Двадцать четвертая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2008 года, 10 класс (профи).

19 июля

Сильная связность ориентированных графов

Определение. Вершины a и b ориентированного графа G назовем *связанными*, если в графе G существуют пути из a в b и из b в a.

Определение. Ориентированный граф G называется *сильно связным*, если любые две его вершины связаны.

Определение. Таким образом, множество вершин $V(G)$ оказывается разбито на классы попарно связанных вершин, которые мы будем называть *компонентами сильной связности.*

Определение. Построим для нашего ориентированного графа G *граф компонент сильной связности* $C(G)$, вершины которого соответствуют компонентам сильной связности ориентированного графа G. Проведем в графе $C(G)$ ребро $V_i \to V_j$ тогда и только тогда, когда в графе G есть ребро, направленное от V_i к V_j.

1. а) В графе $C(G)$ нет циклов.

б) Для любой компоненты сильной связности V_i граф $G(V_i)$ на вершинах множества V_i с ребрами графа G между этими вершинами сильно связен.

Определение. Пусть V_i — компонента сильной связности ориентированного графа G. Назовем эту компоненту *промежуточной*, если в графе $C(G)$ существует ребро, входящее в V_i, и существует ребро, выходящее из V_i. В противном случае назовем компоненту V_i *крайней.*

2. В ориентированном графе 200 вершин, из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно добавить не более 100 новых ориентированных ребер так, чтобы этот граф стал сильно связным. (Между двумя вершинами может быть проведено несколько ребер.)

3. Для сильно связного ориентированного графа G на n вершинах выполняются следующие утверждения.

а) Существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-2$ ребер.

б) Если в графе G между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра, то существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-3$ ребер.

в) Для всех $v \geq 3$ постройте примеры графов, для которых оценки пунктов а) и б) являются точными.

Определение. *Полный ориентированный граф* или *турнирный граф* — это ориентированный граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним ориентированным ребром

4. Докажите, что компоненты сильной связности полного ориентированного графа можно пронумеровать $G_1, \ldots, G_k$ так, чтобы для всех $i < j$ в $C(G)$ было ребро $G_i \to G_j$.

5. Докажите, что в полном сильно связном ориентированном графе существует *гамильтонов цикл* (т. е. цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз).

6. Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе с четырьмя и более вершинами существует вершина, удаление которой не нарушает сильной связности графа.

7. Пусть G — полный ориентированный граф с n вершинами. Докажите, что в нем существует такой гамильтонов путь $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n$, что его концы соединены ребром $a_1 \to a_n$

а) при четном n;

б) при нечетном n, отличным от 3 и 5.

в) Найдите все полные ориентированные графы, для которых такого пути не существует.

8. Дан полный ориентированный граф G с n вершинами.

а) Докажите, что при $n > 7$ в этом графе можно выбрать вершину v и поменять направление всех ребер с концами в v так, чтобы получился сильно связный ориентированный граф.

б) Найдите все полные ориентированные граф на, для которых такой вершины не существует.