

XXXV Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 3 – 28 июля 2019 г.



9 КЛАСС. НЕОБЫЧНАЯ ГРУППА МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Пикалов П. С.
Старостина О. В.
Бадажкова О. А.
Ланских И. Ю.
Ляховец Д. Ю.
Газизуллина Р. К.

Оглавление

От авторов	5
1. Вступительное занятие. 4 июля	6
2. Вступительная олимпиада. 4 июля	6
3. Многочлены 1. Теорема Безу. 5 июля	7
4. Точки и выпуклая оболочка. 5 июля	8
5. Триангуляция и лемма Шпернера. 5 июля	9
6. Лексикографический порядок. 6 июля	10
7. Комплексные числа. 6 июля	11
8. Числа Каталана. 6 июля	12
9. С целыми коэффициентами. 7 июля	13
10. Поворотная гомотетия. 7 июля	14
11. Эпизод 1: Новые аксиомы. 7 июля	15
12. Орграфы–1. 9 июля	16
13. Два велосипедиста. 9 июля	17
14. Теорема Хелли. 10 июля	18
15. Интерполяционный многочлен. 10 июля	19
16. Тригонометрическая форма комплексных чисел. 11 июля	20
17. Учимся считать. 11 июля	22
18. Многочлены над \mathbb{Z}_p . 12 июля	23
19. Матбой. 12 июля	23
20. Симедианы. 14 июля	24
21. Орграфы–2. 14 июля	25
22. Квадратичные вычеты. 15 июля	26
23. Гармонический четырехугольник. 15 июля	27
24. Комплексные числа в геометрии. 16 июля	28
25. Математический бой обычных групп M8–M9. 16 июля	30
26. Математический бой обычных групп M9–M10. 16 июля	31
27. Окружность Аполлония и гармония. 17 июля	32
28. Клеточки! Клеточки! 17 июля	33
29. Мнимые знания. 19 июля	34
30. Приводимость над $\mathbb{Z}[x]$. 19 июля	35
31. Первообразный корень. 20 июля	37

32.	Другая симметрия. 20 июля	38
33.	Теория Рамсея. 21 июля	39
34.	Дама с собачкой. 21 июля	40
35.	Об одном методе. 22 июля	42
36.	Плюс-минус. 22 июля	43
37.	Заключительная олимпиада. 23 июля	44

От авторов

There's no point in being grown-up
if you can't be childish sometimes.

«Doctor Who»

Дорогой друг! Вы держите в руках или просматриваете с экрана Вашего зомбоящика брошюру с материалами занятий «необычной» группы 9 класса Летней многопредметной школы Кировской области, порождённую преподавателями групп разной степени обычности. Несколько занятий появились на свет как совместное творчество с преподавателями группы «профи».

Мы выражаем искреннюю благодарность коллегам с других параллелей Е. А. Исааку и М. А. Лукину за приятную совместную работу по составлению математических боёв, инженерам М. П. Селюнину и Р. А. Криницину за техническую поддержку всего и, конечно, нашим прекрасным детям:

Багдасаряну Эрику, Барышевой Ксении, Даминову Арслану, Дунаевой Полине, Емельянову Андрею, Журавлёву Вячеславу, Кунин-Богоявленскому Сергею, Кармановой Ольге, Литвиненко Ивану, Лузанину Матвею, Сабирову Роману, Сам Фетуллаху, Татаринovu Георгию, Тен Юрию, Ураковой Евгении, Шевчук Марине.



1. Вступительное занятие. 4 июля

Сюжет. Инопланетянин Z живет в двумерном мире, то есть на плоскости. Однажды Z решил позагорать. Z хочет, чтобы каждая точка на границе его тела была освещена лучами солнца не меньше 1 минуты. При этом Z может вертеться в плоскости как угодно (делает он это моментально), а лучи света параллельны и сонаправлены с осью OX . Точка поверхности считается освещенной, если на нее не падает тень ни от какой другой точки тела Z .

1. Какое минимальное время должен загорать Z , если он квадратный?
2. А если Z треугольный?
3. Докажите, что если Z — выпуклый многоугольник, то ему достаточно двух минут, чтобы загореть.
4. Докажите, что если Z — выпуклый многоугольник, то ему нужно не менее 1,5 минут, чтобы загореть.
5. Какое минимальное время должен загорать Z , если он имеет форму сектора круга с острым углом?
6. Какое минимальное время должен загорать Z , если он имеет форму сектора круга с тупым углом?
7. Нарисуйте шестиугольного Z , который может загореть, но на это наверняка потребуется более 2 минут.
8. Верно ли, что любой пятиугольный Z сможет загореть, причем для этого достаточно 2 минут?

2. Вступительная олимпиада. 4 июля

1. Дима написал на доске выражение

$$1 \star 2 \star 3 \star \dots \star 2019,$$

где каждая звездочка — либо знак “+”, либо знак “−”. Сережа может за одно действие выбрать не крайнее число и поменять оба знака рядом с ним на противоположные (плюс на минус, минус на плюс). Докажите, что такими операциями Сережа может получить выражение, значение которого делится на 7.

2. Дана окружность и точка O на ней. Вторая окружность с центром O пересекает первую в точках P и Q . Точка C лежит на первой окружности, а прямые CP и CQ вторично пересекают вторую окружность в точках A и B . Докажите, что $AB = PQ$.

3. Отряд М9 проводит знакомство. На него явились n детей. У Павла Сергеевича они пронумерованы в списке числами от 1 до n . Дети выстроились в круг так, что между каждыми двумя детьми с последовательными номерами стоит одно и то же число других ребят. Соседками Жени оказались Аня и Оля. У

Ани в списке номер 11, у Жени — номер 4, у Оли — номер 17. Сколько детей пришло на знакомство?

4. Дан клетчатый квадрат 131×131 , из которого вырезана одна угловая клетка. Четно или нечетно количество способов разбить этот квадрат на уголки из трех клеток?

5. На доске выписаны числа x_1, x_2, \dots, x_{100} , такие что $x_1 = 1/2$ и для любого n от 1 до 99 выполняется равенство

$$x_{n+1} = 1 - x_1 x_2 \dots x_n.$$

Докажите, что $x_{100} > 0,99$.

6. Дано 30 различных трехзначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать несколько и разбить на два равных и по количеству, и по сумме множества.

3. Многочлены 1. Теорема Безу. 5 июля

Определение. Разделить многочлен $P(x)$ на ненулевой многочлен $Q(x)$ с остатком — это значит найти такие многочлены $H(x)$ (*неполное частное*) и $R(x)$ (*остаток*), что выполнено равенство $P(x) = Q(x) \cdot H(x) + R(x)$, причем $\deg R(x) < \deg Q(x)$ или $R(x) = 0$.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$, то есть $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$, при этом $\deg Q(x) = \deg P(x) - 1$.

1. (а) Многочлен $P(x)$ делится на $(x - a)$ тогда и только тогда, когда $P(a) = 0$.
(б) Докажите, что число корней многочлена не превосходит его степени.
(в) Докажите, что если значения двух многочленов, степень каждого из которых не превосходит n , совпадают в $n + 1$ различных точках, то эти многочлены равны.

(г) Если многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$, то корни многочлена $Q(x)$ являются корнями многочлена $P(x)$.

2. При каких a и b многочлен $P(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?

3. Многочлен $P(x)$ дает остаток 2 при делении на $x - 1$ и остаток 1 при делении на $x - 2$. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на многочлен $(x - 1)(x - 2)$?

4. Найдите все целые x , при которых число $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ делится на $x^2 + 1$.

5. Про многочлен $P(x)$ степени 10 с действительными коэффициентами известно, что $P(1) = P(-1), \dots, P(5) = P(-5)$. Докажите, что $P(x) = P(-x)$ для любого x .

6. Найдите все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$xP(x - 1) = (x - 20)P(x).$$

7. Докажите, что при нечетном m выражение $(x + y + z)^m - x^m - y^m - z^m$ делится на $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

8. Многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет на интервале $(0, 2)$ три различных вещественных корня. Докажите, что $-2 < p + q + r < 0$.

9. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных вещественных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2019$, вещественных корней не имеет. Докажите, что $P(2019) > 1/64$.

4. Точки и выпуклая оболочка. 5 июля

Определение. *Выпуклой оболочкой* множества X называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих X .

1. Дано множество точек A_1, \dots, A_n, A_{n+1} . Пусть G — выпуклая оболочка множества точек A_1, \dots, A_n . Пусть H — фигура, являющаяся объединением всех отрезков, соединяющих A_{n+1} со всеми точками G .

а) Докажите, что H — выпуклая фигура.

б) Докажите, что H — выпуклая оболочка множества всех точек.

с) Докажите, что H — многоугольник.

Теорема. Выпуклая оболочка конечного множества точек является точкой, отрезком либо выпуклым многоугольником.

2. Докажите, что среди любых 5 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать 4, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.

3. На плоскости даны n точек, причем любые 4 из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что все точки являются вершинами выпуклого n -угольника.

4. На плоскости расположены несколько правильных n -угольников. Докажите, что выпуклая оболочка их вершин имеет не менее n углов.

5. На столе расположено n картонных и n пластмассовых квадратов, причем никакие два картонных и никакие два пластмассовых квадрата не имеют общих точек, в том числе и точек границы. Оказалось, что множество вершин картонных квадратов совпадает с множеством вершин пластмассовых квадратов. Обязательно ли каждый картонный квадрат совпадает с некоторым пластмассовым?

6. На плоскости отмечено конечное количество точек, не все на одной прямой. В каждой точке записано число, причем сумма чисел во всех точках, лежащих на одной прямой, равна 0. Докажите, что все числа равны 0.

7. На плоскости дано 22 точки, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары так, чтобы отрезки, заданные парами, пересекались по крайней мере в пяти различных точках.

8. На плоскости расположено конечное количество прямых и точек. Докажите, что на плоскости найдётся точка A , не совпадающая ни с одной из данных точек, расстояние от которой до любой из данных точек больше расстояния от неё до любой из данных прямых.

5. Триангуляция и лемма Шпернера. 5 июля

1. Дом имеет вид клетчатого прямоугольника, в котором клетки — это комнаты, стороны клеток — двери. Дверь на стороне прямоугольника назовем наружной. Тупиком назовем комнату, в которой открыта ровно одна дверь, причем не наружная. Известно, что в каждой комнате открыто не более двух дверей. Докажите, что число тупиков и число наружных дверей имеют одинаковую четность.

Определение. *Триангуляцией* многоугольника называется такое разбиение его на треугольники, что любые два треугольника разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или целую сторону. Эти треугольники называются *гранями* триангуляции, их стороны — её *ребрами*, их вершины — её *вершинами*.

Используя предыдущие задачи решите следующую.

2. *Лемма Шпернера.* Вершины триангуляции треугольника ABC помечены числами 1, 2 или 3 таким образом, что каждая вершина триангуляции, лежащая на стороне AB , имеет пометку 1 или 2; на стороне BC — пометку 2 или 3; на стороне CA — пометку 3 или 1. Докажите, что число граней триангуляции, несущих три различные пометки, нечетно.

