Внутренний математический бой

1. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность S_1 проходит через точку B и касается прямой AC в точке A. Окружность S_2 проходит через точку C и касается прямой AB в точке A. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и K. Точки B_1 и C_1 взяты на продолжениях сторон AB и AC соответственно так, что $AB_1 = AB$ и $CC_1 = AC$. Докажите, что точки A, K, B_1 и C_1 лежат на одной окружности.

2. Дано семейство подмножеств некоторого конечного множества. В каждом из этих подмножеств хотя бы два элемента и в любом непустом пересечении двух множеств тоже хотя бы два элемента. Докажите, что элементы исходного множества можно раскрасить в два цвета так, чтобы в каждом из подмножеств нашего семейства были элементы обоих цветов.

3. Даны два множества на прямой такие, что каждое из них не пересекается с замыканием другого. Докажите, что можно выбрать два непересекающихся открытых множества, каждое из которых содержит одно из данных. (Замыканием называется множество, полученное из данного добавлением всех его граничных точек.)

4. На прямых, содержащих стороны некоторого выпуклого четырёхугольника, от его вершин по часовой стрелке отложили отрезки, каждый из которых в два раза больше соответствующей стороны. Вторые концы получившихся оказались вершинами квадрата. Докажите, что исходный четырёхугольник также был квадратом.

5. Найдите 50 последних цифр числа $\sum\limits_{n=1}^{200} (n^2+1)n!$

6. Найдите все простые числа $p = a^2 + b^2 + c^2$, для которых выполняется условие $a^4 + b^4 + c^4 \,\vdots\, p$.

7. Про числа x, y, z известно, что их произведение лежит в интервале $(1; 3)$. Докажите, что $x^5y^3z + y^5z^3x + z^5x^3y + 3 > 4xyz$.

8. Существуют ли два неравных выпуклых многогранника такие, что их ребра можно разбить на пары равных и параллельных (одно из одного, одно из другого)?