16 июля

Проективность и окружность.

I. Часть первая, теоретическая.

0. Пусть точка M – середина отрезка AB, N – бесконечно удаленная точка прямой AB. Докажите, что $(A, B, M, N) = -1$.

0. Пусть прямая ℓ – поляра точки L относительно окружности Γ. Прямая k, проходящая через точку L пересекает окружность Γ в точках A и B, а прямую ℓ в точке M. Докажите, что $(A, B, L, M) = -1$.

0. $ABCD$ – вписанный четырехугольник, точка M середина диагонали AC. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBD$ тогда, и только тогда, когда $(A, C, B, D)^* = 1$.

Теорема. Существует проективное преобразование, переводящее данную точку внутри окружности в центр, а окружность в себя.

1. Дана окружность и точка C внутри нее. Через точку C проведены четыре хорды A_iB_i, $i = 1, \ldots, 4$. D — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, E — точка пересечения прямых B_1B_2 и B_3B_4. Докажите, что точки C, D и E лежат на одной прямой.

2. Существует проективное преобразование, переводящее данную прямую не пересекающую окружность в бесконечно удаленную, а окружность в себя.

3. (теорема Паскаля) Пусть $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ — точки, лежащие на одной окружности. Тогда точки пересечения прямых A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 лежат на одной прямой.

4. (теорема Брианшона) Пусть $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ — вершины описанного шестиугольника. Тогда прямые A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 пересекаются в одной точке.

5. (теорема о бабочке) Через середину C хорды AB проведены хорды KL и MN. Прямые ML и KNпересекают прямую AB в точках D и E. Тогда $CD = CE$.

II. Часть вторая, практическая.

6. Окружность Γ касается прямых, содержащих стороны AB и BC треугольника ABC, в точках D и E соответственно. Вторые касательные, проведенные из A и C к Γ касаются ее в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DG, FE и AC пересекаются в одной точке.

7. Окружность Γ касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E и его описанной окружности. Докажите, что прямая DE проходит через точку I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

8. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания высот, а A_2, B_2, C_2 — соответсвующие основания медиан треугольника ABC. Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, A_1C_2 и A_2C_1, B_1C_2 и B_2C_1 лежат на одной прямой.

9. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Биссектрисы углов A_1AC и C_1CA пересекаются в точке B'. Аналогично определяются точки A' и C'. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой, проходящей через центр вписанной окружности треугольника.