АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ

С ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ [1]

А. Скопенков [2]

Abstract. This book is purely expositional and is in Russian. It is shown how in the course of solution of interesting geometric problems (close to applications) naturally appear main notions of algebraic topology (homology groups, obstructions and invariants, characteristic classes). Thus main ideas of algebraic topology are presented with minimum technicalities. Familiarity of a reader with basic notions of topology (such as 2-dimensional manifolds and vector fields) is desirable, although definitions are given at the beginning. The book is accessible to undergraduates and could also be an interesting easy reading for mature mathematicians.

Посвящается памяти Юрия Петровича Соловьева

[1]Издательство МЦНМО, Москва, в печати. Выложено на http://arxiv.org с разрешения издательства. До доработки рисунков, которую сделает издательство, обновляемая версия поддерживается на http://www.mccme.ru//circles/oim/obstruct.pdf, а после будет поддерживаться на http://arxiv.org/abs/0808.1395.

[2]Инфо: http://www.mccme.ru/~ skopenko Частично поддержан Российским Фондом Фундаментальных Исследований, Гранты номер 07-01-00648a и 06-01-72551-NCNILa, Грантом Президента РФ МД-4729.2007.1, стипендией П. Делиня, основанной на его Премии Бальзана 2004 года, а также грантами фонда Саймонса 2011 и 2012 гг.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Зачем эта книга. — Содержание и используемый материал. — Для знатоков. — Благодарности.

ГЛАВА 1. Графы и маломерные многообразия.

§1. Основные понятия теории графов. Определение графа. — Основные понятия теории графов. — Изоморфность и гомеоморфность графов.

§2. Диски с ленточками. Наглядные задачи. — Реализуемость иероглифов на плоскости. — Топологическая эквивалентность дисков с ленточками. — Реализуемость иероглифов на двумерных многообразиях.

§3. Утолщения графов. Определения и примеры утолщений. — Реализуемость утолщений. — Ориентируемость и классификация утолщений.

§4. Двумерные и трехмерные многообразия. Определение и примеры двумерных многообразий. — Классификация двумерных многообразий. — Приложение: другое определение двумерных многообразий. — Определение трехмерных многообразий (набросок).

ГЛАВА 2. Ориентируемость.

§5. Ориентируемость 2-многообразий.

§6. Форма пересечений.

§7. Инволюции. Примеры инволюций. — Классификация инволюций. — Другое доказательство теоремы классификации инволюций.

ГЛАВА 3. Векторные поля и их наборы.

§8. Векторные поля на двумерных многообразиях. Векторные поля на подмножествах плоскости. Определения, примеры и основные результаты. — Касательные векторные поля: общее положение. — Касательные векторные поля: триангуляции. — Нормальные векторные поля.

§9. Векторные поля на многомерных многообразиях. Основные результаты. — Построение гомотопического инварианта векторных полей.

§10. Классификация сечений и интегрируемые системы. Классификация сечений и зейфертовых сечений. — Применение к интегрируемым гамильтоновым системам.

§11. Наборы векторных полей. Введение. — Трехмерные примеры. — Характеристические классы для 3-многообразий. — Характеристические классы для 4-многообразий. — Характеристические классы для n-многообразий. — Наборы нормальных векторных полей.

§12. Расслоения и их применения. Простейшие расслоения. — Векторные расслоения. — Степени двойки и классы Штифеля-Уитни (набросок). — Классификация расслоений.

ГЛАВА 4. Гомологии многообразий.

§13. Простейшие методы вычисления гомологий (набросок). Определения. — Вычисление по определению. — Гомологии пары. Вырезание. — Точные последовательности.

§14. Двойственность Пуанкаре. Простая часть. — Сложная часть по модулю 2. — Сложная часть с целыми коэффициентами (набросок). — Реализация циклов подмногообразиями (набросок).

§15. Двойственность Александера-Понтрягина. Коэффициент зацепления. — Двойственность Александера-Понтрягина. — Применения двойственности Александера.

§16. Препятствия к кобордантности. Нестандартные гомотопические сферы. — Препятствия к кобордантности. — Числа Штифеля-Уитни.— Сигнатура и числа Понтрягина (набросок). Перестройки и классификация гомотопических сфер.

§17. Вложения и заузливания (приложение).

Введение: проблемы вложимости и заузливания. — Общее положение. — Препятствие Уитни к вложимости. Идея дополнения. — Инвариант дополнения для узлов в коразмерности 1 и 2. — Общий инвариант дополнения. — Общий инвариант окрестности. — Комбинация инвариантов дополнения и окрестности.

ГЛАВА 5. Гомотопическая классификация отображений.

§18. Теорема Хопфа. Определения и исторические замечания. — Основная теорема топологии (набросок). — Фундаментальная группа и накрытия (набросок). — Отображения графа в окружность. — Отображения 2-многообразия в окружность. — Отображения графа в проективное пространство. — Эквивариантные отображения графа. — Отображения полиэдра в сферу той же размерности.

§19. Обобщения теоремы Хопфа (набросок). Отображения трехмерного полиэдра в двумерную сферу. — Отображения полиэдра в сферу меньшей размерности. — Отображения в пространства Эйленберга-Маклейна.

1 Введение

Nothing was changed, but now it made sense.
U. K. Le Guin, The Beginning Place. [3]

Зачем эта книга.

Алгебраическая топология является фундаментальной частью математики и имеет применения за ее пределами. Как и для любой фундаментальной части науки, ее основные мотивировки и идеи можно доступно изложить человеку, не имеющему глубоких специальных познаний. Такому изложению посвящена настоящая книга (вместе с [ST04], [BE82], [Fo92], [Pr95], [An03] и, возможно, другими книгами). Ее особенность — возможности познакомиться с этими мотивировками и идеями при сведении к необходимому минимуму *языка*. Демонстрируя основные идеи на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, я надеюсь сделать алгебраическую топологию более доступной неспециалистам (в первую очередь студентам).

Процесс появления полезных алгебраических понятий продемонстрирован на примере наиболее наглядных топологических задач (о вложениях графов в плоскость, о построении и классификации векторных полей, погружений и вложений, о гомотопической классификации непрерывных отображений). [4] Такое изложение является не нововведением, а, напротив, возвращением к подходу первооткрывателей (которое, впрочем, автору обычно приходилось сначала переоткрывать и лишь потом убеждаться, что классики рассуждали так же). Такое изложение было обычным в 'добурбакистский' период [ST04], [CL95]. Изложение 'от простого к сложному' и в форме, близкой к форме рождения материала, продолжает устную традицию, восходящую к Лао Цзы и Платону, положенную Гегелем в основу изложения философии, а в современном преподавании математики представленную, например, книгами Пойа и журналом 'Квант'.

Вслед за классиками, я ориентируюсь на объекты, которые основательнее всего укореняются в памяти (или подсознании). Это — отнюдь не системы аксиом и не формально-логические схемы доказательств, а естественные построения для решения интересных проблем или изящные доказательства красивых теорем, формулировки которых ясны и доступны. Более того, именно по таким построениям и доказательствам, при наличии некоторой математической культуры, читатель сможет восстановить более абстрактный теоретический материал.

Алгебраическая топология основана на следующей простой идее, часто встречающейся при решении школьных (в частности олимпиадных) задач: *невозможность* проделать некоторую конструкцию можно доказывать путем построения алгебраического *препятствия* (или *инварианта*) — например, из соображений четности. Точно так же *неэквивалентность* конструкций часто доказывается путем построения алгебраического *инварианта*, их различающего (этот инвариант является *препятствием* к эквивалентности). Многие непохожие друг на друга задачи топологии аналогичным образом естественно приводят к похожим друг на друга *препятствиям*. Именно ветви алгебраической топологии, непосредственно связанной с *теорией гомологий* и *теорией препятствий*, посвящена настоящая книга.

Изложение алгебраической топологии, начинающееся с длительного освоения немотивированных абстрактных понятий и теорий делает малодоступными ее замечательные применения. Приведу лишь один пример из многих. Еще в 19 веке был придуман очень простой, наглядный и полезный инвариант многообразий — форма пересечений (умножение в гомологиях многообразий). Замечательным открытием Колмогорова и Александера 1930-х годов явилось обобщение этого инварианта на произвольные полиэдры (умножение в когомологиях). Умножение Колмогорова-Александера менее наглядно и определяется более громоздко, чем форма пересечений (но зато имеет более продвинутые применения). Определение формы пересечений через умножение Колмогорова-Александера делает малодоступными ее замечательные применения (для получения которых не требуется умножения Колмогорова-Александера). Поэтому форму пересечений иногда просто переоткрывают [Mo89].

Надеюсь, принятый стиль изложения не только сделает материал более доступным, но позволит сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус с тем, чтобы разумно выбирать проблемы для исследования, а также ясно из-

[3] *Ничего не изменилось, но теперь все было понятно. У. К. Ле Гуин, Изначальное место (пер. автора).*

[4] Замечу, что важнейшие геометрические проблемы, ради которых была создана алгебраическая топология, в свою очередь были мотивированы предыдущим развитием математики (прежде всего анализа и алгебры). Мотивировать эти геометрические задачи не входит в цели настоящей книги. Я либо привожу ссылки, либо аппелирую к непосредственной любознательности читателя.

лагать собственные открытия, не скрывая ошибок (или известности полученного результата) за чрезмерным формализмом. К сожалению, такое (бессознательное) сокрытие ошибок часто происходит с молодыми математиками, воспитанными на чрезмерно формальных курсах (происходило и с автором этих строк; к счастью, почти все мои ошибки исправлялись *перед* публикациями).

Чтение этой книги и решение задач потребуют от читателя усилий, однако эти усилия будут сполна оправданы тем, что вслед за великими математиками 20-го века в процессе изучения геометрических проблем читатель откроет некоторые основные понятия и теоремы алгебраической топологии. Надеюсь, это поможет читателю совершить собственные настолько же полезные открытия (не обязательно в математике)!

Содержание и используемый материал.

Книга предназначена в первую очередь для читателей, не владеющих алгебраической топологией (хотя возможно, что часть этого текста будет интересна и специалистам). Все необходимые алгебраические объекты (со страшными названиями группы гомологий, характеристические классы и т. д.) естественно возникают и строго *определяются* в процессе исследования геометрических проблем. В большей части книги знакомство с алгебраическим понятием группы не обязательно, и это слово можно воспринимать как синоним слова 'множество' (кроме тех мест, где оговорено противное).

Для чтения большой части книги достаточно геометрической интуиции и интуитивного представления о двумерных (кое-где — трехмерных) многообразиях. Для удобства читателя в главе 1 приведены определения и используемые свойства графов, двумерных и трехмерных многообразий. Заметим, что эта глава ни в коем случае не исчерпывает теории этих объектов; хотя формально она не опирается на другие источники, читателю может оказаться полезным ознакомиться с более подробным изложением ее материала [BE82], [MF90].

Совершенно не обязательно начинать изучение книги с *полного* прочтения главы 1. Действительно, большая часть главы 7 использует только графы. Трехмерные многообразия существенно используются только в последних параграфах глав 2 и 3, в параграфе 'двойственность Пуанкаре' главы 4 (для двумерных многообразий содержание этого параграфа покрывается параграфом 'форма пересечений' главы 2), в главе 5 и в отдельных местах главы 6 (которые могут быть пропущены без ущерба для понимания материала, не касающегося трехмерных многообразий). В этой книге n-мерные многообразия не определяются. Их определение легко придумать по аналогии с приведенным определением двумерных и трехмерных многообразий. Можно также в тех местах, где встречаются n-мерные многообразия, считать, что $n = 2, 3$ (впрочем, глава 5 интересна именно для $n \geqslant 4$).

Заметим, однако, что характеристические классы по-настоящему незаменимы только для многообразий размерности выше трех. Поэтому наше изложение материала о векторных полях на *двумерных* многообразиях в главе 3 менее наглядно и более абстрактно, чем изложение в [BE82], [Pr95]. Достоинство нашего изложения в том, что оно дает более непосредственное представление об общих методах, применимых к *многомерным* многообразиям.

Главы 2, 3, 6 и 7 практически независимы друг от друга (впрочем, в главе 3 рассматриваются примеры, аналогичные главе 2, но в среднем более сложные). Начинать изучение книги можно с любой из них (при необходимости предварительно ознакомившись с необходимыми понятиями по главе 1). При этом сложность материала (и количество используемых понятий) внутри каждой главы растет. Поэтому вполне разумно переходить к новой главе, отложив на потом изучение конца старой. Более того, разобрав по главам 2, 3, 6 или 7 несколько примеров, мотивирующих понятие групп гомологий, можно ознакомиться с абстрактным изложением этого понятия в главе 4. После этого разумно возвращаться к отложенному материалу. Формально глава 4 не зависит от предыдущих глав. Но в ней нет ответа на вопрос 'зачем', важного для начала изучения любой теории.

Наиболее блистательные применения некоторой теории — теоремы, в формулировках которых *нет* понятий из этой теории (но при доказательства которых без данной теории не обойтись). Такие применения есть и у алгебраической топологии (в частности, теории гомологий). Для удобства читателя такие теоремы выделены жирным шрифтом в тексте, в главе 3 собраны в начале параграфов, а в главе 5 собраны в начале главы.

Доказательства этих теорем разбиваются на два шага. Первый и обычно более простой шаг — получение необходимого условия на языке теории препятствий — приводится в этой книге. Второй и более сложный шаг — вычисление появляющихся препятствий — приводится лишь в виде наброска, цикла задач или просто ссылки (поскольку, по мнению автора, второй шаг лучше описан в литературе, чем первый). Замечу, что для большинства простейших геометрических

проблем очевидно, что полученное необходимое алгебраическое условие является достаточным. А вот для более сложных геометрических проблем, которые здесь не приводятся (например, о классификации многообразий или вложений), наиболее трудно именно доказать *достаточность* полученного алгебраического условия.

Бóльшая часть материала сформулирована в виде задач, обозначаемых жирными числами. Следует подчеркнуть, что многие задачи не используются в остальном тексте. Красивые наглядные задачи, для решения которых не нужно никаких знаний, приведены уже в самом начале. Для понимания и решения большинства задач достаточно знакомства с настоящим текстом (точнее, его части, предшествующей формулировке задачи). Если используемые в условии термины не определены в этом тексте и вам незнакомы, то соответствующую задачу следует просто игнорировать. Отметим, что для решения задач достаточно понимания их формулировок и *не требуется* никаких дополнительных понятий и теорий (кроме, быть может, задач со звездочками).

Приводимые задачи являются примерами интересных и полезных фактов, и читателю будет полезно ознакомиться с самими фактами, даже если он не сможет их самостоятельно доказать. Например, в некоторых задачах изложен план доказательства теорем, который полезно понимать, даже если детали этого плана останутся недоступными. Поэтому приводимые формулировки задач могут быть путеводителем по другим учебникам по алгебраической топологии, позволяя намечать интересные конечные цели и отбрасывать материал, не являющийся для этих целей необходимым. Впрочем, полезнее всего было бы обсуждать со специалистом как ваши решения задач, так и возникающие при решении трудности.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение требуется доказать.

Через $|AB|$ или $|A, B|$ обозначается расстояние между точками A и B (из контекста ясно, в каком пространстве).

Для знатоков.

В главе 3 приводится набросок простого доказательства теоремы Штифеля о параллелизуемости ориентируемых трехмерных многообразий (изложение несколько упрощено по сравнению с [Ki89]). Нестандартным (хотя и несложным) является материал глав 7 и 8, параграфов 'утолщения графов', 'трехмерные утолщения двумерных полиэдров', 'классификация векторных полей и сечений' и 'вложимость и погружаемость многообразий'. По возможности приводятся ссылки на книги и обзоры, а не на оригинальные статьи.

Стандартная терминология теории препятствий не используется там, где (по мнению автора) она неудобна для начинающего. Приведем здесь сравнение обычной терминологии и принятой в книге. *Расстановки элементов группы G на i-симплексах триангуляции T* — то же, что *i-мерные цепи на T с коэффициентами в G*. Группа таких расстановок обычно обозначается $C_i(T; G)$. Множество $\partial C_{i+1}(T; G)$ всех границ образует подгруппу группы $C_i(K; G)$, обозначаемую $B_i(T; G)$. Когда $G = \mathbb{Z}_2$, мы пропускаем коэффициенты в обозначениях цепей, циклов, границ и гомологий.

Кроме того, в этой книге (кроме глав 6 и 7) препятствия лежат в группах *гомологий*, а не в группах *когомологий* (изоморфных группам гомологий для многообразий). Именно эта точка зрения (двойственная принятой в учебниках, но обычная для первооткрывателей) позволяет *наглядно изображать* препятствия.

В главах 1, 2 и 7 мы работаем с многообразиями в кусочно-линейной категории, а в главах 3 и 5 — в гладкой.

Благодарности.

Благодарю А. Н. Дранишникова, Д. Б. Фукса, А. Т. Фоменко и Е. В. Щепина: я учился алгебраической топологии по книге [FF89] и на семинаре Дранишникова-Щепина в Математическом институте Российской академии наук.

Настоящая книга основана на лекциях, прочитанных автором на мехмате Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, в Независимом московском университете, в Летней школе 'Современная математика', а также в Кировской и Петербургской летних математических школах в 1994-2012 гг. (Материал статей [RS00], [RS02] содержится в настоящей книге в существенно доработанном и расширенном виде.) Я признателен М. Н. Вялому, А. А. Заславскому, С. К. Ландо, В. В. Прасолову, В. В. Шувалову, а также всем слушателям этих лекций за черновые записки лекций и многочисленные обсуждения, способствовавшие улучшению изложения.

Эта книга посвящена памяти Юрия Петровича Соловьева — замечательного математика, считавшего очень важным изложение математики на конкретном, доступном (и в то же время строгом) языке, в отличие от 'птичьего' языка излишней абстракции.

Основные понятия теории графов

Вероятно, вводимые здесь понятия знакомы читателю, но мы приводим четкие определения, чтобы фиксировать терминологию (которая бывает другой в других книгах). В бóльшей части книги используется только начало этого пункта поэтому остаток можно пропустить и возвращаться к нему по мере необходимости.

Графом (без петель и кратных ребер) называется конечное множество, некоторые двухэлементные подмножества (т.е. неупорядоченные пары) которого выделены. Синоним: одномерный симплициальный комплекс (компактный). Элементы данного множества называются *вершинами*. Выделенные пары вершин называются *ребрами*. Каждое ребро соединяет различные вершины (нет петель), и любые две вершины соединены не более чем одним ребром (нет кратных ребер).

Рис. 1: Примеры графов (не все вершины отмечены!)

При работе с графами удобно пользоваться их изображениями. Вершины изображаются точками (например, на плоскости или в пространстве). Каждое ребро, соответствующее двухэлементному выделенному подмножеству, изображается ломаной (или кривой), соединяющей соответствующие точки. (Для простоты мы в основном будем рассматривать только такие рисунки, на которых ребра изображаются ломаными, а не произвольными кривыми.) На изображении ломаные могут пересекаться, но точки пересечения (кроме двух концов ребра) не являются вершинами. Важно, что граф и его изображение — не одно и то же.

Степенью вершины графа называется число выходящих из нее ребер.

Путем в графе называется конечная последовательность вершин, в которой любые две соседние вершины соединены ребром. *Циклом* называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем.

Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит несамопересекающихся циклов. Ясно, что в любом связном графе существует дерево, содержащее все его вершины. Такое дерево называется *максимальным деревом*.

Вершина графа называется *висячей*, если из нее выходит ровно одно ребро (т. е. если она имеет степень один). Ребро графа называется *висячим*, если одна из его концевых вершин висячая.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, граф G называется *подграфом* графа H, если каждая вершина графа G является вершиной графа H, и каждое ребро графа G является ребром графа H. При этом две вершины графа G, соединенные ребром в графе H, не обязательно соединены ребром в графе G.

Количества вершин, ребер и компонент связности графа обозначаются V, E и C, соответственно.

Графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f множества V_1 вершин графа G_1 на множество V_2 вершин графа G_2, удовлетворяющее условию: *вершины $A, B \in V_1$ соединены ребром в том и только в том случае, если вершины $f(A), f(B) \in V_2$ соединены ребром.*

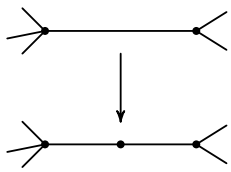


Рис. 2: Подразделение ребра

Операция *подразделения ребра* графа показана на рис. 2. Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним. Это эквивалентно существованию графа, который можно получить из каждого из данных графов операциями подразделения ребра.

Одномерным полиэдром (компактным) (или *графом в топологическом смысле*) называется класс эквивалентности некоторого графа по отношению гомеоморфности. (Заметим, что одномерные полиэдры часто называют графами, опуская слова 'в топологическом смысле'). Будем сокращенно нызывать одномерный полиэдр *1-полиэдром*. Представляющий граф называется *триангуляцией* соответствующего 1-полиэдра.

Например, через S^1 обозначается граф, гомеоморфный циклу (или соответствующий 1-полиэдр).

При работе с 1-полиэдрами мы часто будем пользоваться представляющими их графами, опуская проверку независимости от выбора представителя в классе эквивалентности.

В этом абзаце (не используемом в дальнейшем) понятия склейки, фигуры (или, научно, топологического пространства) и топологической эквивалентности (или, научно, гомеоморфности) не определяется, а считается наглядно очевидными или известными читателю. Каждому графу G соответствует *тело графа* $|G|$ — фигура, получающаяся из конечного числа отрезков отождествлением некоторых их концов в соответствии с графом G. 1-полиэдры находятся во взаимнооднозначном соответствии с фигурами, топологически эквивалентными телу некоторого графа. Можно доказать следующий критерий: *фигуры* $|G_1|$ *и* $|G_2|$ *топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда графы* G_1 *и* G_2 *гомеоморфны.*

Для тополога 1-полиэдры интересны именно как фигуры, а не как классы эквивалентности графов; графы же средства изучения и хранения в компьютере 1-полиэдров. А вот дискретному геометру и комбинаторщику интересны в первую очередь графы, но оказываются полезными и 1-полиэдры.

Wissen war ein bisschen Schaum, der über eine Woge tanzt.
Jeder Wind konnte ihn wegblasen, aber die Woge blieb.
E. M. Remarque, Die Nacht von Lissabon. [5]

2 Диски с ленточками

Здесь появляются поверхности, заданные различным образом (например, как сферы с ручками или диски с ленточками). Не используя даже понятия графа (все места, где оно упоминается, можно опустить), мы покажем основную идею теоремы классификации поверхностей из §4.

Формально, материал этого параграфа почти не используется в дальнейшем, а те места, где используется, можно опустить. При этом знакомство с третьим его пунктом все-таки желательно.

Наглядные задачи.

Листом Мебиуса называется фигура, полученная из прямоугольной полоски склейкой ее двух противоположных сторон 'с переворотом', рис. 3, 4. *Тором* называется фигура, полученная из прямоугольной полоски склейкой ее пар противоположных сторон 'без переворота', рис. 3, 4.

Рис. 3: Склейки прямоугольной полоски, дающие лист Мебиуса и тор

Эти (и другие) фигуры предполагаются *прозрачными*, т.е. точка (или подмножество), 'лежащая на одной стороне поверхности', 'лежит и на другой стороне'. Это аналогично тому, что при изучении геометрии мы говорим, например, о треугольнике на плоскости, а не о треугольнике на верхней (или нижней) стороне плоскости.

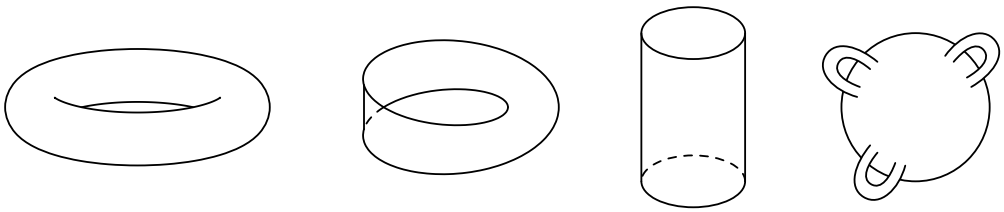


Рис. 4: Тор, лист Мебиуса, цилиндр и сфера с ручками

2.1. Можно ли нарисовать без самопересечений графы K_5 и $K_{3,3}$ (рис. 5)
(a) на торе? (b) на листе Мебиуса?
(c) на сфере? (d) на боковой поверхности цилиндра (т.е. в кольце)?

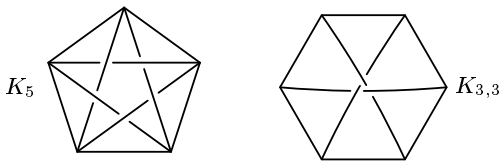


Рис. 5: Графы Куратовского

Сферой с n ручками называется фигура, полученная из криволинейной сферы вырезанием $2n$ дисков и последующей заклейкой n пар краевых окружностей этих дисков криволинейными цилиндрами см. рис. 4 для $n = 3$.

Книжкой с n листами называется фигура, полученная из n прямоугольных полосок склейкой одного отрезка от каждой полоски, см. рис. 6 для $n = 3$.

[5] Знание здесь — только пена, пляшущая на волне. Одно дуновение ветра — и пены нет. А волна есть и будет всегда. Э. М. Ремарк, Ночь в Лиссабоне (Пер. Ю. Плашевского).

Рис. 6: Книжка с тремя листами: добавить, используя рис. 40 слева!

2.2. Любой граф можно нарисовать без самопересечений
(a) в пространстве.
(b) на сфере с некоторым количеством ручек, зависящим от графа.
(c) в книжке с некоторым количеством листов, зависящим от графа.
(d) в книжке с тремя листами (рис. 6).

Бутылкой Клейна называется фигура, полученная из прямоугольной полоски такой склейкой ее пар противоположных сторон, при которой одна пара склеивается 'без переворота', а другая 'с переворотом'. рис. 3.

Рис. 7: Бутылка Клейна: склейка прямоугольной полоски и изображение в $\mathbb{R}^3$

Сферой с дыркой называется сфера, из которой вырезан двумерный диск (точнее, его внутренность). Аналогично определяются тор с дыркой, лист Мебиуса с дыркой, бутылка Клейна с дыркой, сфера с n дырками и т.д.

2.3. Вырежьте из книжки с тремя листами (рис. 6)
(a) лист Мебиуса.
(b) тор с дыркой.
(c) сферу с двумя ручками и одной дыркой.
(d) бутылку Клейна с дыркой.

2.4. (a) Разрежьте бутылку Клейна (рис. 7) на два листа Мебиуса.
(b) Разрежьте бутылку Клейна так, чтобы получился (один) лист Мебиуса.
(c) Можно ли из листа Мебиуса вырезать непересекающиеся кольцо и лист Мебиуса?
(d)* Можно ли из листа Мебиуса вырезать два непересекающиеся листа Мебиуса? (Вряд ли у Вас получится решить эту задачу без изучения следующего параграфа.)

2.5. (a) Как на двух гвоздях, вбитых в плоскую стену, подвесить замкнутую веревку (с тяжелой медалью), чтобы веревка не падала, но после вынимания любого гвоздя падала?
(b) Как зацепить три резиновых кольца в пространстве, чтобы их нельзя было расцепить, но после разрезания любого из них они расцеплялись?

Реализуемость иероглифов на плоскости.

2.6. Улицы города (с двусторонним движением) идут либо с севера на юг, либо с запада на восток.
(a) Из одного перекрестка выехало два велосипедиста: первый на север, второй на восток. Оба они приехали на этот же перекресток: первый с юга, второй с запада. Докажите, что один из велосипедистов пересекал следы другого.
(b) Из одного перекрестка выехало три велосипедиста: первый на север, второй на восток и третий на запад. Все они приехали на другой перекресток: первый с севера, второй с востока и третий с запада. Докажите, что один из велосипедистов пересекал следы другого.

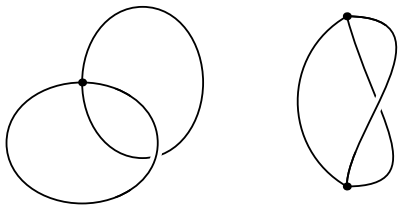


Рис. 8: Иероглифы $(abab)$, $(abacbc)$ и $(abcabc)$ (изменить!)

При решении этой задачи можно использовать без доказательства следующий факт.

Теорема Жордана. *Замкнутая несамопересекающаяся кривая на плоскости делит плоскость ровно на две части. Две точки плоскости, не принадлежащие кривой, лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить ломаной, не пересекающей кривой.*

Будем рассматривать слова длины $2n$ из n букв, в которых каждая буква встречается два раза. *Упрощенным иероглифом* называется такое слово с точностью до переименования букв, циклического сдвига и симметрии.

Эквивалентно, *упрощенным иероглифом* называется семейство (занумерованных) петель с общей вершиной, для которого указан *неориентированный* циклический порядок выходящих из вершины отрезков (отрезки, отвечающие одной петле, занумерованы номером этой петли).

