YET ANOTHER PROOF FROM THE BOOK [1]

A. Skopenkov [2]

The Gauss Theorem. *A calculator (calculating with absolute precision) has operations*

$$1, \quad +, \quad -, \quad \times, \quad : \quad \textit{and} \quad \sqrt{}$$

(and infinite memory). The number $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ *is calculable at this calculator if and only if* $n = 2^\alpha p_1 \dots p_l$*, where* $p_1, \dots, p_l$ *are distinct primes of the form* $2^{2^s}+1$*.*

In this note a *short elementary proof of this result* is sketched. This proof is short but may seem unmotivated; in [KS] it is explained how to invent this proof.

The terms 'field extension' and 'Galois group' (even 'field' and 'group') are not used. (Cyclic groups and quadratic extensions of rationals are used, but naming them groups or fields does not make the proof simpler.) However, our presentation is a good way to learn starting ideas of the Galois theory. For more introduction see [KS]. For history of the Gauss theorem see [CR].

The idea of the given proof is known in (at least USSR high-school math circles) folklore. I would like to acknowledge A. Ya. Belov, I. I. Bogdanov, G. R. Chelnokov, A. L. Glazman, A. S. Golovanov, A. A. Kaznacheev, P. V. Kozlov, V. V. Prasolov and M. N. Vyalyi for useful discussions.

A reduction to complex numbers.

A real number is called *(real)-constructible*, if we can calculate this number using our calculator.

A complex number is *(complex)-constructible* if we can calculate this number using the complex analogue of our calculator (the calculator gives *two* square roots of a complex number).

Lemma. *A complex number is complex-constructible if and only if its real and imaginary parts are real-constructible.*

Hint. The 'if' part is clear. In order to prove the 'only if' part write $\sqrt{a+bi} = u+vi$ and express u, v by quadratic radicals of a and b. QED

Proof of the 'if' part of the Gauss theorem.

Lemma. *If* $\cos\dfrac{2\pi}{m}, \cos\dfrac{2\pi}{n}$ *are constructible and* m, n *are relatively prime, then* $\cos\dfrac{2\pi}{2n}$ *and* $\cos\dfrac{2\pi}{mn}$ *are constructible.*

Hint. The constructibility of $\cos\dfrac{2\pi}{2n}$ follows because $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$. The constructibility of $\cos\dfrac{2\pi}{mn}$ follows because $\cos\dfrac{2\pi(mx+ny)}{mn}$ is constructible. QED

If l is odd, then $2^{kl}+1$ is divisible by 2^k+1. Thus if 2^m+1 is a prime then m is a power of 2. So the Lemma implies that in order to prove the 'if' part of the Gauss theorem we need to prove that $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ is constructible for $n = 2^m+1$ a prime. The case $n = 3$ is clear, so assume that $n = 2^m+1 \geq 5$.

---

[1] See updated version on the arxiv

[2] skopenko@mccme.ru; http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps. Moscow State University, Independent University of Moscow and Moscow Institute of Open Education.

Primitive Root Theorem. *For each prime p there exists an integer g such that the residues modulo p of $g^1, g^2, g^3 \dots, g^{p-1}$ are distinct.*

Hint for $p = 2^m + 1$ (only this case is used for the Gauss Theorem). If there are no primitive roots, then the congruence $x^{2^{m-1}} \equiv 1\ (p)$ has $p - 1 = 2^m > 2^{m-1}$ solutions. QED

Let g be a primitive root modulo a prime $n = p = 2^m + 1 \geq 5$. Set

$$\varepsilon := \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \quad \overline{i_0 \dots i_x} := i_0 2^0 + \dots + i_x 2^x \quad \text{and} \quad A_{i_0 \dots i_x} := \sum_{s=0}^{2^{m-x-1}} \varepsilon^{g^{s2^{x+1} - \overline{i_0 \dots i_x}}}.$$

Then $A_{i_0 \dots i_x 0} + A_{i_0 \dots i_x 1} = A_{i_0 \dots i_x}$. For $x < m$ we have

$$A_{i_0 \dots i_x 0} A_{i_0 \dots i_x 1} = \sum_{s=0}^{2^m} \alpha(s)\varepsilon^s \overset{(*)}{=} \alpha(0) + \sum_{(j_0 \dots j_x)} \alpha(\overline{j_0 \dots j_x}) A_{j_0 \dots j_x}$$

Here $\alpha(s)$ is the number of solutions (k, l) (in residues modulo $p - 1$) of the congruence

$$g^{k2^{x+1} - \overline{i_0 \dots i_x}} + g^{l2^{x+1} + 2^x - \overline{i_0 \dots i_x}} \equiv s \bmod p.$$

(Note that $\alpha(0) = 0$ for $x < m$.) Clearly, $\alpha(s) = \alpha(sg^{2^x})$. Thus the equality (*) follows.

Since $A_\emptyset = -1$, by induction on x starting with $x = -1$ we obtain that $A_{i_0 \dots i_x}$ is constructible. Then the 'if' part of the Gauss theorem follows because $A_{0 \dots 0} = \varepsilon$ (there are m zeros in the formula). QED

Proof of the 'only if' part of the Gauss theorem.

Lemma. *If $\cos\dfrac{2\pi}{nk}$ is constructible, then $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ is constructible.*

Hint. Follows because $\cos k\alpha$ is a polynomial of $\cos\alpha$. QED

The Lemma implies that in order to prove the 'only if' part of the Gauss theorem we need to prove that $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ is not constructible for

(*) $n \neq 2^m + 1$ a prime, and

(**) $n = p^2$ the square of a prime.

Sequence Lemma. *Number A is constructible if and only if there are positive $r \in \mathbb{Z}$ and $a_1, \dots a_r \in \mathbb{R}$ such that*

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \dots \subset Q_r \subset Q_{r+1} \ni A, \quad \text{where} \quad a_k \in Q_k, \quad \sqrt{a_k} \notin Q_k,$$

$$Q_{k+1} = Q_k[\sqrt{a_k}] := \{x + y\sqrt{a_k} \mid x, y \in Q_k\} \quad \text{for each} \quad k = 1, ..., r - 1.$$

Hint. This is proved by induction on the number of operations of the calculator, which are necessary to construct given number. In the proof of the inductive step we use multiplication by conjugate. QED

Such a sequence is called *a sequence of quadratic extensions* (this term is considered as one word, we do not use the term 'quadratic extension' alone).

Any element Q_k is closed under the summation, subtraction, multiplication and division (by a non-zero element). Hence the Bezout theorem and its corollaries hold for polynomials with coefficients in Q_k.

Main Lemma. *If Q_k is an element of a sequence of quadratic extension for ε and P is a polynomial with coefficients in Q_k irreducible over Q_k and such that $P(\varepsilon)=0$. Then* $\deg P$ *is a power of 2.*

Proof. By induction on $\deg P$. Base $\deg P = 1$ is clear. Let us prove the inductive step. Let P_1 be an irreducible multiple of P over Q_{k+1}. Using the notation of the Sequence Lemma define the *conjugation map* $\bar{\cdot}: Q_{k+1}[\sqrt{a}] \to Q_{k+1}[\sqrt{a}]$ by the following formula: $\overline{x+y\sqrt{a}} = x - y\sqrt{a}$. Clearly, this map is well-defined,

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \quad \text{and} \quad \overline{z} = z \Leftrightarrow z = x + 0\sqrt{a} \in Q_k.$$

Then P is divisible by the polynomial $\overline{P}_1$ that is conjugate to P_1. Since P_1 is irreducible, either $\overline{P}_1 = P_1$ or $\overline{P}_1$ is relatively prime to P_1. In the first case the coefficients of P_1 are in Q_k, so P is reducible over Q_k, which is a contradiction. In the second case P is divisible by the polynomial $P_1\overline{P}_1$ with coefficients in Q_k. Since P is irreducible over Q_k, we have $P = P_1\overline{P}_1$. Without loss of generality $P_1(\varepsilon) = 0$. Hence by the induction hypothesis $\deg P_1$ is a power of 2. Therefore $\deg P = 2\deg P_1$ is a power of 2. QED

Now the non-constructibility follows by applying the Main Lemma to $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$,

$$P(x) := x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \text{ for } (*) \quad \text{and} \quad P(x) := x^{p(p-1)} + x^{p(p-2)} + \cdots + x^p + 1 \text{ for } (**).$$

The irreducibility of $P(x)$ over $\mathbb{Z}$ follows (in both cases) by the irreducibility of $P(x+1)$ over $\mathbb{Z}$. The latter is implied by the following Eisenstein criterion.

Let p be a prime. If the leading coefficient of a polynomial with integer coefficients is not divisible by p, other coefficients are divisible by p and the constant term is not divisible by p^2, then this polynomial is irreducible over $\mathbb{Z}$.

The irreducibility of $P(x)$ over $\mathbb{Q}$ follows by the irreducibility of $P(x)$ over $\mathbb{Z}$ and the following Gauss lemma.

If a polynomial with integer coefficients is irreducible over $\mathbb{Z}$, then it is irreducible over $\mathbb{Q}$.

Both Eisenstein criterion and Gauss lemma are easily proved by passing to polynomials with coefficients in $\mathbb{Z}_p$ (for the Gauss lemma take a decomposition $P = P_1P_2$, take N_1 and N_2 such that the polynomial N_iP_i has integer coefficients and take a prime divisor p of N_1N_2). QED

References

[CR] R. Courant and H. Robbins, What is Mathematics, Oxford Univ. Press.

[KS] P. Kozlov and A. Skopenkov, A la recherche de l'algèbre perdue: du cote de chez Gauss, Mat. Prosveschenie 12 (2008), 127–144. arXiv:0804.4357

A LA RECHERCHE DE L'ALGÈBRE PERDUE: DU CÔTE DE CHEZ GAUSS [3]

P. Kozlov [4] and A. Skopenkov [5]

Abstract. This paper is purely expositional. The statement of the Gauss criterion for constructibility of regular polygons is simple and well-known. We sketch an elementary proof of this criterion. We do not use the terms 'field extension', 'Galois group' and even 'group'. However, our presentation is a good way to learn (or recall) starting idea of the Galois theory. The paper is accessible for students familiar with elementary algebra (including complex numbers), and could be an interesting easy reading for mature mathematicians. The material is presented as a sequence of problems, which is peculiar not only to Zen monasteries but also to elite mathematical education (at least in Russia); most problems are presented with hints or solutions. An English version is followed by a more extended Russian version.

Listeners are prepared to accept unstated (but hinted) generalizations much more than they are able ... to decode a precisely stated abstraction and to re-invent the special cases that motivated it in the first place.
P. Halmos, How to talk mathematics.

Introduction.

The Gauss Theorem. *A calculator (calculating with absolute precision) has operations*

$$1, \quad +, \quad -, \quad \times, \quad : \quad \textit{and} \quad \sqrt{}$$

(and infinite memory). The number $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ *is calculable at this calculator if and only if* $n = 2^\alpha p_1 \dots p_l$, *where* $p_1, \dots, p_l$ *are distinct primes of the form* $2^{2^s}+1$.

In this note we sketch *an elementary proof of this result*. We do not use the terms 'field extension', 'Galois group' and even 'group'. However, our presentation is a good way to learn (or recall) starting idea of the Galois theory (which can be expressed in a vulgar but striking way as '*group and rule*', or '*unite and rule*').

The proof to be presented is implicitly contained in the Gauss papers [Ga] and is explicitly known in (at least USSR high-school math circles) folklore. However, the authors could not find it published (except the 'if' part for $n = 17$ and the second proof of the 'only if' part [Vi]).

Before presenting the proofs of the 'only if' part of the Gauss theorem some of their ideas are demonstrated one by one on the easiest examples (series C). These examples give the solution of classical antique problems of the doubling of a cube and the trisection of an angle, which were awaiting for their solutions nearly 2000 years [CR].

The 'only if' part of the Gauss theorem is not proved in [Ga]. However, the first proof of the 'only if' part is close to ideas of Gauss, so it could be accepted as the Gauss argument. In

[3] This is an abridged English translation by P. Dergach and A. Skopenkov. An abridged Russian version is published in Mat. Prosveschenie, 12 (2008), 127–143, http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html. See an updated version on http://arxiv.org/abs/0804.4357

[4] p−−kozlov@yandex.ru, Moscow State University

[5] skopenko@mccme.ru; http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps. Moscow State University, Independent University of Moscow and Moscow Institute of Open Education. A. Skopenkov gratefully acknowledges the support from Deligne 2004 Balzan prize in mathematics, the Russian Foundation for Basic Research Grant 06-01-72551-NCNILa and President of Russian Federation Grant MD-4729.2007.1.

the second proof we follow [Vi] (our exposition is different: the main definitions are not given unmotivated in advance, but naturally appear in the course of the proof). The third proof appeared in a discussion with A. Belov [Ka]. The three proofs are in essence the same.

Steps of the proof are presented as problems marked with bold numbers. Most problems are presented with hints or solutions.

If the statement of a problem is an assertion, then the problem is to prove this assertion.

We would like to acknowledge A. Ya. Belov, I. I. Bogdanov, G. R. Chelnokov, P. A. Dergach, A. S. Golovanov, A. I. Efimov, A. A. Kaznacheev, V. V. Prasolov, E. B. Vinberg and M. N. Vyalyi for useful discussions.

Constructions by compass and ruler.

Of this subsection we use in the proof of the Gauss theorem only the definition of a constructible number and problem A4.

A1. Using segments of length a and b construct (from now on: by means of compass and ruler) segments of length $a+b$, $a-b$, ab/c, $\sqrt{ab}$.

