XXXV Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 3 – 28 июля 2019 г.

9 КЛАСС. ОБЫЧНАЯ ГРУППА

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Пикалов П. С.
Старостина О. В.
Бадажкова О. А.
Ланских И. Ю.
Ляховец Д. Ю.
Газизуллина Р. К.

Оглавление

От авторов

> There's no point in being grown-up
> if you can't be childish sometimes.
>
> «Doctor Who»

Дорогой друг! Вы держите в руках или просматриваете с экрана Вашего зомбоящика брошюру с материалами занятий «обычной» группы 9 класса Летней многопредметной школы Кировской области, порождённую преподавателями групп разной степени обычности. Несколько занятий появились на свет как совместное творчество с преподавателями группы «профи».

Мы выражаем искренюю благодарность колеегам с других параллелей Е. А. Исааку и М. А. Лукину за приятную совместную работу по составлению математических боёв, инженерам М. П. Селюнину и Р. А. Криницину за техническую поддержку всего и, конечно, нашим прекрасным детям:
Абдикаримову Бексултану, Буряку Константину, Васильеву Владиславу, Воронину Ивану, Деветьярову Даниилу, Лапину Антону, Наговицыну Александру, Перегудову Сергею, Петровой Анне, Раушанову Марлену, Ропай Анне, Савинову Алексею, Сафонову Григорию, Чурину Олегу.

1. Вступительное занятие. 4 июля

Сюжет. Инопланетянин Z живет в двумерном мире, то есть на плоскости. Однажды Z решил позагорать. Z хочет, чтобы каждая точка на границе его тела была освещена лучами солнца не меньше 1 минуты. При этом Z может вертеться в плоскости как угодно (делает он это моментально), а лучи света параллельны и сонаправлены с осью OX. Точка поверхности считается освещенной, если на нее не падает тень ни от какой другой точки тела Z.

1. Какое минимальное время должен загорать Z, если он квадратный?

2. А если Z треугольный?

3. Докажите, что если Z — выпуклый многоугольник, то ему достаточно двух минут, чтобы загореть.

4. Докажите, что если Z — выпуклый многоугольник, то ему нужно не менее 1,5 минут, чтобы загореть.

5. Какое минимальное время должен загорать Z, если он имеет форму сектора круга с острым углом?

6. Какое минимальное время должен загорать Z, если он имеет форму сектора круга с тупым углом?

7. Нарисуйте шестиугольного Z, который может загореть, но на это наверняка потребуется более 2 минут.

8. Верно ли, что любой пятиугольный Z сможет загореть, причем для этого достаточно 2 минут?

2. Вступительная олимпиада. 4 июля

1. Дима написал на доске выражение

$$1 \star 2 \star 3 \star \ldots \star 2019,$$

где каждая звездочка — либо знак “+”, либо знак “−”. Сережа может за одно действие выбрать не крайнее число и поменять оба знака рядом с ним на противоположные (плюс на минус, минус на плюс). Докажите, что такими операциями Сережа может получить выражение, значение которого делится на 7.

2. Дана окружность и точка O на ней. Вторая окружность с центром O пересекает первую в точках P и Q. Точка C лежит на первой окружности, а прямые CP и CQ вторично пересекают вторую окружность в точках A и B. Докажите, что $AB = PQ$.

3. Отряд М9 проводит знакомство. На него явились n детей. У Павла Сергеевича они пронумерованы в списке числами от 1 до n. Дети выстроились в круг так, что между каждыми двумя детьми с последовательными номерами стоит одно и то же число других ребят. Соседками Жени оказались Аня и Оля. У

Ани в списке номер 11, у Жени — номер 4, у Оли — номер 17. Сколько детей пришло на знакомство?

4. Дан клетчатый квадрат 131×131, из которого вырезана одна угловая клетка. Четно или нечетно количество способов разбить этот квадрат на уголки из трех клеток?

5. На доске выписаны числа $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, такие что $x_1 = 1/2$ и для любого n от 1 до 99 выполняется равенство

$$x_{n+1} = 1 - x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Докажите, что $x_{100} > 0{,}99$.

6. Дано 30 различных трехзначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать несколько и разбить на два равных и по количеству, и по сумме множества.

3. Многочлены 1. Теорема Безу. 5 июля

Определение. *Разделить* многочлен $P(x)$ на ненулевой многочлен $Q(x)$ с остатком — это значит найти такие многочлены $H(x)$ (*неполное частное*) и $R(x)$ (*остаток*), что выполнено равенство $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$, причем $\deg R(x) <$ $< \deg Q(x)$ или $R(x) = 0$.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$, т.е. $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$, притом $\deg Q(x) = \deg P(x) - 1$.

1. (a) Многочлен $P(x)$ делится на $(x - a)$ тогда и только тогда, когда $P(a) = 0$.
(b) Докажите, что число корней многочлена не превосходит его степени.
(c) Докажите, что если значения двух многочленов, степень каждого из которых не превосходит n, совпадают в $n + 1$ различных точках, то эти многочлены равны.
(d) Если многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$, то корни многочлена $Q(x)$ являются корнями многочлена $P(x)$.

2. При каких a и b многочлен $P(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?

3. Пусть $P(x)$ — многочлен такой, что $P(x) = P(x + 1)$. Докажите, что $P(x)$ — константа.

4. Многочлен $P(x)$ дает остаток 2 при делении на $x - 1$ и остаток 1 при делении на $x - 2$. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на многочлен $(x - 1)(x - 2)$?

5. Найдите все целые x, при которых число $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ делится на $x^2 + 1$.

6. Докажите, что

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}=1.$$

7. Про многочлен $P(x)$ степени 10 с действительными коэффициентами известно, что $P(1)=P(-1),\ldots,P(5)=P(-5)$. Докажите, что $P(x)=P(-x)$ для любого x.

8. Найдите все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$xP(x-1)=(x-20)P(x).$$

9. Докажите, что при нечетном m выражение $(x+y+z)^m-x^m-y^m-z^m$ делится на $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

4. Точки и выпуклая оболочка. 5 июля

Определение. Множество точек X на плоскости называется *выпуклым*, если для любых точек $A, B \in X$ все точки отрезка AB тоже принадлежат X. Примеры выпуклых множеств: точка, отрезок, луч, полуплоскость, круг, внутренность треугольника.

1. Докажите, что если три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, принадлежат выпуклому множеству X, то и все точки внутри треугольника ABC принадлежат X.

2. Всегда ли является выпуклым **(a)** объединение; **(b)** пересечение двух выпуклых множеств?

Определение. *Выпуклой оболочкой* множества X называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих X.

3. **(a)** Чем является выпуклая оболочка множества, состояшего из двух различных точек? **(b)** А из трех?

4. Дано множество точек $A_1,\ldots,A_n,A_{n+1}$. Пусть G — выпуклая оболочка множества точек $A_1,\ldots,A_n$. Пусть H — фигура, являющаяся объединением всех отрезков, соединяющих A_{n+1} со всеми точками G.
(a) Докажите, что H — выпуклая фигура.
(b) Докажите, что H — выпуклая оболочка множества всех точек.
(c) Докажите, что H — многоугольник.

Теорема. Выпуклая оболочка конечного множества точек является точкой, отрезком либо выпуклым многоугольником.

5. Докажите, что любые 4 точки плоскости можно разбить на две группы (необязательно по 2 точки в группе) так, что выпуклые оболочки этих групп пересекаются.

6. Докажите, что среди любых 5 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать 4, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.

7. На плоскости даны n точек, причем любые 4 из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что все точки являются вершинами выпуклого n-угольника.

8. На плоскости расположены несколько правильных n-угольников. Докажите, что выпуклая оболочка их вершин имеет не менее n углов.

9. На плоскости отмечено конечное количество точек, не все на одной прямой. В каждой точке записано число, причем сумма чисел во всех точках, лежащих на одной прямой, равна 0. Докажите, что все числа равны 0.

10. На плоскости дано 22 точки, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары так, чтобы отрезки, заданные парами, пересекались по крайней мере в пяти различных точках.

5. Лексикографический порядок. 6 июля

Определение. Рассмотрим две строки из n натуральных чисел: $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$. Будем говорить, что A *мажорирует* B (и писать $A \succ B$), если для некоторого номера $1 \leqslant i \leqslant n$ выполнено $a_i > b_i$ и $a_j = b_j$ для $j < i$. Отношение «мажорирует» задаёт на множестве *лексикографический порядок.*

1. Докажите, что

(a) если $A \succ B$, $B \succ C$, то $A \succ C$;

(b) строго убывающая последовательность строк длины n всегда конечна;

(c) в каждом непустом множестве строк длины n есть наименьший элемент;

(d) Аналогично можно определить порядок на множестве бесконечных вправо строк натуральных чисел. Верны ли для него пункты **(a)**, **(b)**, **(c)**?

2. В стране N существуют n различных номиналов монет. В этом году вышел закон, согласно которому каждый житель страны получает ежемесячную зарплату монетами меньшего номинала, чем те, которыми он платил налог в предыдущем месяце. Докажите, что рано или поздно народ разорится.

3. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Раз в минуту Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

4. Дана последовательность из бесконечного числа нулей и конечного числа единиц. Если найдется группа вида 01, то ее можно заменить на группу вида $10\ldots0$ с произвольным числом нулей. Докажите, что можно сделать лишь конечное число таких замен.

5. Двое играют в следующую игру. Есть последовательность из n крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые k $(k = 1, \ldots, n)$ подряд идущих знака таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней — нолики (допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её (заменить крестик на нолик и нолики на крестики). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?

6. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена с натуральными коэффициентами. Будем говорить, что P асимптотически меньше Q, если $P(x) < Q(x)$ для всех достаточно больших x. Существует ли бесконечная последовательность многочленов P_1, P_2, $\ldots$, в которой каждый следующий асимптотически меньше предыдущего?

