20 июля

Combinatorial Nullstellensatz и обобщенная теорема Шевалле-Варнинга

Теорема Шевалле-Варнинга: Пусть f — многочлен из $\mathbb{Z}_p[x_1,\ldots,x_n]$ степени меньше n, для которого $f(0,\ldots,0)=0$. Тогда уравнение $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ имеет нетривиальное решение.

Обобщенная теорема Шевалле-Варнинга: Пусть $f_1,\ldots,f_k$ — многочлены из $\mathbb{Z}_p[x_1,\ldots,x_n]$, для которых $f_1(0,\ldots,0)=\cdots=f_k(0,\ldots,0)=0$. $S_1,\ldots,S_n$ — подмножества $\mathbb{Z}_p$, причем $0\in S_j$ для любого $1\le j\le n$ и $(|S_1|-1)+\cdots+(|S_n|-1)>(p-1)(degf_1+\cdots+degf_k)$. Тогда существует $(a_1,\ldots,a_n)\in S_1\times\cdots\times S_n$, для которого $(a_1,\ldots,a_n)\neq(0,\ldots,0)$ и $f_1(a_1,\ldots,a_n)=...=f_k(a_1,\ldots,a_n)=0$

Combinatorial Nullstellensatz (Алон, 1994): Пусть F — произвольное поле, а $f\in F[x_1,\ldots,x_n]$ – многочлен степени d, у которого коэффициент при $x_1^{d_1}x_2^{d_2}...x_n^{d_n}$ не равен нулю (уже после приведения подобных членов), где $d_1+\cdots+d_n=d$. Пусть $A_1,\ldots,A_n$ — такие подмножества F, что $|A_i|>d_i$ для любого $1\le i\le n$. Тогда существует $(a_1,\ldots,a_n)\in A_1\times\cdots\times A_n$, для которого $f(a_1,\ldots,a_n)\neq0$.

Двадцать четвертая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2008 года, 10 класс (профи).

20 июля

Combinatorial Nullstellensatz и обобщенная теорема Шевалле-Варнинга: задачи

Комментарий: Во всех предложенных задачах p — простое число.

1. (*Теорема Коши-Дэвенпорта*) $|A+B|\ge min(|A|+|B|-1,p)$. Здесь сложение производится по модулю p, $|A+B|$ обозначает сумму множеств.

2. (*Гипотеза Эрдеша-Гайлбронна*) $|A\hat{+}A|\ge min(2|A|-3,p)$. В данном случае $A\hat{+}B=\{a+b|a\in A,b\in B,a\neq b\}$.

3. В $\mathbb{R}^n$ выбрано m гиперплоскостей, покрывающих все вершины единичного куба $\{0,1\}^n$, кроме одной. Докажите, что $m\ge n$. (*Гиперплоскость* в $\mathbb{R}^n$ — это множество точек $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих уравнению $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$.)

4. В $\mathbb{R}^3$ выбрано m плоскостей, объединение которых покрывает все точки множества $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3|0\le x\le n,0\le y\le n,0\le z\le n\}$, кроме (0, 0, 0). Найдите наименьшее возможное значение m.

5. Пусть в графе G не меньше $2p-1$ вершин. Докажите, что существует непустое множество U вершин G, такое что количество ребер G, имеющих хотя бы одну вершину в U, кратно p.

6. Пусть в графе G степень каждой вершины не превосходит $2p-1$, но при этом средняя степень всех вершин больше чем $2p-2$. Докажите, что в нем можно выбрать подграф, в котором степень каждой вершины равна p.

7. (*Теорема Олсона*) В клетках таблицы $1+k(p-1)\times k$ расставлены целые числа. Докажите, что можно вычеркнуть некоторые (не все) строки, так чтобы в каждом столбце оставшейся таблицы сумма чисел делилась на p.