Двадцать пятая
Летняя Многопредметная Школа
Кировской области

Вишкиль. 2-27 июля 2009 г.

10 класс, группа профи

Преподаватели:
А. В. Пастор, А. Л. Глазман, А. Б. Скопенков

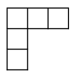
(Но задачи с занятий А. Б. Скопенков будут представлены отдельным файлом).

Вступительная олимпиада. 03.07.2008

1. Найдите НОД всех разностей $\underbrace{\overline{a\ldots a}}_{b} - \underbrace{\overline{b\ldots b}}_{a}$, где $b > a$.

2. Решите в вещественных числах уравнение $x + \frac{2009}{x} = [x] + \frac{2009}{[x]}$.

3. Есть доска 2006×2006 клеток. Рассмотрим наименьшее m такое, что можно вырезать из этой доский m фигурок, изображенных справа, так, что из оставшейся фигуры нельзя вырезать ни одной. Докажите, что $m < 340000$.



4. Докажите неравенство для $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$:

$$\frac{(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)}{2^{n-1}} + \frac{1}{a_1b_1} + \ldots + \frac{1}{a_nb_n} \geq n+2.$$

5. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC нашлись такие точки D, E, F, что центр вписанной окружности треугольника DEF совпадает с центром вписанной окружности ABC, а радиус в 2 раза меньше. Докажите, что тогда ABC — правильный.

6. В каждой вершине графа находится лампочка. За один шаг можно поменять состояние на противоположное какой-то из лампочек и всех ее соседей. Изначально все лампочки выключены. Саша смог добиться того, чтобы они все были включены за s шагов, а Леша — за t. Докажите, что $s - t$ четно.

Производная и неравенства. 04.07.2009

1. Докажите, что для любого положительного числа x справедливо неравенство $2x^9 + 9x^8 \leq 9x^{10} + 2$.

2. Докажите, что при $x > 0$ выполняются следующие неравенства. а) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$; б) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

3. Докажите, что при $x > 0$ выполняется неравенство $\ln x \leq x - 1$.

4. Пусть $x > -1$, $x \neq 0$ и $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что а) если $0 < a < 1$, то $(1+x)^a < 1 + ax$; б) если $a < 0$ или $a > 1$, то $(1+x)^a > 1 + ax$.

5. Пусть $x > 0$. Докажите, что $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

6. Дана дифференцируемая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[0,1]$, такая, что $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что найдется такая точка $x_0 \in (0,1)$, что $f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

Теорема Кэзи. 04.07.2009

1. Окружности S_1 и S_2 касаются окружности S в точках A и B соответственно; r_1 — радиус окружности S_1, r_2 — радиус S_2, R — радиус S, $a = |AB|$. Пусть окружности S_1 и S_2 касаются окружности S а) внешним; б) внутренним образом. Найдите длину отрезка общей внешней касательной к окружностям S_1 и S_2. в) Пусть окружность S_1 касается окружности S внутренним, а окружность S_2 — внешним образом. Найдите длину отрезка общей внутренней касательной к окружностям S_1 и S_2.

2. (Теорема Кэзи.) Окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются окружности S в точках A, B, C и D соответственно, причем точки A, B, C и D расположены на окружности S именно в таком порядке. Обозначим через d_{ij} длину отрезка общей касательной к окружностям S_i и S_j, причем касательная берется внешняя, если S_i и S_j касаются S одинаковым (внутренним или внешним) образом, и внутряння в противном случае. Докажите, что $d_{12}d_{34} + d_{23}d_{14} = d_{13}d_{24}$.

3. Дан угол с вершиной A и окружность, вписанная в него. Произвольная прямая, касающаяся данной окружности, пересекает стороны угла в точках B и C. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается фиксированной (т. е. не зависящей от выбора касательной BC) окружности, вписанной в данный угол.

4. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D. Рассмотрим окружность, касающуюся отрезка AD в точке M, отрезка BD и окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что прямая, проходящая через M параллельно BD, касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Окружность ω касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках P и Q, а также касается внешним образом описанной окружности треугольника AKC. Докажите, что прямая PQ проходит через центр вневписанной окружности треугольника AKC, касающейся стороны AK.

Неравенство Йенсена. 05.07.2009

Определение. Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз* на отрезке $[a, b]$, если для любых $x, y \in [a, b]$ и любых $\alpha, \beta \geq 0$ таких, что $\alpha + \beta = 1$ выполняется неравенство $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$. Функция f называется *выпуклой вверх* на отрезке $[a, b]$, если при тех же условиях выполняется аналогичное неравенство со знаком $\geq$.

Теорема. Если для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие $f''(x) \geq 0$, то функция f выпукла вниз на отрезке $[a, b]$. Если для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие $f''(x) \leq 0$, то функция f выпукла вверх на отрезке $[a, b]$.

1. (Неравенство Йенсена.) Пусть функция f выпукла вниз на отрезке $[a, b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Докажите, что тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

Докажите также, что для выпуклой вверх функции выполнено аналогичное неравенство со знаком $\geq$.

2. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in [0, \pi]$. Докажите неравенство

$$\frac{\sin x_1 + \cdots + \sin x_n}{n} \leq \sin \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

3. а) При помощи неравенства Йенсена докажите неравенство о среднем арифметическом и среднем гармоническом.

б) **(Неравенство о среднем степенном.)** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. При помощи неравенства Йенсена докажите, что

$$\left(\frac{x_1^a + x_2^a + \cdots + x_n^a}{n}\right)^{\frac{1}{a}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

4. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что
а) $a^{a/(a+b+c)} \cdot b^{b/(a+b+c)} \cdot c^{c/(a+b+c)} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$;
б) $\frac{a+b+c}{3} \le a^{a/(a+b+c)} \cdot b^{b/(a+b+c)} \cdot c^{c/(a+b+c)}$.

5. Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите, что $(\frac{a+b}{c+d})^{a+b} \le (\frac{a}{c})^a \cdot (\frac{b}{d})^b$.

6. Пусть a, b, c — стороны некоторого треугольника. Докажите неравенство:

$$\sqrt{a}(a+c-b) + \sqrt{b}(b+a-c) + \sqrt{c}(c+b-a) \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}.$$

Разнобой. 05.07.2009

1. Дана последовательность ненулевых чисел $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, заданная соотношением $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2+a}{a_n}$ (где a — некоторая константа). Известно, что a_1, a_2, $\frac{a_1^2+a_2^2+a}{a_1a_2} \in \mathbb{Z}$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

2. В графе $2n$ вершин и n^2+1 ребро. Докажите, что в нем найдется как минимум n треугольников.

3. В языке племени Тру-ля-ля слово — любая последовательность из 10 нулей и единиц. Слова считаются синонимами, если одно можно получить из другого серией следующих операций: можно взять несколько подряд стоящих цифр с четной суммой и поставить на то же место в обратном порядке. Сколько в этом языке различных по смыслу слов?

4. Внутри $\triangle ABC$ расположены 3 окружности, каждая из которых касается двух сторон теугольника и двух других окружностей. Пусть A_1 — точка касания двух окружностей, касающихся стороны BC, аналогично определяются точки касания B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны.

5. Для каких натуральных n существуют ненулевые многочлены $P, Q \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ такие, что

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2).$$

6. Центры окружностей S_1, S_2 и S_3 лежат на одной прямой, причем S_1 и S_2 не пересекаются, а S_3 внешним образом касаются двух других окружностей. Докажите, что окружность S_3 пересекает общие внутренние касательные к S_1 и S_2 в четырех точках, образующих четырехугольник, две стороны которого параллельны общим внешним касательным к S_1 и S_2.

Функции и функциональные уравнения. 06.07.2009

1. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие что а) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и функция f непрерывна на всей вещественной прямой; б) то же, что в пункте а), но вместо непрерывности — ограниченность в нуле, то есть существует такое $\varepsilon > 0$ и $M \in \mathbb{R}$, что $|f(x)| < M$ при $|x| < \varepsilon$;

в) Найдите все ограниченные в нуле функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие что $f(x + y) = f(x)f(y)$;

Найдите все ограниченные в некоторой окрестности единицы функции $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, такие что г) $f(xy) = f(x) + f(y)$; д) $f(xy) = f(x)f(y)$.

2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется условие $f(x) + 2f(1 - x) = \sin x$.

3. Дифференцируемые функции f и g, заданные на отрезке $[0, 1]$ таковы, что $f(0) = f(1) = 1$ и функция $19f'g + 93fg'$ неотрицательна. Докажите, что $g(1) \geq g(0)$.

4. Функция f определена на отрезке $[0, 1]$ и принимает значения на том же отрезке. Известно, что при любых $x, y \in [0, 1]$ выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|f(x)-x|+|f(y)-y|}{2}$. Докажите, что существует ровно одно значение x, при котором $f(x) = x$.

5. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(1) = 1$, $f(a)f(1/a) = 1$ и $f(a + b) = f(a) + f(b)$ для любых вещественных a и b. Докажите, что $f(x) = x$.

Теория чисел – в основном, повторение. 08.07.2009

1. Натуральные числа x и y удовлетворяют равенству $x^2 - y^3 = 17$. Докажите, что число $y^2 + 2x + 2$ — составное.

2. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z & = & 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 & = & 3. \end{cases}$$

3. Пусть $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $n \mid (a^n + 1)$.

4. $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1319}$. Докажите, что $p \,\vdots\, 1979$.

5. Умножение всех элементов приведенной системы вычетов по простому модулю p на вычет $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ производит в ней перестановку.

а) Докажите, что если a – квадратичный вычет по модулю p, то получившаяся подстановка четна.

б) Докажите, что если a – квадратичный невычет по модулю p, то она нечетна.

6. Пусть $p, d \in \mathbb{P}$, $d \mid 2^p + 1$, $d \neq 3$. Докажите, что $d = 2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.

7. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c с целыми коэффициентами принимает в p подряд идущих целых точках значения, являющиеся полными квадратами (p — простое число, $p \geq 5$). Докажите, что $b^2 - 4ac$ делится на p.

Момент инерции. 09.07.2009

Определение. *Моментом инерции* системы материальных точек $m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n$ относительно точки S называется величина

$$J_S = m_1 \left|SA_1\right|^2 + m_2 \left|SA_2\right|^2 + \ldots + m_n \left|SA_n\right|^2.$$

1. (Формула Лагранжа.) Пусть Z — центр масс системы материальных точек $m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n$ и S — произвольная точка. Докажите, что

$$J_S = J_Z + m\left|SZ\right|^2,$$

где $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

2. (Формула Якоби.) Пусть Z — центр масс системы материальных точек $m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n$ и $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. Докажите, что

$$J_Z = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j |A_iA_j|^2.$$

3. а) Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, а d — расстояние между их центрами. При помощи момента инерции докажите, что $d^2 = R^2 - 2rR$.

б) Пусть r_a — радиус вневписанной окружности треугльника, касающейся стороны a. При помощи момента инерции вычислите расстояние между ее центром и центром описанной окружности (выразите его через R и r_a)

4. Даны система материальных точек $m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n$ и число h. а) Пусть $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \neq 0$. Докажите, что геометрическое место точек, относительно которых данная система имеет момент инерции h является либо окружностью, либо точкой, либо пустым множеством. б) Что будет в случае $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0$? в) Даны точки A и B и положительное число $\lambda \neq 1$. При помощи пункта а) докажите, что геометрическое место точек M таких, что $\frac{|MA|}{|MB|} = \lambda$ является окружностью, центр которой лежит на прямой AB (**окружность Аполлония**).