3. Вершины клеток клетчатого прямоугольника $ABCD$ помечены числами 1, 2, 3 или 4. При этом соблюдается граничное условие: вершина, лежащая на AB , помечена числом 1 или 2; на BC — 2 или 3; на CD — 3 или 4; на DA — 4 или 1. Докажите, что найдется клетка, имеющая не менее трех различных пометок.

4. Каждую сторону треугольника поделили на n равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные его сторонам. В результате получилась триангуляция треугольника. Каждую вершину триангуляции покрасили в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что число двуцветных ребер триангуляции четно.

5. Дан куб $100 \times 100 \times 100$. Его покрыли квадратиками 1×1 без пропусков и наложений. В каждом квадрате провели обе диагонали, а стороны всех квадратов стерли. Докажите, что из любой вершины куба есть путь в какую-то другую вершину куба, проходящий по отмеченным диагоналям.

6. Для произвольной триангуляции многоугольника докажите равносильность условий:

- вершины триангуляции можно отметить так, что каждая грань несет три

разных отметки 0, 1 и 2;

- все грани триангуляции можно правильно раскрасить в два цвета так, что любые две соседние грани окрашены различно;
- из каждой внутренней вершины триангуляции выходит четное число ребер.

7. Квадрат $[0, 2n+1] \times [0, 2n+1]$ координатной плоскости разрезан на треугольники так, что координаты всех вершин целочисленны. Докажите, что найдется треугольник с нецелой площадью.

6. Лексикографический порядок. 6 июля

Определение. Рассмотрим две строки из n натуральных чисел: $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$. Будем говорить, что A *мажорирует* B (и писать $A \succ B$), если для некоторого номера $1 \leq i \leq n$ выполнено $a_i > b_i$ и $a_j = b_j$ для $j < i$. Отношение «мажорирует» задаёт на множестве *лексикографический порядок*.

1. Докажите, что

- (a) если $A \succ B$, $B \succ C$, то $A \succ C$;
- (b) строго убывающая последовательность строк длины n всегда конечна;
- (c) в каждом непустом множестве строк длины n есть наименьший элемент;
- (d) Аналогично можно определить порядок на множестве бесконечных вправо строк натуральных чисел. Верны ли для него пункты (a), (b), (c)?

2. В стране N существуют n различных номиналов монет. В этом году вышел закон, согласно которому каждый житель страны получает ежемесячную зарплату монетами меньшего номинала, чем те, которыми он платил налог в предыдущем месяце. Докажите, что рано или поздно народ разорится.

3. Дана последовательность из бесконечного числа нулей и конечного числа единиц. Если найдется группа вида 01, то ее можно заменить на группу вида 10...0 с произвольным числом нулей. Докажите, что можно сделать лишь конечное число таких замен.

4. Двое играют в следующую игру. Есть последовательность из n крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые k ($k = 1, \dots, n$) подряд идущих знака таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней — нолики (допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её (заменить крестик на нолик и нолики на крестики). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?

5. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена с натуральными коэффициентами. Будем говорить, что P асимптотически меньше Q , если $P(x) < Q(x)$ для всех

достаточно больших x . Существует ли бесконечная последовательность многочленов P_1, P_2, \dots , в которой каждый следующий асимптотически меньше предыдущего?

6. Малыш и Карлсон делят варенье. Изначально перед ними стоят 239 непустых банок с вареньем. При этом всё имеющееся варенье умещается в любую из банок. Карлсон может в любой момент или съесть содержимое трёх банок и улететь, или выбрать 4 банки и разлить содержимое каждой в два стакана: левый и правый (всего 8 стаканов). После этого Малыш правые стаканы нетождественно переставляет и сливает содержимое обратно в те же банки — содержимое левого с содержимым нового правого. Докажите, что Карлсон сможет съесть не менее 99.99% всего варенья, если на стенках сосудов оно не остаётся.

7. Комплексные числа. 6 июля

Определение. *Комплексным числом* z называется число вида $z = a + bi$, где a и b — вещественные числа, а $i^2 = -1$. При этом a называется *вещественной частью числа* z и обозначается через $\operatorname{Re} z$, b — *мнимой частью числа* z и обозначается через $\operatorname{Im} z$. Два комплексных числа z_1 и z_2 равны, если $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Определение. Для числа $z = a + bi$ сопряженным называется число $\bar{z} = a - bi$.

Свойства.

$$\begin{array}{ll} 1^\circ \bar{\bar{z}} = z; & 2^\circ \bar{z} + z, \bar{z}z — \text{вещественные числа;} \\ 3^\circ \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; & 4^\circ \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2; \\ 5^\circ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; & 6^\circ \overline{z^n} = \bar{z}^n; \\ 7^\circ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}; & 8^\circ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \end{array}$$

1. Упростите выражение (a) i^{2019} ; (b) $\frac{(1+2i)(3-4i)+4-i}{2+3i}$.
2. Изобразите на комплексной плоскости следующие множества:
(a) $\operatorname{Re} z < 2$; (b) $\operatorname{Im}(z^2) \leq 1$; (c) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$.
3. Докажите, что если z — комплексный корень многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами, то \bar{z} — также корень этого многочлена.
4. Составьте многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами, имеющий корни $1 + 2i$ и i .

Определение. *Модулем* $|z|$ числа z называется длина вектора \overrightarrow{OZ} , а *аргументом* $\arg z$ числа z — ориентированный угол между положительным направлением оси абсцисс и вектором \overrightarrow{OZ} . Для ненулевых комплексных чисел можно считать, что $\arg z \in [0, 2\pi)$. Для числа $z = 0$ аргумент не определен.

5. Изобразите на комплексной плоскости числа 1 , i , $1 + i$ и $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите их модули и аргументы.

6. Докажите, что

- (a) $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$; (b) $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2 ;
 (c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; (c) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
 (e) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

7. Изобразите на комплексной плоскости следующие множества:

- (a) $|z - i| < 1$; б) $\frac{|z-2i|}{|z+1|} = 1$; (c) $|iz - 1| > |z - 1|$; д) $|\arg(z - i)| \leq \frac{\pi}{4}$.

8. Найдите $\min |3 + 2i - z|$ при $|z| \leq 1$.

9. Пусть $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ при $z \neq i$. Пусть $z_0 = \frac{1}{137} + i$, $z_n = f(z_{n-1})$ для всех $n \geq 1$. Найдите z_{2002} .

10. Про комплексные числа x , y и z известно, что $|x| = |y| = |z| = 1$. Какие значения может принимать выражение $\frac{|x+y+z|}{|xy+yz+zx|}$?

11. У приведенного многочлена четвертой степени $P(x)$ с вещественными коэффициентами есть 4 корня, но они не являются вещественными числами. Произведение двух из корней равно $13 + i$, сумма двух других равна $3 + 4i$. Найдите коэффициент многочлена при x^3 .

12. Представьте в тригонометрической форме число $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$.

8. Числа Каталана. 6 июля

Определение. Обозначим через C_n количество способов расставить в ряд n открывающихся и n закрывающихся скобок так, чтобы запись была корректна (то есть, среди любого количества первых элементов ряда открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся). Число C_0 полагается равным 1. Число C_n называется n -ым числом Каталана.

1. Докажите, что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \dots + C_n C_0$$

и начальным членом $C_0 = 1$.

0. Найдите первые 5 чисел Каталана.

2. Докажите, построив явную биекцию или проверив рекуррентное соотношение, что следующие числа равны C_n .

а) Количество путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо и не поднимающиеся выше прямой $y = x$.

б) Число *триангуляций* (разрезаний на n треугольников непересекающимися диагоналями) выпуклого $(n + 2)$ -угольника.

с) Количество *плоских корневых строго двоичных деревьев* (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного) с $n + 1$ листьями.

д) Количество таблиц $2 \times n$, заполненных натуральными числами от 1 до $2n$, так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.

3. а) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси OX , равно C_n .

б) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, -2)$.

с) Найдите явную формулу для C_n .

4. Докажите, что число наборов из n целых чисел от 0 до n , сумма которых делится на $(n + 1)$, равна n -ому числу Каталана. Например, такие наборы для $n = 3$: (000) , (013) , (022) , (112) , (233) .

9. С целыми коэффициентами. 7 июля

1. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, a и b — целые числа. Докажите, что:

(а) $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$;

(б) $P(a) \equiv P(a + b) \pmod{b}$.

2. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2019$, $P(2019) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k .

3. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ — один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность $P(2019) - Q(2019)$ кратна 1009.

4. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .

5. Докажите, что для любого непостоянного многочлена $P(x)$ найдется такое натуральное число n , что $P(n)$ — составное число.

6. В равенстве $x^5 + 2x + 3 = p^k$ числа x и k — натуральные. Может ли число p быть простым?

7. Докажите, что не существует многочлена степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом.

8. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что задумал приведенный многочлен $P(x)$ степени 2019 с целыми коэффициентами. Затем он сообщит им k целых чисел n_1, n_2, \dots, n_k , и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \dots \cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

10. Поворотная гомотетия. 7 июля

Определение. Поворотной гомотетией с центром в точке O , коэффициентом k и ориентированным углом α называется преобразование плоскости, переводящее любую точку плоскости X в такую точку X' , что $kOX = OX'$ и $\angle XOX' = \alpha$.

Обычно это преобразование обозначают $H_O^{\alpha, k}$. Заметим, что $H_O^{\alpha, k} = R_O^\alpha \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\alpha$, где R_O^α — поворот, а H_O^k — гомотетия.

Пример. Дан квадрат $ABCD$ с центром O . Точка K — середина отрезка AB . Постройте хотя бы один центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок BK в AO .

1. (а) Треугольники YAB и $YA'B'$ подобны и одинаково ориентированы. Докажите, что YAA' и YBB' тоже подобны и одинаково ориентированы.

(б) Докажите, что почти для любых (для каких?) двух отрезков AB и $A'B'$ существует единственная поворотная гомотетия, переводящая A в A' и B в B' . Кроме того, её центр — точка Микеля для прямых AB , $A'B'$, AA' и BB' .

(с) Какому углу на картинке из пункта (а) равен угол между прямыми AA' и BB' .

2. Середины сторон BC и $B'C'$ правильных одинаково ориентированных треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают. Найдите угол между AA' и BB' и отношение длин отрезков AA' и BB' .

3. Квадраты $ABCD$ и $AXYZ$ одинаково ориентированы. Докажите, что прямые BX , CY и DZ пересекаются в одной точке.

4. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC проведена высота BH . В треугольники ABH и CBH вписаны окружности, касающиеся AB и BC в точках X и Y . Докажите, что $\angle XBY = 90^\circ$.

5. На диагонали BD вписанного четырехугольника $AXYZ$ выбрана такая точка K , что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' — центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X . Докажите, что точки A , X , I и D лежат на одной окружности.

6. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M . Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K . Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM , перпендикулярна биссектрисе угла AKB .

7. Две окружности пересекаются в точках A и B , а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$. Пусть P — середина отрезка BN , а Q — середина отрезка MC . Докажите, что $\angle APQ = \angle ANC$.