Эквивалентно, *упрощенным иероглифом* называется фигура из $2n$ отрезков с общей вершиной на плоскости ('плоская звезда с $2n$ лучами'), отрезки которой пересекаются друг с другом только по общей вершине и произвольным образом разбиты на (занумерованные) пары.

В этом и следующем пунктах упрощенные иероглифы называются просто *иероглифами*

Иероглифы изображаются рисунками типа рис. 8 или рис. 11. При этом циклический порядок задается обходом выходящих из вершины отрезков вокруг вершины.

Иероглиф называется *реализуемым на плоскости*, если можно соединить ребра каждой пары ломаной так, чтобы не было пересечений. Или, эквивалентно, если его петли можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, чтобы при обходе по плоскости вокруг вершины выходящие из нее отрезки проходились бы в соответствии с указанным циклическим порядком.

Например, иероглиф $(abab)$ (рис. 8) не реализуем на плоскости (ср. с задачей 2.6a).

2.7. Иероглиф G реализуем на плоскости тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух следующих эквивалентных условий:

G не содержит иероглифа $(abab)$.

граф петель иероглифа G является объединением изолированных вершин.

Понятие 'содержит' для иероглифов определите самостоятельно.

Графом петель иероглифа называется граф, вершинами которого являются петли иероглифа; две вершины соединены ребром, если соответствующие две петли образуют иероглиф с рис. 8 слева (т.е. 'скрещиваются').

Топологическая эквивалентность дисков с ленточками.

Пусть имеется слово длины $2n$ из n букв, в котором каждая буква встречается дважды. Возьмем двумерный диск (например, выпуклый многоугольник на плоскости). На граничной окружности диска 'напишем это слово', т.е. отметим непересекающиеся отрезки, отвечающие буквам данного слова, в том порядке, в котором буквы идут в слове. Ориентируем эту граничную окружность. Для каждой буквы соединим (не обязательно в плоскости) соответствующие ей два отрезка ленточкой-прямоугольником (так, чтобы разные ленточки не пересекались). При этом стрелки на окружности должны быть *противонаправлены* вдоль ленточки. *Утолщением* данного слова (или диском с n неперекрученными ленточками) называется двумерная фигура, являющаяся объединением построенных диска и ленточек.

Рис. 9: Стрелки, противонаправленные вдоль ленточки

Например, утолщение слова $(abab)$ на рис. 8 слева имеет одну *краевую (граничную) окружность*. Оно 'гомеоморфно' тору с дыркой (рис.10).

Рис. 10: Тор с дыркой, Pr95, 1.8, naoborot

В этом параграфе понятия *фигуры* и *гомеоморфности* (топологической эквивалентности) не определяются строго, а считаются наглядно очевидными. Они соответствуют понятиям 2-многообразия и гомеоморфности, строго определенным в §4. Для 'доказательства' гомеоморфности в этом параграфе нужно нарисовать цепочку картинок, аналогичную рис. 10. Например, сфера с одной ручкой гомеоморфна тору.

2.8. (a) Сколько краевых окружностей может быть у диска с двумя неперекрученными ленточками?

(b) Сколько краевых окружностей у утолщений слов $(abcabc)$ и $(abacbc)$ на рис. 8?

(c) По слову длины $2n$ из n букв, в котором каждая буква встречается дважды, постройте граф, число компонент связности которого равно числу краевых окружностей диска с неперекрученными ленточками. (Значит, это число можно находить на компьютере, не рисуя рисунка.)

2.9. (ab) Утолщения слов $(abcabc)$ и $(abacbc)$ на рис. 8 гомеоморфны тору с двумя дырками.

(cde) Утолщения слов $(ababcdcd), (abcdabcd), \ldots$ на рис. 11 гомеоморфны сфере с двумя ручками и одной дыркой.

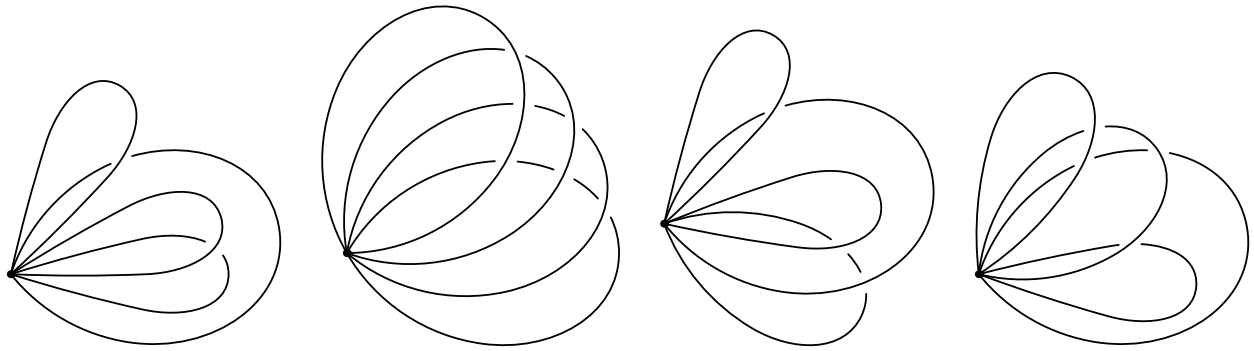


Рис. 11: Иероглифы, не реализуемые на торе (уменьшить и переделать!)

2.10. Формула Эйлера. Диск с n неперекрученными ленточками (т.е. утолщение слова с n буквами), имеющий F краевых окружностей, гомеоморфен сфере с $(n+1-F)/2$ ручками и F дырками.

Пусть имеется слово из букв $1, 2, \ldots, n$, в котором каждая буква встречается дважды, и отображение $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$. Возьмем двумерный диск. На граничной окружности диска 'напишем это слово'. Ориентируем эту граничную окружность. Для каждой буквы соединим (не обязательно в плоскости) соответствующие ей два отрезка ленточкой-прямоугольником (так, чтобы разные ленточки не пересекались). При этом стрелки на окружности должны быть *противонаправлены* вдоль ленточки, если букве этой ленточки соответствует 0, и *сонаправлены* вдоль ленточки, если букве этой ленточки соответствует 1. *Утолщением* данного слова с данным соответствием (или диском с n ленточками) называется двумерная фигура, являющаяся объединением построенных диска и ленточек.

2.11. (a) Утолщение слова $(aabb)$ с соответствием $f(a) = f(b) = 1$ (т.е. диск с двумя 'перекрученными' 'отделенными' ленточками) имеет одну краевую окружность и гомеоморфно бутылке Клейна (рис. 7) с дыркой.

(b) Сколько краевых окружностей может быть у диска с двумя ленточками?

(c) Чему может быть гомеоморфен диск с двумя ленточками?

Рис. 12: Ручка и вывернутая ручка

2.12. (a) Лист Мебиуса с ручкой гомеоморфен листу Мебиуса с вывернутой ручкой (рис. 12).

(b) **Формула Эйлера.** Диск с n ленточками, среди которых есть перекрученная (т.е. утолщение слова с n буквами и ненулевым соответствием), имеющий F краевых окружностей (рис. 13 слева), гомеоморфен диску с $n+1-F$ листами Мебиуса и $F-1$ дыркой (рис. 13 справа).

Рис. 13: Диск с ленточками и диск с листами Мебиуса

2.13. * **Формула Мохара.** Пусть имеется слово из n букв $1, 2, \ldots, n$, в котором каждая буква встречается дважды. Построим матрицу $n \times n$ следующим образом. Если $i \neq j$ и буквы i и j в слове чередуются (т.е. идут в порядке $ijij$, а не $ijji$; соответствующие две ленточки 'перекрещиваются'), то в клетке $i \times j$ поставим единицу.

(a) В остальных клетках поставим нули. Обозначим через b ранг над $\mathbb{Z}_2$ полученной матрицы. Тогда b четно и соответствующий диск с ленточками гомеоморфен сфере с $b/2$ ручками и некоторым количеством дырок.

(b) Пусть имеется отображение $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$. Поставим на диагональной клетке $i \times i$ матрицы число $f(i)$. В остальных клетках поставим нули. Обозначим через b ранг над $\mathbb{Z}_2$ полученной матрицы. Тогда соответствующий диск с ленточками гомеоморфен диску с b листами Мебиуса и некоторым количеством дырок.

Реализуемость иероглифов на двумерных многообразиях.

Иероглиф называется *реализуемым на торе*, если на торе можно соединить ломаной отрезки каждой пары в звезде так, чтобы не было пересечений. Или, эквивалентно, если его петли можно изобразить без самопересечений на торе так, чтобы при обходе по тору вокруг вершины выходящие из нее отрезки проходились бы в соответствии с указанным циклическим порядком.

Например, в задаче 2.9.ab (и перед ней) доказано, что иероглифы $(abab)$, $(abcabc)$ и $(abacbc)$ на рис. 8 реализуемы на торе.

2.14. Иероглифы на рис. 11 не реализуемы на торе.

Для знакомства с основами топологии полезно придумать решение этой задачи с использованием следующего 'факта'.

Сферы с разным числом ручек не гомеоморфны друг другу.

Этот 'факт' становится неочевидным после доказательства гомеоморфности фигур, кажущихся совсем разными (задачи 2.10, 2.12). Он доказан в §4 и будет использоваться в этом пункте без доказательства.

2.15. Выведите из приведенного факта, что

(a) тор с дыркой невозможно вырезать из сферы.

(b) сферу с двумя ручками и одной дыркой невозможно вырезать из тора.

2.16. [Cu81], [KPS]. Следующие условия на иероглиф G эквивалентны

(1) G реализуем на торе.

(2) G не содержит ни одного иероглифа с рис. 11.

(3) граф петель иероглифа G является объединением изолированных вершин и полного трехдольного графа $K_{p,q,r}$.

(4) G редуцируется до одного из иероглифов () (так обозначается иероглиф без петель), $(abcabc)$ или $(abab)$.

Редукцией (упрощенного) иероглифа называется композиция некоторого числа следующих преобразований.

(D) Удаление некоторой изолированной петли (т.е. такой петли, которая в циклическом порядке задается двумя подряд идущими буквами $(aa\ldots)$).

(R) Замена двух 'параллельных' петель a и a' (т.е. петель, соответствующие которым буквы в циклическом порядке находятся на соседних местах и не чередуются: $(aa'\ldots a'a\ldots)$) на одну.

Иероглиф называется *реализуемым на сфере с g ручками*, если на сфере с g ручками можно соединить ломаной отрезки каждой пары в звезде так, чтобы не было пересечений. Или, эквивалентно, если петли можно изобразить без самопересечений на сфере с g ручками так, чтобы при обходе по сфере с g ручками вокруг вершины выходящие из нее ребра проходились бы в соответствии с указанным циклическим порядком.

Например, по задаче 2.9 каждый из иероглифов на рис. 11 реализуем на сфере с двумя ручками.

2.17. (a) Придумайте иероглиф, не реализуемый на сфере с двумя ручками.

(b) Для каждого g придумайте иероглиф, не реализуемый на сфере с g ручками.

(c) Если иероглиф не реализуем на сфере с g ручками, а при удалении любой его петли получается иероглиф, реализуемый на сфере с g ручками, то в исходном иероглифе $2g+2$ петли.

(d)* Для каждого g опишите иероглифы, реализуемые на сфере с g ручками. Эта задача интересна даже для $g=2$. Здесь и далее возможны описания в терминах *универсальных* иероглифов (т.е. указание иероглифов $E_1,\ldots,E_s$ со следующим свойством: данный иероглиф реализуем на сфере с g ручками тогда и только тогда, когда он редуцируется до одного из иероглифов $E_1,\ldots,E_s$) или *запрещенных* подыероглифов (т.е. указание иероглифов $E_1,\ldots,E_s$ со следующим свойством: данный иероглиф реализуем на сфере с g ручками тогда и только тогда, когда он не содержит ни одного из иероглифов $E_1,\ldots,E_s$). Ср. [Cu81] [Vd95] [Vd96] [Vd97].

Реализуемость иероглифа на листе Мебиуса (рис. 4), на бутылке Кляйна (рис. 35) и на диске с листами Мебиуса (рис. 13 справа) определяется аналогично реализуемости на сфере с ручками.

2.18. (a) Иероглифы $(abab)$ (рис. 8 слева) и $(abcabc)$ (рис. 11) реализуемы на листе Мебиуса.

(b) Редукция иероглифов не обязательно сохраняет реализуемость на листе Мебиуса.

(c) Следующие условия на иероглиф равносильны:

реализуем на листе Мебиуса;

не содержит иероглифов $(ababcdcd)$ (рис. 11 слева) и $(abacbc)$ (рис. 8).

его граф петель является объединением изолированных вершин и полного графа.

2.19. * (a) Опишите иероглифы, реализуемые в бутылке Клейна.
(b) Опишите иероглифы, реализуемые в диске с m листами Мебиуса.

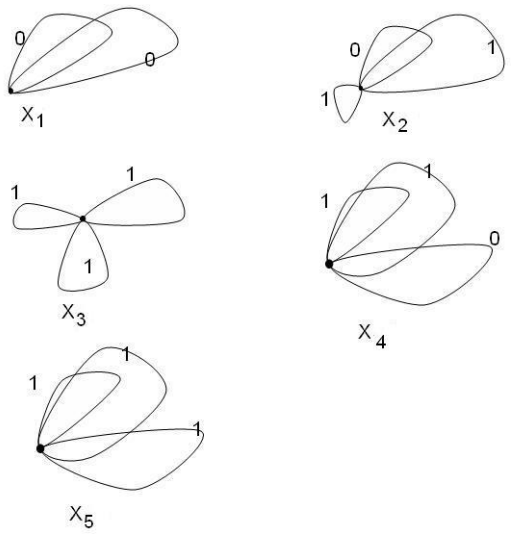


Рис. 14: Запрещенные иероглифы для бутылки Клейна

Иероглифом (не упрощенным) называется иероглиф вместе с некоторой расстановкой нулей и единиц на его петлях (рис. 14, 15).

Иероглиф называется *реализуемым* на листе Мебиуса, если его петли можно изобразить без самопересечений на листе Мебиуса так, чтобы

— при обходе по листу Мебиуса вокруг вершины выходящие из нее отрезки проходились бы в соответствии с указанным циклическим порядком, и

— вдоль петель, на которых стоит единица, менялась бы ориентация, а вдоль петель, на которых стоит ноль, не менялась бы.

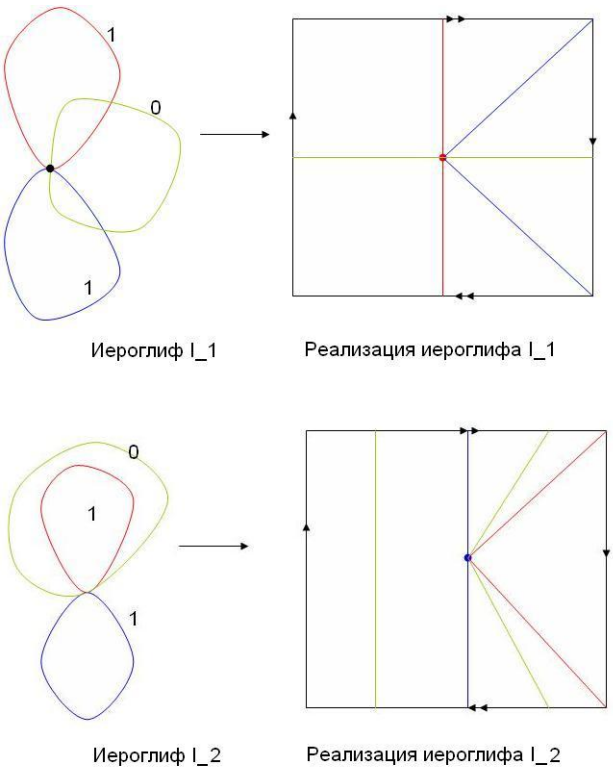


Рис. 15: Универсальные иероглифы для бутылки Клейна

Редукцией иероглифа называется композиция некоторого числа преобразований (D) и (R) для петель с нулем, а также следующего преобразования.

(R') Замена двух 'параллельных' петель a и a' с единицей (т.е. для которых в циклическом порядке буквы, соответствующие этим петлям, находятся на соседних местах и чередуются: $(aa'\ldots aa'\ldots)$) на одну.

2.20. Ср. [Cu81] (a) Следующие условия на иероглиф равносильны реализуемости на листе Мебиуса:

не содержит ни одного иероглифа с рис. 30 сверху;

редуцируется к иероглифу с одной петлей с единицей.

(b)* Следующие условия на иероглиф равносильны реализуемости на бутылке Клейна:

не содержит ни одного иероглифа с рис. 14;

редуцируется к одному из двух иероглифов с рис. 15.

(c)* Опишите иероглифы, реализуемые на диске с m листами Мебиуса.

Ответы и указания к некоторым задачам.

2.1. (a), (b). Можно. Красивые реализации графа K_5 на торе и графа $K_{3,3}$ на листе Мебиуса изображены на рис. 16.

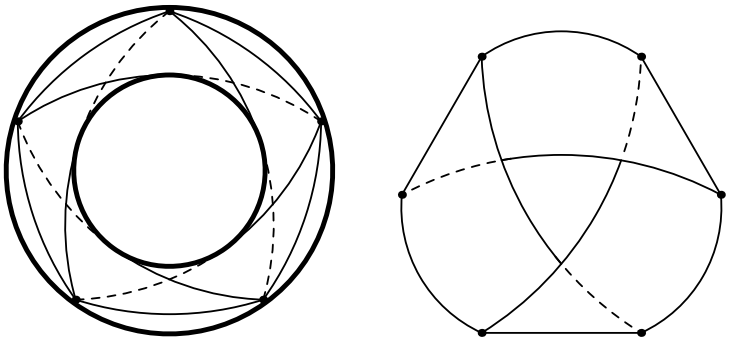


Рис. 16: Реализация графов Куратовского

(c) Нельзя. Если бы граф K_5 был нарисован на сфере без самопересечений, то выкинув из сферы точку, не являющуюся вершиной графа K_5, мы получили бы плоскость, содержащую K_5.

(d) Нельзя. Действительно, граф K_5 не планарен, а цилиндр (кольцо) можно изобразить на плоскости без самопересечений.

2.2. Нарисуем данный граф (возможно, с самопересечениями) на плоскости так, чтобы ребра не самопересекались. Если образовались точки пересечения (кроме вершин) более чем двух ребер, то подвинем некоторые ребра так, чтобы остались только двукратные точки пересечения.

(a) Поднимем одно из каждых двух пересекающихся ребер в пространство так, чтобы каждое пересечение пропало.

(b) Используйте идею решения пункта (a).

(d) Можно считать, что (двукратные) точки пересечения лежат на одной прямой. Прилепим третий лист по этой прямой. Теперь в малой окрестности каждой из точек пересечения ребер поднимем одно из ребер 'мостиком' над другим ребром на третий лист. Так все точки пересечения будут ликвидированы.

2.7. Осталось доказать часть 'тогда'. Реализуем звезду с $2n$ лучами (и их заданным циклическим порядком) вне внутренности некторого выпуклого многоугольника так, чтобы концы лучей изображались бы вершинами многоугольника. Тогда оставшиеся отрезки можно реализовать прямолинейно внутри многоугольника.

2.8. (a) 1 или 3.

Рис. 17: Иероглифы $(abcabc)$ и $(abacbc)$ на торе

2.9. (a), (b) См. рис. 17.

(a) Утолщение иероглифа на рис. 8 слева топологически эквивалентно тору с дыркой. При добавлении ленточки получается тор с двумя дырками, см. рис. 18 слева.

(d) Выберем подиероглиф с тремя петлями, рассмотренный в (a). Его утолщения является тором с двумя дырками. При добавлении четвертой петли добавляется ручка и удаляется дырка, см. рис. 18 справа.

2.10. Указание. Сначала докажите для случая, когда нет перекрученных ленточек. Если же есть две перекрученные ленточки, то остальные ленточки приклеиваются к краевой окружности получившегося тора с дыркой. Поэтому после замены тора с дыркой на диск можно применить предположение индукции.

Другое указание: см. рис. 18.

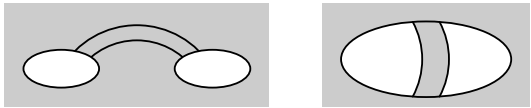


Рис. 18: Добавление неперекрученной ленточки (поправить!)

Индукция по n (аналогично задачам 2.9ab). Утолщение букета с нулем петель имеет одну краевую окружность и гомеоморфно диску. При приклеивании новой ленточки возможны два случая на рис. 18.

2.11. (b) 1, 2 или 3.

(c) Диску с 2 дырками, тору с дыркой, листу Мебиуса с дыркой или бутылке Кляйна с дыркой.

2.12. (b) Указание: аналогично формуле Эйлера для неперекрученных ленточек. Используйте (a).

Другое указание: индукция по n с использованием рис. 18, 19 и (a).

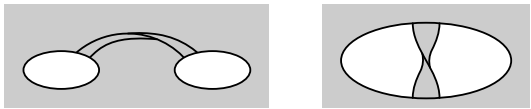


Рис. 19: Добавление перекрученной ленточки (изменить!)

2.14. Достаточно придумать граф, не реализуемый на торе, но реализуемый на утолщении каждого из этих иероглифов (можно ли взять K_8?).

Другое решение вытекает из задачи 2.15.b.

2.15. (b) Пусть из тора вырезана фигура K, являющаяся сферой с ручками и одной дыркой. Если краевая окружность фигуры *не разбивает* тор, то у K две граничные окружности — противоречие. Если краевая окружность *разбивает* тор, то при ее заклейке в K диском получается тор или сфера. Противоречие с приведенным фактом.

2.16. Доказательство разумно проводить по схеме (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

2.17. (b) $(a_1b_1a_1b_1\dots a_{g+1}b_{g+1}a_{g+1}b_{g+1})$.

3 Утолщения графов

В этом параграфе, как и в предыдущем, мы будем использовать без строгого определения понятия *фигуры* и *гомеоморфности*, а также будем использовать без доказательства следующий 'факт'.

Сферы с разным числом ручек не гомеоморфны друг другу.

См. обсуждения в предыдущем параграфе, а также строгие определения и доказательства в следующем.

3.1. (a) Гомеоморфна ли фигура на рис. 20 сфере с ручками и дырками? Если да, то чему равно их число?

(b) Пусть на сфере с g ручками нарисован без самопересечений связный граф с V вершинами и E ребрами. Назовем *гранью* замкнутую область на сфере с ручками, ограниченную ребрами этого графа. Обозначим через F число граней. Пусть каждая грань разбивается любой ломаной с концами на границе этой грани (т.е. гомеоморфна диску). Тогда $V - E + F = 2 - 2g$.

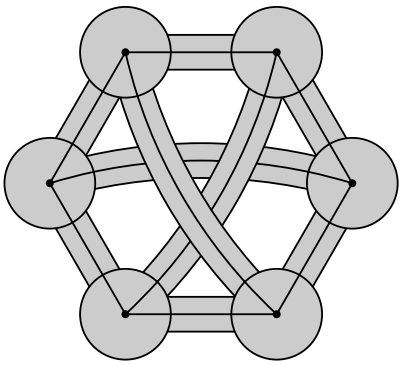


Рис. 20: Чему гомеоморфна эта фигура?

3.2. (a) K_8 не вложим в тор.

(b) Для любой сферы с ручками найдется граф, не вложимый в нее.

Определение и примеры утолщений.

Конструкция *утолщения* возникает во многих задачах топологии и ее приложений (синонимы: граф с вращениями, эскиз [Ha], [KPS], [LZ]).

Графом с петлями и кратными ребрами называется конечное множество V вместе с таким отображением $e : V \times V \to \mathbb{Z}_+$ в множество целых неотрицательных чисел, что $e(x, y) = e(y, x)$. Элементы множества V называются *вершинами*. Пара различных (или совпадающих) вершин, переходящая в число $k > 0$, называется *ребром (или петлей) кратности* k. (Ребром или петлей кратности 0 удобно называть пару, переходящую в 0.)

Полуребром графа называется половинка ребра. Петле кратности k отвечает $2k$ полуребер.

Ориентированным утолщением графа называется этот граф вместе с указанием для каждой его вершины ориентированного циклического порядка выходящих из нее полуребер. См. рис. 21.

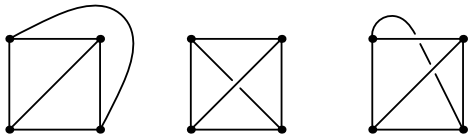


Рис. 21: Ориентированные утолщения графа K_4

Приведем эквивалентное 'определение' ориентированного утолщения. Оно сложнее тем, что двумерно (а не одномерно), но именно оно возникает в других областях математики. Кроме того, иногда с ним удобнее работать.

Для данного графа G рассмотрим несвязное объединение дисков, число которых равно числу вершин графа. На каждой граничной окружности диска выберем ориентацию и отметим непересекающиеся отрезки, отвечающие выходящим из соответствующей вершины ребрам, в указанном ориентированном циклическом порядке. Для каждого ребра графа соединим (не обязательно в плоскости) соответствующие ему два отрезка ленточкой-прямоугольником (так, чтобы разные

ленточки не пересекались), см. рис. 22. При этом стрелки на окружностях должны быть противонаправлены. Заметим, что каждый из двух способов на рис. 22 может отвечать правильному соединению дисков ленточками.

Обозначим через N объединение построенных дисков и ленточек. Пара (N, G), состоящая из N и графа G, лежащего в N, называется *(двумерным) ориентируемым утолщением* графа G. (Граф G называется *спайном*, или *утощением* фигуры N.)

Рис. 22: Соединение дисков ленточкой

Примеры ориентированных утолщений. (1) Цилиндр с его средней линией является ориентированным утолщением окружности.

(2) Если граф вложен в плоскость (или в сферу с ручками), то легко выбрать окрестность этого графа, являющуюся его ориентированным утолщением.

(3) Если дано отображение *общего положения* графа G в плоскость (или в сферу с ручками), то можно построить ориентированное утолщение графа G, соответствующее этому отображению (рис. 20, 21 23).

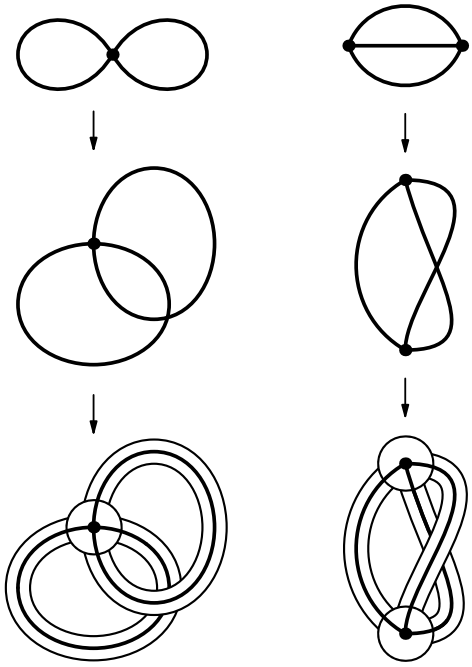


Рис. 23: Построение утолщения по отображению графа в плоскость (добавить ряд без самопересечений!)

3.3. (a) Сколько ориентированных утолщений с занумерованными вершинами у графа K_4?

(b)* То же с незанумерованными вершинами (т.е. сколько ориентированных утолщений с точностью до изоморфизма у графа K_4?).

3.4. (a) У любого ориентируемого утолщения дерева одна краевая окружность.

(b) У любого ориентируемого утолщения окружности две краевых окружности.

(c) Существует граф, имеющий два ориентируемых утолщения с разным числом краевых окружностей.

(d) Приведите комбинаторное определение числа краевых окружностей ориентированного утолщения.

3.5. (a) Объединение дисков и ленточек ориентируемого утолщения дерева можно изобразить без самопересечений на плоскости так, чтобы оно заполняло двумерный многоугольник.

(b) Объединение дисков и ленточек ориентируемого утолщения окружности можно изобразить без самопересечений на плоскости так, чтобы оно заполняло замыкание дополнения одного двумерного многоугольника до другого, в нем лежащего.

(c) Любое ориентируемое утолщение ‘восьмерки’ гомеоморфно либо диску с двумя дырками, либо тору с дыркой.

(d) Чему может быть гомеоморфно ориентируемое утолщение графа K_4?

3.6. (a) **Формула Эйлера.** Ориентируемое утолщение связного графа с V вершинами и E ребрами, имеющее F краевых окружностей, гомеоморфно сфере с $(2 - V + E - F)/2$ ручками и F дырками.

(b) Два утолщения одного графа гомеоморфны тогда и только тогда, когда у них одинаковое количество краевых окружностей.

