Двадцать четвертая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2008 года, 10 класс (профи).

5 июля

Аффинные преобразования

1. В треугольнике ABC точки D, E, F, G, H – середины отрезков BC, AD, BD, ED, EF соответственно. X – точка пересечения прямых BE и AC, Y – точка пересечения прямых GH и AC. Докажите, что
а) $GY = 3HG$;
б) $BE = 3EX$;
в) найдите отношение площадей треугольников ABC и EGH.

2. Через точку внутри треугольника с площадью S проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник на три параллелограмма и три треугольника. Обозначим S_1, S_2, S_3 площади трех получившихся треугольников. Докажите, что $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$.

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $F = BC \cap DE$, $G = CD \cap EA$, $H = DE \cap AB$, $I = EA \cap BC$ и $J = AB \cap CD$. Докажите, что если площади треугольников IAH, JBI, FCJ, GDF, HEG равны, то прямые AF, BG, CH, DI и EJ пересекаются в одной точке.

4. В шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны равны и параллельны. Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.

5. Докажите, что аффинное преобразование можно представить в виде композиции нескольких сжатий (растяжений) и поворотной гомотетии. Сколько сжатий достаточно?

6. а) Рассмотрим пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Обозначим $S = \sum\limits_{i=1}^{5} |A_iA_{i+1}|^2$, $T = \sum\limits_{i=1}^{5} |A_iA_{i+2}|^2$. Известно, что $A_1A_2A_3A_4A_5$ можно перевести аффинным преобразованием в правильный. Найдите S/T.

б) Рассмотрим n-угольник $A_1A_2A_3 \ldots A_n$. $k \leq n$ – натуральное число. Обозначим $S = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_iA_{i+1}|^2$, $T = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_iA_{i+k}|^2$. Известно, что $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ можно перевести аффинным преобразованием в правильный. Найдите S/T.