11. Эпизод 1: Новые аксиомы. 7 июля

Аксиома Кантора–Дедекинда. Каковы бы ни были непустые множества $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$, такие что для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$, существует такое вещественное число ξ , что для всех $a \in A$ и $b \in B$ имеет место соотношение $a \leq \xi \leq b$.

Теорема. (О вложенных отрезках.) Для всякой последовательности вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$$

существует хотя бы одна точка ξ , принадлежащая каждому из отрезков этой последовательности.

Теорема. (О стягивающихся отрезках.) Для всякой последовательности вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots,$$

такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|b_n - a_n| < \varepsilon$, существует единственная точка ξ , принадлежащая каждому из отрезков этой последовательности.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху (снизу)*, если существует такое $C \in \mathbb{R}$, что для любого $a \in A$ выполнено $a \leq C$ ($a \geq C$). Множество называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение. *Супремумом (инфимумом)* множества $A \subset \mathbb{R}$ будем называть такое число $C \in \mathbb{R}$ (если оно существует), что

- $\forall a \in A \ a \leq C$ ($a \geq C$),
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : |a - C| < \varepsilon$.

Обозначать это число будем через $\sup A$ (соответственно $\inf A$).

Аксиома существования супремума. Пусть множество A ограничено. Тогда существует $\sup A$.

1. Докажите, что Аксиома Кантора–Дедекинда, теорема о вложенных отрезках и Аксиома существования супремума попарно равносильны.

На занятии уже были доказаны импликации $A. \text{ К.-Д.} \Rightarrow A. \exists \sup \Rightarrow T. \text{ о вложенных отрезках.}$

Определение. Последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ называется *сходящейся*, если существует такое $A \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N_\varepsilon$ такое, что для любого $n > N$ выполнено $|a_n - A| < \varepsilon$. Число A в таком случае называется *пределом последовательности* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и обозначается через $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Определение. Последовательность называется *бесконечно малой*, если её предел существует и равен нулю.

На занятии мы доказали следующие свойства.

1. Если предел последовательности существует, то он единственный.

2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$.

3. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}$ существует и равен $\frac{1}{A}$.

Следующие два свойства были оставлены в качестве упражнений.

2. (а) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$.

(б) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \neq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ существует и равен $\frac{B}{A}$.

Задачи.

3. Найдите пределы (а) $x_n = \frac{1}{n}$; (б) $x_n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}}$; (с) $x_n = 1 - \frac{\sin n}{n}$.

4. Пусть последовательность $x_n \rightarrow A$, тогда x_n ограничена.

5. Пусть предел последовательности равен A . Докажите, что предел любой её подпоследовательности равен A .

6. Докажите неравенства

$$(a) \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; (b) \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

12. Орграфы – 1. 9 июля

Определение. *Ориентированный граф* — граф, каждое ребро которого является стрелкой от одной вершины ребра к другой. Путь в ориентированном графе — такая последовательность вершин, что в каждую следующую вершину ведет стрелка из предыдущей.

Определение. *Полустепенью исхода* $d^+(v)$ вершины v называется число рёбер, выходящих из вершины v . *Полустепенью захода* $d^-(v)$ вершины v называется число рёбер, входящих в вершину v .

1. В ориентированном графе 101 вершина. Некоторые из вершин соединены одним ребром. У каждой вершины, кроме вершины w , $d^+(v) = 20$ и $d^-(v) = 21$. Докажите, что в вершину w не существует пути ни из какой вершины.

2. В ориентированном графе для любых двух вершин u и v существует либо путь из u в v , либо путь из v в u . Докажите, что существует путь, который проходит через все вершины графа.

3. В ориентированном графе 101 вершина. Из любой вершины выходит ровно 40 рёбер, и в любую вершину входит ровно 40 рёбер. Докажите, что из любой вершины в любую другую существует путь длины не более чем три.

Определение. Ориентированный граф называется *сильносвязным*, если существуют пути в обе стороны между любыми двумя вершинами.

4. Докажите, что в сильносвязном ориентированном графе существует цикл, проходящий через все вершины графа.

5. В ориентированном графе существует путь между любыми двумя вершинами длины не более чем два. Оказалось, что после удаления любого ребра в этом графе, граф остается сильносвязным. Докажите, что теперь существует путь между любыми двумя вершинами длины не более чем три.

6. В связном графе на 30 вершинах ввели ориентацию рёбер так, что в каждую вершину входит хотя бы одно ребро и хотя бы одно ребро выходит. Докажите, что в граф можно добавить не более 10 ориентированных рёбер, чтобы он стал сильносвязным.

7. Полустепень исхода каждой вершины ориентированного графа не превосходит единицы. Докажите, что вершины графа можно разбить на три подмножества так, что в каждом из подмножеств не будет смежных вершин.

8. Докажите, что в полном графе, в котором более четырёх вершин, можно так ввести ориентацию рёбер, что из любой вершины в любую другую будет существовать путь длины не более чем два.

9. В ориентированном графе на 1001 вершине между любыми двумя вершинами есть ровно одно ребро. Полустепени исхода и захода каждой вершины равны 500. Докажите, что любой подграф из 668 вершин данного графа является сильносвязным.

13. Два велосипедиста. 9 июля

1. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q , одновременно начали движение из точки P по часовой стрелке с равными угловыми скоростями два велосипедиста A и B . (а) Докажите, что прямая AB все время проходит через точку Q .

(б) Докажите, что треугольники PAB подобны друг другу и подобны треугольнику PO_1O_2 , где O_1 и O_2 — центры окружностей.

(с) Найдите ГМТ середин отрезков AB .

(д) Докажите, что точки A и B постоянно равноудалены от некоторой фиксированной точки X .

(е) Докажите, что угол QPX — прямой.

2. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке D . Окружность, проходящая через вершины B и C , пересекает сторону AB в точке E и первую окружность вторично в точке F . Оказалось, что точки A, E, D, C лежат на окружности с центром O . Докажите, что угол BFO — прямой.

Указание. Рассмотрите велосипедистов, движущихся из точки F .

3. Дан треугольник ABC и окружность с центром в точке O , проходящая через вершины B и C и повторно пересекающая прямые AB и AC в точках P и Q соответственно. Описанные окружности треугольников APQ и ABC имеют ровно две общие точки A и M . Тогда угол OMA — прямой.

4. (**О бабочке.**) Через точку A , не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна — в точках P_1, P_2 , другая — в точках Q_1, Q_2 . Произвольная прямая, проходящая через A , пересекает окружность в точках M_1, M_2 , а описанные окружности треугольников AP_1Q_1 и AP_2Q_2 — в точках N_1 и N_2 соответственно. Тогда $N_1M_1 = N_2M_2$.

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть его диагонали пересекаются в точке E , точки M и N — их середины. Вокруг треугольников ABE, BEC, CED, DEA описаны окружности, причем первая и третья пересекаются вторично в точке L , вторая и четвертая — в точке K . Доказать, что точки M, K, N, L лежат на одной окружности.

6. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Касательная к окружности ω_1 в точке A пересекает ω_2 в точке C ; касательная к окружности ω_2 в точке A пересекает ω_1 в точке D . Биссектриса угла CAD пересекает ω_1 и ω_2 в точках E и F , соответственно. Внешняя биссектриса угла CAD пересекает ω_1 и ω_2 в точках X и Y , соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку XY касается описанной окружности треугольника BEF .

14. Теорема Хелли. 10 июля

1. (а) На прямой дано $n \geq 2$ попарно пересекающихся отрезков. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.

(б) **Теорема Хелли на прямой.** На прямой дано $n \geq 2$ попарно пересекающихся выпуклых множеств (точки, отрезки, интервалы, лучи). Докажите, что все множества имеют общую точку.

2. На плоскости дано конечное множество многоугольников (не обязательно выпуклых), каждые два из них имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, пересекающая все эти многоугольники.

3. Для любого $n \geq 3$ нарисуйте на плоскости n выпуклых множеств так, чтобы любые два множества имели общую точку, но все множества не имели такой точки.

4. (а) На плоскости дано $n \geq 4$ точек. Докажите, что их можно разбить на 2 множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

(б) Если на плоскости 4 выпуклых множества и любые 3 из них имеют общую точку, то и все множества имеют общую точку.

(с) **Теорема Хелли на плоскости.** Если на плоскости $n \geq 3$ выпуклых множеств и любые 3 из них имеют общую точку, то и все множества имеют общую точку.

5. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трех его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти стороны, попадают на них, а не на их продолжения.

Докажите, что тогда такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.

6. На плоскости проведено n прямых и для каждой прямой выбрали одну из двух полуплоскостей, на которые она делит плоскость. Известно, что выбранные полуплоскости целиком покрывают всю плоскость. Докажите, что можно оставить только 3 полуплоскости, которые также покрывают всю плоскость.

7. На столе сидит n комаров, любых троих из которых можно прибить круглой кружкой радиуса 1. Докажите, что их всех можно прибить этой кружкой одновременно.

8. (а) Стороны остроугольного треугольника не больше 1. Докажите, что радиус описанной окружности не более $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(б) Попарные расстояния между n точками на плоскости не больше 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. На плоскости дано несколько параллельных отрезков, причем для любых трех из них найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все отрезки.

15. Интерполяционный многочлен. 10 июля

Определение. Построение такого многочлена $P(x)$ степени не выше n , что $P(x_i) = y_i$, где $0 \leq i \leq n$, называется *интерполяцией*.

1. (а) Постройте многочлен $\ell(x)$, который принимает нулевые значения в точках x_1, x_2, \dots, x_k , а в остальных точках отличен от нуля.

(б) Постройте многочлен $\ell_k(x)$ степени n , который в точке x_k принимает значение y_k , а в точках x_i — значение 0 ($0 \leq i \leq n, i \neq k$).

(с) **Теорема.** Пусть $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ — вещественные числа. Докажите, что для любых y_1, y_2, \dots, y_n существует единственный многочлен $P(x)$ степени не выше n такой, что $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$. Этот многочлен называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

2. Постройте многочлен $P(x)$ второй степени такой, что $P(1) = 2, P(3) = 13, P(5) = 36$.

3. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трехчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трехчлена.

4. Докажите, что для различных чисел a, b, c и d

$$\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)} = -1.$$

5. Пусть $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что хотя бы одно из чисел $|3^{n+1} - P(n+1)|, \dots, |3^1 - P(1)|, |1 - P(0)|$ не меньше 1.

6. Докажите, что если $P(x)$ — многочлен, степень которого меньше n , то дробь $\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}$ (здесь x_1, x_2, \dots, x_n — произвольные попарно различные числа) может быть представлена в виде суммы n простейших дробей:

$$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n},$$

где A_1, \dots, A_n — некоторые константы.

Определение. Многочлен называется *целозначным*, если в целых точках он принимает целые значения.

7. (b) Докажите, что многочлены вида $C_x^k = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$ — целозначны, $C_x^0 = 1$. Такие многочлены называются *биномиальными*.

