10 класс, группа профи

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Карпов Д.В.
Матвеев К.А.
Самойлов Л.М.
Скопенков А.Б.
Смирнов А.В.

Вишкиль, 2008

Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем.

Анри Пуанкаре

Многие не знают математических истин не вследствие несовершенства своих способностей или недостоверности самого предмета, но вследствие недостаточного усердия в приобретении, изучении и надлежащем сравнении этих идей.

Джон Локк

Обычно предисловия, введения, предуведомления, прологи и прочие «пре» начинаются с какой-нибудь мудреной фразы, из которой автор в следующих нескольких абзацах выводит с полдюжины столь же заумных следствий. Если приведенные нами глубокомысленные эпиграфы не удовлетворили требования читателя к этому достопочтенному жанру, то можем посоветовать обратиться к объемным сборникам афоризмов, из которых читатель узнает много интересного о том, что есть математика. Однако с нашей точки зрения читателю было бы полезнее сформулировать свой ответ на этот вопрос, изучая математику. Например, придя в математический кружок или съездив в одну из летних школ, среди которых Кировская ЛМШ особо выделяется своим размахом. Если читатель решится на такой шаг, он, скорее всего, начнет с изучения простейших вещей, но будет иметь шанс однажды попасть в группу с гордым названием «профи-10». Именно с такой группой авторам этой брошюры выпала честь работать в июле 2008 года. Поэтому в первую очередь мы хотели бы выразить свою благодарность тем одиннадцати бесстрашным десятиклассникам, которые в этом году по праву именовались «профессионалами»: Александру Антропову, Антону Гусеву, Дмитрию Краснову, Олегу Куркотову, Степану Лобастову, Олегу Орлову, Николаю Пасынкову, Леониду Попову, Константину Смирнову, Наталье Турбиной и Павлу Тюрину.

Основную цель своей работы мы видели не только в том, чтобы научить школьников ориентироваться в различных областях математики, но и в том, чтобы провести мосты между этими областями, создав тем самым единую картину всего изученного. А потому мы старались найти правильный баланс разноплановости тематики и идейной выдержанности программы. Многообразие вкусов и представлений преподавателей профи-группы обеспечивала первую составляющую, тогда как сплоченность нашей пятерки — вторую. Хочется надеяться, что при этом мы более соответствовали пословице о двух головах, нежели о семи няньках.

Читатель, разумеется, осознает, что включенные в эту брошюру листочки подобны карандашным наброскам, которые верно передают общие контуры, но бессильны показать цветовую гамму. Вряд ли по этим наборам задач читателю удастся восстановить ту атмосферу живого и плодотворного общения, которую мы старались поддерживать на протяжении всей смены. В силу этого мы не побоимся повторения и еще раз посоветуем читателю самому приехать в летнюю математическую школу, если он там еще не побывал.

К сожалению, в этой брошюре отсутствуют материалы занятий по топологии, которые проводил А. Б. Скопенков — главный специалист по перекрученным ленточкам и разжиганию костра. Причина сего исключительно в том, что материалы эти заслуживают отдельной брошюры.

И, наконец, самая приятная часть любого «пре». Нам хотелось бы выразить благодарность организаторам школы, а также (но далеко не в последнюю очередь) неординарным преподавателям «обычных групп» 10 класса: Александру Вячеславовичу Кирлице, Константину Александровичу Кнопу, Елене Михайловне Ковязиной, Михаилу Александровичу Лукину и Вадиму Вениаминовичу Сидорову.

4 июля

Вступительная олимпиада

1. Для десяти натуральных чисел посчитали все их попарные НОДы. Могут ли 45 полученных чисел равняться $1, 2, \ldots, 45$?

2. У пятиугольной звезды все звенья равны. Известно, что внутренний пятиугольник описанный. Докажите, что этот пятиугольник правильный.

3. На прямой расположена фишка. Петя и Вася играют в такую игру: Вася называет положительное число, не большее 1, а Петя двигает фишку вправо или влево (по своему выбору) на расстояние, названное Васей. При этом Пете запрещается 10 раз подряд двигать фишку в одну сторону. Может ли Вася называть такие числа, чтобы через некоторое число ходов фишка гарантированно оказалась сдвинутой вправо на расстояние, большее 2008?

4. Треугольник ABC таков, что $AB + BC = 2AC$. Докажите, что точка B, центр вписанной окружности треугольника ABC и середины сторон AB и BC лежат на одной окружности.

5. $p > 5$ — простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби $1/p$ равна $2n$. Докажите, что если этот период разбить на два n-значных куска, то сумма чисел в этих кусках равна $\underbrace{99\ldots9}_{n}$ (n девяток).

4 июля

Функция Эйлера (ликбез)

1. Следующие условия эквивалентны:

(i) $(a, m) = 1$;

(ii) a – *обратим* по модулю m, то есть $ab \equiv 1 \pmod{m}$ для некоторого b (отсюда следует, что b определен однозначно);

(iii) $\{0, 1, \ldots, m-1\} = \{0a, 1a, \ldots, (m-1)a\}$.

Опр. Функция Эйлера $\varphi(m)$ равна количеству натуральных чисел, не превосходящих m, и взаимно простых с m ($\Longleftrightarrow$ обратимых по модулю m).

Теорема Эйлера. Если $(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

2. Дано число 2^{2008}. Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.

3. Рассмотрим ряд $1/m, 2/m, \ldots, m-1/m, m/m$.

а) Докажите, что при $m > 2$ $\varphi(m)$ – четно.

б) Докажите, что $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \cdots + \varphi(d_s) = m$, где суммирование ведется по всем делителям числа m.

4. а) Докажите, что при $(a, b) = 1$ $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$;

б) Найдите $\varphi(p^n)$ (p – простое) и выведите общую формулу для $\varphi(m)$.

Замечание. Положим $L(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}) = HOK(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \ldots, \varphi(p_k^{\alpha_k})) \leq \varphi(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k})$. Докажите,что в теореме Эйлера можно вместо $\varphi(m)$ брать $L(m)$.

Для самостоятельного решения

1. Докажите мультипликативность функции $\sigma_k(m) = \sum_{d|m} d^k$.

2. Докажите, что для каждого n существует число с суммой цифр n, делящееся на n.

3. Между двумя единицами пишется двойка, затем между любыми двумя соседними числами пишется их сумма и т.д. Докажите, что число n в итоге будет выписано ровно $\varphi(n)$ раз.

5 июля

Линейные системы: теория

Опр1. Две СЛУ (от одинакового набора переменных) называются *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Опр2. Рассмотрим *элементарные преобразования* СЛУ трех типов:
ЭП1) к строке прибавляем другую строку, умноженную на число;
ЭП2) строку умножаем на ненулевое число;
ЭП3) меняем местами две строки.

Упр1. Если одна СЛУ получается из другой путем применения ЭП1-ЭП3, то эти СЛУ эквивалентны.

Теорема 1(метод Гаусса). При помощи ЭП1-ЭП3 каждую СЛУ можно привести к ступенчатому виду, т.е. к виду

$$\begin{cases} b_{1e}x_e + \cdots\cdots\cdots\cdots + b_{1n}x_n & = & d_1 \\ \quad b_{2k}x_k + \cdots\cdots\cdots + b_{2n}x_n & = & d_2 \\ \qquad b_{3l}x_l + \cdots\cdots + b_{3n}x_n & = & d_3 \\ \qquad\quad \ddots \qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ \qquad\qquad b_{rs}x_s + \cdots + b_{rn}x_n & = & d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = & d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = & d_m \end{cases},$$

где $b_{1e}b_{2k}b_{3l}\dots b_{rs} \neq 0$, $e < k < l < \cdots < s$.

Упр2. а) Сколько решений может быть у СЛУ?
а) Сколько решений может быть у СЛУ, где переменных больше, чем уравнений?
б) Как найти все решения произвольной СЛУ?
в) За сколько действий можно решить СЛУ размера 100×100?

Теорема 2. Однородная система, в которой переменных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение.

Теорема 3. Если система из n уравнений с n неизвестными имеет единственное решение при *каком-то* наборе свободных членов, то она имеет единственное решение при *любом* наборе свободных членов.

Теорема 4. Если СЛУ с целыми коэффициентами и свободными членами имеет единственное решение, то это — решение в рациональных числах.

Теорема 5. Если СЛУ с целыми коэффициентами и свободными членами имеет какое-то решение, то она имеет решение в рациональных числах.

Для самостоятельного решения

Зад1. Напишите а) общее решение СЛУ (у каждого своя СЛУ); б) другое общее решение.

Зад2.(Дискретное уравнение теплопроводности) а) В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно расставить (причем единственным образом!) числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому своих соседей (у клетки максимум 4 соседа).
б) Каков физический смысл задачи (и как она "решается"по физическим соображениям)?
в) Решите задачу, если у клетки 8 соседей.
г) Обобщите задачу на непрямоугольные таблицы с "дырами"внутри и пространственные таблицы.
д) Как выглядит и решается задача для произвольного связного графа?
е) Решите задачу для комплексных чисел.

5 июля

Аффинные преобразования

1. В треугольнике ABC точки D, E, F, G, H – середины отрезков BC, AD, BD, ED, EF соответственно. X – точка пересечения прямых BE и AC, Y – точка пересечения прямых GH и AC. Докажите, что
а) $GY = 3HG$;
б) $BE = 3EX$;
в) найдите отношение площадей треугольников ABC и EGH.

2. Через точку внутри треугольника с площадью S проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник на три параллелограмма и три треугольника. Обозначим S_1, S_2, S_3 площади трех получившихся треугольников. Докажите, что $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$.

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $F = BC \cap DE$, $G = CD \cap EA$, $H = DE \cap AB$, $I = EA \cap BC$ и $J = AB \cap CD$. Докажите, что если площади треугольников IAH, JBI, FCJ, GDF, HEG равны, то прямые AF, BG, CH, DI и EJ пересекаются в одной точке.