Понятие ориентируемого подутолщения, поднаброска, подутолщения, гомеоморфности определяется аналогично случаю графов. Если L — подграф графа G, то любое утолщение N графа G содержит утолщение графа L, называемое *подутолщением* утолщения N.

3.7. *Теорема Мохара.* Пусть дано утолщение связного графа с V вершинами и E ребрами. Возьмем максимальное дерево в графе и соответствующее подутолщение (рис. 24). Это подутолщение имеет одну краевую окружность. При обходе по ней получается циклическая последовательность ребер вне максимального дерева, в которой каждое ребро встречается два раза. Занумеруем эти ребра числами от 1 до $n := E - V + 1$. Построим матрицу $n \times n$ следующим образом. Если $i \neq j$ и ребра i и j в полученной циклической последовательности чередуются (т.е. идут в порядке $ijij$, а не $ijji$), то в клетке $i \times j$ поставим единицу. В остальных клетках поставим нули. Обозначим через b ранг над $\mathbb{Z}_2$ полученной матрицы. Тогда b четно и данное ориентированное утолщение гомеоморфно сфере с $b/2$ ручками и некоторым количеством дырок.

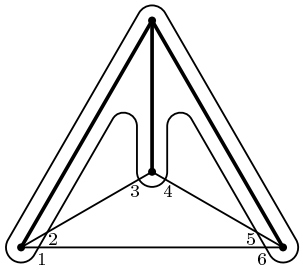


Рис. 24: Обход максимального дерева

Утолщением называется граф вместе с расстановкой нулей и единиц на его ребрах и, для каждой вершины графа, ориентированным циклическим порядком выходящих из нее полуребер.

Двумерное ‘определение’ утолщения аналогично вышеприведенному для ориентированных утолщений, только стрелки на окружностях должны быть противонаправлены, если на ребре стоит 0, и сонаправлены, если на ребре стоит 1. (При этом каждый из двух способов на рис. 22 может отвечать как ленточке с нулем, так и ленточке с единицей.)

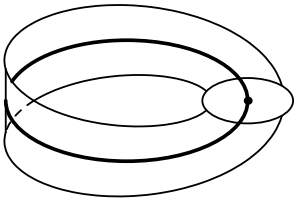


Рис. 25: Лист Мебиуса с его средней линией — утолщение окружности

Например, см. рис. 25. Из примеров (2) и (3) ориентируемых утолщений получаются примеры утолщений, если заменить сферу с ручками на объединение листов Мебиуса, любые два из которых пересекаются по отрезку их края, и любые три из которых не пересекаются.

(Заметим, что иероглифы не являются частными случаями утолщений, ибо для иероглифов два полуребра одной петли равноправны.)

3.8. Сформулируйте и докажите аналоги задач 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 и 3.7 для утолщений.

Реализуемость утолщений.

Проблема вложимости (т.е. реализуемости без самопересечений) графов или графов с дополнительной структурой в плоскость, в тор, в лист Мебиуса (и в другие поверхности) — одна из основных в топологической теории графов [MT01]. Одна из красивых форм решения этой

проблемы — найти несколько таких подграфов, что произвольный граф G вложим в данную поверхность тогда и только тогда, когда G не содержит ни одного из таких подграфов. Например, о критерии Куратовского планарности графов см. [Pr04], [Sk05], [ST07].

Ясно, что любой граф имеет конечное число ориентированных утолщений. Поэтому вопрос о вложимости графов в плоскость (или в сферу с ручками) сводится к вопросу о вложимости ориентированных утолщений в плоскость (или в сферу с ручками).

Ориентированное утолщение называется *планарным*, если его можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, чтобы для каждой вершины обход выходящих из нее полуребер по часовой стрелке совпадал бы с указанным ориентированным циклическим порядком.

3.9. Какие из ориентированных утолщений графа K_4 планарны?

Теорема планарности ориентированных утолщений. *Каждое из следующих условий на ориентированное утолщение (N, G) связного графа равносильно его планарности.*

(E) $V - E + F = 2$, где V и E — количества вершин и ребер графа, а F — число краевых окружностей в N.

(S) (N, G) не содержит ориентированных подутолщений, гомеоморфных изображенным на рис. 23.

(I) для любого максимального дерева T в G в циклической последовательности ребер вне T из задачи 3.7 никакие два ребра не чередуются.

3.10. (E,S,I) Каждое из условий (E,S,I) равносильно планарности.

(a) Дайте определение планарности утолщений. Сформулируйте и докажите аналог теоремы планарности для них.

Ориентированное утолщение называется *реализуемым на сфере с g ручками*, если его можно нарисовать без самопересечений на сфере с g ручками так, чтобы для каждой вершины обход выходящих из нее полуребер по часовой стрелке совпадал бы с указанным ориентированным циклическим порядком.

3.11. (E,I) Сформулируйте и докажите аналоги критериев (E,I) для реализуемости ориентированного утолщения на сфере с g ручками.

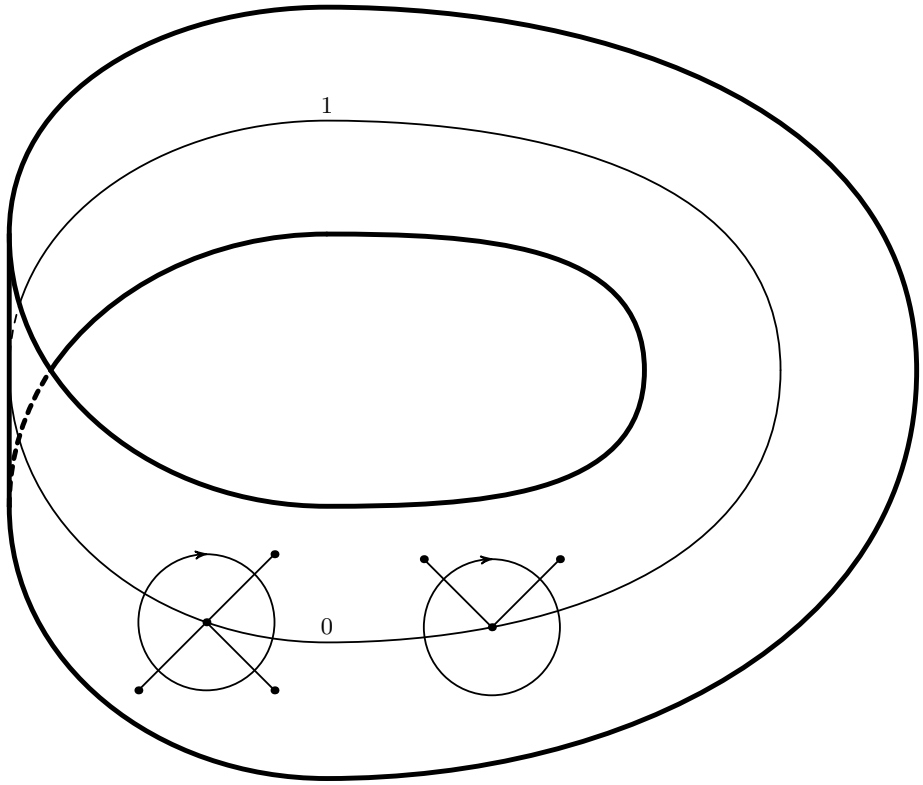


Рис. 26: Расстановка чисел на ребрах (уменьшить!)

Утолщение называется *реализуемым на диске с m листами Мебиуса*, если его можно изобразить без самопересечений на диске с m листами Мебиуса Мебиуса и окружить каждую вершину маленькой ориентированной окружностью так, чтобы

— для каждой вершины обход выходящих из нее полуребер вдоль ориентированной окружности давал бы заданный ориентированный циклический порядок.

— на ребре стоит 0 тогда и только когда, когда ориентации замкнутых кривых, построенных вокруг концов этого ребра, *согласованы вдоль этого ребра* (рис. 26).

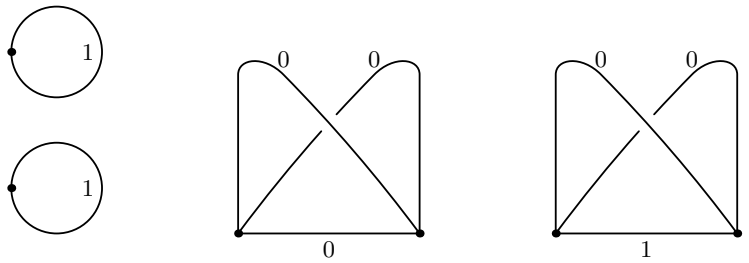


Рис. 27: Утолщения, не реализуемые на листе Мебиуса (добавить!!!)

3.12. (a) Утолщения на рис. 27 не реализуемы на листе Мебиуса.

(b) Если при удалении некоторого ребра из графа получается дерево, то любое утолщение этого графа реализуемо на листе Мебиуса.

(c) Какие утолщения графа K_4 реализуемы на листе Мебиуса?

(E,I) Сформулируйте и докажите аналоги критериев (E,I) для реализуемости утолщения на диске с m листами Мебиуса.

Остаток этого пункта посвящен аналогам критерия (S) для реализуемости.

3.13. Пусть (N, G) — ориентированное утолщение связного графа G степени 3 (т.е. из каждой вершины которого выходит 3 ребра), не реализуемое на торе, любое связное подутолщение которого реализуемо на торе.

(a) В G нет петель.

(b) В N одна краевая окружность.

(c) В G 6 вершин и 9 ребер.

(d)* Любой связный граф степени 3 с условиями (a) и (c) изоморфен одному из пяти графов на рис. 28 (достаточно даже взять 1-й, 3-й, 4-й, 6-й и 8-й) или на рис. 29.

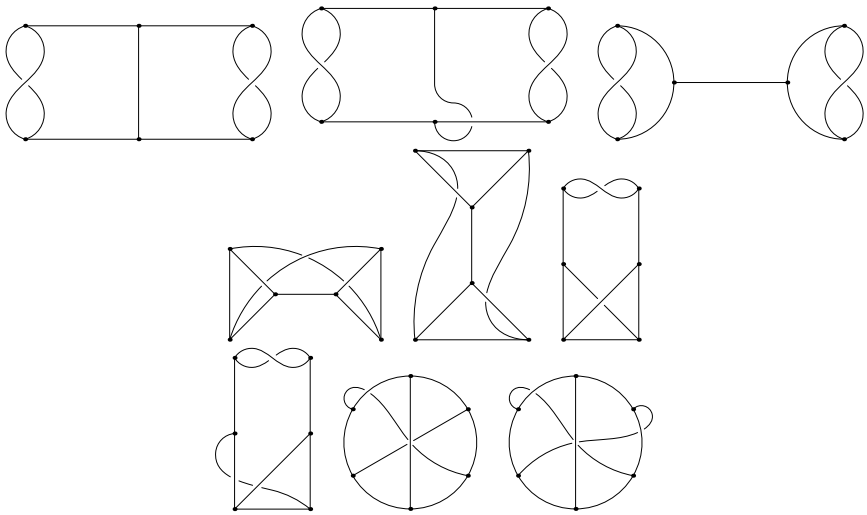


Рис. 28: Утолщения, не вложимые в тор

Рис. 29: Шестой граф

(e)* (Гипотеза) Пусть из каждой вершины связного графа выходит 3 ребра. Ориентируемое утолщение этого графа реализуемо на торе тогда и только тогда, когда оно не содержит подутолщений, изображенных на рис. 28.

3.14. Пусть (N, G) — ориентированное утолщение связного графа G степени 4, не реализуемое на торе, любое подутолщение которого реализуемо на торе.

(a) В G нет петель.

(b) Сколько в G вершин и ребер?

(c)* (Нерешенная задача) Опишите ориентируемые утолщения графов степени 4, реализуемые на торе, в терминах запрещенных подутолщений.

(d)* (Нерешенная задача) Опишите X-графы, реализуемые на торе. См. определение в *А. Скопенков, Вложения в плоскость графов с вершинами степени 4, http://arxiv.org/abs/1008.4940.*

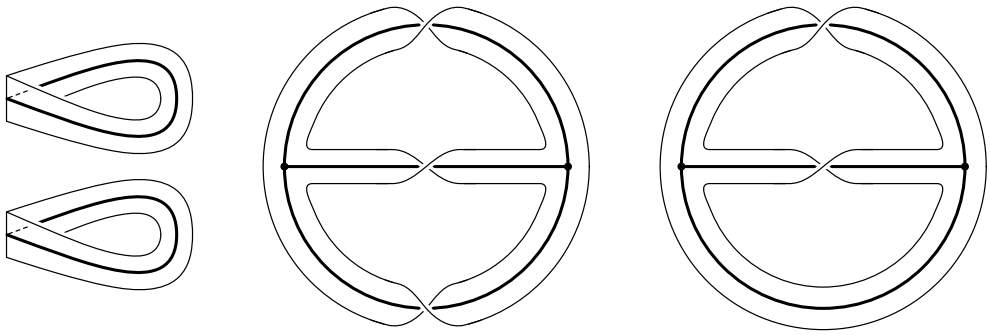


Рис. 30: Утолщения, не реализуемые на листе Мебиуса (добавить!!!)

3.15. * Определение эквивалентности дано в следующем пункте.

(a) (Гипотеза) Утолщение реализуемо на листе Мебиуса тогда и только тогда, когда оно не содержит подутолщений, эквивалентных изображенным на рис. 30 [Pe].

(b) (Гипотеза) Утолщение графа степени 3 реализуемо на бутылке Клейна тогда и только тогда, когда оно не содержит подутолщений, эквивалентных изображенным на рисунке (нарисуйте рисунок самостоятельно!).

(c) *Графом с неориентированными вращениями* называется граф, для каждой вершины которого указан неориентированный циклический порядок выходящих из нее полуребер. Сформулируйте и докажите аналоги вышеизложенных теорем и задач для графов с неориентированными вращениями. Начните с графов степени 4.

Ориентируемость и классификация утолщений.

Инвертированием в вершине для утолщения графа называется замена ориентации цикла полуребер, выходящих из этой вершины, одновременно с заменой нулей единицами, а единиц нулями на всех ребрах, выходящих из этой вершины (при этом числа на петлях не меняются).

Два наброска называются *эквивалентными*, если от одного можно перейти к другому несколькими инвертированиями (возможно, в разных вершинах).

(Заметим, что иероглиф можно рассматривать как класс эквивалентности утолщений.)

Утолщение называется *ориентируемым*, если оно эквивалентно утолщению, имеющему только нули на ребрах.

Теорема ориентируемости утолщений. *Следующие условия на утолщение (N, G) равносильны его ориентируемости:*

(M) (N, G) не содержит листа Мебиуса (т.е. подутолщения, гомеоморфного изображенному на рис. 25).

(E) В каждом несамопересекающемся цикле в графе G четное количество ребер с единицами.

(W) Первый класс Штифеля-Уитни $w_1(N, G) \in H^1(G)$ нулевой.

Критерий (W) не интересен сам по себе. Однако конструкции из его доказательства интересны как иллюстрация теории препятствий и необходимы для *классификации* утолщений (см. ниже).

Доказательство критериев (M) и (E). Ясно, что (M) эквивалентно (E), и что условие (E) необходимо для ориентируемости. Докажем его достаточность.

Рассмотрим остов T графа G. Существует утолщение, эквивалентное данному, для которого на ребрах остова T стоят нули. Возьмем несамопересекающийся цикл, образованный произвольным ребром e вне остова и некоторыми ребрами остова. В этом цикле четное количество ребер с единицами, ибо это свойство не меняется при инвертировании. Поэтому в данном утолщении на ребре e стоит ноль. Значит, данное утолщение ориентируемо. QED

Определение группы $H^1(G)$, класса $w_1(N,G)$ и доказательство критерия (W). Обозначим данное утолщение через o. Назовем соответствующую расстановку нулей и единиц на ребрах графа G *препятствующей* и обозначим ее $\omega(o)$. Если $\omega(o)=0$, то утолщение ориентируемо.

Если $\omega(o)\neq 0$, то еще не все потеряно: можно попытаться сделать инвертирования так, чтобы препятствующая расстановка стала нулевой. Выясним, как $\omega(o)$ меняется при инвертированиях. Для этого заметим, что расстановки можно складывать: для этого просто складываются числа, стоящие на каждом ребре (такое сложение называется *покомпонентным*). При инвертировании к $\omega(o)$ прибавляется расстановка единиц на ребрах, выходящих из a, и нулей на всех остальных ребрах. Эта расстановка называется *элементарной кограницей вершины a* и обозначается δa. Ясно, что если утолщения o и o' получаются друг из друга инвертированиями в вершинах $a_1,\ldots,a_k$, то

$$\omega(o)-\omega(o')=\delta a_1+\ldots+\delta a_k.$$

Назовем *кограницей* сумму элементарных кограниц нескольких вершин. Назовем расстановки ω_1 и ω_2 *когомологичными*, если $\omega_1-\omega_2$ есть кограница $\delta a_1+\ldots+\delta a_k$. Ясно, что

(i) При инвертировании препятствующая расстановка утолщения заменяется на когомологичную расстановку.

(ii) Если препятствующая расстановка утолщения является кограницей, то существует эквивалентное утолщение с нулевой препятствующей расстановкой.

(iii) Когомологичность является отношением эквивалентности на множестве всех расстановок нулей и единиц на ребрах.

Одномерной группой когомологий графа G (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) называется группа $H^1(G)$ расстановок с точностью до когомологичности.

Первым классом Штифеля-Уитни утолщения называется класс когомологичности препятствующей расстановки этого утолщения:

$$w_1(N,G)=[\omega(o)]\in H^1(G).$$

Это определение корректно ввиду утверждения (i).

Ясно, что $w_1(N,G)$ является препятствием к ориентируемости утолщения. Обратно, пусть $w_1(N,G)=0$. Значит, препятствующая расстановка данного утолщения является кограницей. Тогда по (ii) утолщение ориентируемо. QED

3.16. Определение группы $H_1(G)$ приведено в параграфе ‘ориентируемость’.

(a) Формула $w_1^*(N,G)[g]=\omega(o)\cdot g$ корректно задает линейную функцию $w_1^*(N,G):H_1(G)\to\mathbb{Z}_2$.

(Т.е. первый класс Штифеля-Уитни определяет отображение из множества утолщений в множество линейных функций $H_1(G)\to\mathbb{Z}_2$.)

(b) $w_1(N,G)=0$ тогда и только тогда, когда функция $w_1^*(N,G)$ нулевая.

(c) Отображение $\varphi:H^1(G)\to(H_1(G))^*$, заданное формулой $\varphi[\nu](h)=\nu\cdot h$ корректно определено, является изоморфизмом и переводит $w_1(N,G)$ в $w_1^*(N,G)$ для любого утолщения (N,G).

Приведем в виде цикла задач *классификацию утолщений.* Их можно решать и не прочитав предыдущий материал об ориентируемости: определение группы $H^1(G)$ и инварианта $w_1(N,G)$ сами собой возникнут в процессе классификации. В оставшихся задачах этого пункта считается, что вершины и ребра графа *занумерованы.*

Два ориентированных утолщения одного связного графа *эквивалентны*, если одно получается из другого обращением ориентации циклических порядков во всех вершинах.

3.17. (a) Эквивалентные ориентируемые утолщения одновременно планарны или нет.

(b) Эквивалентные утолщения одновременно реализуемы на листе Мебиуса или нет.

(См. определения планарности и реализуемости на листе Мебиуса в предыдущем пункте.)

3.18. Гомеоморфные графы имеют одинаковое количество классов эквивалентности ориентируемых утолщений (утолщений).

3.19. Сколько классов эквивалентности ориентированных утолщений (утолщений)

(a) окружности, (b) триода, (c) креста, (d) n-ода, (e) восьмерки, (f) буквы Θ?

3.20. (a) Число классов эквивалентности ориентированных утолщений (утолщений) связного графа, имеющего только вершины степени 3 и имеющего V вершин и E ребер, равно 2^{V-1} (2^E).

(b) *Классификация утолщений графа.* Пусть G — связный граф, не гомеоморфный точке, окружности или отрезку. Если в G имеется V вершин степеней $k_1,\ldots,k_V$ и $E=\frac{1}{2}(k_1+\ldots+k_V)$

ребер, то количества классов эквивалентности ориентируемых утолщений и утолщений этого графа равны соответственно

$$\frac{1}{2}(k_1-1)!\cdot\ldots\cdot(k_V-1)! \quad \text{и} \quad 2^{E-V}(k_1-1)!\ldots(k_V-1)!.$$

3.21. *Классификации трехмерных утолщений графа.* Пусть G — связный граф с V вершинами и E ребрами. *Трехмерным утолщением* (3-утолщением) графа G называется расстановка нулей и единиц на его ребрах.

Приведем 'трехмерное определение' 3-утолщения. Рассмотрим несвязное объединение V трехмерных шаров. На граничной сфере каждого такого шара введем ориентацию На каждой такой граничной сфере отметим непересекающиеся двумерные диски, отвечающие выходящим из соответствующей вершины ребрам. Для каждого ребра графа соединим (не обязательно в трехмерном пространстве) соответствующие ему два диска трехмерной трубкой $D^2\times I$. Пусть M — объединение построенных шаров и трубок. Пара (M,G), состоящая из M и графа G, естественно вложенного в M, называется *трехмерным утолщением* (3-утолщением) графа G. Трубка из определения 3-утолщения называется *перекрученной*, если ориентации на двух ее противоположных основаниях, лежащих в шарах, совпадают. Трубка называется *неперекрученной*, если эти ориентации противоположны.

Два 3-утолщения графа G *эквивалентны*, если одно получается из другого инвертированиями. (Или, на трехмерном языке, если можно изменить ориентации на их сферах так, чтобы трубки в двух утолщениях, соответствующие одному и тому же ребру графа G, были бы одновременно перекручены или нет.)

Множество 3-утолщений графа G с точностью до эквивалентности находится во взаимно однозначном соответствии с $H^1(G)\cong\mathbb{Z}_2^{E-V+1}$.

Ответы и указания к некоторым задачам.

3.1. (a) У этой фигуры три граничные окружности. Выделите максимальное дерево и выведите из формулы Эйлера, что эта фигура гомеоморфна тору с тремя дырками.

(b) См. рис. 31.

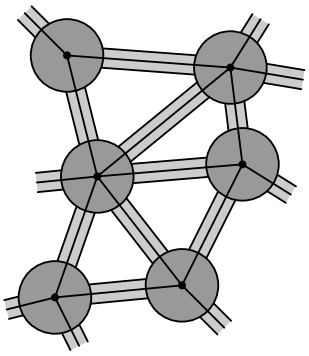


Рис. 31: Шапочки, ленточки и заплатки

3.2. (a) Из формулы Эйлера и неравенства $2E\geqslant 3F$ получается противоречие.

(b) Аналогично (a) граф K_{2g^2+9} не вложим в сферу с g ручками.

3.3. (a) Ответ: $16=2^4$. Из каждой вершины графа выходит по 3 ребра. Тогда для каждой вершины существует два различных ориентированных циклических порядка выходящих из нее полуребер. Поэтому всего различных ориентированных утолщений будет 2^4.

(b) Ответ: 3, см. рис. 21.

Указание. Порядки выходящих полуребер можно менять в 0, 1, 2, 3, 4-х вершинах. Следовательно, таких ориентированных утолщений не более 5.

3.5.d. Диску с 3 дырками или тору с 2 дырками.

3.8. Аналог 3.3. Ответ: $1024=2^{10}$.

Аналог ???. Ответ: 0, 1, 1 для трех ориентируемых утолщений на рис. 21, соответственно.

Аналог 3.5.d. Диску с 3 дырками, тору с 2 дырками, листу Мебиуса с 2 дырками или бутылке Клейна с дыркой.

Аналог 3.6.a. **Формула Эйлера.** Утолщение связного графа V вершинами и E ребрами, имеющее F краевых окружностей и цикл с нечетной суммой чисел на его ребрах, гомеоморфно диску с сфере с $2-V+E-F$ листами Мебиуса и F дырками.

Аналог 3.7. Для каждого ребра i вне максимального дерева рассмотрим несамопересекающийся путь в максимальном дереве, соединяющий концы этого ребра. Поставим в диагональной клетке $i \times i$ матрицы суму по модулю 2 чисел на ребрах этого пути и на ребре i. Поставим числа в остальные клетки матрицы, как раньше. Обозначим через b ранг над $\mathbb{Z}_2$ полученной матрицы. Тогда если на диагонали есть хотя бы одна единица, то данное утолщение гомеоморфно диску с b листами Мебиуса и некоторым количеством дырок.

3.10. *Набросок доказательства критерия (S).* Необходимость доказывается с использованием теоремы Жордана.

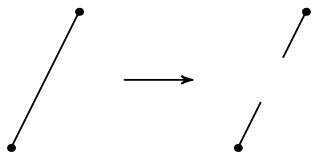


Рис. 32: Вырезание средней трети

Докажем достаточность. Выделим в (N, G) ориентированное подутолщение максимального дерева T. Покрасим оставшиеся ребра в красный цвет. Из каждого красного ребра вырежем его 'среднюю треть', как на рис. 32. Останется ориентированное утолщение дерева T. Его можно изобразить (с учетом ориентированного циклического порядка) без самопересечений на плоскости вне (внутренности) многоугольника $A_1 \dots A_n$ так, чтобы вершины дерева были бы вершинами многоугольника. (Это доказывается по индукции с отбрасыванием висячей вершины.)

Пусть существуют вершины A, B, A_1, B_1 дерева T, лежащие на границе многоугольника в этом порядке, причем вершины A и A_1 лежат на одном красном ребре, а вершины B и B_1 — на другом. Соединим путями в дереве вершину A с A_1 и B с B_1. Если эти пути пересекаются ровно в одной точке, то (N, G) содержит 'восьмерку' с рис. 23. Если эти пути пересекаются ровно по одному отрезку, то (N, G) содержит 'тету' с рис. 23. Остальные случаи сводятся к рассмотренным. Итак, (N, G) содержит ориентированное подутолщение, гомеоморфное одному из изображенных на рис. 23.

Поэтому если вершины A, A_1 лежат на одном красном ребре, а B, B_1 — на другом, то вершины A, A_1, B, B_1 лежат на границе многоугольника в этом циклическом порядке (или в противоположном). Значит, их можно соединить внутри многоугольника непересекающимися отрезками. Следовательно, (N, G) планарно. QED

3.11. *Теорема реализуемости ориентированных утолщений.* Каждое из следующих условий на ориентированное утолщение (N, G) связного графа равносильно его реализуемости на сфере с g ручками.

(E) $V - E + F =\geqslant 2 - 2g$, где V и E — количества вершин и ребер графа, а F — число краевых окружностей в N.

(I) для любого максимального дерева в G число b из задачи 3.7 не превосходит $2g$.

3.16. (a) Для любого (гомологического) цикла g сумма $\omega(o) \cdot g$ значений $\omega(o)$ по всем ребрам подграфа g не зависит от наброска o.

3.18. Два ориентированных утолщения гомеоморфных графов *гомеоморфны*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций одновременного подразделения ребра графа и соответствующей ленточки утолщения, или обратных к ним.

Гомеоморфность утолщений гомеоморфных графов определяется аналогично случаю ориентируемых утолщений.

4 Двумерные и трехмерные многообразия

Определение и примеры двумерных многообразий.

Здесь мы определим *двумерные многообразия* комбинаторным образом (удобным как для теории, так и для хранения в памяти компьютера). Более подробно теория 2-многообразий изложена, например, в [BE82].

Двумерным симплициальным комплексом (сокращенно: 2-комплексом) называется семейство двухэлементных и трехэлементных подмножеств конечного множества, которое вместе с каждым трехэлементным множеством содержит все три его двухэлементные подмножества. Элементы данного конечного множества называются *вершинами* триангуляции, выделенные двухэлементные подмножества — ее *ребрами*, а выделенные трехэлементные подмножества — ее *гранями*.

Примеры. (1) Двумерный остов n-мерного симплекса. Вершины — $1, 2, \ldots, n, n+1$, все двухэлементные и трехэлементные подмножества выделены.

(2) Кнопка. Вершины — $c, 0, 1, 2, 3$; выделены трехэлементные подмножества $\{012\}, \{013\}$ и $\{023\}$; выделены все их двухэлементные подмножества и $\{c, 0\}$.

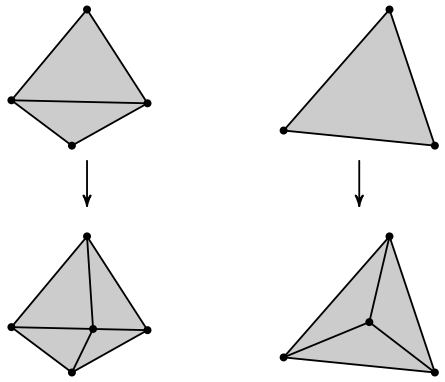


Рис. 33: Подразделение ребра и грани для триангуляций

Операция *подразделения ребра* изображены на рис. 33 слева. Два 2-комплекса называются *гомеоморфными*, если от одной можно перейти к другой при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним.