A real number is called *constructible*, if we can calculate this number using our calculator. For example, the numbers

$$1+\sqrt{2},\quad \sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}},\quad \sqrt{2\sqrt{3}},\quad \sqrt{2}+\sqrt{3},\quad \sqrt{1+\sqrt{2}},\quad \frac{1}{1+\sqrt{2}}\quad\text{and}\quad \cos 3^\circ$$

are constructible. This is not evident for the last two numbers.

A2. Every constructible number is constructible by compass and ruler.

This result is a corollary of A1. It shows that if the number $\cos(2\pi/n)$ is constructible, then we can construct the regular n-gon.

A3. *Main theorem of the theory of geometric constructions.* Every number constructible by compass and ruler is constructible.

For the proof consider all possible cases of construction of new objects (points, lines, circles) and prove that the coordinates of all the constructed points and the coefficients of equations of all the constructed lines and circles are constructible numbers.

From this result it follows that if the number $\cos(2\pi/n)$ is not constructible, then we cannot construct the regular n-gon.

A4. If a complex number z is *complex-constructible* (the definition is analogous with only one distinction: the calculator gives *two* square roots of a complex number), then the real part and the imaginary part of z are constructible.

Hint. Write $\sqrt{a+bi}=u+vi$ and express u, v by quadratic radicals of a and b.

A5. If the regular mn-gon is constructible, then the regular m-gon is constructible.

A6. The regular triangle and the regular pentagon are constructible. Or, equivalently, the numbers $\cos(2\pi/3)$ and $\cos(2\pi/5)$ are constructible.

A7. The regular 120-gon is constructible. Or, equivalently, the angle 3° is constructible. The following problems are hints.

A8. If the regular n-gon is constructible, then the regular $2n$-gon is constructible.

Hint. Bisect the angle or apply the half angle formula.

A9. If the regular n-gon and m-gon are constructible and $GCD(m,n)=1$, then the regular mn-gon is constructible.

Hint. Since $GCD(m,n)=1$, it follows that there exist integers a, b such that $am+bn=1$.

The 'if' part of the Gauss theorem.

It is not difficult to prove the 'if' part of the Gauss theorem for $n \le 16$.

Proof of the 'if' part of the Gauss theorem for $n = 5$. It suffices to calculate the number $\varepsilon := \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$. We shall construct some functions of ε. Since

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 0, \quad \text{we have} \quad (\varepsilon + \varepsilon^4)(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = -1.$$

Denote

$$A_0 := \varepsilon + \varepsilon^4 \quad \text{and} \quad A_1 := \varepsilon^2 + \varepsilon^3.$$

Then A_0 and A_1 are roots of the equation $t^2 + t - 1 = 0$ by the Vieta theorem. Hence these numbers are constructible. Since $\varepsilon \cdot \varepsilon^4 = 1$, the numbers ε and ε^4 are roots of the equation $t^2 - A_0 t + 1 = 0$ by the Vieta theorem. Therefore we can calculate ε (and ε^4).

B1. If $2^m + 1$ is a prime then m is a power of 2.

Idea of proof of the constructibility in the Gauss theorem. It suffices to prove the Gauss Theorem for $n = 2^m + 1$ a prime (then m is necessarily a power of 2). It suffices to calculate

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

First it would be good to split the sum

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = -1$$

into two summands A_0 and A_1 whose *product* is constructible (or, in other words, to *group* the roots of the equation $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = 0$ in a clever way). Then A_0 and A_1 would be constructible by the Vieta Theorem.

Next it would be good to split the sum A_0 into two summands A_{00} and A_{01} whose product is constructible, and analogously split $A_1 = A_{10} + A_{11}$. And so on, until we calculate $A_{0\ldots0} = \varepsilon$.

It is however quite non-trivial to find the necessary splittings.

Primitive Root Theorem. For each prime $p = 2^m + 1$ there exists an integer g such that the residues modulo p of $g^1, g^2, g^3 \ldots, g^{2^m}$ are distinct.

Construction of necessary splittings is given below in problems B3a, B4a, B4c and in the solution of the problem B4d.

B2. *Proof of the Primitive Root Theorem.* Suppose that p is a prime and a is not divisible by p.

(a) Suppose that k is the smallest positive integer such that $a^k \equiv 1\ (p)$. Then $p - 1$ is divisible by k.

Hint: use the Fermat Little Theorem.

(b) For every integers n and a the congruence $x^n \equiv a\ (p)$ has at most n solutions.

(c) If $p - 1$ is divisible by d then the congruence $x^d \equiv 1\ (p)$ has exactly d solutions.

(d) Prove the Primitive Root Theorem for $p = 2^m + 1$. (Only this case is necessary for the Gauss theorem.)

(e)* Prove the Primitive Root Theorem for $p = 2^m \cdot 3^n + 1$.

(f)* Prove the Primitive Root Theorem for *arbitrary* prime p.

(g)* Is it true that 3 is a primitive root modulo p for every prime of the form $p = 2^m + 1$?

From now on let g be a primitive root modulo a prime $p = 2^m + 1 \ge 5$.

B3. (a) Set

$$A_0 := \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^4} + \varepsilon^{g^6} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m}} \quad \text{and} \quad A_1 := \varepsilon^{g^1} + \varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{g^5} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m-1}}.$$

Prove that $A_0A_1 = -\frac{p-1}{4}$.

The following problems are hints.

(b) We have

$$A_0A_1 = \sum_{s=1}^{2^m} \varepsilon^s \alpha(s),$$

where $\alpha(s)$ is the number of solutions (k,l) (in residues modulo $p-1$) of the congruence

$$g^{2k} + g^{2l+1} \equiv s \ (p).$$

(c) $\alpha(0) = 0$.

(d) $\alpha(s) = \alpha(gs)$.

(e) $\alpha(s)$ does not depend on $s = 1, \ldots, 2^m$.

B4. (a) Set

$$A_{00} := \varepsilon^{g^4} + \varepsilon^{g^8} + \varepsilon^{g^12} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m}} \quad \text{and} \quad A_{01} := \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^6} + \varepsilon^{g^{10}} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m-2}}.$$

Prove that $A_{00}A_{01} = sA_0 + tA_1$ for certain integers s and t (in fact, $s + t = \frac{p-1}{8}$).

(b) (hint) The congruence

$$g^{4k} + g^{4l+2} \equiv s \ (p)$$

has the same number of solutions (k,l) (in residues modulo $p-1$) as the congruence

$$g^{4k} + g^{4l+2} \equiv sg^2 \ (p).$$

We have $g^a + g^b \equiv 0 \ (p)$ if and only if $a - b \equiv 2^{m-1} \ \ (p-1)$.

(c) Set

$$A_{11} := \varepsilon^{g^1} + \varepsilon^{g^5} + \varepsilon^{g^9} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m-3}} \quad \text{and} \quad A_{10} := \varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{g^7} + \varepsilon^{g^{11}} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m-1}}.$$

Prove that $A_{10}A_{11} = uA_0 + vA_1$ for certain integers u and v (in fact, $u + v = \frac{p-1}{8}$).

(d) Complete the proof of the 'if' part of the Gauss theorem.

B5. Find an explicit expression involving square roots for

(a) A_0 from Problem B3a. (b) $\cos\dfrac{2\pi}{17}$. (c)* $\cos\dfrac{2\pi}{257}$. (d)* $\cos\dfrac{2\pi}{65537}$.

Using the above method and computer, this problem is easily solvable (in spite of the story from *J. Littlewood, Mathematical Miscellany*).

Remark. There is another proof of constructibility, like the previous one, but without use of complex numbers. For example, consider the regular 17-gon. Set $a_k = \cos(2\pi k/17)$. Then $a_k = a_{17-k}$, $2a_ka_l = a_{k+l} + a_{k-l}$ and $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 = -1/2$. First calculate $a_1 + a_2 + a_4 + a_8$ and $a_3 + a_5 + a_6 + a_7$. Then calculate $a_1 + a_4$, $a_2 + a_8$, $a_3 + a_5$ and $a_6 + a_7$. Finally calculate a_1.

Hints and solutions to the 'if' part of the Gauss theorem.

Hint to problem B1. If n is odd, then $2^{kn}+1$ is divisible by 2^k+1.

Hints to problem B2. (b) Let us prove the following more general statement: a polynomial of degree n cannot have more than n roots in $\mathbb{Z}_p$. Here by a polynomial we mean the collection of coefficients but not the function.

Assume that a polynomial $P(x)$ of degree n has in $\mathbb{Z}_p$ different roots $x_1,\dots,x_n,x_{n+1}$. Represent $P(x)$ as

$$P(x)=b_n(x-x_1)\dots(x-x_n)+b_{n-1}(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})+\dots+b_1(x-x_1)+b_0$$

('*the Newton interpolation*'). Put in the congruence $P(x)\equiv 0\ (p)$ residues $x=x_1,\dots,x_n,x_{n+1}$ in this order. We obtain $b_0\equiv b_1\equiv\dots\equiv b_{n-1}\equiv b_n\equiv 0\ (p)$.

The same solution can be presented in the following way. Let P be a polynomial. Then polynomial $P-P(a)$ is divisible by $x-a$, i.e. $P-P(a)=(x-a)Q$ for some polynomial Q such that $\deg Q<\deg P$. Since $P(a)=0$, it follows that $P=(x-a)Q$ for some polynomial Q of degree less than $\deg P$. Now the required statement can be proved by induction on the degree of the polynomial P.

(c) Obviously, polynomial $x^{p-1}-1$ in $\mathbb{Z}_p$ has exactly $p-1$ roots and is divisible by x^d-1. Prove that if a polynomial of degree a have a roots and is divisible by a polynomial of degree b, then the polynomial of degree b has exactly b roots.

(d) If there are no primitive roots, then by problem 2a the congruence $x^{2^{m-1}}\equiv 1\ (p)$ has $p-1=2^m>2^{m-1}$ solutions.

(e),(f) Similarly to (d).

Remark to problem B2f. It is easy to deduce from the existence of a primitive root that for $p-1=p_1^{a_1}\dots p_k^{a_k}$ the number of primitive roots is $(p-1)(1-\frac{1}{p_1})\dots(1-\frac{1}{p_k})=\varphi(p-1)$.

Hints to problem B3. (b) Open the parenthesis and group the equal elements of the sum.

(d) If (k,l) is a solution of the congruence $g^{2k}+g^{2l+1}\equiv s\ (p)$, then $(l,k+1)$ is a solution of the congruence $g^{2k}+g^{2l+1}\equiv gs\ (p)$.

If (k,l) is a solution of the congruence $g^{2k}+g^{2l+1}\equiv gs\ (p)$, then $(l-1,k)$ is a solution of the congruence $g^{2k}+g^{2l+1}\equiv s\ (p)$.

Hint to B5c. (Written using a draft of I. Lukyanets and V. Sokolov.) Set

$$\overline{i_0\dots i_x}:=i_02^0+\dots+i_x2^x\quad\text{and}\quad A_{i_0\dots i_x}:=\sum_{s=0}^{2^{m-x-1}}\varepsilon^{g^{s2^{x+1}-\overline{i_0\dots i_x}}}.$$

Then $A_{i_0\dots i_x0}+A_{i_0\dots i_x1}=A_{i_0\dots i_x}$. For $x<m$ we have

$$A_{i_0\dots i_x0}A_{i_0\dots i_x1}=\sum_{s=0}^{2^m}\alpha(s)\varepsilon^s=\sum_{(j_0\dots j_x)}b_{j_0\dots j_x}A_{j_0\dots j_x}\quad\text{for some}\quad b_{j_0\dots j_x}\in\mathbb{Z}.$$

Here in the first equality $\alpha(s)$ is the number of solutions (k,l) (in residues modulo $p-1$) of the congruence

$$g^{k2^{x+1}-\overline{i_0\dots i_x}}+g^{l2^{x+1}+2^x-\overline{i_0\dots i_x}}\equiv s \bmod p.$$

Analogously to B3c $\alpha(0)=0$ for $x<m$. Analogously to B3d $\alpha(s)=\alpha(sg^{2^x})$. Thus the second equality follows.

Preliminaries for the 'only if' part of the Gauss theorem.

C1. There are no rational numbers a, b, c, d such that $\sqrt[3]{2} =$

(a) $a + \sqrt{b}$; (b) $a - \sqrt{b}$; (c) $\dfrac{1}{a + \sqrt{b}}$; (d) $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$; (e) $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{bc}$;

(f) $a + \sqrt{b + \sqrt{c}}$; (g) $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$.

Hint to problem 1c. Multiply by conjugate.

C2. (a) Delete the button ':' from (the complex analogue of) the calculator defined in the Gauss theorem, but allow to use all rational numbers. Then the set of numbers realizable using the new calculator will remain the same.

Hint. Induction on the number of operations of the calculator, which are necessary to construct given number; use multiplication by conjugate.

(b) Number A is constructible if and only if there are positive $r \in \mathbb{Z}$ and $a_1, \dots a_r \in \mathbb{R}$ such that

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \ldots \subset Q_r \subset Q_{r+1} \ni A, \quad \text{where} \quad a_k \in Q_k, \quad \sqrt{a}_k \notin Q_k,$$

$$Q_{k+1} = Q_k[\sqrt{a}_k] := \{\alpha + \beta\sqrt{a}_k \mid \alpha, \beta \in Q_k\} \quad \text{for each} \quad k = 1, ..., r-1.$$

Such a sequence is called *a sequence of quadratic extensions* (this term is considered as one word, we do not use the term 'quadratic extension' alone).

Hint. Follows by problem 2a.

