Теорема Штейница

1. Докажите равенства для выпуклого многогранника:

$$2e = 3v_3 + 4v_4 + ... = 3f_3 + 4f_4 + ...$$

, где v_i — количество вершин, в которых сходится i рёбер, f_i —и количество i-угольных граней.

2. Докажите, что каждый выпуклый многогранник имеет либо трехгранный угол, либо треугольную грань.

3. Теорема Штейница. Тройка натуральных чисел (v, e, f), для которой $v-e+f = 2$, $v \leq 2f-4$, $f \leq 2v-4$, является f — вектором некоторого выпуклого многогранника.

А) Найдите выпуклый многогранник, f — вектор которого есть a)$(4, 6, 4)$;b)$(5, 8, 5)$;c)$(6, 10, 6)$.

Б) Докажите, что если существует выпуклый многогранник с f — вектором (v, e, f), имеющий как трехгранный угол, так и треугольную грань, то существуют выпуклые многогранники с f — векторами $(v+1, e+3, f+2)$, $(v+2, e+3, f+1)$ и $(v+2i+j, e+3i+3j, f+i+2j)$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В) Докажите теорему Штейница.

4. Пусть на рёбрах выпуклого многогранника расставлены знаки плюс и минус.

А) Докажите, что число перемен знака при обходе любой грани четно.

Назовем индексом вершины число перемен знака при обходе этой вершины.

Б) Пусть N — сумма индексов всех вершин многогранника. Докажите, что $N \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + ...$

В) Докажите, что $N \leq 4v - 8$.

Г) Докажите лемму Коши: найдется вершина выпуклого многогранника, индекс которой меньше 4.

Пусть система координат в пространстве выбрана так, что начало координат O совпадает с некоторой внутренней точкой многогранника. Для вершины V_i рассмотрим полупространство, определяемое неравенством $\langle y, OV_i \rangle \leq R^2$ ($y \in \mathbb{R}^2, R$ — радиус сферы, $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Рассмотрим пересечение этих полупространств, оно является выпуклым многогранником, который называется *полярным* к данному многограннику.

5. Найдите f — вектор полярного многогранника к многограннику с f — вектором (v, e, f).