанную окружность в точках P и Q. M — середина PQ. Докажите, что $\angle BMC = \angle DMC$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD повторно пересекаются в точке K, а описанные окружности треугольников AOD и BOC — в точке L. Окружность ω_1 проходит через точку K и основания перпендикуляров из K на AB и CD. Аналогично определим ω_2. Докажите, что середина KL лежит на радикальной оси ω_1 и ω_2.

26. Серия 22, ваши любимые графы *14 июля*

1. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.

2. Дана таблица $n \times n$. Её первые $k < n$ строчек заполнены натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Докажите, что можно расставить натуральные числа от 1 до n в оставшиеся клетки таблицы так, чтобы по-прежнему выполнялось это условие.

3. Имеются 27 карточек с числами от 1 до 27. Двое показывают следующий фокус. Первый получает k карточек, выбранные случайным образом. Одну из них он убирает, а $k-1$ оставшихся выкладывает в ряд. Второй должен назвать спрятанную карточку. Могут ли участники договориться так, чтобы по выложенным карточкам можно было определить спрятанную, если **(a)** $k=4$? **(b)** $k=14$?

4. Пусть G — двудольный граф, в каждой доле по n вершин, и в нём больше чем $(k-1)n$ рёбер. Докажите, что в нём найдётся паросочетание, в котором хотя бы k рёбер.

5. Докажите равносильность следующих условий:

(a) граф двусвязен;

(b) для любых двух вершин существует простой цикл, проходящий по ним;

(c) для любой вершины и любого ребра существует простой цикл, проходящий по ним.

Определение 1. *Окружением* множества вершин A называется множество вершин графа, смежных хотя бы с одной вершиной множества A (возможно, включая вершины множества A).

6. Пусть G — граф с множеством вершин V. Известно, что для любого множества $A \in V$ мощность его окружения не меньше мощности A. Докажите, что в графе G найдется паросочетание, в котором не меньше $V/3$ ребер.

7. В стране 100 городов, соединенных друг с другом дорогами так, что даже если любой город A закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города A). Докажите, что страну можно разбить на два суверенных государства, по 50 городов в каждом, так, что в обоих государствах из любого города можно проехать в любой другой.

8. Среди 250 сотрудников международной фирмы в любой паре сотрудников каждый знает язык, который не знает другой сотрудник из этой пары. Какое наименьшее возможное число языков знают (в совокупности) сотрудники фирмы?

27. Серия 23, ад. комби

15 июля

1. Докажите, что в множестве из n чисел найдется подмножество с суммой, делящейся на n.

2. Опишите все множества из $n-1$ чисел, для которых не найдется подмножества с суммой, делящейся на n.

3. Пусть S — множество из n чисел, взаимно простых с n. Докажите, что любой остаток по модулю n равен сумме некоторых элементов S.

4. Пусть S — множество из $2n-1$ чисел. Предположим, что некоторый вычет a по модулю n встречается в множестве не менее $[n/2]$ раз. Докажите, что в S можно найти ровно n чисел с суммой, делящейся на n.

Подсказка. Можно считать, что этот вычет a нулевой.

Теорема. *(Коши-Дэвенпорт).* Пусть A и B — два множества вычетов по простому модулю p. Определим сумму $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$. Тогда выполнено $|A+B|\geqslant\min(p,|A|+|B|-1)$.

Упражнение. Разберите случай $|A|+|B|>p$ отдельно.

Предложение 1. При сдвиге множества A на c мощность суммы не меняется.

Предложение 2. Если $A\cap B\neq\varnothing$, то $A\cap B+A\cup B\subseteq A+B$.

Предложение 3. Завершите доказательство теоремы, используя принцип минимального контрпримера.

Пример использования. Сравнение $x^2+y^2\equiv k$ по простому модулю p имеет решение для любого k.

Теорема. *(Эрдеш-Гинзбург-Зив)* Из любых $2n-1$ чисел можно выбрать ровно n с суммой, делящейся на n.

5. Докажите, что если ЭГЗ верна для a и для b, то она верна и для ab.

