Группы преобразований и лемма Бернсайда.

Пусть $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ – конечное множество, а G – подгруппа S_n, т.е. любой элемент $g \in G$ является подстановкой из n элементов (g мы будем также называть преобразованием).

Если существует подстановка s из группы G такая, что $s(m_i) = m_j$, мы называем элемент m_i *сравнимым с элементом* m_j *по модулю* G.

1. Докажите, что элементы множества M разбиваются на классы эквивалентности по вышеописанному сравнению.

Определение. Множество элементов M, сравнимых с m по модулю G, назвается орбитой m относительно G. Обозначим такое множество $O_G(m)$ (или $O(m)$, если группа G понятна из контекста.) *Длиной* орбиты называется число $|O(m)|$.

2. Рассмотрим движения плоскости, которые переводят правильный шестиугольник в самого себя.

а) Докажите, что эти движения образуют группу G.

б) Пусть M – множество вершин шестиугольника. Найдите орбиту относительно G для каждого элемента множества M.

3. Решите задачу 2б) для следующего шестиугольника (сжатого к диагонали правильного):

4. Пусть $|M| = 10$. Как выбрать группу G, чтобы орбиты относительно этой группы

а) все были бы длины 2;

б) все были бы разной длины?

Определение. *Неподвижными точками* элемента $g \in G$ называются такие $m \in M$, что $g(m) = m$.

5. Пусть никакие элементы G, кроме тождественного, не имеют неподвижных точек. Чему равно количество орбит относительно G?

Определение. *Стабилизатор* G_x элемента $x \in M$ – это такое множество преобразований из G, которые переводят x в себя. $|G_x|$ – число элементов в стабилизаторе.

Определение. $\mathrm{Fix}(g)$ – число неподвижных элементов преобразования g.

6. Найдите все стабилизаторы для вершин шестиугольника из задачи 3.

7. Докажите, что

а) если $x, y \in X$ лежат в одной орбите, то количество преобразований, переводящих x в y, не зависит от x и y, и равно $|G_x|$;

б) сумма мощностей стабилизаторов точек одной орбиты равна $|G|$;

в) сумма мощностей стабилизаторов всех точек множества X в $|G|$ раз больше, чем количество орбит;

г) сумма мощностей стабилизаторов всех точек равна сумме мощностей множеств неподвижных элементов всех преобразований из G: $\sum\limits_{x \in X} |G_x| = \sum\limits_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)$.

8. Лемма Бернсайда. Пусть G – группа преобразований множества M. Число орбит, на которые множество M разбивается под действием группы G, равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Fix}(g).$$

Для самостоятельного решения

9. Так сколько же существует различных кубиков, у которых грани бывают синие, зеленые или красные?

10. Сколько можно составить различных ожерелий, состоящее из шести бусинок, используя бусинки трех различных цветов (выбор бусинок любого цвета неограничен)?

Обязательная задача: 7