4.1. (a) Операция *подразделения грани* на рис. 33 справа выражается через операцию подразделения ребра.

(b) 2-комплексы в каждой колонке на рис. 35 гомеоморфны между собой, а схемы из разных колонок — нет (указание: негомеоморфность можно доказывать по мере чтения следующего пункта).

Двумерным полиэдром называется класс гомеоморфности 2-комплексов. Именно 2-многообразия интересны топологу. А 2-комплексы — средства их изучения и хранения в компьютере. Впрочем, они интересны дискретному геометру и комбинаторщику.

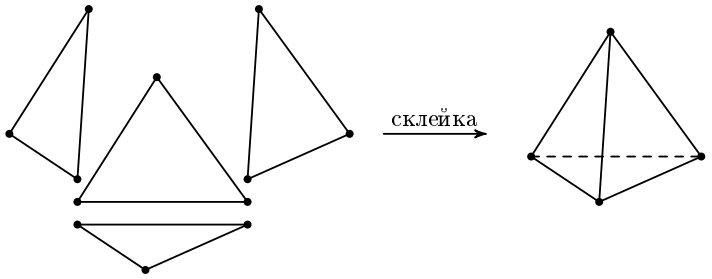


Рис. 34: Склейка тела 2-комплекса

По каждому 2-комплексу естественно строится *фигура* (*тело 2-комплекса*), полученная *склейкой* треугольников и отрезков, соответствующих ребрам и граням 2-комплекса (склейка осуществляется не в трехмерном пространстве, а абстрактно). Например, на рис. 34 изображено построение тела двумерного остова трехмерного симплекса из примера (1). Мы не даем строгого определения

фигуры и склейки (т.е. топологического пространства и операции склейки топологических пространств), поскольку формально их не используем: все рассуждения можно перевести на язык классов гомеоморфности 2-комплексов. Однако на самом деле мы изучаем именно *фигуры* посредством представления их 2-комплексами.

2-комплекс можно задавать, задавая соответствующую фигуру. При этом одна фигура задает несколько 2-комплексов (все они гомеоморфны). Так задаются 2-комплексы ‘сфера с ручками’, ‘пространство склейки’ квадрата или даже многоугольника (см. примеры на рис. 35, в котором первую строку нужно игнорировать). Читатель может при желании привести формальное описание этих примеров на языке 2-комплексов.

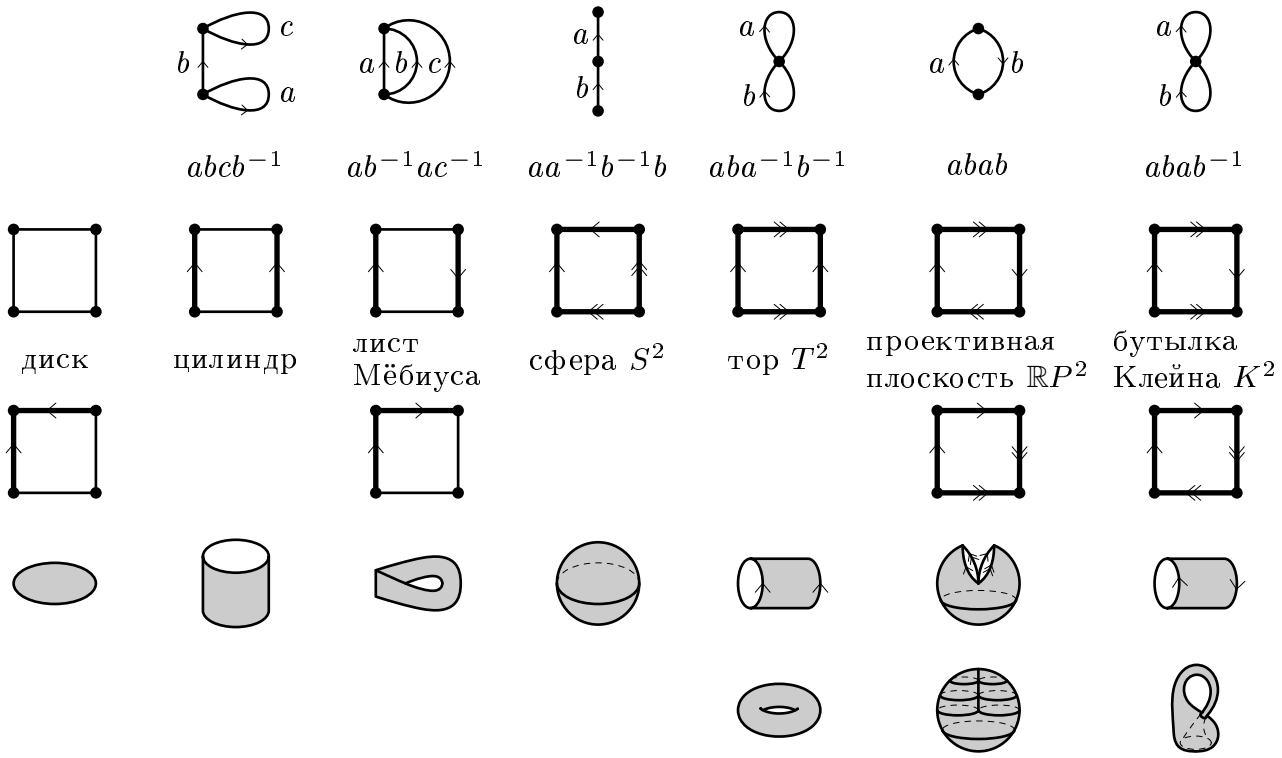


Рис. 35: Простейшие 2-многообразия и соответствующие схемы (переделать в соответствии с текстом)

Триангуляцией замкнутого двумерного многообразия называется такой 2-комплекс, что для любой вершины v все грани, ее содержащие, образуют цепочку

$$\{v, a_1, a_2\},\ \{v, a_2, a_3\} \dots \{v, a_{n-1}, a_n\},\ \{v, a_n, a_1\}.$$

Триангуляцией двумерного многообразия называется такой 2-комплекс, что для любой вершины a все грани, ее содержащие, образуют цепочку

$$\{v, a_1, a_2\},\ \{v, a_2, a_3\} \dots \{v, a_{n-1}, a_n\} \quad \text{или} \quad \{v, a_1, a_2\},\ \{v, a_2, a_3\} \dots \{v, a_{n-1}, a_n\},\ \{v, a_n, a_1\}.$$

Двумерным многообразием (2-многообразием) называется класс эквивалентности триангуляций 2-многообразий с точностью до гомеоморфизма.

Примеры 2-многообразий могут быть получены приклеиванием ручек $N \to N\#T^2$, приклеиванием пленок Мебиуса $N \to N\#\mathbb{R}P^2$ и вырезанием дырок (рис. 36).

Другие примеры — диски с ленточками и утолщения графов (см. предыдущие параграфы). Заклеив каждую граничную окружность утолщения графа диском, получим 2-многообразие без края.

Классификация двумерных многообразий.

Краем (или границей) ∂A триангуляции A двумерного многообразия называется объединение таких ребер комплекса, которые содержатся только в одной грани.

4.2. (a) Край является несвязным объединением окружностей.

(b) Количество краевых окружностей одинаково для гомеоморфных схем.

(c) Цилиндр и лист Мебиуса не гомеоморфны.

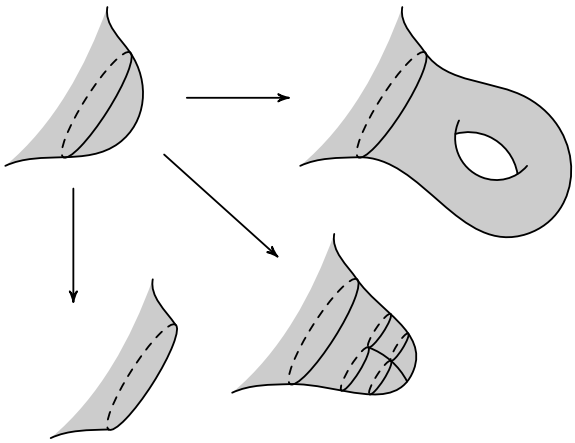


Рис. 36: Приклеивание ручки, приклеивание пленки Мебиуса и вырезание дырки

4.3. (a) $\mathbb{R}P^2$ с дыркой гомеоморфно листу Мебиуса.
(b) $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2 \cong K^2$.
(c) $\mathbb{R}P^2\#K^2 \cong \mathbb{R}P^2\#T^2$.

Эйлеровой характеристикой 2-комплекса называется число $\chi = V - E + F$, где F — число граней.

4.4. (a) Найдите эйлеровы характеристики схем с рис. 35.
(b) Эйлеровы характеристики гомеоморфных схем одинаковы.
(c) Эйлерова характеристика сферы с g ручками, m пленками Мебиуса и h дырками равна $2 - 2g - m - h$.
(d) Эйлерова характеристика равна $2 - 2g$, $1 - 2g$ и $-2g$ для сферы, проективной плоскости или бутылки Кляйна с g ручками, соответственно.

Ориентация двумерного плоского (несамопересекающегося) многоугольника задается окружностью со стрелкой, в нем лежащей. *Внутренним* ребром триангуляции 2-многообразия называется ее ребро, участвующее по крайней мере в двух гранях. Триангуляция 2-многообразия называется *ориентируемой*, если можно ввести ориентации на всех ее гранях, которые *согласованы* вдоль каждого внутреннего ребра, т.е. которые задают с двух сторон этого ребра *противоположные* направления (рис. 37). 2-Многообразие называется *ориентируемым*, если оно имеет ориентируемую триангуляцию. Указанный набор ориентаций на гранях триангуляции 2-многообразия называется ее *ориентацией* (или ориентацией соответствующего 2-многообразия).

Понятие ориентируемости невозможно ввести для произвольных 2-комплексов (подумайте, почему). Но можно ввести для 2-комплексов, каждое ребро которых содержится не более, чем в двух гранях.

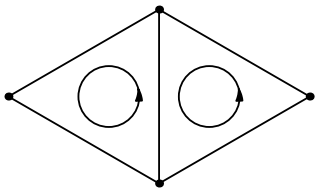


Рис. 37: Согласованные ориентации

4.5. (a) Гомеоморфные триангуляции 2-многообразий ориентируемы или нет одновременно.
(b) Сфера ориентируема, а лист Мебиуса неориентируем.
(c)* 2-Многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда оно не содержит листа Мебиуса, т.е. когда не существует триангуляции этого многообразия, имеющей подкомплекс, представляющий 'лист Мебиуса'.
(d) Неориентируемая триангуляция 2-многообразия не обязательно содержит подкомплекс, представляющий лист Мебиуса.
(e) 2-многообразие без края, полученное из утолщения, является ориентируемым тогда и только тогда, когда это утолщение ориентируемо.

2-Многообразие называется *связным*, если граф некоторой (или, эквивалентно, любой) его схемы связен.

4.6. Теорема классификации. *Пусть N — (компактное) связное ориентируемое 2-многообразие.*

(1) N является сферой с некоторым количеством g ручек и некоторым количеством h дырок.

(2) Число $g = g(N)$ ручек (род многообразия N) и число $h = h(N)$ дырок однозначно определяются по N, т.е. сферы с g ручками и h дырками не гомеоморфны для различных пар (g, h).

4.7. (a) Какие поверхности из задачи 4.4.cd гомеоморфны, а какие — нет?

(b) Классифицируйте все неориентируемые связные 2-многообразия

Ответы и указания к некоторым задачам.

4.5. Например, схемы бутылки Кляйна или проективной плоскости на рис. 35.

4.6. *Набросок доказательства.* Вторая часть теоремы доказывается путем подсчета количества связных компонент края и эйлеровой характеристики (некоторой схемы каждого из перечисленных 2-многообразий). Получится, что эйлерова характеристика сферы с g ручками равна $2 - 2g$.

Для доказательства первой части возьмем такую схему T данного 2-многообразия N, в которой все выделенные циклы имеют длину 3 (докажите, что произвольная схема эквивалентна некоторой схеме с таким свойством!). Построим *шапочки, ленточки и заплатки.* На наглядном уровне построение приведено на рис. 31. Приведем более аккуратное построение (которое читатель легко сможет формализовать в соответствии с определением 2-многообразия через схемы).

Для такой схемы *барицентрическим подразделением грани* назовем ее замену на шесть новых граней, полученных проведением 'медиан' в треугольнике, представляющем эту грань (рис. 38). *Барицентрическим подразделением схемы* назовем результат барицентрического подразбиения всех ее граней. Ясно, что барицентрическое подразделение можно осуществить с помощью конечного числа подразделений ребер и граней.

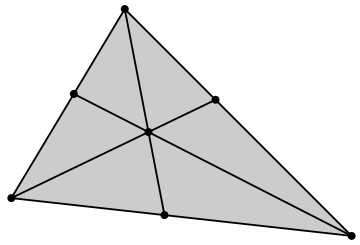


Рис. 38: Барицентрическое подразделение

Пусть T'' - схема, полученная из T двукратным применением операции барицентрического подразделения.

Шапочкой назовем объединение всех граней схемы T'', содержащих некоторую вершину схемы T.

Ленточкой назовем объединение всех граней схемы T'', пересекающих некоторое ребро схемы T, но не входящих ни в одну шапочку.

Компоненты связности объединения оставшихся граней схемы T'' назовем *заплатками.*

Итак, мы разбили N на шапочки, ленточки и заплатки.

Рассмотрим граф G, являющийся объединением всех ребер схемы T. Пусть G_0 — максимальное дерево графа G. Через N_0 обозначим объединение шапочек и ленточек, пересекающихся с G_0. Легко видеть, что N_0 гомеоморфно двумерному диску. Если мы будем последовательно добавлять ленточки и заплатки из $N - N_0$ к N_0, то получим последовательность множеств $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_p = N$. Таким образом, N получается из несвязного объединения дисков (возможно, из одного диска) приклеиванием ленточек и заклеиванием дырок.

Осталось доказать, что после добавления ленточки к сфере с ручками и дырками получится снова сфера с ручками и дырками (возможно, с другим их числом). Это доказывается рассмотрением двух случаев на рис. 18 (случаи на рис. 19 невозможны ввиду ориентируемости). QED

4.7.b. Используйте приведенную идею; к двум случаям на рис. 18 добавляются два случая на рис. 19.

Другое определение двумерных многообразий.

Ориентированным циклом называется циклическая последовательность ориентированных ребер, в которой начало каждого следующего ребра совпадает с концом предыдущего (ориентированные циклы, отвечающие тору и проективной плоскости на рис. 35, различны). *2-Схемой* называется граф вместе с некоторым количеством выделенных в нем ориентированных циклов (возможно, самопересекающимися и пересекающиеся друг с другом). Выделенные циклы называются *гранями* 2-схемы.

Примеры схем, у которых ровно один выделенный цикл, имеющий длину 4, изображены на рис. 35 в верхней строке.

Из данной 2-схемы можно получать новые 2-схемы склеиванием ребер, которое обозначается на рисунках проставлением на склеиваемых ребрах одинаковых стрелочек (рис. 40). Заметим, что эти стрелочки не имеют ничего общего с направлением ребер в соответствующем направленном цикле (последнее обычно ясно из контекста и поэтому не указывается нигде, кроме верхней строки на рис. 35). Так из схемы 'квадрат' (первая схема во втором ряду на рис. 35) получаются схемы из верхней строки на рис. 35: под каждой схемой первой строки нарисовано соответствующее отождествление ребер схемы 'квадрат'. Напомним, что в верхней строке стрелки на ребрах обозначают их ориентацию в выделенном цикле, а во второй строке совсем другое — способ склеивания ребер. В каждом рисунке второй строки ориентация в выделенном цикле (длины 4) задается его обходом против часовой стрелки (при данном изображении на плоскости нашего графа, являющегося циклом длины 4).

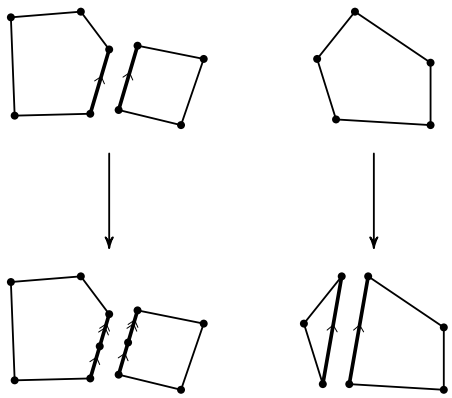


Рис. 39: Подразделение ребра и подразделение грани

Операции *подразделения ребра* и *подразделения грани (проведения диагонали)* изображены на рис. 39 (читатель легко восстановит формальное комбинаторное определение этих операций по рисункам). Две 2-схемы называются *гомеоморфными (топологически эквивалентными)*, если от одной можно перейти к другой при помощи этих операций и обратных к ним. Обозначение: $T_1 \cong T_2$. *Компактным двумерным полиэдром* называется класс эквивалентности 2-схем с точностью до гомеоморфности. Представители этого класса эквивалентности называются *2-схемами соответствующего 2-полиэдра.* Мы будем сокращенно называть компактные двумерные полиэдры 2-полиэдрами.

2-полиэдры и 2-схемы соотносятся так же, как 1-полиэдры (т.е. графы с точностью до гомеоморфизма, или графы в топологическом смысле) и графы (с точностью до изоморфизма, или графы в комбинаторном смыслах). Однако 2-полиэдры и 2-схемы уже важно различать.

По каждой 2-схеме естественно строится *фигура* (тело 2-схемы), полученная из графа 2-схемы *склейкой* двумерных многоугольников, соответствующих выделенным циклам 2-схемы (склейка осуществляется не в трехмерном пространстве, а абстрактно). Например, на рис. 34 изображено построение тела схемы, стстоящей из графа K_4, в котором выделены все циклы длины 3. Мы не даем строгого определения фигуры и склейки (т.е. топологического пространства и операции склейки топологических пространств), поскольку формально их не используем (все рассуждения можно перевести на язык классов эквивалентности схем). Однако важно, что на самом деле мы изучаем именно *фигуры* посредством представления их 2-схемами.

Склеивание ребер 2-схемы порождает *склеивание ребер* соответствующего 2-полиэдра (рис. 40, 35). Примеры 2-полиэдров, полученных склейкой сторон квадрата, изображены в третьем ряду на рис. 35.

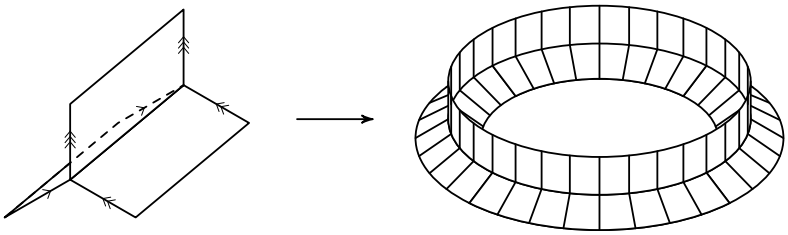


Рис. 40: Склеивание ребер

Интересные примеры 2-полиэдров (2-многообразия, конусы над графами, I-расслоения над графами, S^1-расслоения над графами, произведения графов) появятся далее.

Вершина 2-схемы называется *плоской*, если выходящие из этой вершины ребра можно так занумеровать $e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1} = e_1$, что выделенные циклы проходят через эту вершину только вдоль ребер e_i, e_{i+1} и только по одному разу для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ или $i = 1, 2, \ldots, n$. (Это равносильно тому, что линк вершины гомеоморфен окружности или отрезку.) Компактный двумерный полиэдр называется *компактным двумерным многообразием* (сокращенно: 2-многообразием) или поверхностью, если для некоторой (или, эквивалентно, для любой [6]) его схемы каждая вершина этой схемы плоская. Это свойство неформально означает, что тело схемы локально устроено как плоскость или полуплоскость. В этом пункте, а также в тех, где участвуют только 2-многообразия (т.е. не участвуют n-многообразия с $n \geqslant 3$) мы будем называть их просто многообразиями.

Краем (или границей) схемы многообразия называется объединение таких ребер схемы, которые содержатся только в одной грани и причем однократно. Многообразие называется *замкнутым*, если край некоторой (или, эквивалентно, любой) его схемы пуст.

[6] Доказательство этой эквивалентности является (несложным) упражнением

Определение трехмерных многообразий (набросок).

Неформально, трехмерным многообразием называется фигура, любая точка которой имеет окрестность, топологически эквивалентную трехмерному шару.

Примеры 3-многообразий. (1) Шар $D^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

(2) Сфера $S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$.

(3) Проективное пространство $\mathbb{R}P^3$: оно получается из сферы S^3 отождествлением диаметрально противоположных точек (или, что то же самое, из диска D^3 отождествлением диаметрально противоположных точек на его граничной сфере).

(4) Окрестность графа или поверхности в $\mathbb{R}^3$ (или в каком-то уже построенном 3-многообразии).

(5) Произведения 2-многообразий на отрезок или окружность.

(6) 3-утолщения графов, см. пункт 'ориентируемость и классификация утолщений' параграфа 'ориентируемость'.

(7) I- и S^1-расслоения над 2-многообразиями, см. пункт 'простейшие расслоения'.

Дадим теперь формальное определение 3-многообразия, которое будет использоваться в настоящем тексте. Начнем с более общего понятия 3-полиэдра, для которого нужно понятие 3-схемы.

3-схемой (A, P) назовем 2-схему $A = (G, F)$ (т.е. граф G вместе с семейством F выделенных ориентированных циклов) вместе с семейством P выделенных ориентированных 2-подсхем, гомеоморфных двумерной сфере S^2. Эти выделенные подсхемы называются *многогранниками (трехмерными гранями)*. Количества вершин, ребер, граней и многогранников схемы 3-многообразия обозначаются V, E, F и P, соответственно.

Примеры 3-схем. (1') Граф $G = K_4$, семейство F состоит из всех циклов длины 3, семейство P состоит из единственной 2-подсхемы, совпадающей со всей схемой.

(2') Граф $G = K_5$, семейство F состоит из всех циклов длины 3, семейство P состоит из всех пяти 2-подсхем, полученных из всей схемы удалением некоторой вершины и всех содержащих ее ребер и циклов.

Аналогично случаю графов и 2-схем, из каждой 3-схемы $T = (A, P)$ можно получить фигуру — *тело 3-схемы* — приклейкой к телу 2-полиэдра A трехмерных шаров, склеивая их границы с выделенными 2-подсхемами 3-схемы (согласованно с ориентациями).

Например, телами 3-схем из примеров (1') и (2') будут трехмерные шар и сфера из примеров (1) и (2) соответственно.

Операции *подразделения ребра*, *проведения диагонали* и *проведения грани* изображены на рис. 41. Две 3-схемы называются *гомеоморфными*, если от одной можно перейти к другой при помощи этих операций и обратных к ним. *Компактным трехмерным полиэдром* (коротко: *3-полиэдром*) называется класс гомеоморфности 3-схем.

Линк вершины v 3-схемы $T = (A, P)$ — это 2-схема $\mathrm{lk}_T\, v = (\mathrm{lk}_A\, v, Q)$, граф которой есть $\mathrm{lk}_A\, v$, причем цикл $e_1, \ldots, e_s$ в этом графе является выделенным, если соответствующие его ребрам циклы 2-схемы A лежат в некоторой выделенной 2-подсхеме 3-схемы T. *Компактный трехмерный полиэдр* называется *компактным трехмерным многообразием*, если для некоторой (эквивалентно: для любой) его схемы линк каждой вершины гомеоморфен двумерной сфере S^2. Неформально, это условие означает, что при склейке получится фигура, локально устроенная как пространство или полупространство. Мы будем сокращенно называть компактные трехмерные многообразия 3-многообразиями.

4.8. Представьте приведенные неформальные примеры 3-многообразий в виде 3-схем (указание: аналогично примерам (1) и (2) выше).

Эйлеровой характеристикой 3-схемы называется число $\chi = V - E + F - P$. *Край* и *ориентируемость* 3-многообразий определяются аналогично случаю 2-многообразий.

4.9. Решите аналоги задач предыдущего пункта для 3-многообразий.

Закончим этот пункт *другим (эквивалентным) определением 3-многообразия. Триангуляцией 3-многообразия* называется конечное множество, в котором выделены некоторые четырехэлементные неупорядоченные подмножества, причем

если для любого элемента A выкинуть его из каждого выделенного четырехэлементного подмножества, содержащего A, то полученные трехэлементные множества образуют триангуляцию 2-многообразия, гомеоморфного сфере.

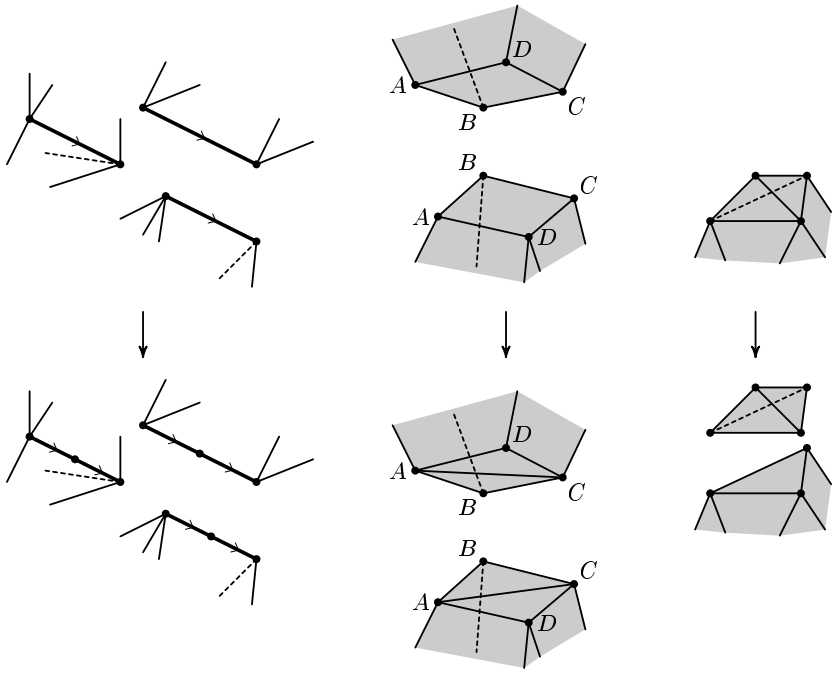


Рис. 41: Подразделение одномерной, двумерной и трехмерной граней

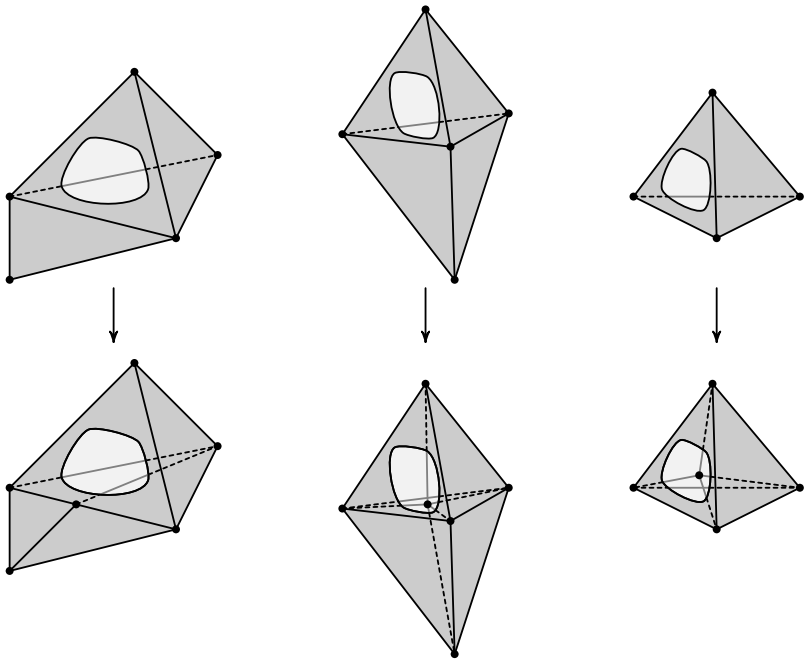


Рис. 42: Подразделение одномерной, двумерной и трехмерной граней

Элементы данного конечного множества называются *вершинами*, выделенные подмножества — *тетраэдрами (трехмерными гранями)*, трехэлементные подмножества трехмерных граней — *гранями*, а двухэлементные подмножества граней — *ребрами*.

Операция *подразделения ребра* (а также *подразделения двумерных и трехмерных граней*) определяются аналогично случаю 2-многообразий и изображены на рис. 42 (читатель легко восстановит формальное комбинаторное определение этих операций по рисункам). Две триангуляции называются *гомеоморфными*, если от одной можно перейти к другой при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним. *3-многообразием* называется класс эквивалентности триангуляций с точностью до гомеоморфизма. Представители этого класса эквивалентности называются *триангуляциями соответствующего 3-многообразия*.