6. Докажите ЭГЗ для простого p.

7. Опишите все множества из $n-2$ элементов, для которых не найдется подмножества с суммой, делящейся на n.

8. Пусть p — простое число. Дано множество S из $2p-1$ чисел, причем остатки чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ попарно различны. Докажите, что в S существует подмножество из p элементов с суммой, делящейся на p, содержащее не более одного числа из $a_1,a_2\ldots,a_n$.

9. Пусть S — множество из 502 чисел, причем оно содержит ровно 10 различных по модулю 541. Докажите, что в S найдется подмножество с суммой, делящейся на 541.

28. Серия 24, неравенство Йенсена *15 июля*

1. (a) Докажите, что если $f(x)$ на некотором отрезке удовлетворяет неравенству $\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, то для любого $\alpha=\frac{n}{2^k}$, где $0\leqslant n\leqslant 2^k$, выполняется

$$\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)\geqslant f(\alpha x+(1-\alpha)y);$$

(b) Докажите, что если функция f еще и непрерывна, то неравенство верно для произвольного $\alpha \in [0,1]$.

Определение 1. Функции, удовлетворяющие условию $\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \geqslant f(\alpha x + (1-\alpha)y)$ для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ на некотором промежутке, называются *выпуклыми* (или *выпуклыми вниз*) на этом промежутке.

Определение 2. Функции, удовлетворяющие условию $\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y) \leqslant f(\alpha x + (1-\alpha)y)$ для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ на некотором промежутке, называются *вогнутыми* (или *выпуклыми вверх*) на этом промежутке.

2. **(a)** Докажите с помощью теоремы Лагранжа, что если первая производная функции монотонно возрастает, то функция выпукла.

(b) Если вторая производная неотрицательна, то функция выпукла.

3. Неравенство Йенсена. Докажите, что если функция удовлетворяет *условию выпуклости*

$$\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geqslant f(\alpha x + (1-\alpha)y),$$

то для любых неотрицательных α_j, сумма которых равна 1, и x_j из отрезка выпуклости, выполняется неравенство

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n) \geqslant f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n).$$

4. Проверьте, с помощью производной или с помощью половинного деления, что функции **(a)** e^x; **(b)** $-\ln x$; **(c)** $-\sin x$ на $[0;\pi]$; выпуклы на некоторых промежутках, и укажите, на каких.
(d) При каких p функция x^p выпукла, а при каких вогнута на $[0,+\infty)$?

5. Сумма положительных вещественных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите, что

$$\frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{d^2+d} + \frac{d}{a^2+a} \geqslant \frac{8}{(a+c)(b+d)}.$$

6. Пусть $M_p(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sqrt[p]{\frac{x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p}{n}}$, $M_{+\infty} = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$, $M_{-\infty} = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$, $M_0(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$. Докажите, что $M_p \geqslant M_q$, где **(a)** $p > q > 0$; **(b)** $p > q = 0$, $0 = p > q$; **(c)** $+\infty \geqslant p > q \geqslant -\infty$.

7. Докажите неравенство о среднем взвешенном:

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} \geqslant \sqrt[\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n]{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}},$$

где все x_j и α_j неотрицательны.

8. Неравенство Минковского. Для положительных a_1, a_2, $\ldots$, a_n и b_1, b_2, $\ldots$, b_n

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}.$$

29. Серия 25, pqr–метод *17 июля*

Для трёх комплексных чисел a, b, c введём обозначения: $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$, $r = abc$.

1. Докажите, что a, b, c — корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ и других корней нет.

2. Докажите, что по вещественным p, q, r однозначно восстанавливаются a, b, c, причём либо a, b, c вещественные, либо одно вещественное, а другие два сопряжены.

3. Докажите, что число $(a - b)(b - c)(c - a)$ вещественно, когда a, b, c — вещественны, и чисто мнимо в противном случае.

4. Докажите, что

$$(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 = T(p, q, r).$$

5. Критерий вещественности. Пусть даны p, q, r. Тогда a, b, c — корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ — вещественны тогда и только тогда, когда $T(p, q, r) \geqslant 0$.

