16 июля

Линейные рекурренты

Поучительная задача. Сколькими способами полоску $2 \times n$ можно замостить доминошками? Найдите ассимптотическую формулу.

Рассмотрим линейное рекуррентное уравнение

$$x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 x_n, \qquad \alpha_0 \neq 0.$$

Упр1. а) Решения этого уравнения (то есть последовательности) образуют линейное пространство относительно естественных операций.

б) Предъявите k последовательностей (=векторов), через которые все остальные последовательности выражаются в виде линейной комбинации;

в) причем единственным образом.

Вывод. Решения образуют k-мерное пространство (над $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \ldots$ – смотря где лежат коэффициенты рекуррентного уравнения).

Упр2. Попробуем найти решения, которые являются *геометрическими прогрессиями* (разумно искать только знаменатели прогрессий λ_i, не правда ли?). Из какого уравнения находятся эти знаменатели λ_i?

Определение. Полученное уравнение называется *характеристическим уравнением* рекуррентной последовательности.

Упр3. Не было ли в предыдущем листке фактически доказано, что (в пространстве всех последовательностей) геометрические прогрессии с различными знаменателями ЛНЗ.

Если у характеристического уравнения нет кратных корней...

Теорема. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – *различные* корни характеристического уравнения, то любое решение рекуррентного уравнения имеет вид $x_n = c_1\lambda_1^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$, где константы c_i определены однозначно.

Замечание 1. В случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, помимо геометрических прогрессий в базис *должны* входить и другие последовательности.

Замечание 2. Как правило λ_i и c_i лежат не в том поле, где коэффициенты, а в *большем* поле (если, скажем, коэффициенты рациональны, то λ_i и c_i вещественные или комплексные числа).

Для самостоятельного решения

1. а) Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, такие что $3f(n) - 2f(f(n)) = n$.

б) а если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$?

в) докажите, что ответ изменится, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Решите функциональное уравнение: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(f(x)) + f(x) = 6x$.