Проективная геометрия I

Определение. Двойным отношением четырех различных точек A, B, C, D на прямой называется величина

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

и обозначается (A, B, C, D).

1. Докажите, что

а) $(A, B, C, D) = \frac{1}{(B,A,C,D)} = \frac{1}{(A,B,D,C)}$.

б) $(A, B, C, D) = 1 - (A, C, B, D)$.

в) какие значения может принимать (W, X, Y, Z), где $\{W, X, Y, Z\} = \{A, B, C, D\}$, а $(A, B, C, D) = \lambda$?

2. Докажите, что при фиксированных A, B, C и вещественном λ отличном от 0, 1 и $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$, существует есдинственная точка D такая, что $(A, B, C, D) = \lambda$.

Определение. Двойным отношением четырех различных прямых на плоскости a, b, c, d, проходящих через одну точку, называется величина

$$\frac{\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})}{\sin\angle(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})} : \frac{\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d})}{\sin\angle(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b})}$$

где $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ - произвольные не нулевые вектора, выбранные на прямых a, b, c, d. Оно обозначается (a, b, c, d).

3. Пусть прямые a, b, c, d проходят через одну точку и пересекают прямую l в точках A, B, C, D соответственно. Докажите, что $(a, b, c, d) = (A, B, C, D)$

4. Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке A. На l_1 выбраны точки B_1, C_1 и D_1, а на l_2 — точки B_2, C_2 и D_2. Оказалось, что $(A, B_1, C_1, D_1) = (A, B_2, C_2, D_2)$. Докажите, что прямые B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2 либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

5. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, соответственно. Оказалось, что прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются на прямой AB, а прямые A_{12} и A_{21} пересекаются на прямой A. Докажите, что прямые B_1C_2 и B_2C_1 пересекаются на прямой BC.

6. (Дезарг) Даны два треугольника. Докажите, что три прямые проходящие через соответственные вершины треугольника пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда три точки пересечения соответственных сторон лехат на одной прямой. (Можно считать, что никакие две прямые из условия не параллельны)

7. (Папп) На двух прямых выбраны точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что точки перечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, A_1C_2 и A_2C_1, B_1C_2 и B_2C_1 лежат на одной прямой.

8. Дан треугольник ABC. На прямой BC располагаются точки H_A, L_A, I_A и J_A - основание высоты, бисектриссы, точка касания вписанной и вневписанной соответственно. Аналогично определяются точки H_B, L_B, I_B и J_B. Докажите, что прямые H_AH_B, L_AL_B, I_AI_B и J_AJ_B пересекаются в одной точке.

Обязательная задача — 6.