(c) $\sqrt[3]{2}$ is not constructible. (Hence the doubling of a cube by ruler and compass is impossible.)

Proof that $\sqrt[3]{2}$ is not constructible. Suppose that $\sqrt[3]{2}$ is constructible. Then there exists a sequence of quadratic extensions

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \ldots \subset Q_{r-1} \subset Q_r \quad \text{such that} \quad \sqrt[3]{2} \in Q_r \setminus Q_{r-1}.$$

Since $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$, it follows that $r \geq 2$. Then

$$\sqrt[3]{2} = \alpha + \beta\sqrt{a}, \quad \text{where} \quad \alpha, \beta, a \in Q_{r-1}, \quad \sqrt{a} \notin Q_{r-1} \quad \text{and} \quad \beta \neq 0.$$

Then

$$2 = (\sqrt[3]{2})^3 = (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2 a) + (3\alpha^2\beta + \beta^3 a)\sqrt{a} = u + v\sqrt{a}.$$

Since $2 \in \mathbb{Q} \subset Q_{r-1}$, it follows that $2 - u \in Q_{r-1}$. From

$$v\sqrt{a} = 2 - u \quad \text{and} \quad v \in Q_{r-1} \quad \text{we obtain} \quad 0 = v = 3\alpha^2\beta + \beta^3 a.$$

Since $3\alpha^2 + \beta^2 a > 0$, it follows that $\beta = 0$. A contradiction. QED

C3. (a) Number $\cos(2\pi/9)$ is a root of the cubic equation $8x^3 - 6x + 1 = 0$.

(b) There are no rational numbers a and b such that $\cos(2\pi/9) = a + \sqrt{b}$.

(c) There are no rational numbers a, b and c such that $\cos(2\pi/9) = a + \sqrt{b + \sqrt{c}}$.

(d) Number $\cos(2\pi/9)$ is not constructible (hence the trisection of angle $\pi/3$ by ruler and compass is impossible and the regular 9-angled polygon is not constructible).

(e) The roots of a cubic equation with rational coefficients are constructible if and only if one of these roots is rational.

Hints to problem C3. (a) Express $\cos 3\alpha$ by $\cos \alpha$.

(b) If $\cos(2\pi/9) = a + \sqrt{b}$, then $a - \sqrt{b}$ is also a root of equation $8x^3 - 6x + 1 = 0$. Hence by the by the Vieta theorem the third root is equal to $-(a + \sqrt{b}) - (a - \sqrt{b}) = -2a \in \mathbb{Q}$.

(d) Follows by (a) and (e).

(e) See the following lemma.

C4. *Conjugation lemma.* Using the notation of 2b define the conjugation map $\bar{\cdot} : Q_k[\sqrt{a}] \to Q_k[\sqrt{a}]$ by the following formula: $\overline{x + y\sqrt{a}} = x - y\sqrt{a}$. Then

(a) This map is well-defined.

(b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ $\quad$ and $\quad \overline{z} = z \Leftrightarrow z = x + 0\sqrt{a} \in Q_{k-1}$.

(c) If $z \in Q_k[\sqrt{a}]$ is a root of a polynomial P with rational coefficients, then $P(\overline{z}) = 0$.

(Compare with the lemma on complex roots of polynomials with real coefficients.)

Proof of theorem C3e for cubic equations all whose three roots are real (this case is sufficient for the impossibility of construction of regular 9-angled polygon). The part 'if' is obvious. Let us prove the 'only if' part. Suppose the contrary, i.e. that at least one of the roots is constructible. For each constructible root z consider the minimal sequence of quadratic extensions

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \ldots \subset Q_{r-1} \subset Q_r, \quad \text{for which} \quad z_1 \in Q_r \setminus Q_{r-1}.$$

Consider the root $z = z_1$ with the least length l of minimal sequence.

Since the equation has no rational roots, it follows that $l \geq 2$. Hence

$$z_1 = \alpha + \beta\sqrt{a}, \quad \text{where} \quad \alpha, \beta, a \in Q_{l-1}, \quad \sqrt{a} \notin Q_{r-1} \qquad \text{and} \quad \beta \neq 0.$$

Hence number $\overline{z}_1 = \alpha - \beta\sqrt{a}$ is also a root of the considered equation (by the Conjugation lemma). Since $\beta \neq 0$, it follows that $\alpha - \beta\sqrt{a} \neq \alpha + \beta\sqrt{a}$, i. e. $\overline{z}_1 \neq z_1$. Denote $z_2 := \overline{z}_1$. By the Vieta formula for our equation we have:

$$z_1 + z_2 + z_3 = (\alpha + \beta\sqrt{a}) + (\alpha - \beta\sqrt{a}) + z_3 = 2\alpha + z_3 \in \mathbb{Q}, \quad \text{hence} \quad z_3 \in Q_{l-1}.$$

Therefore for the root z_3 there exists a sequence of quadratic extensions whose length is less than that for the root z_1. A contradiction. QED

C5. This problem is not used in the proof of the Gauss Theorem.

(a)* The roots of a polynomial of degree 4 with rational coefficients are constructible if and only if the *resolution cubic equation* has a rational root.

(b) Any constructible number is algebraic, i.e. it is a root of an polynomial with rational coefficients. (This fact together with the transcendence of $\sqrt{\pi}$ implies the impossibility of squaring the circle by compass and ruler. The transcendence of $\sqrt{\pi}$ is an implication of the transcendence of π that is proved by Lindemann in 1883.)

Hint. Let $a{=}a_1$ and $b{=}b_1$ be constructible numbers, P and Q polynomials with rational coefficients of minimal degree such that a and b are their roots, respectively. Let $a_2, \ldots, a_m$ be all other complex roots of P and $b_2, \ldots, b_n$ all other complex roots of Q. Notice that

$a + b$ is a root of polynomial $P(x - b_1) \ldots P(x - b_n)$,

$a - b$ is a root of polynomial $P(x + b_1) \ldots P(x + b_n)$,

ab is a root of polynomial $P(\frac{x}{b_1}) \ldots P(\frac{x}{b_n})$,

$\frac{a}{b}$ is a root of polynomial $P(xb_1) \ldots P(xb_n)$,

$\sqrt{a}$ is a root of polynomial $P(x^2)$.

Now it suffices to prove the lemma.

Lemma. Let $R(x, y)$ be a polynomial in two variables with rational coefficients, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ are all complex roots of polynomial Q with rational coefficients. Then a polynomial $R(x, b_1)R(x, b_2) \ldots R(x, b_n)$ with one variable also has rational coefficients.

First proof of the 'only if' part of the Gauss theorem.

D1. Number $\cos(2\pi/7)$ is not constructible (hence the regular heptagon is not constructible).

D2. Let $n = 4k + 3$ be a prime. Denote $\varepsilon := \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, $f_s = \varepsilon^s + \varepsilon^{-s}$. The least length of a minimal sequence from problem C2a is called a *rank* of α.

(a) For each k number $f_1^k + f_2^k + \cdots + f_{(p-1)/2}^k$ is rational.

(b) After opening the parenthesis and grouping the equal elements in the equation $(x - f_1)(x - f_2)\ldots(x - f_{(p-1)/2})$ we obtain a polynomial with rational coefficients.

(c) Ranks of numbers $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$ are equal.

(d) Ranks of numbers $f_1, \ldots, f_{(p-1)/2}$ are equal.

(e) Number $\cos(2\pi/n)$ is not constructible.

D3. Denote $\varepsilon := \cos\dfrac{2\pi}{13} + i\sin\dfrac{2\pi}{13}$, $g = 2$ is a primitive root modulo 13,

$$A_0 = \varepsilon^{g^0} + \varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{g^6} + \varepsilon^{g^9}, \quad A_1 = \varepsilon^{g^1} + \varepsilon^{g^4} + \varepsilon^{g^7} + \varepsilon^{g^{10}} \quad \text{and} \quad A_2 = \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^5} + \varepsilon^{g^8} + \varepsilon^{g^{11}}.$$

$$(a) \quad A_0^2 = 4 + A_1 + 2A_2, \quad A_1^2 = 4 + A_2 + 2A_0 \quad \text{and} \quad A_2^2 = 4 + A_0 + 2A_1.$$

(b) Numbers A_0, A_1, A_2 are roots of an irreducible cubic equation with rational coefficients.

(c) Numbers A_0, A_1, A_2 have the same rank.

(d) Number $\cos(2\pi/13)$ is not constructible.

D4. Number $\cos(2\pi/p)$ is not constructible for

(a) $p = 3 \cdot 2^k + 1$ a prime.

(b) p a prime, $p \neq 2^m + 1$.

(c) $p = 25$.

(d) number p that is not a product of a power of 2 and distinct prime numbers of the form $2^m + 1$.

Solution of problem D1. Denote $\varepsilon := \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$. Since $\varepsilon \neq 1$, it follows that number ε is a root of the equation $\varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Divide both parts of the equation by ε^3. Denote

$$f := \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad \text{then} \quad \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = f^2 - 2 \quad \text{and} \quad \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = f(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} - 1).$$

We have a cubic equation

$$f(f^2 - 3) + (f^2 - 2) + f + 1 = 0, \quad \text{i.e.} \quad f^3 + f^2 - 2f - 1 = 0.$$

The candidates for rational roots of this equation $f = \pm 1$ are easily rejected. Using theorem C3e on cubic equations one can observe that number $f = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$ is not constructible. Hence ε is not constructible (explain why).

Hint to problem D2. (a) Induction on k.

(b) Follows by (a) and the fact that every symmetric polynomial of variables $f_1, f_2, \ldots, f_{(p-1)/2}$ is rationally expressed via polynomials of type $f_1^k + f_2^k + \cdots + f_{(p-1)/2}^k$.

(c) Since for each $s, t \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ there exists k such that $\varepsilon^s = (\varepsilon^t)^k$, it follows that the ranks of numbers $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$ are equal.

(d) Since $\varepsilon^s + \varepsilon^{-s}$ is rationally expressed via $\varepsilon + \varepsilon^{-1}$, it follows that for each $s, t \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ number $\varepsilon^s + \varepsilon^{-s}$ is rationally expressed via $\varepsilon^t + \varepsilon^{-t}$ (Analogously to the solution of problem D1). Hence ranks of numbers $f_1, \ldots, f_{(p-1)/2}$ are the same.

(Observe that $\mathrm{rk}(\varepsilon+\varepsilon^{-1})=\mathrm{rk}\varepsilon-1$.)

(e) Denote $r:=\mathrm{rk}f_s$. Hence for some sequence of quadratic extensions

$$f_s=\alpha_s+\beta_s\sqrt{a},\quad \text{where}\quad \alpha_s,\beta_s,a\in Q_{r-1},\quad \sqrt{a}\notin Q_{r-1}\quad\text{and}\quad \beta_s\neq 0.$$

Hence number $\overline{f}_s=\alpha_s-\beta_s\sqrt{a}$ is also a root of considered polynomial (by the Conjugation Lemma). Since

$$\beta_s\neq 0,\quad \text{it follows that}\quad \alpha_s-\beta_s\sqrt{a}\neq\alpha_s+\beta_s\sqrt{a},\quad \text{i. e.}\quad \overline{f}_s\neq f_s.$$

So roots $f_1,\dots,f_{(p-1)/2}$ are split into pairs of conjugates. Hence number $(p-1)/2$ is even. A contradiction.

Hints to problem D3. (a) We prove the first formula (the others are proved analogously). Notice that $g^6=-1$. Hence

$$A_0^2=((\varepsilon^{g^0}+\varepsilon^{-g^0})+(\varepsilon^{g^3}+\varepsilon^{-g^3}))^2==$$

$$=2+\varepsilon^{g^1}+\varepsilon^{-g^1}+2+\varepsilon^{g^4}+\varepsilon^{-g^4}+2(\varepsilon^{g^0}+\varepsilon^{g^6})(\varepsilon^{g^3}+\varepsilon^{g^9})=4+A_1+2A_2.$$

The last equation holds because

$$(\varepsilon^{g^0}+\varepsilon^{g^6})(\varepsilon^{g^3}+\varepsilon^{g^9})=\varepsilon^{g^0+g^3}+\varepsilon^{g^3+g^6}+\varepsilon^{g^6+g^9}+\varepsilon^{g^9+g^0}=\varepsilon^{g^0+g^3}A_0==\varepsilon^{g^8}A_0=A_2.$$

(Equations == hold because $g=2$.)

(b) Prove that $A_0+A_1+A_2$, $A_0^2+A_1^2+A_2^2$, $A_0^3+A_1^3+A_2^3$ are rational.

(c) Using problem (a) and $A_0+A_1+A_2=-1$ prove that A_i is rationally expressed via each A_j.

(d) Solution is obtained from (b) and (c) analogously to problem D2e.

There is another solution not using D3c. Suppose that number A_0 has rank r. Conjugate A_0 relatively to Q_{r-1}. The obtained number will be one of the numbers A_i (explain why). Now one can observe that A_i's are split into pairs of conjugates. Hence the number of A_i's is even. A contradiction.

Hints to problem D4. (a) Analogously to problem D3.

(b) Suppose that for $p=2^kr+1$ the number $\cos(2\pi/p)$ is constructible (where $r>1$ is odd). Deduce that the numbers

$$A_i=\varepsilon^{g^i}+\varepsilon^{g^{r+i}}+\dots+\varepsilon^{g^{(2^k-1)r+i}},\quad 0\le i\le r-1$$

have the same rank and are the roots of polynomial with rational coefficients and degree r.

