Двойное отношение точек на конике.

Определение. *Двойным отношением* $(A, B; C, D)$ точек A, B, C и D на конике ω называется двойное отношение прямых $(PA, PB; PC, PD)$, где P — любая точка коники, отличная от A, B, C и D.

Упр1. Докажите, что это определение корректно.

Упр2. Докажите, что в определении можно разрешить точке P быть равной какой-то точке из A, B, C и D, но тогда в двойном отношении следует заменить прямую через P и эту точку на касательную в точке P к ω.

Упр3. Докажите, что проективное преобразование не меняет двойного отношения точек на конике.

1. Докажите, что вписанный четырехугольник является гармоническим тогда и только тогда, когда его вершины образуют гармоническую четверку точек на описанной окружности.

2. Докажите, что двойное отношение не меняется при проецировании точек с коники на себя: если точки A, B, C, D лежат на конике ω, а точка P не лежит на ней, и прямые PA, PB, PC и PD пересекают ω второй раз в точках A', B', C' и D' соответственно, то $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

3. Точки A, B, C и D лежат на конике ω. Прямая ℓ пересекается с прямыми AB, BC, CD и DA в точках K, L, M и N соответственно, и пересекается с ω в точках P и Q. Точка O делит отрезок PQ и отрезок KM пополам. Докажите, что и отрезок LN она делит пополам (*обобщенная теорема о бабочке*).