6. Комплексные числа. 6 июля

Определение. *Комплексным числом* z называется число вида $z = a + bi$, где a и b — вещественные числа, а $i^2 = -1$. При этом a называется *вещественной частью числа* z и обозначается через $\operatorname{Re} z$, b — *мнимой частью числа* z и обозначается через $\operatorname{Im} z$. Два комплексных числа z_1 и z_2 равны, если $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Определение. Для числа $z = a + bi$ сопряженным называется число $\overline{z} = a - bi$.

1° $\overline{\overline{z}} = z$;
2° $\overline{z} + z$, $\overline{z}z$ — вещественные числа;
3° $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$;
4° $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$;
5° $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$;
6° $\overline{z^n} = \overline{z}^n$;
7° $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$;
8° $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

1. Упростите выражение **(a)** i^{2019}; **(b)** $\frac{(1+2i)(3-4i)+4-i}{2+3i}$.

2. Решите уравнения: **(a)** $\mathrm{x}^2 + 4x + 5 = 0$; (**b**)$x^2 - (3 + 2i)x + 6i = 0$; (**c**)$x^3 - 1 = 0$

3. Докажите, что если z — комплексный корень многочлена $P(x)$ с вещественными коэффицентами, то $\overline{z}$ — также корень этого многочлена.

4. Составьте многочлен наименьшей степени с вещественными коэффицентами, имеющий корни $1 + 2i$ и i.

5. Изобразите на комплексной плоскости следующие множества:
(a) $\operatorname{Re} z < 2$; **(b)** $\operatorname{Im}\left(z^2\right) \leqslant 1$; **(c)** $\operatorname{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$.

Определение. *Модулем* $|z|$ числа z называется длина вектора $\overrightarrow{OZ}$, а *аргументом* $\arg z$ числа z — ориентированный угол между положительным направлением оси абсцисс и вектором $\overrightarrow{OZ}$. Для ненулевых комплексных чисел можно считать, что $arg z \in [0, 2\pi)$. Для числа $z = 0$ аргумент не определен.

6. Изобразите на комплексной плоскости числа 1, i, $1+i$ и $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите их модули и аргументы.

7. Докажите, что

(a) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$;
(b) $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2;
(c) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
(d) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
(e) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

8. Докажите, что для произвольных комплексных чисел z_1 и z_2 выполняется равенство:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Какой геометрический смысл оно имеет?

9. Изобразите на комплексной плоскости следующие множества:
(a) $|z - i| < 1$; **(b)** $1 < |z - 1 + 2i| \leqslant 3$; **(c)** $\frac{|z-2i|}{|z+1|} = 1$; **(d)** $|iz - 1| > |z - 1|$; **(e)** $|\pi - \arg z| \leqslant \frac{\pi}{4}$; **(f)** $|\arg(z - i)| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

10. Найдите $\min|3 + 2i - z|$ при $|z| \leqslant 1$.

11. Про комплексные числа x, y и z известно, что $|x| = |y| = |z| = 1$. Какие значения может принимать выражение $\frac{|x+y+z|}{|xy+yz+zx|}$?

12. У приведенного многочлена четвертой степени $P(x)$ с вещественными коэффициентами есть 4 корня, но они не являются вещественными числами. Произведение двух из корней равно $13+i$, сумма двух других равна $3+4i$. Найдите коэффициент многочлена при x^3.

7. С целыми коэффициентами. 7 июля

1. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, a и b — целые числа. Докажите, что:

(a) $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$;
(b) $P(a) \equiv P(a + b) \pmod b$.

2. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что $P(2)$ и $P(3)$ кратны 6. Докажите, что $P(5)$ кратно 6.

3. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2019$, $P(2019) = 1, P(k) = k$, где k – некоторое целое число. Найдите k.

4. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ — один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность $P(2019) - Q(2019)$ кратна 1009.

5. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними – целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

6. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + ... + P(n)$ делится на k.

7. Докажите, что для любого непостоянного многочлена $P(x)$ найдется такое натуральное число n, что $P(n)$ – составное число.

8. В равенстве $x^5 + 2x + 3 = p^k$ числа x и k — натуральные. Может ли число p быть простым?

9. Докажите, что не существует многочлена степени не ниже двух с целыми неотрицателными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом.

8. Поворотная гомотетия. 7 июля

Определение. *Поворотной гомотетией* с центром в точке O, коэффициентом k и ориентированным углом α называется преобразование плоскости, переводящее любую точку плоскости X в такую точку X', что $kOX = OX'$ и $\angle XOX' = \alpha$, т.е. $H_O^{\alpha,k} = R_O^\alpha \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\alpha$.

Пример. Дан квадрат $ABCD$ с центром O. Точка K — середина отрезка AB. Постройте хотя бы один центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок BK в AO.

1. (a) Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P (точки A, B, A_1, B_1, P различны). Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая точку A в A_1, а B в B_1, при этом центром этой поворотной гомотетии является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P.

(b) Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1.

2. Квадраты $ABCD$ и $AXYZ$ одинаково ориентированы. Докажите, что прямые BX, CY и DZ пересекаются в одной точке.

3. Даны четыре прямые a, b, c, d, причем никакие две из них не параллельны. Рассмотрим треугольники, которые образуют тройки прямых abc, abd, acd, bcd. Докажите, что описанные окружности этих треугольников проходят через одну точку *(точка Микеля)*.

4. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Точка M — середина AB, N — середина CD. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BCE, ADE и MNE лежат на одной прямой.

5. Середины сторон BC и B_1C_1 правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают (вершины обоих треугольников перечислены по часовой стрелке). Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1, а также отношение длин отрезков AA_1 и BB_1.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC проведена высота BH. В треугольники ABH и CBH вписаны окружности, касающиеся AB и BC в точках X и Y. Докажите, что $\angle XHY = 90$.

7. На диагонали BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрана такая точка K, что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' — центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X. Докажите, что точки A, X, I, D лежат на одной окружности.

8. Две окружности пересекаются в точках A и B, а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$. Пусть P — середина отрезка BN, а Q — середина отрезка MC. Докажите, что $\angle APQ = \angle ANC$.

9. Орграфы – 1. 9 июля

Определение. *Ориентированный граф* — граф, каждое ребро которого является стрелкой от одной вершины ребра к другой. Путь в ориентированном графе — такая последовательность вершин, что в каждую следующую вершину ведет стрелка из предыдущей.

Определение. *Полустепенью исхода* $d^+(v)$ вершины v называется число рёбер, выходящих из вершины v. *Полустепенью захода* $d^-(v)$ вершины v называется число рёбер, входящих в вершину v.

1. В ориентированном графе 101 вершина. Некоторые из вершин соединены одним ребром. У каждой вершины, кроме вершины w, $d^+(v) = 20$ и $d^-(v) = 21$. Докажите, что в вершину w не существует пути ни из какой вершины.

2. В ориентированном графе для любых двух вершин u и v существует либо путь из u в v, либо путь из v в u. Докажите, что существует путь, который проходит через все вершины графа.

3. В ориентированном графе 101 вершина. Из любой вершины выходит ровно 40 рёбер, и в любую вершину входит ровно 40 рёбер. Докажите, что из любой вершины в любую другую существует путь длины не более чем три.

Определение. Ориентированный граф называется *сильносвязным*, если существуют пути в обе стороны между любыми двумя вершинами.

4. Докажите, что в сильносвязном ориентированном графе существует цикл, проходящий через все вершины графа.

5. В ориентированном графе существует путь между любыми двумя вершинами длины не более чем два. Оказалось, что после удаления любого ребра в этом графе, граф остается сильносвязным. Докажите, что теперь существует путь между любыми двумя вершинами длины не более чем три.

6. В связном графе на 30 вершинах ввели ориентацию рёбер так, что в каждую вершину входит хотя бы одно ребро и хотя бы одно ребро выходит. Докажите, что в граф можно добавить не более 10 ориентированных рёбер, чтобы он стал сильносвязным.

7. Полустепень исхода каждой вершины ориентированного графа не превосходит единицы. Докажите, что вершины графа можно разбить на три подмножества так, что в каждом из подмножеств не будет смежных вершин.

8. Докажите, что в полном графе, в котором более четырёх вершин, можно так ввести ориентацию рёбер, что из любой вершины в любую другую будет существовать путь длины не более чем два.

9. В ориентированнном графе на 1001 вершине между любыми двумя вершинами есть ровно одно ребро. Полустепени исхода и захода каждой вершины равны 500. Докажите, что любой подграф из 668 вершин данного графа является сильносвязным.

10. Два велосипедиста. 9 июля

1. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q, одновременно начали движение из точки P по часовой стрелке с равными угловыми скоростями два велосипедиста A и B.

(a) Докажите, что прямая AB все время проходит через точку Q.

(b) Докажите, что треугольники PAB подобны друг другу и подобны треугольнику PO_1O_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей.

(c) Найдите ГМТ середин отрезков AB.

(d) Докажите, что точки A и B постоянно равноудалены от некоторой фиксированной точки X.

(e) Докажите, что угол QPX — прямой.

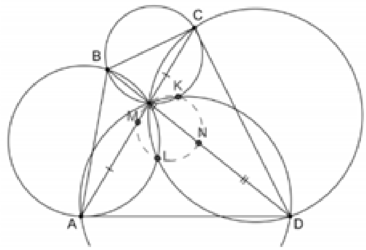
2. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке D. Окружность, проходящая через вершины B и C, пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F. Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O. Докажите, что угол BFO — прямой.

Указание. Рассмотрите велосипедистов, движущихся из точки F.

3. Дан треугольник ABC и окружность с центром в точке O, проходящая через вершины B и C и повторно пересекающая прямые AB и AC в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников APQ и ABC имеют ровно две общие точки A и M. Тогда угол OMA — прямой.