(c) Consider numbers

$$A_0=\varepsilon^{g^0}+\varepsilon^{g^4}+\dots+\varepsilon^{g^{20}},\quad A_1=\varepsilon^{g^1}+\varepsilon^{g^6}+\dots+\varepsilon^{g^{21}},\quad A_4=\varepsilon^{g^4}+\varepsilon^{g^9}+\dots+\varepsilon^{g^{24}}.$$

Second proof of the 'only if' part of the Gauss theorem.

The idea of this proof is expressed by the notions of a *field* and *the dimension of a field.*

E1. Consider a subset of the set $\mathbb{C}$ of complex numbers. This subset is called a (numerical) *field* if it is closed under addition, subtraction, multiplication and division (by a non-zero number).

(a) The following sets are fields: $\mathbb{Q}$, the set of constructible numbers, the set of real numbers, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\alpha + \beta\sqrt{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$, each Q_k in a sequence of quadratic extensions and

$$\mathbb{Q}[\varepsilon] := \{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \alpha_3\varepsilon^3 + \cdots + \alpha_{12}\varepsilon^{12} \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}\}, \quad \text{where} \quad \varepsilon := \cos\frac{2\pi}{13} + i\sin\frac{2\pi}{13}.$$

(b) Any field contains field $\mathbb{Q}$.

(c) Any field that contains $\sqrt{2}$ should contain $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

(d) Any field that contains ε should contain $\mathbb{Q}[\varepsilon]$.

E2. *The dimension* $\dim F$ of a field F is the smallest k for which there exist

$$b_2, b_3 \ldots, b_k \in F, \quad \text{such that} \quad F = \{\alpha_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \cdots + \alpha_k b_k \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}\},$$

if such k exists.

(a) $\dim \mathbb{Q} = 1$.

(b) $\dim \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = 2$.

(c) In a sequence of quadratic extensions $\dim Q_k = 2 \dim Q_{k-1}$ for $k \geq 1$.

(d) In a sequence of quadratic extensions $\dim Q_k = 2^{k-1}$.

(e)* If $G \subset F$ are fields, then $\dim F$ is divisible by $\dim G$.

E3. Denote $\varepsilon := \cos\frac{2\pi}{13} + i\sin\frac{2\pi}{13}$.

(a) $\dim \mathbb{Q}[\varepsilon] \leq 12$.

(b) If $\dim \mathbb{Q}[\varepsilon] < 12$, then $P(\varepsilon) = 0$ for some polynomial P with rational coefficients, where the degree of P is less than 12.

(c) Prove that polynomial $\Phi(x) := x^{12} + x^{11} + \cdots + x + 1$ is irreducible over $\mathbb{Q}$.

Hint: if you have difficulties use the Gauss lemma and the Eisenstein criterion (see below).

(d) $\dim \mathbb{Q}[\varepsilon] = 12$.

(e) The number $\cos(2\pi/13)$ is not constructible.

E4. (a) *The Gauss lemma.* If a polynomial with integer coefficients is irreducible over $\mathbb{Z}$, then it is irreducible over $\mathbb{Q}$.

(b) *The Eisenstein criterion.* Let p be a prime. If the leading coefficient of a polynomial with integer coefficients is not divisible by p, other coefficients are divisible by p and the constant term is not divisible by p^2, then this polynomial is irreducible over $\mathbb{Z}$.

E5. (a) $\dim \mathbb{Q}[\cos\frac{2\pi}{25} + i\sin\frac{2\pi}{25}] = 20$.

(b) Use the previous assertions to prove that the number $\cos(2\pi/25)$ is not constructible.

(c) Prove the 'only if' part of the Gauss theorem.

Hint to problem E2. (c) Prove that

$$Q_k = \{\alpha_1 + \alpha_2 b \mid \alpha_1, \alpha_2 \in Q_{k-1}\} \quad \text{for each} \quad b \in Q_k - Q_{k-1}.$$

(d) Follows by (a) and (c).

(e) The minimal k for which there exist

$$b_1, b_2, \ldots, b_k \in F \quad \text{such that} \quad F = \{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \cdots + \alpha_k b_k \mid \alpha_i \in G\},$$

if such k exists, is called the dimension $\dim(F : G)$ of the field F over the field G. Prove that $\dim F = \dim G \dim(F : G)$.

Hint to problem E3. (a) $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \cdots + \varepsilon^{12} = 0$.

(b) By definition of dimension there exist $b_1, \ldots, b_{11} \in \mathbb{Q}[\varepsilon]$ and $\alpha_{kl} \in \mathbb{Q}$ such that

$$\varepsilon^{j-1} = \alpha_{j,1}b_1 + \alpha_{j,2}b_2 + \cdots + \alpha_{j,11}b_{11} \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots, 12.$$

Therefore there exist rational numbers $a_0, a_1, \ldots, a_{12}$, not all equal to 0 and such that $a_0 + a_1\varepsilon + \cdots + a_{11}\varepsilon^{11} = 0$. In order to prove the latter assertion put the expressions for ε^i to the latter equality, consider equations stating that coefficients of $b_1, \ldots, b_{11}$ are zeroes, and finally prove that the obtained system of equations has a nonzero rational solution.

(c) Apply the Eisenstein criterion to $((x+1)^{13} - 1)/x$ and the Gauss lemma.

(d) Follows by (a), (b) and (c).

(e) Follows by (d) and E2d.

Hint to problem E4. Suppose the contrary and apply indefinite coefficient method.

Hint to problem E5a. Analogously to problems E3d. Prove the irreducibility of the polynomial $\Phi(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20}$ and use it.

Third proof of the 'only if' part of the Gauss theorem.

F1. (a) Prove that the polynomial $\Phi(x) := x^{12} + x^{11} + \cdots + x + 1$ is irreducible over $\mathbb{Q}$.

Hint: if you have difficulties use the Gauss lemma and the Eisenstein criterion (see above).

(b) If the number $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{13} + i\sin\dfrac{2\pi}{13}$ is constructible, then there exists a sequence $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_k \subset Q_{k+1}$ of quadratic extensions such that $\Phi(x)$ is reducible over Q_{k+1} and is irreducible over Q_k.

(c) If Φ is divisible by a polynomial P with coefficients in Q_{k+1}, then Φ is divisible by the conjugate (relatively to Q_k) polynomial $\overline{P}$.

(d) If a polynomial R with coefficients in Q_k is irreducible over Q_{k+1}, then the conjugate $\overline{R}$ (relatively to Q_k) polynomial is also irreducible over Q_{k+1}.

(e) The decomposition of polynomial $\Phi(x)$ over Q_{k+1} into irreducible factors is divided into pairs of conjugate (relatively to Q_k) factors.

(f) For each of these factors there exists a sequence analogous to (b) but possibly having another n.

(g) The number $\cos(2\pi/13)$ is not constructible.

F2. (a) Consider polynomial with given constructible number as a root. Prove that the minimal degree of such a polynomial is a power of two.

(b) Number $\cos(2\pi/n)$ is not constructible for n a prime, $n \neq 2^m + 1$.

(c) The polynomial $\Phi(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20}$ is irreducible over $\mathbb{Q}$.

(d) The number $\cos(2\pi/25)$ is not constructible.

(e) Prove the 'only if' part of the Gauss theorem.

(f) Let P be a polynomial with constructible roots. If P has rational coefficients and has an odd degree, then one of its roots is rational.

Hints to problems F1. (a) See problem E3c.

(b) Consider a sequence of quadratic extensions $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_{r-1} \subset Q_r \ni \varepsilon$. The polynomial Φ is reducible over Q_r (because Φ has ε as a root). Hence there exists l for which polynomial Φ is reducible over Q_{l+1}. Let k be the minimal such l. By (a) $k \geq 1$. Now it is easy to see that the sequence $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_k \subset Q_{k+1}$ is the required.

(c) Conjugate relatively to Q_k the equation $\Phi(x) = P(x)R(x)$.

(e) It is sufficient to prove that if the polynomial P with coefficients in Q_{k+1} divides Φ, then P and $\overline{P}$ are relatively prime. For this prove that $GCD(P, \overline{P})$ has the coefficients in Q_k and use the irreducibility of polynomial Φ in Q_k.

(f) Analogously to (b).

(g) Prove that the decomposition of the polynomial $\Phi(x)$ constructed in (e) has exactly two factors (use the fact that if the coefficients of polynomial P are in Q_{k+1}, then the coefficients of polynomial $P\overline{P}$ are in Q_k). The same is true also for decompositions of new factors and so on. Using this prove that the degree of polynomial $\Phi(x)$ should be a power of two.

Hints to problem F2. (a,b) Analogously to problem F1.

(c) Use the Gauss lemma and the Eisenstein criterion to $\Phi(x+1)$.

(d) Analogously to problem F1 prove that if the number $\cos(2\pi/25)$ is constructible, then the degree of the polynomial $\Phi(x)$ should be a power of two. A contradiction.

(e) Analogously to the above.

References

[CR] R. Courant and H. Robbins, What is Mathematics, Oxford Univ. Press.

[Ga] K. F. Gauss, Die Gesammelten Werke, http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/toc/?IDDOC=38910

[Ka] A. Kanel, Non-constructibility of regular polygons (in Russian), In: Mathematics As a Sequence of Problems. A collection of materials of Moscow mathematical circles. Editors: A. Zaslavski, D. Permyakov, A. Shapovalov, A. Skopenkov and M. Skopenkov.

[Vi] E. B. Vinberg, Algebra of polynomials (in Russian). Moscow, Prosveschenie, 1980.

В ПОИСКАХ УТРАЧЕННОЙ АЛГЕБРЫ: В НАПРАВЛЕНИИ ГАУССА

(подборка задач) [6]

П. Козлов [7] и А. Скопенков [8]

Listeners are prepared to accept unstated (but hinted) generalizations much more than they are able ... to decode a precisely stated abstraction and to re-invent the special cases that motivated it in the first place.
P. Halmos, How to talk mathematics.

Введение.

Теорема Гаусса. [9] *Калькулятор (вычисляющий числа с абсолютной точностью) имеет кнопки*

$$1, \quad +, \quad -, \quad \times, \quad : \quad \text{и} \quad \sqrt{}$$

(и неограниченную память). На этом калькуляторе можно вычислить число $\cos\frac{2\pi}{n}$ *тогда и только тогда, когда* $n = 2^\alpha p_1 \dots p_l$*, где* $p_1, \dots, p_l$ *— различные простые числа вида* $2^{2^s}+1$*.*

В этой заметке предлагается набросок *элементарного доказательства приведенной теоремы.* Оно не использует терминов 'группа Галуа' (даже понятия 'группа') и 'расширение поля' (доказательство невозможности использует квадратичные расширения только *множества рациональных чисел*). Несмотря на отсутствие этих *терминов*, *идеи* приводимых доказательств являются *отправными* для теории Галуа, [10] которая (вместе с теорией групп) появилась в опыте *группировки* корней многочлена, с помощью которой их можно выразить через радикалы. (Вульгарно, но ярко, эти идеи можно выразить девизом *группируй и властвуй* или *объединяй и властвуй.*) Более подробно это обсуждается в философско-методическом отступлении ниже.

Приводимые доказательства *известны в математическом фольклоре*, однако авторам не удалось найти их в явном виде в литературе (кроме второго доказательства невозможности в теореме Гаусса [Vi]).

---

[6] Полный обновленный текст заметки, опубликованной с сокращениями в Мат. Просвещении, 12 (2008) 127–143, http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html Обновляемая версия находится на http://arxiv.org/abs/0804.4357. Предварительная версия этой заметки представлялась А. Беловым-Канелем, П. Дергачом и авторами в виде цикла задач на Летней Конференции Турнира Городов в августе 2007.

[7] p−−kozlov@yandex.ru, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

[8] skopenko@mccme.ru; http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Независимый московский университет, Московский институт открытого образования. Частично поддержан Российским Фондом Фундаментальных Исследований, Грант номер 06-01-72551-NCNILa, Грантом Президента РФ МД-4729.2007.1 и стипендией П. Делиня, основанной на его Премии Бальзана 2004 года.

[9] Переформулировка теоремы Гаусса в терминах построимости циркулем и линейкой правильных многоугольников приводится во втором отступлении и не используется в остальном тексте. История этой знаменитой теоремы приводится в [Gi]. Строго говоря, теорема Гаусса не дает настоящего решения проблемы построимости правильных многоугольников, поскольку неизвестно, какие числа вида $2^{2^s}+1$ являются простыми. Однако теорема Гаусса дает, например, полиномиальный алгоритм выяснения построимости правильного n-угольника (n задано десятичной записью).

[10] Конечно, *отправные* идеи любой теории не исчерпывают *всех* ее идей.

Элементарное доказательство *возможности* для $n = 17$ приводится, например, в [Ch, Gi, Po, PS, Ko]. Для общего случая оно намечено в [Ga, Gi], где ясности доказательства немного мешает построение общей теории вместо доказательства конкретного результата. [11]

Невозможность в теореме Гаусса не доказана явно в [Ga]. Однако доказательство невозможности в настоящей заметке, намеченное в серии D, основано на идеях из [Ga] и поэтому его можно принять за рассуждение Гаусса. Элементарное изложение идеи неэлементарного доказательства невозможности приводится в [Ki]. Доказательства невозможности в теореме Гаусса являются алгебраическим выражением этой идеи 'разбиения решений на пары'. Простое доказательство невозможности из [Vi, гл. 5] намечено в серии E (отличие приводимого изложения в том, что необходимые понятия не вводятся немотивированно впрок, а естественно появляются в процессе размышления над проблемой). Наиболее простое доказательство невозможности, намеченное в серии F, возникло в ходе обсуждений А. Я. Канеля-Белова с авторами [Ka']. По сути все доказательства очень близки.