I should say it meant something simple
and obvious, but then I am no philosopher!
I. Murdoch, The Sea, the Sea. [7]

5 Ориентируемость 2-многообразий

Определение 2-многообразия и его ориентируемости приведено в §4.

Существует красивый и простой критерий ориентируемости многообразия: 'не содержит листа Мебиуса'. Существует простой алгоритм распознавания ориентируемости связного 2-многообразия: сначала ориентируем произвольно одну грань, затем на каждом шаге будем ориентировать грань, соседнюю с некоторой уже ориентированной, пока не ориентируем все грани или не получим несогласованности ориентаций вдоль некоторого ребра.

В этом пункте мы приведем алгебраический критерий ориентируемости, который сложнее формулируется. Этот критерий является по сути лишь переформулировкой определения ориентируемости на алгебраический язык. Но он важен не сам по себе, а как иллюстрация теории препятствий. (Кроме того, похожие соображения применяются для *классификации утолщений.*)

Теорема ориентируемости. *2-Многообразие N без края ориентируемо тогда и только тогда, когда его* первый класс Штифеля-Уитни $w_1(N) \in H_1(N)$ *нулевой.*

Группа $H_1(N)$ и класс $w_1(N)$ будут определены позже. Они естественно возникают и строго определяются в процессе *придумывания* теоремы ориентируемости, к которому мы и переходим.

Определение препятствующего цикла. Возьмем некоторое разбиение T многообразия N на многоугольники.

(Например, можно взять схему в смысле предыдущей главы. Например, возьмем стандартную схему с одной гранью бутылки Кляйна, см. рис. 43. На этом рисунке проделаны все шаги приводимого доказательства для частного случая. Мы предлагаем читателю в качестве упражнения проделать эти шаги для схемы проективной плоскости с рис. 35.)

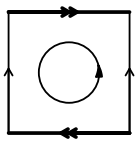


Рис. 43: Набор o ориентаций и препятствующий цикл $\omega(o)$

Возьмем набор o ориентаций на гранях разбиения T. Каждое ребро покрасим в красный цвет, если ориентации граней с двух сторон этого ребра *рассогласованы*, т.е. задают на этом ребре *одинаковые* направления. Объединение красных ребер называется *препятствующим циклом* $\omega(o)$.

(На рис. 43 жирными линиями изображен препятствующий цикл для некоторой схемы бутылки Клейна.)

Ясно, что

($*$) данный набор o ориентаций граней определяет ориентацию многообразия тогда и только тогда, когда $\omega(o) = \varnothing$.

($**$) в графе $\omega(o)$ *нет изолированных вершин и из каждой вершины выходит четное число красных ребер.*

1. (a) Докажите эти утверждения.

(b) Изобразите какой-нибудь препятствующий цикл для какого-нибудь разбиения проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ на многоугольники.

(c) 2-Многообразие с краем, получающееся вырезанием малой окрестности графа $\omega(o)$ из N, ориентируемо.

Гомологическим циклом в произвольном графе G называется подграф с условием из (**). Слово 'гомологический' будем опускать, ибо циклы в смысле теории графов в этом тексте не упоминаются.

[7] *Должен бы сказать, что это означает нечто простое и очевидное, однако я не философ! А. Мэрдок, Море, море, пер автора.*

(Например, объединение ребер схемы на рис. 43 является ‘восьмеркой’, поэтому в этом графе четыре цикла.)

2. Число циклов в связном графе с V вершинами и E ребрами равно 2^{E-V+1}.

Изменение препятствующего цикла и определение границы грани. Если $\omega(o) \neq \varnothing$, то o не определяет ориентации многообразия. Но еще не все потеряно: можно попытаться изменить o, так чтобы препятствующий цикл стал пустым. Для этого выясним, как $\omega(o)$ зависит от o. Для этого удобно вспомнить про сумму по модулю 2 (т.е. симметрическую разность) подграфов в произвольном графе.

3. Сумма по модулю 2 циклов есть цикл.

4. Эта задача не используется в данном пункте. В ней используются понятия группы и изоморфизма групп.

(a) Множество $H_1(G)$ всех циклов в графе G с операцией суммы по модулю 2 является группой. Эта группа называется *одномерной группой гомологий графа G (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$).*

(b) Одномерные группы гомологий гомеоморфных графов изоморфны.

(c) $H_1(G) \cong \mathbb{Z}_2^{E-V+1}$ для связного графа G с V вершинами и E ребрами.

(d) Несамопересекающиеся циклы порождают $H_1(G)$.

Кроме того, естественно возникает следующее важное определение. Для грани a, гомеоморфной диску, назовем *гомологической границей ∂a* этой грани подграф, образованный ребрами границы этой грани (рис. 44). Для произвольной грани a назовем *гомологической границей ∂a* этой грани подграф, образованный теми ребрами границы этой грани, к которым грань примыкает только с одной стороны (рис. 44). Как и для циклов, слово ‘гомологическая’ будем опускать.

(Для примера на рис. 43 граница единственной грани пуста.)

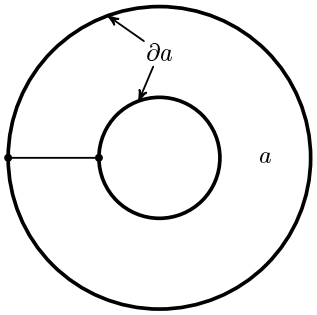


Рис. 44: Гомологическая (алгебраическая) граница грани

5. Каждая граница является циклом.

При изменении ориентации *одной* грани a цикл $\omega(o)$ изменяется на сумму по модулю 2 с границей этой грани: $\omega(o') - \omega(o) = \partial a$.

(Для примера на рис. 43 препятствующий цикл вообще не меняется.)

При изменении ориентации *нескольких граней* $a_1, \ldots, a_k$ цикл $\omega(o)$ изменяется на сумму по модулю 2 границ этих граней:

$$(*) \quad \omega(o') - \omega(o) = \partial a_1 + \ldots + \partial a_k.$$

Определение группы $H_1(N)$. Назовем *границей* сумму границ нескольких граней. Назовем циклы ω_1 и ω_2 *гомологичными* (или сравнимыми по модулю границ), если $\omega_1 - \omega_2$ есть граница (т.е. (*)).

Ясно, что

(i) При изменении набора o ориентаций препятствующий цикл $\omega(o)$ заменяется на гомологичный цикл.

(ii) Если $\omega(o)$ является границей, то можно изменить o на o' так, чтобы получилось $\omega(o') = 0$.

(iii) Гомологичность является отношением эквивалентности на множестве циклов.

Для доказательства утверждения (ii) заметим, что если $\omega(o) = \partial a_1 + \ldots + \partial a_s$, то можно взять набор o' ориентаций граней, отличающийся от o в точности на гранях $a_1, \ldots, a_s$, тогда ввиду (*) получим $\omega(o') = 0$.

Одномерной группой гомологий $H_1(T)$ разбиения T (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) называется группа циклов с точностью до гомологичности.

(Для примера на рис. 43 $H_1(T) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, поскольку только одинаковые циклы гомологичны.)

Одномерной группой гомологий $H_1(N)$ 2-многообразия N (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) называется группа $H_1(T)$ для любого разбиения T этого 2-многообразия. Это определение корректно ввиду задач 6b и 7b ниже.

Заметим, что теорема ориентируемости будет осмыслена, даже если рассматривать эти группы только как множества, что мы и делаем.

Важно, что эти группы, которые уже появились при решении конкретной задачи об ориентируемости (и еще появится при решении других задач!) могут быть коротко определены независимо от этих задач.

6. Пусть T — разбиение на многоугольники связного 2-многообразия N без края.

(a) Дайте определение группы $H_1(T)$, независимое от рассуждений, в которых она появилась.

(b) Одномерные группы гомологий гомеоморфных разбиений находятся во взаимно-однозначном соответствии друг с другом.

(c) Сумма по модулю 2 границ всех граней разбиения пуста.

(d) Сумма границ любого собственного подмножества множества всех граней непуста.

(e) $|H_1(T)| = 2^{2-V+E-F} = 2^{2-\chi(T)}$.

(f) В множестве $H_1(T)$ корректно определена операция суммы формулой $[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$.

При рассуждениях с гомологическими классами удобно сначала работать с представляющими их циклами, а потом доказывать независимость от выбора цикла в данном классе гомологий.

7. Эта задача не используется в данном пункте. В ней используются понятия группы и изоморфизма групп. Пусть T — разбиение на многоугольники связного 2-многообразия N без края.

(a) Множество $H_1(T)$ с определенной выше операцией является группой

(b) Одномерные группы гомологий гомеоморфных разбиений изоморфны.

(c) $H_1(T) \cong \mathbb{Z}_2^{2-\chi(T)}$.

(d) Несамопересекающиеся циклы порождают $H_1(T)$.

Определение класса $w_1(N)$. Первым классом Штифеля-Уитни разбиения T называется класс гомологичности препятствующего цикла:

$$w_1(T) := [\omega(o)] \in H_1(T).$$

Это определение корректно ввиду утверждения (i).

Первым классом Штифеля-Уитни 2-многообразия N называется первый класс Штифеля-Уитни любого разбиения T этого 2-многообразия: $w_1(N) := w_1(T)$. Это определение корректно в следующем смысле.

8. При 'естественных' биекции или изоморфизме (построенных Вами в решениях задач 4b или 7b) одномерных групп гомологий гомеоморфных разбиений первый класс Штифеля-Уитни одного разбиения переходит в первый класс Штифеля-Уитни другого.

Набросок доказательства теоремы ориентируемости. Ясно, что условие $w_1(T) = 0$ необходимо для ориентируемости. Обратно, пусть $w_1(T) = 0$. Значит, существует такой набор o ориентаций, что $\omega(o)$ есть граница. Поэтому можно изменить на o' так, чтобы $\omega(o') = 0$. Тогда многообразие ориентируемо. QED

9. (a) Сформулируйте и докажите аналог теоремы ориентируемости для многообразий с непустым краем (обозначение: $w_1(N) \in H_1(N, \partial N)$). Нарисуйте какой-нибудь препятствующий цикл (т.е. представитель первого класса Штифеля-Уитни) на некотором разбиении листа Мебиуса на многоугольники.

(b)* Сформулируйте и докажите аналоги теорем и задач этого пункта для многообразий произвольной размерности.

Указания к некоторым задачам.

2. Выделим в графе G максимальное дерево, тогда вне этого дерева $E - V + 1$ ребер.

4. (b) Это достаточно доказать для случая, когда один граф получается из другого подразделением ребра.

(c) Осторожно, это не следует из $|H_1(G)| = 2^{E-V+1}$. Но следует из этого и того, что сумма любого элемента с собой равна нулю.

6. (a) Определение приведено в следующем пункте.

(b) Это достаточно доказать для случая, когда одна схема получается из другой подразделением ребра.

7. (b) Аналогично 4c.

9. (a) *Циклом по модулю края* в разбиении T 2-многообразия называется подграф разбиения T, в котором нет изолированных вершин и из каждой внутренней вершины которого выходит четное число красных ребер. Границы определяются дословно так же, как и выше. Два цикла по модулю края называются *гомологичными по модулю края*, если их разность есть сумма границы и некоторого подграфа края.

6 Форма пересечений

Форма пересечений — один из важнейших инструментов и объектов исследования для топологии и ее приложений. См. [DZ93]. У нас она появится при решении следующих 'учебных' задач. (Если Вам непонятны используемые в задачах слова, то пропустите их и читайте дальше. Если не получается решить, то тоже пропустите их и читайте дальше. Задачи 2abc можно решить и без формы пересечений. См. также формулу Мохара — задачи 2b и 5d параграфа 'двумерные и трехмерные многообразия'.)

1. (a) По планете Тополога, имеющей форму тора, текут реки Меридиан и Параллель. Два маленьких принца прошли по планете и вернулись в их исходные точки (которые различны). Один из них переходил Меридиан 9 раз, а Параллель 7 раз (трансверсально, рис. 45), а другой — 19 раз и 12 раз, соответственно. Докажите, что один маленький принц видел следы другого.

(b) Пусть a — замкнутая несамопересекающаяся кривая на 2-многообразии. Построим близкую к a замкнутую несамопересекающуюся кривую a' *в общем положении с* a, т.е. пересекающую a в конечном числе точек и притом трансверсально (рис. 45). Тогда $|a \cap a'|$ нечетно, если при обходе вдоль a 'меняется ориентация' 2-многообразия, и четно, если не меняется.

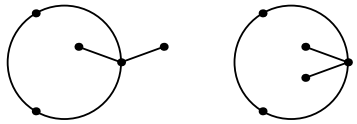


Рис. 45: Трансверсальное пересечение и нетрансверсальное пересечение (изменить рисунок!)

2. *Регулярной окрестностью* графа в многообразии является его окрестность, являющаяся его утолщением (определение утолщения напомнено в первой главе).

(a) Регулярные окрестности образов разных вложений графа в плоскость (рис. 46) гомеоморфны.

(b) Регулярные окрестности образов разных вложений некоторого графа в тор не гомеоморфны.

(c) Регулярные окрестности образов изотопных вложений данного графа в данное 2-многообразие гомеоморфны.

Два вложения $f_0, f_1 : G \to N$ называются *изотопными*, если существует семейство $U_t : N \to N$ гомеоморфизмов, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, для которого $U_1 \circ f_0 = f_1$.

(d) Регулярные окрестности образов гомотопных вложений данного графа в данное 2-многообразие гомеоморфны.

Два непрерывных отображения $f_0, f_1 : G \to N$ называются *гомотопными*, если существует семейство $f_t : G \to N$ непрерывных отображений, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$.

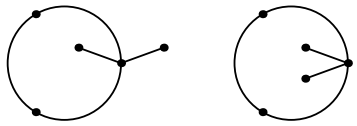


Рис. 46: Различные вложения графа в плоскость

3. Пусть N — 2-многообразие и a, b — замкнутые кривые на нем. Будем считать, что a и b

- являются подграфами некоторого разбиения;
- *общего положения*, т.е. трансверсально (рис. 45) пересекаются в конечном числе точек.

Тогда $|a \cap b| \mod 2$ не меняется при замене a и b на гомологичные им кривые, удовлетворяющие тем же условиям.

Задачу 3 легко доработать до определения формы пересечений, использующее понятие трансверсальности. Но мы приведем другое формальное определение. В нем вместо понятия трансверсальности используется следующее более простое понятие.

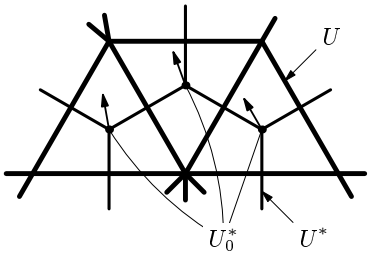


Рис. 47: Двойственная схема. Убрать стрелочки, сделать двойственную пунктирной

Возьмем некоторое разбиение U на многоугольники (например, схему) 2-многообразия N.

Определение двойственного разбиения на многоугольники (рис. 47). Выберем в каждой грани разбиения U точку и обозначим полученное множество точек через U_0^*. Для каждого ребра a исходной схемы соединим ребром a^* точки множества U_0^*, соответствующие соседним вдоль этого ребра граням. Полученный граф обозначим через U_1^*. Этот граф разбивает 2-многообразие N на многоугольники. Полученное разбиение U^* называется *двойственным* к U.

Определение пересечения подграфов. Возьмем двойственное разбиение U^*. Для ребра x разбиения U и ребра y разбиения U^* положим $x \cap y = 1$, если x и y двойственны, и $x \cap y = 0$ иначе. Для подграфов X схемы U и Y схемы U^* положим $X \cap Y$ равным количеству их точек пересечения по модулю 2 (т.е. продолжим умножение $\cap$ на ребрах до билинейной симметричной формы $\cap : \mathbb{Z}_2^E \times \mathbb{Z}_2^E \to \mathbb{Z}_2$).

Определение группы гомологий разбиения без края. Циклом в разбиении U 2-многообразия называется подграф разбиения T, в котором нет изолированных вершин и из каждой вершины которого выходит четное число красных ребер. Для грани a, гомеоморфной диску, назовем *границей* ∂a этой грани цикл, образованный ребрами границы этой грани (рис. 44). Для произвольной грани a назовем *гомологической границей* ∂a этой грани цикл, образованный теми ребрами границы этой грани, к которым грань примыкает только с одной стороны (рис. 44). Два цикла по модулю края называются *гомологичными*, если их разность есть граница. *Одномерной группой гомологий* $H_1(U)$ называется группа циклов с точностью до гомологичности. Операция суммы подграфов по модулю 2 порождает операцию *суммы* на $H_1(U)$.

Определение формы пересечений. Для цикла X разбиения U и цикла Y двойственного разбиения U^* определим $[X] \cap [Y] := X \cap Y$. Это определение корректно задает *форму пересечений* $\cap : H_1(N) \times H_1(N) \to \mathbb{Z}_2$ ввиду задачи 4b.

4. (a) Пересечение цикла и границы равно нулю.

(b) Определение формы пересечений корректно.

(c) $\alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha$ и $(\alpha + \beta) \cap \gamma = \alpha \cap \gamma + \beta \cap \gamma$, т.е. форма пересечений симметрична и билинейна.

5. Определение первого класса Штифеля-Уитни $w_1(N) \in H_1(N)$ приведено в предыдущем параграфе.

(a) $w_1(N) \cap a = a \cap a$ для любого $a \in H_1(N)$.

(b) $w_1(N) \cap w_1(N) = \chi(N) \mod 2$.

6. Пусть U — разбиение на многоугольники связного 2-многообразия N без края.

(a) Для любого базиса $x_1, \dots, x_E$ группы $C_1(U) \cong \mathbb{Z}_2^E$ всех 'реберных' подграфов разбиения U 2-многообразия существует базис $y_1, \dots, y_E$ группы $C_1(U^*) \cong \mathbb{Z}_2^E$ всех 'реберных' подграфов двойственного разбиения U^*, для которого $x_i \cap y_j = \delta_{ij}$.

(b) *Теорема двойственности Пуанкаре.* Форма пересечений невырождена, т.е. для любого $\alpha \in H_1(U) - \{0\}$ существует $\beta \in H_1(U^*)$, для которого $\alpha \cap \beta = 1$.

(Из невырожденности вытекает, что для любого базиса $\alpha_1, \dots, \alpha_{2-\chi(N)}$ группы $H_1(U)$ существует базис $\beta_1, \dots, \beta_{2-\chi(N)}$ группы $H_1(U^*)$, для которого $\alpha_i \cap \beta_j = \delta_{ij}$.)

7.* Сформулируйте и докажите аналоги определений и задач 4, 6 для многообразий

(a) с краем;

(b) произвольной размерности.

Указания к некоторым задачам.

2. (a) Используйте формулу Эйлера.

(d) Обозначим через R_1 и R_2 регулярные окрестности образов графа G при двух гомотопных вложениях. Далее $k = 1, 2$. Определите $H_1(R_k)$ и постройте изоморфизм $i_k : H_1(G) \to H_1(R_k)$. Определите форму пересечений $\cap_k : H_1(R_k) \times H_1(R_k) \to \mathbb{Z}_2$. Докажите, что $i_2^{-1} i_1$ сохраняет форму пересечений. Докажите и используйте, что форма пересечений однозначно определяет многообразие с непустым краем.

6. (a) Обозначим через A матрицу перехода от стандартного базиса в $C_1(U)$ к базису $x_1, \dots, x_E$. Тогда в качестве $y_1, \dots, y_E$ можно взять базис, полученный из стандартного базиса в $C_1(U^*)$ при помощи матрицы $(A^T)^{-1}$.

(b) Сначала докажите утверждение для класса α, представленного замкнутой несамопересекающейся кривой. Для этого рассмотрите два случая: кривая разбивает многообразие или нет. Другой способ, основанный на (a), приведен в параграфе 'двойственность Пуанкаре'.

7 Инволюции

Примеры инволюций.

Читатель наверняка знает, насколько полезны центральные, осевые и зеркальные симметрии в элементарной геометрии. Настолько же полезны их обобщения — инволюции — в 'высшей' математике. (В свою очередь, понятие инволюции является частным случаем более общего понятия действия группы на множестве, которое мы здесь не затрагиваем, поскольку идеи и методы, который мы хотим проиллюстрировать, достаточно выпукло видны на примере инволюций.)

Инволюцией на подмножестве $N \subset \mathbb{R}^m$ называется непрерывное отображение $t : N \to N$, для которого $t(t(x)) = x$ для любого $x \in N$.

Инволюция t назывется *свободной*, если она не имеет неподвижных точек, т.е. если $t(x) \neq x$ при любом x. (Заметим, что центральные, осевые и зеркальные симметрии пространства не удовлетворяют этому условию.)

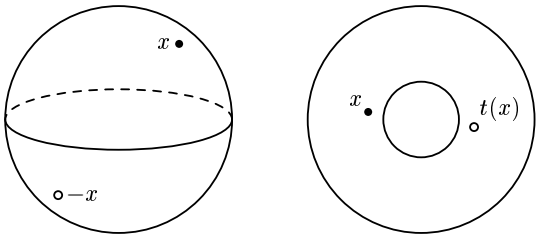


Рис. 48: Инволюции (1) и (2)

Примеры свободных инволюций.

(1) Отображение $S^2 \to S^2$ сферы $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, заданное формулой $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. Это — *антиподальная* инволюция (рис. 48).

(2) Отображение $A^2 \to A^2$ кольца $A^2 = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant r \leqslant 2\}$, заданное формулой $(r, \varphi) \mapsto (r, \pi + \varphi)$ (рис. 48).

(3)–(5) Отображения $t_i : T^2 \to T^2$, заданные формулами (рис. 49)

$$t_1(\varphi, \psi) = (\pi + \varphi, \psi), \quad t_2(\varphi, \psi) = (\varphi, \pi + \psi) \quad \text{и} \quad t_3(\varphi, \psi) = (-\varphi, \pi + \psi).$$

(6) Возьмем несвязное объединение $X \sqcup X = X \times \{+1, -1\}$ двух копий пространства X. Определим инволюцию t_X на $X \times \{+1, -1\}$ формулой $(x, s) \mapsto (x, -s)$. Это — *тривиальная* инволюция (рис. 49).

(7) Рассмотрим движение без столкновений двух различных частиц на некотором многообразии N. *Фазовым пространством* этого движения называется множество $\widetilde{N} := \{(x, y) \mid x, y \in N, \ x \neq y\}$. На этом множестве можно ввести инволюцию формулой $(x, y) \mapsto (y, x)$. (Заметим, что множество $\widetilde{N}$ не обязательно является 2-многообразием.)

1. (a) На сфере с любым числом ручек существует свободная инволюция.

(b)* Существует ли свободная инволюция на $\mathbb{R}P^2$? Указание: решите хотя бы для *симплициальных* инволюций, определение которых см. ниже.

2. (a) Приведите пример свободной инволюции на окружности.

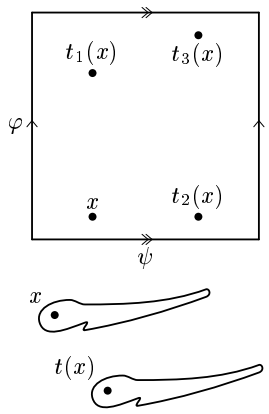


Рис. 49: Инволюции (3)–(6)

(b) На любом ли графе существует свободная инволюция? Указание: решите хотя бы для *симплициальных* инволюций, определение которых можно дать аналогично нижеприведенному.

Пусть T — схема 2-многообразия N. *Симплициальная относительно схемы T свободная инволюция* — это разбиение вершин схемы T на пары, удовлетворяющее следующим четырем условиям:

— каждое ребро соединяет вершины из разных пар;

(Это условие принимается, поскольку любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.)

— если $\{a, a'\}$ — пара, $\{b, b'\}$ — пара и ab — ребро, то $a'b'$ —ребро.

— никакие две вершины в границе грани не лежат в одной паре;

(Это условие принимается, поскольку любое непрерывное отображение диска в себя имеет неподвижную точку.)

— если $\{a_i, a'_i\}$ — пары и $a_1 \dots a_k$ — грань, то $a'_1 \dots a'_k$ — грань.

Для 2-многообразия N, реализованного в качестве подмножества в $\mathbb{R}^3$, инволюция t на N называется *симплициальной относительно разбиения* T, если t переводит вершины в вершины, каждое ребро ab в ребро $t(a)t(b)$ и каждую грань $a_1 \dots a_k$ в грань $t(a_1) \dots t(a_k)$. *Мы будем рассматривать только инволюции, симплициальные относительно некоторой схемы.*

Теорема о четности. *Эйлерова характеристика 2-многообразия с симплициальной свободной инволюцией четна.*

3. (a) Докажите теорему о четности.

(b) На проективной плоскости с ручками не существует свободной инволюции.

(c) Существует ли свободная инволюция на бутылке Клейна?

(d) На каких 2-многообразиях существует свободная инволюции?

В 2-многообразии N со свободной инволюцией t отождествим точки x и $t(x)$ для любого x. Полученное в результате отождествления пространство будет 2-многообразием (этим фактом можно пользоваться в дальнейшем без доказательства). Оно называется *факторпространством* пространства N по инволюции t и обозначается N/t. Наша инволюция называется инволюцией *на* пространстве N *над* пространством N/t.

4. В вышеприведенных примерах (1)–(6)

(a) инволюции симплициальны относительно некоторой схемы;

(b) факторпространства гомеоморфны пространствам $\mathbb{R}P^2$, A^2, T^2, T^2, K^2, X.

5. (a) Свободные инволюции над данным графом N можно строить следующим образом. Раскрасим вершины данного графа N в V разных цветов. Для каждой вершины графа N возьмем две вершины того же цвета. Это будут вершины графа N'. Для каждого ребра ij графа N возьмем два ребра, каждое из которых соединяет разноцветные вершины цветов i и j графа N'. Это будут ребра графа N'. На полученном раскрашенном графе N' определяется инволюция, меняющая местами одноцветные вершины.

(b) Пусть G — граф с вершинами a и b, двукратным ребром ab и двумя петлями aa и bb. Приведите пример свободной инволюции графа G над графом 'восьмерка'.

Инволюция $t : N \to N$ называется *тривиальной*, если существует такое 2-многообразие X и топологическая эквивалентность $N \to X \sqcup X$, при которой t переходит в тривиальную инволюцию t_X на $X \sqcup X$ из примера (6). Ясно, что антиподальная инволюция на сфере нетривиальна.

6. Любая свободная инволюция одного из следующих типов является тривиальной:

(a) на графе над деревом.

(b) на 2-многообразии над диском.

(c) на 2-многообразии над сферой.

Указание: эти и следующие задачи разумно решить сначала для *конкретных* выбранных Вами простых разбиений рассматриваемых 2-многообразий, а потом для *произвольных* разбиений.

7. Для каких пар (M, N) 2-многообразий существует свободная инволюция 2-многообразия M над 2-многообразием N?

Классификация инволюций.

Инволюции $t_1, t_2 : N \to N$ называются *эквивалентными*, если существует схема T 2-многообразия N и изоморфизм $f : T \to T$, для которого $t_2 \circ f = f \circ t_1$ (т.е. изоморфизм f переводит каждую пару $(x, t_1(x))$ в некоторую пару $(y, t_2(y))$.

8. (a) Инволюции из примеров (3) и (4) эквивалентны.

(b) Приведите пример двух неэквивалентных свободных инволюций на одном и том же 2-многообразии.

(c) Приведите пример двух не эквивалентных свободных инволюций на сфере с двумя ручками, факторпространство по каждой из которых гомеоморфно тору.

С инволюциями можно работать на эквивалентном языке двулистных накрытий. Неформально говоря, двулистное накрытие — отображение, при котором каждая точка имеет два прообраза. Формально, *(неразветвленным) двулистным накрытием* называется отображение $p : N \to N/t$ для некоторой (свободной) инволюции t. См. эквивалентное определение в главе 6.

Инволюция называется *тривиальной*, если соответствующее двулистное накрытие тривиально.

Двулистные накрытия $p_1 : X_1 \to X$ и $p_2 : X_2 \to X$ называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм схем $f : X_1 \to X_2$, для которого $p_1 = p_2 \circ \varphi$.

Обозначим через $S(M)$ множество двулистных накрытий над M ('инволюций над M') с точностью до эквивалентности над M.

Теорема классификации двулистных накрытий над графом. *Множество $S(G)$ симплициальных двулистных накрытий над графом G с точностью до эквивалентности находится во взаимно однозначном соответствии с $H_1(G) \cong \mathbb{Z}_2^{E-V+C}$.*

Набросок доказательства. Рассмотрим симплициальное двулистное накрытие $p : \widetilde{G} \to G$ над графом G. Для каждой вершины v графа G одну из точек в p^{-1} назовем верхней, а вторую нижней. Этот выбор обозначим через o. Поставим на ребре e графа G единицу, если соответствующие два ребра $p^{-1}e$ в $\widetilde{G}$ соединяют разноименные вершины, и ноль, если одноименные. Назовем полученную расстановку *препятствующей* и обозначим $\omega(o)$. (Пояснение к названию, не используемое в дальнейшем: эта расстановка препятствует тривиальности двулистному накрытия.)