5. Даны системы материальных точек $p_1A_1, p_2A_2, \ldots, p_nA_n$ с центром масс P и $q_1A_1, q_2A_2, \ldots, q_nA_n$ с центром масс Q, причем $p_1+p_2+\ldots+p_n = q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$. Докажите, что

$$|PQ|^2 = -\sum_{1\le i<j\le n}(p_i - q_i)(p_j - q_j)|A_iA_j|^2.$$

Указание. Для этого рассмотрите системы материальных точек $(p_1 - q_1)A_1, (p_2 - q_2)A_2, \ldots, (p_n - q_n)A_n, 1Q$; $q_1A_1, q_2A_2, \ldots, q_nA_n$; $p_1A_1, p_2A_2, \ldots, p_nA_n, 1Q$, и их моменты инерции отностиельно точки P.

Теорема Рамсея. 09.07.2009

1. а) Обозначим через $R(m, n)$ наименьшее натуральное число такое, что в любом графе с $R(m, n)$ вершинами содержится либо полный m-вершинный подграф, либо n-вершинное независимое множество. Докажите, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$ число $R(m, n)$ существует и не превосходит C_{m+n-2}^{m-1}.

б) Рассмотрим конечное множество, в котором каждое k-элементное подмножество покрашено в черный или в белый цвет. Обозначим через $R(m, n, k)$ наименьшее натуральное число такое, что при любой раскраске в два цвета всех k-элементных подмножеств множества из $R(m, n, k)$ элементов найдется либо m-элементное подмножество, все k-элементные подмножества которого белые, либо n-элементное подмножество, все k-элементные подмножества которого черные. Докажите, что для любых $m, n, k \in \mathbb{N}$ число Рамсея $R(m, n, k)$ существует и при $k \ge 2$ выполняется неравенство

$$R(m, n, k) \le 1 + R(R(m-1, n, k), R(m, n-1, k), (k-1)).$$

Определение 1. Числа $R(m, n)$ и $R(m, n, k)$ называются *числами Рамсея.*

2. Даны n вершин, занумерованных числами от 1 до n.

а) Сколько существует графов на этом множестве вершин?

б) Докажите, что если $k > 3$ и $n \leq 2^{k/2}$, то менее половины всех возможных графов на n вершинах содержат полный k-вершинный подграф.

в) Докажите, что при $k \geq 3$ $\quad R(k,k) > 2^{k/2}$.

Определение 2. Пусть G — произвольный граф. *Дополнением* графа G называется граф $\overline{G}$ с тем же множеством вершин, что и G, в котором смежны те и только те пары вершин, которые не смежны в G.

Определение 3. Пусть H_1 и H_2 — произвольные два графа. Наименьшее число вершин, такое что для любого графа G с данным числом вершин либо в G есть подграф, изоморфный H_1, либо в $\overline{G}$ есть подграф, изоморфный H_2, обозначается $R(H_1, H_2)$ и также называется *числом Рамсея.*

3. Пусть T — произвольное дерево на t вершинах, K_s — полный граф на s вершинах.

а) Докажите, что $R(T, K_s) \geq (s-1)(t-1)+1$. б) Пусть в графе G степень любой вершины не меньше, чем $t-1$. Докажите, что в G найдется подграф, изоморфный T. в) Докажите, что $R(T, K_s) = (s-1)(t-1)+1$.

4. а) Докажите, что из любых 5 точек общего положения можно выбрать 4 точки, образующие выпуклый четырехугольник. б) На плоскости дано 9 точек общего положения, выпуклая оболочка которых — четырехугольник. Докажите, что из них можно выбрать 5 точек, образующих выпуклый пятиугольник. в) На плоскости дано n точек общего положения таких, что любые 4 из них образуют выпуклый четырехугольник. Докажите, что эти n точек образуют выпуклый n-угольник. г) Докажите, что для любого натурального n существует натуральное M такое, что из любых M точек общего положения можно выбрать n точек, образующих выпуклый n-угольник.

Разнобой. 10.07.2009

1. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что число $a+b+c+d$ — составное.

2. Докажите, что число $\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \ldots + \sqrt{p_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно различные простые числа, всегда иррационально.

3. Пусть H_B — основание высоты треугольника ABC, проведенной из вершины B; L_B — основание соответствующей биссектрисы; K_B — точка касания вписанной окружности со стороной AC; T_B — точка касания вневписанной окружности со стороной AC. Точки H_A, L_A, K_A, T_A определяются аналогично. Докажите, что

а) $(H_B, L_B, K_B, T_B) = -1$;

б) $(C, H_B, T_B, K_B) = (C, H_A, T_A, K_A)$;

в) прямые $H_AH_B, L_AL_B, K_AK_B, T_AT_B$ конкурентны.

4. а) Докажите, что количество представлений натурального числа n в виде суммы различных натуральных слагаемых равно количеству его представлений в виде суммы нечетных, не обязательно различных слагаемых. б) Докажите, что количество представлений натурального числа n в виде суммы натуральных слагаемых, каждое из которых встречается не более $k-1$ раза, равно количеству его представлений в виде суммы неделящихся на k, не обязательно различных слагаемых. (Представления, отличающиеся только порядком слагаемых считаются одинаковыми).

5. Для положительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n докажите неравенство $\frac{2a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{2a_2^2}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{2a_n^2}{a_n+a_1} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

6. На плоскости даны окружность S, её центр O, точка A, лежащая на окружности S, и точка O_1, лежащая внутри S. Известно, что существует четырехугольник $ABCD$, вписанный в S и описанный вокруг некоторой окружности S_1 с центром O_1. При помощи одной линейки постройте еще одну вершину этого четырехугольника.

