23 июля ◇ Заключительная олимпиада

Довывод

1. Может ли произведение трех натуральных чисел быть в 2008 раз больше их суммы?

2. Дан выпуклый 2008-угольник со сторонами $a_1, \ldots, a_{2008}$. Пусть $f(x)$ – квадратный трехчлен, для которого $f(a_1) = f(a_2 + a_3 + \cdots + a_{2008})$. Докажите, что $f(a_{2008}) = f(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007})$.

3. Имеются 30 гирек весом 1 г, 2 г,…, 30 г. Из них выбрали 10 гирек общим весом 155 г. Докажите, что оставшиеся 20 гирек можно разбить на 2 группы по 10 гирек в каждой с равными суммами весов.

4. Докажите, что $\sqrt[n]{2} > \frac{2n}{2n-1}$ при натуральном $n > 1$.

5. Пусть H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Пусть окружность с центром в середине стороны BC проходит через точку H и пересекает отрезок BC в точках A_1 и A_2. Аналогично определяются точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Докажите, что шесть точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.

Вывод

6. Леонид Михайлович выписывает на доску n натуральных чисел. Константин Александрович стирает несколько из этих чисел (но не все), перед оставшимися пишет знаки плюс или минус. Если сумма получившихся чисел делится на 2008, то выигрывает Константин Александрович, иначе — Леонид Михайлович. Кто выигрывает при правильной игре в зависимости от n?

7. Докажите, что выпуклый многоугольник можно триангулировать диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

8. В графе степень каждой вершины не превосходит $2k+1$. Докажите, что можно раскрасить его вершины в 2 цвета так, чтобы ребра с разноцветными концами составляли не менее $\frac{k+1}{2k+1}$ от общего числа ребер.

23 июля ◇ Заключительная олимпиада

Довывод

1. Может ли произведение трех натуральных чисел быть в 2008 раз больше их суммы?

2. Дан выпуклый 2008-угольник со сторонами $a_1, \ldots, a_{2008}$. Пусть $f(x)$ – квадратный трехчлен, для которого $f(a_1) = f(a_2 + a_3 + \cdots + a_{2008})$. Докажите, что $f(a_{2008}) = f(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007})$.

3. Имеются 30 гирек весом 1 г, 2 г,…, 30 г. Из них выбрали 10 гирек общим весом 155 г. Докажите, что оставшиеся 20 гирек можно разбить на 2 группы по 10 гирек в каждой с равными суммами весов.

4. Докажите, что $\sqrt[n]{2} > \frac{2n}{2n-1}$ при натуральном $n > 1$.

5. Пусть H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Пусть окружность с центром в середине стороны BC проходит через точку H и пересекает отрезок BC в точках A_1 и A_2. Аналогично определяются точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Докажите, что шесть точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.

Вывод

6. Леонид Михайлович выписывает на доску n натуральных чисел. Константин Александрович стирает несколько из этих чисел (но не все), перед оставшимися пишет знаки плюс или минус. Если сумма получившихся чисел делится на 2008, то выигрывает Константин Александрович, иначе — Леонид Михайлович. Кто выигрывает при правильной игре в зависимости от n?

7. Докажите, что выпуклый многоугольник можно триангулировать диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

8. В графе степень каждой вершины не превосходит $2k+1$. Докажите, что можно раскрасить его вершины в 2 цвета так, чтобы ребра с разноцветными концами составляли не менее $\frac{k+1}{2k+1}$ от