Изопериметрическое неравенство

Изопериметрическая задача. Среди всех многоугольников фиксированного периметра P с количеством вершин не более n наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.

1. А) Докажите, что невыпуклый многоугольник не может быть решением изопериметрической задачи.

Б) Докажите, что выпуклый многоугольник с неравными сторонами не может быть решением изопериметрической задачи.

В) В угол вписана окружность. На большей (меньшей) из дуг, на которые делится окружность точками касания со сторонами угла, найдите точку, касательная в которой отсекает от угла треугольник наименьшей(наибольшей) площади.

Г) Докажите, что выпуклый многоугольник с неравными углами не может быть решением изопериметрической задачи.

2. Объясните, почему нельзя теперь просто так взять и получить из А), Б), Г) решение изопериметрической задачи.

3. А) Пусть F, G – прямоугольники на координатной плоскости со сторонами, параллельными осям координат. Найдите $\frac{F+G}{2}$ и докажите неравенство для площадей: $\sqrt{S(F+G)} \geq \sqrt{S(F)}+\sqrt{S(G)}$.

Б) Пусть F, G — некоторые области, прямые l и m параллельны оси абсцисс. l разбивает F на две части: верхнюю F_1 и нижнюю F_2, аналогично m разбивает G на G_1 и G_2. Докажите, что фигуры F_1+G_1 и F_2+G_2 лежат в разных полуплоскостях относительно некоторой прямой.

В) Пусть каждая из фигур F, G является объединением конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям. Докажите, что $\sqrt{S(F+G)} \geq \sqrt{S(F)}+\sqrt{S(G)}$.

Г) Докажите *неравенство Брунна - Минковского*: если F и G — выпуклые компакты на плоскости, то

$$\sqrt{S(F+G)} \geq \sqrt{S(F)}+\sqrt{S(G)}$$

.

Определение. Для плоской фигуры F её *ϵ-окрестностью* называется $F_\epsilon = F + \epsilon D$, где D — круг радиуса 1, $\epsilon > 0$.

4. А) Нарисуйте ϵ-окрестности круга, окружности, отрезка, границы прямоугольника.

Б) Пусть F — выпуклый многоугольник площади S и периметра P. Найдите площадь F_ϵ.

В) Выведите изопериметрическое неравенство: $4\pi S \leq P^2$ в любом выпуклом многоугольнике периметра P и площади S из неравенства Брунна — Минковского.