6. Лемма о неотрицательности. Докажите, что неравенства $T(p, q, r)$, p, q, $r \geqslant 0$ равносильны тому, что a, b, c — неотрицательные вещественные числа.

Назовём тройку p, q, r *допустимой*, если она удовлетворяет лемме о неотрицательности.

Лемма о r. Пусть даны $p = p_0, q = q_0$. Докажите, что для минимального r такого, что тройка p_0, q_0, r допустима, в соответствующей тройке корней есть или два равных, или одно из них равно 0. Для максимального r в соответствующей тройке корней есть два равных.

Лемма о q. Пусть даны $p = p_0, r = r_0$. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что тройка p_0, q, r_0 допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных.

Лемма о p. Пусть даны $q = q_0, r = r_0$. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что тройка p, q_0, r_0 допустима, в соответствующей тройке корней есть два равных.

7. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + ac + bc).$$

8. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$. Докажите, что

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geqslant 8.$$

9. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ac} \geqslant \frac{2}{1+abc}.$$

10. Известно, что $a, b, c \geqslant 1$ и $a + b + c = 9$. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant \sqrt{ab + ac + bc}.$$

11. a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right).$$

12. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$2 \geqslant ab + bc + ac - abc.$$

30. Серия 26, проективная

17 июля

Теорема. Существует ровно одно проективное преобразование, переводящее четверку точек A, B, C, D общего положения в четверку A_1, B_1, C_1, D_1 также общего положения.

Пример 1. Докажите, что в трапеции середины оснований, точка пересечения боковых сторон и точак пересечения диагоналей лежат ан одной прямой.

Пример 2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в P, AB и CD – в R, BC и DA – в Q. Через точку P проведена прямая, параллельная RQ, пересекающая противоположные стороны четырехугольника в точках X и Y. Докажите, что $PX = PY$.

1. Чевианы AA', BB', CC' пересекаются в точке Q. Пусть $A'B'$ пересекается с AB в точке C_1 (далее аналогично). Докажите, что A_1, B_1, C_1 коллинеарны.

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Пусть $Q = AD \cap BC$, $P = AB \cap CD$, и $R = AC \cap BD$. Обозначим через X_1, X_2, Y_1, Y_2 точки $PR \cap AD$, $PR \cap BC$, $QR \cap AB$, $QR \cap CD$. Докажите, что X_1Y_1, X_2Y_2, PQ конкурентны.

3. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника проведены четыре прямые, пересекающие его противоположные стороны в точках K и K', L и L', M и M', N и N' (возможно много конфигураций). Прямые KM и LN, $K'M'$ и $L'N'$ пересекаются в точках P и P'. Докажите, что точки P, O, P' лежат на одной прямой.

4. Теорема Паппа. На прямых ℓ_1 и ℓ_2 отмечены точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в точке K, прямые

A_1C_2 и A_2C_1 — в точке L, прямые B_1C_2 и B_2C_1 — в точке M. Докажите, что точки K, L, M лежат на одной прямой.

5. Теорема Дезарга. Пусть два треугольника ABC и $A_0B_0C_0$ расположены таким образом, что прямые, соединяющие соответственные вершины, конкуррентны, то три точки, в которых пересекаются, будучи продолжены, три соответственные стороны, коллинеарны.

6. Есть точки A, B, C, D, прямые AB и CD пересекаются в точке E, прямые BC и DA пересекаются в точке F. На плоскости взята произвольная точка X, точки A, B, C, D спроецированы на EF с центром в X, в результате чего получились точки A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 пересекаются в одной точке.

31. Серия 27, цепочки *19 июля*

1. Докажите, что в последовательности из 10 чисел есть монотонная подпоследовательность из 4 чисел.

2. Целые точки оси OX раскрашены в два цвета. Докажите, что найдутся три точки одного цвета, одна из которых лежит посередине между двумя другими.

3. В стране две столицы — М. и П. Известно, что длина любого пути между ними не менее 11. Докажите, что все города, кроме столиц, можно разделить на 10 республик так, чтобы любой путь из М. в П. проходил по всем республикам.

