Двадцать четвертая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2008 года, 10 класс (профи).

14 июля

Двойное отношение

Определение. *Двойным отношением* четырех точек A, B, C, D на плоскости называется число $(A, B, C, D)^* := \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$.

Определение. *Двойным отношением* четырех точек A, B, C, D на одной прямой называется число $(A, B, C, D) := \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$.

Определение. *Двойным отношением* четырех прямых a, b, c, d, проходящих через одну точку, называется число $(a, b, c, d) := \frac{\sin\angle(a,c)}{\sin\angle(b,c)} : \frac{\sin\angle(a,d)}{\sin\angle(b,d)}$.

1. Докажите, что двойное отношение сохраняется при полярном преобразовании.

2. Докажите, что двойное отношение сохраняется при инверсии.

3. Докажите, что если $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

4. Докажите, что $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$.

5. Окружность Γ пересекает прямые a, b, c, d, которые пересекаются на Γ, в точках A, B, C, D. Тогда $|(a, b, c, d)| = (A, B, C, D)^*$.

6. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, BC и AD — в точке F диагонали AC и BD пересекают EF в точках M и N. Тогда $(E, F, M, N) = -1$.

7. $ABCD$ – вписанный четырехугольник, точка M середина диагонали AC. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBD$ тогда, и только тогда, когда $(A, C, B, D)^* = 1$.

Двадцать четвертая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2008 года, 10 класс (профи).

14 июля

Двойное отношение

Определение. *Двойным отношением* четырех точек A, B, C, D на плоскости называется число $(A, B, C, D)^* := \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$.

Определение. *Двойным отношением* четырех точек A, B, C, D на одной прямой называется число $(A, B, C, D) := \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$.

Определение. *Двойным отношением* четырех прямых a, b, c, d, проходящих через одну точку, называется число $(a, b, c, d) := \frac{\sin\angle(a,c)}{\sin\angle(b,c)} : \frac{\sin\angle(a,d)}{\sin\angle(b,d)}$.

1. Докажите, что двойное отношение сохраняется при полярном преобразовании.

2. Докажите, что двойное отношение сохраняется при инверсии.

3. Докажите, что если $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

4. Докажите, что $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$.

5. Окружность Γ пересекает прямые a, b, c, d, которые пересекаются на Γ, в точках A, B, C, D. Тогда $|(a, b, c, d)| = (A, B, C, D)^*$.

6. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, BC и AD — в точке F диагонали AC и BD пересекают EF в точках M и N. Тогда $(E, F, M, N) = -1$.

7. $ABCD$ – вписанный четырехугольник, точка M середина диагонали AC. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBD$ тогда, и только тогда, когда $(A, C, B, D)^* = 1$.