(b) Докажите, что всякий целозначный многочлен степени n представляется линейной комбинацией многочленов $C_x^0, C_x^1, \dots, C_x^n$ с целыми коэффициентами.

(c) Если многочлен $P(x)$ степени n целозначен, то $n!P(x)$ имеет целые коэффициенты.

8. **Интерполяционный многочлен Ньютона.** Докажите, что интерполяционный многочлен однозначно определяется формулой

$$P(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + C_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

9. Докажите, что если многочлен f имеет степень n и $|f(x)| \leq 1$ при всех $x \in [0, n]$, то $f(-1) \leq 2^{n+1} - 1$.

16. Тригонометрическая форма комплексных чисел. 11 июля

Определение. Запись $|z| \cos \varphi + i \sin \varphi$, где φ — аргумент числа z , называется *тригонометрической формой комплексного числа z* .

1. Докажите, что

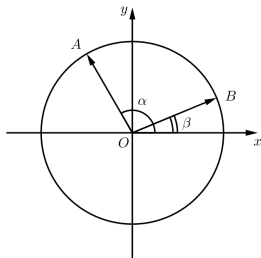
(a) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ (через скалярное произведение векторов OA и OB , на рисунке справа);

(b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$;

(c) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$;

(d) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

2. Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули умножаются (делятся) друг на друга, а аргументы складываются (вычитаются).



Формула Муавра. Докажите, что

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

3. Вычислите значение выражения, представив его в тригонометрической форме:

$$\frac{(1-i)^7(-\sqrt{3}+i)^{10}}{(1+i)^{15}}.$$

Определение. Число ε называется *корнем n -ой степени* $\sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z , если $\varepsilon^n = z$.

4. (а) Вычислите все корни $\sqrt{1}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$. Нарисуйте их на комплексной плоскости.

(б) Выведите формулу для нахождения всех значений корня $\sqrt[n]{1}$. Как эти корни расположены на комплексной плоскости?

(с) Выведите формулу для нахождения всех значений корня $\sqrt[n]{z}$ в тригонометрической форме. Как расположены эти корни на комплексной плоскости?

5. Найдите все значения корня и изобразите их на комплексной плоскости: $\sqrt[4]{1+i}$.

6. Решите уравнение $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

7. Найдите (а) сумму; (б) произведение всех корней $\sqrt[n]{1}$.

8. Докажите следующие равенства:

(а) $\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$;

(б) $\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$;

(с) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$;

9. (а) Докажите, что все корни $\sqrt[n]{1}$ можно представить как степени одного из них (назовем этот корень *первообразным* или *порождающим*).

(б) Сколько существует первообразных корней n -ой степени из единицы?

Корни $\sqrt[n]{1}$ будем обозначать через $\varepsilon_1, \varepsilon, \dots, \varepsilon_n$.

Определение. Корень ε_k n -ой степени из единицы имеет *порядок d* , если d — наименьшее натуральное число такое, что $\varepsilon_k^d = 1$.

10. (а) Пусть $n \in \mathbb{N}$, d — делитель n . Сколько корней уравнения $x^d - 1 = 0$ есть среди чисел $\varepsilon_1, \varepsilon, \dots, \varepsilon_n$? Сколько среди них элементов порядка d ?

(б) Сколько элементов порядка d есть среди чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$?

11. (а) Пусть ε — первообразный корень n -ой степени из единицы. Докажите, что $(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \dots (1 - \varepsilon^{n-1}) = n$.

(б) Докажите, что произведение длин всех сторон и диагоналей, проведенных из одной вершины правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса 1, равно n .

12. Вычислите $\frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 44^\circ}$.

17. Учимся считать. 11 июля

Важная лемма. В треугольнике ABC на прямой AC выбрана точка D . Докажите, что $\frac{\sin \angle ABD}{\sin \angle DBC} = \frac{AD \cdot BC}{DC \cdot AB}$.

Отсюда сразу же имеем два не менее важных следствия.

Синусная теорема Чевы. В треугольнике ABC проведены чевианы AA_1 , BB_1 , CC_1 . Докажите, что они пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{\sin \angle ABB_1}{\sin \angle B_1BC} \cdot \frac{\sin \angle BCC_1}{\sin \angle C_1CA} \cdot \frac{\sin \angle CAA_1}{\sin \angle A_1AB} = 1$.

Замечание. Теорему можно обобщить для случая, когда точка пересечения вне треугольника.

Еще одна важная лемма. В треугольнике ABC проведена чевиана BD . Докажите, что она однозначно определяется отношением $\frac{\sin \angle ABD}{\sin \angle DBC}$.

1. Докажите, что главные диагонали вписанного шестиугольника $AB_1CA_1BC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A.$$

2. На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC во внешнюю сторону построены треугольники BCD , CAE , ABF так, что $\angle BCD = \angle ECA = \varphi$, $\angle CAE = \angle BAF = \theta$, $\angle CBD = \angle ABF = \psi$. Докажите, что прямые AD , BE , CF конкurentны.

3. В треугольник ABC вписана окружность w с центром I , касающаяся сторон AB , BC , CA в точках M , N , P соответственно. T — точка пересечения CI и w . $R = AT \cap MP$, $Q = BT \cap MN$. Докажите, что $RQ \perp IC$.

4. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P таким образом, что $\angle PAD = \angle PCD$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

5. На стороне AB треугольника ABC взяты такие точки X , Y , что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V . Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку.

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_0 , на отрезке AA_0 выбрана точка X . Прямая BX пересекает AC в точке B_0 , а прямая CX пересекает AB в точке C_0 . Отрезки A_0B_0 и CC_0 пересекаются в точке P , а отрезки A_0C_0 и BB_0 пересекаются в точке Q . Докажите, что углы PAC и QAB равны.

7. Пусть AK и AL — *изогонали* (прямые, симметричные относительно диагонали), $\angle ABK = \angle ACL = 90^\circ$. Доказать, что прямые KC и LB пересекаются на высоте AH .

18. Многочлены над \mathbb{Z}_p . 12 июля

Определение. Множество всех остатков (вычетов) по модулю n обозначим \mathbb{Z}_n . В случае, если n простое, для удобства будем писать \mathbb{Z}_p .

Определим многочлен над \mathbb{Z}_n как формальную запись $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, где коэффициенты $a_i \in \mathbb{Z}_n$, $a_m \neq 0$. Множество таких многочленов обозначается $\mathbb{Z}_n[x]$.

1. (а) Докажите, что если два многочлена $P, Q \in \mathbb{Z}_p[x]$, то $\deg PQ = \deg P + \deg Q$.

(б) Приведите пример, когда это неверно для составного n .

2. Докажите, что для формальных многочленов над \mathbb{Z}_p выполняется теорема о делении с остатком: для многочленов $A(x)$ и $B(x) \neq 0$ существуют единственные многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ такие, что $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ и $\deg R < \deg B$.

3. (а) Сформулируйте и докажите теорему Безу для многочленов над \mathbb{Z}_p .

(б) Докажите, что количество корней многочлена не превосходит его степени.

(с) Приведите пример многочлена над \mathbb{Z}_n , количество корней которого больше его степени (в случае составного n). Объясните, в какой момент «ломается» доказательство предыдущего пункта.

4. Используя теорему Безу, разложите на множители многочлен $x^{p-1} - 1$ и докажите теорему Вильсона: для любого простого p число $(p-1)! + 1$ делится на p .

5. (а) Приведите пример ненулевого многочлена $P \in \mathbb{Z}_p[x]$ такого, что $P(x) = 0$ во всех точках $x \in \mathbb{Z}_p$.

(б) Докажите, что для любого многочлена существует многочлен степени не выше $p-1$, совпадающий с ним по модулю p во всех точках.

(с) Докажите, что если два многочлена степени не выше $p-1$ совпадают по модулю p по всех точках, то они равны формально.

6. Дана произвольная функция $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$. Докажите, что существует многочлен степени не выше $p-1$, совпадающий с f по модулю p во всех точках.

7. Пусть $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, p — простое число. Оказалось, что $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$, и при любом натуральном k число $Q(k)$ дает остаток 0 или 1 при делении на p . Докажите, что $\deg Q \geq p-1$.

19. Матбой. 12 июля

1. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к отрезку BH пересекает стороны BA , BC в точках A_0 , C_0 соответственно. Докажите, что периметр треугольника A_0C_0O (где O — центр описанной окружности ABC) равен AC .

2. Решите систему уравнений $a^3 + b = c, b^3 + c = d, c^3 + d = a, d^3 + a = b$.
3. На плоскости проведено несколько прямых общего положения. Наoko начинает движение в некоторой точке на одной из прямых. Как только она доходит до точки пересечения прямых, она сворачивает на другую прямую и продолжает движение вдоль неё. Докажите, что Наoko не сможет пройти один и тот же отрезок в разных направлениях.
4. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Точка M лежит на дуге BC , прямая AM пересекает BD в точке P , прямая DM пересекает AC в точке Q . Докажите, что площадь четырёхугольника $APQD$ равна половине площади квадрата.
5. Вася записал числа $1, 2, \dots, 40$ на двадцати карточках, на каждой стороне каждой карточки — по числу. Затем он выложил карточки на стол. Петя видит лишь верхние числа; он может выбрать любой набор карточек и перевернуть их. Он выиграет, если после этого сумма чисел на верхних сторонах карточек будет не меньше k . При каком наибольшем k Петя гарантированно может выиграть?
6. Дан ориентированный граф. В каждой вершине число входящих в неё и исходящих из неё рёбер одинаково и не меньше двух (степени разных вершин при этом могут быть различными). Известно, что из любой вершины существует ориентированный путь до любой другой. Докажите, что из этого графа можно удалить все рёбра некоторого ориентированного цикла так, чтобы по-прежнему из любой вершины существовал ориентированный путь до любой другой.
7. Для каждого натурального n положим $E(n) = n(n+1)(2n+1) \dots (10n+1)$. Найдите наибольший общий делитель чисел $E(1), E(2), \dots, E(2019)$.
8. Два многочлена четвертой степени $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ и $g(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ отличаются друг от друга перестановкой коэффициентов. Известно, что $a_i \neq b_i$ при всех $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Может ли оказаться, что $f(x) \geq g(x)$ при всех вещественных x ?

20. Симедианы. 14 июля

Во всех задачах этого листочка будут использованы одни и те же обозначения. Буквы, отличные от X , Y и Z (для этих букв обозначения вводятся каждый раз заново), которые определены в задачах, будут использованы в последующих.

В треугольнике ABC проведена медиана BM . Тогда прямая, симметричная относительно биссектрисы угла B этой медиане, называется *симедианой*. Пусть H — ортоцентр этого треугольника, а H_a , H_b , H_c — основания высот из точек A , B и C , ω — его описанная окружность с центром O , пусть K , N — середины AB и BC .

1. Симедиана из вершины B пересекает прямую AC в точке S . Докажите, что
(а) отношения расстояний от точки S до сторон AB и BC равно отношению этих сторон;

$$(b) \frac{AS}{SC} = \frac{AB^2}{BC^2}.$$

2. Докажите, что симедианы пересекаются в одной точке L — *точке Лемуана*.