4. Докажите, что в последовательности из $nk + 1$ различных чисел найдется возрастающая подпоследовательность из $n + 1$ чисел или убывающая подпоследовательность из $k + 1$ чисел.

5. Петя как-то занумеровал вершины правильного

(a) 1001-угольника числами от 1 до 1001;

(b) 2017-угольника числами от 1 до 2017.

Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины A в вершину B, если между ними не больше 9 других вершин и число в B больше числа в A. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины?

6. Целые точки плоскости раскрашены в два цвета. Докажите, что найдется равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, параллельными линиям сетки, с вершинами одного цвета.

Подсказка. Попробуйте порешать эту задачу с конца, то есть подумать, как должна выглядеть конструкция, когда какую-то точку нельзя покрасить ни в первый, ни во второй цвета.

Упражнение. Покажите, что на самом деле достаточно раскраски не всей плоскости, а лишь некоторого достаточно большого квадрата.

7. Целые точки плоскости раскрашены в три цвета. Докажите, что найдется равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, параллельными линиям сетки, с вершинами одного цвета.

32. Серия 28, про окружность *19 июля*

Теорема. Дана окружность и точка M **внутри нее**. Тогда существует проективное преобразование, при котором данная окружность переходит в окружность, а точка M — в ее центр.

Теорема. Дана окружность и **не пересекающая ее** прямая ℓ. Тогда существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а ℓ — в бесконечно удаленную прямую.

Пример. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке (*точке Жергона*).

1. (a) Теорема о бабочке. Через середину C хорды AB проведены две хорды KM и LN. Прямые KL и MN пересекают прямую AB в точках D и E. Докажите, что $CD = CE$.

(b) Теорема о двойной бабочке. На окружности S отмечены точки A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4. Прямая ℓ пересекает прямые A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно и прямые B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 в точках X_1, X_2, X_3 соответственно. Докажите, что прямая B_4B_1 проходит через точку X_4.

2. Частный случай теоремы Паскаля. В окружность вписан шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Докажите, что точки пересечения его противоположных сторон лежат на одной прямой.

3. Частный случай теоремы Брианшона. Докажите, что главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что точку вне окружности нельзя проективным преобразование перевести в ее центр (переведя при этом окружность в окружность).

5. (a) Даны окружность и точка C внутри(вне) ее. Через точку C проведены четыре хорды A_iB_i. Пусть D — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, E — точка пересечения прямых B_1B_2 и B_3B_4. Докажите, что точки C, D, E лежат на одной прямой.

(b) Докажите, что если четырехугольник вписан и описан, то прямая, соединяющая центры вписанной и описанной окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.

6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а диагонали AC и BD в точке F. Описанные окружности AFD и BFC пересекаются второй раз в точке H. Докажите, что $\angle EHF = 90^\circ$.

7. Пусть ω — описанная окружность прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) с центром в точке O. Точка P — произвольная точка на касательной к ω в точке A, D — вторая точка пересечения ω и PB. Точка E на CD такова, что $AE \parallel BC$. Докажите, что P, O, E коллинеарны.

8. Пусть D, E, F — точки касания вписанной окружности ω треугольника ABC со сторонами BC, AB, AC соответственно. Точки P и Q на сторонах AB и AC соответственно таковы, что $PQ \parallel BC$ и PQ является касательной к ω. Пусть M — середина отрезка PQ, T — точка пересечения прямых EF и BC. Докажите, что MT касается ω.

