Фазовое пространство.

Угадывание числа. Петя задумал двузначное число. За ход Вася называет любое двузначное число. Цель Васи – назвать такое число, которое отличалось бы от задуманного в каждом из двух разрядов не более чем на 1. Какое наименьшее число ходов заведомо хватит Васе?

Встреча. Мальчик и девочка договорились встретиться после отбоя между 23-00 и 24-00. Каждый приходит на место встречи случайным образом, ждет 15 минут, и если встреча не произошла, то уходит. Какова вероятность встречи?

Пьяный монах. Монах выходит из своей обители в 12 дня и идет в гору по прямой дороге (с разной скоростью, возможно, иногда спускаясь). Монах достигает вершины в 12 ночи, ночует, молится, и в 12 часов следующего дня, подкрепившись на дорогу, выходит обратно, возвращаясь в обитель в 5 часов вечера. Докажите, что найдется точка пути, в которой монах был в одно и то же время на обоих маршрутах.

Возы. Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой длины 20, смогли проехать, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись друг друга, два круглых воза радиуса 10, один из которых едет из A в B, а другой – из B в A?

Флатландцы. а) Двое флатландцев спускаются с высочайшей вершины Флатландии «Пик кипа» — один по левому склону, а второй по правому. Гора везде выше уровня моря, а её поверхность – график кусочно-линейной непрерывной функции. Флатландцы «непрерывно» двигаются, так что зависимость координат флатландца от времени – непрерывная функция, на скорость ограничений нет.

Докажите, что флатландцы могут достичь моря, все время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря.

б) Пусть поверхность горы – график дифференцируемой функции. Тогда аналогичное утверждение может быть неверным.

Для самостоятельного решения

Отрезки и прямые. На плоскости дано несколько параллельных отрезков. Докажите, что если любые три из них можно пересечь некоторой прямой, то и все отрезки можно пересечь некоторой прямой.

Дуги на сфере. Прямая на сфере – это пересечение сферы и плоскости, проходящей через ее центр. Аналогично определяется отрезок.

Пусть на сфере единичного радиуса имеется несколько отрезков суммарной длины меньше π. Докажите, что тогда существует прямая, не пересекающая ни один из отрезков. А если имеется несколько отрезков суммарной длины больше πk, то найдется прямая, пересекающая $k+1$ отрезок.

Сосны и бесконечно длинная слега. На плоскости растет 2012 сосен общего положения. Два положения бесконечно длинной слеги назовем эквивалентными, если одно может быть получено из другого перемещением слеги между соснами. Чему равно число классов эквивалентности?