Числа Каталана. Различные интерпретации.

Докажите, что следующие числа равны, построив биекции между множествами.

1. Количество правильных скобочных структур из $2n$ скобок, т.е. таких последовательностей из n открывающих и n закрывающих скобок, что среди любого количества первых элементов последовательности открывающих скобок не меньше, чем закрывающих.

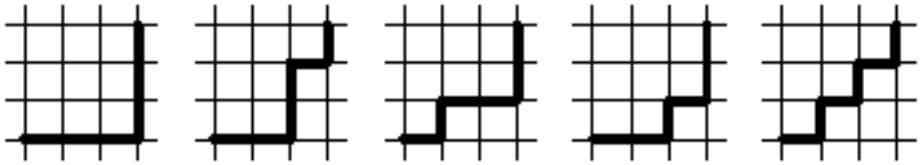
$$((()))\qquad (())()\qquad ()(())\qquad (()())\qquad ()()()$$

Это число называется n-ым *числом Каталана.*

2. Количество последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, в которых по n раз встречаются «1» и «-1», и для всякого $k \in \{1, \ldots, 2n\}$ выполняется неравенство $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq 0$.

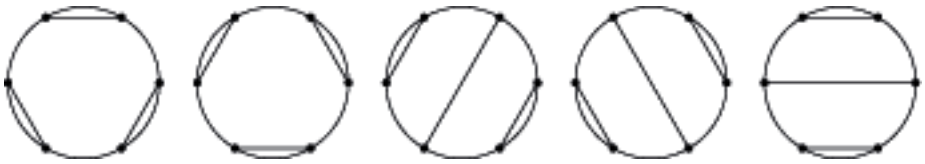
$$+1+1+1-1-1-1\qquad +1+1-1-1+1-1\qquad +1-1+1+1-1-1$$
$$+1+1-1+1-1-1\qquad +1-1+1-1+1-1$$

3. Количество путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо и не поднимающихся выше прямой $y = x$.



4. Количество способов разбить $2n$ точек на отрезке на пары, соединенные непересекающимися полуокружностями, лежащими выше этого отрезка.

5. Количество способов разбить $2n$ точек на окружности на пары и соединить точки из одной пары отрезком так, чтобы отрезки не пересекались.



6. Количество способов расставить $2n$ человек разного роста в две шеренги так, чтобы в каждой шеренге люди стояли по убыванию роста и каждый человек первой шеренги был бы выше стоящего за ним человека второй шеренги.

7. Количество способов расставить скобки в арифметическом выражении с n переменными.

$$(ab)(cd)\qquad a(b(cd))\qquad a((bc)d)\qquad ((ab)c)d\qquad (a(bc))d$$

8. Количество бинарных деревьев с $n + 1$ висячей вершиной.

Бинарным называется дерево с выделенной вершиной (корнем) степени 2, все остальные вершины которого имеют степень 1 или 3. Таким образом, из каждой невисячей вершины на следующий уровень выходит ровно два ребра. Деревья отличающиеся перестановкой веток, идущих вниз из какой-то вершины, считаются различными.

Иногда к корню присоединяют сверху вершину степени один, и называют корнем уже ее.

9. Количество способов разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями.

10. Количество способов представить сумму $n+1$ слагаемого в виде обратной польской записи не меняя порядка переменных.

abcd+++ abc++d+ ab+cd++ abc+d++ ab+c+d+

Что такое обратная польская запись? Давайте рассмотрим арифметическое выражение без унарных минусов, например $(a+b)(c-d)$. Его можно записать в такой бесскобочной форме: $ab+cd-*$. (Еще примеры: $a+b+c \to ab+c+$, $a+bc \to bc*a+$, где «*» — это умножение).

Эта запись называется *обратной польской записью* выражения. Определяется она рекурсивно: выбирается операция, выполняющаяся последней. Ее знак записывается в конец строки. Перед ним записываются обратные польские записи операндов. Обратной польской записью переменной является она сама. Аналогично определяется прямая польская запись, когда знак операции пишется в начале.

Обратная польская запись может весьма пригодиться в программировании. Такое представление формул не только более экономично с точки зрения количества символов, но и гораздо удобнее для машинного считывания.

11. Количество корневых деревьев (деревьев с выделенной вершиной), содержащих $n+1$ вершину (деревья, отличающиеся перестановкой веток, также считаются различными).

Обязательная задача: биекция между 1 и 3 множествами.