33. Серия 29, ещё немного неравенств *19 июля*

1. Пусть a, b, c — неотрицательные числа. Докажите, что

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leqslant 8.$$

2. Докажите, что для любых a_i, b_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что

$$\sqrt{\left(\sum a_i\right)^2+\left(\sum b_i\right)^2} \leqslant \left(\sum \sqrt{a_i^2+b_i^2}\right).$$

3. Докажите, что для любых положительных $p_1, \ldots, p_5$ верно, что

$$\frac{p_1}{p_2+p_3}+\frac{p_2}{p_3+p_4}+\frac{p_3}{p_4+p_5}+\frac{p_4}{p_5+p_1}+\frac{p_5}{p_1+p_2} \geqslant \frac{5}{2}.$$

4. Пусть a, b, c — неотрицательные числа. Докажите, что

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1} \geqslant \sqrt{6(a+b+c)}.$$

34. Серия 30, КЗВ–1

20 июля

Определение 1. Напомним, что *символом Лежандра* называется выражение, обозначаемое $\left(\dfrac{a}{p}\right)$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p; -1, если a — невычет по модулю p; и 0, если a кратно p.

Также напомним, что $\left(\dfrac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

Теорема. Квадратичный закон взаимности. Пусть p и q — нечетные простые числа. Тогда выполнено

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

Приведем доказательство Е. И. Золотарёва, полученное им в 1872-м году. Для этого сначала введем понятие перестановки.

Определение 2. *Перестановкой* чисел $(1, 2, \ldots, n)$ будем называть их перестановку.

Определение 3. *Инверсией* перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется пара (a_i, a_k), где $i < k$, но $a_i > a_k$.

Определение 4. *Четностью* перестановки называется четность количества инверсий.

Лемма 0. Четность перестановки и обратной перестановки одинаковы.

Лемма 1. Пусть p — простое число, a — ненулевой остаток по модулю p. Определим перестановку $\pi := (a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a)$, где каждому числу соответствует его остаток по модулю p. Тогда эта перестановка четная, если a — квадратичный вычет по модулю p, и нечетная, если a — квадратичный невычет.

Чтобы доказать эту лемму, рассмотрим многочлен

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p-1} (x_j - x_i).$$

Применим к переменным перестановку. Тогда многочлен не меняется, если π четна, и меняет знак на противоположный, если π нечетна.

Подставим $x_i = i$ и применим перестановку π, то есть подставим $x_i = ai$. Знак перестановки (1 для четной и -1 для нечетной) можно определить как

$$\frac{P(1, 2, \ldots, p-1)}{P(a, 2a, \ldots, (p-1)a)} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p-1} \frac{ai - aj}{i - j} \equiv a^{(p-1)p/2} \equiv a^{(p-1)/2} \pmod p,$$

что совпадает по знаку с символом Лежандра $\left(\dfrac{a}{p}\right)$.

Теперь зададим перестановку τ на числах $\{0, 1, 2, \ldots, pq - 1\}$, где p и q — два нечетных простых числа, для которых мы доказываем КЗВ. Представим каждое число от 0 до $pq - 1$ как $x = a + bp$, $0 \leqslant a \leqslant p - 1$, $0 \leqslant b \leqslant q - 1$ (такое представление единственно). Сопоставим $\tau : a + bp = x \to y = b + aq$.

1. Лемма 2. Четность перестановки τ определена как

$$\operatorname{sign} \tau = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$

2. Завершите доказательство КЗВ, связав четность перестановок π и τ.

3. Пусть $(n, k) = 1$. Пусть $(a, n) = 1$ и $(a, k) = 1$. Докажите, что число a является квадратичным вычетом по модулю nk тогда и только тогда, когда оно является квадратичным вычетом по модулям n и k.

4. Пусть p — нечетное простое число, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что a является квадратичным вычетом по модулю p^n тогда и только тогда, когда a является квадратичным вычетом по модулю p.

5. Докажите, что a является квадратичным вычетом по модулю 2^n (где $n > 3$) тогда и только тогда, когда a является квадратичным вычетом по модулю 8.

35. Серия 31, асимптотика–2 *20 июля*

1. Из бесконечной клетчатой доски выкинули несколько клеток, никакие две из которых не являются соседними по стороне и по диагонали. Всегда ли оставшуюся часть можно разбить на доминошки?

2. Из бесконечной клетчатой доски выкинули все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшуюся часть доски обойти шахматным конем?

3. Бесконечную клетчатую плоскость разбили на равные параллелограммы с целочисленными вершинами, не содержащие целочисленных точек внутри и на границе. Докажите, что площадь параллелограмма равна 1.

