Двадцать четвертая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2008 года, 10 класс (профи).

4 июля

Функция Эйлера (ликбез)

1. Следующие условия эквивалентны:

(i) $(a, m) = 1$;

(ii) a – *обратим* по модулю m, то есть $ab \equiv 1 \pmod{m}$ для некоторого b (отсюда следует, что b определен однозначно);

(iii) $\{0, 1, \ldots, m-1\} = \{0a, 1a, \ldots, (m-1)a\}$.

Опр. Функция Эйлера $\varphi(m)$ равна количеству натуральных чисел, не превосходящих m, и взаимно простых с m ($\Longleftrightarrow$ обратимых по модулю m).

Теорема Эйлера. Если $(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

2. Дано число 2^{2008}. Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

3. Рассмотрим ряд $1/m, 2/m, \ldots, m-1/m, m/m$.

а) Докажите, что при $m > 2$ $\varphi(m)$ – четно.

б) Докажите, что $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \cdots + \varphi(d_s) = m$, где суммирование ведется по всем делителям числа m.

4. а) Докажите, что при $(a, b) = 1$ $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$;

б) Найдите $\varphi(p^n)$ (p – простое) и выведите общую формулу для $\varphi(m)$.

Замечание. Положим $L(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}) = HOK(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \ldots, \varphi(p_k^{\alpha_k})) \leq \varphi(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k})$. Докажите,что в теореме Эйлера можно вместо $\varphi(m)$ брать $L(m)$.

Для самостоятельного решения

1. Докажите мультипликативность функции $\sigma_k(m) = \sum_{d|m} d^k$.

2. Докажите, что для каждого n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.

3. Между двумя единицами пишется двойка, затем между любыми двумя соседними числами пишется их сумма и т.д. Докажите, что число n в итоге будет выписано ровно $\varphi(n)$ раз.

Двадцать четвертая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2008 года, 10 класс (профи).

4 июля

Функция Эйлера (ликбез)

1. Следующие условия эквивалентны:

(i) $(a, m) = 1$;

(ii) a – *обратим* по модулю m, то есть $ab \equiv 1 \pmod{m}$ для некоторого b (отсюда следует, что b определен однозначно);

(iii) $\{0, 1, \ldots, m-1\} = \{0a, 1a, \ldots, (m-1)a\}$.

Опр. Функция Эйлера $\varphi(m)$ равна количеству натуральных чисел, не превосходящих m, и взаимно простых с m ($\Longleftrightarrow$ обратимых по модулю m).

Теорема Эйлера. Если $(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

2. Дано число 2^{2008}. Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

3. Рассмотрим ряд $1/m, 2/m, \ldots, m-1/m, m/m$.

а) Докажите, что при $m > 2$ $\varphi(m)$ – четно.

б) Докажите, что $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \cdots + \varphi(d_s) = m$, где суммирование ведется по всем делителям числа m.

4. а) Докажите, что при $(a, b) = 1$ $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$;

б) Найдите $\varphi(p^n)$ (p – простое) и выведите общую формулу для $\varphi(m)$.

Замечание. Положим $L(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}) = HOK(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \ldots, \varphi(p_k^{\alpha_k})) \leq \varphi(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k})$. Докажите,что в теореме Эйлера можно вместо $\varphi(m)$ брать $L(m)$.

Для самостоятельного решения

1. Докажите мультипликативность функции $\sigma_k(m) = \sum_{d|m} d^k$.

2. Докажите, что для каждого n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.

3. Между двумя единицами пишется двойка, затем между любыми двумя соседними числами