Перед доказательствами невозможности в теореме Гаусса некоторые их идеи демонстрируются по одной и на простейших примерах (серия C). Эти примеры дают решение классических задач древности об удвоении куба и трисекции угла. Приводимое изложение основано на [CR, Ma]; оно немного более коротко и ясно за счет того, что не вводится термин 'поле'. Ср. [Gv, §4.19].

Приводимые серии задач (в частности, доказательства возможности и невозможности) независимы друг от друга. В доказательствах используется определение построимости из второго отступления и эквивалентность теоремы Гаусса аналогичной теореме для *комплексного* калькулятора (задача A4).

Доказательства представлены в виде циклов задач (большинство задач снабжены указаниями или решениями). Решение задач потребует от многих читателей усилий (впрочем, опытный математик, не знакомый с теорией Галуа, с легкостью восстановит решения по приведенным указаниями или даже без них). Однако эти усилия будут сполна оправданы тем, что вслед за великими математиками в процессе изучения интересной проблемы читатель познакомится с некоторыми основными идеями алгебры. Надеюсь, это поможет читателю совершить собственные настолько же полезные открытия (не обязательно в математике)!

Общее замечание к формулировкам задач: если условие задачи является утверждением, то в задаче требуется это утверждение доказать.

В этой заметке использованы материалы занятий со школьниками по элементарному доказательству теоремы Гаусса, которые вели А. С. Голованов, А. И. Ефимов и второй автор. Аналогичные занятия вели А. Я. Белов-Канель, И. И. Богданов, Г. Р. Челноков и, возможно, другие. Мы благодарим их всех, а также Э. Б. Винберга, М. Н. Вялого, П. А. Дергача, А. А. Казначеева и В. В. Прасолова за полезные обсуждения.

[11] Авторы лишь потому позволяют себе данное замечание по поводу изложения в [Ga], что преклоняются перед величием Гаусса, начавшего путь в науку с труднейших разделов чистой математики, а затем много занимавшегося приложениями и превратившего один из разделов географии в раздел математики.

Философско-методическое отступление.

Круг мог, нацелясь в стаю самых
признанных и возвышенных человеческих мыслей,
вмиг ссадить ворону в павлиньих перьях.
В. Набоков, Под знаком незаконнорожденных.

Нам кажется, что именно с *новых идей*, а не с *немотивированных определений*, полезно *начинать* изучение любой теории. Как правило, такие идеи наиболее ярко выражаются доказательствами, подобными приведенным здесь.

'При изложении материала нужно ориентироваться на объекты, которые основательнее всего укореняются в человеческой памяти. Это — отнюдь не системы аксиом и не логические приемы в доказательстве теорем. Изящное решение красивой задачи, формулировка которой ясна и доступна, имеет больше шансов удержаться в памяти студента, нежели абстрактная теория. Скажем больше, именно по такому решению, при наличии некоторой математической культуры, студент впоследствии сможет восстановить теоретический материал. Обратное же, как показывает опыт, практически невозможно' [Ко, предисловие].

Известно также, что 'путь познания должен повторять путь развития'. [12]

Такой стиль изложения не только делает материал более доступным, но позволяет сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус и стиль с тем, чтобы

(1) разумно выбирать проблемы для исследования и их мотивировки. (Математик, понимающий, что теория Галуа мотивируется более важными проблемами, чем построимость правильных многоугольников и разрешимость алгебраических уравнений в радикалах, вряд ли станет мотивировать созданную им теорию приложениями, которые можно получить и без его теории.)

(2) ясно излагать собственные открытия, не скрывая ошибки или известности полученного результата за чрезмерным формализмом. (К сожалению, такое — обычно бессознательное — сокрытие ошибки часто происходит с молодыми математиками, воспитанными на чрезмерно формальных курсах. Происходило и со вторым автором этих строк; к счастью, все его серьезные ошибки исправлялись *перед* публикациями.)

Мода на искусственно формализованное изложение [13] привела к следующему парадоксу. По данному *известному понятию* высшей математики зачастую непросто (и требует высокой научной квалификации) выбрать *конкретный красивый результат*, для которого это понятие действительно необходимо (и при получении которого это понятие обычно и возникло).

[12] Впрочем, это не вполне верно. Так, изучение геометрии Лобачевского вовсе не обязательно начинать с попыток доказать Пятый Постулат. Геометрия Лобачевского для нас сейчас важна, в первую очередь, ее приложениями в ТФКП, теории чисел, топологии, теории групп, алгебраической геометрии, космологии и т.д., а вовсе не тем, что она демонстрирует независимость Пятого Постулата от остальных аксиом Евклида. С этой точки зрения более плодотворно ее построение не на основе аксиом Евклида-Гильберта, а на основе понятия группы преобразований (Клейн) или римановой метрики (Риман). Аналогично, изучение теории Галуа вовсе не обязательно начинать с задачи о решении алгебраического уравнения в радикалах или квадратных радикалах. С современной точки зрения теория Галуа есть теория алгебраических расширений полей, составляющая неотъемлемую часть алгебры и имеющая приложения и аналоги в других разделах математики (алгебраическая геометрия, теория накрытий, теория инвариантов), а решение алгебраических уравнений в радикалах — это маргинальная задача. (Э. Б. Винберг).

[13] Видимо, общепринятый термин 'бурбакизация' не очень удачен ввиду 'масштаба и влияния деятельности Бурбаки, независимо от оценки пользы и вреда разных ее аспектов' (А. Шень).

Доказательство с использованием некоторого нового термина имеют свои преимущества: оно подготавливает читателя к доказательству тех теорем, которые уже трудно или невозможно доказать без этого термина. [14] Однако такие доказательства, как правило, не должны быть *первыми* доказательствами данного результата (легко себе представить результат *первого* знакомства с теоремой Пифагора на основе понятий векторного пространства и скалярного умножения). Кроме того, при приведении 'терминологического' доказательства полезно оговорить его мотивированность не доказываемым результатом, а обучением полезному новому методу (ср. с (1) выше).

Приведенная выше точка зрения разделяется многими математиками (а некоторыми — нет); я унаследовал ее от Ю. П. Соловьева.

Приводимые порой в качестве *основных* приложений теории Галуа доказательство теоремы Гаусса и другие результаты о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах неубедительны для мотивировки этой теории (как и приложение к решению квадратных уравнений неубедительно для мотивировки общей теории разрешимости уравнений произвольной степени в радикалах). [15] Действительно, теорема Гаусса имеет элементарное доказательство, не использующее 'групп Галуа'. Теорема Руффини-Абеля о неразрешимости в радикалах *общего* алгебраического уравнения степени 5 и выше (как и достаточность условия Кронекера неразрешимости в радикалах *конкретного* уравнения простой степени) также имеет алгебраическое доказательство, не использующее 'групп Галуа' [Ko, Pr] (и *топологическое* доказательство [Al]). В терминах теории Галуа формулируется общий критерий разрешимости *конкретного* алгебраического уравнения в радикалах, но этот критерий не дает настоящего решения проблемы разрешимости, а лишь сводит ее к трудной задаче вычисления группы Галуа уравнения. (То, что никакая *другая теория* не дает легкого для применений ответа, не позволяет утверждать, что *теория Галуа* дает такой ответ.) Но, конечно, формулировка общего критерия в адекватных проблеме терминах может иметь важное философское значение.

Однако теория Галуа выходит далеко за рамки проблемы разрешимости уравнений в радикалах. Ее популяризации послужит дальнейшая публикация интересных теорем, формулируемых без понятий теории Галуа, но при попытках доказать которые она естественно возникает. Примеры таких теорем мне сообщили А. Я. Белов, С. М. Львовский и Г. Р. Челноков (к сожалению, в доступной мне начальной учебной литературе по теории Галуа мне не удалось найти такие теоремы, формулировка которых не была бы скрыта под толщей обозначений и терминов).

Отступление: связь с построениями циркулем и линейкой.

A1. Используя отрезки длины a, b и c, можно построить циркулем и линейкой отрезки длины $a+b$, $a-b$, ab/c, $\sqrt{ab}$.

Вещественное число называется *построимым*, если его можно получить на нашем калькуляторе (т.е. получить из 1 при помощи сложения, вычитания, умножения, деле-

[14] Например, векторное доказательство теоремы Пифагора уже является достаточным основанием для введения понятий векторного пространства и скалярного умножения, хотя эти понятия и не являются необходимыми для доказательства упомянутой теоремы. (Э. Б. Винберг.)

[15] Возможно, *именно поэтому* работы Галуа были забыты на 20 лет после их выхода — пока не появилось важных задач, в первую очередь о разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах, при решении которых уже трудно обойтись без теории Галуа — ведь математика 19-го века была гораздо ближе к естествознанию, чем современная. Конечно, приведенная гипотеза нуждается в серьезной проверке.

ния и извлечения квадратного корня из положительного числа). Например, числа

$$1+\sqrt{2},\quad \sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}},\quad \sqrt{2\sqrt{3}},\quad \sqrt{2}+\sqrt{3},\quad \sqrt{1+\sqrt{2}},\quad \frac{1}{1+\sqrt{2}}\quad \text{и}\quad \cos 3^\circ$$

построимы. Про последние два числа это не совсем очевидно.

A2. Любое построимое число можно построить циркулем и линейкой (далее слова 'циркулем и линейкой' опускаются).

Этот простой (вытекающий из A1) результат был известен еще древним грекам. Он показывает, что из *выразимости* числа $\cos(2\pi/n)$ в теореме Гаусса вытекает *построимость* правильного n-угольника.

A3. *Основная теорема теории геометрических построений.* Обратное тоже верно: если отрезок длины a можно построить циркулем и линейкой, то число a построимо.

Этот несложный результат [Pr, Ko] (доказанный лишь в 19-м веке) показывает, что из *невыразимости* в теореме Гаусса вытекает *непостроимость* соответствующих n-угольников.

Для его доказательства рассмотрите все возможные случаи появления новых объектов (точек, прямых, окружностей). Покажите, что координаты всех построенных точек и коэффициенты уравнений всех проведённых прямых и окружностей являются построимыми. См. детали в [Ko, CR, Ma, Pr].

Определение *комплексно построимого* комплексного числа аналогично определению построимого вещественного числа, только квадратные корни извлекаются из произвольных уже выраженных чисел и комплексно построимыми считаются оба значения квадратного корня.

A4. Комплексное число комплексно построимо тогда и только тогда, когда его вещественная и мнимая части (вещественно) построимы.

Указание. Если $\sqrt{a+bi}=u+vi$, то u, v выражаются через a и b с помощью арифметических операций и квадратных радикалов.

По поводу невыразимости вещественных чисел через вещественные (положительные) значения корней произвольной целой степени (из положительных чисел) см. [Va].

A5. Если правильный mn-угольник построим, то и правильный m-угольник построим.

A6. Правильные 3-угольник и 5-угольник построимы.

A7. Правильный 120-угольник построим. Или, эквивалентно, угол 3° построим.

Указание. Если не получается, то см. следующие задачи.

A8. Если правильный n-угольник построим, то и правильный $2n$-угольник построим.

Указание. Получается делением угла пополам или применением формулы половинного угла.

A9. Пусть правильные m- и n-угольники построимы, причем числа m и n взаимно просты. Тогда правильный mn-угольник построим.

Указание. Так как m и n взаимно просты, то существуют целые a, b такие, что $am+bn=1$.

Доказательство возможности в теореме Гаусса.

Нетрудно доказать возможность в теореме Гаусса для $n \le 16$.

Доказательство возможности в теореме Гаусса для $n=5$. Видимо, приводимый способ сложнее придуманного Вами. Зато из него будет видно, что делать в общем случае.

Достаточно выразить число $\varepsilon := \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$. Сразу это сделать трудно, поэтому сначала построим некоторые многочлены от ε. Мы знаем, что $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = -1$. Поэтому

$$(\varepsilon + \varepsilon^4)(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = -1.$$

Обозначим

$$A_0 := \varepsilon + \varepsilon^4 \quad \text{и} \quad A_1 := \varepsilon^2 + \varepsilon^3.$$

Тогда по теореме Виета числа A_0 и A_1 являются корнями уравнения $t^2 + t - 1 = 0$. Поэтому можно выразить A_0 (и A_1). Поскольку $\varepsilon \cdot \varepsilon^4 = 1$, то по теореме Виета числа ε и ε^4 являются корнями уравнения $t^2 - A_0 t + 1 = 0$. Поэтому можно выразить ε (и ε^4).

B1. Если число $2^m + 1$ простое, то m — степень двойки.

Идея доказательства построимости в теореме Гаусса. Достаточно выразить число

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

для простого $n = 2^m + 1$ (тогда m обязано быть степенью двойки). Сначала хорошо бы разбить сумму

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = -1$$

на два слагаемых A_0 и A_1, *произведение* которых построимо (иными словами, *сгруппировать* хитрым образом корни уравнения $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = 0$). Тогда A_0 и A_1 построимы по теореме Виета. Затем хорошо бы разбить сумму A_0 на два слагаемых $A_0 = A_{00} + A_{01}$, произведение которых построимо, и аналогично разбить $A_1 = A_{10} + A_{11}$. И так далее, пока не построим $A_{0\ldots0} = \varepsilon$.

Однако придумать нужные группировки корней уравнения $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = 0$ совершенно нетривиально и возможно не для всех n. Как это можно придумать, описано в [Ка]. Здесь приведем лишь ответ, который очень прост.