3. Пусть X и Y — основания перпендикуляров, опущенных из точки H_b на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что BM — симедиана треугольника $X Y B$.

4. Прямые BS и BM пересекают окружность ω в точках Q и R соответственно. Докажите, что $MR = MQ$.

5. **Первая картинка.** (a) Пусть точка P такова, что $\angle PAB = \angle PBC$ и $\angle ABP = \angle BCP$. Докажите, что точка P лежит на симедиане. Почему такая точка всегда существует?

(b) Докажите, что $BKPN$ — вписанный.

6. **Вторая картинка.** Касательные к ω в точках A и C пересекаются в точке T . Докажите, что BT — симедиана треугольника ABC . Что можно сказать в случае, когда касательные не пересеклись?

Подсказка. Проведите окружность с центром T и радиусом TA , отметьте вторые точки пересечения этой окружности с прямыми AB и BC и докажите, что они лежат на одной прямой с T .

7. Пусть I — инцентр треугольника ABC . Докажите, что симедиана из вершины I треугольника AIC пересекает ω в середин дуги ABC .

8. Оказалось, что $BC \parallel AT$. Докажите, что прямая CQ делит отрезок AT пополам.

9. Высота BH_b пересекает ω в точке B' . Докажите, что точка пересечения ω и описанной окружности треугольника $B'H_bM$, отличная от B' , лежит на симедиане.

21. Орграфы — 2. 14 июля

Be who you needed when you were younger.

просторы интернета

Определение. *Турниром* называется ориентированный граф, в котором между любыми двумя вершинами существует ровно одно ориентированное ребро.

Теорема. В любом сильносвязном турнире на n вершинах для любого $3 \leq k \leq n$ найдётся хотя бы $n - k + 1$ различных несамопересекающихся циклов длины k , причем существует сильносвязный турнир, в котором их ровно $n - k + 1$.

1. Составьте сильносвязный турнир на пяти вершинах, в котором один цикл длины пять, два цикла длины четыре и три цикла длины три.

2. Докажите, что турнир является сильносвязным тогда и только тогда, когда в нем есть несамопересекающийся цикл, идущий по направлениям стрелок на ребрах и проходящий по всем вершинам графа.

3. Докажите, что в сильносвязном турнире через любую вершину проходит несамопересекающийся цикл (идущий по направлениям стрелок на ребрах) длины (а) три; (б) любой длины от трех до n .

4. Докажите, что существует сильносвязный турнир на n вершинах, в котором (а) $n - 2$ циклов длины три; (б) $n - 3$ несамопересекающихся циклов длины четыре; (с) $n - k + 1$ несамопересекающихся циклов длины k .

5. Докажите, что в любом сильносвязном турнире на n вершинах, по крайней мере (а) $n - 2$ цикла длины три; (б) $n - k + 1$ несамопересекающихся циклов длины k .

6. Докажите теорему.

22. Квадратичные вычеты. 15 июля

Пусть p — нечетное простое число. Рассмотрим уравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$.

Определение. Если для $a \neq 0$ существует решение уравнения, то a называется *квадратичным вычетом по модулю p* . В противном случае a — *квадратичный невычет*.

1. (а) Сколько корней может иметь уравнение $x^2 \equiv a \pmod{p}$ в зависимости от a ?

(б) Докажите, что среди ненулевых остатков по модулю p ровно половина являются квадратичными вычетами.

2. Докажите следующие свойства произведений квадратичных вычетов:

(а) вычет \times вычет = вычет;

(б) вычет \times невычет = невычет;

(с) невычет \times невычет = вычет.

Определение. Символом Лежандра называют выражение $\left(\frac{a}{p}\right)$, причем:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \text{ — кв. вычет,} \\ -1, & \text{если } a \text{ — кв. невычет,} \\ 0, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

3. Докажите, что $\left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$.

4. (а) Используя малую теорему Ферма, докажите, что если a — квадратичный вычет, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$.

(б) Используя теорему Вильсона, докажите, что если a — квадратичный невычет, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$.

Критерий Эйлера. Если p — нечетное простое число, то $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv_p a^{\frac{p-1}{2}}$.

5. Для остатка $a \neq 0$ рассмотрим множество остатков $A = \{a, 2a, \dots, \frac{p-1}{2}a\}$. Пусть n — количество остатков в A , больших $\frac{p}{2}$.

(а) Докажите, что если в каждый из остатков $k > \frac{p}{2}$ заменить на $p - k$, то полученное множество B совпадает с множеством $\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$.

(б) Докажите, что $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p (-1)^n$.

Критерий Гаусса. Если p — нечетное простое число, a не делится на p , то

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^n.$$

6. Вычислите $\left(\frac{3}{47}\right)$, используя оба критерия.

7. Докажите, что число $x^2 + 1$ не может иметь простых делителей вида $4k + 3$.

8. **Теорема Жирара.** Пусть простое p имеет вид $4k + 3$. Докажите, что если $x^2 + y^2 \vdots p$, то тогда обязательно $x \vdots p$ и $y \vdots p$.

9. Докажите, что простых чисел вида $4k + 1$ бесконечно много.

10. Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ не имеет решений в натуральных числах.

11. Решите уравнение в целых числах: $x^3 + 7 = y^2$.

23. Гармонический четырехугольник. 15 июля

Напоминание. Симедианой из вершины B треугольника ABC называется

(а) прямая, которая изогональна медиане;

(б) чевиана, которая делит сторону AC в отношении $\frac{AB^2}{BC^2}$;

(с) прямая, проходящая через точку пересечения касательных в точках A и C ;

(д) прямая, содержащая такую точку X , что ABX подобен BCX .

Здесь, как и раньше, обозначения в 1–5 задачах одинаковые.

1. Симедиана из вершины B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D . Пусть M — середина AC . Докажите, что $\angle BMA = \angle AMD$.

2. Точка F — пересечение касательной в точке B и AC , O — центр ω .

(а) Докажите, что $BOMDF$ — вписанный.

(б) Докажите, что FD — касательная к ω .

Важное следствие. Если вписанный четырехугольник $ABCD$ таков, что касательные в точках A и C пересекаются на диагонали BD , то касательные в точках B и D пересекаются на AC . Другими словами, каждая диагональ является симедианой двух треугольников.

3. Докажите, что биссектрисы углов ABC и CDA пересекаются на диагонали AC , и $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

Определение. Вписанный четырехугольник $ABCD$ такой, что $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ называется *гармоническим*.

4. Докажите, что по трем точкам A, B, C однозначно восстанавливается четвертая вершина D гармонического четырехугольника $ABCD$.

5. Докажите равносильность следующих свойств вписанного четырехугольника $ABCD$:

- (a) $AB \cdot CD = BC \cdot AD$;
- (b) BD — симедиана ABC ;
- (c) касательные в точках A и C пересекаются на BD ;
- (d) $\angle BMA = \angle AMD$;
- (e) биссектрисы ABC и ABD пересекаются на AC .

Теперь обозначения в условиях независимы.

6. Пусть AB, CD — параллельные хорды окружности ω , M — середина AB , E — пересечение ω и MC , K — середина ED . Докажите, что $\angle EKA = \angle EKB$.

7. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B и внутренне касаются окружности ω в точках C и D . Прямая AB пересекает окружность ω в точках E и F . Докажите, что касательные к окружности ω в точках E и F пересекаются на прямой CD .

8. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник, а M — середина хорды, высекаемой диагональю AC . Докажите, что $\angle BMA = \angle DMA$.

24. Комплексные числа в геометрии. 16 июля

Договоримся через z обозначать комплексную координату точки Z комплексной плоскости.

1. Пусть z_0 — некоторое фиксированное комплексное число. Какие преобразования комплексной плоскости задают следующие функции:

- (a) $w(z) = z + z_0$;
- (b) $w(z) = \bar{z}$;
- (c) $w(z) = z \cdot z_0$, где $|z_0| = 1$;
- (d) $w(z) = r \cdot z$, где $r \in \mathbb{R}$;
- (e) $w(z) = z_0 \cdot z$.

2. Дан правильный треугольник ABC и комплексная координата вершины A . Найдите комплексную координату вершины B для положительно ориентированного треугольника ABC , если за начальную точку принята

- (a) вершина C ;
- (b) центр треугольника ABC ;

(с) основание высоты AA_1 .

3. (а) Пусть A и B — концы отрезка, разделённого точкой C в отношении $p : q$. Докажите, что $c = \frac{q}{p+q}a + \frac{p}{p+q}b$.

(б) Выразите комплексное число, соответствующее точке пересечения медиан треугольника с вершинами a , b и c .

4. Докажите, что (а) квадрат длины отрезка $|AB|^2 = (b-a)(\bar{b}-\bar{a})$;

(б) $z\bar{z} = 1$ — уравнение единичной окружности с центром в точке 0.

(с) Напишите уравнение окружности радиуса r с центром в точке a .

5. Докажите, что

(а) $OA \parallel OB \leftrightarrow$ когда $\frac{a}{b}$ — вещественное число $\leftrightarrow a\bar{b} = \bar{a}br$;

(б) $AB \parallel DC \leftrightarrow$ когда $\frac{b-a}{d-c}$ — вещественное число $\leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) = (\bar{a}-\bar{b})(c-d)$;

(с) **Критерий коллинеарности трех точек.** Три точки A , B , C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-c}{b-c} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}$.

6. Докажите, что

(а) $OA \perp OB \leftrightarrow \frac{a}{b}$ — чисто мнимое число $\leftrightarrow a\bar{b} + \bar{a}b = 0$;

(б) $AB \perp CD \leftrightarrow \frac{a-b}{c-d}$ — чисто мнимое число $\leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d) = 0$.

7. Пусть A , B , C , D — точки единичной окружности с центром в O . Докажите, что

(а) $AB \parallel CD \leftrightarrow ab = cd$;

(б) $AB \perp CD \leftrightarrow ab + cd = 0$.

8. Пусть A , B — точки единичной окружности с центром в O . Докажите, что

(а) $z + ab\bar{z} = a + b$ — уравнение прямой AB ;

(б) $\bar{a}z + a\bar{z} = 2$ — уравнение касательной к единичной окружности в точке A ;

(с) $\frac{1}{2}(a+b+m-ab\bar{m})$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AB ;

(д) $\frac{2ab}{a+b}$ — точка пересечения касательных к единичной окружности в точках A и B .

9. Докажите, что точки A , B , C , D лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда двойное отношение $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$ —

вещественное число $\leftrightarrow \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{a}-\bar{d}} : \frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{d}}$.

10. Пусть треугольник ABC вписан в единичную окружность. Докажите, что координата его ортоцентра равна $h = a + b + c$ (для вывода можно вспомнить прямую Эйлера).

11. Пусть вписанная окружность треугольника ABC является единичной и касается сторон BC , AC , AB в точках P , Q , R . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC имеет координату $\frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}$.

25. Математический бой обычных групп М8 – М9. 16 июля

1. Число считается счастливым, если равняется частному от деления некоторого натурального числа x на количество делителей x . Является ли число 18 счастливым?