4. На клетчатой плоскости лежит выпуклая фигура площади больше 10. Докажите, что ее можно параллельно перенести так, чтобы она содержала 11 целочисленных точек внутри или границе.

5. Лемма Минковского. В центре координатной плоскости расположена выпуклая центрально-симметричная относительно центра координат фигура площади больше 4. Докажите, что в ней найдется еще одна целочисленная точка.

6. Существует ли функция из шара в круг, не уменьшающая расстояния?

36. Серия 32, КЗВ–2 *21 июля*

1. Найдите все простые числа, для которых 5 является квадратичным вычетом.

2. Докажите, что простых чисел вида $10k-1$ бесконечно много.

3. Докажите, что число 2^n+1 не имеет простых делителей вида $8k+7$.

4. Последовательность $\{x_n\}$ определена рекурсивно: $x_1 = a$ при некотором натуральном a, а также $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Пусть $y_n = 2^{x_n} - 1$. Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может быть в последовательности $\{y_n\}$?

5. Дано $k = 2^{2^n} + 1$. Докажите, что k простое тогда и только тогда, когда k является делителем числа $3^{\frac{k-1}{2}} + 1$.

6. Даны натуральные числа n и k. Оказалось, что $\varphi(5^n - 1) = 5^k - 1$. Докажите, что $(n, k) > 1$.

37. Серия 33, построение линейкой *21 июля*

1. (a) Постройте к трем данным прямым, проходящим через одну точку, четвертую так, чтобы эти прямые образовывали гармоническую четверку.

(b) На прямой ℓ даны три такие точки P, Q, R, что Q есть середина отрезка PR. Постройте прямую, параллельную ℓ и проходящую через данную точку S.

2. (a) Даны две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2. Разделите пополам данный отрезок AB на прямой ℓ_1.

(b) Через данную точку P провести прямую, параллельную двум данным параллельным между собой прямым ℓ_1 и ℓ_2.

(c) Дан отрезок AB и параллельная ему прямая ℓ. Удвойте отрезок AB.

(d) Разделите отрезок AB на n равных частей, если задана прямая ℓ, параллельная AB.

3. (a) Дан параллелограмм $ABCD$. Через данную точку P проведите прямую, параллельную данной прямой ℓ.

(b) Дан параллелограмм. Увеличьте данный отрезок в n раз.

(c) Дан параллелограмм. Разделите данный отрезок на n равных частей.

4. (a) Дан неподвижный круг с центром. Проведите через данную точку прямую, параллельную данной прямой.

(b) Дан неподвижный круг с центром. Увеличьте и уменьшите данный отрезок в n раз.

5. Дан неподвижный круг с центром. Постройте точку пересечения окружности, заданной центром и одной точкой на ней и прямой. *Попробуйте сделать гомотетию.*

6. Дан неподвижный круг с центром. Постройте точку пересечения двух окружностей, каждая из которых задана своим центром и одной точкой на самой окружности.

Теорема Штейнера-Понселе. Любое построение, выполнимое на плоскости циркулем и линейкой, можно выполнить одной линейкой, если нарисована хотя бы одна окружность и отмечен её центр.

7. Докажите, что при помощи одной линейки нельзя разделить данный отрезок пополам.

8. На плоскости дана окружность. Докажите, что при помощи одной линейки нельзя построить ее центр.

9. Две данные прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке P, находящейся за пределами чертежа. Постройте прямую, соединяющую данную точку Q с точкой P.

10. Проведите прямую через две точки, между которыми расстояние больше, чем длина линейки.

38. Серия 34, ван дер Варден *21 июля*

1. Целые точки плоскости раскрашены в k цветов. Докажите, что найдется равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, параллельными линиям сетки, с вершинами одного цвета.

2. Целые точки плоскости раскрашены в 2 цвета. Докажите, что найдется клетчатый квадратик, вершины которого покрашены в один цвет.

3. Целые точки плоскости раскрашены в k цветов. Докажите, что найдется клетчатый квадратик, вершины которого покрашены в один цвет.

