Двадцать четвертая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2008 года, 10 класс (профи).
17 июля

Теорема Форда-Фалкерсона

Определение 1. Пусть задано множество вершин V, в котором выделены две вершины s (*вход* или *исток*) и t (*выход* или *сток*). Пусть определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$c(x, y) \geq 0, \quad c(x, s) = 0, \quad c(t, y) = 0$$

для любых вершин $x, y \in V$. Тогда $G = (V, s, t, c)$ — *сеть*, функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Определение 2. Пусть G — сеть, а функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:

1° $f(x, y) \leq c(x, y)$;
2° $f(x, y) = -f(y, x)$;
3° Для любой вершины $v \in V$, $v \neq s, t$ выполняется условие $\sum_{x \in V} f(v, x) = 0$.

Тогда f — поток в сети G. Число $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$ называется *величиной потока.* Поток сети G с максимальной величиной называется *максимальным.*

Замечание. Вообще-то совсем не очевидно, почему максимальный поток существует.

Определение 3. Пусть G — сеть, а множество ее вершин V разбито на два непересекающихся множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) — разрез сети G.

Величина $c(S, T) = \sum_{x \in S,\, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*, а $f(S, T) = \sum_{x \in S,\, y \in T} f(x, y)$ называется *потоком через разрез* (S, T). Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным.*

Замечание. Нетрудно понять, что минимальный разрез сети существует. Возможно, таких разрезов несколько.

1. Для любого потока f и разреза (S, T) сети G докажите, что $|f| = f(S, T)$.

Определение. 1) Пусть f — поток в сети G. Рассмотрим сеть G_f с теми же V, s, t и пропускной способностью $c_f(x, y) := c(x, y) - f(x, y)$. Назовем G_f *остаточной сетью* потока f.

2) Проведем на множестве вершин V ориентированные ребра из x в y для всех таких пар (x, y), что $c_f(x, y) > 0$. Любой путь из s в t в полученном ориентированном графе назыается *дополняющим путем* потока f.

2. (Теорема Форда-Фалкерсона, 1956) В сети G с пропускной способностью c задан поток f. Докажите, что следующие три утверждения равносильны:

1° поток f максимален;
2° существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$;
3° в остаточной сети G_f нет дополняющего пути.

Следствие. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

3. Докажите, что в целочисленной сети (т. е. в сети, пропускные способности всех ребер которой являются целыми числами) существует максимальный поток, причем среди максимальных потоков данной сети найдется целочисленный.

4. Пусть (S_1, T_1) и (S_2, T_2) — минимальные разрезы в сети G. Докажите, что разрезы $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ и $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ также являются минимальными

а) для целочисленной сети G;
а) для произвольной сети G.

Выведете из теоремы Форда-Фалкерсона следующие утверждения.

5. (Теорема Холла.) Если в двудольном графе с долями A и B для любого множества из k вершин $V \subseteq A$ существует не менее k вершин доли B, смежных хотя бы с одной из вершин множества V, то существует паросочетание, содержащее все вершины из A.

6. (Теорема Менгера.) Даны граф G и его вершины u и v.

а) Пусть при удалении любых $k - 1$ ребер в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих ребер.

б) Пусть вершины u и v несмежны и при удалении любых $k - 1$ вершин в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих внутренних вершин.

7. (Теорема Кёнига.) На клетчатой плоскости расставлено несколько ладей. Тогда наибольшее число небьющих друг друга ладей, которые можно выбрать из них, равно наименьшему