2. Точка H — ортоцентр треугольника ABC . Пусть D , E и F — середины AB , AC и AH соответственно, P и Q — образы точек B и C при центральной симметрии относительно F . Докажите, что PE и QD пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC .

3. Для попарно различных неотрицательных чисел a , b , c докажите неравенство

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} > 2.$$

4. В каждой клетке шахматной доски $n \times n$ записано число таким образом, что суммы чисел по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям равны одному и тому же числу S . При каких n можно определить, чему равна сумма чисел в угловых клетках.

5. Для нечетного k , натурального n и целых a , b , c известно, что

$$a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka.$$

Докажите, что $a = b = c$.

6. Несколько игроков участвуют в соревновании. Каждый сыграл с каждым один раз. Ничьих не бывает. Игрок A считается *отличным*, если выполняется следующее условие: для любого другого игрока либо A бьет B , либо существует другой игрок C , который бьет B , A и бьет C . Оказалось так, что есть только один отличный игрок, докажите, что этот игрок победил всех других игроков.

7. Проектор освещает угол в 90 градусов. Если он стоит в точке (x_0, y_0) , то освещает точки (x, y) с координатами $x \leq x_0$ и $y \leq y_0$. На плоскость в разных точках уже выставили 2019 зеленых прожекторов. Всегда ли можно установить еще 2018 желтых прожекторов так, что всякая точка плоскости, освещенная $k > 0$ зеленым прожектором, будет освещаться $k - 1$ желтым прожектором.

8. Депутаты в парламенте разделены на 10 фракций. Согласно регламенту, ни одна фракция не может состоять из менее чем пяти человек, и никакие две фракции не могут иметь одинаковое количество членов. После отпуска фракции

распались, и вместо них возникло несколько новых (по тому же регламенту). Кроме того, некоторые депутаты стали независимыми. Оказалось, что нет двух депутатов, которые были в одной фракции до отпуска и вошли в ту же фракцию после отпуска. Найдите наименьшее возможное количество независимых депутатов после отпуска.

26. Математический бой обычных групп М9 – М10. 16 июля

1. В некоторой точке окружности длины 1 стоит мальчик, еще в 10 различных точках окружности стоят флажки. Мальчик хочет собрать все флажки (относить их никуда не нужно). Он может передвигаться только по окружности. Известно, что вне зависимости от начального расположения флажков он может собрать все, преодолев дистанцию длины не больше L . Найдите минимальное значение L , для которого это верно.

2. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Известно, что при любом целом n число $P(n)$ делится на a или b . Докажите, что при любом целом n число $P(n)$ делится на a или при любом целом n число $P(n)$ делится на b .

3. Последовательность 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, ... строится следующим образом: первый член равен 1, а каждый следующий является «прочтением» слева направо предыдущего. Например, число 111221 читается как «три единицы, две двойки, одна единица», и получается 312211 (блок из одинаковых цифр всегда прочитывается целиком). Докажите, что эта последовательность монотонно возрастает.

4. Каждое из 2019 натуральных чисел взаимно просто с одним и тем же количеством остальных, но не со всеми. При каком наименьшем k можно утверждать, что среди любых k из наших чисел найдутся два, имеющих общий делитель, больший 1?

5. Аня и Боря играют в игру на квадрате 6×6 . Каждый по очереди ставит в одну из клеток квадрата любое число (первой ставит Аня). Ставить число, встречавшееся ранее, не разрешается. Когда все клетки заняты, в каждой строке закрашивается клетка с наибольшим в этой строке числом. Если можно пройти по соседним закрашенным клеткам из верхней строки в нижнюю, победила Аня. Если пройти нельзя — Боря. Кто выиграет при правильной игре? (Клетки считаются соседними, если они имеют хотя бы одну общую вершину)

6. Найдите все простые p такие, что уравнение $p^n = x^3 + y^3$ имеет решение в натуральных числах.

7. Пусть a, b, c, d — вещественные числа, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} (a+b)(c+d) = 2, \\ (a+c)(b+d) = 3, \\ (a+d)(b+c) = 4. \end{cases}$$

Найдите минимальное возможное значение выражения $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

8. В остроугольном треугольнике ABC угол A больше угла C . На стороне AC взята точка D такая, что $AB = BD$. Точка G — центр вписанной окружности треугольника BDC . Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что отрезок KL делит отрезок AG пополам.

9. Внутри круга радиуса $n \in \mathbb{N}$ расположено $4n$ отрезков длины 1 каждый (концы всех отрезков лежат внутри круга). Докажите, что если дана некоторая прямая, то найдется прямая либо параллельная, либо перпендикулярная данной, которая пересекает как минимум 2 отрезка.

10. Пусть треугольник ABC является остроугольным, где $\angle BAC = 60^\circ$ и $AB > AC$. Пусть I является центром вписанной окружности, H — ортоцентром треугольника ABC . Докажите, что $2\angle AHI = 3\angle ABC$.

27. Окружность Аполлония и гармония. 17 июля

1. (а) На прямой AB отмечена точка E , отличная от середины отрезка AB . Докажите, что существует единственная такая точка $F \neq E$ на прямой AB , что $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FB}$. (Такая четверка точек A, B, E и F называется *гармонической*.) Что происходит в случае, когда E — середина?

(б) На отрезке AB отмечена точка C . Найдите ГМТ X таких, что XC — биссектриса треугольника XAB .

(с) Для двух данных точек A и B постройте ГМТ таких точек X , что $\frac{AX}{XB} = k$, где k — некоторое положительное число. Что происходит, когда $k = 1$?

Определение. ГМТ из предыдущей задачи (при $k \neq 1$) называют *окружностью Аполлония*.

2. (а) Пусть AB — диаметр некоторой окружности, а точка D лежит на луче AB вне окружности. DP и DQ — касательные к этой окружности. PQ пересекает AB в точке C . Докажите, что четверка точек A, B, C и D — гармоническая.

(б) Докажите, что для любой точки X этой окружности отрезок XB является биссектрисой треугольника CXD .

3. Через вершину A треугольника ABC проведена касательная к его описанной окружности, которая пересекла прямую BC в точке K . Докажите, что K

является центром окружности Аполлония точек B и C , проходящей через точку A .

4. Докажите, что точки пересечения окружности Аполлония для отрезка AB и окружности ω , проходящей через A и B , образуют с точками A и B гармонический четырехугольник.

5. Точки A и B лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды с общим концом.

6. Докажите, что три окружности Аполлония, построенные для любой пары двух вершин и проходящие через третью, пересекаются в двух точках. Такие точки называются *точками Аполлония*.

Замечание. Очевидно, что расстояния от точки Аполлония до вершин обратно пропорциональны противолежащим сторонам. Это равносильное определение.

7. Пусть Ap_1, Ap_2 — точки Аполлония для треугольника ABC . Докажите, что A — точка Аполлония для треугольника Ap_1BC .

8. Докажите, что если L — точка Лемуана треугольника ABC , O — центр описанной окружности радиуса R , а Ap_1, Ap_2 — точки Аполлония, то

(a) Ap_1, Ap_2, L лежат на одной прямой;

(b) степень точки O относительно окружностей Аполлония равна R^2 ;

(c) точки Ap_1, Ap_2, O, L лежат на одной прямой.

9. Четыре шара лежат на плоскости и попарно касаются друг друга. Тогда каждая из точек касания является точкой Аполлония для оставшихся трех точек.

28. Клеточки! Клеточки! 17 июля

1. У Алёши есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алёша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Серёжа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос — и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Серёжа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алёшей равно количеству различных чисел среди записанных Серёжей.

2. a_1, a_2, \dots, a_n — произвольные натуральные числа. Обозначим через b_k количество чисел из набора a_1, a_2, \dots, a_n , удовлетворяющих условию: $a_i \geq k$. Доказать, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots$

3. На доске написали несколько натуральных чисел. Пусть a_n — количество тех из них, которые не меньше n . Исходные числа стерли и вместо них написали

все ненулевые a_n . Затем с новыми числами проделали то же самое. Докажите, что на доске появился исходный набор.

4. Докажите, что количество разбиений числа N на не более чем m слагаемых равно числу разбиений числа $N + m$ ровно на m слагаемых.

5. Докажите, что количество разбиений числа N на не более чем m слагаемых ровно столько же, сколько способов разбить число $N + \frac{m(m+1)}{2}$ на m попарно различных слагаемых.

6. Рассматриваются всевозможные наборы из 100 неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке и не превосходящие 100, в которых сумма всех чисел делится на 10. Докажите, что ровно половина этих наборов заканчивается числом 100.

7. Пусть S — множество всех пар натуральных чисел (h, k) таких что $h + k \leq n$. Каждый элемент S покрашен в оранжевый или синий цвет, причём, если (h, k) — оранжевый, и $h_0 \leq h$, $k_0 \leq k$, то (h_0, k_0) — тоже оранжевый. Будем называть n -элементное множество синих пар из S *забавным*, если первые числа любых пар в нём различны, *весёлым* — если вторые. Докажите, что забавных подмножеств столько же, сколько весёлых.

8. Докажите, что количество разбиений числа N на нечетные слагаемые равно количеству разбиений числа N на попарно различные слагаемые (подсказка: модифицируйте диаграмму Юнга до осесимметричной).

29. Мнимые знания. 19 июля

Вспомним формулы из предыдущего листика.

♡ В треугольнике ABC центроид имеет координату $m = \frac{a+b+c}{3}$, ортоцентр (если описанная окружность — единичная с центром в 0) — $h = a + b + c$.

♡ Пусть A, B, C и D — точки единичной окружности с центром в 0. Тогда

$$AB \parallel CD \iff ab = cd; \quad AB \perp CD \iff ab + cd = 0.$$

♡ Пусть A и B — точки единичной окружности с центром в 0. Тогда

- $z + ab\bar{z} = a + b$; — уравнение прямой AB ;
- $\bar{a}z + a\bar{z} = 0$ — уравнение касательной к единичной окружности в точке A ;
- $\frac{1}{2}(a+b+m-ab\bar{m})$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки \bar{M} на прямую AB ;

- $\frac{2ab}{a+b}$ — точка пересечения касательных к единичной окружности в точках A и B .

1. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты.
(а) Выразите координаты центров квадратов через координаты вершин параллелограмма.

(б) Докажите, что центры построенных квадратов образуют квадрат.

2. Теорема Ньютона. Докажите, что в описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.

3. Докажите, что для треугольника ABC с центром описанной окружности O и ортоцентром H выполняется

$$OH^2 = 9OR^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

4. Даны окружность с центром O и точка M . Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до концов хорды, параллельной OM , не зависит от выбора хорды.

5. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AC и BC взяты точки M и N так, что $AM = BC$ и $AM = NB$. Докажите, что угол между отрезками AN и MB равен 45° .

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что ортоцентры треугольников BCD , CDA , DAB и ABC лежат на одной окружности, равной длины.

7. Пусть A, B, C, D — четыре точки на окружности с центром O . Точки A_C, A_D — проекции точки A на BC и BD соответственно; точки B_C, B_D — проекции точки B на AC и AD соответственно. Точки H_A и H_B — ортоцентры треугольников ACD и BCD соответственно. Докажите, что если $A_C A_D \perp OH_B$, то $B_C B_D \perp OH_A$.