Теорема о первообразном корне. Для любого простого p существует число g, для которого остатки от деления на p чисел $g^1, g^2, g^3, \ldots, g^{p-1} = 1$ различны.

Как строить нужные группировки, видно ниже из задач B3a, B4a и B4c, а также из решения задачи B4d.

B2. *Доказательство теоремы о первообразном корне.* Пусть p простое и a не делится на p.

(a) $p - 1$ делится на наименьшее $k > 0$, для которого $a^k \equiv 1 \bmod p$.

Указание: используйте малую теорему Ферма.

(b) Для любых целых n и a сравнение $x^n \equiv a \bmod p$ имеет не более n решений.

(c) Если $p - 1$ делится на d, то сравнение $x^d \equiv 1 \bmod p$ имеет ровно d решений.

(d) Докажите теорему о первообразном корне для $p = 2^m + 1$. (Только этот частный случай нужен для теоремы Гаусса.)

(e)* Докажите теорему о первообразном корне для $p = 2^m \cdot 3^n + 1$.

(f)* Докажите теорему о первообразном корне для *произвольного* простого p.

(g)* Верно ли, что число 3 является первообразным корнем по модулю любого простого числа вида $p = 2^m + 1$?

Начиная с этого момента $p = 2^m + 1 \geq 5$ — простое число и g — (любой) первообразный корень по модулю p.

B3. (a) Положим

$$A_0 := \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^4} + \varepsilon^{g^6} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m}} \quad \text{и} \quad A_1 := \varepsilon^{g^1} + \varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{g^5} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m-1}}.$$

Докажите, что $A_0A_1 = -\frac{p-1}{4}$. (Следующие задачи являются подсказками.)

(b) $A_0A_1 = \sum\limits_{s=0}^{2^m} \varepsilon^s \alpha(s)$, где $\alpha(s)$ равно числу решений (k,l) (в вычетах по модулю $p-1$) сравнения $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv s \bmod p$.

(c) $\alpha(0) = 0$.

(d) $\alpha(s) = \alpha(gs)$.

(e) $\alpha(s)$ не зависит от $s = 1, \ldots, 2^m$.

B4. (a) Положим

$$A_{00} := \varepsilon^{g^4} + \varepsilon^{g^8} + \varepsilon^{g^{12}} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m}} \quad \text{и} \quad A_{01} := \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^6} + \varepsilon^{g^{10}} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m-2}}.$$

Докажите, что $A_{00}A_{01} = sA_0 + tA_1$ для некоторых целых чисел s и t ($s+t = \frac{p-1}{8}$). (Следующая задача является подсказкой.)

(b) Сравнение $g^{4k} + g^{4l+2} \equiv 1 \bmod p$ имеет столько же решений (k,l) (в вычетах по модулю $p-1$), сколько сравнение $g^{4k} + g^{4l+2} \equiv g^2 \bmod p$.

(c) Положим

$$A_{11} := \varepsilon^{g^1} + \varepsilon^{g^5} + \varepsilon^{g^9} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m-3}} \quad \text{и} \quad A_{10} := \varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{g^7} + \varepsilon^{g^{11}} + \cdots + \varepsilon^{g^{2^m-1}}.$$

Докажите, что $A_{10}A_{11} = uA_0 + vA_1$ для некоторых целых чисел u и v ($u+v = \frac{p-1}{8}$).

(d) Закончите доказательство возможности в теореме Гаусса.

B5. Найдите явно выражение через квадратные радикалы числа

(a) A_0 из задачи B3a. (b) $\cos\dfrac{2\pi}{17}$. (c)* $\cos\dfrac{2\pi}{257}$. (d)* $\cos\dfrac{2\pi}{65537}$.

При помощи приведенного метода и компьютера эту задачу можно решить быстро, несмотря на следующую историю [Li]. "Один слишком навязчивый аспирант довел своего руководителя до того, что тот сказал ему: "Идите и разработайте построение правильного многоугольника с 65 537 сторонами". Аспирант удалился, чтобы вернуться через 20 лет с соответствующим построением (которое хранится в архивах в Геттингене)."

Замечание. Построимость можно доказывать по тому же плану без использования комплексных чисел. Приведём указание для случая правильного 17-угольника. Положим $a_k = \cos(2\pi k/17)$. Тогда $a_k = a_{17-k}$, $2a_ka_l = a_{k+l} + a_{k-l}$ и $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 = -1/2$. Сначала выразите $a_1 + a_2 + a_4 + a_8$ и $a_3 + a_5 + a_6 + a_7$. Затем выразите $a_1 + a_4$, $a_2 + a_8$, $a_3 + a_5$ и $a_6 + a_7$. Наконец, выразите a_1.

Указания и решения к доказательству возможности.

Указание к B1. Если n нечётно, то $2^{kn} + 1$ делится на $2^k + 1$.

Указание к B2b. Докажем более общее утверждение: *многочлен степени n не может иметь более n корней в множестве $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ вычетов по модулю p (в котором имеются операции сложения и умножения по модулю p).* Здесь многочленом называется бесконечный упорядоченный набор $(a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ вычетов по модулю p, в котором лишь конечное число элементов отлично от нуля. Обычно многочлен записывается в виде $a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ (если $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 0$). Эта запись дает отображение

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Будьте осторожны: разным многочленам может соответствовать одно и то же отображение. *Корнем* многочлена $a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ называется такой вычет x_0 по модулю p, что $a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_kx_0^k = 0$.

Пусть многочлен $P(x)$ степени n имеет в $\mathbb{Z}_p$ различные корни $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Представьте его в виде

$$P(x) = b_n(x - x_1)\ldots(x - x_n) + b_{n-1}(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) + \cdots + b_1(x - x_1) + b_0$$

('*интерполяция Ньютона*'). Последовательно подставляя в сравнение $P(x) \equiv 0 \bmod p$ вычеты $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, получим $b_0 \equiv b_1 \equiv \cdots \equiv b_{n-1} \equiv b_n \equiv 0 \bmod p$.

То же самое решение можно записать и так. Пусть P — многочлен. Тогда $P - P(a) = (x - a)Q$ для некоторого многочлена Q степени меньше $\deg P$. Поэтому если $P(a) = 0$, то $P = (x - a)Q$ для некоторого многочлена Q степени меньше $\deg P$. Теперь требуемое в задаче утверждение доказывается индукцией по степени многочлена P с использованием простоты числа p.

Первое указание к B2c. Заметьте, что многочлен $x^{p-1} - 1$ имеет ровно $p - 1$ корень в множестве $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и делится на $x^d - 1$. Докажите, что если многочлен степени a имеет ровно a корней и делится на многочлен степени b, то этот многочлен степени b имеет ровно b корней.

Второе указание к B2c. Если $p = kd$, то для любого a сравнение $y^k \equiv a \bmod p$ имеет не более k решений.

Указание к B2d. Если первообразного корня нет, то по 2a сравнение $x^{2^{m-1}} \equiv 1 \bmod p$ имеет $p - 1 = 2^m > 2^{m-1}$ решений.

Указание к B2e,f. Аналогично B2d.

Замечание к B2f. Из существования первообразного корня легко вывести, что для $p - 1 = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ количество первообразных корней равно $(p-1)(1-\frac{1}{p_1})\ldots(1-\frac{1}{p_k}) = \varphi(p-1)$.

Указание к B3b. Раскройте скобки и сгруппируйте равные слагаемые.

Указание к B3d. Если (a, b) — решение сравнения $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv s \bmod p$, то $(b + 1, a)$ — решение сравнения $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv gs \bmod p$. Если (a, b) — решение сравнения $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv gs \bmod p$, то $(b, a - 1)$ — решение сравнения $g^{2k} + g^{2l+1} \equiv s \bmod p$.

Указание к B4d. (Написано с использованием текста И. Лукьянеца и В. Соколова.) Положим

$$\overline{i_0 \ldots i_x} := i_0 2^0 + \cdots + i_x 2^x \quad \text{и} \quad A_{i_0\ldots i_x} := \sum_{s=0}^{2^{m-x-1}} \varepsilon^{g^{s2^{x+1}} - \overline{i_0\ldots i_x}}.$$

Тогда $A_{i_0\ldots i_x 0} + A_{i_0\ldots i_x 1} = A_{i_0\ldots i_x}$. При $x < m$ имеем

$$A_{i_0\ldots i_x 0} A_{i_0\ldots i_x 1} = \sum_{s=0}^{2^m} \alpha(s)\varepsilon^s = \sum_{(j_0\ldots j_x)} b_{j_0\ldots j_x} A_{j_0\ldots j_x} \quad \text{для некоторых} \quad b_{j_0\ldots j_x} \in \mathbb{Z}.$$

Здесь в первом равенстве $\alpha(s)$ равно числу решений (k, l) (в вычетах по модулю $p - 1$) сравнения

$$g^{k2^{x+1} - \overline{i_0\ldots i_x}} + g^{l2^{x+1} + 2^x - \overline{i_0\ldots i_x}} \equiv s \bmod p.$$

Аналогично B3c $\alpha(0) = 0$ при $x < m$. Аналогично B3d $\alpha(s) = \alpha(sg^{2^x})$. Отсюда вытекает второе равенство.

Подготовка к доказательству невозможности в теореме Гаусса.

C1. Не существует рациональных чисел a, b, c, d, для которых $\sqrt[3]{2} =$

(a) $a + \sqrt{b}$; (b) $a - \sqrt{b}$; (c) $\dfrac{a + \sqrt{b}}{c + \sqrt{b}}$; (d) $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$; (e) $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{bc}$;

(f) $a + \sqrt{b + \sqrt{c}}$; (g) $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$.

C2. Пусть нажатие кнопок '1' и четырех арифметических действий на калькуляторе из теоремы Гаусса бесплатны, а за извлечения корня нужно платить копейку.

(a) *Число A можно получить за r копеек тогда и только тогда, когда существуют такие $a_1, \dots a_r \in \mathbb{R}$, что*

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \ldots \subset Q_{r-1} \subset Q_r \ni A, \quad \textit{где} \quad a_k \in Q_k, \quad \sqrt{a}_k \notin Q_k,$$

$$a \quad Q_{k+1} = Q_k[\sqrt{a}_k] := \{\alpha + \beta\sqrt{a}_k \mid \alpha, \beta \in Q_k\} \quad \textit{для любого} \quad k = 1, \dots, r-1.$$

Такая последовательность называется *цепочкой квадратичных расширений* (это единый термин, термин 'квадратичное расширение' мы не используем).

Итак, число A построимо тогда и только тогда, когда для некоторого r существует цепочка квадратичных расширений длины r, последнее множество которой содержит A.

Доказательство невозможности, основанное на рассмотрении аналогичных цепочек, называется в математической логике и программировании *индукцией по глубине формулы.*

(b) Оторвем у (комплексного аналога) калькулятора из теоремы Гаусса кнопку ':', но разрешим использовать все рациональные числа. Тогда множество чисел, которые можно реализовать на калькуляторе, не изменится.

(c) $\sqrt[3]{2}$ непостроимо. (Значит, удвоение куба циркулем и линейкой невозможно.)

Указания к C1. (a) Если $\sqrt[3]{2} = a + \sqrt{b}$, то $2 = (\sqrt[3]{2})^3 = (a^3 + 3ab) + (3a^2 + b)\sqrt{b}$. Так как $3a^2 + b \neq 0$, то $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Значит, $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ — противоречие.

(c) Домножьте на сопряженное.

(d) Достаточно доказать, что $\sqrt[3]{2} \neq u + v\sqrt{c}$, где u и v — числа вида $\alpha + \beta\sqrt{b}$ где $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Идея доказательства в том, что числа такого вида (с фиксированным b) 'ничуть не хуже' рациональных чисел. Т.е. сумма, разность, произведение и частное чисел такого вида — тоже число такого вида. (Или, говоря научно, такие числа образуют *числовое поле.*) Поэтому можно доказывать аналогично пункту (a).

Указания к C2. (a) Это утверждение легко доказывается индукцией по количеству операций калькулятора, необходимых для получения числа, с применением домножения на сопряженное.

(b) Следует из предыдущего.

Доказательство непостроимости числа $\sqrt[3]{2}$ (C2c). Предположим, что $\sqrt[3]{2}$ построимо. Тогда существует такая цепочка квадратичных расширений

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \ldots \subset Q_{r-1} \subset Q_r, \quad \text{что} \quad \sqrt[3]{2} \in Q_r \setminus Q_{r-1}.$$

Поскольку $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$, то $r \geq 2$. Значит,

$$\sqrt[3]{2} = \alpha + \beta\sqrt{a}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta, a \in Q_{r-1}, \quad \sqrt{a} \notin Q_{r-1} \quad \text{и} \quad \beta \neq 0.$$

Отсюда

$$2 = (\sqrt[3]{2})^3 = (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2 a) + (3\alpha^2\beta + \beta^3 a)\sqrt{a} = u + v\sqrt{a}.$$

Поскольку $2 \in \mathbb{Q} \subset Q_{r-1}$, то $2-u \in Q_{r-1}$. Так как

$$v\sqrt{a} = 2-u \quad \text{и} \quad v \in Q_{r-1}, \quad \text{то} \quad 0 = v = 3\alpha^2\beta + \beta^3 a.$$

Так как $3\alpha^2 + \beta^2 a > 0$, получаем $\beta = 0$ — противоречие! QED

C3. (a) Число $\cos(2\pi/9)$ является корнем уравнения $8x^3 - 6x + 1 = 0$.

(b) Не существует рациональных чисел a и b, для которых $\cos(2\pi/9) = a + \sqrt{b}$.

