21 июля

Раскраски графов

Определение. Пусть G — конечный граф без петель и кратных ребер, с множеством вершин V и множеством ребер E. Будем обозначать через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ максимальную и минимальную степень вершины графа G соответсвенно.

Определение. Для любого подмножества $U \subset V$ через $G(U)$ мы будем обозначать *индуцированный подграф* графа G на множестве вершин U (такой граф состоит из вершин множества U и всех ребер графа G между этими вершинами).

Определение. Для любого подмножества $F \subset E$ через $G[E]$ мы будем обозначать *индуцированный подграф* графа G на множестве ребер E (такой граф состоит из ребер множества F и всех вершин графа G, инцидентных хотя бы одному из этих ребер).

Раскраски вершин

1. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d$. Докажите, что вершины G можно правильным образом раскрасить в d цветов, если

а) есть вершина, имеющая степень меньше, чем d;

б) есть вершина, при удалении которой граф теряет связность;

в) $d > 2$ и есть две вершины такие, что при удалении их обоих граф теряет связность;

г) есть три вершины u, v и w такие, что u смежна с v и w, вершины v и w несмежны и при удалении вершин v и w связность не нарушается.

2. (Brooks, 1941) Пусть G — связный граф с $\Delta(G) = d \geq 3$, отличный от полного графа K_{d+1}. Докажите, что вершины G можно раскрасить в d цветов правильным образом.

Определение. Пусть G — граф. Обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов. Хроматическое число графа $\chi(G)$ — это наименьшее натуральное k такое, что $\chi_G(k) \neq 0$.

3. а) Докажите, что $\chi_G(k)$ — многочлен от k.

б) Найдите хроматический многочлен дерева из n вершин.

в) Докажите, что любой граф с таким хроматическим многочленом — дерево из n вершин.

Определение. Этот многочлен называется *хроматическим многочленом* графа G.

4. Докажите, что из графа G можно удалить не более, чем $\frac{1}{n}$ часть его ребер так, чтобы полученный граф имел правильную раскраску вершин в n цветов.

Определение. Правильная раскраска вершин графа G называется *динамической*, если для любой вершины, v степень которой больше 1, не все смежные с v вершины покрашены в один цвет.

5. Пусть $\Delta(G) = d \geq 4$. Докажите, что существует динамическая правильная раскраска вершин графа G а) в $d+3$ цвета; б) в $d+1$ цвет.

Раскраски ребер

Определение. Раскраска ребер графа в k цветов — это разбиение множества его ребер на k подмножеств: $C = (E_1, \ldots, E_k)$. Мы будем говорить, что в раскраске C цвет i *представлен* в вершине v, если хотя бы одно из инцидентных v ребер покрашено в цвет i. (Если таких ребер t, то можно сказать, что цвет i представлен t раз в вершине v.)

Определение. Раскраска ребер графа G называется правильной, если любые два ребра, имеющих общий конец, покрашены в разные цвета.

Определение. *Реберное хроматическое число графа* $\chi'(G)$ — это наименьшее количество цветов, для которого существует правильная раскраска ребер графа G.

6. Пусть G — связный граф, отличный от цикла нечетной длины. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждой вершине степени не менее двух были представлены оба цвета.

Определение. Пусть C — раскраска ребер графа G. Для каждой вершины $v \in V$ обозначим через $c(v)$ количество цветов, в которые покрашены ребра, инцидентные v.

Определение. Будем говорить, что C — *оптимальная* раскраска ребер в k цветов, если для любой другой раскраски C' ребер этого графа в k цветов выполняется

$$\sum_{v \in V} c(v) \geq \sum_{v \in V} c'(v).$$

7. Пусть $C = (E_1, \ldots, E_k)$ — оптимальная раскраска ребер графа G в k цветов. Пусть вершина v и цвета i и j таковы, что в вершине v дважды представлен цвет i и не представлен цвет j. Докажите, что компонента связности графа $G[E_i \cup E_j]$, содержащая вершину v — простой цикл нечетной длины.

8. Пусть G — двудольный граф. Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G)$.

9. Пусть G — двудольный граф, $\delta(G) = d$. Докажите, что существует раскраска ребер графа G в d цветов, в которой в каждой вершине представлены все d цветов.

10. (Визинг, 1964.) Докажите, что $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.