8. Точки M и N внутри треугольника ABC таковы, что $\angle MAB = \angle NAC$ и $\angle MBA = \angle NBC$. Докажите, что

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

30. Приводимость над $\mathbb{Z}[x]$. 19 июля

1. (а) Дан многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$. Пусть целое число q является корнем $P(x)$. Докажите, что свободный член $P(x)$ делится на q .

(б) Пусть несократимая дробь q/r является корнем $P(x)$. Докажите, что свободный член $P(x)$ делится на q , а коэффициент при старшем члене делится на r .

(с) Докажите, что если $P(x)$ — приведенный многочлен, то любой его рациональный корень является целым числом.

(d) Для случая из пункта (b) докажите, что для любого целого n число $P(n)$ делится на $rn - q$.

Определение. Многочлен называется *приводимым* над $\mathbb{Z}[x]$, если существуют $Q, R \in \mathbb{Z}[x]$ меньшей степени такие, что $P(x) = Q(x)R(x)$. В противном случае $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$.

2. Приводимы ли над $\mathbb{Z}[x]$ многочлены: (a) $x^3 + 2$; (b) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$?

3. Пусть $P, Q, R \in \mathbb{Z}[x]$, причем $P(x) = Q(x)R(x)$. Известно, что все коэффициенты многочлена $P(x)$ делятся на некоторое простое число p . Докажите, что либо все коэффициенты $Q(x)$, либо все коэффициенты $R(x)$ делятся на p .

4. Пусть $P, Q, R \in \mathbb{Z}[x]$, причем $P(x) = Q(x)R(x)$. Обозначим НОД всех коэффициентов $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ за a , b и c соответственно. Докажите, что $a = bc$.

Определение. НОД всех коэффициентов многочлена с целыми коэффициентами называется *содержанием* многочлена.

5. (a) Докажите, что любой многочлен $P \in \mathbb{Q}[x]$ можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}Q(x)$, где $Q \in \mathbb{Z}[x]$, причем содержание многочлена $Q(x)$ равно 1.

(b) Докажите, что если многочлен $P \in \mathbb{Z}[x]$ приводим над $\mathbb{Q}[x]$, то он приводим и над $\mathbb{Z}[x]$.

6. (a) **Критерий Эйзенштейна.** Пусть $P \in \mathbb{Z}[x]$, причем старший коэффициент не делится на простое число p , все остальные коэффициенты делятся на p , но свободный член не делится на p^2 . Докажите, что тогда $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$.

(b) Приведите пример многочлена, для которого обратное утверждение неверно.

Лемма. Пусть a — целое. Если многочлен $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$, то $P(x + a)$ — тоже.

7. Докажите, что следующие многочлены неприводимы над $\mathbb{Z}[x]$:

(a) $15x^5 + 18x^4 - 9x^2 + 27x - 36$;

(b) $x^4 + 1$;

(c) $x^6 + x^3 + 1$;

(d) $x^{n+1} + 5x^n - 3$.

8. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$ тогда и только тогда, когда p — простое число.

9. Докажите, что многочлен $P(x) = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n) - 1$, где a_1, \dots, a_n — различные целые числа, неприводим над $\mathbb{Z}[x]$.

31. Первообразный корень. 20 июля

Определение. Показателем остатка x по модулю n называется наименьшая положительная степень t такая, что $x^t \equiv 1 \pmod{n}$. Если $t = \varphi(n)$, то x называется первообразным корнем по модулю n .

1. Рассмотрим уравнение $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ для некоторого простого p . Для каждого решения этого уравнения обозначим его показатель t по модулю p . Докажите следующие утверждения:

- (a) уравнение имеет $p - 1$ решений;
- (b) t — делитель $p - 1$;
- (c) если существует остаток y с показателем t , то уравнение $x^t \equiv 1 \pmod{p}$ имеет ровно t решений (какие?);
- (d) если остаток z имеет показатель t , то z представимо в виде y^k , причем $(k, t) = 1$;
- (e) существует либо $\varphi(t)$ остатков с показателем t , либо ни одного.

2. (a) Рассмотрим дроби $\frac{1}{p-1}, \frac{2}{p-1}, \dots, \frac{p-1}{p-1}$. Сократим все дроби. Пусть t — делитель числа $p - 1$. Сколько дробей будут иметь знаменатель, равный t ?

(b) **Лемма Гаусса.** Докажите формулу (суммирование по всем делителям числа $p - 1$):

$$\sum_{t|p-1} \varphi(t) = p - 1.$$

(c) Улучшите результат задачи 1(e), то есть докажите, что существует ровно $\varphi(t)$ остатков с показателем t , если t — делитель $p - 1$, и 0 — иначе.

Теорема. По простому модулю p существует ровно $\varphi(p - 1)$ первообразных корней.

3. Найдите все первообразные корни по модулям 5, 13, 6.

4. Чтобы проверить, является ли остаток a (такой, что $(a, n) = 1$) первообразным корнем по модулю n , нужно разложить на простые множители $\varphi(n) =$

$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ и проверить, что ни одно из чисел вида a^{p_i} не сравнимо с 1. Объясните этот способ.

5. n и k — натуральные числа. Докажите, что если не существует первообразного корня по модулю n , то не существует и по модулю kn .

6. Докажите, что для любого простого p первые $p - 1$ натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы для любых трех подряд идущих чисел a, b, c разность $b^2 - ac$ делилась на p .

7. Докажите, что при любом натуральном k , где $(k, 2016) = 1$, верно:

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + 2016^k \equiv 1^k + 2^k + 2^{2k} + \dots + 2^{2015k} \pmod{2017}.$$

(Число 2 является первообразным корнем по простому модулю 2017.)

8. (а) Пусть $n = 4q$, где q — нечетное простое, $(a, n) = 1$. Может ли показатель числа a по модулю n быть равным $\varphi(n)$?

(б) Пусть $n = pq$, где p и q — различные нечетные простые числа, $(a, n) = 1$. Может ли показатель числа a по модулю n быть равным $\varphi(n)$?

9. Докажите, что не существует первообразных корней по модулям, отличным от 2, 4, p^k , $2p^k$.

10. Докажите, что при любом натуральном n число 2 является первообразным корнем по модулю 3^n .

32. Другая симметрия. 20 июля

Определение. Многочлен f от n переменных называется *симметрическим*, если для любой перестановки чисел $1, 2, \dots, n$, обозначенной через σ ,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Обозначим через

$$\sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$\sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n,$$

\vdots

$$\sigma_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 \dots x_{n-1} + x_1 \dots x_{n-2}x_n + \dots + x_2 \dots x_{n-1}x_n,$$

$$\sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 \dots x_n.$$

Будем называть такие многочлены *элементарными симметрическими*.

0. а) Сколько одночленов в σ_k ?

б) Докажите, что если f_1, f_2 — симметрические многочлены от n переменных, а c — произвольная вещественная константа, то $cf_1, f_1 + f_2, f_1f_2$ симметрические.

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены

(а) $x^2 + y^2 + z^2$; (б) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$;

(с) $x^3 + y^3 + z^3$; (д) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$.

2. **Теорема Виета.** (а) Пусть c_1, c_2 и c_3 — корни многочлена $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Докажите, что

$$a_2 = -(c_1 + c_2 + c_3), \quad a_1 = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1, \quad a_0 = -c_1c_2c_3.$$

(б) Пусть c_1, c_2, \dots, c_n — корни многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$. Тогда для любого натурального $1 \leq k \leq n$

$$a_k = (-1)^k \sigma_{n-k}(c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Определение. Будем говорить, что одночлен $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ *лексикографически больше* одночлена $x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ в том и только том случае, когда $(i_1, i_2, \dots, i_n) \succ (j_1, \dots, j_n)$. Страшим членом называется наибольший в лексикографическом смысле.

Теорема. Любой симметрический многочлен $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ единственным образом представляется в виде

$$f = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n),$$

где $g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ зависит только от f .

3. (а) Докажите теорему для $n = 2$.

(b) Пусть $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ — старший член симметрического многочлена f . Докажите, что $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$.

(с) Выразите через элементарные симметрические какой-нибудь многочлен со старшим членом $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$.

(d) Докажите, что нужный многочлен g существует.

(е) Докажите, что нужный многочлен g единственный.

Подсказка: лексикографически уменьшайте старший член...

Комментарий: при доказательстве теоремы нельзя пользоваться самой теоремой!

4. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа

(а) $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$, $y_3 = x_1 + x_2$;

(b) $y_1 = x_2x_3$, $y_2 = x_1x_3$, $y_3 = x_1x_2$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 42, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 60. \end{cases}$$

6. Пусть

$$\begin{aligned} x + y + z &= u + v + t, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= u^2 + v^2 + t^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= u^3 + v^3 + t^3. \end{aligned}$$

Докажите, что при любом натуральном n выполнено $x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + t^n$.

7. Положительные действительные числа a_1, \dots, a_n и k таковы, что $a_1 + \dots + a_n = 3k$, $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + \dots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Докажите, что какие-то два из чисел a_1, \dots, a_n отличаются больше чем на 1.

33. Теория Рамсея. 21 июля

Определение. Числом Рамсея $R(m, n)$ (m, n — натуральные числа) называется наименьшее натуральное число такое, что полный граф на $R(m, n)$ вершинах, ребра которого покрашены в красный и синий цвета, содержит либо полный красный подграф на n вершинах, либо полный синий подграф на m вершинах.

Теорема Рамсея. $R(m, n)$ существует для любых натуральных m и n .

1. Найдите $R(1, n)$, $R(2, n)$.
2. Докажите:
 - (a) $R(3, 3) \leq 6$;
 - (b) $R(3, 4) \leq 9$;
 - (c) $R(3, 3) = 6$;
 - (d) $R(4, 4) \leq 18$.
3. Докажите:
 - (a) $R(m, n) \leq R(m, n-1) + R(n, m-1)$ для $m, n \geq 2$;
 - (b) $R(m, n) \leq C_{m+n-2}^{m-1}$;
 - (c) Докажите теорему Рамсея.

Определение. Многоцветным числом Рамсея $R(n_1, n_2, \dots, n_l)$ называется наименьшее натуральное число такое, что всякая раскраска в l цветов полного графа на $R(n_1, n_2, \dots, n_l)$ вершинах содержит полный подграф цвета c на n_c вершинах.

4. Найдите точное значение $R(3, 4)$.
5. Докажите, что $9 < R(3, 3, 3) \leq 17$.
6. **Теорема Шура.** Все натуральные числа покрашены в несколько цветов. Тогда можно выбрать три одноцветных числа x , y и z , для которых $x + y = z$.
7. Доказать, пользуясь Теоремой Шура, что для любого $m \in \mathbb{N}$ и для любого достаточно большого простого числа p сравнение $x^m + y^m \equiv z^m (p)$ имеет нетривиальное решение.

34. Дама с собачкой. 21 июля

Основная теорема алгебры (ОТА). Любой многочлен степени не меньше единицы с комплексными коэффициентами (в том числе и с действительными) имеет хотя бы один комплексный корень.

