6 июля

Показатели

Опр. При $(a, m) = 1$ существует положительное δ с условием $a^\delta \equiv 1 \pmod{m}$. Наименьшее из таких чисел называется *показателем, которому a принадлежит по модулю m.*

1. а) Числа $1 = a^0, a^1, \ldots, a^{\delta-1}$ по модулю m несравнимы.

б) $a^s \equiv a^t \pmod{m}$ $(s, t \geq 0) \iff s \equiv t \pmod{\delta}$. В частности, $a^s \equiv 1 \pmod{m} \iff s \,\vdots\, \delta$.

в) δ являтся делителем $\varphi(m)$.

Замечание. На самом деле δ являтся делителем $L(m)$.

---

2. Найдите все простые p, q такие, что $2^p - 1 \,\vdots\, q, 2^q - 1 \,\vdots\, p$.

3. Посмотрим на число вида $2^p - 1$ и увидим, что
а) простых чисел бесконечно много;
б) существует хотя бы одно простое число вида $2px + 1$.

4. Докажите, что простые делители числа $2^{2^n} + 1$ имеют вид $2^{n+1}x + 1$.

5. $2^n - 1$ не делится на n при $n > 1$.

6. p, q – простые числа, $q > 5$. Докажите, что если $q|2^p + 3^p$, то $q > p$.

7. а) $a > 1$, $p > 2$, p – простое. Тогда простые нечетные делители числа $a^p - 1$ или делят $a - 1$, или имеют вид $2px + 1$.

б) $a > 1$, $p > 2$, p – простое. Тогда простые нечетные делители числа $a^p + 1$ или делят $a + 1$, или имеют вид $2px + 1$.

8. Число $\frac{a^p-1}{a-1}$ имеет хотя бы один простой множитель, не являющийся делителем $a - 1$.

9. Докажите бесконечность множества простых чисел вида $2px + 1$.

Для самостоятельного решения

10. а) $a > 1$. Тогда $\varphi(a^n - 1)$ кратно n.

б) Докажите, что число правильных несократимых дробей со знаменателем $a^n - 1$ кратно n.

11. Найдите все n, при которых $n|3^n - 2^n$.