Функции и функциональные уравнения-2. 10.07.2009

1. Найдите все многочлены $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, удовлетворяющие условию $P(0) = 0$ и тождеству $P(x) \equiv \frac{1}{2}(P(x+1) + P(x-1))$.

2. Найдите все непрерывные $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие соотношениям: $f(x) = -f(-x)$ и $f(x+1) = f(x) + 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$, а также соотношению $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, отличного от 0.

3. Пусть f — непрерывная функция, определенная на отрезке $[0,1]$ такая, что $f(0) = f(1) = 0$. а) Верно ли, что на графике f найдется хорда длины $\frac{1}{3}$, параллельная оси (OX)? б) При каких ℓ на графике f заведомо найдется хорда длины ℓ, параллельная оси (OX)?

4. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(\sin \pi x) = f(x) \cos \pi x$.

Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского. 11.07.2009

1. Пусть $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что

а) **(Неравенство Юнга.)** Если $a, b \geq 0$, то $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

б) **(Неравенство Гельдера.)** Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$, то $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$.

в) **(Неравенство Минковского.)** Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$ и $p > 1$, то $((a_1+b_1)^p + \ldots + (a_n+b_n)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \ldots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}$.

2. а) Пусть $a, b, c, x, y, z, u, v, w \geq 0$. Докажите, что

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(u^3 + v^3 + w^3) \geq (axu + byv + czw)^3.$$

б) Пусть $x_{i,j} \geq 0$, где $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Докажите, что

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}^m\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} x_{i,j}\right)\right)^m.$$

3. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

4. Докажите для положительных a, b, c, d неравенство

$$\frac{a}{(8b + 9c + 10d)^2} + \frac{b}{(10a + 10c + 7d)^2} + \frac{c}{(9a + 8b + 10d)^2} + \frac{d}{(8a + 11b + 8c)^2} \geq$$

$$\geq \frac{16}{729}\frac{1}{a + b + c + d}.$$

5. Пусть $a, b, c > 0$ и $ab + bc + ca = 3$. Докажите, что

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq 8.$$

Геометрия: барицентрические и комплексные координаты. 13.07.2009

Определение. *Барицентрическими координатами* точки M относительно базисного треугольника $A_1A_2A_3$ называется тройка чисел (m_1, m_2, m_3) такая, что M — центр масс системы m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3 и $m_1 + m_2 + m_3 = 1$.

1. Пусть (x, y, z) — барицентрические координаты точки M относительно базисного треугольника PQR. Точки P, Q, R имеют барицентрические координаты (p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3), (r_1, r_2, r_3) относительно другого базисного треугольника ABC. Найдите барицентрические координаты точки M относительно базисного треугольника ABC.

2. а) Докажите, что любая прямая задается в барицентрических координатах уравнением вида $am_1 + bm_2 + cm_3 = 0$, где a, b, c не все равны. Докажите также, что любое уравнение такого вида задает прямую.

б) Из вершин базисного треугольника на прямую ℓ опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что коэффициенты уравнения прямой ℓ в барицентрических координатах пропорциональны векторам $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$.

3. а) Докажите, что все окружности и прямые на комплексной плоскости задаются уравнениями вида $Az\overline{z}+cz+\overline{cz}+D = 0$, где A и D — вещественные числа, а c — комплексное число. Наоборот, докажите, что любое уравнение такого вида задает либо окружность, либо прямую, либо точку, либо пустое множество. б) Докажите, что прямая, проходящая серез точки z_1 и z_2 задается уравнением $z_1(\overline{z_2} - \overline{z}) - z_2(\overline{z_1} - \overline{z}) + z(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = 0$. в) Найдите уравнение окружности с центром в точке z_0 и радиусом r.

4. На единичной окружности (т. е. окружности с центром в начале координат и радиусом 1) отмечены точки z_1 и z_2. Докажите, что касательные к единичной окружности в этих точках пересекаются в точке $z = \frac{2}{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}$.

5. Внутри треугольника ABC отмечена точка P. I_A, I_B, I_C — центры вписанных окружностей треугольников BPC, CPA и APB соответственно. Известно, что I_A лежит на биссектрисе угла A, I_B лежит на биссектрисе угла B. Докажите, что I_C лежит на биссектрисе угла C.

6. На сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ вне его построены правильные треугольники ABP, BCQ, CDR и DAS. Точка K — середина BQ, L – середина AS, M – центр треугольника CDR. Найдите а) угол между PM и KL; б) отношение $\frac{PM}{KL}$.

Теория чисел-2. 14.07.2009

1. Пусть p — нечетное простое число. Докажите, что существует первообразный корень по модулю а) $2p$; б) p^2 и $2p^2$; в) p^n и $2p^n$, где n — произвольное натуральное число.

г) Докажите, что если по модулю m существует первообразный корень, то m равно либо 2, либо 4, либо p^n, либо либо $2p^n$, где $n \in \mathbb{N}$ и p — нечетное простое число.

2. Докажите, что для каждого n найдется такое m, что $2^m + 2008 \,\vdots\, 3^n$.

3. Пусть $p \in \mathbb{P}$, ε — первообразный корень степени p из 1. Найдите $S_p = |(\frac{1}{p})\varepsilon + (\frac{2}{p})\varepsilon^2 + \ldots + (\frac{p-1}{p})\varepsilon^{p-1}|$. (Через $(\frac{x}{p})$ обозначается, естественно, символ Лежандра.)

4. а) Дано простое число p. Докажите, что числа $1!$, $2!$, $3!$, $\ldots$, $(p-1)!$, $p!$ дают больше чем $\sqrt{p}$ различных остатков по модулю p.

б) Пусть $p > 2$. Докажите, что числа $1!, 2!, 3!, \ldots, (p-1)!$ дают больше чем $\sqrt{p}$ различных остатков по модулю p.