4. О бабочке. Через точку A, не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна — в точках P_1, P_2, другая — в точках Q_1, Q_2. Произвольная прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках M_1, M_2, а описанные окружности треугольников AP_1Q_1 и AP_2Q_2 — в точках N_1 и N_2 соответственно. Тогда $N_1M_1 = N_2M_2$.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть его диагонали пересекаются в точке E, точки M и N — их середины. Вокруг треугольников ABE, BEC, CED, DEA описаны окружности, причем первая и третья пересекаются вторично в точке L, вторая и четвертая — в точке K. Доказать, что точки M, K, N, L лежат на одной окружности.



11. Теорема Хелли. 10 июля

1. (a) На прямой дано $n \geqslant 2$ попарно пересекающихся отрезков. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.

(b) Теорема Хелли на прямой. На прямой дано $n \geqslant 2$ попарно пересекающихся выпуклых множеств (точки, отрезки, интервалы, лучи). Докажите, что все множества имеют общую точку.

2. На плоскости дано конечное множество многоугольников (не обязательно выпуклых), каждые два из них имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, пересекающая все эти многоугольники.

3. Для любого $n \geqslant 3$ нарисуйте на плоскости n выпуклых множеств так, чтобы любые два множества имели общую точку, но все множества не имели такой точки.

4. (a) На плоскости дано $n \geqslant 4$ точек. Докажите, что их можно разбить на 2 множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

(b) Если на плоскости 4 выпуклых множества и любые 3 из них имеют общую точку, то и все множества имеют общую точку.

(c) Теорема Хелли на плоскости. Если на плоскости $n \geqslant 3$ выпуклых множеств и любые 3 из них имеют общую точку, то и все множества имеют общую точку.

5. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трех его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти стороны, попадают на них, а не на их продолжения. Докажите, что тогда такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.

6. На плоскости проведено n прямых и для каждой прямой выбрали одну из двух полуплоскостей, на которые она делит плоскость. Известно, что выбранные полуплоскости целиком покрывают всю плоскость. Докажите, что можно оставить только 3 полуплоскости, которые также покрывают всю плоскость.

7. На столе сидит n комаров, любых троих из которых можно прибить круглой кружкой радиуса 1. Докажите, что их всех можно прибить этой кружкой одновременно.

8. (a) Стороны остроугольного треугольника не больше 1. Докажите, что радиус описанной окружности не более $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(b) Попарные расстояния между n точками на плоскости не больше 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

12. Интерполяционный многочлен. 10 июля

Определение. Построение такого многочлена $P(x)$ степени не выше n, что $P(x_i) = y_i$, где $0 \leqslant i \leqslant n$, называется *интерполяцией.*

1. (a) Постройте многочлен $\ell(x)$, который принимает значение 0 в точках x_1, x_2, $\ldots$, x_k, а в остальных точках отличен от 0.

(b) Постройте многочлен $\ell_k(x)$ степени n, который в точке x_k принимает значение y_k, а в точках x_i — значение 0 ($0 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq k$).

(c) Постройте многочлен $P(x)$ степени не выше n такой, что $P(x_i) = y_i$, где $0 \leqslant i \leqslant n$.

(d) Теорема. Пусть $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — действительные числа. Докажите, что для любых $y_1, y_2, \ldots, y_n$ существует единственный многочлен $P(x)$ степени не выше n, такой, что $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \ldots, P(x_n) = y_n$. Данный многочлен называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

2. Постройте многочлен $P(x)$ второй степени такой, что $P(1) = 2$, $P(3) = 13$, $P(5) = 36$.

3. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трехчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трехчлена.

4. Докажите, что для различных чисел a, b, c, d

$$\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)} = -1.$$

5. Докажите, что если $P(x)$ – многочлен, степень которого меньше n, то дробь $\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}$ ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные попарно различные числа) может быть представлена в виде суммы n простейших дробей: $\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$, где $A_1, \ldots, A_n$ — некоторые константы.

Определение. Многочлен называется целозначным, если в целых точках он принимает целые значения.

6. (a) Докажите, что многочлены вида $C_x^k = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$ — целозначны, ($C_x^0 = 1$). Такие многочлены называются биномиальными.

(b) Докажите, что всякий целозначный многочлен степени n представляется линейной комбинацией многочленов $C_x^0, C_x^1, \ldots, C_x^n$ с целыми коэффициентами.

(c) Если многочлен $P(x)$ степени n целозначен, то $n!P(x)$ имеет целые коэффициенты.

7. Интерполяционный многочлен Ньютона. Интерполяционный многочлен однозначно определяется формулой: $P(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + C_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$. Доказать.

13. Тригонометрическая форма комплексных чисел. 11 июля

Определение. Запись $|z| \cos\varphi + i\sin\varphi$, где φ — аргумент числа z, называется *тригонометрической формой комплексного числа z*.

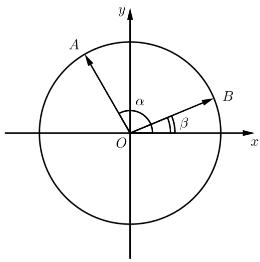
1. Докажите, что

(a) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ (через скалярное произведение векторов OA и OB, на рисунке справа);

(b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

(c) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;

(d) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.



2. Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули умножаются (делятся) друг на друга, а аргументы складываются (вычитаются).

Формула Муавра. Докажите, что

$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

3. Вычислите значение выражения, представив его в тригонометрической форме:

$$\frac{(1-i)^7(-\sqrt{3+i})^{10}}{(1+i)^{15}}.$$

Определение. Число ε называется *корнем* n-ой степени $\sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z, если $\varepsilon^n = z$.

4. (a) Вычислите все корни $\sqrt{1}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$. Нарисуйте их на комплексной плоскости.

(b) Выведите формулу для нахождения всех значений корня $\sqrt[n]{1}$. Как эти корни расположены на комплексной плоскости?

(c) Выведите формулу для нахождения всех значений корня $\sqrt[n]{z}$ в тригонометрической форме. Как расположены эти корни на комплексной плоскости?

5. Найдите все значения корня и изобразите их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{1+i}$.

6. Решите уравнение $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

7. Найдите **(a)** сумму; **(b)** произведение всех корней $\sqrt[n]{1}$.

8. Докажите следующие равенства:
(a) $\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$;
(b) $\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$;
(c) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{n} = -\frac{1}{2}$;

9. (a) Докажите, что все корни $\sqrt[n]{1}$ можно представить как степени одного из них (назовем этот корень *первообразным* или *порождающим*).
(b) Сколько существует первообразных корней n-ой степени из единицы?

Корни $\sqrt[n]{1}$ будем обозначать через $\varepsilon_1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon_n$.
Определение. Корень ε_k n-ой степени из единицы имеет *порядок* d, если d — наименьшее натуральное число такое, что $\varepsilon_k^d = 1$.

10. (a) Пусть $n \in \mathbb{N}$, d — делитель n. Сколько корней уравнения $x^d - 1 = 0$ есть среди чисел $\varepsilon_1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon_n$? Сколько среди них элементов порядка d?
(b) Сколько элементов порядка d есть среди чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$?

11. (a) Пусть ε — первообразный корень n-ой степени из единицы. Докажите, что $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\ldots(1-\varepsilon^{n-1}) = n$.
(b) Докажите, что произведение длин всех сторон и диагоналей, проведенных из одной вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, равно n.

12. Вычислите $\frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \ldots + \cos 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 44^\circ}$.

14. Учимся считать. 11 июля

Важная лемма. В треугольнике ABC на прямой AC выбрана точка D. Докажите, что $\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBC} = \dfrac{AD \cdot BC}{DC \cdot AB}$.

Отсюда сразу же имеем два не менее важных следствия.

Синусная теорема Чевы. В треугольнике ABC проведены чевианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что они пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\dfrac{\sin\angle ABB_1}{\sin\angle B_1BC} \cdot \dfrac{\sin\angle BCC_1}{\sin\angle C_1CA} \cdot \dfrac{\sin\angle CAA_1}{\sin\angle A_1AB} = 1$.

Замечание. Теорему можно обобщить для случая, когда точка пересечения вне треугольника.

Еще одна важная лемма. В треугольнике ABC проведена чевиана BD. Докажите, что она однозначно определяется отношением $\dfrac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBC}$.

1. Докажите, что главные диагонали вписанного шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A.$$

2. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC во внешнюю сторону построены треугольники BCD, CAE, ABF так, что $\angle BCD = \angle ECA = \varphi$, $\angle CAE = \angle BAF = \theta$, $\angle CBD = \angle ABF = \psi$. Докажите, что прямые AD, BE, CF конкурентны.

3. В треугольник ABC вписана окружность w с центром I, касающаяся сторон AB, BC, CA в точках M, N, P соответственно. T — точка пересечения CI и w. $R = AT \cap MP$, $Q = BT \cap MN$. Докажите, что $RQ \perp IC$.

4. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P таким образом, что $\angle PAD = \angle PCD$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

5. На стороне AB треугольника ABC взяты такие точки X, Y, что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V. Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку.

6. . В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_0, на отрезке AA_0 выбрана точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B_0, а прямая CX пересекает AB в точке C_0. Отрезки A_0B_0 и CC_0 пересекаются в точке P, а отрезки A_0C_0 и BB_0 пересекаются в точке Q. Докажите, что углы PAC и QAB равны.

15. Многочлены над $\mathbb{Z}_p$. 12 июля

Определение. Множество всех остатков (вычетов) по модулю n обозначим $\mathbb{Z}_n$. В случае, если n простое, для удобства будем писать $\mathbb{Z}_p$.

Определим многочлен над $\mathbb{Z}_n$ как формальную запись $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, где коэффициенты $a_i \in \mathbb{Z}_n, a_m \neq 0$. Множество таких многочленов обозначается $\mathbb{Z}_n[x]$.

1. (a) Докажите, что если два многочлена $P, Q \in \mathbb{Z}_p[x]$, то $degPQ = degP + degQ$.

