15 июля

Пространства решений СЛУ

1. Рассмотрим такие шестерки комплексных чисел по кругу, что сумма любых трех подряд идущих равна нулю. Докажите, что множество таких расстановок образует векторное пространство над $\mathbb{C}$, а также найдите его размерность и базис.

Определение: Рассмотрим прямоугольную матрицу с элементами из поля F. Наибольшее число ЛНЗ строк называется *строчным рангом* этой матрицы. Аналогично определяется *столбцовый ранг*.

2. Докажите, что строчный ранг матрицы при элементарных преобразованиях строк не меняется.

Теорема 1. Докажите, что размерность пространства решений ОСЛУ равна $n-r$, где n — число переменных, r – ранг матрицы ОСЛУ. В частности, если ОСЛУ двумя способами приведена к ступенчатому виду, то получилось поровну ненулевых строк (следовательно, поровну свободных переменных).

3. Докажите, что столбцовый ранг матрицы при элементарных преобразованиях строк не меняется.

Теорема 2. Строчный ранг матрицы равен столбцовому рангу. В частности, строки квадратной матрицы ЛНЗ тогда и только тогда, когда столбцы ЛНЗ.

Теорема 3. Два конечномерных пространства одинаковой размерности над полем F изоморфны. Пространства разной размерности не изоморфны.

Следствие. Каждое n-мерное пространство над полем F изоморфно пространству строк F^n.

Теорема 4. Каждое подпространство в F^n является пространством решений некоторой ОСЛУ.

Для самостоятельного решения

4. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — различные элементы поля F. Докажите, что многочлены

$$p_i(x) = (x-a_1)\ldots\widehat{(x-a_i)}\ldots(x-a_n) \quad (1 \le i \le n)$$

линейно независимы над F.

5. Есть n различных действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что строки

$$(1, a_1, \ldots, a_1^{n-1}), (1, a_2, \ldots, a_2^{n-1}), \ldots, (1, a_n, \ldots, a_n^{n-1})$$

линейно независимы над $\mathbb{R}$.