Изогональное сопряжение

Определение: Рассмотрим треугольник ABC и точку P внутри него. Если существует точка Q такая, что лучи AQ, BQ, CQ симметричны относительно биссектрис углов треугольника лучам AP, BP, CP, то точка Q называется изогонально сопряженной к точке P. Преобразование, сопоставляющее каждой точке внутри треугольника сопряженную к ней, называется изогональным сопряжением.

1. Проверьте корректность определения изогонального сопряжения.

2. А) Найдите изогонально сопряженную точку к центру вписанной окружности Б) Найдите изогонально сопряженную точку к ортоцентру (для остроугольного треугольника) В) Докажите, что проекции изогонально сопряженных точек на стороны треугольника лежат на одной окружности.

Определение: Барицентрические координаты точки в треугольнике – тройка пар (вершина число), которая задает положение точки как центра масс системы.

3. Найдите барицентрические координаты четырех замечательных точек.

4. Докажите, что барицентрические координаты корректно определены.

5. Запишите изогональное сопряжение в барицентрических координатах.

6. Докажите, что фокусы эллипса, вписанного в треугольник, изогонально сопряжены.

7. Докажите, что точки Брокара изогонально сопряжены.

8. Докажите, что точка Лемуана обладает минимальной суммой квадратов расстояний до сторон треугольника.

Обязательная задача 6

XXVIII Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2012 года • 10 класс, обычные группы • 12 июля

Изогональное сопряжение

Определение: Рассмотрим треугольник ABC и точку P внутри него. Если существует точка Q такая, что лучи AQ, BQ, CQ симметричны относительно биссектрис углов треугольника лучам AP, BP, CP, то точка Q называется изогонально сопряженной к точке P. Преобразование, сопоставляющее каждой точке внутри треугольника сопряженную к ней, называется изогональным сопряжением.

1. Проверьте корректность определения изогонального сопряжения.

2. А) Найдите изогонально сопряженную точку к центру вписанной окружности Б) Найдите изогонально сопряженную точку к ортоцентру (для остроугольного треугольника) В) Докажите, что проекции изогонально сопряженных точек на стороны треугольника лежат на одной окружности.

Определение: Барицентрические координаты точки в треугольнике – тройка пар (вершина число), которая задает положение точки как центра масс системы.

3. Найдите барицентрические координаты четырех замечательных точек.

4. Докажите, что барицентрические координаты корректно определены.

5. Запишите изогональное сопряжение в барицентрических координатах.

6. Докажите, что фокусы эллипса, вписанного в треугольник, изогонально сопряжены.

7. Докажите, что точки Брокара изогонально сопряжены.

8. Докажите, что точка Лемуана обладает минимальной суммой квадратов расстояний до сторон треугольника.

Обязательная задача 6