(b) Приведите пример, когда это неверно для составного n.

2. Докажите, что для формальных многочленов над $\mathbb{Z}_p$ выполняется теорема о делении с остатком: для многочленов $A(x)$ и $B(x) \neq 0$ существуют единственные многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ такие, что $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ и $degR < degB$.

3. (a) Сформулируйте и докажите теорему Безу для многочленов над $\mathbb{Z}_p$.

(b) Докажите, что количество корней многочлена не превосходит его степени.

(c) Приведите пример многочлена над $\mathbb{Z}_n$, количество корней которого больше его степени (в случае составного n). Объясните, в какой момент «ломается» доказательство предыдущего пункта.

4. Используя теорему Безу, разложите на множители многочлен $x^{p-1} - 1$ и докажите теорему Вильсона: для любого простого p число $(p-1)! + 1$ делится на p.

5. (a) Приведите пример ненулевого многочлена $P \in \mathbb{Z}_p[x]$ такого, что $P(x) = 0$ во всех точках $x \in \mathbb{Z}_p$.

(b) Докажите,что для любого многочлена существует многочлен степени не выше $p-1$, совпадающий с ним по модулю p во всех точках.

(c) Докажите, что если два многочлена степени не выше $p-1$ совпадают по модулю p по всех точках, то они равны формально.

6. Дана произвольная функция $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$. Докажите, что существует многочлен степени не выше $p-1$, совпадающий с f по модулю p во всех точках.

7. Пусть $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, p — простое число. Оказалось, что $Q(0) = 0, Q(1) = 1$, и при любом натуральном k число $Q(k)$ дает остаток 0 или 1 при делении на p. Докажите, что $degQ \geqslant p-1$.

16. Матбой. 12 июля

1. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку BH пересекает стороны BA, BC в точках A_0, C_0 соответственно. Докажите, что периметр треугольника A_0C_0O (где O — центр описанной окружности ABC) равен AC.

2. Решите систему уравнений $a^3 + b = c, b^3 + c = d, c^3 + d = a, d^3 + a = b$.

3. На плоскости проведено несколько прямых общего положения. Наоко начинает движение в некоторой точке на одной из прямых. Как только она доходит до точки пересечения прямых, она сворачивает на другую прямую и продолжает движение вдоль неё. Докажите, что Наоко не сможет пройти один и тот же отрезок в разных направлениях.

4. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Точка M лежит на дуге BC, прямая AM пересекает BD в точке P, прямая DM пересекает AC в точке Q. Докажите, что площадь четырёхугольника $APQD$ равна половине площади квадрата.

5. Вася записал числа $1, 2, \ldots, 40$ на двадцати карточках, на каждой стороне каждой карточки — по числу. Затем он выложил карточки на стол. Петя видит лишь верхние числа; он может выбрать любой набор карточек и перевернуть их. Он выиграет, если после этого сумма чисел на верхних сторонах карточек будет не меньше k. При каком наибольшем k Петя гарантированно может выиграть?

6. Дан ориентированный граф. В каждой вершине число входящих в неё и исходящих из неё рёбер одинаково и не меньше двух (степени разных вершин при этом могут быть различными). Известно, что из любой вершины существует ориентированный путь до любой другой. Докажите, что из этого графа можно удалить все рёбра некоторого ориентированного цикла так, чтобы по–прежнему из любой вершины существовал ориентированный путь до любой другой.

7. Для каждого натурального n положим $E(n) = n(n+1)(2n+1)\dots(10n+1)$. Найдите наибольший общий делитель чисел $E(1), E(2), \dots, E(2019)$.

8. Два многочлена четвертой степени $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ и $g(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ отличаются друг от друга перестановкой коэффициентов. Известно, что $a_i \neq b_i$ при всех $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Может ли оказаться, что $f(x) \geqslant g(x)$ при всех вещественных x?

17. Симедианы. 14 июля

Во всех задачах этого листочка будут использованы одни и те же обозначения. Буквы, отличные от X, Y и Z (для этих букв обозначения вводятся каждый раз заново), которые определены в задачах, будут использованы в последующих.

В треугольнике ABC проведена медиана BM. Тогда прямая, симметричная относительно биссектрисы угла B этой медиане, называется *симедианой.* Пусть H — ортоцентр этого треугольника, а H_a, H_b, H_c — основания высот из точек A, B и C, ω — его описанная окружность с центром O, пусть K, N — середины AB и BC.

1. Симедиана из вершины B пересекает прямую AC в точке S. Докажите, что

(a) отношения расстояний от точки S до сторон AB и BC равно отношению этих сторон;

(b) $\dfrac{AS}{SC} = \dfrac{AB^2}{BC^2}$.

2. Докажите, что симедианы пересекаются в одной точке L — *точке Лемуана.*

3. Пусть X и Y — основания перпендикуляров, опущенных из точки H_b на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что BM — симедиана треугольника XYB.

4. Прямые BS и BM пересекают окружность ω в точках Q и R соответственно. Докажите, что $MR = MQ$.

5. Первая картинка. (a) Пусть точка P такова, что $\angle PAB = \angle PBC$ и $\angle ABP = \angle BCP$. Докажите, что точка P лежит на симедиане. Почему такая точка всегда существует?

(b) Докажите, что $BKPN$ — вписанный.

6. Вторая картинка. Касательные к ω в точках A и C пересекаются в точке T. Докажите, что BT — симедиана треугольника ABC. Что можно сказать в случае, когда касательные не пересеклись?

Подсказка. Проведите окружность с центром T и радиусом TA, отметьте вторые точки пересечения этой окружности с прямыми AB и BC и докажите, что они лежат на одной прямой с T.

7. Пусть I — инцентр треугольника ABC. Докажите, что симедиана из вершины I треугольника AIC пересекает ω в середин дуги ABC.

8. Оказалось, что $BC \parallel AT$. Докажите, что прямая CQ делит отрезок AT пополам.

9. Высота BH_b пересекает ω в точке B'. Докажите, что точка пересечения ω и описанной окружности треугольника $B'H_bM$, отличная от B', лежит на симедиане.

18. Орграфы – 2. 14 июля

> Be who you needed when you were younger.
>
> просторы интернета

Определение. *Турниром* называется ориентированный граф, в котором между любыми двумя вершинами существует ровно одно ориентированное ребро.
Теорема. В любом сильносвязном турнире на n вершинах для любого $3 \leqslant k \leqslant n$ найдётся хотя бы $n-k+1$ различных несамопересекающихся циклов длины k, причем существует сильносвязный турнир, в котором их ровно $n-k+1$.

1. Составьте сильносвязный турнир на пяти вершинах, в котором один цикл длины пять, два цикла длины четыре и три цикла длины три.

2. Докажите, что турнир является сильносвязным тогда и только тогда, когда в нем есть несамопересекающийся цикл, идущий по направлениям стрелок на ребрах и проходящий по всем вершинам графа.

3. Докажите, что в сильносвязном турнире через любую вершину проходит несамопересекающийся цикл (идущий по направлениям стрелок на ребрах) длины **(a)** три; **(b)** любой длины от трех до n.

4. Докажите, что существует сильносвязный турнир на n вершинах, в котором **(a)** $n-2$ циклов длины три; **(b)** $n-3$ несамопересекающихся циклов длины четыре; **(c)** $n-k+1$ несамопересекающихся циклов длины k.

5. Докажите, что в любом сильносвязном турнире на n вершинах, по крайней мере **(a)** $n-2$ цикла длины три; **(b)** $n-k+1$ несамопересекающихся циклов длины k.

6. Докажите теорему.

19. Квадратичные вычеты. 15 июля

Пусть p — нечетное простое число. Рассмотрим уравнение $x^2 \equiv a (\mathrm{mod} p)$.

Определение. Если для $a \neq 0$ существует решение уравнения, то a называется *квадратичным вычетом по модулю p*. В противном случае a — *квадратичный невычет*.

1. (a) Сколько корней может иметь уравнение $x^2 \equiv a \pmod p$ в зависимости от a?

(b) Докажите, что среди ненулевых остатков по модулю p ровно половина являются квадратичными вычетами.

2. Докажите следующие свойства произведений квадратичных вычетов:

(a) вычет $\times$ вычет $=$ вычет;
(b) вычет $\times$ невычет $=$ невычет;
(c) невычет $\times$ невычет $=$ вычет.

Определение. Символом Лежандра называют выражение $\left(\frac{a}{p}\right)$, причем:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & a - \text{кв. вычет} \\ -1, & a - \text{кв. невычет} \\ 0, & a \equiv 0 \pmod p \end{cases}$$

3. Докажите, что $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$.

4. (a) Используя малую теорему Ферма, докажите, что если a — кв. вычет, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p 1$.

(b) Используя теорему Вильсона, докажите, что если a — кв. невычет, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p -1$..

Критерий Эйлера. Если p — нечетное простое число, то $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv_p a^{\frac{p-1}{2}}$.

5. Для остатка $a \neq 0$ рассмотрим множество остатков $A = \left\{a, 2a, \ldots, \frac{p-1}{2}a\right\}$. Пусть n — количество остатков в A, больших $\frac{p}{2}$.

(a) Докажите, что если в каждый из остатков $k > \frac{p}{2}$ заменить на $p-k$, то полученное множество B совпадает с множеством $\left\{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right\}$.

(b) Докажите, что $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p (-1)^n$.

Критерий Гаусса. Если p — нечетное простое число, a не делится на p, то

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^n$$

6. Вычислите $\left(\frac{3}{47}\right)$, используя оба критерия.

7. Докажите, что при любом нечетном простом p найдется такое натуральное число x, что произведение $\left(x^2-13\right)\left(x^2-17\right)\left(x^2-221\right)$ делится на p.

8. Докажите, что –1 является квадратичным вычетом по модулю простого нечетного p тогда и только тогда, когда $p-1 \;\vdots\; 4$.