Одномерная группа гомологий $H_1(G)$ графа G определяется аналогично пункту 'ориентируемость' как группа циклов в графе G. Для любого цикла g сумма $\omega(o) \cdot g$ значений $\omega(o)$ по всем ребрам подграфа g не зависит от набора o стрелочек. Поэтому формула $w_1(p)[g] = \omega(o) \cdot g$ корректно задает линейную функцию $w_1(p) : H_1(G) \to \mathbb{Z}_2$. Она называется *первым классом Штифеля-Уитни* двулистного накрытия. Доказательство того, что соответствие $p \mapsto w_1(p)$ является биекцией, оставляем в качестве упражнения. QED

9. (a) При построенной выше биекции композиция инволюций переходит в сумму циклов.

(b) Сколько симплициальных двулистных накрытий над тором (с точностью до эквивалентности)?

(c) Сколько симплициальных свободных инволюций на торе (с точностью до эквивалентности)?

Перейдем к классификации симплициальных двулистных накрытий над данным 2-многообразием M. Пусть задана некоторая инволюция $t : N \to N$ над M. Мы построим препятствие к тривиальности инволюции t. С помощью этого препятствия нетрудно классифицировать симплициальные двулистные накрытия над M. Рекомендуем читателю разобрать следующие рассуждения сначала для инволюции $t : T^2 \to T^2$ из примера (2).

Выберем на сфере M с g ручками $2g$ кривых, как на рис. 50. Для двулистного накрытия $p : \widetilde{M} \to M$ и одной из этих кривых поставим на кривой 0, если соответствующая инволюция над ней тривиальна (т.е. является перестановкой соответствующих точек из двух копий окружности),

и 1, если нетривиальна. Получим набор $w_1(p)$ из $2g$ нулей и единиц, называемый *первым классом Штифеля-Уитни* двулистного накрытия p относительно данного выбора кривых L.

Аналогичные наборы из $2g$ нулей и единиц можно получить, рассматривая некоторые другие наборы замкнутых кривых на M.

Рис. 50: Набор кривых для классификации инволюций

10. Постройте аналогичный набор из $2-\chi(M)$ кривых на *неориентируемом* многообразии M (так, чтобы была выполнена следующая теорема).

Теорема классификации двулистных накрытий. *Для замкнутого 2-многообразия M отображение $w_1 : S(M) \to \mathbb{Z}_2^{2-\chi(M)}$ (из множества $S(M)$ симплициальных двулистных накрытий над графом G с точностью до эквивалентности в группу $H_1(M) \cong \mathbb{Z}_2^{2-\chi(M)}$ одномерных гомологий 2-многообразия M с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) является взаимно-однозначным соответствием.*

Заметим, что группа гомологий $H_1(M)$ естественно появилась при классификации двулистных накрытий независимо от ее появления при изучении ориентируемости.

11. (a) При отображении w_1 тривиальная инволюция переходит в нулевой элемент.

(b) При отображении w_1 композиция инволюций переходит в сумму циклов.

(c) Докажите теорему классификации двулистных накрытий.

(d) Сформулируйте и докажите аналог теоремы классификации двулистных накрытий для многообразий с краем.

(e) То же для утолщений графов.

(f) Сформулируйте и докажите аналог теоремы классификации двулистных накрытий для двулистных накрытий многообразий, сохраняющих ориентацию.

Другое доказательство теоремы классификации двулистных накрытий.

Это доказательство сложнее предыдущего. Зато, в отличие от предыдущего, построения этого доказательства применимы для классификации двулистных накрытий на 2-многообразиях, заданных схемой (например, в компьютере). Кроме того, это доказательство может быть обобщено для трехмерных (и многомерных) многообразий.

Построение препятствующего цикла. Рассмотрим свободную симплициальную инволюцию $t : N \to N$, для которой $M = N/t$. Возьмем некоторое разбиение T многообразия N. Построим двойственное разбиение U (см. определение в пункте 'форма пересечений'). Они порождают двойственные схемы T/t и U/t многообразия $M = N/t$.

Для каждой пары инволютивных вершин схемы T одну из них назовем верхней, а вторую нижней. Этот выбор обозначим через o. Покрасим в красный цвет те ребра схемы U/t, для которых соответствующие два ребра схемы T соединяют разноименные вершины. Объединение красных ребер называется *препятствующим циклом* $\omega(o)$. На рис. 51 жирной линией изображен препятствующий цикл для инволюции на торе (т.е. для соответствующего двулистного накрытия над тором) из примера (3).

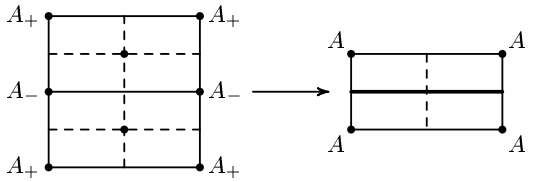


Рис. 51: Препятствующий цикл для инволюции на торе (над тором)

Ясно, что

(*) Данное распределение o верхних и нижних вершин определяет тривиализацию инволюции тогда и только тогда, когда $\omega(o) = \varnothing$.

(**) В графе $\omega(o)$ *нет изолированных вершин и из каждой вершины выходит четное число красных ребер*, т.е. этот граф является (гомологическим) циклом.

12. (a) Докажите эти утверждения.

(b) Вне графа $\omega(o)$ двулистное накрытие тривиально.

Изменение препятствующего цикла. Если $\omega(o) \neq \varnothing$, то o не определяет тривиализации инволюции, но еще не все потеряно: можно попытаться изменить o, так чтобы препятствующий цикл стал пустым. Для этого выясним, как $\omega(o)$ зависит от o.

Изменим названия двух инволютивных вершин схемы T, соответствующих вершине схемы T/t, лежащей в грани a. Тогда цикл $\omega(o)$ изменится на сумму по модулю 2 (т.е. симметрическую разность) с границей этой грани: $\omega(o') = \omega(o) + \partial a$. Поэтому при изменении названий нескольких инволютивных вершин схемы T цикл $\omega(o)$ изменяется на сумму по модулю 2 границ соответствующих граней схемы U/t:

$$\omega(o') = \omega(o) + \partial a_1 + \ldots + \partial a_k.$$

Ясно, что

(i) При изменении набора o препятствующий цикл $\omega(o)$ заменяется на гомологичный цикл.

(ii) Если $\omega(o)$ является границей, то можно изменить o на o', так чтобы получилось $\omega(o') = 0$.

Завершение доказательства. Напомним, что *одномерной группой гомологий* схемы T (или многообразия M) называется группа $H_1(M)$ циклов с точностью до гомологичности (и что $H_1(M) \cong \mathbb{Z}_2^{2-\chi(M)}$).

Первым классом Штифеля-Уитни инволюции t (или соответствующего двулистного накрытия) называется класс гомологичности препятствующего цикла:

$$w_1(t) := [\omega(o)] \in H_1(M).$$

Ясно, что он является *полным* препятствием к тривиальности инволюции t:

инволюция t тривиальна тогда и только тогда, когда $w_1(t) \neq 0$.

Теперь теорема классификации двулистных накрытий вытекает из (ii). QED

13. Определите и классифицируйте двулистные накрытия над данным 3-многообразием.

Указание к 8b. Используйте факторпространства. Ответ: инволюции из примеров (4) и (5) не эквивалентны.

'You mean...' he would say, and then he would rephrase what I had said in some completely simple and concrete way, which sometimes illuminated it enormously, and sometimes made nonsense of it completely.
I. Murdoch, Under the Net. [8]

8 Векторные поля для двумерных многообразий

Векторные поля на подмножествах плоскости

Векторным полем на подмножестве плоскости называется семейство векторов $v(x)$ на плоскости в точках x данного подмножества, непрерывно зависящих от точки x.

Векторное поле называется *единичным*, если все его векторы единичные.

1. (a) Постройте единичное векторное поле на плоскости. (Его сужение будет единичным векторным полем на произвольном подмножестве плоскости.)

(b) Для любых двух векторных полей существует непрерывная деформация одного в другое, т.е. семейство v_t векторных полей, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0,1]$, для которого v_0 есть первое поле и v_1 есть второе поле. (В отличие от дальнейшего, векторное поле v_t не предполагается ненулевым или единичным.)

Два единичных векторных поля называются *гомотопными*, если одно можно получить из другого непрерывной деформацией, в процессе которой векторное поле остается единичным. Такой деформацией называется семейство v_t единичных векторных полей, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0,1]$, для которого v_0 есть первое поле и v_1 есть второе поле.

2. (a) Любое единичное векторное поле v на плоскости гомотопно полю $-v$.

(b) Приведите пример негомотопных единичных векторных полей на некотором подмножестве плоскости.

3. Любые два единичных векторных поля на N гомотопны, если
(a) $N = 0 \times [0,1]$;
(b) $N = D^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;
(c) N — произвольное дерево на плоскости.

Обозначим через $V(N)$ множество единичных векторных полей с точностью до гомотопности на подмножестве N плоскости.

4. Опишите $V(N)$ для
(a) $N = S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
(b) $N = K_4$ (граф тетраэдра);
(c) произвольного плоского графа N.

Здесь 'описать' означает построить 'естественное' взаимно-однозначное соответствие между $V(N)$ и некоторым 'известным' множеством. 'Известность' множества означает как минимум описание количества его элементов, а как максимум — наличие 'естественных' операций на множестве и на $V(N)$, сохраняемых соответствием.

5. Теорема гомотопности. Любые два единичных векторных поля на диске D^2, совпадающие на его граничной окружности, гомотопны *неподвижно на границе* S^1 *диска* (т.е. гомотопны так, что $v_t(x) = v_0(x)$ для любых $x \in S^1$ и $t \in [0,1]$).

Определения, примеры и основные результаты для двумерных многообразий.

Исследование векторных полей было начато Анри Пуанкаре в качественной теории дифференциальных уравнений, возникшей при изучении небесной механики. С тех пор векторные поля являются одним из важнейших объектов топологии и ее приложений. Подробные мотивировки см. в 'похвальном слове векторным полям' [An03].

Проблема существования векторных полей и их наборов определяет лицо теории препятствий. Методы теории препятствий можно применять ко многим другим задачам. О вложениях графов и многообразий см. главу 7 и 8, соответственно.

[8] *'Вы хотите сказать...' — начинал он и пересказывал мои слова конкретно и просто, после чего моя мысль либо оказывалась много понятнее и глубже, либо оборачивалась полнейшей чепухой. А. Мердок, Под сетью, пер. М. Лорие.*

Напомним понятие касательного векторного поля. Стандартным тором T^2 в трехмерном пространстве называется фигура, образованная вращением окружности $(x-2)^2+y^2=1$ вокруг оси Oy.

Касательным векторным полем на торе T^2 называется семейство касательных к нему векторов $v(x)$ в его точках x, непрерывно зависящих от точки x.

Примеры касательных векторных полей на торе — 'параллельное' и 'меридиональное' поле (рис. 52).

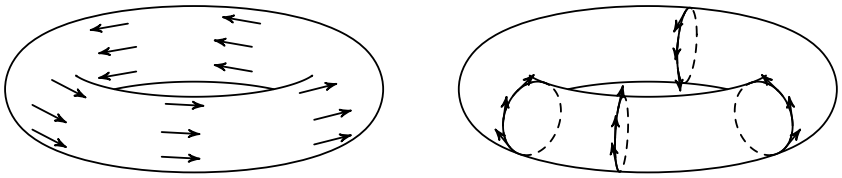


Рис. 52: Касательные векторные поля на торе

Понятие *касательного векторного поля* на рассматриваемых ниже поверхностях вводится дословно аналогично случаю тора.

Стандартным листом Мебиуса M называется поверхность в $\mathbb{R}^3$, заметаемая стержнем длины 1, равномерно вращающимся относительно своего центра, при равномерном движении этого центра по окружности радиуса 9, при котором стержень делает пол-оборота.

6. Постройте ненулевое касательное векторное поле на стандартном листе Мебиуса.

Стандартной сферой S^2 называется множество точек $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, для которых $x^2+y^2+z^2=1$ (или, что то же самое, точек (x,y,z) вида $(\cos\varphi\cos\psi,\sin\varphi\cos\psi,\sin\psi)$).

7. Постройте касательное векторное поле на S^2, у которого вектор нулевой только в одной точке.

Чтобы определить касательное векторное поле на 2-многообразии (например, на сфере с ручками), нужно вложить его в трехмерное пространство *гладко*, т.е. так, что в каждой точке можно провести касательную двумерную плоскость (например, поверхность многогранника не является гладкой). В этом параграфе под 2-многообразием можно понимать образ такого вложения, т.е. конкретное подмножество трехмерного пространства. Касательные векторные поля на 2-многообразиях можно определить и через их вложения в евклидово пространство размерности выше трех. (Если сфера с ручками N или произвольное 2-многообразие заданы абстрактно, а не как гладкое подмножество евклидова пространства, то вместо семейства касательных векторов можно брать семейство точек $y(x)$, $x\in N$, находящихся на 'малом' расстоянии от точки x.)

Касательное векторное поле называется *ненулевым*, если все его векторы ненулевые.

8. (a) На бутылке Клейна существует ненулевое касательное векторное поле.

(b) На любом связном 2-многообразии (не обязательно ориентируемом) с непустым краем существует ненулевое касательное векторное поле.

(c) Касательное векторное поле называется *единичным*, если все его векторы единичные. Если на 2-многообразии существует ненулевое касательное векторное поле, то существует и единичное.

Теорема Эйлера-Пуанкаре. *Среди сфер с ручками только тор имеет ненулевое касательное векторное поле.*

Среди замкнутых 2-многообразий только тор и бутылка Клейна имеют ненулевое касательное векторное поле.

Доказательство теоремы Эйлера-Пуанкаре приведено в В.В.Прасолов. Наглядная топология (М: МЦНМО, 1995) ftp://ftp.mccme.ru/users/prasolov/nagltop/pra2.pdf. В следующем пункте мы наметим два других доказательства. Хотя они сложнее, они на простейшем примере иллюстрируют идею теории препятствий.

8. (d) Докажите теорему Эйлера-Пуанкаре для неориентируемых 2-многообразий.

Два ненулевых касательных векторных поля называются *гомотопными*, если одно можно получить из другого непрерывной деформацией, в процессе которой векторное поле остается ненулевым и касательным. Такой деформацией называется семейство v_t ненулевых касательных векторных полей, непрерывно зависящее от параметра t, для которого v_0 есть первое поле и v_1 есть второе поле.

9. (a) 'Параллельное' поле на торе гомотопно 'меридиональному'.

(b) Любое поле v на на торе гомотопно полю $-v$.

В некоторых приложениях встречается следующий вопрос: *описать множество $V(N)$ ненулевых касательных векторных полей с точностью до гомотопности на многообразии N.* Встречаются также похожие более сложно формулируемые вопросы, для ответа на которые полезно сначала разобраться со сформулированным.

10. Опишите $V(N)$ для
(a) верхней полусферы $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ z\geqslant 0\}$;
(b) кольца $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$;
(c) боковой поверхности цилиндра $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$;

11. (a) Приведите пример двух негомотопных полей на торе.
(b) Опишите $V(N)$ для тора с дыркой.
(c) **Теорема классификации векторных полей на торе.** Отображение $r_1\oplus r_2 : V(T^2)\to\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, определенное ниже, является взаимно однозначным соответствием.

Поставим в соответствие полю v на торе *число $r_1(v)$ оборотов вектора этого поля при обходе по параллели тора* и *число $r_2(v)$ оборотов вектора этого поля при обходе по меридиану тора.* Поскольку количества оборотов определены только для замкнутой кривой на плоскости (а не в пространстве), то указанные картинки можно определить только из представления тора (вместе с полем на нем) в виде склейки прямоугольника. Аналогичные инварианты можно получить, рассматривая другие замкнутые кривые на торе.

12. (a) Гомотопно ли построенное Вами поле v на листе Мебиуса полю $-v$?
(b) Опишите $V(M)$ для листа Мебиуса M.
(c) Опишите $V(K)$ для бутылки Клейна K.

13. (a) Если на торе с дыркой заданы два поля, то их сужения на граничную окружность этой дырки гомотопны.
(b) Верно ли то же для листа Мебиуса?
(c) Верно ли то же для сферы с несколькими ручками и одной дыркой?

14. *Полем направлений* на 2-многообразии, вложенном в трехмерное пространство, называется семейство касательных к нему прямых $l(x)$ в точках x, непрерывно зависящих от точки x. Поля направлений тесно связаны с *лоренцевыми метриками* на многообразиях, возникающими в физике [Ko01].

(a) Если на существует ненулевое касательное векторное поле, то существует и поле направлений.
(b)* Обратное тоже верно (даже для многомерных многообразий) [**?**].

15. Классифицируйте поля направлений на
(a) торе. (b) бутылке Клейна. (c) 2-многообразиях с непустым краем.

Указания к некоторым задачам.

2b. Например, постоянное поле и поле $v(x,y)=(y,-x)$. При непрерывной деформации траектории единичного векторного поля сохраняются. Или см. указание к 4a.

4a. По векторному полю v на окружности построим отображение $f_v:[0,1]\to S^1$, для которого $f_v(0)=f_v(1)$. Возьмем $n>0$, для которого $|f_v(x)-f_v(y)|<1$ при $x-y<1/n$. Обозначим через $\Delta(f_v,k,n)\in[0,1)$ минимальный угол против часовой стрелки, на который нужно повернуть $f_v(\frac{k-1}{n})$, чтобы получить $f_v(\frac{k}{n})$. Иными словами, $\Delta(f_v,k,n)$ однозначно определяется из условия $f_v(\frac{k}{n})=f_v(\frac{k-1}{n})e^{2\pi i\Delta(f_v,k,n)}$. Зададим число $\deg v=\deg f_v$ формулой $\deg v:=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta(f_v,k,n)$, Иными словами,

$$\deg v:=\int_0^1 df_v(t):=\lim_{\max(t_{k+1}-t_k)\to 0}\{\sum_{k=1}^{n}\Delta(f_v,t_k,t_{k-1})\mid 0=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=1\},$$

где $\Delta(f_v,t_k,t_{k-1})\in[0,1)$ аналогично однозначно определяется из условия $f_v(t_k)=f_v(t_{k-1})e^{2\pi i\Delta(f_v,t_k,t_{k-1})}$ для $t_k-t_{k-1}<1$.

Ответ: $\mathbb{Z}$.

4. Ответы: (b) $\mathbb{Z}^3$. (c) $\mathbb{Z}^{F-1}=\mathbb{Z}^{E-V+C}$.

8. (d) Можно пытаться сделать аналогично [Pr95]. Можно аналогично дальнейшему — определите класс Эйлера $e(N)$ как препятствие к построению такого поля, а потом докажите его полноту и вычислите его.

10. Ответы: $0, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$.

(a) Обозначим через $f : A \to \mathbb{R}^3$ проекцию полусферы A из точки $(-1, 0, 0)$ на плоскость $z = 1$. Постройте отображение $f_* : V(A) \to V(f(A))$ и докажите, что оно взаимно-однозначно.

11b. Ответ: $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

12. Ответы: (b) $\mathbb{Z}_2$, (c) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Касательные векторные поля: общее положение.

Определение числа $\chi(N)$ с использованием общего положения. Рассмотрим касательное векторное поле общего положения на многообразии N. Общность положения означает, что множество точек многообразия N, в которых вектор поля нулевой, конечно, причем в малой окрестности каждой такой точки поле линейно с точностью до малых высшего порядка по сравнению с размером окрестности: $v(x) = Ax + o(|x|)$. Знаком такой точки называется $\operatorname{sgn}\det A$. Количество этих точек с учетом знака и называется $\chi(N)$.

Набросок доказательства корректности предыдущего определения. Возьмем гомотопию общего положения между двумя касательными векторными полями v и v' общего положения на многообразии N. Ее можно представлять себе как касательное векторное поле общего положения на $N \times I$. Общность положения означает, что множество точек многообразия $N \times I$, в которых вектор этого поля нулевой, является несвязным объединением отрезков и окружностей. На них можно ввести ориентацию (подумайте, как!). Если один из этих отрезков соединяет *разные* основания $N \times 0$ и $N \times 1$, то соответствующие точки обнуления исходных полей v и v' имеют одинаковый знак, а если *одинаковые*, то разный. Поэтому количества точек обнуления с учетом знака для v и для v' равны. Детали см. в [DNF79, Ч. II, §13].

Набросок доказательства теоремы Эйлера-Пуанкаре для ориентируемых многообразий. Из рис. 53 или рис. 54 видно, что $\chi(N) = 2 - 2g(N)$. Поэтому при $g(N) \neq 1$ на сфере с g ручками не существует ненулевого касательного векторного поля. А такое поле на торе построено на рис. 52. (Такое поле на торе можно получит также из касательного векторного поля общего положения 'сокращением' точек разных знаков.) QED

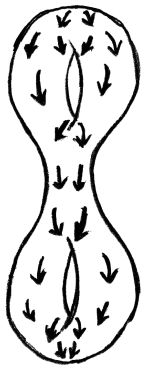


Рис. 53: Векторное поле скоростей воды, стекающей по сфере с ручками (сделать верхние и нижние векторы почти горизонтальными!!!).

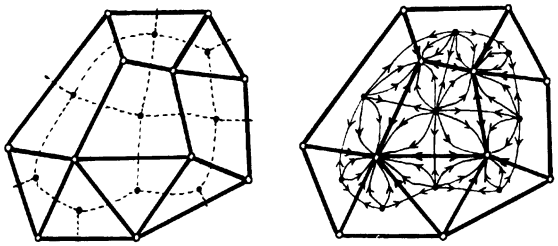


Рис. 54: Построение векторного поля по разбиению на многоугольники

Касательные векторные поля: триангуляции.

Приведем определение числа Эйлера через триангуляции и соответствующее доказательство теоремы Эйлера-Пуанкаре. Оно сложнее приведенного в [Pr95], но может быть обобщено на случай нормальных полей на 2-многообразиях и на случай многомерных многообразий.

Теорема о триангулируемости. [Pr04, 17.2] *Любое компактное гладкое многообразие топологически гомеоморфно телу некоторого симплициального комплекса.*

Хотя мы работаем с гладкими многообразиями, более сильная версия этой теоремы [MS74, Теорема 10.6] нам не понадобится.

Начало доказательства теоремы Эйлера-Пуанкаре для ориентируемых многообразий. Слово 'поле' будет означать 'ненулевое касательное векторное поле'. Поле на торе построено на рис. 52. Поэтому и по теореме классификации замкнутых ориентируемых 2-многообразий достаточно доказать, что при $g(N) \neq 1$ на сфере с g ручками N поля не существует. (Впрочем, приводимые рассуждения хороши тем, что дают ответ, даже если мы его заранее не знаем.)

Возьмем некоторое разбиение U 2-многообразия N на многоугольники. Обозначим через U^* двойственную к ней схему (см. определение в пункте 'форма пересечений' главы 2). Выберем U настолько мелким, чтобы касательные плоскости в любых двух точках любой грани разбиения U^* не были бы ортогональны.

Для случая сферы N следующие рассуждения иллюстрируются рисунком 55. Очевидно, что

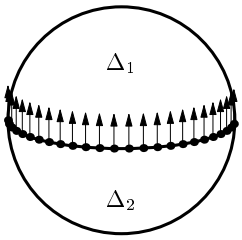


Рис. 55: Начало построения векторного поля на сфере с ручками

можно построить поле на U_0^*. Ясно, что это поле единственно (с точностью до непрерывной деформации в классе полей на U_0^*). Поэтому существование поля на N равносильно продолжаемости построенного поля с U_0^* на N.

Теорема продолжаемости. *На плоскости ненулевое векторное поле продолжается с граничной окружности диска на диск тогда и только тогда, когда число оборотов вектора при обходе этой окружности равно нулю.*

(Эта теорема равносильна основной теореме топологии, приведенной в главе 6 — докажите!)

Вообще, роль теории препятствий состоит в *сведении* топологических задач на *произвольном* многообразии к похожим задачам для *простейших, модельных* многообразий. Важно, что для применения теории препятствий можно воспользоваться *результатом* решения этих простейших задач, не вникая в его доказательство. Указанные простейшие задачи могут решаться как специфическими методами, так и средствами теории препятствий. В этой главе мы приводим решения простейших задач без доказательства.

Построение препятствующей расстановки. Возьмем произвольное ребро e разбиения U^*. Ввиду мелкости разбиения U ортогональная проекция касательной плоскости в произвольной точке этого ребра на касательную плоскость α_e в некоторой фиксированной точке этого ребра переводит ненулевые векторы в ненулевые. Значит, касательные плоскости в разных точках этого ребра можно отождествить с одной плоскостью α_e. Если на плоскости лежит отрезок, и в его концах заданы ненулевые вектора (лежащие в плоскости), то это поле из двух векторов можно продолжить до поля ненулевых векторов на всем отрезке. Поэтому построенное на U_0^* поле можно продолжить на U_1^*. Заметим, что такое продолжение неоднозначно. Обозначим полученное на U_1^* поле через v. Пример такого поля для сферы приведен на рис. 55.

Попробуем теперь продолжить поле v с U_1^* на все N. Фиксируем ориентацию 2-многообразия N. Возьмем произвольную грань Δ разбиения U^*. Ввиду мелкости разбиения U ортогональная проекция касательной плоскости в произвольной точке этой грани на касательную плоскость α_Δ в некоторой фиксированной точке этой грани переводит ненулевые векторы в ненулевые.

Ориентация грани Δ порождает направление на ее граничной окружности. При обходе этой окружности вдоль этого направления ортогональная проекция вектора нашего поля на α_Δ повернется на некоторое целое число оборотов. Поставим полученное число оборотов в вершину исходного разбиения U, лежащую в диске Δ. Для случая сферы (рис. 55) в обоих вершинах будут стоять единицы. Полученная расстановка целых чисел в вершинах называется *препятствующей* и обозначается $\varepsilon(v)$. По теореме о продолжаемости

продолжение поля с U_1^* на N возможно тогда и только тогда, когда $\varepsilon(v) = 0$.

Определение различающей расстановки. Если $\varepsilon(v) \neq 0$, то поле v не продолжается на N, но еще не все потеряно: можно попытаться так изменить поле v на U_1^*, чтобы препятствующая расстановка стала равной нулю. Для этого выясним, как $\varepsilon(v)$ зависит от v.

Различие между полями v и u на U_1^*, совпадающим на U_0^*, можно измерять (и задавать) так. Фиксируем ориентацию каждого ребра разбиения U. Ориентируем каждое ребро a^* схемы U^* так, чтобы стрелки на a и на a^* (в этом порядке) образовали положительный базис на N. Пусть точка x движется по ребру a^* вдоль направления, а потом обратно. При движении 'туда' будем рассматривать вектор $u(x)$, а при движении 'обратно' — вектор $v(x)$. Поставим на ориентированном ребре a разбиения U число оборотов ортогональной проекции рассматриваемого вектора на α_a при этом движении. (Например, для поля u на рис. 56 и поля v, направленного вертикально вверх, на ребре стоит -1.) Полученную расстановку целых чисел на ориентированных ребрах разбиения U назовем *различающей* и обозначим $d(v, u)$.

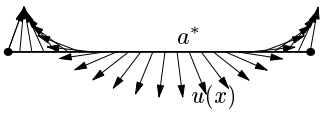


Рис. 56: Подкручивание векторного поля на один оборот

Изменение препятствующей расстановки и определение границы ребра. При изменении поля на ребре a^* 'на $+1$ оборот' к $\varepsilon(v)$ прибавляется расстановка $+1$ в начале ребра a и -1 в его конце (и 0 на всех остальных вершинах). Эта расстановка называется *границей ребра* a и обозначается ∂a. Если

$$d(v, v') = n_1 a_1 + \ldots + n_s a_s, \quad \text{то} \quad \varepsilon(v) - \varepsilon(v') = n_1 \partial a_1 + \ldots + n_s \partial a_s.$$

Завершение доказательства. Из последней формулы вытекает, что *сумма* чисел препятствующей расстановки не зависит от v. А из рис. 53 или рис. 54 можно понять, что эта сумма равна $\chi(N) = 2 - 2g(N)$. Поэтому при $g(N) \neq 1$ на сфере с g ручками N поля не существует. QED

Приведем другое завершение доказательства. Оно длиннее предыдущего, но является иллюстрацией общего подхода теории препятствий. В частности, оно интересно тем, что дает способ *построения* поля для случая, когда препятствие равно нулю. Поэтому его, в отличие от приведенного выше короткого рассуждения, можно применить к доказательству обобщений теоремы Эйлера-Пуанкаре (см. далее).