4. В шестиугольнике $ABCDEF$ противоположные стороны равны и параллельны. Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.

5. Докажите, что аффинное преобразование можно представить в виде композиции нескольких сжатий (растяжений) и поворотной гомотетии. Сколько сжатий достаточно?

6. а) Рассмотрим пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Обозначим $S = \sum\limits_{i=1}^{5} |A_iA_{i+1}|^2$, $T = \sum\limits_{i=1}^{5} |A_iA_{i+2}|^2$. Известно, что $A_1A_2A_3A_4A_5$ можно перевести аффинным преобразованием в правильный. Найдите S/T.

б) Рассмотрим n-угольник $A_1A_2A_3\dots A_n$. $k \le n$ – натуральное число. Обозначим $S = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_iA_{i+1}|^2$, $T = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_iA_{i+k}|^2$. Известно, что $A_1A_2A_3\dots A_n$ можно перевести аффинным преобразованием в правильный. Найдите S/T.

6 июля

Показатели

Опр. При $(a, m) = 1$ существует положительное δ с условием $a^\delta \equiv 1 \pmod{m}$. Наименьшее из таких чисел называется *показателем, которому a принадлежит по модулю m.*

1. а) Числа $1 = a^0, a^1, \dots, a^{\delta-1}$ по модулю m несравнимы.
б) $a^s \equiv a^t \pmod{m}$ $(s, t \ge 0) \iff s \equiv t \pmod{\delta}$. В частности, $a^s \equiv 1 \pmod{m} \iff s \,\vdots\, \delta$.
в) δ являтся делителем $\varphi(m)$.

Замечание. На самом деле δ являтся делителем $L(m)$.

---

2. Найдите все простые p, q такие, что $2^p - 1 \,\vdots\, q, 2^q - 1 \,\vdots\, p$.

3. Посмотрим на число вида $2^p - 1$ и увидим, что
а) простых чисел бесконечно много;
б) существует хотя бы одно простое число вида $2px + 1$.

4. Докажите, что простые делители числа $2^{2^n} + 1$ имеют вид $2^{n+1}x + 1$.

5. $2^n - 1$ не делится на n при $n > 1$.

6. p, q – простые числа, $q > 5$. Докажите, что если $q | 2^p + 3^p$, то $q > p$.

7. а) $a > 1$, $p > 2$, p – простое. Тогда простые нечетные делители числа $a^p - 1$ или делят $a - 1$, или имеют вид $2px + 1$.

б) $a>1$, $p>2$, p – простое. Тогда простые нечетные делители числа a^p+1 или делят $a+1$, или имеют вид $2px+1$.

8. Число $\frac{a^p-1}{a-1}$ имеет хотя бы один простой множитель, не являющийся делителем $a-1$.

9. Докажите бесконечность множества простых чисел вида $2px+1$.

Для самостоятельного решения

10. а) $a>1$. Тогда $\varphi(a^n-1)$ кратно n.

б) Докажите, что число правильных несократимых дробей со знаменателем a^n-1 кратно n.

11. Найдите все n, при которых $n|3^n-2^n$.

6 июля

Суперпозиция

Великая польза эрудиции. Общеизвестно, что $C_{p^n}^k \vdots p$, p – простое ($k\neq 0, k\neq p^n$).

1. По кругу стоят 128 целых чисел. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 128.

1) По кругу стоит одна единица и 127 нулей. Что получится через 7 ходов? Докажите, что через несколько ходов все числа станут четными.

2) Определим понятие *суммы(суперпозиции)* двух начальных расстановок чисел по кругу. В каких отношениях находится эта сумма с операцией замены чисел?

2. (Интерполяционный многочлен Лагранжа.) Докажите что для любого набора из $n+1$ точки с разными абсциссами найдется (единственный) многочлен степени не выше n, который в этих точках принимает заданные значения.

Указание. Что здесь является аналогами начальной расстановки, операции и суммы расстановок? Через какие специфические(="базисные") многочлены выражается интерполяционный многочлен Лагранжа? Напишите для него явную формулу.

3. (Китайская теорема об остатках.) а) Даны попарно взаимно простые числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и произвольные $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что существует такое число A, что $A\equiv a_i \pmod{m_i}$.

б) Число A определено однозначно по модулю $m_1\ldots m_n$.

4. Есть числа $a_1,\ldots,a_n$, среди них ровно два одинаковых. Напишите выражение от $a_1,\ldots,a_n$, значение которого равно этим одинаковым числам.

Для многочлена $P(x)$ рассмотрим последовательность сумм

$$S_n = P(0)+P(1)+\cdots+P(n).$$

Случай $P(x)=x^k$ представляет особенный интерес.

5. Найдите явную формулу для S_n хоть для какого-нибудь многочлена степени k.

а) **Опр.** *Икс в убывающей степени* m: $x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$.

б) Докажите, что а) $(x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$;

в) Найдите $1^{\underline{m}}+2^{\underline{m}}+3^{\underline{m}}+\cdots+(n-1)^{\underline{m}}$.

6. Докажите, что S_n (от многочлена степени k) есть многочлен степени $k+1$ (то есть $S_n=g(n)$ для некоторого многочлена $g(x)$). Для примера вычислите $1^4+\cdots+n^4$.

Для самостоятельного решения

1. В клетчатой таблице 4×4 идет игра "Жизнь"по следующим правилам: клетка объявляется живой, если на предыдущем ходу у нее было нечетное число живых соседей, и мертвой в противном случае. Найдите максимум периода игры по всем начальным позициям.

2. а) По окружности расставлены p^n целых чисел (p – простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p, если за ход из каждого числа вычитается его

а) левый сосед;

б) l-ый сосед слева, l фиксировано;

в) l-ый сосед слева, l может меняться от хода к ходу!

7 июля
Язык СЛУ

Дискретное уравнение теплопроводности. а) В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно расставить (причем единственным образом!) числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому своих соседей (у клетки максимум 4 соседа).

б) Каков физический смысл задачи (и как она "решается"по физическим соображениям)?

в) Решите задачу, если у клетки 8 соседей.

г) Обобщите задачу на непрямоугольные таблицы с "дырами"внутри и пространственные таблицы.

д) Как выглядит и решается задача для произвольного связного графа?

е) Решите задачу для комплексных чисел.

10 бананов. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково. Веса бананов: а) вещественные; б) положительные; в) неотрицательные; г) натуральные.

101 корова. Есть 101 корова. Если убрать любую буренку, то оставшихся можно разделить на два равных по весу и численности стада. Докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса а) *целые; б) рациональные; в) действительные; г) комплексные.

Числа по кругу. По кругу стоят 123 а) *целых; б) рациональных; в) действительных; г) комплексных числа, не все нулевые. Докажите, что можно выкинуть два соседних числа так, что оставшиеся числа нельзя разбить на две равные по сумме группы.

Зарубки на отрезке. На отрезке $[0, 1]$ отмечены концы, а также конечное число *различных* точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

9 июля
Лемма Гензеля

Обозначение: Будем обозначать степень, в которой простое число p входит в разложение n на простые множители, через $\mathrm{ord}_p(n)$.

Лемма Гензеля: Пусть a, b — различные целые числа, k — натуральное, а p — простое число, не делящее a. Если выполнено одно из условий 1) и 2), то $\mathrm{ord}_p(a^k - b^k) = \mathrm{ord}_p(a - b) + \mathrm{ord}_p(k)$.
1) $p \neq 2$ и $\mathrm{ord}_p(a - b) \geq 1$;
2) $p = 2$ и $\mathrm{ord}_p(a - b) \geq 2$.

Замечание: Иначе лемму Гензеля можно переформулировать так:

если $a \equiv b \pmod{p^\alpha}$ $(a \not\equiv 0 \pmod{p})$, α – максимальное число с этим свойством, то

а) при $p \neq 2$ выполнено $a^k \equiv b^k \pmod{p^{\alpha+s}}$, где $s \equiv \mathrm{ord}_p(k)$, и число $\alpha + s$ нельзя увеличить;

б) при $p = 2$ аналогичное верно только при $\alpha \geq 2$.

Доказательство: Предположим, что $a - b$ делится на p, причем a не делится на p.

а) Докажите, что $\mathrm{ord}_p(a^p - b^p) > \mathrm{ord}_p(a - b)$.
б) Докажите, что $\mathrm{ord}_p(a^s - b^s) = \mathrm{ord}_p(a - b)$, если s не делится на p.
в) Докажите, что $\mathrm{ord}_p(a^k - b^k) \geq \mathrm{ord}_p(a - b) + \mathrm{ord}_p(k)$.
г) Докажите, что если $p > 2$, то $\mathrm{ord}_p(a^p - b^p) = \mathrm{ord}_p(a - b) + 1$.
д) Докажите лемму Гензеля в случае, если выполнено условие 1).
е) Докажите лемму Гензеля в случае, если выполнено условие 2).

ЗАДАЧИ

1. В какой степени 5 входит в разложение числа $3^{10000} - 2^{10000}$ на простые множители?

2. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

3. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

4. Найдите все четверки натуральных чисел (n, k, p, x), для которых $x > 2$, $n > 1$, p — простое и $x^n = p^k + 1$.

5. Какое наибольшее число нулей может быть среди шести последних цифр числа 2^n для $n > 100$?

9 июля

Эллипсы. Изогональное сопряжение

1. Докажите, что аффинное преобразование переводит окружность в эллипс.

2. На плоскости даны прямая ℓ_0 и эллипс Θ. Прямая ℓ параллельна прямой ℓ_0 и пересекает эллипс Θ в точках A и B. Точка M_ℓ – середина отрезка AB. Докажите, что все точки M_ℓ лежат на одной прямой.

3. На сторонах треугольника как на диагоналях построены параллелограммы с параллельными направлениями сторон. Докажите, что вторые диагонали этих параллелограммов пересекаются в одной точке.