9. p — нечетное простое, a не делится на p. Докажите, что уравнение имеет два решения тогда и только тогда, когда дискриминант D является квадратичным вычетом по модулю p.

10. Теорема Жирара. Пусть простое p имеет вид $4k+3$. Докажите, что если $x^2+y^2 \vdots p$, то тогда обязательно $x \vdots p$ и $y \vdots p$.

11. Докажите, что уравнение $4xy-x-y=z^2$ не имеет решений в натуральных числах.

20. Гармонический четырехугольник. 15 июля

Напоминание. *Симедианой* из вершины B треугольника ABC называется

(a) прямая, которая изогональна медиане;

(b) чевиана, которая делит сторону AC в отношении $\dfrac{AB^2}{BC^2}$;

(c) прямая, проходящая через точку пересечения касательных в точках A и C;

(d) прямая, содержащая такую точку X, что ABX подобен BCX.

Здесь, как и раньше, обозначения в 1–5 задачах одинаковые.

1. Симедиана из вершины B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Пусть M — середина AC. Докажите, что $\angle BMA = \angle AMD$.

2. Точка F — пересечение касательной в точке B и AC, O — центр ω.

(a) Докажите, что $BOMDF$ — вписанный.

(b) Докажите, что FD — касательная к ω.

Важное следствие. Если вписанный четырехугольник $ABCD$ таков, что касательные в точках A и C пересекаются на диагонали BD, то касательные в точках B и D пересекаются на AC. Другими словами, каждая диагональ является симедианой двух треугольников.

3. Докажите, что биссектрисы углов ABC и CDA пересекаются на диагонали AC, и $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

Определение. Вписанный четырехугольник $ABCD$ такой, что $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ называется *гармоническим.*

4. Докажите, что по трем точкам A, B, C однозначно восстанавливается четвертая вершина D гармонического четырехугольника $ABCD$.

5. Докажите равносильность следующих свойств вписанного четырехугольника $ABCD$:

(a) $AB \cdot CD = BC \cdot AD$;

(b) BD — симедиана ABC;

(c) касательные в точках A и C пересекаются на BD;

(d) $\angle BMA = \angle AMD$;

(e) биссектриссы ABC и ABD пересекаются на AC.

Теперь обозначения в условиях независимы.

6. Пусть AB, CD — параллельные хорды окружности ω, M — середина AB, E — пересечение ω и MC, K — середина ED. Докажите, что $\angle EKA = \angle EKB$.

7. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B и внутренне касаются окружности ω в точках C и D. Прямая AB пересекает окружность ω в точках E и F. Докажите, что касательные к окружности ω в точках E и F пересекаются на прямой CD.

8. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник, а M — середина хорды, высекаемой диагональю AC. Докажите, что $\angle BMA = \angle DMA$.

21. Комплексные числа в геометрии. 16 июля

Договоримся через z обозначать комплексную координату точки Z комплексной плоскости.

1. Пусть z_0 — некоторое фиксированное комплексное число. Какие преобразования комплексной плоскости задают следующие функции:
(a) $w(z) = z + z_0$;
(b) $w(z) = \bar{z}$;
(c) $w(z) = z \cdot z_0$, где $|z_0| = 1$;
(d) $w(z) = r \cdot z$, где $r \in \mathbb{R}$;
(e) $w(z) = z_0 \cdot z$.

2. Дан правильный треугольник ABC и комплексная координата вершины A. Найдите комплексную координату вершины B для положительно ориентированного треугольника ABC, если за начальную точку принята
(a) вершина C;
(b) центр треугольника ABC;
(c) основание высоты AA_1.

3. (a) Пусть A и B — концы отрезка, разделённого точкой C в отношении $p : q$. Докажите, что $c = \dfrac{q}{p+q}a + \dfrac{p}{p+q}b$.
(b) Выразите комплексное число, соответствующее точке пересечения медиан треугольника с вершинами a, b и c.

4. Докажите, что **(a)** квадрат длины отрезка $|AB|^2 = (b-a)(\bar{b}-\bar{a})$;
(b) $z\bar{z} = 1$ — уравнение единичной окружности с центром в точке 0.
(c) Напишите уравнение окружности радиуса r с центром в точке a.

5. Докажите, что
(a) $OA \parallel OB \leftrightarrow$ когда $\dfrac{a}{b}$ — вещественное число $\leftrightarrow a\bar{b} = \bar{a}br$;
(b) $AB \parallel DC \leftrightarrow$ когда $\dfrac{b-a}{d-c}$ — вещественное число $\leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) = (\bar{a}-\bar{b})(c-d)$;

(c) Критерий коллинеарности трех точек. Три точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}$.

6. Докажите, что
(a) $OA \perp OB \leftrightarrow \dfrac{a}{b}$ — чисто мнимое число $\leftrightarrow a\bar{b} + \bar{a}b = 0$;
(b) $AB \perp CD \leftrightarrow \dfrac{a-b}{c-d}$ — чисто мнимое число $\leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d) = 0$.

7. Пусть A, B, C, D — точки единичной окружности с центром в O. Докажите, что
(a) $AB \parallel CD \leftrightarrow ab = cd$;
(b) $AB \perp CD \leftrightarrow ab + cd = 0$.

8. Пусть A, B — точки единичной окружности с центром в O. Докажите, что
(a) $z + ab\bar{z} = a + b$ — уравнение прямой AB;
(b) $\bar{a}z + a\bar{z} = 2$ — уравнение касательной к единичной окружности в точке A;
(c) $\dfrac{1}{2}(a + b + m - ab\bar{m})$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AB;
(d) $\dfrac{2ab}{a+b}$ — точка пересечения касательных к единичной окружности в точках A и B.

9. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда двойное отношение $\dfrac{a-c}{a-d} : \dfrac{b-c}{b-d}$ — вещественное число $\leftrightarrow \dfrac{a-c}{a-d} : \dfrac{b-c}{b-d} = \dfrac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{a}-\bar{d}} : \dfrac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{d}}$.

10. Пусть треугольник ABC вписан в единичную окружность. Докажите, что координата его ортоцентра равна $h = a + b + c$ (для вывода можно вспомнить прямую Эйлера).

11. Пусть вписанная окружность треугольника ABC является единичной и касается сторон BC, AC, AB в точках P, Q, R. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC имеет координату $\dfrac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}$.

22. Математический бой обычных групп М8 – М9. 16 июля

1. Число считается счастливым, если равняется частному от деления некоторого натурального числа x на количество делителей x. Является ли число 18 счастливым?

2. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Пусть D, E и F — середины AB, AC и AH соответственно, P и Q — образы точек B и C при центральной симметрии относительно F. Докажите, что PE и QD пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

3. Для попарно различных неотрицательных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} > 2.$$

4. В каждой клетке шахматной доски $n \times n$ записано число таким образом, что суммы чисел по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям равны одному и тому же числу S. При каких n можно определить, чему равна сумма чисел в угловых клетках.

5. Для нечетного k, натурального n и целых a, b, c известно, что

$$a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka.$$

Докажите, что $a = b = c$.

6. Несколько игроков участвуют в соревновании. Каждый сыграл с каждым один раз. Ничьих не бывает. Игрок A считается *отличным*, если выполняется следующее условие: для любого другого игрока либо A бьет B, либо существует другой игрок C, который бьет B, A и бьет C. Оказалось так, что есть только один отличный игрок, докажите, что этот игрок победил всех других игроков.

7. Прожектор освещает угол в 90 градусов. Если он стоит в точке (x_0, y_0), то освещает точки (x, y) с координатами $x \leqslant x_0$ и $y \leqslant y_0$. На плоскость в разных точках уже выставили 2019 зеленых прожекторов. Всегда ли можно установить еще 2018 желтых прожекторов так, что всякая точка плоскости, освещённая $k > 0$ зеленым прожектором, будет освещаться $k - 1$ желтым прожектором.

8. Депутаты в парламенте разделены на 10 фракций. Согласно регламенту, ни одна фракция не может состоять из менее чем пяти человек, и никакие две фракции не могут иметь одинаковое количество членов. После отпуска фракции распались, и вместо них возникло несколько новых (по тому же регламенту). Кроме того, некоторые депутаты стали независимыми. Оказалось, что нет двух депутатов, которые были в одной фракции до отпуска и вошли в ту же фракцию после отпуска. Найдите наименьшее возможное количество независимых депутатов после отпуска.

23. Математический бой обычных групп М9 – М10. 16 июля

1. В некоторой точке окружности длины 1 стоит мальчик, еще в 10 различных точках окружности стоят флажки. Мальчик хочет собрать все флажки (относить их никуда не нужно). Он может передвигаться только по окружности. Известно, что вне зависимости от начального расположения флажков он может собрать все, преодолев дистанцию длины не больше L. Найдите минимальное значение L, для которого это верно.

2. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Известно, что при любом целом n число $P(n)$ делится на a или b. Докажите, что при любом целом n число $P(n)$ делится на a или при любом целом n число $P(n)$ делится на b.

3. Последовательность $1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, \ldots$ строится следующим образом: первый член равен 1, а каждый следующий является «прочтением» слева направо предыдущего. Например, число 111221 читается как «три единицы, две двойки, одна единица», и получается 312211 (блок из одинаковых цифр всегда прочитывается целиком). Докажите, что эта последовательность монотонно возрастает.

4. Каждое из 2019 натуральных чисел взаимно просто с одним и тем же количеством остальных, но не со всеми. При каком наименьшем k можно утверждать, что среди любых k из наших чисел найдутся два, имеющих общий делитель, больший 1?

5. Аня и Боря играют в игру на квадрате 6×6. Каждый по очереди ставит в одну из клеток квадрата любое число (первой ставит Аня). Ставить число, встречавшееся ранее, не разрешается. Когда все клетки заняты, в каждой строке закрашивается клетка с наибольшим в этой строке числом. Если можно пройти по соседним закрашенным клеткам из верхней строки в нижнюю, победила Аня. Если пройти нельзя — Боря. Кто выиграет при правильной игре? (Клетки считаются соседними, если они имеют хотя бы одну общую вершину)

6. Найдите все простые p такие, что уравнение $p^n = x^3 + y^3$ имеет решение в натуральных числах.