(c) Не существует рациональных чисел a, b, c, для которых $\cos(2\pi/9) = a + \sqrt{b + \sqrt{c}}$.

(d) Число $\cos(2\pi/9)$ не построимо (значит, трисекция угла $\pi/3$ циркулем и линейкой невозможна и правильный 9-угольник не построим).

(e) *Теорема.* Корни кубического уравнения с рациональными коэффициентами построимы тогда и только тогда, когда один из них рационален.

Указания к C3. (a) Выразите $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$.

(b) Если $\cos(2\pi/9) = a + \sqrt{b}$, то число $a - \sqrt{b}$ тоже является корнем уравнения $8x^3 - 6x + 1 = 0$. Тогда по теореме Виета третий корень равен $-(a+\sqrt{b}) - (a-\sqrt{b}) = -2a \in \mathbb{Q}$. Противоречие.

(d) Следует из (a) и (e).

(e) См. следующую лемму.

C4. *Лемма о сопряжении.* В цепочке квадратичных расширений положим $a = a_k$ и определим отображение сопряжения $\bar{\cdot} : Q_k[\sqrt{a}] \to Q_k[\sqrt{a}]$ формулой $\overline{x + y\sqrt{a}} = x - y\sqrt{a}$. Тогда

(a) Это определение корректно.

(b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ и $\overline{z} = z \Leftrightarrow z = x + 0\sqrt{a} \in Q_{k-1}$.

(c) Если $z \in Q_k[\sqrt{a}]$ — корень многочлена P с рациональными коэффициентами, то $P(\overline{z}) = 0$.

(Сравните с леммой о комплексных корнях многочлена с вещественными коэффициентами.)

Доказательство теоремы C3e о кубических уравнениях для уравнений, все три корня которых вещественны (этот частный случай достаточен для непостроимости правильного 9-угольника). Часть 'тогда' очевидна. Чтобы доказать часть 'только тогда', предположим, что хотя бы один из корней построим. Для каждого из построимых корней z рассмотрим минимальную цепочку расширений

$$\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \ldots \subset Q_{r-1} \subset Q_r, \quad \text{для которой} \quad z_1 \in Q_r \setminus Q_{r-1}.$$

Возьмем корень $z = z_1$ с наименьшей длиной l минимальной цепочки.

Если кубическое уравнение не имеет рациональных корней, то $l \geq 2$. Значит,

$$z_1 = \alpha + \beta\sqrt{a}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \in Q_{l-1}, \quad \sqrt{a} \notin Q_{l-1} \qquad \text{и} \quad \beta \neq 0.$$

Тогда число $z_2 := \overline{z}_1 = \alpha - \beta\sqrt{a}$ также является корнем кубического уравнения (по лемме о сопряжении). Поскольку

$$\beta \neq 0, \quad \text{то} \quad \alpha - \beta\sqrt{a} \neq \alpha + \beta\sqrt{a}, \quad \text{т. е.} \quad z_2 \neq z_1.$$

Обозначим z_3 третий корень кубического уравнения (возможно, $z_3 \in \{z_1, z_2\}$). По формуле Виета

$$z_1 + z_2 + z_3 = (\alpha + \beta\sqrt{a}) + (\alpha - \beta\sqrt{a}) + z_3 = 2\alpha + z_3 \in \mathbb{Q}, \quad \text{поэтому} \quad z_3 \in Q_{l-1}.$$

Следовательно, для корня z_3 существует цепочка меньшей длины, чем для z_1. Противоречие. QED

C5. *Эта задача не используется при доказательстве теоремы Гаусса.*

(a)* Корни многочлена 4-ой степени с рациональными коэффициентами построимы тогда и только тогда, когда его *кубическая резольвента* [Ko, Pr] имеет рациональный корень.

(b) Любое построимое число является алгебраическим, т.е. корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами. (Из этого и доказанной в 1883 г. Линдеманом трансцендентности числа π, влекущей трансцендентность числа $\sqrt{\pi}$, вытекает, что задача о квадратуре круга неразрешима циркулем и линейкой.)

(c) (Г. Челноков) Лешин калькулятор получается из комплексного гауссова добавлением кнопки извлечения кубического корня из комплексных чисел (которая дает все три значения корня). Гришин калькулятор получается из комплексного гауссова добавлением кнопки нахождения по комплексному числу a всех трех комплексных корней уравнения $a = \dfrac{3x - 4x^3}{1 - 3x^2}$. Будет ли множество 'Лешиных' чисел совпадать с множеством 'Гришиных'?

(d) (Г. Челноков) Если неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен раскладывается над $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$ ровно на четыре множителя (неприводимых над $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$), то степень этого многочлена делится на 8.

Указание к C5b. Пусть $a{=}a_1$ и $b{=}b_1$ — построимые числа, а P и Q — многочлены с рациональными коэффициентами минимальной степени, корнями которых являются соответственно a и b. Пусть $a_2, \dots, a_m$ — все остальные комплексные корни многочлена P, а $b_2, \dots, b_n$ — все остальные комплексные корни многочлена Q. Заметим, что

$a + b$ — корень многочлена $P(x - b_1) \dots P(x - b_n)$,

$a - b$ — корень многочлена $P(x + b_1) \dots P(x + b_n)$,

ab — корень многочлена $P(\frac{x}{b_1}) \dots P(\frac{x}{b_n})$,

$\frac{a}{b}$ — корень многочлена $P(xb_1) \dots P(xb_n)$,

$\sqrt{a}$ — корень многочлена $P(x^2)$.

Осталось доказать следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть $R(x, y)$ — многочлен от двух переменных с рациональными коэффициентами, а $b_1, b_2, \dots, b_n$ — все комплексные корни многочлена Q с рациональными коэффициентами. Тогда многочлен от одной переменной $R(x, b_1)R(x, b_2) \dots R(x, b_n)$ также имеет рациональные коэффициенты.

Первое доказательство невозможности в теореме Гаусса.

Это доказательство наиболее похоже на доказательство возможности.

Рангом числа называется наименьшее количество копеек, за которые его можно получить.

D1. Число $\cos(2\pi/7)$ не построимо (значит, правильный 7-угольник не построим).

D2. Пусть $n = 4k + 3$ простое. Обозначим $\varepsilon := \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ и $f_s = \varepsilon^s + \varepsilon^{-s}$. Назовем *рангом* построимого числа наименьшую длину минимальной цепочки квадратичных расширений, последнее множество которой содержит данное число.

(a) Для любого k число $f_1^k + f_2^k + \dots + f_{(p-1)/2}^k$ рационально.

(b) После раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(x{-}f_1)(x{-}f_2)\dots(x{-}f_{(p-1)/2})$ получается многочлен с рациональными коэффициентами.

(c) Ранги чисел $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1}$ одинаковы.

(d) Ранги чисел $f_1, \dots, f_{(p-1)/2}$ одинаковы.

(e) Число $\cos(2\pi/n)$ не построимо

D3. Обозначим $\varepsilon := \cos\dfrac{2\pi}{13} + i\sin\dfrac{2\pi}{13}$, $g = 2$ — первообразный корень по модулю 13,

$$A_0 = \varepsilon^{g^0} + \varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{g^6} + \varepsilon^{g^9}, \quad A_1 = \varepsilon^{g^1} + \varepsilon^{g^4} + \varepsilon^{g^7} + \varepsilon^{g^{10}} \quad \text{и} \quad A_2 = \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^5} + \varepsilon^{g^8} + \varepsilon^{g^{11}}.$$

$$(a) \quad A_0^2 = 4 + A_1 + 2A_2, \quad A_1^2 = 4 + A_2 + 2A_0 \quad \text{и} \quad A_2^2 = 4 + A_0 + 2A_1.$$

(b) Числа A_0, A_1, A_2 являются корнями неприводимого кубического уравнения с рациональными коэффициентами.

(c) Числа A_0, A_1, A_2 имеют одинаковый ранг.

(d) Число $\cos(2\pi/13)$ не построимо.

D4. Число $\cos(2\pi/p)$ не построимо для

(a) $p = 3 \cdot 2^k + 1$ простого.

(b) p простого, $p \neq 2^m + 1$.

(c) $p = 25$.

(d) числа p, не являющегоеся произведением степени двойки и различных простых чисел вида $2^m + 1$.

Решение D1. Рассмотрим комплексное число $\varepsilon = \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)$. Так как $\varepsilon \neq 1$, то число ε удовлетворяет уравнению 6-ой степени $\varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Разделим обе части уравнения на ε^3. Положим

$$f := \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad \text{тогда} \quad \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = f^2 - 2 \quad \text{и} \quad \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = f(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} - 1).$$

Получим кубическое уравнение

$$f(f^2 - 3) + (f^2 - 2) + f + 1 = 0, \quad \text{то есть} \quad f^3 + f^2 - 2f - 1 = 0.$$

Кандидаты на рациональные корни этого уравнения $f = \pm 1$ отвергаются проверкой. Согласно теореме С3е о кубических уравнениях число $f = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$ не построимо. Поэтому и ε не построимо (поясните).

Указания к D2. (a) Индукция по k.

(b) Следует из пункта (a) и из того, что любой симметрический многочлен от переменных $f_1, f_2, \dots, f_{(p-1)/2}$ рационально выражается через многочлены вида $f_1^k + f_2^k + \dots + f_{(p-1)/2}^k$.

(c) Так как для любых $s, t \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ существует такое k, что $\varepsilon^s = (\varepsilon^t)^k$, то ранги чисел $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1}$ одинаковы.

(d) Так как $\varepsilon^s + \varepsilon^{-s}$ рационально выражается через $\varepsilon + \varepsilon^{-1}$, то для любых $s, t \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ число $\varepsilon^s + \varepsilon^{-s}$ рационально выражается через $\varepsilon^t + \varepsilon^{-t}$ (аналогично приведенному решению задачи D1). Поэтому ранги чисел $f_1, \dots, f_{(p-1)/2}$ одинаковы.

(Заметим, что $\mathrm{rk}(\varepsilon + \varepsilon^{-1}) = \mathrm{rk}\varepsilon - 1$.)

(e) Обозначим $r := \mathrm{rk} f_s$. Значит, для некоторой цепочки квадратичных рассширений

$$f_s = \alpha_s + \beta_s\sqrt{a}, \quad \text{где} \quad \alpha_s, \beta_s, a \in Q_{r-1}, \quad \sqrt{a} \notin Q_{r-1} \quad \text{и} \quad \beta_s \neq 0.$$

Тогда число $\overline{f}_s = \alpha_s - \beta_s\sqrt{a}$ также является корнем рассматриваемого многочлена (по лемме о сопряжении). Поскольку

$$\beta_s \neq 0, \quad \text{то} \quad \alpha_s - \beta_s\sqrt{a} \neq \alpha_s + \beta_s\sqrt{a}, \quad \text{т. е.} \quad \overline{f}_s \neq f_s.$$

Итак, корни $f_1, \dots, f_{(p-1)/2}$ разбиваются на пары сопряженных. Значит, $(p-1)/2$ четно — противоречие.

Указания к D3. (a) Докажем первую фомулу (остальные доказываются аналогично). Заметим, что $g^6 = -1$. Поэтому

$$A_0^2 = ((\varepsilon^{g^0} + \varepsilon^{-g^0}) + (\varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{-g^3}))^2 =$$

$$= 2 + \varepsilon^{g^1} + \varepsilon^{-g^1} + 2 + \varepsilon^{g^4} + \varepsilon^{-g^4} + 2(\varepsilon^{g^0} + \varepsilon^{g^6})(\varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{g^9}) = 4 + A_1 + 2A_2.$$

Последнее равенство верно, поскольку

$$(\varepsilon^{g^0} + \varepsilon^{g^6})(\varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{g^9}) = \varepsilon^{g^0+g^3} + \varepsilon^{g^3+g^6} + \varepsilon^{g^6+g^9} + \varepsilon^{g^9+g^0} = \varepsilon^{g^0+g^3} A_0 = \varepsilon^{g^8} A_0 = A_2.$$

(В обеих формулах предпоследние равенства верны, поскольку $g = 2$.)

(b) Докажите, что $A_0 + A_1 + A_2$, $\quad A_0^2 + A_1^2 + A_2^2$, $\quad A_0^3 + A_1^3 + A_2^3$ рациональны.

(c) Пользуясь пунктом (a) и тем, что $A_0 + A_1 + A_2 = -1$, докажите, что любое A_i рационально выражается через любое A_j.

(d) Решение получается из пунктов (b) и (c) аналогично решению задачи D2e.

Вот идея другого решения, не использующего пункт (c). Пусть число A_0 имеет ранг r. Сопряжём его относительно Q_{r-1}. Полученное число будет одним из чисел A_i (поясните). Теперь легко понять, что числа A_i разбиваются на пары сопряжённых, т.е. их чётное число, что неверно.

Указания к D4. (a) Аналогично задаче D3.

(b) Предположите, что для $p = 2^k r + 1$ число $\cos(2\pi/p)$ построимо (где $r > 1$ — нечетное число). Выведите из этого, что числа

$$A_i = \varepsilon^{g^i} + \varepsilon^{g^{r+i}} + \dots + \varepsilon^{g^{(2^k-1)r+i}}, \quad 0 \le i \le r-1$$

имеют одинаковый ранг и являются корнями мнгочлена степени r с рациональными коэффициентами.