Определение группы $H_0(N; \mathbb{Z})$, класса $e(N)$ и другое завершение доказательства. Назовем *границей* сумму $n_1 \partial a_1 + \ldots + n_s \partial a_s$ границ нескольких ребер с целыми коэффициентами. Назовем расстановки ε_1 и ε_2 *гомологичными*, если $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ есть граница. Ясно, что

(i) При изменении поля v на U_1^* препятствующая расстановка $\varepsilon(v)$ заменяется на гомологичную расстановку.

(ii) Если $\varepsilon(v)$ является границей, то можно так изменить v на v' (на U_1^*, не меняя на U_0^*), чтобы получилось $\varepsilon(v') = 0$.

(iii) Гомологичность является отношением эквивалентности на множестве расстановок.

(Для доказательства утверждения (ii) заметим, что если $\varepsilon(v) = n_1 \partial a_1 + \ldots + n_s \partial a_s$, то можно взять поле v' на U_1^*, для которого $d(v, v') = n_1 a_1 + \ldots + n_s a_s$, тогда получим $\varepsilon(v') = 0$.)

Нульмерной группой гомологий $H_0(U; \mathbb{Z})$ разбиения U (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$) называется группа расстановок с точностью до гомологичности.

Классом Эйлера схемы U называется класс гомологичности препятствующего цикла:

$$e(U) := [\varepsilon(v)] \in H_0(U; \mathbb{Z}).$$

Это определение корректно ввиду утверждения (i).

Теперь теорема Эйлера-Пуанкаре вытекает из утверждений (i) и (ii) вместе с нижеследующей задачей 8.1.cd. QED

8.1. Возьмем произвольное разбиение U замкнутого связного 2-многообразия N.

(a) Дайте определение группы $H_0(U;\mathbb{Z})$ (независимое от рассуждений, в которых она появилась).

(b) Группа $H_0(U;\mathbb{Z})$ и класс $e(U)$ не зависят от выбора U для фиксированного N.

(c) $H_0(U;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

(d) $e(U) = \chi(N) = 2 - 2g(N)$.

Нормальные векторные поля для двумерных многообразий

Единичным нормальным векторным полем к окружности $S^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ \ z = 0\}$ в трехмерном пространстве называется семейство нормальных к ней единичных векторов $v(x)$ в точках x окружности, непрерывно зависящих от точки x. Будем называть единичное нормальное векторное поле просто *нормальным полем.*

Понятие *гомотопности* нормальных полей вводится дословно так же, как и для ненулевых касательных векторных полей.

8.2. (a) Постройте нормальное поле.

(b) Постройте другое (т.е. не гомотопное уже построенному) нормальное поле.

(c) Опишите нормальные поля с точностью до гомотопности.

(d) Опишите нормальные поля с точностью до гомотопности для *заузленной* гладкой окружности в $\mathbb{R}^3$ (т.е. на образе гладкого вложения $S^1 \to \mathbb{R}^3$, определение которого дается аналогично нижеследующему).

Неформально, *гладким вложением* $f : S^2 \to \mathbb{R}^m$ сферы называется изображение сферы в $\mathbb{R}^m$ без самопересечений, для которого в любой точке существует касательная плоскость. Формально, гладкое отображение $f : S^2 \to \mathbb{R}^m$ называется *гладким вложением*, если оно инъективно и якобиан $df(x)$ невырожден для любой точки $x \in S^2$.

Единичным нормальным векторным полем на $f(S^2)$ называется семейство нормальных к $f(S^2)$ векторов $v(x)$ в точках $f(x) \in f(S^2)$, непрерывно зависящих от точки $x \in S^2$. Будем называть единичное нормальное векторное поле просто *нормальным полем.* Аналогично определяются гладкие вложения и нормальные поля для тора, бутылки Клейна, диска и т.д.

8.3. (a) Любое гладкое вложение тора в $\mathbb{R}^3$ имеет нормальное поле.

(b) Никакое гладкое вложение листа Мебиуса в $\mathbb{R}^3$ не имеет нормального поля.

8.4. Постройте гладкие вложения в $\mathbb{R}^4$

(a) листа Мебиуса M; (b) бутылки Кляйна K; (c) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

8.5. Постройте нормальные поля для этих вложений листа Мебиуса и бутылки Кляйна в $\mathbb{R}^4$.

8.6. (a) Если гладкое вложение $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ имеет нормальное поле, то оно имеет пару линейно-независимых нормальных полей.

(b) То же для тора.

(c) Верно ли то же для бутылки Клейна?

8.7. (a) Любое гладкое вложение диска в $\mathbb{R}^4$ имеет нормальное поле.

(b) То же для тора с дыркой.

(c) Верно ли то же для листа Мебиуса?

Теорема о нормальных полях. *Любое гладкое вложение сферы с ручками в $\mathbb{R}^m$ имеет нормальное поле.*

8.8. (a) Докажите теорему о нормальных полях для $m = 4$.

(b) Никакое гладкое вложение $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ не имеет нормального поля.

(c) Существует гладкое вложение $f : K \to \mathbb{R}^4$, не имеющее нормального поля.

Набросок определения нормального числа Эйлера $\overline{e}(f)$ для гладкого вложения $f : N \to \mathbb{R}^4$ сферы с ручками. Рассмотрим нормальное векторное поле (не предполагаемое ненулевым) *общего положения* на $f(N)$. Ввиду общности положения множество точек многообразия N, в которых вектор этого поля нулевой, является конечным числом точек. У этих точек можно определить знак (определите!). Количество этих точек с учетом знака и называется $\overline{e}(f)$. Корректность этого определения доказывается аналогично случаю касательных векторных полей.

8.9. Пусть $f : N \to \mathbb{R}^4$ — гладкое вложение сферы с ручками.

(a) Постройте препятствие $\overline{e}(f) \in \mathbb{Z}$ к существованию нормального поля.

Указание. Либо приведите детали к данному выше наброску, либо сначала постройте поле на вершинах, затем продолжите на ребра и потом попытайтесь продолжить на грани.

(b) Пусть $f' : N \to \mathbb{R}^4$ — гладкое вложение, находящееся в *общем положении* с f. Общность положения означает, что $fN \cap f'N$ есть конечное число точек пересечения, в каждой из которых касательные плоскости к fN и к $f'N$ порождают все $\mathbb{R}^4$. Фиксируем ориентацию на N и в $\mathbb{R}^4$. Для каждой из точек пересечения возьмем положительные базисы e_1, e_2 и e'_1, e'_2 в касательных плоскостях к fN и к $f'N$. Если e_1, e_2, e'_1, e'_2 — положительный базис пространства $\mathbb{R}^4$, то назовем точку пересечения положительной, иначе отрицательной.

Докажите, что сумма знаков точек самопересечения равна $\overline{e}(f)$.

(c) $\overline{e}(f) = 0$.

8.10. Пусть $f : N \to \mathbb{R}^4$ — гладкое вложение замкнутого *неориентируемого* 2-многообразия.

(a) Постройте препятствие $\overline{e}(f) \in \mathbb{Z}$ к существованию нормального поля. (Это именно целое число, а не вычет $\mod 2$.)

(b) $\overline{e}(N)$ четно.

(c)* $\overline{e}(N) \equiv 2\chi(N) \mod 4$.

8.11. (a) Постройте гладкое вложение $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$.

(b) Найдите $\overline{e}(f)$ для построенного вложения $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$.

(c) Существует гладкое вложение бутылки Кляйна в $\mathbb{R}^4$ с ненулевым нормальным числом Эйлера (и, стало быть, не имеющее нормального поля).

(d) Для любого i с условиями $-2\mu \leqslant i \leqslant 2\mu$, $i \equiv 2\mu \mod 4$, существует такое вложение $f_i : N_\mu \to \mathbb{R}^4$ сферы с μ пленками Мебиуса N_μ, что $\overline{e}(f_i) = i$.

Заметим, что для других i такого вложения не существует [Ma69]. Удивительно, что доказательство этого факта сложно.

8.12. Опишите нормальные поля с точностью гомотопности на гладко вложенной в $\mathbb{R}^4$

(a) сфере; (b) торе; (c) листе Мебиуса; (d) бутылке Кляйна; (e) 2-многообразии.

Примечание: ответ может зависеть от гладкого вложения в $\mathbb{R}^4$.

8.13. Докажите теорему о нормальных полях для $m \geqslant 5$.

8.14. (a)-(e) То же, что в задаче 8.12, с заменой $\mathbb{R}^4$ на $\mathbb{R}^5$.

Указания к некоторым задачам.

8.1. (d) Для поля v, изображенного на рис. 55, $e(v) = 1 + 1 = 2$; разберитесь, почему не $1 - 1 = 0$; см. также рис. 53, 54.

8.2. (c,d) Ответы: $\mathbb{Z}$.

8.6. (c) Нет.

8.7, 8.13. Сначала постройте нормальное поле на вершинах, затем продолжите его на ребра и потом продолжите его на грани.

8.7.c. Верно. Верно даже для любого 2-многообразия с непустым краем.

8.8. (a) Следует из 8.9.c и полноты препятствия, построенного в 8.9.a.

(b) Следует из 8.10.ac.

(c) Следует из 8.10.a и 8.11.c.

8.9. (b) Постройте препятствие $e_1(f)$ к существованию отображения $f' : N \to \mathbb{R}^4$, близкого к f, образ которого не пересекает $f(N)$. Затем докажите, что $fN \cap f'N = e_1(f) = \overline{e}(f)$.

(c) Возьмем гомотопию $F : N \times I \to \mathbb{R}^m$ общего положения между f' и отображением, образ которого не пересекает $f(N)$. Тогда $f^{-1}FN$ есть одномерное ориентированное подмногообразие (многообразия N) с краем $f^{-1}f'N$.

8.10. (b) $\overline{e}(f) \equiv fN \cap f'N \equiv 0 \mod 2$.

8.11. (a) Зададим отображение $S^2 \to \mathbb{R}^4$ формулой $(x, y, z) \mapsto (x^2, xy, yz, zx)$.

(c) Возьмите связную сумму двух вложений $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ с равными нормальными числами Эйлера.

(d) Возьмите связную сумму вложений $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$.

8.12. Ответы: (a) 0, (b) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

8.14. Ответы: (a,b) $\mathbb{Z}$, (c) 0.

9 Векторные поля для многомерных многообразий

Основные результаты.

Векторные поля и поля направлений на подмногообразиях размерности 3 и более в евклидовом пространстве определяются аналогично случаю 2-многообразий. (Те, кто не знакомы с многообразиями размерности больше 3, могут считать, что все рассматриваемые в этом пункте многообразия трехмерны.)

1. Ненулевое касательное векторное поле существует на

(a) любом многообразии с краем; (b) $S^3, S^2 \times S^1, S^1 \times S^1 \times S^1$; (c) S^{2k-1}; (d) $S^{2k-1} \times S^q$.

Эйлерова характеристика $\chi(N)$ многообразия N определяется как знакопеременная сумма по k количеств k-мерных граней в разбиении этого многообразия на многогранники. Можно проверить, что эйлерова характеристика не зависит от выбора такого разбиения. Существуют простые способы вычислять эйлерову характеристику.

2. (a) **Теорема Хопфа.** На замкнутом многообразии N существует ненулевое касательное векторное поле тогда и только тогда, когда эйлерова характеристика $\chi(N) = 0$.

(b) **Следствие (доказательства).** На любом нечетномерном многообразии существует ненулевое касательное векторное поле.

(c) **Следствие.** На сфере S^n существует ненулевое касательное векторное поле тогда и только тогда, когда n нечетно.

(d) $\chi(P \times Q) = \chi(P) \times \chi(Q)$

При доказательстве теоремы Хопфа и других резултатов этого параграфа используйте следующие два факта (см. главу 6).

Теорема общего положения. *В n-мерном пространстве ненулевое векторное поле (векторов n-мерного пространства), заданное на границе k-мерного шара, продолжается до ненулевого векторного поля на шаре при $k < n$.*

Основная теорема топологии. *В n-мерном пространстве ненулевое векторное поле (векторов n-мерного пространства), заданное на границе n-мерного шара, продолжается до ненулевого векторного поля на шаре тогда и только тогда, когда алгебраическое число векторов на границе, смотрящих в данное направление общего положения, равно нулю.*

Будет удобно также использовать следующее определение (и его многомерные аналоги).

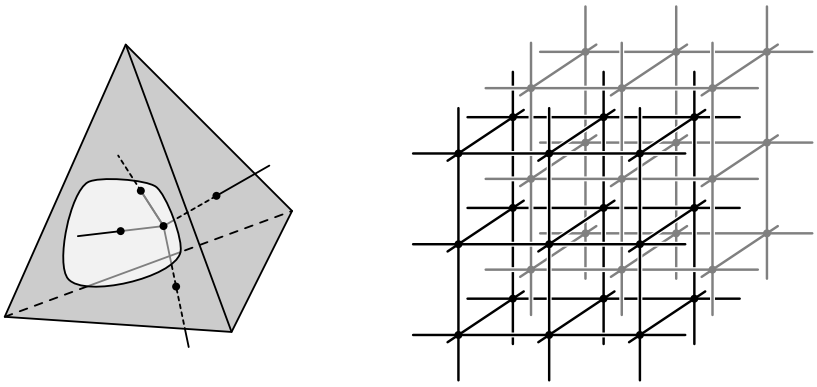


Рис. 57: Двойственные разбиения для разбиений замкнутого 3-многообразия

Определение двойственного разбиения (рис. 57). Возьмем некоторое разбиение U замкнутого 3-многообразия на многогранники. В каждом многограннике x разбиения выберем по точке x^*. Для каждой грани f разбиения соединим ребром f^* две построенные точки, лежащие в соседних по этой грани многогранниках разбиения. (Это ребро протыкает грань f разбиения; рис. 57.) Для каждого ребра a разбиения натянем двумерный многоугольник a^* на построенные ребра, соответствующие тем граням разбиения, которые содержат ребро a. (Этот многоугольник протыкается ребром a; рис. 57.) Объединение полученных многоугольников разбивает 3-многообразие N на трехмерные многогранники, каждый из которых содержит ровно одну вершину исходного разбиения U. Полученное разбиение U^* называется *двойственным* к U.

Понятия *нормального* векторного поля на гладком подмногообразии евклидова пространства определяются аналогично случаю 2-многообразий. Слово ‘гладкий’ будем опускать.

Заметим, что наличие ненулевого нормального поля, вообще говоря, зависит от подмногообразия, а не только от его класса диффеоморфности, см. задачи 8.5 и 8.8.c.

3. Пусть $m = n + 1$. Если N ориентируемо, то существует ненулевое нормальное поле.

Обратное утверждение также верно. Из него вытекает, что не существует замкнутого неориентируемого n-подмногообразия в $\mathbb{R}^{n+1}$. Действительно, пусть существует. Аналогично теореме Жордана доказывается, что подмногообразие делит $\mathbb{R}^{n+1}$ на части. Тогда существует ненулевое нормальное поле, направленное во внешнюю часть. Значит, многообразие ориентируемо.

Теорема о нормальных полях. *Если $m \geqslant 2n$ или $m \leqslant n + 2$, то для любого замкнутого ориентируемого n-подмногообразия в $\mathbb{R}^m$ существует ненулевое нормальное векторное поле.*

4. (a) Докажите теорему о нормальных полях для $m \geqslant 2n + 1$.

(b) На любом n-подмногообразии с непустым краем в $\mathbb{R}^{2n}$ имеется нормальное поле.

(c) Докажите теорему о нормальных полях для $m = 2n$.

(d) То же для $m = n + 2$.

При $n + 2 < m < 2n$, или при $n + 2 = m$ для подмногообразий с краем, ненулевого нормального векторного поля может не быть.

5. (a) Существует ориентируемое 3-подмногообразие с краем в $\mathbb{R}^5$, не имеющее нормального поля.

(b) Существует вложение $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{R}^7$.

(c)* Ни для какого такого вложения не существует нормального поля.

Доказывать утверждения 5c и 6b лучше при изучении дальнейшего материала.

6. Для любого вложения $f : N \to \mathbb{R}^5$ ориентируемого 3-многообразия с краем

(a) постройте препятствие $\overline{e}(f) \in H_1(N, \partial N; \mathbb{Z})$ (*нормальный класс Эйлера*) к существованию нормального поля. (В частности, определите группу $H_1(N, \partial N; \mathbb{Z})$ в процессе построения.)

(b)* если в $H_1(N, \partial N; \mathbb{Z})$ нет элементов порядка 2, то $\overline{e}(f)$ четно, т.е. $\overline{e}(f) = 2x$ для некоторого $x \in H_1(N, \partial N; \mathbb{Z})$.

Полный ответ на следующие вопросы неизвестен:

(1) при каких (m, n) для любого n-подмногообразия в $\mathbb{R}^m$ существует ненулевое нормальное векторных поле?

(2) то же с заменой 'любого n-подмногообразия' на 'подмногообразие, диффеоморфное S^n'.

7. Постройте бесконечное количество попарно негомотопных ненулевых векторных полей на

(a) $S^1 \times S^1 \times S^1$; (b) $S^1 \times S^2$; (c) S^3.

8. (a) Постройте отображение $D : V(N) \to H_1(N; \mathbb{Z})$ для 3-многообразий, обобщая построение различающей расстановки из предыдущего пункта. (Группа $H_1(N; \mathbb{Z})$ естественно появится в процессе доказательства, поэтому для решения данной задачи не обязательно знать, что это такое. Если не получается, то см. следующий пункт.)

(b) Докажите сюръективность отображения D.

(c) $V(S^3) \cong \mathbb{Z}$ (умножение на $V(S^3)$ задается умножением кватернионов).

(d)* Опишите $V(S^1 \times S^2)$, $V(S^1 \times S^1 \times S^1)$.

(e)* Классифицируйте поля направлений на ориентируемых 3-многообразиях. По поводу n-мерного случая и связи с лоренцевыми метриками см. [Ko01].

Теорема классификации векторных полей. *Если для замкнутого ориентируемого n-многообразия N выполнено $V(N) \neq \varnothing$ (т.е. если $\chi(N) = 0$), то существует сюръекция $V(N) \to H_1(N; \mathbb{Z})$ на* группу одномерных гомологий многообразия N (с целыми коэффициентами).

Более того, существует такое отображение $D : V(N) \times V(N) \to H_1(N; \mathbb{Z})$, что $D(\cdot, v)$ сюръективно и $D(u, v) + D(v, w) = D(u, w)$ для любых $u, v, w \in V(N)$.

При $n = 2$ отображение $D(\cdot, v)$ является взаимно однозначным соответствием.

При $n = 3$ число прообразов класса $x \in H_1(N, \mathbb{Z})$ при отображении $D(\cdot, v)$ равно $2x \cap H_2(N; \mathbb{Z})$ (группа $H_2(N; \mathbb{Z})$ и умножение $\cap : H_1(N; \mathbb{Z}) \times H_2(N; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ определены в главе 4).

При $n \geqslant 4$ при отображении $D(\cdot, v)$ у каждого класса ровно два прообраза.

Для $n = 2$ эта теорема является фольклорным результатом начала 20-го века. Для $n = 3$ она является следствием теоремы Штифеля о параллелизуемости 3-многообразий (см. начало следующего параграфа) и теоремы Понтрягина из главы 6 [CRS]. Для $n = 4$ эта теорема, видимо, является фольклорным результатом середины 20-го века [Ko81, Theorem 18.2], полученным с помощью теории, основы которой здесь излагаются.

По задаче 8а указанное отображение $D(\cdot, v)$ не является взаимно однозначным соответствием для $N = S^3$.

Построение гомологического инварианта векторных полей

В этом пункте мы определяем группу $H_1(N, \mathbb{Z})$ и доказываем теорему классификации векторных полей для 2-многообразий тем способом, который позволяет определить инвариант D для общего случая. Для $n = 2$ этот способ более сложен, чем намеченный в задаче ???, зато новый способ проходит для общего случая.

Набросок определения класса $D(u, v)$, использующего общее положение. Рассмотрим произвольную гомотопию u_t общего положения между ненулевыми векторными полями $u = u_0$ и $v = u_1$ на многообразии N (векторы гомотопии не предполагаются ненулевыми). Общность положения означает, что множество точек многообразия, в которых $u_t = 0$ для некоторого t, является несвязным объединением окружностей. Используя нашу гомотопию, на этих окружностях можно ввести ориентацию. Это объединение ориентированных окружностей с точностью до *гомологичности* и называется классом $D(u, v)$. Два набора непересекающихся ориентированных окружностей называются *гомологичными*, если существует ориентированное 2-многообразие в $N \times I$, ориентированный край которого есть объединение первого набора в $N \times 0$ и второго набора в $N \times 1$. Доказательство корректности этого определения аналогично случаю $\chi(N)$.

Далее мы приводим аккуратное определение класса $D(u, v)$, использующее разбиения.

Определение различающего цикла. Как и в доказательстве теоремы Эйлера-Пуанкаре через триангуляции, возьмем разбиение U многообразия N и двойственное к ней разбиение U^*, а также фиксируем ориентации. Рассмотрим два поля u и v на многообразии N. Поле u гомотопно такому, которое совпадает с v на U_0^*. Поэтому будем считать, что $u = v$ на U_0^* (заметим, что наши построения могут зависеть от выбора совмещения полей на U_0^*). Тогда можно определить различающую расстановку $d(u, v)$, как и в доказательстве теоремы Эйлера-Пуанкаре. Ясно, что $d(u, u) = 0$ и что $d(u, v) + d(v, w) = d(u, w)$. Поскольку поле u продолжается на грани схемы U^*, то выполнено следующее *правило Кирхгофа:*

для любой вершины A разбиения U сумма чисел расстановки $d(u, v)$ на входящих в A ребрах равна сумме чисел расстановки $d(u, v)$ на выходящих из A ребрах.

Такие расстановки называются *циклами.*

Изменение различающего цикла. Ясно, что если $d(u, v) = 0$, то поля u и v гомотопны. Обратное неверно, как показывает пример следующей гомотопии. Для вершины f^* изменим поле u так, чтобы вектор в f^* сделал один оборот против часовой стрелки, вектора в маленькой окрестности вершины f^* 'потянулись' за вектором в f^*, а вне этой маленькой окрестности поле осталось прежним. Обозначим полученное поле через u'. Понятно, что $d(u', u)$ есть расстановка ± 1 (в зависимости от ориентации) на ребрах, ограничивающих грань f, и нулей на всех остальных ребрах. Эта расстановка называется *границей грани f* и обозначается ∂f.

В окрестностях вершин $f_1^*, \ldots, f_s^*$ сделаем описанную выше гомотопию поля u, поворачивая векторы в этих гранях на $n_1, \ldots, n_s$ оборотов, соответственно. Обозначим полученное поле через $u(n_1, \ldots, n_s)$ и назовем его *подкруткой* поля u. Тогда $d(u(n_1, \ldots, n_s), u) = n_1 \partial f_1 + \ldots + n_s \partial f_s$.

Теперь рассмотрим гомотопию u_t между полями u_0 и u_1, совпадающими на U_0^* (правда, эта гомотопия может менять поле даже на U_0^*). Для каждой грани f_i обозначим через n_i число оборотов при изменении t от 0 до 1 вектора $u_t(f^*)$. Легко проверить, что

$$d(u_0, v) - d(u_1, v) = n_1 \partial f_1 + \ldots + n_s \partial f_s.$$

Определение группы $H_1(N; \mathbb{Z})$ и завершение доказательства. Назовем *границей* сумму $n_1 \partial f_1 + \ldots + n_s \partial f_s$ границ нескольких граней с целыми коэффициентами. Назовем циклы γ_1 и γ_2 *гомологичными*, если $\gamma_1 - \gamma_2$ есть граница.

Одномерной группой гомологий $H_1(U, \mathbb{Z})$ схемы U (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$) называется группа циклов с точностью до гомологичности. Обозначим класс гомологичности различающего цикла через

$$D(u, v) := [d(u, v)] \in H_1(U, \mathbb{Z}).$$

Ясно, что отображение $D : V(N) \times V(N) \to H_1(U, \mathbb{Z})$ уже не зависит от выбора совмещений полей на U_0^* и поэтому корректно определено.

Так как $d(u, v) + d(v, w) = d(u, w)$, то $D(u, v) + D(v, w) = D(u, w)$.

Чтобы доказать сюръективность отображения $D(\cdot, v)$, возьмем произвольный цикл γ. Возьмем поле u равным v на U_0^*. На каждом ребре a^* определим u как $\gamma(a)$-кратную подкрутку поля v. Тогда $d(u,v)=\gamma$, поэтому $D(u,v)=[\gamma]$. QED

Доказательство инъективности отображения $D(\cdot, v)$ для $n=2$. Из теоремы продолжаемости (см. пункт 'касательные векторные поля: триангуляции') вытекает следующее утверждение (докажите!).

Два ненулевых касательных к плоскости векторных поля, заданных на отрезке (лежащем в плоскости) и совпадающие на его концах, гомотопны тогда и только тогда, когда количество поворотов вектора первого поля при движении от начала отрезка к его концу равно аналогичному количеству для второго поля.

По этому утверждению и по теореме гомотопности если $u=v$ на U_0^* и $d(u,v)=0$, то поля u и v гомотопны неподвижно на U_0^*.

Если $D(u_0,v)=D(u_1,v)$ для некоторых полей u_0 и u_1, совпадающих на U_0^*, то $d(u_0,v)-d(u_1,v)=n_1\partial f_1+\ldots+n_s\partial f_s$ для некоторых целых чисел $n_1,\ldots,n_s$. Тогда $u_0\simeq u_0(n_1,\ldots,n_s)\simeq u_1$. QED

9. Возьмем произвольное разбиение U замкнутого связного 2-многообразия N.

(a) Дайте определение группы $H_1(U;\mathbb{Z})$, независимое от рассуждений, в которых она появилась.

(b) Группа $H_1(U;\mathbb{Z})$ и класс $D(u,v)$ 'одинаковы' для гомеоморфных схем.

(Поэтому будем обозначать группу через $H_1(N,\mathbb{Z})$.)

(c) $H_1(U;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^{2g}$ для схемы U сферы с g ручками.

Указания к некоторым задачам.

2. (b) Препятствие $e(-v)$ к продолжению поля $-v$ противоположно по знаку препятствию $e(v)$. С другой стороны $e(-v)=e(v)$.

(c) Постройте векторное поле скоростей воды, текущей от северного полюса к южному. Докажите, что $\chi(S^{2k})=2$.

(d) Касательное векторное поле на $P\times Q$ общего положения, если оба его 'проекции' на сомножители общего положения. Пусть e и f — касательные векторные поля общего положения на P и на Q. Тогда $e+f$ — касательное векторное поле общего положения на $P\times Q$.

4. (c,d) Пусть $f:N\to\mathbb{R}^m$ — вложение замкнутого ориентируемого n-многообразия N. Постройте препятствие $\overline{e}(f)\in H_{2n-m}(N;\mathbb{Z})$ (*нормальное число Эйлера*) к существованию нормального поля. Докажите, что $\overline{e}(f)=0$.

(d) Используйте, что любые два отображения $S^k\to S^1$ гомотопны при $k>1$.

5. (a) Пример получается, если рассмотреть композицию $S^2\times D^1\to S^2\times D^3\to\mathbb{R}^5$ вложения, заданного формулой $(x,t)\to(x,tx)$ и стандартного вложения. По нормальному полю к такому вложению легко построить касательное поле на S^2.

(b) A construction of an embedding $\mathbb{C}P^2\to\mathbb{R}^7$ is as follows [BH70, p. 164, Sk08', §5]. It suffices to construct *an embedding $f_0:(\mathbb{C}P^2-B^4)\to S^6$ such that the boundary 3-sphere is the standard one* (because then f_0 could be extended to a smooth embedding $\mathbb{C}P^2\to S^7$ using bell-like functions). Recall that $\mathbb{C}P^2-B^4$ is the mapping cylinder of the Hopf map $h:S^3\to S^2$. Recall that $S^6=S^2*S^3$. Define $f_0[(x,t)]:=[(x,h(x),t)]$, where $x\in S^3$. In other words, the segment joining $x\in S^3$ and $h(x)\in S^2$ is mapped onto the arc in S^6 joining x to $h(x)$. See also [Ca39, KK95, Ma75].

(c) $\overline{w}_2(\mathbb{C}P^2)=w_2(\mathbb{C}P^2)\neq 0$.

6. (a) Аналогично предыдущему.

(b) Достаточно доказать, что $\overline{e}(f)\cap[F]\in\mathbb{Z}$ четно. (Ввиду двойственности Пуанкаре и поскольку любой элемент группы $H_2(N;\mathbb{Z})$ реализуется вложенной сферой с ручками F, см. главу 4.) Это число есть препятствие к построению нормального к $f(N)$ поля на F. Для его вычета по модулю 2 ввиду формулы Уитни из §5 имеем $\rho_2(\overline{e}(f)\cap[F])+w_2(F)=0$, поскольку $5\varepsilon_F=\tau_F\oplus\nu_{F\subset N}\oplus\nu_{N\subset\mathbb{R}^5}|_F$.

