Формальные степенные ряды. Производящие функции.

Формальным степенным рядом называется запись вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$. Сложение формальных степенных рядов определяется покоэффициентно. Что же касается умножения, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, если для любого целого неотрицательного n выполняется равенство $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Определения операций над формальными степенными рядами полностью аналогично определению тех же операций над многочленами. Более того, многочлены — это в точности формальные степенные ряды, имеющие лишь конечное количество ненулевых коэффициентов.

Формальные степенные ряды на то и формальные, чтобы мы не заботились о том, можем ли мы посчитать сумму элементов этого ряда хоть при каком либо x, отличном от нуля. Для некоторых рядов, кстати говоря, таких x и не существует.

1. Докажите, что $(1-x)(1+x+x^2+x^3+\ldots) = 1$.

Благодаря этому, мы можем говорить о равенстве $1+x+x^2+x^3+\ldots = \frac{1}{1-x}$. Однако, понимать это равенство следует исключительно так: в множестве формальных степенных рядов ряд $1+x+x^2+x^3+\ldots$ является обратным к ряду $1-x$. Буква x в данном случае лишь формальный символ переменной, а то, что на самом деле это равенство выполняется для $-1 < x < 1$, а при остальных x его левая часть не имеет смысла, нас совершенно не интересует.

2. Докажите, что для любого формального степенного $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ряда свободный член которого не равен нулю, существует ровно один формальный степенной ряд, обратный к данному по умножению, т.е. дающий с ним в произведении единицу.

3. Найдите коэффициенты ряда $(1-x)^{-2}$.

4. Докажите, что для любого формального степенного $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ряда младший ненулевой коэффициент которого находится при чётной степени и положителен, существует ровно два формальных степенных ряда, при возведении в квадрат дающих $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Тот из рядов, младший ненулевой коэффициент которого положителен, мы и будем называть квадратным корнем из исходного ряда.

Выражение $\frac{1}{1-x}$ называют *производящей функцией* для последовательности коэффициентов степенного ряда $1+x+x^2+x^3+\ldots$, то есть для последовательности единиц. Выражение $(1-x)^{-2}$ также будет производящей функцией для последовательности своих коэффициентов. Когда вы познакомитесь с рядами Тэйлора, теорией сходимости и прочими прелестями математического анализа, вы узнаете, что равенства с которыми мы работаем имеют и ещё какой-то смысл, кроме формального. Однако пока нам не надо об этом задумываться и уж тем более нельзя подставлять в эти формулы какие-то числа. Под производящей функцией мы с вами будет понимать простую и маленькую формулу без бесконечного суммирования. Эта формула может содержать какие-то многочлены небольшой степени, а также такие операции над ними как сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

5. Найдите производящую функцию для биномиальных коэффициентов (т.е. производящую функцию, соответствующую ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ где $a_k = C_n^k$. Можно, конечно, рассмотреть и ряд, в котором коэффициенты занумерованы нижним индексом, но это сложнее).

6. Найдите производящую функцию для чисел Фибоначчи.

7. Докажите, что $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ является производящей функцией для чисел Каталана.

Для самостоятельного решения

8. Докажите, что коэффициент при 27 степени многочлена $(1+x+x+\ldots+x^9)^6$ равен числу счастливых билетов.

9. Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ является производящей функцией для чисел C_{2n}^n.

Обязательная задача: 7