5. (a_n) — арифметическая прогрессия, p_n — наибольший простой делитель a_n при каждом натуральном n. Докажите, что последовательность $\frac{a_n}{p_n}$ неограничена.

Многочлены Чебышева и не только... 15.07.2009

1. Пусть $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

а) Докажите, что $T_n(x)$ — многочлен степени n и найдите его старший коэффициент. б) Найдите все его корни и экстремумы.

Пусть $f(x)$ — унитарный многочлен степени n. Докажите, что

в) $\max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$; г) если $\max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$, то $f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

Определение 1. Многочлен $T_n(x)$ называется *многочленом Чебышева.*

Определение 2. Величина $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ называется *уклонением от нуля* многочлена $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Таким образом, многочлен $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ является наименее уклоняющимся от нуля среди всех унитарных многочленов степени n.

2. а) Докажите, что $T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x))$.

б) Пусть $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Вычислите $T_n\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)$.

3. а) Докажите, что $P_n(x) = 2T_n(\frac{x}{2})$ также является многочленом с целыми коэффициентами. б) Докажите, что если $\alpha \in \mathbb{Q}$ и $\cos(\alpha\pi) \in \mathbb{Q}$, то $\cos(\alpha\pi) \in \{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$. в) Докажите, что при $n > 4$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах клечатой сетки.

4. Даны непостоянные многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, старшие коэффициенты которых равны 1. Докажите, что сумма квадратов коэффициентов многочлена $P(x)Q(x)$ не меньше суммы квадратов свободных членов $P(x)$ и $Q(x)$.

5. Найдите наименьшее значение многочлена $x^{2n} + 2x^{2n-1} + \cdots + (2n-1)x^2 + (2n)x + (2n+1)$.

Матбой Профи-9 — Профи-10. 16.07.2009

1. В таблице $m \times n$ $(m, n > 1)$ расставлены знаки «+» и «−». За один ход разрешается поменять знаки на противоположные в любой строке или столбце. Докажите, что если таблица такими действиями не приводится к таблице из одних плюсов, то в ней есть квадрат 2×2, который тоже не приводится.

2. G — двудольный граф без изолированных вершин с долями X и Y, причем вершин в X больше, чем в Y. Докажите, что в G существует по крайней мере один простой путь, у которого оба конца лежат в X, не являющийся частью никакого более длинного простого пути.

3. Пусть f — многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Докажите, что найдется такой многочлен g с целыми коэффициентами, что у произведения fg ровно два нечетных коэффициента.

4. Пусть $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ – биекция. Докажите, что найдутся две такие биекции $g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, что $f(x) = g(x) + h(x)$ для всех $x \in \mathbb{Z}$.

5. В течение 92 дней авиакомпания ежедневно выполняла по десять рейсов. За сутки каждый самолет выполнял не более одного рейса. Известно, что для любых двух дней имеется один и только один самолет, летавший в оба эти дня. Докажите, что имеется самолет, летавший во все дни.

6. Положительные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют при $1 \le i \le n-1$ условию $a_{i-1}a_{i+1} \le a_i^2$. Докажите, что

$$\frac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1} \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \ge \frac{a_0 + \ldots + a_{n-1}}{n} \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

7. Точка H — середина основания AB трапеции $ABCD$, в которой $AC = BC$. Прямая k, проходящая через H, пересекает прямые AD и BD в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CP и CQ симметричны относительно прямой CH.

8. Найдите все пары положительных чисел a и b такие, что $[a[bn]] = n - 1$ для всех натуральных n.

9. Пусть $n > 3$ – нечетное число. Докажите, что существует такое простое p, что p не делит n, но делит $2^{\varphi(n)} - 1$.

10. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами AC и BC точка M — середина BC. Окружность k, проходящая через точки A и M, касается описанной окружности треугольника ABC и пересекает BC в точке N, отличной от M. Докажите, что прямая AN делит пополам высоту CH треугольника ABC.

Матбой Профи-10 — сборная преподавателей. 16.07.2009

1. Дано n различных натуральных чисел. НОК любых двух из них больше k (где $k > n \geq 2$). Докажите, что сумма обратных величин этих чисел не превосходит $\frac{n+k}{k}$.

2. G — двудольный граф без изолированных вершин с долями X и Y, причем вершин в X больше, чем в Y. Докажите, что в G существует по крайней мере один простой путь, у которого оба конца лежат в X, не являющийся частью никакого более длинного простого пути.

3. Двое играют в следующую игру. Первый пишет в ряд n натуральных чисел, а второй стирает несколько (возможно, 0) чисел, ставит перед каждым из оставшихся знак «+» или «−» и вычисляет значение написанного выражения. Если получившееся число делится на 2009, выигрывает второй; если не делится — выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

4. На плоскости даны n окружностей равного радиуса. Известно, что каждая из них пересекается как минимум с одной другой окружностью и никакие две окружности не касаются. Докажите, что есть как минимум n точек пересечения этих окружностей.

5. В течение 92 дней авиакомпания ежедневно выполняла по десять рейсов. За сутки каждый самолет выполнял не более одного рейса. Известно, что для любых двух дней имеется один и только один самолет, летавший в оба эти дня. Докажите, что имеется самолет, летавший во все дни.

6. Положительные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют при $1 \le i \le n-1$ условию $a_{i-1}a_{i+1} \le a_i^2$. Докажите, что

$$\frac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}\cdot\frac{a_1+\ldots+a_{n-1}}{n-1} \ge \frac{a_0+\ldots+a_{n-1}}{n}\cdot\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}.$$

7. Точка H — середина основания AB трапеции $ABCD$, в которой $AC = BC$. Прямая k, проходящая через H, пересекает прямые AD и BD в точках P и Q соответственно. Докажите, что либо $\angle ACP = \angle QCB$, либо $\angle ACP = 180^\circ - \angle QCB$.

8. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех натуральных x, y и z неравенству $f(xy) + f(xz) \ge f(x)f(yz) + 1$.

9. Найдите все пары положительных чисел a и b такие, что $[a[bn]] = n-1$ для всех натуральных n.

10. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Пусть P и Q — внутренние точки отрезков CA и AB соответственно. Точки K, L и M — середины отрезков BP, CQ и PQ соответственно, а Γ — окружность, проходящая через точки K, L и M. Известно, что прямая PQ касается окружности Γ. Докажите, что $OP = OQ$.

Разнобой. 18.07.2009

1. Хозяйка умеет печь торты k различных сортов. Она устроила пир на 66 человек, на котором каждая компания из 36 человек съела по одному торту. Причем для любых двух компаний A и B евших торты одного сорта $|A \cap B| > 18$. Докажите, что хозяйка может устроить пирушку на 12 человек так, чтобы каждая компания из 6 человек съела по одному торту и для любых двух компаний A и B, евших торты одного сорта $|A \cap B| \ne 3$.

2. (Задача Ньютона) Докажите, что середины диагоналей описанного четырехугольника и центр его вписанной окружности лежат на одной прямой.

3. Словом называется произвольная конечная последовательность нулей и единиц. Утроением слова A называется его троекратное повторение AAA. Над словом разрешается производить следующие операции: вставлять в любое место и убирать из любого места утроение любого слова. Например, из слова 0001 можно получить слова 0111001 и 1. Можно ли такими операциями получить из слова 10 слово 01?

4. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\quad 2^{(2^n-1)n} - 1 \,\vdots\, (2^n-1)^2$.

5. Пусть $a, b, c \geq 0$. Докажите нераваенство

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ac+a^2) \geq (ab+bc+ca)^3.$$

6. (Осталась с матбоя.) На плоскости даны n окружностей равного радиуса. Известно, что каждая из них пересекается как минимум с одной другой окружностью и никакие две окружности не касаются. Докажите, что есть как минимум n точек пересечения этих окружностей.

Графы. 18.07.2009

1. а) В графе четное число вершин, каждая вершина имеет четную степень. Докажите, что количество остовных деревьев в этом графе четно. б) Докажите, что у двудольного графа с четным числом вершин и четным числом ребер количество остовных деревьев четно. в) В двудольном графе каждая вершина имеет четную степень. Докажите, что количество остовных деревьев в этом графе четно.

2. На вечере, в котором участвовало $12k$ человек, каждый поздоровался с $3k+6$ другими. Известно, что для любой пары участников вечера число людей, поздоровавшихся с ними обоими, одинаково. Сколько человек участвовало в вечере? а) Найдите ответ и докажите, что другие ответы невозможны. б) Приведите пример, подтверждающий возможность полученного ответа.

3. В волейбольном турнире в один круг участвовало n команд. Будем считать, что команда A сильнее команды B, если либо A выиграла у B, либо существует команда C, проигравшая A, но выигравшая у B. Команду, которая сильнее всех, будем называть чемпионом. Может ли быть ровно два чемпиона?

4. На вечеринку пришло а) 19 гостей; б) 21 гость, причем среди любых трех из них есть двое знакомых. Докажите, что гости могут разбиться на 5 групп, в каждой из которых все попарно знакомы.

5. а) Граф с $v \geq 3$ вершинами без кратных ребер нарисован на плоскости так, что каждое ребро пересекается не более, чем с одним другим. Докажите, что в этом графе не более, чем $4v-8$ ребер. б) Двудольный граф с $v \geq 4$ вершинами без кратных ребер нарисован на плоскости так, что каждое ребро пересекается не более, чем с одним другим. Докажите, что в этом графе не более, чем $3v-6$ ребер. в)Докажите, что в графе из пункта б) не более, чем $3v-8$ ребер.

Многочлены. 19.07.2009

Определение 1. Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *симметрическим*, если для любой перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$

$$f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Определение 2. Многочлены

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n\\
&\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n\\
&\ldots\\
&\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\ldots x_n
\end{aligned}$$

называются *основными симметрическими многочленами* от n переменных.

1. (Формула Ньютона.) Пусть $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$. Докажите, что

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-2}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^{k-1}k\sigma_k.$$

(при $i > n$ мы считаем, что $\sigma_i = 0$).

Докажите эту формулу при а) $n = k$; б) при любых n и k.

Определение 3. Набор $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *больше* набора $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ в *лексикографическом порядке*, если существует такое ℓ, что $i_\ell > j_\ell$ и $i_k = j_k$ при всех $k < \ell$.

Определение 4. *Старшим членом* симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется одночлен $ax_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$, для которого набор $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ является наибольшим в лексикографическом порядке.

2. а) Пусть $i_1 > i_2 > \ldots > i_n$. Докажите, что перемножив несколько основных симметрических многочленов можно получить многочлен со старшим членом $x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$.

б) **(Основная теорема о симметрических многочленах.)** Докажите, что любой симметрический многочлен от n переменных можно представить в виде $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, где φ — многочлен от n переменных.

Определение 5. *Многочленом деления круга* порядка n называется многочлен

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2)\ldots(x - \xi_{\varphi(n)}),$$

где ξ_1, ξ_2, …, $\xi_{\varphi(n)}$ — все первообразные корни из 1 степени n.

3. Докажите, что а) $x^n - 1 = \prod\limits_{d|n} \Phi_d(x)$; б) $\Phi_n(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

4. Пусть $p \in \mathbb{P}$, $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1$. а) Докажите, что существует бесконечно много простых чисел q, являющихся делителями значений многочлена $f(x)$ при некоторых натуральных $x \in \mathbb{N}$.