4. Теорема ван дер Вардена. Докажите, что для любых k и s при любой раскраске натурального ряда в s цветов найдется одноцветная k-членная арифметическая прогрессия.

5. Обобщенная теорема ван дер Вардена. Целые точки плоскости раскрашены в k цветов. Назовем *фигурой* множество точек M с целыми координатами. Докажите, что на плоскости можно выбрать фигуру, гомотетичную M, в которой все точки одноцветны.

39. Серия 35, касательная функция *22 июля*

Упражнение. Даны положительные a, b, c такие, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что
$$\frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \geqslant 1.$$

1. Даны положительные a, b, c такие, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что
$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geqslant 3.$$

2. Даны положительные a, b, c, d такие, что $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. Докажите, что
$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c} + \sqrt{1-d} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}.$$

3. Даны положительные a, b, c, d, e такие, что $\frac{1}{4+a} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{4+c} + \frac{1}{4+d} + \frac{1}{4+e} = 1$. Докажите, что
$$\frac{a}{4+a^2} + \frac{b}{4+b^2} + \frac{c}{4+c^2} + \frac{d}{4+d^2} + \frac{e}{4+e^2} \leqslant 1.$$

4. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что
$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} \geqslant \frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{a+b+c}.$$

5. Даны положительные a, b, c. Докажите, что
$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geqslant (a+b+c)^3.$$

6. Даны положительные a, b, c такие, что $abc \geqslant 1$. Докажите, что
$$\left(a + \frac{1}{a+1}\right)\left(b + \frac{1}{b+1}\right)\left(c + \frac{1}{c+1}\right) \geqslant \frac{27}{8}.$$

40. Серия 36, теорема Паскаля *22 июля*

Теорема Паскаля. Если A, B, C, D, E, F — шесть произвольных точек на окружности, то точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой. В случае совпадения двух точек берется касательная к окружности.

1. Хорды AB и CD параллельны, P и Q произвольные точки на той же окружности. Пусть X точка пересечения BP и CQ, Y точка пересечения AQ и DP. Докажите, что XY параллельно AB и CD.

2. Точки A, B, C лежат на окружности ω, точка D вне ее. Прямые AD, BD, CD пересекают ω второй раз в точках A', B', C' соответственно. Точка N так же лежит на ω. Прямые $A'N$, $B'N$, $C'N$ пересекают BC, AC, AB в точках A_0, B_0, C_0. Докажите, что точки A_0, B_0, C_0 и D коллинеарны.

3. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

4. Дан треугольник ABC и точки B_1 и C_1 на CA и AB. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается сторон CA и AB в точках E и F соответственно. Пусть касательные в точках B_1 и C_1 (отличные от сторон треугольника ABC) касаются ω в точках Y и Z соответственно. Докажите, что прямые B_1C_1, EF и YZ конкурентны.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с центром описанной окружности O. Перпендикуляр восстановленный к BD в точке B пересекает перпендикуляр восстановленный к AC в точке C в точке E. Перпендикуляр к BD в D пересекает перпендикуляр к AC в A в F. Пусть X точка пересечения прямых AB и CD. Докажите, что точки O, E, F, X коллинеарны.

6. Докажите, что прямые Паскаля шестиугольников $ABCDEF$, $ADEBCF$, $ADCFEB$ конкурентны.

7. Дана окружность с центром O и диаметром AB. Произвольные точки C и D на одной полуокружности таковы, что C лежит между A и D. Отметим точку E на другой полуокружности. I точка пересечения CE с AD, K точка пересечения IO с BE. Докажите, что $\angle CDK = 90°$.

8. Прямая AB касается окружности ω в точке Y так, что Y лежит между A и B. Точка X на окружности ω такова, что XY диаметр. Пусть XA и XB пересекает второй раз ω в точках C и D соответственно, а AD и BC — в точках E и F соответственно. Докажите, что $XE = XF$.

9. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. P точка на прямой AC такова, что PB и PD касательные к ω. Касательная к C пересекает касательную к PD в точке Q, а прямую AD в точке R. Пусть E вторая точка пересечения AQ и ω. Докажите, что B, E, R коллинеарны.

