14 июля

Аргумент размерности

Сюжет первый, повествующий о характеристических векторах

1. В таблице $(n+1)\times n$ ($n+1$ строка, n столбцов) некоторые клетки отмечены крестиками. Докажите, что можно стереть несколько строк (не все), так чтобы в оставшейся таблице в каждом столбце было бы отмечено четное число крестиков.

2. $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ — непустые подмножества n-элементного множества. Докажите, что можно выбрать такие непустые непересекающиеся множества индексов $\{i_1,\ldots,i_k\}$ и $\{j_1,\ldots,j_\ell\}$, что

$$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k} = B_{j_1}\cup B_{j_2}\cup\cdots\cup B_{j_\ell}.$$

Сюжет второй, в котором появляется скалярное произведение

Определение. Пусть $u=(u_1,\ldots,u_n)$ и $v=(v_1,\ldots,v_n)$ — векторы из F^n. Положим $\langle u,v\rangle = u_1v_1+\cdots+u_nv_n$ (*скалярное произведение* векторов u и v).

3. Докажите свойства скалярного произведения ($u,v,w,v_1,\ldots,v_n\in V$, $k,a_1,\ldots,a_n\in F$):

а) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$;

б) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$;

в) $\langle ku,v\rangle = k\langle u,v\rangle$;

г) Если $a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0$, то $a_1\langle v_1,v\rangle+\ldots+a_n\langle v_n,v\rangle = 0$.

Определение. Векторы $u,v\in F^n$ называются *ортогональными*, если $\langle u,v\rangle=0$.

4. Докажите, что любой набор попарно ортогональных ненулевых векторов в $\mathbb{R}^n$ линейно независим.

5. В городе k супружеских пар и n клубов. Для мужчины и женщины количество клубов, в которых они оба бывали, нечетно тогда и только тогда, когда они – муж и жена. Докажите, что $n\geq k$.

6. Несколько разбойников ходили в операции, причем любой разбойник побывал в n операциях, а любые два разбойника побывали одновременно в $k<n$ операциях. Докажите, что число операций не меньше числа разбойников.

7. В КИМах Единой Государственной Олимпиады (ЕГО) n тестовых вопросов. ЕГО сдают k участников. Известно, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники расположились по первичным баллам в любом наперед заданном проплаченном порядке. Привести подробное аккуратное обоснование того, что $n\geq k$.

Сюжет третий, в котором мы понимаем, что многочлены от нескольких переменных есть линейно-алгебраические объекты

8. Имеются многочлены $P_1(y_1,\ldots,y_{1000}),\ldots,P_{1001}(y_1,\ldots,y_{1000})$ с действительными коэффициентами. Докажите, что существует такой ненулевой многочлен $R(x_1,\ldots,x_{1001})$, что $R(P_1,\ldots,P_{1001})=0$ (имеется ввиду равенство многочленов).

9. Пусть $\mathfrak{B}$ — такое семейство подмножеств множества $\{1,\ldots,n\}$, что мощности попарных пересечений подмножеств этого семейства принимают ровно ℓ различных значений ($0<\ell<n$). Докажите, что наибольшее возмозможное значение $|\mathfrak{B}|$ равно $C_n^0+\cdots+C_n^\ell$.