10 июля

Линейные(векторные) пространства

Опр. Пусть даны множество V (“векторы”) и поле K (“числа”), имеются операция сложения векторов и для каждого числа имеется операция умножения вектора на число. При этом:

а) сложение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по сложению элемент ($\overrightarrow{0}$) и у каждого вектора $\overrightarrow{v}$ есть обратный по сложению ($-\overrightarrow{v}$);

б) $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$; $(k_1k_2)\overrightarrow{v} = k_1(k_2\overrightarrow{v})$ (здесь $k_1, k_2 \in K$, $\overrightarrow{v} \in V$);

в) $(k_1 + k_2)\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{v} + k_2\overrightarrow{v}$; $k(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = k\overrightarrow{v}_1 + k\overrightarrow{v}_2$.

Тогда V называется *линейным(векторным) пространством* над K.

Упр1. Задайте естественную структуру линейного пространства на следующих множествах: а) K^n — строки из n чисел; б) линейные уравнения вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b_n$ с коэффициентами из K; в) все многочлены над полем K; г) многочлены степени не выше n над полем K; д) векторы на плоскости и в пространстве; е) последовательности элеметов поля K; ж) множество функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; з) множество функций $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Упр2. Образуют ли линейные пространства следующие множества (относительно естественных операций): а) многочлены степени n над полем K; б) неубывающие последовательности (над $\mathbb{R}$); в) многочлены с фиксированным корнем α; г) строки длины n с нулевой суммой элементов; д) строки длины n с нулевым произведением элементов; е) множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$; ж) множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$; з) последовательности элементов поля F, в которых конечное число ненулевых элементов;

Упр3. а) Докажите, что множество решений произвольной ОСЛУ образует векторное пространство относительно естественных операций.
б) С каждой СЛУ естественным образом свяжем ОСЛУ. Как при этом окажутся связанными множества их решений?

Упр4. Дайте определение *подпространства*.

Упр5. В упражнениях 1-2 укажите пары "пространство–его подпространство".

Упр6. Рассмотрим пространство векторов на плоскости. Опишите все его подпространства.

Упр7. Дайте определение *изоморфных* (как бы одинаковых) пространств.

Упр8. Найдите пары изоморфных пространств в упражнениях 1-2.

Опр. Подмножество S векторного пространства называется *системой образующих* этого пространства, если всякий его вектор можно представить в виде $\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n$, где $v_1, \dots, v_n \in S$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Выражение $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение) называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \dots, v_n$.

Опр. Пусть S – произвольное подмножество векторного пространства V. *Линейной оболочкой* множества S в пространстве V называется совокупность $L(S)$ всех линейных комбинаций векторов из S.

Упр9. Линейная оболочка $L(S)$ является подпространством пространства V, содержащим множество S. При этом всякое подпространство пространства V, содержащее S, содержит и $L(S)$ (по этой причине $L(S)$ называют ещё подпространством, натянутым на множество S).

Упр10. В каждом из пространств в упражнениях 1-2 укажите какую-нибудь *минимальную систему образующих* (то есть ту, которая перестает быть системой образующих после выкидывания любого из векторов).

Упр11. Докажите, что пространство $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ не имеет конечной (и даже счетной) системы образующих.