Определение. Рассмотрим треугольник ABC и точку P на плоскости. Если для точки P существует такая точка Q, что $\angle(AB, PB) = \angle(QB, CB)$; $\angle(CA, PA) = \angle(QA, BA)$; $\angle(BC, PC) = \angle(QC, CA)$, то точка Q называется точкой, *изогонально сопряженной* к точке P.

4. Для каких точек существует изогонально сопряженная к ним точка?

5. Найдите изогонально сопряженные точки к следующим точкам:
а) центр вписанной окружности;
б) центр вневписанной окружности;
в) ортоцентр;
г) барицентр.

6. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из двух изогонально сопряженных точек, лежат на одной окружности.

7. Докажите, что фокусы эллипса, вписанного в треугольник, изогонально сопряжены.

10 июля

Поле $\mathbb{Z}_p$ и многочлены над ним

Определение. *Полем* называется множество, в котором определены операции сложения и умножения, причем выполняются следующие свойства:
а) сложение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по сложению элемент (он обозначается 0) и у каждого элемента есть обратный по сложению.
б) умножение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по умножению элемент (он обозначается 1) и у каждого ненулевого элемента есть обратный по умножению.
в) сложение и умножение связаны законом дистрибутивности: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
г) при этом $0 \neq 1$.

Примеры полей. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Z}_2$ – поля. $\mathbb{Z}, \mathbb{R}[x]$ – не поля.

1. а) Докажите, что если в поле выполнено $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.
б) При каких n множество $\mathbb{Z}_n$ является полем?

Вывод. Существуют поля как конечные, так и бесконечные.

2. а) Разложите на множители над $\mathbb{Z}_p$ многочлен $x^{p-1} - 1$.
б) Докажите *теорему Вильсона*: $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ при простом p.

в) Найдите сумму $\sum\limits_{0<l<m<s<h<p} lmsh \pmod p$.

3. Пусть $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ – произвольная функция. Тогда найдется такой многочлен $\hat{f} \in \mathbb{Z}_p[x]$, для которого при любом c выполнено $f(c) = \hat{f}(c)$. (Другими словами, на множестве $\mathbb{Z}_p$ не имеет смысла рассматривать никакие функции помимо многочленов!)

4. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны в функциональном смысле тогда и только тогда, когда их разность делитсяна на $x^p - x$.

5. Над $\mathbb{Z}_p$ существует бесконечно много неприводимых многочленов.

Замечание. Если многочлен $f(x)$ имеет целые коэффициенты, то его можно рассмотреть как многочлен над $\mathbb{Z}_p$ (дабы непосвященные понимали как можно меньше, то новый многочлен точно также обозначим $f(x)$).

6. (Критерий Эйзенштейна) Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, у которого старший коэффициент не делится на p, все остальные коэффициенты делятся на p, а свободный член не делится на p^2 для какого-то простого числа p. Тогда $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

7. Многочлен $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z} \iff n$ – простое.
(Тонкий намек: $f(x)$ неприводим $\iff f(x + 2008)$ – неприводим).

8. Пусть для натурального n и простого числа p нашлось $(n+1)$ целое число, n-е степени которых дают одинаковые остатки при делении на p. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, дающие одинаковые остатки при делении на p.

9. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Простое число p таково, что для любого целого n остаток от деления $f(n)$ на p равен 0 или 1. Докажите, что $\deg(f) \geq p - 1$. (Степень $p - 1$, очевидно, бывает.)

10 июля

Линейные(векторные) пространства

Опр. Пусть даны множество V (“векторы”) и поле K (“числа”), имеются операция сложения векторов и для каждого числа имеется операция умножения вектора на число. При этом:

а) сложение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по сложению элемент ($\overrightarrow{0}$) и у каждого вектора $\overrightarrow{v}$ есть обратный по сложению $(-\overrightarrow{v})$;

б) $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$; $(k_1 k_2)\overrightarrow{v} = k_1(k_2\overrightarrow{v})$ (здесь $k_1, k_2 \in K$, $\overrightarrow{v} \in V$);

в) $(k_1 + k_2)\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{v} + k_2\overrightarrow{v}$; $k(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = k\overrightarrow{v}_1 + k\overrightarrow{v}_2$.

Тогда V называется *линейным(векторным) пространством* над K.

Упр1. Задайте естественную структуру линейного пространства на следующих множествах: а) K^n — строки из n чисел; б) линейные уравнения вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b_n$ с коэффициентами из K; в) все многочлены над полем K; г) многочлены степени не выше n над полем K; д) векторы на плоскости и в пространстве; е) последовательности элеметов поля K; ж) множество функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; з) множество функций $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Упр2. Образуют ли линейные пространства следующие множества (относительно естественных операций): а) многочлены степени n над полем K; б) неубывающие последовательности (над $\mathbb{R}$); в) многочлены с фиксированным корнем α; г) строки длины n с нулевой суммой элементов; д) строки длины n с нулевым произведением элементов; е) множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$; ж) множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$; з) последовательности элементов поля F, в которых конечное число ненулевых элементов;

Упр3. а) Докажите, что множество решений произвольной ОСЛУ образует векторное пространство относительно естественных операций.
б) С каждой СЛУ естественным образом свяжем ОСЛУ. Как при этом окажутся связанными множества их решений?

Упр4. Дайте определение *подпространства.*

Упр5. В упражнениях 1-2 укажите пары "пространство–его подпространство".

Упр6. Рассмотрим пространство векторов на плоскости. Опишите все его подпространства.

Упр7. Дайте определение *изоморфных* (как бы одинаковых) пространств.

Упр8. Найдите пары изоморфных пространств в упражнениях 1-2.

Опр. Подмножество S векторного пространства называется *системой образующих* этого пространства, если всякий его вектор можно представить в виде $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, где $v_1, \dots, v_n \in S$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Выражение $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение) называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \dots, v_n$.

Опр. Пусть S – произвольное подмножество векторного пространства V. *Линейной оболочкой* множества S в пространстве V называется совокупность $L(S)$ всех линейных комбинаций векторов из S.

Упр9. Линейная оболочка $L(S)$ является подпространством пространства V, содержащим множество S. При этом всякое подпространство пространства V, содержащее S, содержит и $L(S)$ (по этой причине $L(S)$ называют ещё подпространством, натянутым на множество S).

Упр10. В каждом из пространств в упражнениях 1-2 укажите какую-нибудь *минимальную систему образующих* (то есть ту, которая перестает быть системой образующих после выкидывания любого из векторов).

Упр11. Докажите, что пространство $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ не имеет конечной (и даже счетной) системы образующих.

11 июля

Размерность

Линейная зависимость и независимость

Предложение. Пусть $S = \{v_i, i \in I\}$ – семейство векторов векторного пространства V. Тогда следующие условия равносильны:

а) никакой вектор из V нельзя выразить через векторы из S двумя разными способами;

б) никакой вектор из S нельзя выразить через остальные;

в) если линейная комбинация векторов из S равна нулевому вектору, то все ее коэффициенты равны 0.

Опр. Семейство векторов, обладающее свойствами, описанными в предыдущем предложении, называется *линейно независимым*, а не обладающее – *линейно зависимым*.

Упр1. Докажите следующие свойства линейной зависимости и независимости:

а) система, содержащая нулевой вектор, является ЛЗ;

б) система, содержащая пропорциональные векторы, является ЛЗ;

в) если семейство векторов ЛНЗ, то и любая его часть ЛНЗ;

г) если семейство ЛЗ, то и любое содержащее его семейство ЛЗ;

д) если ЛНЗ семейство векторов не является системой образующих векторного пространства, то к этому семейству можно добавить вектор так, чтобы оно осталось ЛНЗ.

Опр. Система образующих S векторного пространства называется его *базисом*, если всякий элемент пространства представляется в виде линейной комбинации элементов из S, причем единственным образом.

Теорема 1. Следующие условия равносильны:

а) S – базис пространства V;

б) S – линейно независимая система образующих пространства V;

в) S линейно независимо, но теряет это свойство при добавлении любого вектора из V;

г) S – система образующих пространства V, но теряет это свойство при удалении любого вектора.

Таким образом, базис векторного пространства можно описать, с одной стороны, как *минимальную систему образующих*, а с другой – как *максимальную линейно независимую систему*. Возникая на узком стыке двух почти не сочетаемых качеств, базисы не могут не приобрести ценные свойства.

Размерность

Теорема 2. Если в пространстве есть базис из n векторов, то любые $n+1$ векторов линейно зависимы.

Следствие. Если в пространстве есть базис из n векторов, то любой другой базис тоже содержит n векторов

Опр. Векторное пространство, имеющее конечный базис, называется *конечномерным*, а число векторов в каждом из его базисов – его *размерностью.* Если в векторном пространстве нет конечного базиса, оно называется *бесконечномерным.*

Замечание. Мы не доказываем, что в бесконечномерном пространстве тоже есть базис и что любые два базиса равномощны.

Упр2. В бесконечномерном векторном пространстве есть бесконечная ЛНЗ система векторов.

Упр3. а) Из любой системы образующих конечномерного векторного пространства можно удалить часть векторов так, чтобы оставшиеся образовывали базис.

б) К любой линейно независимой системе векторов конечномерного векторного пространства можно добавить векторы так, чтобы получился базис.

Теорема 3. Размерность собственного (не совпадающего со всем пространством) подпространства конечномерного пространства меньше размерности пространства.

11 июля
Инверсия. Поляры

Определение 1. Рассмотрим окружность ω с центром в точке O и радиуса R. *Инверсией* относительно ω называется отображение плоскости без точки O в себя, переводящее каждую точку P в такую точку P', лежащую на луче OP, что $OP \cdot OP' = R^2$.

Определение 2. Для каждой точки P, отличной от точки O, ее *полярой* будем называть прямую p, проходящую через инверсный образ P' точки P и перпендикулярную прямой OP. Точку P будем называть *полюсом* прямой p.

Вопрос. Для каких прямых существует полюс?