б) Докажите, что среди этих простых чисел бесконечно много таких чисел q, что $f(x) \vdots q$, но $x - 1 \not\vdots q$.

в) Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $pk + 1$.

г) **(Частный случай теоремы Дирихле.)** Докажите, что для любого натурального n существует бесконечно много простых чисел вида $nk + 1$.

5. Пусть $(x^{1958} + x^{1957} + 2)^{1959} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$. Найдите $a_0 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} + a_3 - \frac{a_4}{2} - \frac{a_5}{2} + \ldots$.

Теория чисел-3. 19.07.2009

1. Подряд выписываются числа $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое n, что полученное число делится на 137?

2. Дано нечетное простое число p. Найдите сумму остатков от деления на p^2 чисел 1^p, 2^p, $\ldots$, $(p-1)^p$.

3. Для любого натурального n строится последовательность n, $d(n)$, $d(d(n)), \ldots$ ($d(n)$ — количество натуральных делителей n). Найдите все n, для которых в соответствующей последовательности нет полных квадратов.

4. Докажите, что для любого натурального числа a существует бесконечно много натуральных n таких, что число $a^{2^n} + 2^n$ — составное.

5. Докажите, что для любого простого числа $p > 3$ число $50^p - 14^p - 36^p$ делится на 1996.

6. Решите в натуральных числах уравнение $k^m + m^n = k^n + 1$.

Интегралы и их применение. 20.07.2009

1. Докажите, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx + \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{\pi}{4}$.

2. Пусть на плоскости даны две системы векторов, причем для любой прямой сумма длин проекций на нее векторов первой системы не меньше, чем для второй системы. Тогда сумма длин векторов первой системы не меньше суммы длин векторов второй системы.

3. а) Дан выпуклый многоугольник периметра P. Докажите, что его диаметр не меньше $\frac{P}{\pi}$. б) На плоскости дано несколько векторов, сумма длин которых равна L. Докажите, что из них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше $\frac{L}{\pi}$.

4. Докажите, что $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \ln n + 1$ (где $n > 1$).

5. Найдите $[\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{10^6}}]$.

Еще немного неравенств. 20.07.2009

Определение. Пусть $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — набор положительных чисел. Тогда *k-м симметрическим средним* этого набора называется число $\Sigma_k(a) = \sqrt[k]{\frac{\sigma_k(a)}{C_n^k}}$.

1. Докажите, что $(\Sigma_k(a))^{2k} \geq (\Sigma_{k-1}(a))^{k-1} \cdot (\Sigma_{k+1}(a))^{k+1}$ а) для $k = n-1$; б) для $k < n-1$.

2. (Неравенство о средних симметрических.) Пусть a — набор из n положительных чисел, $1 \leq \ell < k \leq n$. Докажите, что $\Sigma_\ell(a) \geq \Sigma_k(a)$, причем равенство достигается лишь в случае, когда все числа в наборе a одинаковы.

3. Докажите для любых положительных чисел a, b, c неравенство $-1 \leq \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{11} + \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^{11} + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^{11} \leq 1$.

4. а) Вещественные числа a, b, x, y удовлетворяют равенствам $(a+b)(x+y) = 1$ и $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = 1$. Докажите, что $ax+by \geq 0$. б) Вещественные числа a, b, c, x, y, z удовлетворяют равенствам $(a+b+c)(x+y+z) = 3$ и $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4$. Докажите, что $ax+by+cz \geq 0$.

5. Пусть $a, b, c > 0$, $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{7+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{7+c+a}} + \frac{c}{\sqrt{7+a+b}} \geq 1.$$

6. Пусть $a, b, c > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$\frac{a^{k+1}}{b^k} + \frac{b^{k+1}}{c^k} + \frac{c^{k+1}}{a^k} \geq \frac{a^k}{b^{k-1}} + \frac{b^k}{c^{k-1}} + \frac{c^k}{a^{k-1}}.$$

Игрушки. 20.07.2009

1. Чук и Гек играют в следующую игру: изначально Гек рисует дерево (т.е. связный граф без циклов, разумеется, а не что-то там еще...) Затем каждый из них по очереди красит какую-нибудь непокрашенную вершину в один из четырех цветов так, чтобы две вершины одного цвета не были соединены ребром (если ход возможен, пропускать его нельзя). Чук красит первым, и он выигрывает, если все вершины окажутся покрашенными. Гек выигрывает в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре?

2. В кучке лежат n камней. Двое играющих по очереди берут из кучки камни, причем за один ход можно взять либо один камень, либо простое число камней. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выиграет при правильной игре?

3. На доске написаны натуральные числа $1, 2, \ldots, 2004$. Два игрока поочередно делают ходы по следующим правилам. Разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них a^b. Через некоторое время на доске останется одно число. Первый игрок выигрывает, если оно оканчивается на 2, 7 или 8, а второй — в противном случае. Кто выиграет при правильной игре?

4. Два игрока по очереди ломают палку: первый на две части, затем второй ломает любой из кусков на две части, затем первый — любой из кусков на две части, и т. д. Первый выигрывает, если сможет после какого-то из своих ходов сложить из 6 кусков два равных треугольника. Может ли второй ему помешать?

5. Сеть авиалиний считается надежной, если после закрытия любого аэропорта из любого открытого аэропорта можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). В стране 2000 аэропортов и изначально нет авиалиний. Две авиакомпании по очереди вводят новые беспосадочные авиалиний. Авиакомпания, после хода которой получается надежная сеть авиалиний, проигрывает. Какая из авиакомпаний выиграет при правильной игре?

6. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки бесконечного листа. Первый хочет поставить четыре крестика так, чтобы центры их клеток были вершинами квадрата со сторонами, параллельными линиям сетки, а второй хочет ему помешать. Кто из них добьется своего при правильной игре?

