11 июля

Размерность

Линейная зависимость и независимость

Предложение. Пусть $S = \{v_i, i \in I\}$ – семейство векторов векторного пространства V. Тогда следующие условия равносильны:

а) никакой вектор из V нельзя выразить через векторы из S двумя разными способами;

б) никакой вектор из S нельзя выразить через остальные;

в) если линейная комбинация векторов из S равна нулевому вектору, то все ее коэффициенты равны 0.

Опр. Семейство векторов, обладающее свойствами, описанными в предыдущем предложении, называется *линейно независимым*, а не обладающее – *линейно зависимым.*

Упр1. Докажите следующие свойства линейной зависимости и независимости:

а) система, содержащая нулевой вектор, является ЛЗ;

б) система, содержащая пропорциональные векторы, является ЛЗ;

в) если семейство векторов ЛНЗ, то и любая его часть ЛНЗ;

г) если семейство ЛЗ, то и любое содержащее его семейство ЛЗ;

д) если ЛНЗ семейство векторов не является системой образующих векторного пространства, то к этому семейству можно добавить вектор так, чтобы оно осталось ЛНЗ.

Опр. Система образующих S векторного пространства называется его *базисом*, если всякий элемент пространства представляется в виде линейной комбинации элементов из S, причем единственным образом.

Теорема 1. Следующие условия равносильны:

а) S – базис пространства V;

б) S – линейно независимая система образующих пространства V;

в) S линейно независимо, но теряет это свойство при добавлении любого вектора из V;

г) S – система образующих пространства V, но теряет это свойство при удалении любого вектора.

Таким образом, базис векторного пространства можно описать, с одной стороны, как *минимальную систему образующих*, а с другой – как *максимальную линейно независимую систему.* Возникая на узком стыке двух почти не сочетаемых качеств, базисы не могут не приобрести ценные свойства.

Размерность

Теорема 2. Если в пространстве есть базис из n векторов, то любые $n+1$ векторов линейно зависимы.

Следствие. Если в пространстве есть базис из n векторов, то любой другой базис тоже содержит n векторов

Опр. Векторное пространство, имеющее конечный базис, называется *конечномерным*, а число векторов в каждом из его базисов – его *размерностью.* Если в векторном пространстве нет конечного базиса, оно называется *бесконечномерным.*

Замечание. Мы не доказываем, что в бесконечномерном пространстве тоже есть базис и что любые два базиса равномощны.

Упр2. В бесконечномерном векторном пространстве есть бесконечная ЛНЗ система векторов.

Упр3. а) Из любой системы образующих конечномерного векторного пространства можно удалить часть векторов так, чтобы оставшиеся образовывали базис.

б) К любой линейно независимой системе векторов конечномерного векторного пространства можно добавить векторы так, чтобы получился базис.

Теорема 3. Размерность собственного (не совпадающего со всем пространством) подпростран-