(c) Рассмотрите числа

$$A_0 = \varepsilon^{g^0} + \varepsilon^{g^5} + \dots + \varepsilon^{g^{20}}, \quad A_1 = \varepsilon^{g^1} + \varepsilon^{g^6} + \dots + \varepsilon^{g^{21}}, \quad \dots, \quad A_4 = \varepsilon^{g^4} + \varepsilon^{g^9} + \dots + \varepsilon^{g^{24}}.$$

Второе доказательство невозможности в теореме Гаусса.

Идея этого доказательства выражается понятиями поля и размерности поля.

E1. *Полем* (числовым) называется подмножество множества $\mathbb{C}$ комплексных чисел, замкнутое относительно сложения, вычитания, умножения и деления (на ненулевое число).

(a) Следующие множества являются полями: $\mathbb{Q}$, множество построимых чисел, множество вещественных чисел, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\alpha + \beta\sqrt{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$, каждое Q_k в цепочке квадратичных расширений и

$$\mathbb{Q}[\varepsilon] := \{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \alpha_3\varepsilon^3 + \dots + \alpha_{12}\varepsilon^{12} \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}\}, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{13} + i\sin\frac{2\pi}{13}.$$

(b) Любое поле содержит поле $\mathbb{Q}$.

(c) Любое поле, содержащее $\sqrt{2}$, содержит $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

(d) Любое поле, содержащее ε, содержит $\mathbb{Q}[\varepsilon]$.

E2. *Размерностью* $\dim F$ поля F называется наименьшее k, для которого существуют такие

$$b_2, b_3 \ldots, b_k \in F, \quad \text{что} \quad F = \{\alpha_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \cdots + \alpha_k b_k \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}\},$$

если такое k существует.

(a) $\dim \mathbb{Q} = 1$.

(b) $\dim \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = 2$.

(c) В цепочке квадратичных расширений $\dim Q_k = 2 \dim Q_{k-1}$ при $k \geq 1$.

(d) В цепочке квадратичных расширений $\dim Q_k = 2^{k-1}$.

(e)* Если $G \subset F$ — поля, то $\dim F$ делится на $\dim G$.

E3. Обозначим $\varepsilon := \cos \dfrac{2\pi}{13} + i \sin \dfrac{2\pi}{13}$.

(a) $\dim \mathbb{Q}[\varepsilon] \leq 12$.

(b) Если $\dim \mathbb{Q}[\varepsilon] < 12$, то $P(\varepsilon) = 0$ для некоторого многочлена P с рациональными коэффициентами степени меньше 12.

(c) Многочлен $\Phi(x) := x^{12} + x^{11} + \cdots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

Указание: если не получается, то используйте лемму Гаусса и признак Эйзенштейна (см. ниже).

(d) $\dim \mathbb{Q}[\varepsilon] = 12$.

(e) Число $\cos(2\pi/13)$ не построимо.

E4. (a) *Лемма Гаусса.* Если многочлен с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим и над $\mathbb{Q}$ [Pr].

(b) *Признак Эйзенштейна.* Пусть p простое. Если для многочлена с целыми коэффициентами старший коэффициент не делится на p, остальные делятся на p, а свободный член не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$ [Pr].

E5. (a) $\dim \mathbb{Q}[\cos \dfrac{2\pi}{25} + i \sin \dfrac{2\pi}{25}] = 20$.

(b) Выведите из предыдущих пунктов, что число $\cos(2\pi/25)$ не построимо.

(c) Докажите невозможность в теореме Гаусса.

Указание к E2. (c) Докажите, что

$$Q_k = \{\alpha_1 + \alpha_2 b \mid \alpha_1, \alpha_2 \in Q_{k-1}\} \quad \text{для любого} \quad b \in Q_k - Q_{k-1}.$$

(d) Следует из (a) и (c).

(e) *Размерностью* $\dim(F : G)$ поля F над полем G называется наименьшее k, для которого существуют такие

$$b_1, b_2, \ldots, b_k \in F, \quad \text{что} \quad F = \{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \cdots + \alpha_k b_k \mid \alpha_i \in G\},$$

если такое k существует. Докажите, что $\dim F = \dim G \dim(F : G)$.

Указания к E3. (a) $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \cdots + \varepsilon^{12} = 0$.

(b) По определению размерности существуют такие

$$b_1, \ldots, b_{11} \in \mathbb{Q}[\varepsilon] \quad \text{и} \quad \alpha_{kl} \in \mathbb{Q}, \quad \text{что}$$

$$\varepsilon^{j-1} = \alpha_{j,1} b_1 + \alpha_{j,2} b_2 + \cdots + \alpha_{j,11} b_{11} \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots, 12.$$

Поэтому существуют такие рациональные $a_0, a_1, \ldots, a_{12}$, не все равные 0, что $a_0 + a_1 \varepsilon + \cdots + a_{11} \varepsilon^{11} = 0$. Для доказательства последнего утверждения подставьте выражения для

ε^i в последнее равенство, приравняйте к нулю коэффициенты при $b_1, \ldots, b_{11}$ и докажите, что полученная система уравнений имеет нетривиальное рациональное решение.

(c) Примените признак Эйзенштейна к многочлену $\Phi(x+1) = ((x+1)^{13}-1)/x$ и лемму Гаусса.

(d) Следует из (a), (b) и (c).

(e) Следует из (d) и E2d.

Указание к E4. Предположите противное и воспользуйтесь методом неопределённых коэффициентов.

Указание к E5a. Аналогично решению задачи E3d. Докажите неприводимость многочлена $\Phi(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20}$ и воспользуйтесь ей.

Третье доказательство невозможности в теореме Гаусса.

Задачи F1 и F2 нужны, чтобы 'нащупать' метод доказательства, который приведен в задачах F3 и F4.

F1. (a) Ранги корней многочлена $\Phi(x) := x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1$ одинаковы.

Обозначим через r ранг корня x_0 многочлена $\Phi(x)$. Пусть $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_r \ni x_0$ — цепочка квадратичных расширений.

(b) Q_r содержит все корни многочлена $\Phi(x)$.

(c) Все корни многочлена $\Phi(x)$ разбиваются на пары сопряженных относительно Q_{r-1}.

(d) Многочлен $\Phi(x)$ равен произведению квадратных трехчленов с коэфициентами из Q_{r-1}.

(e) Многочлен $\Phi(x)$ не делится на квадратный трехчлен с целыми коэфициентами.

(f) Многочлен $\Phi(x)$ не делится на квадратный трехчлен с рациональными коэфициентами.

(g) Эти трехчлены разбиваются на пары сопряженных относительно Q_{r-2}.

(h) Число $\cos(2\pi/7)$ не построимо.

(i) Если $n = 4k+3$ простое, то число $\cos(2\pi/n)$ не построимо.

F2. (a)-(g) Решите задачи F1(a)-(g) для $\Phi(x) := x^{12} + x^{11} + \cdots + x + 1$.

(h) Многочлен $\Phi(x)$ равен произведению многочленов четвертой степени с коэфициентами из Q_{r-2}.

(i) Многочлен $\Phi(x)$ равен произведению многочленов четвертой и восьмой степени с коэфициентами из Q_{r-3}.

(j) Если Φ делится на многочлен P с коэффициентами в Q_{k+1}, то Φ делится на сопряженный (относительно Q_k) многочлен $\overline{P}$.

(k) Число $\cos(2\pi/13)$ не построимо.

(l) Если $n = 4k+5$ простое, то число $\cos(2\pi/n)$ не построимо.

F3. (a) Многочлен $\Phi(x) := x^{12} + x^{11} + \cdots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

Указание: если не получается, то используйте лемму Гаусса и признак Эйзенштейна (см. выше).

(b) Если $\varepsilon := \cos\dfrac{2\pi}{13} + i\sin\dfrac{2\pi}{13}$ построимо, то существует такая цепочка $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_k \subset Q_{k+1}$ квадратичных расширений, что Φ приводим над Q_{k+1} и неприводим над Q_k.

(c) Если Φ делится на многочлен P с коэффициентами в Q_{k+1}, то Φ делится на сопряженный (относительно Q_k) многочлен $\overline{P}$.

(d) Если многочлен R с коэффициентами из Q_{k+1} неприводим над Q_{k+1}, то сопряженный (относительно Q_k) многочлен $\overline{R}$ неприводим над Q_{k+1}.

(e) Разложение многочлена $\Phi(x)$ над Q_{k+1} на неприводимые над Q_{k+1} множители состоит из двух сопряженных (относительно Q_k) множителей степени 6.

(f) Для того из этих множителей, корнем которошо является ε, существует цепочка, аналогичная (b) (но, возможно, с другим k).

(g) Число $\cos(2\pi/13)$ не построимо.

F4. (a) Если неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен P с рациональными коэффициентами имеет построимый корень, то $\deg P$ есть степень двойки. (В частности, минимальная степень многочлена, корнем которого является данное построимое число, является степенью двойки.)

(b) Если Q_r — элемент цепочки квадратичных расширений для α и P — неприводимый над Q_r многочлен с коэффициентами из Q_r, для которого $P(\alpha) = 0$, то $\deg P$ есть степень двойки.

(c) Число $\cos(2\pi/n)$ не построимо для n простого, $n \neq 2^m + 1$.

(d) Многочлен $\Phi(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20}$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

(e) Число $\cos(2\pi/25)$ не построимо.

(f) Докажите невозможность в теореме Гаусса.

(g) Если все корни неприводимого многочлена нечетной степени с рациональными коэффициентами построимы, то один из них рационален.

Указания к F1g. Из (f) вытекает, что $r \geq 2$, т.е. формулировка осмыслена. Если какой-то трехчлен сопряжен сам себе, то его коэффициенты лежат в Q_{r-2}. Значит, ранг его корней не превосходит $r - 1$. Противоречие.

Указания к F3. (a) См. E3c.

(b) Рассмотрим цепочку квадратичных расширений $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_{r-1} \subset Q_r \ni \varepsilon$. Заметим, что многочлен Φ приводим над Q_r (поскольку имеет корень ε). Поэтому существует l, для которого многочлен Φ приводим над Q_{l+1}. Обозначим через k наименьшее такое l. Из пункта (a) следует, что $k \geq 1$. Теперь легко видеть, что цепочка $\mathbb{Q} = Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_k \subset Q_{k+1}$ искомая.

(c) Сопрягите относительно Q_k равенство $\Phi(x) = P(x)R(x)$.

(d) По лемме о сопряжении.

(e) Пусть P — неприводимый множитель многочлена Φ над Q_{k+1}. Докажите, что Φ делится на $P\overline{P}$. Если $\Phi \neq P\overline{P}$, то Φ приводим над Q_k (Ибо так как коэффициенты многочлена P лежат в Q_{k+1}, то коэффициенты многочлена $P\overline{P}$ лежат в Q_k.) Противоречие.

Указание к другому решению. Достаточно доказать, что если многочлен P с коэффициентами в Q_{k+1} делит Φ, то P и $\overline{P}$ взаимно просты. Для этого покажите, что НОД$(P, \overline{P})$ имеет коэффициенты из Q_k и воспользуйтесь неприводимостью многочлена Φ в Q_k.

(f) Аналогично (b).

(g) Указанное в пункте (e) разложение многочлена $\Phi(x)$ состоит ровно из двух множителей. То же самое верно и для разложения получившихся множителей и т.д. Исходя из этого получите, что степень многочлена $\Phi(x)$ должна быть степенью двойки.

Указания к F4. (a,b) Аналогично F3.

(c) Примените признак Эйзенштейна к многочлену $\Phi(x + 1)$ и лемму Гаусса.

(e) Если число $\cos(2\pi/25)$ построимо, то по F4a степень многочлена $\Phi(x)$ должна быть степенью двойки. А это неверно.

(f) Аналогично предыдущему.

Литература

[Al] В. Б.Алексеев, Теорема Абеля. М: Наука, 1976.

[CR] Р. Курант, Дж. Роббинс, Что такое математика. М.: МЦНМО, 2004.

[Ch] Н. Н. Чеботарев, Основы теории Галуа. Часть 1. Л., М.: Гостехиздат, 1934.

[Ga] К. Ф. Гаусс, Арифметические исследования. Труды по теории чисел. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 9–580.

[Gv] Гашков, Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. М.: МЦНМО, 2006.

[Gi] С. Гиндикин, Дебют Гаусса, Квант, 1972 N1, 2–11.

[Ka] А. Я. Канель, О построениях. Готовится к печати.

[Ka'] А. Я. Канель, Непостроимость правильных многоугольников. В кн. Математика в задачах. Сборник материалов московских выездных математических школ. Под редакцией А. Заславского, Д. Пермякова, А. Скопенкова, М. Скопенкова и А. Шаповалова. М.: МЦНМО, 2009.

[Ki] А. А. Кириллов, О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма. Квант, 1977 N7, 2–9 или Квант, 1994 N6, 15–18.

[Ko] В. А. Колосов, Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. М: Гелиос, 2001.

[Li] Дж. Литлвуд, Математическая смесь. М.: Наука, 1978.

[Ma] Ю. И. Манин, О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки. В кн. Энциклопедия элементарной математики. Книга четвертая (геометрия). Под редакцией П. С. Александрова, А. И. Маркушевича и А. Я. Хинчина. М., Физматгиз, 1963.

[Po] М. М. Постников, Теория Галуа. М.: Гос. изд-во физ.-мат. л-ры, 1963.

[Pr] В. В. Прасолов, Многочлены. М: МЦНМО, 1999, 2001, 2003.

[PS] В. В. Прасолов и Ю. П. Соловьев, Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М.: Факториал, 1997.

[Va] Б. Л. Ван дер Варден, Алгебра. М.: Наука, 1976.

[Vi] Э. Б. Винберг, Алгебра многочленов. М.: Просвещение, 1980.