# (Не)Построение циркулем и линейкой.

**Дано**: На плоскости задана декартова система координат (с единичным отрезком), циркуль и линенейка (ЦЛ).

**Требуется**: Решить некую задачу на построение или доказать, что она неразрешима.

**Опр**. Число $x \in \mathbb{R}$ назовем *построимым*, если можно построить отрезок длины $|x|$ ($\Longleftrightarrow$ можно построить точку, абсцисса/ордината которой равна $x$).

**Опр**. *Построение при помощи ЦЛ* – это любая последовательность элементарных шагов:

1) взятие произвольной точки $(x_0, y_0)$;

2) проведение прямой через две имеющиеся точки;

3) проведение окружности с центром в имеющейся точке, радиус которой равен расстоянию между какими-то двумя имеющимися точками;

4) взятие точки пересечения двух построенных прямых, прямой и окружности, двух окружностей;

5) уже построенные прямые и окружности разбивают плоскость на области; шагом является взятие произвольной точки *строго внутри* одной из этих областей;

**Замечание**. В алгоритмах построения ЦЛ допускаются ветвления типа: если точка пересечения таких-то прямых лежит внутри такой-то окружности, то..., если вне окружности, то..., если на окружности, то...

**ВАЖНЕЙШАЯ ИДЕЯ**. В пунктах 1 и 5 можно выбирать только точки *с рациональными координатами* (в силу всюду плотности $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{R}^2$.)

**Упр1**. Если построимы числа $a, b$, то построимы числа $a \pm b$, $ab$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{ab}$.

**Упр2**. Построимо каждое число $x$, которое можно получить из 1 при помощи операций сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадратного корня. Например, число $\frac{\sqrt[8]{2+\sqrt{3}}-500\sqrt{25-\sqrt{6}}}{10\sqrt[4]{5}+7/3}$ построимо. Множество чисел такого вида обозначим $\mathbb{Q}'$.

**Замечание**. $\mathbb{Q}'$ подполе в $\mathbb{R}$.

**Теорема**. Множество построимых чисел совпадает с $\mathbb{Q}'$.

**Упр3**. а) Если разрешима задача удвоения единичного куба, то построимо число $\sqrt[3]{2}$;

б) если разрешима задача квадратуры круга то построимо число $\pi$;

в) если разрешима задача трисекции угла $60^\circ$, то построим вещественный корень некоторого неприводимого над $\mathbb{Q}$ кубического многочлена;

г) если можно построить правильный девятиугольник, то разрешима задача трисекции угла в $60^\circ$.

**Вывод**. Для доказательства неразрешимости классических задач на построение достаточно показать, что перечисленные выше числа не лежат в поле $\mathbb{Q}'$.

**Упр4**. Докажите неразрешимость (при помощи ЦЛ) классических задач на построение.

---

**Упр5**. а) Если $n$-угольник можно построить ЦЛ, то построимо число $\cos 2\pi/n$;

б) Рассмотрим $\mathbb{Q}(\cos 2\pi/n) \subset \mathbb{Q}(\cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n)$. Это расширение, и оно имеет степень 2.

Осталось выяснить, какую степень имеет неприводимый многочлен для $\cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n$ над $\mathbb{Q}$. Это нелегко, поэтому обойдем этот вопрос.

в) Если $n = kl, (k, l) = 1, k > 1, l > 1$, то $n$-угольник можно построить тогда и только тогда, когда можно построить $k$-угольник и $l$-угольник. Тем самым достаточно выяснить только вопрос о построении $p^n$-угольника, $p > 2$– простое.

**Упр6**. $x^{p^n} - 1 = (x^{p^{n-1}} - 1)(x^{p^{n-1}(p-1)} + x^{p^{n-1}(p-2)} + \cdots + x^{p^{n-1}} + 1)$. Тогда многочлен во вторых скобках неприводим над $\mathbb{Q}$.

**Упр7**. Если $p^n$-угольник $(p > 2)$ можно построить ЦЛ, то $n = 1$ и $p = 2^{2^k} + 1$ – простое число Ферма.

Мы не будем доказывать, что если $p$ – простое число Ферма, то $p$-угольник можно построить ЦЛ.

**Теорема**. Если $n$-угольник построим ЦЛ, то $n$ – произведение степени двойки и нескольких различных чисел Ферма. Верно и обратное.

---

**Упр8**. Одной линейкой нельзя построить: а) прямой угол; б) середину заданного отрезка.

### Для самостоятельного решения

**1**. Одной линейкой нельзя построить: б) правильный треугольник. б) центр данной окружности; в) отрезок вдвое больше данного.

**2**. На плоскости дана пара параллельных прямых и отрезок на одной из них. При помощи одной линейки а) поделите его пополам; б) удвойте его.