17 июля

Матбой «9 профи — 10 профи»

1. Биссектрисы углов A, B, C треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $S_{ABC_1} + S_{ACB_1} + S_{CBA_1} \geq S_{ABC}$.

2. В графе степени всех вершин не меньше 2 и не больше 100. Докажите, что его вершины можно покрасить в 101 цвет так, чтобы любые две смежные вершины имели разные цвета и для любой вершины смежные с ней не все были одного цвета.

3. В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H, а также прямые MC и MD, пересекающие прямую AB в точках F и K. Докажите, что $EF = KH$.

4. Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что для любых i, j выполняется неравенство $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. Докажите, что $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$.

5. Дан многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ с рациональными коэффициентами, причем $d < 0$. Произведение каких-то двух корней $P(x)$ рационально. Докажите, что их сумма тоже рациональна.

6. Имеется связная клетчатая фигура из $n-1$ клетки ($n \geq 2$). Докажите, что из клетчатого квадрата $n \times n$ можно вырезать четыре таких непересекающихся фигуры. (Клетчатая фигура называется связной, если любые две её клетки можно соединить цепочкой её клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.)

7. На сфере отмечено n различных точек. Докажите, что сферу можно разбить на n конгруэнтных связных областей так, чтобы в каждой области лежала ровно одна отмеченная точка.

8. Назовем словом любую конечную последовательность букв Л и Я. Есть две операции над словами: первая — вставить в любом месте слова букву Л, а в конце слова — Я; вторая — вставить в любом месте слова ЛЯ. Докажите, что множество слов, которые можно получить из слова ЛЯ с помощью первой операции совпадает с множеством слов, которые можно получить из слова ЛЯ с помощью второй операции.

9. Натуральное число n таково, что $4^n + 2^n + 1$ — простое. Докажите, что n – степень тройки.

10. Рассмотрим последовательность рациональных дробей $P_n(x)$, заданную следующим условием:

$$P_1(x) = x; \quad P_2(x) = x^3;$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{P_n^3(x) - P_{n-1}(x)}{1 + P_n(x)P_{n-1}(x)}, \qquad n \geq 2.$$

Докажите, что все дроби $P_n(x)$ являются многочленами.