Функции на вершинах n-мерного куба и теорема Франкла-Уилсона

Определения и обозначения 1: *n-мерным кубом* будем называть множество всех строк длины n из нулей и единиц (при этом строки называются *вершинами*). Мы будем обозначать n-мерный куб через $\{0,1\}^n$. Его можно интерпретировать как множество всех подмножеств n-элементного множества. Поймите почему это так. А какова геометрическая интерпретация? В дальнейшем, характеристическую строку подмножества S мы будем обозначать $\chi(S)$.

Определения и обозначения 2: Через F^A обозначим множество функций, определенных на множестве A и принимающих значения в поле F. На множестве F^A можно ввести структуру векторного пространства над F. Каким образом?

Упражнение 1. Найдите размерность пространства F^A для конечного множества A. В частности, найдите размерность пространства $F^{\{0,1\}^n}$.

Замечание: Пусть $P(x_1,\ldots,x_n)$ — многочлен с коэффициентами из поля F. Если в этот многочлен вместо всех переменных подставить нули и единицы, то получится элемент из F. Но подстановка нулей и единиц вместо переменных может рассматриваться как вычисление значения многочлена в вершинах n-мерного куба. Таким образом, каждый такой многочлен задает функцию из $\{0,1\}^n$ в F, то есть элемент пространства $F^{\{0,1\}^n}$.

Задача 1. Докажите, что все функции, заданные мономами вида $x_{i_1}\ldots x_{i_k}$, где $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$, линейно независимы (возможен случай $k=0$, тогда наш моном — константа). Выведите отсюда, что они образуют базис пространства $F^{\{0,1\}^n}$. Покажите, что каждую функцию из этого пространства можно задать с помощью многочлена.

Теорема 1: Пусть $\mathfrak{B}$ — такое семейство подмножеств множества $\{1,\ldots,n\}$, что мощности попарных пересечений подмножеств этого семейства принимают не более ℓ различных значений ($0<\ell\le n$). Докажите, что наибольшее возможное значение $|\mathfrak{B}|$ равно $C_n^0+\cdots+C_n^\ell$.

Упражнение 2. Приведите пример семейства $\mathfrak{B}$ с указанными свойствами, в котором ровно $C_n^0+\cdots+C_n^\ell$ элементов.

Доказательство теоремы 1: Пусть $M_1,\ldots,M_k$ — подмножества из $\mathfrak{B}$, упорядоченные так, чтобы их мощности в этой последовательности не убывали. Пусть, далее, мощности попарных пересечений этих подмножеств принимают только значения $t_1,\ldots,t_\ell$ (некоторые, возможно, по 0 раз). Обозначим через f_j функцию из $\mathbb{R}^{\{0,1\}^n}$, заданную многочленом $\prod\limits_{t_i<|M_j|}(\langle\chi(M_j),x\rangle-t_i)$. Здесь $x=(x_1,\ldots,x_n)$.

Задача 2. а) Докажите, что функции $f_1,\ldots,f_k$ линейно независимы.

б) Пусть W — линейная оболочка функций из $\mathbb{R}^{\{0,1\}^n}$, заданных мономами вида $x_{i_1}\ldots x_{i_k}$, где $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$ и $0\le k\le l$. Докажите, что $f_1,\ldots,f_k$ принадлежат W.

в) Докажите теорему 1.

Теорема 2 (Франкл и Уилсон, 1981): Пусть p — простое число, $\mathfrak{C}$ — семейство $2p$-элементных подмножеств множества $\{1,\ldots,4p\}$, никакие два из которых не пересекаются ровно по p элементам. В таком случае $|\mathfrak{C}|\le 2C_{4p-1}^{p-1}$.

Замечание: Эта теорема является фундаментальным результатом комбинаторики. В частности, из нее можно вывести несколько важных геометрических следствий. Существует гипотеза, что утверждение теоремы верно и для составного p, однако, пока эта проблема остается нерешенной.

Доказательство теоремы 2: Пусть $M_1,\ldots,M_k$ — подмножества из $\mathfrak{C}$, не содержащие $4p$. Мы будем рассматривать их как подмножества $\{1,\ldots,4p-1\}$. Пусть S — множество тех вершин $\{0,1\}^{4p-1}$, в которых ровно $2p$ единиц. Обозначим через g_j функцию из $\mathbb{Z}_p^S$, заданную многочленом $\prod\limits_{1\le i\le p-1}(\langle\chi(M_j),x\rangle-i)$.

Здесь $x=(x_1,\ldots,x_{4p-1})$.

Задача 3. а) Докажите, что функции $g_1,\ldots,g_k$ линейно независимы.

б) Пусть W — подпространство $\mathbb{Z}_p^S$, натянутое на функции, заданные мономами вида $x_{i_1}\ldots x_{i_k}$, где $1\le i_1<\cdots<i_k\le 4p-1$ и $0\le k\le p-1$. Докажите, что $g_1,\ldots,g_k$ принадлежат W.

в) Пусть U — подпространство $\mathbb{Z}_p^S$, натянутое на функции, заданные мономами вида $x_{i_1}\ldots x_{i_{p-1}}$, где $1\le i_1<\cdots<i_{p-1}\le 4p-1$. Докажите, что $U=W$.

г) Докажите, что $k\le C_{4p-1}^{p-1}$.