

11 июля

Инверсия. Поляры.

Определение 1. Рассмотрим окружность ω с центром в точке O и радиуса R . *Инверсией* относительно ω называется отображение плоскости без точки O в себя, переводящее каждую точку P в такую точку P' , лежащую на луче OP , что $OP \cdot OP' = R^2$.

Определение 2. Для каждой точки P , отличной от точки O , ее *полярой* будем называть прямую p , проходящую через инверсный образ P' точки P и перпендикулярную прямой OP . Точку P будем называть *полюсом* прямой p .

Вопрос. Для каких прямых существует полюс?

1. (Лемма о поляре) Докажите, что если полюс A прямой a лежит на поляре b точки B , то точка B лежит на прямой a .
2. Точка X лежит на радикальной оси двух непересекающихся окружностей Γ_1 и Γ_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно. Точки X_1 и X_2 – инверсные образы точки X относительно Γ_1 и Γ_2 . Докажите, что точки O_1, X_1, O_2, X_2 лежат на одной окружности.
3. Пусть A, B, C – три различные точки плоскости, а прямые a, b, c их поляры. Докажите, что следующие два утверждения равносильны:
(1) точки A, B, C лежат на одной прямой;
(2) прямые a, b, c пересекаются в одной точке или параллельны.
4. Из точки P вне окружности Γ проведены касательные PM и PN . Докажите, что прямая MN – поляра точки P .
5. Из точки P внутри окружности S провели две секущие AB и CD . Докажите, что точка пересечения прямых AC и BD лежит на поляре точки P .
6. Пусть дан четырехугольник $ABCD$
а) вписанный в окружность S ;
б) описанный вокруг окружности S .
Докажите, что перпендикуляр, опущенный из центра S на прямую, соединяющую точки пересечения противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей.
7. В какое утверждение переходит неравенство треугольника при инверсии?
8. В какое утверждение переходит утверждение "медианы треугольника пересекаются в одной точке" при полярном преобразовании, если за окружность полярного преобразования взять окружность, описанную вокруг треугольника?