Выпуклые множества. Комбинаторные свойства

1. Теорема Хелли на плоскости.
А) Докажите, что пересечение четырех выпуклых множеств непусто, если непусты пересечения любых трех из них.

Б) Докажите А) с заменой "....четырех..."на "...$n > 3$...".

В) При замене в А) "....четырех..."на "...счетного числа..."утверждение становится неверным.

Г*) Докажите, что пересечение любого числа (конечного или бесконечного) выпуклых областей непусто, если непусты пересечения любых трех из этих областей и хотя бы одна из этих областей ограничена.

2. Обобщите теорему Хелли (2Б) на случай выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$.

3. Теорема Юнга. Попарные расстояния между n точками на плоскости не больше единицы. Докажите, что все эти точки помещаются в некотором круге радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Обобщите теорему Юнга на случай выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$.

5. А) Сформулируйте и докажите аналог теоремы Каратеодори в пространстве R^3.

Б) Докажите теорему Радона при $n = 2, 3$: каждое множество из $n + 2$ или более точек в $\mathbb{R}^n$ может быть представлено как объединение двух непересекающихся множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

Для самостоятельного решения

6. Докажите, из теоремы Радона следует теорема Каратеодори: А) в $\mathbb{R}^2$, Б) в $\mathbb{R}^3$.

7. * Докажите, из теоремы Каратеодори следует теорема Хелли: А) в $\mathbb{R}^2$, Б) в $\mathbb{R}^3$.

Обязательная задача: 8