Двадцать четвертая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2008 года, 10 класс (профи).

22 июля

Линейность в геометрии

Основное соображение. Если на плоскости задана линейная функция (то есть каждой точке (x, y) сопоставлено число $\ell(x, y) = ax+by+c$), то множество нулей этой функции есть или пустое множество, или прямая, или вся плоскость.

Ориентированное расстояние

Предложение. Ориентированное расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $ax + by + c = 0$ равно

$$\rho(ax + by + c = 0, (x_0, y_0)) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пример(очень сложный). Дана точка X на основании равнобедренного треугольника. Через X перпендикулярно основанию проведена прямая, пересекающая боковые стороны или их продолжения в точках A и B. Докажите, что $XA + XB$ не зависит от X.

1. Докажите, что основания внешних биссектрис (неравнобедренного) треугольника лежат на одной прямой.

2. Грани правильного октаэдра раскрашены в черный и белый цвет (при этом любые две грани, имеющие общее ребро, раскрашены в разные цвета). Докажите, что для любой точки внутри октаэдра сумма расстояний до плоскостей белых граней равна сумме расстояний до плоскостей черных граней.

Для самостоятельного решения

1. Дан четырехугольник. В одной паре его противоположных углов провели внешние биссектрисы – получили точку их пересечения. Потом в другой паре – получили вторую точку. Потом противоположные стороны продлили до пересечения, получили два угла – по ним аналогично построили третью точку. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

Ориентированное расстояние

Предложение. Ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на вектора (a, b) и (c, d), равна $ad - bc$.

2. На плоскости даны несколько черных и белых отрезков. Берем точку и строим треугольники с вершинами в этой точке и основаниями – данными отрезками. Рассмотрим ГМТ таких точек, что сумма черных (обычных) площадей равна сумме белых. Докажите, что это ГМТ почти всегда покрывается несколькими прямыми. Скольких прямых гарантировано хватит? Почему покрывается почти всегда, но не всегда?

3. Диагонали отрезают от пятиугольника 5 треугольников (некоторые части отрезаются дважды). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше площади пятиугольника.

Лемма. Точка X делит отрезок CD в отношении $p : q$. Докажите, что ор. площадь треугольника ABX равна

$$S(ABX) = \frac{q}{p+q}S(ABC) + \frac{p}{p+q}S(ABD).$$

4. Середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.

5. В описанном четырехугольнике прямая, проходящая через середины диагоналей, проходит и через центр вписанной окружности (*прямая Ньютона*).

6. Прямая, соединяющая середины диагоналей выпуклого четырехугольника, делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечения противоположных сторон (*прямая Гаусса*).

Для самостоятельного решения

1. У треугольников $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ центры тяжести лежат на одной прямой. Докажите, что 27 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в