

4 июля

Вступительная олимпиада

1. Для десяти натуральных чисел посчитали все их попарные НОДы. Могут ли 45 полученных чисел равняться $1, 2, \dots, 45$?

2. У пятиугольной звезды все звенья равны. Известно, что внутренний пятиугольник описанный. Докажите, что этот пятиугольник правильный.

3. На прямой расположена фишка. Петя и Вася играют в такую игру: Вася называет положительное число, не большее 1, а Петя двигает фишку вправо или влево (по своему выбору) на расстояние, названное Васей. При этом Пете запрещается 10 раз подряд двигать фишку в одну сторону. Может ли Вася называть такие числа, чтобы через некоторое число ходов фишка гарантированно оказалась сдвинутой вправо на расстояние, большее 2008?

4. Треугольник ABC таков, что $AB + BC = 2AC$. Докажите, что точка B , центр вписанной окружности треугольника ABC и середины сторон AB и BC лежат на одной окружности.

5. $p > 5$ — простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби $1/p$ равна $2n$. Докажите, что если этот период разбить на два n -значных куска, то сумма чисел в этих кусках равна $\underbrace{99 \dots 9}_n$ (n девяток).