1. (Лемма о поляре) Докажите, что если полюс A прямой a лежит на поляре b точки B, то точка B лежит на прямой a.

2. Точка X лежит на радикальной оси двух непересекающихся окружностей Γ_1 и Γ_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно. Точки X_1 и X_2 – инверсные образы точки X относительно Γ_1 и Γ_2. Докажите, что точки O_1, X_1, O_2, X_2 лежат на одной окружности.

3. Пусть A, B, C – три различные точки плоскости, а прямые a, b, c их поляры. Докажите, что следующие два утверждения равносильны:
(1) точки A, B, C лежат на одной прямой;
(2) прямые a, b, c пересекаются в одной точке или параллельны.

4. Из точки P вне окружности Γ проведены касательные PM и PN. Докажите, что прямая MN – поляра точки P.

5. Из точки P внутри окружности S провели две секущие AB и CD. Докажите, что точка пересечения прямых AC и BD лежит на поляре точки P.

6. Пусть дан четырехугольник $ABCD$
а) вписанный в окружность S;
б) описанный вокруг окружности S.
Докажите, что перпендикуляр, опущенный из центра S на прямую, соединяющую точки пересечения противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей.

7. В какое утверждение переходит неравенство треугольника при инверсии?

8. В какое утверждение переходит утверждение "медианы треугольника пересекаются в одной точке"при полярном преобразовании, если за окружность полярного преобразования взять окружность, описанную вокруг треугольника?

12 июля
Матбой

1. Вписанная в неравнобедренный треугольник ABC окружность касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точка B' – вторая точка пересечения вписанной окружности с отрезком BB_1. BH – высота. Докажите, что точки B, H, середина A_1C_1 и середина B_1B' лежат на одной окружности.

2. Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

3. Докажите, что многочлен $x^{2008} - x^{2007} + 2007 \cdot x^{1003} + 3$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

4. Какое наибольшее количество нулей может быть среди шести последних цифр степени двойки, большей 10^6?

5. Назовем многочлен P с вещественными коэффициентами *любопытным*, если $P(x)$ рационально тогда и только тогда, когда рационально x. При каких n существует любопытный многочлен n-й степени?

6. На лесной кольцевой тропинке есть 16 юношей и имеется 16 укромных местечек, где расположены девушки. В игре "Честный Киллер"юноши охотятся за девушками: сначала юноша №1 подкрадывается к ближайшей по часовой стрелке живой девушке и убивает ее; затем второй юноша подкрадывается к ближайшей к нему нему по часовой стрелке живой девушке и убивает ее и т.д. Докажите, что сумма пройденных юношами расстояний не зависит от их нумерации.

7. Пусть $x, y, z > 0$, $xyz(x + y + z) = 1$. Докажите, что $\min{(x + y)(x + z)} = 2$.

8. Точки P и Q лежат внутри треугольника ABC и изогонально сопряжены. Докажите, что

$$\frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} + \frac{BP \cdot BQ}{BA \cdot BC} + \frac{CP \cdot CQ}{CA \cdot CB} = 1.$$

14 июля
Аргумент размерности

Сюжет первый, повествующий о характеристических векторах

1. В таблице $(n + 1) \times n$ ($n + 1$ строка, n столбцов) некоторые клетки отмечены крестиками. Докажите, что можно стереть несколько строк (не все), так чтобы в оставшейся таблице в каждом столбце было бы отмечено четное число крестиков.

2. $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ — непустые подмножества n-элементного множества. Докажите, что можно выбрать такие непустые непересекающиеся множества индексов $\{i_1, \ldots, i_k\}$ и $\{j_1, \ldots, j_\ell\}$, что

$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k} = B_{j_1} \cup B_{j_2} \cup \cdots \cup B_{j_\ell}.$$

Сюжет второй, в котором появляется скалярное произведение

Определение. Пусть $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ — векторы из F^n. Положим $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$ (*скалярное произведение* векторов u и v).

3. Докажите свойства скалярного произведения ($u, v, w, v_1, \ldots, v_n \in V$, $k, a_1, \ldots, a_n \in F$):

а) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

б) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;

в) $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$;

г) Если $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$, то $a_1\langle v_1, v\rangle + \ldots + a_n\langle v_n, v\rangle = 0$.

Определение. Векторы $u, v \in F^n$ называются *ортогональными*, если $\langle u, v\rangle = 0$.

4. Докажите, что любой набор попарно ортогональных ненулевых векторов в $\mathbb{R}^n$ линейно независим.

5. В городе k супружеских пар и n клубов. Для мужчины и женщины количество клубов, в которых они оба бывали, нечетно тогда и только тогда, когда они – муж и жена. Докажите, что $n \geq k$.

6. Несколько разбойников ходили в операции, причем любой разбойник побывал в n операциях, а любые два разбойника побывали одновременно в $k < n$ операциях. Докажите, что число операций не меньше числа разбойников.

7. В КИМах Единой Государственной Олимпиады (ЕГО) n тестовых вопросов. ЕГО сдают k участников. Известно, что проверочная комиссия может так приписать положительные веса тестовым вопросам, чтобы участники расположились по первичным баллам в любом наперед заданном проплаченном порядке. Привести подробное аккуратное обоснование того, что $n \geq k$.

Сюжет третий, в котором мы понимаем, что многочлены от нескольких переменных есть линейно-алгебраические объекты

8. Имеются многочлены $P_1(y_1, \ldots, y_{1000}), \ldots, P_{1001}(y_1, \ldots, y_{1000})$ с действительными коэффициентами. Докажите, что существует такой ненулевой многочлен $R(x_1, \ldots, x_{1001})$, что $R(P_1, \ldots, P_{1001}) = 0$ (имеется ввиду равенство многочленов).

9. Пусть $\mathfrak{B}$ — такое семейство подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$, что мощности попарных пересечений подмножеств этого семейства принимают ровно ℓ различных значений $(0 < \ell < n)$. Докажите, что наибольшее возмозможное значение $|\mathfrak{B}|$ равно $C_n^0 + \cdots + C_n^\ell$.

14 июля

Двойное отношение

Определение. *Двойным отношением* четырех точек A, B, C, D на плоскости называется число $(A, B, C, D)^* := \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$.

Определение. *Двойным отношением* четырех точек A, B, C, D на одной прямой называется число $(A, B, C, D) := \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$.

Определение. *Двойным отношением* четырех прямых a, b, c, d, проходящих через одну точку, называется число $(a, b, c, d) := \frac{\sin\angle(a,c)}{\sin\angle(b,c)} : \frac{\sin\angle(a,d)}{\sin\angle(b,d)}$.

1. Докажите, что двойное отношение сохраняется при полярном преобразовании.

2. Докажите, что двойное отношение сохраняется при инверсии.

3. Докажите, что если $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

4. Докажите, что $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$.

5. Окружность Γ пересекает прямые a, b, c, d, которые пересекаются на Γ, в точках A, B, C, D. Тогда $|(a, b, c, d)| = (A, B, C, D)^*$.

6. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, BC и AD — в точке F диагонали AC и BD пересекают EF в точках M и N. Тогда $(E, F, M, N) = -1$.

7. $ABCD$ – вписанный четырехугольник, точка M середина диагонали AC. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBD$ тогда, и только тогда, когда $(A, C, B, D)^* = 1$.

15 июля

Первообразные корни

Определение. Если $(a, m) = 1$ и показатель a по модулю m равен $\varphi(m)$, то a называется *первообразным корнем по модулю m.*

Замечание1. Тем самым $a = a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{\varphi(m)-1} \pmod m$ – это ***все*** вычеты, взаимно простые с m.

Замечание2. Наличие первообразного корня в точности означает, что группа обратимых элементов по модулю m является *циклической.*

Упр1. Существует ли первообразный корень по модулю 8? По модулю 9?

Зад0. Пусть по модулю m существует первообразный корень. а) Сколько тогда существует элементов a, для которых $a^d \equiv 1 \pmod m$? б) Сколько имеется первообразных корней?

Зад1. а) Над $\mathbb{Z}_p$ (p – простое) многочлен степени d имеет не более d корней;

б) при $d|p-1$ уравнение $x^d = 1$ имеет ровно d корней;

в) если $d|p-1$, то обозначим через $f(d)$ количество вычетов показателя ровно d. Докажите, что $d = \sum\limits_{d'} f(d')$, где суммирование ведется по всем делителям d' числа d.

Теорема (Гаусс). Существует первообразный корень по модулю простого p.

Упр2. а) Как выяснить, является ли a первообразным корнем по модулю m, возводя a не во все $\varphi(m)$ степеней?

б) Покажите, что 2 – первообразный корень по модулю 29.

Упр3. Сколько корней над $\mathbb{Z}_p$ имеет уравнение $x^d = 1$? Как найти все решения этого уравнения, если известен первообразный корень?

Замечание3. По модулю m существует первообразный корень тогда и только тогда, когда m иммет вид $2, 4$, p^α, $2p^\alpha$, где $p > 2$ – простое число.

---

1. Решите уравнение $1 + x + ... + x^6 \equiv 0 \pmod{29}$.

2. Докажите, что числа $1, 2, ..., p-1$ можно расставить по кругу так, что для любых трех последовательных a, b, c разность $b^2 - ac$ будет делиться на простое p.

3. Докажите, что для каждого n найдется такое m, что $2^m + 2008 \,\vdots\, 3^n$.

---

4. Найдите сумму для целых d (для отрицательных тоже)

$$\sum_{n=0}^{p-1} n^d \pmod p.$$

5. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ будем называть *перестановочным*, если значения $f(0), \ldots, f(p-1)$ попарно различны.

а) при каких d многочлен x^d будет перестановочным по модулю p?

б) по модулю 101 не существует перестановочного многочлена степени 100;

в) по модулю p не существует перестановочного многочлена степени $d > 1$, $d|p-1$.

6. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Простое число p таково, что для любого целого n остаток от деления $f(n)$ на p равен 0 или 1. Докажите, что $\deg(f) \geq p-1$. (Степень $p-1$, очевидно, бывает.)

15 июля
Проективные преобразования

Определение 1. *Проективной плоскостью* называется плоскость, пополненная бесконечно удаленной прямой.

Определение 2. *Проективным преобразованием* называется преобразование проективной плоскости, переводящее прямые в прямые.

Определение 3. Проективное преобразование, оставляющее на месте бесконечно удаленную прямую, называется *аффинным.*

Теорема 1. Существует проективное преобразование, переводящее данную прямую в бесконечно-удаленную.

Определение 4. *Особой (выделенной)* прямой называется прямая, переходящая в бесконечно удаленную.

Теорема 2. Отношение векторов коллинеарных особой прямой сохраняется.

Теорема 3. Существует единственное проективное преобразование, переводящее данные четыре точки не лежащие на одной прямой в данные четыре точки не лежащие на одной прямой.

Теорема 4. Двойное отношение сохраняется при проективных преобразованиях.

1. (Теорема Паппа) Рассмотрим на плоскости пару прямых ℓ_1 и ℓ_2, и пусть точки $A_1, B_1, C_1 \in \ell_1$, а точки $A_2, B_2, C_2 \in \ell_2$. Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1; B_1C_2 и B_2C_1; A_1C_2 и A_2C_1 лежат на одной прямой.

2. (Теорема Дезарга) Рассмотрим два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ на плоскости. Докажите,что точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2; B_1C_1 и B_2C_2; A_1C_1 и A_2C_2 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 проходят через одну точку.

3. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведены четыре прямые, пересекающие его стороны в точках K и K', L и L', M и M', N и N'. Прямые KM и LN пересекаются в точке P, прямые $K'M'$ и $L'N'$ — в точке P'. Докажите, что точки P, P' и O лежат на одной прямой.

4. а) На плоскости даны две прямые l_1 и l_2 и точка P не лежащая не на одной из них. Через P проводятся пары прямых, пересекающие l_1 и l_2 в точках A и C, соответственно B и D. Докажите, что точки пересечения прямых AD и BC для всевозможных пар прямых l_1 и l_2 лежат на одной прямой p. Если l_1 и l_2 пересекаются в точке Q, то и p проходит через точку Q.
б) На плоскости даны прямая q и две точки A и B не лежащие на этой прямой. Пусть U и V — пара точек на q. M — точка пересечения прямых UA и VB, N — точка пересечения прямых VA и UB. Докажите, что прямые MN пересекаются в одной и той же точке Q лежащей на прямой AB.

5. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке и прямые AB_1, BC_1 и CA_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые AC_1, BA_1 и CB_1 пересекаются в одной точке.

16 июля
Линейные рекурренты

Поучительная задача. Сколькими способами полоску $2 \times n$ можно замостить доминошками? Найдите ассимптотическую формулу.

Рассмотрим линейное рекуррентное уравнение

$$x_{n+k} = \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \alpha_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + \alpha_0 x_n, \qquad \alpha_0 \neq 0.$$

Упр1. а) Решения этого уравнения (то есть последовательности) образуют линейное пространство относительно естественных операций.

б) Предъявите k последовательностей (=векторов), через которые все остальные последовательности выражаются в виде линейной комбинации;

в) причем единственным образом.

Вывод. Решения образуют k-мерное пространство (над $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \ldots$ – смотря где лежат коэффициенты рекуррентного уравнения).

Упр2. Попробуем найти решения, которые являются *геометрическими прогрессиями* (разумно искать только знаменатели прогрессий λ_i, не правда ли?). Из какого уравнения находятся эти знаменатели λ_i?

Определение. Полученное уравнение называется *характеристическим уравнением* рекуррентной последовательности.

Упр3. Не было ли в предыдущем листке фактически доказано, что (в пространстве всех последовательностей) геометрические прогрессии с различными знаменателями ЛНЗ.

Если у характеристического уравнения нет кратных корней...

Теорема. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – *различные* корни характеристического уравнения, то любое решение рекуррентного уравнения имеет вид $x_n = c_1\lambda_1^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$, где константы c_i определены однозначно.

Замечание 1. В случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни, помимо геометрических прогрессий в базис *должны* входить и другие последовательности.

Замечание 2. Как правило λ_i и c_i лежат не в том поле, где коэффициенты, а в *большем* поле (если, скажем, коэффициенты рациональны, то λ_i и c_i вещественные или комплексные числа).

Для самостоятельного решения

1. а) Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, такие что $3f(n) - 2f(f(n)) = n$.

б) а если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$?

в) докажите, что ответ изменится, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Решите функциональное уравнение: $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(f(x)) + f(x) = 6x$.

16 июля

Проективность и окружность

I. Часть первая, теоретическая.

0. Пусть точка M – середина отрезка AB, N – бесконечно удаленная точка прямой AB. Докажите, что $(A, B, M, N) = -1$.

0. Пусть прямая ℓ – поляра точки L относительно окружности Γ. Прямая k, проходящая через точку L пересекает окружность Γ в точках A и B, а прямую ℓ в точке M. Докажите, что $(A, B, L, M) = -1$.

0. $ABCD$ – вписанный четырехугольник, точка M середина диагонали AC. Докажите, что $\angle ABM = \angle CBD$ тогда, и только тогда, когда $(A, C, B, D)^* = 1$.

Теорема. Существует проективное преобразование, переводящее данную точку внутри окружности в центр, а окружность в себя.

1. Дана окружность и точка C внутри нее. Через точку C проведены четыре хорды A_iB_i, $i = 1, \ldots, 4$. D — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, E — точка пересечения прямых B_1B_2 и B_3B_4. Докажите, что точки C, D и E лежат на одной прямой.

2. Существует проективное преобразование, переводящее данную прямую не пересекающую окружность в бесконечно удаленную, а окружность в себя.

3. (теорема Паскаля) Пусть $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ — точки, лежащие на одной окружности. Тогда точки пересечения прямых A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 лежат на одной прямой.

4. (теорема Брианшона) Пусть $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ — вершины описанного шестиугольника. Тогда прямые A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 пересекаются в одной точке.

5. (теорема о бабочке) Через середину C хорды AB проведены хорды KL и MN. Прямые ML и KNпересекают прямую AB в точках D и E. Тогда $CD = CE$.

II. Часть вторая, практическая.

6. Окружность Γ касается прямых, содержащих стороны AB и BC треугольника ABC, в точках D и E соответственно. Вторые касательные, проведенные из A и C к Γ касаются ее в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DG, FE и AC пересекаются в одной точке.

7. Окружность Γ касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E и его описанной окружности. Докажите, что прямая DE проходит через точку I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

8. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания высот, а A_2, B_2, C_2 — соответсвующие основания медиан треугольника ABC. Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, A_1C_2 и A_2C_1, B_1C_2 и B_2C_1 лежат на одной прямой.

9. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Биссектрисы углов A_1AC и C_1CA пересекаются в точке B'. Аналогично определяются точки A' и C'. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой, проходящей через центр вписанной окружности треугольника.

17 июля

Теорема Форда-Фалкерсона

Определение 1. Пусть задано множество вершин V, в котором выделены две вершины s (*вход* или *исток*) и t (*выход* или *сток*). Пусть определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$c(x, y) \geq 0, \quad c(x, s) = 0, \quad c(t, y) = 0$$

для любых вершин $x, y \in V$. Тогда $G = (V, s, t, c)$ — *сеть*, функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Определение 2. Пусть G — сеть, а функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:

1° $f(x, y) \leq c(x, y)$;

2° $f(x, y) = -f(y, x)$;

3° Для любой вершины $v \in V$, $v \neq s, t$ выполняется условие $\sum_{x \in V} f(v, x) = 0$.

Тогда f — поток в сети G. Число $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$ называется *величиной потока*. Поток сети G с максимальной величиной называется *максимальным*.

Замечание. Вообще-то совсем не очевидно, почему максимальный поток существует.

Определение 3. Пусть G — сеть, а множество ее вершин V разбито на два непересекающихся множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) — разрез сети G.

Величина $c(S, T) = \sum_{x \in S,\, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*, а $f(S, T) = \sum_{x \in S,\, y \in T} f(x, y)$ называется *потоком через разрез* (S, T). Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.

Замечание. Нетрудно понять, что минимальный разрез сети существует. Возможно, таких разрезов несколько.

1. Для любого потока f и разреза (S, T) сети G докажите, что $|f| = f(S, T)$.

Определение. 1) Пусть f — поток в сети G. Рассмотрим сеть G_f с теми же V, s, t и пропускной способностью $c_f(x,y) := c(x,y) - f(x,y)$. Назовем G_f *остаточной сетью* потока f.

2) Проведем на множестве вершин V ориентированные ребра из x в y для всех таких пар (x,y), что $c_f(x,y) > 0$. Любой путь из s в t в полученном ориентированном графе назыается *дополняющим путем* потока f.

2. (Теорема Форда-Фалкерсона, 1956) В сети G с пропускной способностью c задан поток f. Докажите, что следующие три утверждения равносильны:

1° поток f максимален;

2° существует разрез (S,T) такой, что $|f| = c(S,T)$;

3° в остаточной сети G_f нет дополняющего пути.

Следствие. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

3. Докажите, что в целочисленной сети (т. е. в сети, пропускные способности всех ребер которой являются целыми числами) существует максимальный поток, причем среди максимальных потоков данной сети найдется целочисленный.

4. Пусть (S_1, T_1) и (S_2, T_2) — минимальные разрезы в сети G. Докажите, что разрезы $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ и $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ также являются минимальными

а) для целочисленной сети G;

а) для произвольной сети G.

Выведете из теоремы Форда-Фалкерсона следующие утверждения.

5. (Теорема Холла.) Если в двудольном графе с долями A и B для любого множества из k вершин $V \subseteq A$ существует не менее k вершин доли B, смежных хотя бы с одной из вершин множества V, то существует паросочетание, содержащее все вершины из A.

