Выпуклые функции

1. Будем называть (средней) скоростью изменения функции f на отрезке $[a, b]$ отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (геометрический смысл: средняя скорость — угловой коэффициент хорды). Докажите, что функция f, определенная на интервале, выпукла вниз тогда и только тогда, когда для любых трех точек $a \leq b \leq c$ данного интервала скорость изменения f на отрезке $[a, b]$ не больше скорости изменения f на отрезке $[b, c]$.

2. Функция $f(x)$ выпукла вниз и всюду положительна. А) Можно ли утверждать, что функция $(f(x))^2$ выпукла вниз? Б) Можно ли утверждать, что эта функция выпукла вверх, если $f(x)$ выпукла вверх?

3. А) Доказать, что если выпуклая вниз функция дифференцируема, то её производная является неубывающей функцией. (Указание: если $a < b$, то $f'(a)$ и $f'(b)$ разделены средней скоростью изменения функции на $[a, b]$.)

Б) Доказать, что если функция f дифференцируема и f' является неубывающей функцией, то f выпукла вниз. (Указание: по теореме Лагранжа средняя скорость изменения есть производная в промежуточной точке.)

4. Доказать, что для дважды дифференцируемых функций выпуклость вниз (вверх) равносильна неотрицательности (неположительности) второй производной. (Мнемоническое правило: если в график можно залить воду, вторая производная имеет знак плюс, если нельзя — минус.)

5. Докажите с помощью производной и с помощью задачи 1, что функция $y = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$ выпукла вниз.

6. Выведите неравенство Коши-Буняковского: $(x_1 + ... + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + ... + x_n^2)$ из выпуклости функции $y = x^2$.

7. А) Показать, что график дифференцируемой выпуклой вниз функции лежит выше любой касательной к нему. (Указание: касательная в точке $(a, f(a))$ к графику функции f имеет угловой коэффициент $f'(a)$.)

Б) Показать, что требование предыдущей задачи (график лежит выше касательной) можно считать (равносильным) определением выпуклости для дифференцируемых функций.

Для самостоятельного решения

8. При каких p функция $y = x^p$ выпукла, а при каких вогнута на $(0, +\infty)$?

9. Выведите А) неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим из неравенства Йенсена, используя выпуклость вверх функции $\ln(x)$;

Б) докажите неравенство о средних взвешенных:

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \geq \sqrt[\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n]{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}},$$

где все x_j и α_j неотрицательны.

10. Пусть $F_p(x_1, x_2, \ldots x_n) = (\frac{x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p}{n})^{\frac{1}{p}}$, $F_0(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, Докажите для положительных $x_1, ..., x_n$, что $F_p \geqslant F_q$, где $p > q \geq 0$.