1. Пусть число z выходит из точки 1, обходит окружность радиусом 1 с центром 0 и возвращается в ту же точку 1. Начертите линию, по которой движется точка: (a) $\frac{1}{z}$; (b) z^2 ; (c) $z^2 + 1$; (d) $z + \frac{1}{z}$.

Рассмотрим приведенный многочлен степени n с комплексными коэффициентами

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

. Пусть $a_0 \neq 0$ (иначе многочлен $P(z)$ будет иметь корень $z = 0$). При движении по комплексной плоскости точки z происходит перемещение по комплексной плоскости точки $P(z)$. Точку z^n на комплексной плоскости назовем *Дамой*, а точку $P(z)$ — *Собачкой*.

2. Число z начинает свой путь по комплексной плоскости в действительной точке R , проходит один раз по окружности радиуса R против часовой стрелки и возвращается в ту же точку.

(а) Какой путь при этом совершит *Дама*? Сколько раз она обойдет вокруг точки 0?

При любом положении точки z расстояние между *Дамой* и *Собачкой* равно $|P(z - z^n)|$. Назовем длиной поводка число L , равное максимально возможному расстоянию между *Дамой* и *Собачкой* при заданном значении R .

(б) Докажите, что при $R > 1$ длина поводка не превосходит $L \leq (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)R^{n-1}$.

(с) Какого радиуса R нужно взять окружность в качестве траектории движения точки z , чтобы длина поводка была меньше R^n — расстояния от *Дамы* до точки 0? Сколько раз при этом Собачка обойдет вокруг точку 0 при движении z по окружности?

Начнем уменьшать радиус окружности, по которой движется точка z . Радиус окружности, по которой гуляет *Дама*, уменьшается, но она по-прежнему будет проходить n раз вокруг точки 0. Траектория движения *Собачки* меняется непрерывно, то есть при «небольшом» изменении R траектория изменяется незначительно.

3. (а) Докажите, что при $R < 1$ *Собачка* находится от точки a_0 на расстоянии не большем, чем $(1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_1|)R$.

(б) Какое значение радиуса R окружности нужно взять, при котором *Собачка* ни разу не пройдет вокруг точки 0?

Итак, в процессе уменьшения R число обходов траектории *Собачки* вокруг точки 0 уменьшается от n до нуля. Значит, при некотором значении радиуса *Собачка* будет вынуждена пройти через 0.

Теорема доказана!

Следствия.

4. Всякий многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами единственным образом с точностью до умножения на число раскладывается в произведение n линейных сомножителей с комплексными коэффициентами.

5. Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами единственным образом раскладывается в произведение многочленов степени не выше второй с действительными коэффициентами.

6. Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.

Несколько задач.

7. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлен $x^8 + x^4 + 1$.

8. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами при всех действительных x принимает только положительные значения. Докажите, что найдутся такие многочлены $A(x)$ и $B(x)$ с действительными коэффициентами, для которых $P(x) = A^2(x) + B^2(x)$.

9. Докажите, что при любых натуральных p и q число $(p+1)^{2q+1} + p^{q+2}$ делится на $p^2 + p + 1$.

35. Об одном методе. 22 июля

Пусть есть два набора чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Определение. Пусть $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n$ и $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots \geq y_n$.

Будем говорить, что набор x *мажорирует* набор y , и писать $x \succ y$, если выполняются следующие условия:

$$1) \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$2) \text{ для любого } 1 \leq k \leq n \text{ выполняется неравенство } \sum_{i=1}^k x_i \geq \sum_{i=1}^k y_i$$

Определение'. Набор x *мажорирует* набор y если для любого поднабора из k игреков y_{n_1}, \dots, y_{n_k} найдутся k иксов x_{m_1}, \dots, x_{m_k} таких, что

$$x_{m_1} + x_{m_2} + \dots + x_{m_k} \geq y_{n_1} + y_{n_2} + \dots + y_{n_k}.$$

И при этом полные суммы наборов одинаковы.

1. Докажите, что определение и определение' равносильны.

2. а) Докажите, что если $x \succ y$, то если добавить к каждому из них один и тот же элемент c , то $x_1 \succ y_1$, где $x_1 = x \cup \{c\}$ и $y_1 = y \cup \{c\}$.

б) Докажите, что если к набору x и набору y добавить некоторое количество элементов, (т.е. добавить одинаковый набор чисел) тогда мажорация не исчезнет.

3. Верно ли, что если $x \cup \{c\} \succ y \cup \{c\}$, то $x \succ y$?

4. а) Пусть $x \succ y$ и $x \neq y$. Докажите, что существует набор z не совпадающий ни с x ни с y такой, что $x \succ z \succ y$.

б) Пусть в наборе x есть два элемента x_k и x_l такие, что $x_k > x_l$. Пусть ε таково, что $x_k > x_k - \varepsilon \geq x_l + \varepsilon > x_l$. Назовем *сближением* набора x новый набор $y = x \setminus \{x_k, x_l\} \cup \{x_k - \varepsilon, x_l + \varepsilon\}$, тогда $x \succ y$.

с) Докажите, что если $x \succ y$, то существуют промежуточные наборы $x = z_0 \succ z_1 \succ \dots \succ z_m = y$ такие, что z_{j+1} является сближением z_j .

Определение. *Полной орбитой набора* называется

$$O(n_1, n_2, \dots, n_k) = \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{n_1} x_{\sigma(2)}^{n_2} \dots x_{\sigma(k)}^{n_k}.$$

5. а) Пусть $n_1 > n_1 - \varepsilon \geq n_2 + \varepsilon > n_2$. Докажите, что

$$O(n_1, n_2, \dots, n_k) \geq O(n_1 - \varepsilon, n_2 + \varepsilon, \dots, n_k).$$

б) Пусть набор $(n_1, n_2, \dots, n_k) \succ (m_1, m_2, \dots, m_k)$. Докажите, что

$$O(n_1, n_2, \dots, n_k) \geq O(m_1, m_2, \dots, m_k).$$

Для натуральных чисел n_i и m_i это неравенство называется **неравенством Мюрхеда**.

6. Для положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n докажите неравенство

$$\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}.$$

36. Плюс-минус. 22 июля

1. Поставьте в ряд 11 чисел таких, что сумма их всех положительна, но при этом сумма любых трех соседних чисел отрицательна.

2. Обозначим за $f(A, B)$ максимальную длину ряда чисел таких, что сумма любых A соседних чисел положительна, а сумма любых B соседних чисел отрицательна.

(а) Докажите равенства $f(7, 2) = 7$; $f(6, 2) = 5$; $f(4, 3) = 5$.

(б) Докажите, что $f(A, B) = f(B, A)$. Найдите $f(A, 1)$ и $f(A, A)$.

(с) Докажите, что $f(A, B) < A + B$.

(д) Докажите, что если $A > B$ и $f(A, B) = N$, то $f(A - B, B) \geq NB$.

(е) Из пункта (д) получите неравенство $f(A, B) \leq A + B - \text{НОД}(A, B) - 1$.

(ф) Докажите, что $f(A, A - 1) = 2A - 3$.

(г) Докажите, что если $f(A, B) = N$, то для любого натурального k выполняется неравенство $f(kA, kB) \geq N + (N + 1)(k - 1)$. Заодно докажите, что если выполняется равенство $f(A, B) = A + B - \text{НОД}(A, B) - 1$, то $f(kA, kB) = kA + kB - \text{НОД}(kA, kB) - 1$.

(h) Пусть $A > B + 1$, $B \geq 2$, $\text{НОД}(A, B) = 1$. Рассмотрим ряд из $A + B - 2$ чисел. Будем считать их вершинами графа. Соединим ребрами числа, номера которых в ряду отличаются на A или на B . Найдите степени всех вершин. Докажите, что в этом графе ровно две компоненты связности.

(i) Поставим во все вершины первой компоненты связности число m , второй — n . Докажите, что среди любых A соседних чисел одинаковое количество чисел, равных m . И среди любых B тоже.

(j) Докажите, что можно найти такие m и n , что выполняется условие исходной задачи.

(к) Обобщив предыдущие пункты, докажите, что $f(A, B) = A + B - \text{НОД}(A, B) - 1$.

37. Заключительная олимпиада. 23 июля

Довывод

1. Существуют ли такие 6 натуральных чисел, что наибольший общий делитель каждых двух из них — простое число, меньшее 26, и при этом каждое такое простое число является наибольшим общим делителем каких-то двух из этих шести чисел?

2. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) — вещественные числа, большие 1. Пусть $|x_i - x_{i+1}| < 1$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1.$$

3. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Точки B' и C' симметричны точкам B и C относительно прямых CD и AB соответственно. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников ABC' и $B'CD$, равноудалена от точек A и D .

4. Докажите, что ни при каком натуральном n произведение

$$(1^4 + 1^2 + 1)(2^4 + 2^2 + 1) \dots (n^4 + n^2 + 1)$$

не является точным квадратом.

5. План картинной галереи — клетчатая фигура, где каждая клетка — это зал, и из любой клетки можно прийти до любой другой, переходя в соседние по сторонам клетки. Смотритель, находясь в одном из залов, следит за всеми залами, в которые можно попасть из этой клетки одним ходом ферзя (не выходя за пределы галереи). Какое наименьшее число смотрителей потребуется, чтобы в любой галерее из n залов ($n > 2$) все залы оказались под присмотром?

Вывод

6. Даны различные натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n , $n > 3$. Докажите, что среди них существуют два различных числа a_i, a_j таких, что $a_i + a_j$ не делит ни одно из чисел $3a_1, 3a_2, \dots, 3a_n$.

7. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — выпуклый n -угольник. Внутри него выбрана точка P такая, что её проекции P_1, P_2, \dots, P_n на стороны многоугольника лежат на отрезках $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ соответственно.

Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — точки на отрезках $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ соответственно. Докажите, что

$$\max \left(\frac{X_1X_2}{P_1P_2}, \frac{X_2X_3}{P_2P_3}, \dots, \frac{X_nX_1}{P_nP_1} \right) \geq 1.$$

8. В тайном обществе 2020 членов, и у каждого есть счет в банке (на счету целое число рублей, которое может быть отрицательным). Время от времени один из членов общества переводит со своего счета на счет каждого из своих друзей, состоящих в обществе, по 1 рублю. Известно, что с помощью цепочки таких переводов они могут перераспределить имеющиеся на счетах средства произвольным образом. Докажите, что в этом обществе ровно 2019 пар друзей.

*Пикалов Павел Сергеевич
Старостина Ольга Валентиновна
Бадажкова Ольга Александровна
Ланских Ирина Юрьевна
Ляховец Даниил Юрьевич
Газизуллина Римма Каммьевна*

9 КЛАСС. НЕОБЫЧНАЯ ГРУППА. МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Сдано в набор 22.07.19. Подписано к печати 23.07.19. Формат А5
Бумага «белая А4». Печать на принтере.
Заказ — $e^{i\pi}$. Тираж 40
Издательство «Ильдар»