Геометрический разнобой. 21.07.2009

1. d_1, d_2, d_3 — длины медиан треугольника, P — произвольная точка плоскости, а s_1, s_2, s_3 — расстояния от точки P до соответствующих медиан. Докажите, что одно из произведений d_1s_1, d_2s_2, d_3s_3 равно сумме двух других.

2. (Теорема Мебиуса.) Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ — выпуклый пятиугольник площади S и S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 — площади треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, $A_4A_5A_1$ и $A_5A_1A_2$ соответственно. Докажите, что

$$S^2 - S(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) + S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_4 + S_4S_5 + S_5S_1 = 0.$$

3. В окружности проведены диаметр AB и хорда CD, перпендикулярная AB. Произвольная окружность касается хорды CD и дуги CBD. Докажите, что отрезок касательной к этой окружности, проведенной из точки A, равен AC.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Пусть прямая ℓ — касательная к описанной окружности $\triangle ABC$ в точке A. Докажите, что прямая, проходящая через точку D параллельно ℓ касается вписанной окружности $\triangle ABC$.

5. (Треугольники Наполеона) На сторонах треугольника ABC а) во внешнюю сторону; б) во внутреннюю сторону построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

в) Докажите, что разность площадей этих треугольников равна площади исходного треугольника.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Точка B_2 симметрична точке B_1 относительно прямой A_1C_1, а точка B_3 — точка пересечения BB_2 и AC, аналогично определяются точки A_3 и C_3. Докажите, что точки A_3, B_3 и C_3 лежат на одной прямой, проходящей через центр описанной окружности треугольника ABC.

Числа и многочлены. 21.07.2009

1. Ненулевые числа a, b, c удовлетворяют соотношениям $a+b+c=0$, $a^3+b^3+c^3 = a^5+b^5+c^5$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

2. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — различные натуральные числа, $P(x)$ — приведенный многочлен n-й степени с вещественными коэффициентами. Докажите, что при некотором i выполняется неравенство $P(x_i) \geq n!/2^n$.

3. Пусть $S_{m,n} = 1 + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \frac{(n+k+1)!}{n!(n+k)}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $S_{m,n} \vdots m!$, но $S_{m,n}$ не всегда делится на $m!(n+1)$.

4. Докажите, что число $2^{7^{239}} + 1$ имеет не менее 240 различных простых делителей.

5. Для любых натуральных чисел $n > m$ докажите неравенство $[m, n] + [m+1, n+1] > \frac{2mn}{\sqrt{n-m}}$, где $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y.

6. Дан многочлен $F(x) = x^{2000} - x^{1000} + 1$. а) Существуют ли такие различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$, что $F(a_i)F(a_j)$ делится на a_ia_j при всех $i \neq j$? б) Существуют ли такие различные натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{8002}, что $F(a_i)F(a_j)F(a_k) \vdots a_ia_ja_k$ при всех попарно различных i, j и k?

Заключительная олимпиада 10 класса. 22.07.2009

Довывод

1. Известно, что для некоторого натурального n $n+1$ делится на $[\sqrt{n}] + 1$. Докажите, что $(n-1)(n-3)$ делится на $[\sqrt{n}] - 1$.

2. Существуют ли такие $p \in \mathbb{P}$ и $n \in \mathbb{N}$, что $3^p + 7^p = 2 \cdot 5^n$?

3. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Касательная к окружности S_1, проведенная в точке A, и касательная к S_2, проведенная в B, пересекаются в точке C. AC вторично пересекает S_2 в точке T. На окружности S_1 выбрана точка X, лежащая вне S_2. AX пересекает S_2 в точке Y, а YB пересекает XC в точке Z. Докажите, что $TZ \parallel XY$.

4. Два многочлена сотой степени $f(x) = a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + \ldots + a_1x + a_0$ и $g(x) = b_{100}x^{100} + b_{99}x^{99} + \ldots + b_1x + b_0$ отличаются друг от друга перестановкой коэффициентов. Известно, что $a_i \neq b_i$ при всех $i = 0, 1, 2, \ldots, 100$. Может ли оказаться, что $f(x) \geq g(x)$ при всех вещественных x?

5. Каждое из подмножеств A_1, A_2, $\ldots$, A_n 2009-элементного множества X содержит не менее 4 элементов. Пересечение любых двух из этих подмножеств содержит не более 2 элементов. Докажите, что в X можно найти 24-элеметное подмножество B, не содержащее ни одного из множеств A_1, A_2, $\ldots$, A_n.

. . . .

Заключительная олимпиада. Вывод

6. Дан остроугольный треугольник ABC такой, что $AC > BC$. В нем проведена высота CF. На прямой AB отмечена точка P такая, что

$AF = PF$. Пусть H, O, M — ортоцентр, центр описанной окружности и середина стороны AC соответственно. Обозначим через X точку пересечения прямых BC и HP, через Y — точку пересечения прямых OM и FX, и через Z — точку пересечения прямых OF и AC. Докажите, что точки F, M, Y, Z лежат на одной окружности.

7. Положительные числа x и y таковы, что $x - y = x^3 + y^3$. Докажите, что $x^2 + 4y^2 < 1$.

8. Компания людей называется хорошей, если ее членов можно рассадить по нескольким комнатам так, чтобы в каждой комнате люди были попарно незнакомы, но при этом можно было выбрать по одному человеку из каждой комнаты так, чтобы они были попарно знакомы.

Компания называется совершенной, если она хорошая, и любой набор ее членов также образует хорошую компанию.

На вечеринку должна была собраться совершенная компания. Но один из ее членов Вася привел на вечеринку своего знакомого Петю, который не ожидался заранее, и познакомил его со всеми своими знакомыми. Докажите, что получившаяся компания тоже оказалась совершенной.