6. (Теорема Менгера.) Даны граф G и его вершины u и v.

а) Пусть при удалении любых $k-1$ ребер в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих ребер.

б) Пусть вершины u и v несмежны и при удалении любых $k-1$ вершин в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих внутренних вершин.

7. (Теорема Кёнига.) На клетчатой плоскости расставлено несколько ладей. Тогда наибольшее число небьющих друг друга ладей, которые можно выбрать из них, равно наименьшему числу линий (столбцов и строк), покрывающих все данные ладьи.

17 июля

Матбой «9 профи — 10 профи»

1. Биссектрисы углов A, B, C треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $S_{ABC_1} + S_{ACB_1} + S_{CBA_1} \geq S_{ABC}$.

2. В графе степени всех вершин не меньше 2 и не больше 100. Докажите, что его вершины можно покрасить в 101 цвет так, чтобы любые две смежные вершины имели разные цвета и для любой вершины смежные с ней не все были одного цвета.

3. В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H, а также прямые MC и MD, пересекающие прямую AB в точках F и K. Докажите, что $EF = KH$.

4. Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что для любых i, j выполняется неравенство $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. Докажите, что $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$.

5. Дан многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ с рациональными коэффициентами, причем $d < 0$. Произведение каких-то двух корней $P(x)$ рационально. Докажите, что их сумма тоже рациональна.

6. Имеется связная клетчатая фигура из $n-1$ клетки ($n \geq 2$). Докажите, что из клетчатого квадрата $n \times n$ можно вырезать четыре таких непересекающихся фигуры. (Клетчатая фигура называется связной, если любые две её клетки можно соединить цепочкой её клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.)

7. На сфере отмечено n различных точек. Докажите, что сферу можно разбить на n конгруэнтных связных областей так, чтобы в каждой области лежала ровно одна отмеченная точка.

8. Назовем словом любую конечную последовательность букв Л и Я. Есть две операции над словами: первая — вставить в любом месте слова букву Л, а в конце слова — Я; вторая — вставить в любом месте слова ЛЯ. Докажите, что множество слов, которые можно получить из слова ЛЯ с помощью первой операции совпадает с множеством слов, которые можно получить из слова ЛЯ с помощью второй операции.

9. Натуральное число n таково, что $4^n + 2^n + 1$ — простое. Докажите, что n – степень тройки.

10. Рассмотрим последовательность рациональных дробей $P_n(x)$, заданную следующим условием:

$$P_1(x) = x; \quad P_2(x) = x^3;$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{P_n^3(x) - P_{n-1}(x)}{1 + P_n(x)P_{n-1}(x)}, \qquad n \geq 2.$$

Докажите, что все дроби $P_n(x)$ являются многочленами.

19 июля

Функции на вершинах n-мерного куба и теорема Франкла-Уилсона

Определения и обозначения 1: *n-мерным кубом* будем называть множество всех строк длины n из нулей и единиц (при этом строки называются *вершинами*). Мы будем обозначать n-мерный куб через $\{0,1\}^n$. Его можно интерпретировать как множество всех подмножеств n-элементного множества. Поймите почему это так. А какова геометрическая интерпретация? В дальнейшем, характеристическую строку подмножества S мы будем обозначать $\chi(S)$.

Определения и обозначения 2: Через F^A обозначим множество функций, определенных на множестве A и принимающих значения в поле F. На множестве F^A можно ввести структуру векторного пространства над F. Каким образом?

Упражнение 1. Найдите размерность пространства F^A для конечного множества A. В частности, найдите размерность пространства $F^{\{0,1\}^n}$.

Замечание: Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен с коэффициентами из поля F. Если в этот многочлен вместо всех переменных подставить нули и единицы, то получится элемент из F. Но подстановка нулей и единиц вместо переменных может рассматриваться как вычисление значения многочлена в вершинах n-мерного куба. Таким образом, каждый такой многочлен задает функцию из $\{0,1\}^n$ в F, то есть элемент пространства $F^{\{0,1\}^n}$.

Задача 1. Докажите, что все функции, заданные мономами вида $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, где $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, линейно независимы (возможен случай $k = 0$, тогда наш моном — константа). Выведите отсюда, что они образуют базис пространства $F^{\{0,1\}^n}$. Покажите, что каждую функцию из этого пространства можно задать с помощью многочлена.

Теорема 1: Пусть $\mathfrak{B}$ — такое семейство подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$, что мощности попарных пересечений подмножеств этого семейства принимают не более ℓ различных значений $(0 < \ell \leq n)$. Докажите, что наибольшее возможное значение $|\mathfrak{B}|$ равно $C_n^0 + \cdots + C_n^\ell$.

Упражнение 2. Приведите пример семейства $\mathfrak{B}$ с указанными свойствами, в котором ровно $C_n^0 + \cdots + C_n^\ell$ элементов.

Доказательство теоремы 1: Пусть $M_1, \ldots, M_k$ — подмножества из $\mathfrak{B}$, упорядоченные так, чтобы их мощности в этой последовательности не убывали. Пусть, далее, мощности попарных пересечений этих подмножеств принимают только значения $t_1, \dots, t_\ell$ (некоторые, возможно, по 0 раз). Обозначим через f_j функцию из $\mathbb{R}^{\{0,1\}^n}$, заданную многочленом $\prod\limits_{t_i<|M_j|}(\langle\chi(M_j), x\rangle - t_i)$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Задача 2. а) Докажите, что функции $f_1, \dots, f_k$ линейно независимы.

б) Пусть W — линейная оболочка функций из $\mathbb{R}^{\{0,1\}^n}$, заданных мономами вида $x_{i_1}\dots x_{i_k}$, где $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ и $0 \le k \le l$. Докажите, что $f_1, \dots, f_k$ принадлежат W.

в) Докажите теорему 1.

Теорема 2 (Франкл и Уилсон, 1981): Пусть p — простое число, $\mathfrak{C}$ — семейство $2p$-элементных подмножеств множества $\{1, \dots, 4p\}$, никакие два из которых не пересекаются ровно по p элементам. В таком случае $|\mathfrak{C}| \le 2C_{4p-1}^{p-1}$.

Замечание: Эта теорема является фундаментальным результатом комбинаторики. В частности, из нее можно вывести несколько важных геометрических следствий. Существует гипотеза, что утверждение теоремы верно и для составного p, однако, пока эта проблема остается нерешенной.

Доказательство теоремы 2: Пусть $M_1, \dots, M_k$ — подмножества из $\mathfrak{C}$, не содержащие $4p$. Мы будем рассматривать их как подмножества $\{1, \dots, 4p-1\}$. Пусть S — множество тех вершин $\{0,1\}^{4p-1}$, в которых ровно $2p$ единиц. Обозначим через g_j функцию из $\mathbb{Z}_p^S$, заданную многочленом $\prod\limits_{1\le i\le p-1}(\langle\chi(M_j), x\rangle - i)$. Здесь $x = (x_1, \dots, x_{4p-1})$.

Задача 3. а) Докажите, что функции $g_1, \dots, g_k$ линейно независимы.

б) Пусть W — подпространство $\mathbb{Z}_p^S$, натянутое на функции, заданные мономами вида $x_{i_1}\dots x_{i_k}$, где $1 \le i_1 < \dots < i_k \le 4p-1$ и $0 \le k \le p-1$. Докажите, что $g_1, \dots, g_k$ принадлежат W.

в) Пусть U — подпространство $\mathbb{Z}_p^S$, натянутое на функции, заданные мономами вида $x_{i_1}\dots x_{i_{p-1}}$, где $1 \le i_1 < \dots < i_{p-1} \le 4p-1$. Докажите, что $U = W$.

г) Докажите, что $k \le C_{4p-1}^{p-1}$.

д) Докажите теорему 2.

19 июля

Сильная связность ориентированных графов

Определение. Вершины a и b ориентированного графа G назовем *связанными*, если в графе G существуют пути из a в b и из b в a.

Определение. Ориентированный граф G называется *сильно связным*, если любые две его вершины связаны.

Определение. Таким образом, множество вершин $V(G)$ оказывается разбито на классы попарно связанных вершин, которые мы будем называть *компонентами сильной связности.*

Определение. Построим для нашего ориентированного графа G *граф компонент сильной связности* $C(G)$, вершины которого соответствуют компонентам сильной связности ориентированного графа G. Проведем в графе $C(G)$ ребро $V_i \to V_j$ тогда и только тогда, когда в графе G есть ребро, направленное от V_i к V_j.

1. а) В графе $C(G)$ нет циклов.

б) Для любой компоненты сильной связности V_i граф $G(V_i)$ на вершинах множества V_i с ребрами графа G между этими вершинами сильно связен.

Определение. Пусть V_i — компонента сильной связности ориентированного графа G. Назовем эту компоненту *промежуточной*, если в графе $C(G)$ существует ребро, входящее в V_i, и существует ребро, выходящее из V_i. В противном случае назовем компоненту V_i *крайней.*

2. В ориентированном графе 200 вершин, из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно добавить не более 100 новых ориентированных ребер так, чтобы этот граф стал сильно связным. (Между двумя вершинами может быть проведено несколько ребер.)

3. Для сильно связного ориентированного графа G на n вершинах выполняются следующие утверждения.

а) Существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-2$ ребер.

б) Если в графе G между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра, то существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-3$ ребер.

в) Для всех $v \geq 3$ постройте примеры графов, для которых оценки пунктов а) и б) являются точными.

Определение. *Полный ориентированный граф* или *турнирный граф* — это ориентированный граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним ориентированным ребром

4. Докажите, что компоненты сильной связности полного ориентированного графа можно пронумеровать $G_1, \ldots, G_k$ так, чтобы для всех $i < j$ в $C(G)$ было ребро $G_i \to G_j$.

5. Докажите, что в полном сильно связном ориентированном графе существует *гамильтонов цикл* (т. е. цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз).

6. Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе с четырьмя и более вершинами существует вершина, удаление которой не нарушает сильной связности графа.

7. Пусть G — полный ориентированный граф с n вершинами. Докажите, что в нем существует такой гамильтонов путь $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n$, что его концы соединены ребром $a_1 \to a_n$

а) при четном n;

б) при нечетном n, отличным от 3 и 5.

в) Найдите все полные ориентированные графы, для которых такого пути не существует.

8. Дан полный ориентированный граф G с n вершинами.

а) Докажите, что при $n > 7$ в этом графе можно выбрать вершину v и поменять направление всех ребер с концами в v так, чтобы получился сильно связный ориентированный граф.

б) Найдите все полные ориентированные граф на, для которых такой вершины не существует.

20 июля

Combinatorial Nullstellensatz и обобщенная теорема Шевалле-Варнинга

Теорема Шевалле-Варнинга: Пусть f — многочлен из $\mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_n]$ степени меньше n, для которого $f(0, \ldots, 0) = 0$. Тогда уравнение $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ имеет нетривиальное решение.

Обобщенная теорема Шевалле-Варнинга: Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — многочлены из $\mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_n]$, для которых $f_1(0, \ldots, 0) = \cdots = f_k(0, \ldots, 0) = 0$. $S_1, \ldots, S_n$ — подмножества $\mathbb{Z}_p$, причем $0 \in S_j$ для любого $1 \leq j \leq n$ и $(|S_1| - 1) + \cdots + (|S_n| - 1) > (p-1)(deg f_1 + \cdots + deg f_k)$. Тогда существует $(a_1, \ldots, a_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$, для которого $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ и $f_1(a_1, \ldots, a_n) = ... = f_k(a_1, \ldots, a_n) = 0$

Combinatorial Nullstellensatz (Алон, 1994): Пусть F — произвольное поле, а $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$ – многочлен степени d, у которого коэффициент при $x_1^{d_1} x_2^{d_2} ... x_n^{d_n}$ не равен нулю (уже после приведения подобных членов), где $d_1 + \cdots + d_n = d$. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — такие подмножества F, что $|A_i| > d_i$ для любого $1 \leq i \leq n$. Тогда существует $(a_1, \ldots, a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$, для которого $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

20 июля

Combinatorial Nullstellensatz и обобщенная теорема Шевалле-Варнинга: задачи

Комментарий: Во всех предложенных задачах p — простое число.

1. (*Теорема Коши-Дэвенпорта*) $|A+B| \geq min(|A|+|B|-1, p)$. Здесь сложение производится по модулю p, $|A+B|$ обозначает сумму множеств.

2. (*Гипотеза Эрдеша-Гайлбронна*) $|A\hat{+}A| \geq min(2|A|-3, p)$. В данном случае $A\hat{+}B = \{a+b | a \in A, b \in B, a \neq b\}$.

3. В $\mathbb{R}^n$ выбрано m гиперплоскостей, покрывающих все вершины единичного куба $\{0,1\}^n$, кроме одной. Докажите, что $m \geq n$. (*Гиперплоскость* в $\mathbb{R}^n$ — это множество точек $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих уравнению $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$.)

4. В $\mathbb{R}^3$ выбрано m плоскостей, объединение которых покрывает все точки множества $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 | 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n, 0 \leq z \leq n\}$, кроме $(0,\ 0,\ 0)$. Найдите наименьшее возможное значение m.

5. Пусть в графе G не меньше $2p-1$ вершин. Докажите, что существует непустое множество U вершин G, такое что количество ребер G, имеющих хотя бы одну вершину в U, кратно p.

6. Пусть в графе G степень каждой вершины не превосходит $2p-1$, но при этом средняя степень всех вершин больше чем $2p-2$. Докажите, что в нем можно выбрать подграф, в котором степень каждой вершины равна p.

7. (*Теорема Олсона*) В клетках таблицы $1+k(p-1) \times k$ расставлены целые числа. Докажите, что можно вычеркнуть некоторые (не все) строки, так чтобы в каждом столбце оставшейся таблицы сумма чисел делилась на p.

20 июля

Проективность и окружность — 2

I. Часть первая, теоретическая.

4. (теорема Брианшона) Пусть $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ — вершины описанного шестиугольника. Тогда прямые A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 пересекаются в одной точке.

II. Часть вторая, практическая.

6. Окружность Γ касается прямых, содержащих стороны AB и BC треугольника ABC, в точках D и E соответственно. Вторые касательные, проведенные из A и C к Ω касаются ее в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DG, FE и AC пересекаются в одной точке.

7. Окружность Γ касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E и его описанной окружности. Докажите, что прямая DE проходит через точку I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

8. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания высот, а A_2, B_2, C_2 — соответсвующие основания медиан треугольника ABC. Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, A_1C_2 и A_2C_1, B_1C_2 и B_2C_1 лежат на одной прямой.

9. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекают прямые BC и AB в точках A_1 и C_1 соответственно. Биссектрисы углов A_1AC и C_1CA пересекаются в точке B'. Аналогично определяются точки A' и C'. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой, проходящей через центр вписанной окружности треугольника.

20 июля

Фазовое пространство

Встреча. Мальчик и девочка договорились встретиться после отбоя между 23-00 и 24-00. Каждый приходит на место встречи случайным образом, ждет 15 минут, и если встреча не произошла, то уходит. Какова вероятность встречи?

Дуги на сфере. Прямая на сфере – это пересечение сферы и плоскости, проходящей через ее центр. Аналогично определяется отрезок.

Пусть на сфере единичного радиуса имеется несколько отрезков суммарной длины меньше π. Докажите, что тогда существует прямая, не пересекающая ни один из отрезков.

Флатладцы. а) Двое флатландцев спускаются с высочайшей вершины Флатландии «Пик кипа» — один по левому склону, а второй по правому. Гора везде выше уровня моря, а ее поверхность – график кусочно-линейной непрерывной функции. Флатландцы "непрерывно"двигаются, так что зависимость координат флатландца от времени – непрерывная функция, на скорость ограничений нет.

а) Докажите, что флатландцы могут достичь моря, все время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря.

б) Пусть поверхность горы – график дифференцируемой функции. Тогда аналогичное утверждение может быть неверным.

Для самостоятельного решения

Возы. Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой длины 20, смогли проехать, не порвав веревки. Могут ли разминуться не коснувшись два круглых воза радиуса 10, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Московские высотки. В Москве 7 высоток. Турист-математик хочет найти такую точку, из которой эти высотки видны в заданном порядке (начиная с МГУ, по часовой стрелке). Всегда ли ему удасться это сделать?

Запрет на перпендикулярность. В пространстве имеется n прямых. Докажите, что из них можно выбрать не менее $7n/24$ прямых, среди которых нет перпендикулярных.

21 июля

Раскраски графов

Определение. Пусть G — конечный граф без петель и кратных ребер, с множеством вершин V и множеством ребер E. Будем обозначать через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ максимальную и минимальную степень вершины графа G соответсвенно.

Определение. Для любого подмножества $U \subset V$ через $G(U)$ мы будем обозначать *индуцированный подграф* графа G на множестве вершин U (такой граф состоит из вершин множества U и всех ребер графа G между этими вершинами).

Определение. Для любого подмножества $F \subset E$ через $G[E]$ мы будем обозначать *индуцированный подграф* графа G на множестве ребер E (такой граф состоит из ребер множества F и всех вершин графа G, инцидентных хотя бы одному из этих ребер).

Раскраски вершин

1. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d$. Докажите, что вершины G можно правильным образом раскрасить в d цветов, если

а) есть вершина, имеющая степень меньше, чем d;

б) есть вершина, при удалении которой граф теряет связность;

в) $d > 2$ и есть две вершины такие, что при удалении их обоих граф теряет связность;

г) есть три вершины u, v и w такие, что u смежна с v и w, вершины v и w несмежны и при удалении вершин v и w связность не нарушается.

2. (Brooks, 1941) Пусть G — связный граф с $\Delta(G) = d \geq 3$, отличный от полного графа K_{d+1}. Докажите, что вершины G можно раскрасить в d цветов правильным образом.

Определение. Пусть G — граф. Обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов. Хроматическое число графа $\chi(G)$ — это наименьшее натуральное k такое, что $\chi_G(k) \neq 0$.

3. а) Докажите, что $\chi_G(k)$ — многочлен от k.

б) Найдите хроматический многочлен дерева из n вершин.

в) Докажите, что любой граф с таким хроматическим многочленом — дерево из n вершин.

Определение. Этот многочлен называется *хроматическим многочленом* графа G.

4. Докажите, что из графа G можно удалить не более, чем $\frac{1}{n}$ часть его ребер так, чтобы полученный граф имел правильную раскраску вершин в n цветов.

Определение. Правильная раскраска вершин графа G называется *динамической*, если для любой вершины, v степень которой больше 1, не все смежные с v вершины покрашены в один цвет.

5. Пусть $\Delta(G) = d \geq 4$. Докажите, что существует динамическая правильная раскраска вершин графа G а) в $d+3$ цвета; б) в $d+1$ цвет.

Раскраски ребер

Определение. Раскраска ребер графа в k цветов — это разбиение множества его ребер на k подмножеств: $C = (E_1, \ldots, E_k)$. Мы будем говорить, что в раскраске C цвет i *представлен* в вершине v, если хотя бы одно из инцидентных v ребер покрашено в цвет i. (Если таких ребер t, то можно сказать, что цвет i представлен t раз в вершине v.)

Определение. Раскраска ребер графа G называется правильной, если любые два ребра, имеющих общий конец, покрашены в разные цвета.

Определение. *Реберное хроматическое число графа* $\chi'(G)$ — это наименьшее количество цветов, для которого существует правильная раскраска ребер графа G.

6. Пусть G — связный граф, отличный от цикла нечетной длины. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждой вершине степени не менее двух были представлены оба цвета.

