Матбой.

1. Многочлен $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени n таков, что $|p(x)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Докажите, что $p(-\frac{1}{n}) \leqslant 2^{n+1} - 1$.

2. По кругу стоят 123 комплексных числа, не все нулевые. Докажите, что можно выкинуть два соседних числа так, что оставшиеся числа нельзя разбить на две равные по сумме группы.

3. В таблицу 8×8 вписаны числа. За один вопрос можно узнать сумму чисел в любом прямоугольнике. За какое наименьшее число вопросов можно узнать сумму чисел на диагонали?

4. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC выбрана точка P. Прямые AP и CP пересекают продолжения сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а прямая BP пересекает сторону AC в точке B_1. Прямые C_1B_1 и A_1B_1 пересекают стороны BC и AB в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения симедиан треугольника ABC.

5. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{2012} \frac{\sqrt{x_i}}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} > 0$$

для любых положительных попарно различных $x_1, x_2, \dots, x_{2012}$.

6. Докажите, что на всех ребрах выпуклого многогранника всегда можно так расставить стрелки, что в каждую вершину будет входить не более трех стрелок.

7. Докажите, что из $2n-1$ иррационального числа можно выбрать n чисел так, что сумма любых нескольких выбранных чисел из этих n будет иррациональной.

8. Докажите, что для каждых двух многочленов $f_1(x), f_2(x)$ найдется такой ненулевой многочлен $P(x, y)$, что $P(f_1(x), f_2(x)) = 0$.

9. На плоскости отмечены 50 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Костя соединяет эти точки отрезками, не имеющими друг с другом общих точек (в том числе общих концов). Костя уже провел 16 отрезков. Докажите, что он сможет провести еще один.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Пусть вторые точки пересечения пар окружностей, описанных около треугольников ABO и CDO, ACO и BDO, ADO и BCO это K, L, M. Докажите, что O — центр вневписанной окружности треугольника KLM.

Матбой.

1. Многочлен $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени n таков, что $|p(x)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Докажите, что $p(-\frac{1}{n}) \leqslant 2^{n+1} - 1$.

2. По кругу стоят 123 комплексных числа, не все нулевые. Докажите, что можно выкинуть два соседних числа так, что оставшиеся числа нельзя разбить на две равные по сумме группы.

3. В таблицу 8×8 вписаны числа. За один вопрос можно узнать сумму чисел в любом прямоугольнике. За какое наименьшее число вопросов можно узнать сумму чисел на диагонали?

4. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC выбрана точка P. Прямые AP и CP пересекают продолжения сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а прямая BP пересекает сторону AC в точке B_1. Прямые C_1B_1 и A_1B_1 пересекают стороны BC и AB в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения симедиан треугольника ABC.

5. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{2012} \frac{\sqrt{x_i}}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} > 0$$

для любых положительных попарно различных $x_1, x_2, \dots, x_{2012}$.

6. Докажите, что на всех ребрах выпуклого многогранника всегда можно так расставить стрелки, что в каждую вершину будет входить не более трех стрелок.

7. Докажите, что из $2n-1$ иррационального числа можно выбрать n чисел так, что сумма любых нескольких выбранных чисел из этих n будет иррациональной.

8. Докажите, что для каждых двух многочленов $f_1(x), f_2(x)$ найдется такой ненулевой многочлен $P(x, y)$, что $P(f_1(x), f_2(x)) = 0$.

9. На плоскости отмечены 50 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Костя соединяет эти точки отрезками, не имеющими друг с другом общих точек (в том числе общих концов). Костя уже провел 16 отрезков. Докажите, что он сможет провести еще один.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Пусть вторые точки пересечения пар окружностей, описанных около треугольников ABO и CDO, ACO и BDO, ADO и BCO это K, L, M. Докажите, что O — центр вневписанной окружности треугольника KLM.