41. Вопросы к зачёту

23 июля

Комбинаторика.

1. Теорема Геринга.

2. Теорема Менгера, лемма Холла, теорема Кёнига. Задача **22.5**.

3. Теорема Дирака, задачи **22.1, 22,4**.

4. Лемма Шпернера, задача **3.7**.

5. Задача **3.6**.

6. Теорема Хелли на прямой. Применение идей проецирования в задачах **7.4, 7.5**.

7. Применение идеи сколько угодно близких значений в задачах **9.1, 9.2, 9.3**.

8. Разница между конечным и бесконечным на примере задачи **9.4**.

9. Доказательство теоремы Хелли для плоскости. Применение в задачах **14.2, 14.3, 14.4**.

10. Цепочки. Задачи **27.3, 27.4, 27.5**.

11. Частные случаи обобщения ван дер Вардена. Задачи **27.6, 27.7**.

12. Асимптотический метод в задачах **31.2, 31.3, 31.4**.

13. Асимптотический метод в задачах **31.5, 31.6**.

14. Задача **34.3** и теорема ван дер Вардена.

Геометрия.

15. Гармонический четырехугольник, задачи **8.1, 8.2, 8.3, 8.5**

16. Симедиана и центр поворотной гомотетии, задача **12.5**.

17. Двойные отношения, задачи **2.1, 2.3, 2.4**.

18. Поляры, полярное свойство секущих, теорема Брокара.

19. Задача **21.5**.

20. Проективное преобразование, **26.Теорема**, задача **26.3**.

21. Проективное преобразование и окружность, две теоремы из серии 28.

22. Нестареющая классика: теоремы Паппа, Дезарга, о бабочке, Паскаля, Брианшона

23. Теорема Штейнера-Понселе.

Алгебра и математический анализ.

24. Многочлены от нескольких переменных, задачи **4.1, 4.7**.

25. Симметрические многочлены, теорема о симметрических многочленах.

26. Производная, альтернативное определение и равносильность определений. Производная суммы и произведения функций.

27. Производная сложной функции. Производная отношения функций. **18.2**.

28. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. **18.1**.

29. Решение неравенств с помощью подпора касательной. Задачи **20.1, 20.3, 20.5**.

30. Два способа доказательства выпуклости функции.

31. Неравенство Йенсена. **24.7, 24.6**.

32. pqr—метод. $T(p,q,r) = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2$. Леммы о p, q и r.

33. Подпор функцией: задачи **35.1, 35.3**.

34. Асимптотика. Сравнение многочленов "на бесконечности", степенная функция и многочлен.

35. Применение асимптотических идей в задачах **5.2, 5.3**.

36. Определение предела последовательности. Сложение, умножение на константу, умножение, деление пределов.

37. Поиск пределов последовательностей на примере задач **10.5, 10.8, 10.9**.

38. Аксиома полноты, теорема о двух милиционерах.

39. Два определения непрерывности, их равносильность. Непрерывность суммы, произведения, частного, композиции.

40. Теорема о промежуточном значении. Теорема Вейерштрасса.

41. Применение непрерывности в задачах **15.1, 15.4**.

Теория чисел.

42. Доказательство LTE и LTE для двойки.

43. Применение LTE в задачах **1.2, 1.5, 1.6**.

44. Применение асимптотических идей в задачах **5.4, 5.5**.

45. Доказательство Рождественской теоремы Ферма с помощью леммы Туэ.

46. Применнеие LTE в задачах **11.2, 11.5, 11.6**.

47. Доказательство теоремы Коши-Дэвенпорта.

48. Вывод теоремы Эрдёша-Гинзбурга-Зива из Коши-Дэвенпорта.

49. Квадратичный закон взаимности. Леммы 1 и 2.

50. Квадратичный закон взаимности. Доказательство с использованием лемм 1 и 2.

51. Применение КЗВ в задачах **32.1, 32.2**.

52. Применение КЗВ для двойки в задачах **32.3, 32.4, 32.5**.