Определение. Пусть C — раскраска ребер графа G. Для каждой вершины $v \in V$ обозначим через $c(v)$ количество цветов, в которые покрашены ребра, инцидентные v.

Определение. Будем говорить, что C — *оптимальная* раскраска ребер в k цветов, если для любой другой раскраски C' ребер этого графа в k цветов выполняется

$$\sum_{v \in V} c(v) \geq \sum_{v \in V} c'(v).$$

7. Пусть $C = (E_1, \ldots, E_k)$ — оптимальная раскраска ребер графа G в k цветов. Пусть вершина v и цвета i и j таковы, что в вершине v дважды представлен цвет i и не представлен цвет j. Докажите, что компонента связности графа $G[E_i \cup E_j]$, содержащая вершину v — простой цикл нечетной длины.

8. Пусть G — двудольный граф. Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G)$.

9. Пусть G — двудольный граф, $\delta(G) = d$. Докажите, что существует раскраска ребер графа G в d цветов, в которой в каждой вершине представлены все d цветов.

10. (Визинг, 1964.) Докажите, что $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

22 июля

Вписанный четырехугольник

Обозначения. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи AD и BC — в точке F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. AC пересекает EF в точке Q. EP пересекает AD в точке X. M — *точка Микеля* четырехугольника $ABCD$. S — середина AD.

1. Докажите, что:

а) точки O, P и M лежат на одной прямой;

б) точки B, C, S, X лежат на одной окружности;

в) касательные к ω в точках B и D пересекаются на прямой EF (обозначим точку их пересечения T);

г) точки B, T, D, M лежат на одной окружности;

д) $\frac{BM}{MD} = \frac{BP}{PD}$.

22 июля

Линейность в геометрии

Основное соображение. Если на плоскости задана линейная функция (то есть каждой точке (x, y) сопоставлено число $\ell(x, y) = ax + by + c$), то множество нулей этой функции есть или пустое множество, или прямая, или вся плоскость.

Ориентированное расстояние

Предложение. Ориентированное расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $ax + by + c = 0$ равно

$$\rho(ax + by + c = 0, (x_0, y_0)) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1. Докажите, что основания внешних биссектрис (неравнобедренного) треугольника лежат на одной прямой.

2. Грани правильного октаэдра раскрашены в черный и белый цвет (при этом любые две грани, имеющие общее ребро, раскрашены в разные цвета). Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей черных граней.

Для самостоятельного решения

3. Дан четырехугольник. В одной паре его противоположных углов провели внешние биссектрисы – получили точку их пересечения. Потом в другой паре – получили вторую точку. Потом противоположные стороны продлили до пересечения, получили два угла – по ним аналогично построили третью точку. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

Ориентированное расстояние

Предложение. Ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на вектора (a, b) и (c, d), равна $ad - bc$.

4. На плоскости даны несколько черных и белых отрезков. Берем точку и строим треугольники с вершинами в этой точке и основаниями – данными отрезками. Рассмотрим ГМТ таких точек, что сумма черных (обычных) площадей равна сумме белых. Докажите, что это ГМТ почти всегда покрывается несколькими прямыми. Скольких прямых гарантировано хватит? Почему покрывается почти всегда, но не всегда?

5. Диагонали отрезают от пятиугольника 5 треугольников (некоторые части отрезаются дважды). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше площади пятиугольника.

Лемма. Точка X делит отрезок CD в отношении $p : q$. Докажите, что ор. площадь треугольника ABX равна
$$S(ABX) = \frac{q}{p+q}S(ABC) + \frac{p}{p+q}S(ABD).$$

6. Середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.

7. В описанном четырехугольнике прямая, проходящая через середины диагоналей, проходит и через центр вписанной окружности (*прямая Ньютона*).

8. Прямая, соединяющая середины диагоналей выпуклого четырехугольника, делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечения противоположных сторон (*прямая Гаусса*).

Для самостоятельного решения

9. У треугольников $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ центры тяжести лежат на одной прямой. Докажите, что 27 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.

23 июля

Заключительная олимпиада

Довывод

1. Может ли произведение трех натуральных чисел быть в 2008 раз больше их суммы?

2. Дан выпуклый 2008-угольник со сторонами $a_1, \ldots, a_{2008}$. Пусть $f(x)$ – квадратный трехчлен, для которого $f(a_1) = f(a_2 + a_3 + \cdots + a_{2008})$. Докажите, что $f(a_{2008}) = f(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007})$.

3. Имеются 30 гирек весом 1 г, 2 г,..., 30 г. Из них выбрали 10 гирек общим весом 155 г. Докажите, что оставшиеся 20 гирек можно разбить на 2 группы по 10 гирек в каждой с равными суммами весов.

4. Докажите, что $\sqrt[n]{2} > \frac{2n}{2n-1}$ при натуральном $n > 1$.

5. Пусть H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Пусть окружность с центром в середине стороны BC проходит через точку H и пересекает отрезок BC в точках A_1 и A_2. Аналогично определяются точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Докажите, что шесть точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.

Вывод

6. Леонид Михайлович выписывает на доску n натуральных чисел. Константин Александрович стирает несколько из этих чисел (но не все), перед оставшимися пишет знаки плюс или минус. Если сумма получившихся чисел делится на 2008, то выигрывает Константин Александрович, иначе — Леонид Михайлович. Кто выигрывает при правильной игре в зависимости от n?

7. Докажите, что выпуклый многоугольник можно триангулировать диагоналями на остроугольные треугольники не более чем одним способом.

8. В графе степень каждой вершины не превосходит $2k+1$. Докажите, что можно раскрасить его вершины в 2 цвета так, чтобы ребра с разноцветными концами составляли не менее $\frac{k+1}{2k+1}$ от общего числа ребер.

Вопросы к зачету (алгебра)

1. Функция Эйлера, ее мультипликативность, явная формула. Теорема Эйлера. Тождество Гаусса.

2. Лемма Гензеля.

3. Показатели, первообразные корни. Существование первообразных корней по простому модулю, их количество.

4. Иррациональность числа π.

5. Многочлены над $\mathbb{Z}_p$. Критерий Эйзенштейна. Теорема Шевалле-Варнинга.

6. Линейные системы: метод Гаусса, структура решений, рациональность решений. Однородные СЛУ. Связь между решениями СЛУ и ОСЛУ.

7. Суперпозиция: интерполяционный многочлен Лагранжа, китайская теорема об остатках, суммы степеней.

8. Применение СЛУ: дискретное уравнение теплопроводности, 101 корова, зарубки на отрезке.

9. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Подпространства. Линейная оболочка.

10. Размерность линейного пространства. Дополнение до базиса. Размерность подпространства. Существование бесконечной системы ЛНЗ векторов в бесконечномерном пространстве.

11. Ранг системы векторов. Равенство строчного и столбцового рангов матрицы. Размерность пространства решений ОСЛУ.

12. Скалярное произведение и его свойства. Линейная независимость ортогональной системы векторов. Задачи про супружеские пары, ЕГО, алгебраическую зависимость многочленов.

13. Линейные рекурренты, размерность пространства решений. Нахождение рекурренты в случае отсутствия кратных корней у характеристического уравнения.

14. Пространство функций на вершинах куба, его базис, заданный мономами. Задача о пересечениях подмножеств.

15. Теорема Франкла-Уилсона.

16. Combinatorial Nullstellensatz (доказательство).

17. Combinatorial Nullstellensatz (формулировка). Ее применение: теоремы Коши-Дэвенпорта и Эрдеша-Гайлбронна, задача о покрытии вершин куба гиперплоскостями.

18. Combinatorial Nullstellensatz (формулировка). Ее применение: обобщенная теорема Шевалле-Варнинга.

19. Обобщенная теорема Шевалле-Варнинга (формулировка). Ее применение: теорема Олсона, задача о p-регулярных подграфах.

20. Линейность в геометрии. Ориентированное расстояние, ориентированная площадь, прямые Ньютона и Гаусса.

Вопросы к зачету (геометрия)

1. Аффинные преобразования: определение, свойства.

2. Представление аффинного преобразования в виде композиции сжатия и поворотной гомотетии.

3. Эллипсы: определение, уравнение, образ окружности при аффинном преобразовании.

4. Теорема об эллипсе, вписанном в треугольник.

5. Поляра: определение, лемма о поляре.

6. Полярное преобразование, лемма о двойном отношении.

7. Проективные преобразования: определение; любые четыре точки общего положения можно перевести единственным проективным преобразованием в любые четыре точки общего положения.

8. Двойное отношение сохраняется при инверсии, при проективном преобразовании.

9. Теорема Паппа.

10. Теорема Дезарга.

11. Проективные преобразования и окружность: существование проективного преобразования, переводящего точку, лежащую внутри круга, в центр, а окружность в себя.

12. Проективные преобразования и окружность: существование проективного преобразования, переводящего прямую, не пересекающую окружность, на бесконечность, а окружность в себя.

13. Теорема Паскаля.

14. Теорема Брианшона.

15. Теорема о бабочке.

Вопросы к зачету (теория графов)

1. Сеть, поток, разрез. Величина потока и поток через любой разрез.

2. Теорема Форда-Фалкерсона.

3. Целочисленные сети. Максимальный поток в целочисленной сети.

4. Теорема Холла как следствие теоремы Форда-Фалкерсона.

5. Теоремы Кёнига как следствие теоремы Форда-Фалкерсона.

6. Реберная теорема Менгера.

7. Вершинная теорема Менгера

8. Компоненты сильной связности ориентированного графа, их свойства. Граф компонент сильной связности. Случай турнирного графа.

9. Гамильтонов цикл в сильно связном турнирном графе.

10. Удаление вершины из турнирного графа с сохранением сильной связности.

11. Теорема Брукса.

12. Хроматический многочлен графа.

13. Оптимальные раскраски ребер графа, их свойства.

14. Реберное хроматическое число двудольного графа.

15. Теорема Визинга.