7. Пусть a, b, c, d — вещественные числа, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} (a+b)(c+d) = 2, \\ (a+c)(b+d) = 3, \\ (a+d)(b+c) = 4. \end{cases}$$

Найдите минимальное возможное значение выражения $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

8. В остроугольном треугольнике ABC угол A больше угла C. На стороне AC взята точка D такая, что $AB = BD$. Точка G — центр вписанной окружности треугольника BDC. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что отрезок KL делит отрезок AG пополам.

9. Внутри круга радиуса $n \in \mathbb{N}$ расположено $4n$ отрезков длины 1 каждый (концы всех отрезков лежат внутри круга). Докажите, что если дана некоторая прямая, то найдется прямая либо параллельная, либо перпендикулярная данной, которая пересекает как минимум 2 отрезка.

10. Пусть треугольник ABC является остроугольным, где $\angle BAC = 60^\circ$ и $AB > AC$. Пусть I является центром вписанной окружности, H — ортоцентром треугольника ABC. Докажите, что $2\angle AHI = 3\angle ABC$.

24. Окружность Аполлония и гармония. 17 июля

1. **(a)** На прямой AB отмечена точка E, отличная от середины отрезка AB. Докажите, что существует единственная такая точка $F \neq E$ на прямой AB, что $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AF}{FB}$. (*Такая* четверка точек A, B, E и F называется *гармонической.*) Что происходит в случае, когда E — середина?

(b) На отрезке AB отмечена точка C. Найдите ГМТ X таких, что XC — биссектриса треугольника XAB.

(c) Для двух данных точек A и B постройте ГМТ таких точек X, что $\dfrac{AX}{XB} = k$, где k — некоторое положительное число. Что происходит, когда $k = 1$?

Определение. ГМТ из предыдущей задачи (при $k \neq 1$) называют *окружностью Аполлония.*

2. **(a)** Пусть AB — диаметр некоторой окружности, а точка D лежит на луче AB вне окружности. DP и DQ — касательные к этой окружности. PQ пересекает AB в точке C. Докажите, что четверка точек A, B, C и D — гармоническая.

(b) Докажите, что для любой точки X этой окружности отрезок XB является биссектрисой треугольника CXD.

3. Через вершину A треугольника ABC проведена касательная к его описанной окружности, которая пересекла прямую BC в точке K. Докажите, что K является центром окружности Аполлония точек B и C, проходящей через точку A.

4. Докажите, что точки пересечения окружности Аполлония для отрезка AB и окружности ω, проходящей через A и B, образуют с точками A и B гармонический четырехугольник.

5. Точки A и B лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды с общим концом.

6. Докажите, что три окружности Аполлония, построенные для любой пары двух вершин и проходящие через третью, пересекаются в двух точках. Такие точки называются *точками Аполлония.*

Замечание. Очевидно, что расстояния от точки Аполлония до вершин обратно пропорциональны противолежащим сторонам. Это равносильное определение.

7. Пусть Ap_1, Ap_2 — точки Аполлония для треугольника ABC. Докажите, что A — точка Аполлония для треугольника Ap_1BC.

8. Докажите, что если L точка Лемуана треугольника ABC, O — центр описанной окружности радиуса R, а Ap_1, Ap_2 — точки Аполлония, то

(a) Ap_1, Ap_2, L лежат на одной прямой;

(b) степень точки O относительно окружностей Аполлония равна R^2;

(c) точки Ap_1, Ap_2, O, L лежат на одной прямой.

9. Четыре шара лежат на плоскости и попарно касаются друг друга. Тогда каждая из точек касания является точкой Аполлония для оставшихся трех точек.

25. Клеточки! Клеточки! 17 июля

1. У Алёши есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алёша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Серёжа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос — и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Серёжа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алёшей равно количеству различных чисел среди записанных Серёжей.

2. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные натуральные числа. Обозначим через b_k количество чисел из набора $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию: $a_i \geqslant k$. Доказать, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots$

3. На доске написали несколько натуральных чисел. Пусть a_n — количество тех из них, которые не меньше n. Исходные числа стерли и вместо них написали все ненулевые a_n. Затем с новыми числами проделали то же самое. Докажите, что на доске появился исходный набор.

4. Докажите, что количество разбиений числа N на не более чем m слагаемых равно числу разбиений числа $N + m$ ровно на m слагаемых.

5. Докажите, что количество разбиений числа N на не более чем m слагаемых ровно столько же, сколько способов разбить число $N + \frac{m(m+1)}{2}$ на m попарно различных слагаемых.

6. Рассматриваются всевозможные наборы из 100 неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке и не превосходящие 100, в которых сумма всех чисел делится на 10. Докажите, что ровно половина этих наборов заканчивается числом 100.

7. Пусть S — множество всех пар натуральных чисел (h, k) таких что $h+k \leqslant n$. Каждый элемент S покрашен в оранжевый или синий цвет, причём, если (h, k) — оранжевый, и $h_0 \leqslant h$, $k_0 \leqslant k$, то (h_0, k_0) — тоже оранжевый. Будем называть n-элементное множество синих пар из S *забавным*, если первые числа любых пар в нём различны, *весёлым* — если вторые. Докажите, что забавных подмножеств столько же, сколько весёлых.

26. Мнимые знания. 19 июля

Вспомним формулы из предыдущего листика.

♡ В треугольнике ABC центроид имеет координату $m = \dfrac{a+b+c}{3}$, ортоцентр (если описанная окружность — единичная с центром в 0) — $h = a+b+c$.

♡ Пусть A, B, C и D — точки единичной окружности с центром в 0. Тогда

$$AB \parallel CD \iff ab = cd; \qquad AB \perp CD \iff ab + cd = 0.$$

♡ Пусть A и B — точки единичной окружности с центром в 0. Тогда

- $z + ab\bar{z} = a + b$; — уравнение прямой AB;
- $\bar{a}z + a\bar{z} = 0$ — уравнение касательной к единичной окружности в точке A;
- $\dfrac{1}{2}(a+b+m-ab\bar{m})$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AB;
- $\dfrac{2ab}{a+b}$ — точка пересечения касательных к единичной окружности в точках A и B.

1. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты.
(a) Выразите координаты центров квадратов через координаты вершин параллелограмма.
(b) Докажите, что центры построенных квадратов образуют квадрат.

2. Теорема Ньютона. Докажите, что в описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.

3. Докажите, что для треугольника ABC с центром описанной окружности O и ортоцентром H выполняется

$$OH^2 = 9OR^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

4. Даны окружность с центром O и точка M. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до концов хорды, параллельной OM, не зависит от выбора хорды.

5. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AC и BC взяты точки M и N так, что $AM = BC$ и $AM = NB$. Докажите, что угол между отрезками AN и MB равен $45°$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB и ABC лежат на одной окружности, равной длины.

7. Пусть A, B, C, D — четыре точки на окружности с центром O. Точки A_C, A_D — проекции точки A на BC и BD соответственно; точки B_C, B_D — проекции точки B на AC и AD соответственно. Точки H_A и H_B — ортоцентры треугольников ACD и BCD соответственно. Докажите, что если $A_CA_D \perp OH_B$, то $B_CB_D \perp OH_A$.

8. Точки M и N внутри треугольника ABC таковы, что $\angle MAB = \angle NAC$ и $\angle MBA = \angle NBC$. Докажите, что

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

27. Приводимость над $\mathbb{Z}[x]$. 19 июля

1. (a) Дан многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$. Пусть целое число q является корнем $P(x)$. Докажите, что свободный член $P(x)$ делится на q.
(b) Пусть несократимая дробь q/r является корнем $P(x)$. Докажите, что свободный член $P(x)$ делится на q, а коэффициент при старшем члене делится на r.
(c) Докажите, что если $P(x)$ — приведенный многочлен, то любой его рациональный корень является целым числом.
(d) Для случая из пункта **(b)** докажите, что для любого целого n число $P(n)$ делится на $rn - q$.

Определение. Многочлен называется *приводимым* над $\mathbb{Z}[x]$, если существуют $Q, R \in \mathbb{Z}[x]$ меньшей степени такие, что $P(x) = Q(x)R(x)$. В противном случае $P(x)$ неприводим над $Z[x]$.

2. Приводимы ли над $\mathbb{Z}[x]$ многочлены: **(a)** $x^3 + 2$; **(b)** $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$?

3. Пусть $P, Q, R \in \mathbb{Z}[x]$, причем $P(x) = Q(x)R(x)$. Известно, что все коэффициенты многочлена $P(x)$ деляется на некоторое простое число p. Докажите, что либо все коэффициенты $Q(x)$, либо все коэффициенты $R(x)$ делятся на p.

4. Пусть $P, Q, R \in \mathbb{Z}[x]$, причем $P(x) = Q(x)R(x)$. Обозначим НОД всех коэффициентов $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ за a, b и c соответственно. Докажите, что $a = bc$.

Определение. НОД всех коэффициентов многочлена с целыми коэффициентами называется *содержанием* многочлена.

5. (a) Докажите, что любой многочлен $P \in \mathbb{Q}[x]$ можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}Q(x)$, где $Q \in \mathbb{Z}[x]$, причем содержание многочлена $Q(x)$ равно 1.

(b) Докажите, что если многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$ приводим над $\mathbb{Q}[x]$, то он приводим и над $\mathbb{Z}[x]$.

6. (a) Критерий Эйзенштейна. Пусть $P \in \mathbb{Z}[x]$, причем старший коэффициент не делится на простое число p, все остальные коэффициенты делятся на p, но свободный член не делится на p^2. Докажите, что тогда $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$.
(b) Приведите пример многочлена, для которого обратное утверждение неверно.

