

12 июля
Матбой

1. Вписанная в неравнобедренный треугольник ABC окружность касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точка B' – вторая точка пересечения вписанной окружности с отрезком BB_1 . BH – высота. Докажите, что точки B, H , середина A_1C_1 и середина B_1B' лежат на одной окружности.

2. Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

3. Докажите, что многочлен $x^{2008} - x^{2007} + 2007 \cdot x^{1003} + 3$ неприводим над \mathbb{Z} .

4. Какое наибольшее количество нулей может быть среди шести последних цифр степени двойки, большей 10^6 ?

5. Назовем многочлен P с вещественными коэффициентами *любопытным*, если $P(x)$ рационально тогда и только тогда, когда рационально x . При каких n существует любопытный многочлен n -й степени?

6. На лесной кольцевой тропинке есть 16 юношей и имеется 16 укромных местечек, где расположены девушки. В игре "Честный Киллер" юноши охотятся за девушками: сначала юноша №1 подкрадывается к ближайшей по часовой стрелке живой девушке и убивает ее; затем второй юноша подкрадывается к ближайшей к нему по часовой стрелке живой девушке и убивает ее и т.д. Докажите, что сумма пройденных юношами расстояний не зависит от их нумерации.

7. Пусть $x, y, z > 0$, $xyz(x + y + z) = 1$. Докажите, что $\min(x + y)(x + z) = 2$.

8. Точки P и Q лежат внутри треугольника ABC и изогонально сопряжены. Докажите, что

$$\frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} + \frac{BP \cdot BQ}{BA \cdot BC} + \frac{CP \cdot CQ}{CA \cdot CB} = 1.$$