Лемма. Пусть a — целое. Если многочлен $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$, то $P(x+a)$ — тоже.

7. Докажите, что следующие многочлены неприводимы над $\mathbb{Z}[x]$:
(a) $15x^5 + 18x^4 - 9x^2 + 27x - 36$;
(b) $x^4 + 1$;
(c) $x^6 + x^3 + 1$;
(d) $x^{n+1} + 5x^n - 3$.

8. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$ тогда и только тогда, когда p — простое число.

9. Докажите, что многочлен $P(x) = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) - 1$, где $a_1, \ldots, a_n$ — различные целые числа, неприводим над $\mathbb{Z}[x]$.

28. Первообразный корень. 20 июля

Определение. Показателем остатка x по модулю n называется наименьшая положительная степень t такая, что $x^t \equiv 1 \pmod{n}$. Если $t = \varphi(n)$, то x называется первообразным корнем по модулю n.

1. Рассмотрим уравнение $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ для некоторого простого p. Для каждого решения этого уравнения обозначим его показатель t по модулю p. Докажите следующие утверждения:
(a) уравнение имеет $p-1$ решений;
(b) t — делитель $p-1$;
(c) если существует остаток y с показателем t, то уравнение $x^t \equiv 1 \pmod{p}$ имеет ровно t решений (какие?);
(d) если остаток z имеет показатель t, то z представимо в виде y^k, причем $(k, t) = 1$;
(e) существует либо $\varphi(t)$ остатков с показателем t, либо ни одного.

2. (a) Рассмотрим дроби $\frac{1}{p-1}, \frac{2}{p-1}, \ldots, \frac{p-1}{p-1}$. Сократим все дроби. Пусть t — делитель числа $p-1$. Сколько дробей будут иметь знаменатель, равный t?
(b) Лемма Гаусса. Докажите формулу (суммирование по всем делителям числа $p-1$):

$$\sum_{t \mid p-1} \varphi(t) = p - 1.$$

(c) Улучшите результат задачи **1(e)**, то есть докажите, что существует ровно $\varphi(t)$ остатков с показателем t, если t — делитель $p-1$, и 0 — иначе.

Теорема. По простому модулю p существует ровно $\varphi(p-1)$ первообразных корней.

3. Найдите все первообразные корни по модулям 5, 13, 6.

4. Чтобы проверить, является ли остаток a (такой, что $(a,n)=1$) первообразным корнем по модулю n, нужно разложить на простые множители $\varphi(n) = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_m^{k_m}$ и проверить, что ни одно из чисел вида $a^{\frac{\varphi(n)}{p_i}}$ не сравнимо с 1. Объясните этот способ.

5. n и k — натуральные числа. Докажите, что если не существует первообразного корня по модулю n, то не существует и по модулю kn.

6. Докажите, что для любого простого p первые $p-1$ натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы для любых трех подряд идущих чисел a, b, c разность b^2-ac делилась на p.

7. Докажите, что при любом натуральном k, где $(k,2016)=1$, верно:

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+2016^k \equiv 1^k+2^k+2^{2k}+\ldots+2^{2015k} \pmod{2017}.$$

(Число 2 является первообразным корнем по простому модулю 2017.)

8. (a) Пусть $n=4q$, где q — нечетное простое, $(a,n)=1$. Может ли показатель числа a по модулю n быть равным $\varphi(n)$?
(b) Пусть $n=pq$, где p и q — различные нечетные простые числа, $(a,n)=1$. Может ли показатель числа a по модулю n быть равным $\varphi(n)$?

9. Докажите, что не существует первообразных корней по модулям, отличным от 2, 4, p^k, $2p^k$.

10. Докажите, что при любом натуральном n число 2 является первообразным корнем по модулю 3^n.

29. Другая симметрия. 20 июля

Определение. Многочлен f от n переменных называется *симметрическим*, если для любой перестановки чисел $1,2,\ldots,n$, обозначенной через σ,

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}\right).$$

Обозначим через

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1+x_2+\ldots+x_n,\\
\sigma_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\sigma_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1x_2\ldots x_{n-1} + x_1\ldots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2\ldots x_{n-1}x_n,$$
$$\sigma_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1x_2\ldots x_n.$$

Будем называть такие многочлены *элементарными симметрическими.*

0. a) Сколько одночленов в σ_k?

b) Докажите, что если f_1, f_2 — симметрические многочлены от n переменных, а c — произвольная вещественная константа, то cf_1, f_1+f_2, f_1f_2 симметрические.

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены

(a) $x^2+y^2+z^2$; **(b)** $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2$;

(c) $x^3+y^3+z^3$; **(d)** $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2$.

2. Теорема Виета. (a) Пусть c_1, c_2 и c_3 — корни многочлена $x^3+a_2x^2+ +a_1x+a_0$. Докажите, что

$$a_2 = -(c_1+c_2+c_3), \quad a_1 = c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1, \quad a_0 = -c_1c_2c_3.$$

(b) Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — корни многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$. Тогда для любого натурального $1 \leqslant k \leqslant n$

$$a_k = (-1)^k\sigma_{n-k}(c_1,c_2,\ldots,c_n).$$

Определение. Будем говорить, что одночлен $x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ *лексикографически больше* одночлена $x_1^{j_1}\ldots x_n^{j_n}$ в том и только том случае, когда $(i_1,i_2,\ldots,i_n) \succ (j_1,\ldots,j_n)$. Страшим членом называется наибольший в лексикографическом смысле.

Теорема. Любой симметрический многочлен $f \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ единственным образом представляется в виде

$$f = g(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n),$$

где $g \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ зависит только от f.

3. (a) Докажите теорему для $n=2$.

(b) Пусть $x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ — старший член симметрического многочлена f. Докажите, что $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots \geqslant i_n$.

(c) Выразите через элементарные симметрические какой-нибудь многочлен со старшим членом $x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$.

(d) Докажите, что нужный многочлен g существует.

(e) Докажите, что нужный многочлен g единственный.

Подсказка: лексикографически уменьшайте старший член...

Комментарий: при доказательстве теоремы нельзя пользоваться самой теоремой!

4. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3-2x^2+x+1=0$. Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа

(a) $y_1 = x_2+x_3$, $y_2 = x_1+x_3$, $y_3 = x_1+x_2$;

(b) $y_1 = x_2x_3$, $y_2 = x_1x_3$, $y_3 = x_1x_2$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=42, \\ x^3+y^3+z^3=60. \end{cases}$$

6. Пусть

$$\begin{gathered} x+y+z=u+v+t, \\ x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+t^2, \\ x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+t^3. \end{gathered}$$

Докажите, что при любом натуральном n выполнено $x^n+y^n+z^n=u^n+v^n+t^n$.

7. Положительные действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и k таковы, что $a_1+\ldots+ + a_n = 3k$, $a_1^2+\ldots+a_n^2=3k^2$ и $a_1^3+\ldots+a_n^3>3k^3+k$. Докажите, что какие-то два из чисел $a_1, \ldots, a_n$ отличаются больше чем на 1.

30. Теория Рамсея. 21 июля

Определение. *Числом Рамсея* $R(m,n)$ (m, n — натуральные числа) называется наименьшее натуральное число такое, что полный граф на $R(m,n)$ вершинах, ребра которого покрашены в красный и синий цвета, содержит либо полный красный подграф на n вершинах, либо полный синий подграф на m вершинах.
Теорема Рамсея. $R(m,n)$ существует для любых натуральных m и n.

1. Найдите $R(1,n)$, $R(2,n)$.

2. Докажите:
(a) $R(3,3) \leqslant 6$;
(b) $R(3,4) \leqslant 9$;
(c) $R(3,3) = 6$;
(d) $R(4,4) \leqslant 18$.

3. Докажите:
(a) $R(m,n) \leqslant R(m,n-1)+R(n,m-1)$ для $m,n \geqslant 2$;
(b) $R(m,n) \leqslant C_{m+n-2}^{m-1}$;
(c) Докажите теорему Рамсея.

Определение. *Многоцветным числом Рамсея* $R(n_1,n_2,\ldots,n_l)$ называется наименьшее натуральное число такое, что всякая раскраска в l цветов полного графа на $R(n_1,n_2,\ldots,n_l)$ вершинах содержит полный подграф цвета c на n_c вершинах.

4. Найдите точное значение $R(3,4)$.

5. Докажите, что $9 < R(3,3,3) \leqslant 17$.

6. Теорема Шура. Все натуральные числа покрашены в несколько цветов. Тогда можно выбрать три одноцветных числа x, y и z, для которых $x+y=z$.

7. Доказать, пользуясь Теоремой Шура, что для любого $m \in \mathbb{N}$ и для любого достаточно большого простого числа p сравнение $x^m + y^m \equiv z^m(p)$ имеет нетривиальное решение.

31. Дама с собачкой. 21 июля

Основная теорема алгебры (ОТА). Любой многочлен степени не меньше единицы с комплексными коэффициентами (в том числе и с действительными) имеет хотя бы один комплексный корень.

1. Пусть число z выходит из точки 1, обходит окружность радиусом 1 с центром 0 и возвращается в ту же точку 1. Начертите линию, по которой движется точка: **(a)** $\frac{1}{z}$; **(b)** z^2; **(c)** z^2+1; **(d)** $z+\frac{1}{z}$.

Рассмотрим приведенный многочлен степени n с комплексными коэффициентами

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

. Пусть $a_0 \neq 0$ (иначе многочлен $P(z)$ будет иметь корень $z = 0$). При движении по комплексной плоскости точки z происходит перемещение по комплексной плоскости точки $P(z)$. Точку z^n на комплексной плоскости назовем *Дамой*, а точку $P(z)$ — *Собачкой*.

2. Число z начинает свой путь по комплексной плоскости в действительной точке R, проходит один раз по окружности радиуса R против часовой стрелки и возвращается в ту же точку.

(a) Какой путь при этом совершит *Дама*? Сколько раз она обойдет вокруг точки 0?

При любом положении точки z расстояние между *Дамой* и *Собачкой* равно $|P(z-z^n)|$. Назовем длиной поводка число L, равное максимально возможному расстоянию между *Дамой* и *Собачкой* при заданном значении R.

(b) Докажите, что при $R > 1$ длина поводка не превосходит $L \leqslant (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)R^{n-1}$.

(c) Какого радиуса R нужно взять окружность в качестве траектории движения точки z, чтобы длина поводка была меньше R^n — расстояния от *Дамы* до точки 0? Сколько раз при этом Собачка обойдет вокруг точку 0 при движении z по окружности?

Начнем уменьшать радиус окружности , по которой движется точка z. Радиус окружности, по которой гуляет *Дама*, уменьшается, но она по-прежнему будет проходить n раз вокруг точки 0. Траектория движения *Собачки* меняется непрерывно, то есть при «небольшом» изменении R траектория изменяется незначительно.

3. (a) Докажите, что при $R < 1$ *Собачка* находится от точки a_0 на расстоянии не большем, чем $(1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_1|)R$.

(b) Какое значение радиуса R окружности нужно взять, при котором *Собачка* ни разу не пройдет вокруг точки 0?

Итак, в процессе уменьшения R число обходов траектории *Собачки* вокруг точки 0 уменьшается от n до нуля. Значит, при некотором значении радиуса *Собачка* будет вынуждена пройти через 0.

Теорема доказана!

Следствия.

4. Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами единственным образом с точностью до умножения на число раскладывается в произведение n линейных сомножителей с комплексными коэффициентами.

5. Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами единственным образом раскладывается в произведение многочленов степени не выше второй с действительными коэффициентами.

6. Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.

Несколько задач.

7. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлен $x^8 + x^4 + 1$.

8. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами при всех действительных x принимает только положительные значения. Докажите, что найдутся такие многочлены $A(x)$ и $B(x)$ с действительными коэффициентами, для которых $P(x) = A^2(x) + B^2(x)$.

9. Докажите, что при любых натуральных p и q число $(p+1)^{2q+1}+p^{q+2}$ делится на $p^2 + p + 1$.

32. Об одном методе. 22 июля

Пусть есть два набора чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
Определение. Пусть $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3 \geqslant \ldots \geqslant y_n$. Будем говорить, что набор x *мажорирует* набор y, и писать $x \succ y$, если выполняются следующие условия:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$

2) для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ выполняется неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} y_i$

Определение$'$. Набор x *мажорирует* набор y если для любого поднабора из k игреков $y_{n_1}, \ldots, y_{n_k}$ найдутся k иксов $x_{m_1}, \ldots, x_{m_k}$ таких, что

$$x_{m_1} + x_{m_2} + \ldots + x_{m_k} \geqslant y_{n_1} + y_{n_2} + \ldots + y_{n_k}.$$

И при этом полные суммы наборов одинаковы.

1. Докажите, что определение и определение′ равносильны.

2. a) Докажите, что если $x \succ y$, то если добавить к каждому из них один и тот же элемент c, то $x_1 \succ y_1$, где $x_1 = x \cup \{c\}$ и $y_1 = y \cup \{c\}$.
b) Докажите, что если к набору x и набору y добавить некоторое количество элементов, (т.е. добавить одинаковый набор чисел) тогда мажорация не исчезнет.

3. Верно ли, что если $x \cup \{c\} \succ y \cup \{c\}$, то $x \succ y$?

4. a) Пусть $x \succ y$ и $x \neq y$. Докажите, что существует набор z не совпадающий ни с x ни с y такой, что $x \succ z \succ y$.
b) Пусть в наборе x есть два элемента x_k и x_l такие, что $x_k > x_l$.
Пусть ε таково, что $x_k > x_k - \varepsilon \geqslant x_l + \varepsilon > x_l$. Назовем *сближением* набора x новый набор $y = x \setminus \{x_k, x_l\} \cup \{x_k - \varepsilon, x_l + \varepsilon\}$, тогда $x \succ y$.
c) Докажите, что если $x \succ y$, то существуют промежуточные наборы
$x = z_0 \succ z_1 \succ \ldots \succ z_m = y$ такие, что z_{j+1} является сближением z_j.

Определение. *Полной орбитой набора* называется

$$O(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{n_1} x_{\sigma(2)}^{n_2} \ldots x_{\sigma(k)}^{n_k}.$$

5. a) Пусть $n_1 > n_1 - \varepsilon \geqslant n_2 + \varepsilon > n_2$. Докажите, что

$$O(n_1, n_2, \ldots, n_k) \geqslant O(n_1 - \varepsilon, n_2 + \varepsilon, \ldots, n_k).$$

b) Пусть набор $(n_1, n_2, \ldots n_k) \succ (m_1, m_2, \ldots m_k)$. Докажите, что

$$O(n_1, n_2, \ldots, n_k) \geqslant O(m_1, m_2, \ldots, m_k).$$

Для натуральных чисел n_i и m_i это неравенство называется **неравенством Мюрхеда.**

6. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}}{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}.$$

33. Плюс-минус. 22 июля

1. Поставьте в ряд 11 чисел таких, что сумма их всех положительна, но при этом сумма любых трех соседних чисел отрицательна.

2. Обозначим за $f(A, B)$ максимальную длину ряда чисел таких, что сумма любых A соседних чисел положительна, а сумма любых соседних B чисел отрицательна.

(a) Докажите равенства $f(7,2) = 7; f(6,2) = 5; f(4,3) = 5$.

(b) Докажите, что $f(A,B) = f(B,A)$. Найдите $f(A,1)$ и $f(A,A)$.

(c) Докажите, что $f(A,B) < A + B$.

(d) Докажите, что если $A > B$ и $f(A,B) = N$, то $f(A-B,B) \geqslant NB$.

(e) Из пункта **(d)** получите неравенство $f(A,B) \leqslant A + B - \text{НОД}(A,B) - 1$.

(f) Докажите, что $f(A,A-1) = 2A-3$.

(g) Докажите, что если $f(A,B) = N$, то для любого натурального k выполняется неравенство $f(kA,kB) \geqslant N + (N+1)(k-1)$. Заодно докажите, что если выполняется равенство $f(A,B) = A + B - \text{НОД}(A,B) - 1$, то $f(kA,kB) = kA + kB - \text{НОД}(kA,kB) - 1$.

(h) Пусть $A > B + 1, B \geqslant 2, \text{НОД}(A,B) = 1$. Рассмотрим ряд из $A + B - 2$ чисел. Будем считать их вершинами графа. Соединим ребрами числа, номера которых в ряду отличаются на A или на B. Найдите степени всех вершин. Докажите, что в этом графе ровно две компоненты связности.

(i) Поставим во все вершины первой компоненты связности число m, второй — n. Докажите, что среди любых A соседних чисел одинаковое количество чисел, равных m. И среди любых B тоже.

(j) Докажите, что можно найти такие m и n, что выполняется условие исходной задачи.

(k) Обобщив предыдущие пункты, докажите, что
$f(A,B) = A + B - \text{НОД}(A,B) - 1$.

34. Заключительная олимпиада. 23 июля

Довывод

1. Существуют ли такие 6 натуральных чисел, что наибольший общий делитель каждых двух из них — простое число, меньшее 26, и при этом каждое такое простое число является наибольшим общим делителем каких-то двух из этих шести чисел?

2. Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n (n \geqslant 2)$ — вещественные числа, большие 1. Пусть $|x_i - x_{i+1}| < 1$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1.$$

3. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки B' и C' симметричны точкам B и C относительно прямых CD и AB соответственно. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников ABC' и $B'CD$, равноудалена от точек A и D.

4. Докажите, что ни при каком натуральном n произведение

$$(1^4+1^2+1)(2^4+2^2+1)\ldots(n^4+n^2+1)$$

не является точным квадратом.

5. План картинной галереи — клетчатая фигура, где каждая клетка — это зал, и из любой клетки можно дойти до любой другой, переходя в соседние по сторонам клетки. Смотритель, находясь в одном из залов, следит за всеми залами, в которые можно попасть из этой клетки одним ходом ферзя (не выходя за пределы галереи). Какое наименьшее число смотрителей потребуется, чтобы в любой галерее из n залов ($n>2$) все залы оказались под присмотром?

Вывод

6. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n>3$. Докажите, что среди них существуют два различных числа a_i, a_j таких, что a_i+a_j не делит ни одно из чисел $3a_1, 3a_2, \ldots, 3a_n$.

7. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — выпуклый n-угольник. Внутри него выбрана точка P такая, что её проекции $P_1, P_2, \ldots, P_n$ на стороны многоугольника лежат на отрезках $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ соответственно. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — точки на отрезках A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1 соответственно. Докажите, что

$$\max\left(\frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \frac{X_2X_3}{P_2P_3}, \ldots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1}\right) \geqslant 1.$$

8. В тайном обществе 2020 членов, и у каждого есть счет в банке (на счету целое число рублей, которое может быть отрицательным). Время от времени один из членов общества переводит со своего счета на счет каждого из своих друзей, состоящих в обществе, по 1 рублю. Известно, что с помощью цепочки таких переводов они могут перераспределить имеющиеся на счетах средства произвольным образом. Докажите, что в этом обществе ровно 2019 пар друзей.

Пикалов Павел Сергеевич
Старостина Ольга Валентиновна
Бадажкова Ольга Александровна
Ланских Ирина Юрьевна
Ляховец Даниил Юрьевич
Газизуллина Римма Камльевна

9 КЛАСС. ОБЫЧНАЯ ГРУППА. МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Сдано в набор 22.07.19. Подписано к печати 23.07.19. Формат A5
Бумага «белая A4». Печать на принтере.
Заказ $-e^{i\pi}$. Тираж 40
Издательство «Ильдар»