10 Классификация сечений и интегрируемые системы

Классификация сечений и зейфертовых сечений.

Обозначим через $\pi_X : X \times Y \to X$ проекцию на первый сомножитель. Отображение $s : X \to X \times Y$ называется *сечением*, если $\pi_X \circ s = \mathrm{id}_X$. Сечения называются *послойно гомотопными*, если они гомотопны в классе сечений. Обозначим через $S(\pi_X)$ множество классов послойной гомотопности сечений. Равенство между множествами означает наличие взаимно-однозначного соответствия между ними.

9. (a) $S(\pi_{S^1} : S^1 \times I \to S^1) = \{0\}$.

(b) $S(\pi_{S^1} : S^1 \times S^1 \to S^1) = \mathbb{Z}$.

(c) $S(\pi_N : N \times S^1 \to N) = H_1(N; \mathbb{Z})$ для замкнутого 2-многообразия N.

(d) $S(\pi_X)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $[X; Y]$ отображений $X \to Y$ с точностью до гомотопности (определение напомнено в начале главы 6).

Понятия векторного поля и сечения (прямого произведения) являются важнейшими частными случаями понятия *сечения расслоения*, см. пункт 'векторные расслоения'.

Рассмотрим 2-многообразие P^* с непустым краем и инволюцией t на P^*, имеющей лишь конечное число неподвижных точек.

10. Существуют такие негомеоморфные 2-многообразия P^* и P_1^* с непустыми краями и инволюциями t и t_1, имеющими лишь конечное число неподвижных точек, для которых $P^*/t \cong P_1^*/t_1$.

Сечение $s : P^* \to P^* \times S^1$ называется *симметричным*, если $p_{S^1} \circ s = p_{S^1} \circ s \circ t$. Множество симметричных сечений с точностью до гомотопии в классе симметричных сечений обозначается кратко $S(P^*, t)$. Положим $P = P^*/t$.

11. $S(P^*, t) = H_1^t(P^*, \partial P^*; \mathbb{Z}) \cong H_1(P, \partial P; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{1-\chi(P)}$, если инволюция t имеет лишь конечное число неподвижных точек. Для пространства с инволюцией симметричные гомологические группы обозначаются добавлением верхнего индекса t к обычному обозначению. Их определение естественно появляется при изучении множества $S(P^*, t)$. Читатель может придумать его сам или подсмотреть в пункте 'эквивариантные отображения' главы 6.

В приложениях (см. следующий пункт) появляются аналоги сечений для расслоений с особенностями. Приведем определение и результат для частного случая (мотивированного приложениями).

Положим $Q = Q(P^*) := P^* \times I/\{(a, 0) \sim (t(a), 1)\}$. (Выражаясь научно, это расслоение над S^1 со слоем P^* и сшивающим отображением t [BFM90, определение 2.2].)

12. $Q(P^*)$ зависит только от P, а не от P^*.

Обозначим через $p : P^* \to P$ проекцию. Определим отображение $\pi : Q \to P$ формулой $\pi[(a, t)] = p(a)$. (Это расслоение Зейферта, имеющее сингулярные слои только над звездочками и только типа $(2, 1)$.)

Вложение $f : P^* \to Q$ называется *зейфертовым сечением*, если $\pi \circ f = p$. (В гладкой категории нужно дополнительно предполагать, что f трансверсально слоям отображения π. В [BF94] сечения Зейферта назывались трансверсальными площадками.)

Теорема классификации зейфертовых сечений. [RS99"] *При фиксированных P^* и t множество X зейфертовых сечений с точностью до изотопии над π находится во взаимно-однозначном соответствии с $H_1(P, \partial P; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{1-\chi(P)}$.*

Доказательство. Определим отображение

$$q : P^* \times S^1 \cong \frac{P^* \times I}{\{(a, 0) \sim (a, 1)\}} \to \frac{P^* \times I}{\{(a, 0) \sim (t(a), 1)\}} \cong Q$$

формулой

$$q[(a, u)] = \begin{cases} [(a, 2u)] & 0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2} \\ [(t(a), 2u - 1)] & \frac{1}{2} \leqslant u \leqslant 1 \end{cases}.$$

Поскольку t инволюция, q корректно определено и непрерывно.

Пусть $f : P^* \to Q$ — сечение Зейферта. Для каждой точки $x \in P^*$, не являющейся неподвижной точкой инволюции t, существует *единственная* такая точка

$$f'(x) \in P^* \times S^1, \quad \text{что} \quad qf'(x) = f(x).$$

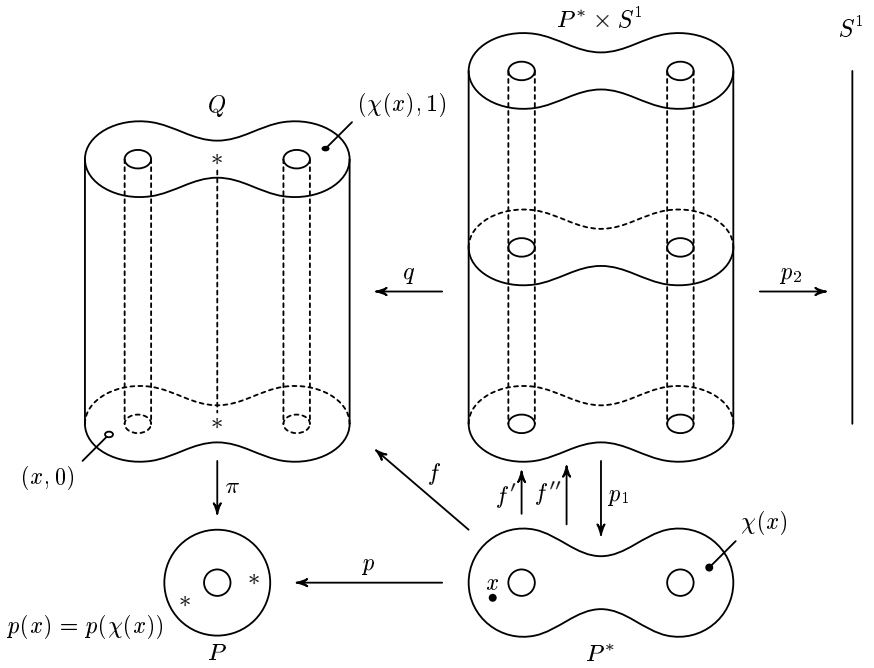


Рис. 58: Классификация зейфертовых сечений

Для каждой неподвижной точки x инволюции t существуют *две* такие точки

$$u, v \in S^1, \quad \text{что} \quad q(x, u) = q(x, v) = f(x).$$

Поскольку маленькая проколотая дисковая окрестность в P^* неподвижной точки x связна, мы можем взять в качестве $f'(x)$ либо (x, u), либо (x, v), так что отображение $f' : P^* \to P^* \times S^1$ будет непрерывным. Построенное отображение f' — (обычное) сечение тривиального расслоения $P^* \times S^1 \to P^*$.

Поскольку f — вложение, $p_{S^1} f'(x) \neq -p_{S^1} f'(t(x))$ ни для какой точки $x \in P^*$. Поэтому f' послойно гомотопно симметричному сечению f''.

Обратно, для любого симметричного сечения $F : P^* \to P^* \times S^1$, отображение $q \circ F$ является сечением Зейферта и $(q \circ F)'' = F$.

Очевидно, сечения Зейферта f и g изотопны над π тогда и только тогда, когда соответствующие симметрические сечения f'' и g'' симметрично гомотопны (или, эквивалентно, изотопны). Тогда $X = S(P^*, t) = H_1(P, \partial P; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{1-\chi(P)}$. QED

Применение к интегрируемым гамильтоновым системам

В 1994 Болсинов и Фоменко [BF94] доказали теорему о топологической траекторной классификации невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на трехмерных многообразиях постоянной энергии. Мотивировки и краткий обзор см. в [BFM90, §1], [BF94, §1]. Они доказали, что две такие системы эквивалентны, если некоторые их инварианты совпадают. Инвариантом является граф с некоторыми дополнительными метками на его вершинах и ребрах. Одним из необходимых ограничений было то, что рассматриваемая гамильтонова система не имеет неустойчивых периодических орбит с *неориентируемой* сепаратрисой. Это связано с тем, что в доказательстве использовались *сечения локально-тривиальных* расслоений. Поскольку периодические орбиты с неориентируемой сепаратрисой встречаются в примерах (например, в волчке Ковалевской), было интересно отбросить это ограничение. Это оказалось возможным благодаря использованию *зейфертовых сечений зейфертовых расслоений.*

Теорема. *Пусть X — множество невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на ориентируемых трехмерных многообразиях постоянной энергии, с точностью до непрерывной траекторной эквивалентности, сохраняющей ориентацию. Тогда существует инъекция из X в множество t-оснащенных графов с точностью до t-эквивалентности.* [RS99], [CRS00], ср. [BF94, Теорема 4.1].

Определения t-оснащенных графов и t-эквивалентности такое же, как в [BF94], см. также [BFM90], [CRS00]. Заметим, что в [BF94, §12.3 и §13.5] описан образ инъекции из теоремы и зависимость t-меток от ориентации 3-многообразия постоянной энергии. Кроме того, в [BF94,

§13] было построено в некотором смысле более простое оснащение на W, названное t-молекулой. Более общая ситуация не требует добавлений и изменений по сравнению с [BF94], только P-метки могут быть атомами со звездочками.

Доказательство теоремы основано на следующем общем наблюдении, которое может быть применено и к другим проблемам. Бифуркация торов Лиувилля в боттовой интегрируемой гамильтоновой системе может быть описана окрестностью множества $F^{-1}(c)$, где F — дополнительный интеграл и c — его критическое значение. Если критическое подмногообразие дополнительного интеграла F, соответствующее c, — окружность, то эта окрестность является расслоением Зейферта Q над (незамкнутой) 2-поверхностью P [BFM90].

Чтобы исследовать бифуркацию торов Лиувилля, построим сечение Пуанкаре потока на Q [BF94]. Если критическая окружность имеет *ориентируемую* сепаратрисную диаграмму (или, эквивалентно, P не имеет звездочек), то $Q \cong P \times S^1$ и сечения Пуанкаре могут быть выбраны среди сечений тривиального расслоения. Тогда сечения Пуанкаре классифицируются методами классической теории препятствий. Если критическая окружность имеет *неориентируемую* сепаратрисную диаграмму (или, эквивалентно, P не имеет звездочек), то расслоение Зейферта не является локально-тривиальным расслоением. Несмотря на это, сечения Пуанкаре являются зейфертовыми аналогами сечений локально-тривиального расслоения. Доказательство вышеприведенной теоремы с использованием теоремы классификации зейфертовых сечений аналогично [BF94], см. детали в [CRS00].

11 Наборы векторных полей

Введение.

Ученик Хопфа Эдуард Штифель рассмотрел проблему существования *пары, тройки, etc. линейно независимых* касательных векторных полей на данном многообразии. Ввиду каноничности процесса Грама-Шмидта ортогонализации линейную независимость можно заменить на ортонормированность.

1. Если n-многообразие ориентируемо, то любой набор из $n-1$ линейно независимых касательных векторных полей на нем можно дополнить до набора из n таких полей.

Развивая идеи Хопфа, Штифель около 1934 пришел к определению характеристических классов. (Любопытно, что Штифель начал с частного случая ориентируемых 3-многообразий и пытался построить пример такого многообразия, на котором не существует тройки линейно независимых касательных векторных полей.) Формализация была завершена Норманом Стинродом в 1940е гг. При помощи построенной теории были доказаны следующие факты.

Теорема Штифеля о параллелизуемости ориентируемых 3-многообразий. *На любом ориентируемом 3-многообразии существует тройка линейно независимых касательных векторных полей.*

Для доказательства следующих элементарно формулируемых фактов (и задачи 6 ниже) также необходимы характеристические классы (кроме 4a, части 'тогда' в задаче 4b и части 'только тогда' в задаче 4c). Далее в соответствующих местах написано, что можно вернуться к решению этих задач.

2. Для связного 2-многообразия F следующие уловия равносильны:
• На $F \times S^1$ существует пара линейно независимых касательных векторных полей;
• На $F \times I$ существует пара линейно независимых касательных векторных полей;
• F имеет непустой край или четную эйлерову характеристику.

Для n-многообразия N обозначим через N_0 дополнение до некоторого n-мерного шара в N.

3. Пусть F и F' — замкнутые 2-многообразия.

(a) На $(F \times F')_0$ есть тройка полей тогда и только тогда, когда одно из них ориентируемо, а у другого эйлерова характеристика четна.

(b) Если на $(F \times F')_0$ есть пара полей, то одно из них ориентируемо или у обоих эйлерова характеристика четна.

(c)* Верно ли обратное к (b)?

4. Пусть M — замкнутое 3-многообразие.

(a) На $M \times S^1$ существует пара полей.

(b) На $M \times S^1$ существует тройка полей тогда и только тогда, когда на M существует пара полей.

(c) На $M \times S^1$ существует четверка полей тогда и только тогда, когда M ориентируемо.

Указание. Выведите часть 'тогда' из теоремы Штифеля.

Теорема о векторных полях. *Если $n+1 = 2^r m$, где m нечетно, то на $\mathbb{R}P^n$ не существует набора из 2^r линейно независимых касательных векторных полей.*

Теорема об алгебрах с делением. *Если на $\mathbb{R}^n$ имеется структура алгебры с делением (т.е. билинейная операция умножения, относительно которой любой ненулевой элемент обратим), то n есть степень двойки.*

Более точно, *алгебры с делением на $\mathbb{R}^n$ имеются только при $n = 1, 2, 4, 8$.* Эта знаменитая теорема Ботта-Милнора-Кервера-Адамса (см. ссылки в [MS74, §4]) доказывается также с использованием топологии (но гораздо более продвинутой).

В этом параграфе приводится построение характеристических классов и наброски доказательств всех этих теорем. Дается набросок *короткого доказательства* теоремы Штифеля (оно основано на упрощении доказательства из [Ki89, §5]).

В 1935 году Хопф рассказал о результатах Штифеля о наборах касательных векторных полей на Международной топологической конференции в Москве. Там выяснилось, что Хасслер Уитни около 1934 г. тоже естественно пришел к определению характеристических классов, изучая классическую проблему топологии о вложимости многообразий.

Мы работаем в гладкой категории, т.е. все многообразия, векторные поля и отображения предполагаются гладкими. Отображение $f : N \to \mathbb{R}^m$ гладкого многообразия N называется *гладким*

погружением, если $df(x)$ невырожден для любой точки $x \in N$. Гладкое погружение $f : N \to \mathbb{R}^m$ называется *гладким вложением*, если оно инъективно.

Уитни начал с доказательства вложимости n-многообразий в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. главу 7). Его построение препятствий к вложимости (n-многообразий в $\mathbb{R}^m$ при $m < 2n$) основано на идее рассмотрении *окрестности* вложенного многообразия N. Уитни первый рассматривал взаимоотношение между $N \subset \mathbb{R}^m$ и его окрестностью в $\mathbb{R}^m$. Он создал теорию сферических расслоений и ввел так называемые классы Штифеля–Уитни $w_k \in H_{n-k}(N)$ и нормальные (двойственные) классы Штифеля–Уитни $\overline{w}_k \in H_{n-k}(N)$ гладкого n-многообразия N, которые с тех пор играют большую роль в топологии и дифференциальной геометрии. Используя свою теорию, Уитни доказал невложимость некоторых проективных пространств.

Теорема Уитни. *Если $\mathbb{R}P^n$ вложимо в $\mathbb{R}^m$ или погружаемо в $\mathbb{R}^{m-1}$, то $\binom{m}{n}$ четно.*

Следствие. *Если n есть степень двойки, то $\mathbb{R}P^n$ не погружаемо в $\mathbb{R}^{2n-2}$ и не вложимо в $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

5. (a) Выведите Следствие из теоремы Уитни.

(b) Если $\mathbb{R}P^n$ вложимо в $\mathbb{R}^m$ или погружаемо в $\mathbb{R}^{m-1}$, то $\binom{i}{n}$ четно для любого $m \leqslant i \leqslant 2n$ (и даже $\binom{i}{s}$ четно для любых $1 \leqslant s \leqslant n$ и $m \leqslant i \leqslant 2s$, что вытекает из предыдущего и тождества Паскаля, а поэтому не дает новой информации).

Теорема Уитни для коразмерности 1. *Если $\mathbb{R}P^n$ погружаемо в $\mathbb{R}^{n+1}$, то либо $n+1$, либо $n+2$ являются степенями двойки.*

Позже было проделано много других вычислений, дающих интересные следствия.

6. (a) $(\mathbb{R}P^2)^k$ не погружаемо в $\mathbb{R}^{3k-1}$ (и не вложимо в $\mathbb{R}^{3k}$).

(b) Произведение любых k 2-многообразий погружаемо в $\mathbb{R}^{3k}$ и вложимо в $\mathbb{R}^{3k+1}$.

(c) Произведение любых k замкнутых неориентируемых многообразий размерностей $n_1, \dots, n_k$ не погружаемо в $\mathbb{R}^{n_1+\dots+n_k+k-1}$ (и не вложимо в $\mathbb{R}^{n_1+\dots+n_k+k}$).

(d) Найдите наименьшую размерность евклидова пространства, в которое вложимо данное произведение 2-многообразий.

Далее приводятся наброски доказательств этих результатов.

Теорема Хефлигера-Хирша. *Пусть N — многообразие размерности $n \geqslant 3$. Если либо n не есть степень двойки, либо N ориентируемо, либо N незамкнуто, то N вложимо в $\mathbb{R}^{2n-1}$ и погружаемо в $\mathbb{R}^{2n-2}$ [RS99], [Sk08].*

Для $n = 3$ и $n = 4$ эта теорема была доказана позже и другими авторами, см. ссылки в [Sk08]. Из доказательства теорема Хефлигера-Хирша мы сможем наметить там только более простую часть (т.е. доказательство теоремы Масси из второго параграфа). Более сложная часть — обратная теорема Уитни о препятствии (которая верна лишь при некоторых дополнительных предположениях) [RS99], [Sk08].

Теорему Хефлигера-Хирша обобщают следующие теорема (приводимая без доказательства) и гипотеза.

Теорема Коэна. *Любое n-мерное многообразие погружаемо в $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$* [Co85].

(Некоторые считают, что в доказательстве этой теоремы имеются пробелы.)

Гипотеза Масси. *любое n-мерное многообразие вложимо в $\mathbb{R}^{2n+1-\alpha(n)}$.*

Нормальным векторным полем для погружения $f : N \to \mathbb{R}^m$ называется семейство нормальных к $f(N)$ векторов $v(x)$ в точках $x \in f(N)$, непрерывно зависящих от точки $x \in N$.

7.* (a) При $m \geqslant 3n/2 + 1$ или $m = n + 3$ для любого вложения S^n в $\mathbb{R}^m$ существует набор из $m - n$ линейно независимых нормальных векторных полей [Ke59], [Ma59].

(b) Существует вложение S^7 в $\mathbb{R}^{11}$, для которого нет четверки линейно независимых нормальных векторных полей [Ha67].

(c) Для любого гладкого вложения $f : N \to \mathbb{R}^6$ замкнутого ориентируемого 3-многообразия N существует тройка линейно независимых нормальных векторных полей, ср. [DW59];

(d) Существует гладкое вложение $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{R}^8$, для которого нет четверки линейно независимых нормальных полей.

(e) *Проблема Хирша.* Для каких m и многообразий N для любого вложения $N \to \mathbb{R}^m$ существует набор из $m - n$ линейно независимых нормальных векторных полей?

Из этих утверждений читатель сможет доказать (c) для $N = S^3$ сейчас, а (c) для общего случая и (d) — далее (в соответствующих местах написано, что можно вернуться к решению этих задач). Доказательство утверждений (a,b) выходит за рамки этой книги, а полное решение проблемы Хирша неизвестно.

При помощи характеристических классов были получены также первые блестящие достижения теории классификации многообразий. Замкнутые многообразия N_1 и N_2 называются *кобордантными*, если существует многообразие (*кобордизм*) с границей $N_1 \sqcup N_2$ (при этом одно из многообразий может быть пустым). Классификация многообразий с точностью до кобордизма была начата Львом Семеновичем Понтрягиным в 1930-х (в качестве первого шага к важным и трудным проблемам классификации *многообразий с точностью до гомеоморфизма* и классификации *оснащенных многообразий с точностью до оснащенного кобордизма*, см. главы 5 и 6). Замечательные результаты Рене Тома о такой классификации были удостоены Филдсовской медали 1952 г. С помощью них была получена знаменитая формула Фридриха Хирцебруха (связывающая сигнатуру формы пересечений с характеристическими классами). Она сделала возможной следующее открытие.

Пример сферы Милнора. *Существует замкнутое 7-многообразие, гомотопически эквивалентное сфере S^7, но не диффеоморфное ей.*

Классификация гомотопических сфер стала основой теории хирургии, полезной для классификации многообразий с точностью до *диффеоморфизма*.

Для этих результатов нужны новые характеристические классы, придуманные в 1942 Понтрягиным. Владимир Абрамович Рохлин показал, что эти классы естественно появляются при обобщении задачи Штифеля: при построении набора касательных векторных полей, имеющей в каждой точке ранг, не меньший данного числа. При дальнейшем обобщении появляются другие характеристические классы, но они уже зависимы (мы не уточняем, в каком смысле). Поэтому среди всех этих классов выделены *классы Понтрягина*, образующие 'максимальную независимую систему'. Эти классы применяются для изучения *гладких* многообразий (и их отличий от *топологических* многообразий) [DNF84, §28].

При построении характеристических классов возникают все новые и новые гомологические группы (в т.ч. в задачах). Читателю полезно продумать эти примеры перед прочтением общего определения в начале следующей главы (куда всегда можно заглянуть, чтобы проверить себя).

Трехмерные примеры.

В этом пункте можно использовать без доказательства следующий факт (впрочем, его тоже можете попытаться доказать). Обозначим через SO_3 пространство положительных ортонормированных реперов в $\mathbb{R}^3$. (Это то же, что пространство ортонормированных пар векторов в $\mathbb{R}^3$.)

8. Любое отображение граничной сферы трехмерного шара в SO_3 можно продолжить на весь шар.

Указание. Докажите, что SO_3 гомеоморфно

пространству движений пространства $\mathbb{R}^3$, оставляющих начало координат неподвижным;

пространству вращений пространства $\mathbb{R}^3$ относительно прямых, проходящих через начало координат;

пространству прямых в $\mathbb{R}^4$, проходящих через фиксированную точку;

замкнутому трехмерному шару, на границе которого склеены диаметрально противоположные точки.

Используйте последнюю из перечисленных 'моделей' пространства SO_3. (Указание для специалистов: $\pi_2(SO_3) = \pi_2(\mathbb{R}P^3) = \pi_2(S^3) = 0$.)

Обозначим через $\pi_i(X)$ множество гомотопических классов непрерывных отображений $S^i \to X$ (см. определение в начале главы 6). Тогда приведенный факт равносилен равенству $\pi_2(SO_3) = 0$.

9. Тройка линейно независимых касательных векторных полей существует на

(a) S^3; (b) $\mathbb{R}P^3$; (c) $D^1 \times S^2$; (d) $S^1 \times S^2$;

(e) произведении сферы с ручками и отрезка.

(f)* произведении сферы с ручками и окружности.

10. Если тройка линейно независимых касательных векторных полей существует на дополнении замкнутого 3-многообразия до некоторого шара, то такая тройка существует и на самом 3-многообразии.

Доказательство теоремы Штифеля заключается в сведении к следующему примеру.

Пусть дано замкнутое 2-многообразие F. На F существует семейство непересекающихся окружностей, вне которого имеется ориентация, меняющаяся при пересечении каждой окружности этого семейства. (Это семейство представляет первый класс Штифеля-Уитни, см. параграф 'ориентируемость' главы 2.) Разрежем F по этому семейству. Получим 2-многообразие F' с краем и инволюцией $\sigma : \partial F' \to \partial F'$, не имеющей неподвижных точек. Назовем *ориентируемым утолщением* 2-многообразия F 3-многообразие $F' \times D^1/(x,t) \sim (\sigma(x), -t)_{x \in \partial F', t \in D^1}$. (Это пространство того I-расслоения над F, которое является ориентируемым, см. определение в параграфе 'расслоения и их применения'.)

Если F ориентируемо, то его ориентируемое утолщение гомеоморфно $F \times I$.

11.* (a) На ориентируемом утолщении любого 2-многообразия (при любом выборе семейства окружностей) существует пара полей.

(b) Ориентируемое утолщение определено корректно, т.е. не зависит от выбора семейства окружностей.

(c) Если замкнутое 2-многообразие лежит в ориентируемом 3-многообразии, то имеется окрестность 2-многообразия, гомеоморфная ориентируемому утолщению.

Набросок решения пункта (a). Неформально, *погружением* 2-многообразия в $\mathbb{R}^3$ называется его изображение в $\mathbb{R}^3$ (возможно, с самопересечениями), для которого в любой точке существует касательная плоскость. Напомним, что $\mathbb{R}P^2$ допускает погружение в $\mathbb{R}^3$. Выведите отсюда, что любое 2-многообразие F допускает погружение в $\mathbb{R}^3$. Так как $\mathbb{R}^3$ ориентируемо, то это погружение продолжается до погружения (т.е. локального вложения) в $\mathbb{R}^3$ ориентируемого утолщения 2-многообразия F. Поэтому на этом ориентируемом утолщении существует пара полей (пришедшая из пары полей на $\mathbb{R}^3$).

Характеристические классы для 3-многообразий.

Следующий результат является важнейшим шагом в доказательстве теоремы Штифеля, а для неориентируемых 3-многообразий интересен и сам по себе.

Лемма Штифеля. *На замкнутом 3-многообразии N существует пара линейно независимых касательных векторных полей тогда и только тогда, когда* второй класс Штифеля-Уитни $w_2(N) \in H_1(N)$ *нулевой.*

В этом и двух последующих пунктах пара (тройка, четверка, ...) линейно независимых касательных векторных полей называется просто парой полей.

Неформальное описание класса $w_2(N)$, использующее общее положение. (Формально, это описание не используется в дальнейшем.) Обозначим через Σ подмножество пространства $(\mathbb{R}^3)^2$, состоящее из пар линейно зависимых векторов. Подмножество пространства $(\mathbb{R}^3)^2$, состоящее из пар векторов с непропорциональными первыми координатами, шестимерно (имеет коразмерность 0). Пересечение Σ с этим подмножеством выделяется двумя независимыми уравнениями (два определителя должны равняться нулю). Поэтому оно четырехмерно (имеет коразмерность 2). Аналогично рассматривая вторую и третью координату, получаем, что Σ является объединением трех четырехмерных множеств и потому четырехмерно (имеет коразмерность 2).

Пара векторных полей на $\mathbb{R}^3$ — то же, что отображение $\mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^2$. Множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, в которых векторы этой пары линейно зависимы, является прообразом подмножества Σ. Поэтому для пары векторных полей *общего положения* оно является подмногообразием коразмерности 2, т.е. несвязным объединением окружностей (ориентация на них не важна).

Поэтому для пары касательных векторных полей общего положения на 3-многообразии N множество точек многообразия, в которых векторы этой пары линейно зависимы, является несвязным объединением окружностей. Это объединение окружностей называется *препятствующим циклом.* Его класс *гомологичности* (определенной далее или в главе 4) и называется классом $w_2(N)$.

Надеемся, что читателю интуитивно ясно понятие общего положения и без следующего определения. Формально, пара касательных векторных полей *находится в общем положении*, если соответствующие этим полям сечения касательного расслоения находятся в общем положении друг с другом и с нулевым сечением. Тройка отображений многообразий в многообразие *находится в общем положении*, если все их попарные и тройные пересечения локально диффеоморфны соответствующим пересечениям линейных пространств общего положения. (Последнего 'общего положения' мы не определяем, уж оно-то понятно читателю.)

Начало рассуждения, приводящее к определению группы $H_1(N)$ и класса $w_2(N)$. Возьмем некоторую мелкую схему U 3-многообразия N и двойственную к ней схему U^*. (Схема U должна быть настолько мелкой, что угол между касательными пространствами в любых двух точках одного многогранника схемы U^* меньше $\pi/2$.)

Сначала мы построим пару полей в вершинах двойственной схемы, затем будем пытаться продолжать эту пару на объединение ребер двойственной схемы, затем на объединение ее граней и потом на объединение ее трехмерных многогранников.

Попробуем продолжить пару полей на ребро двойственной схемы. Ввиду мелкости схемы касательные пространства в точках ребра можно отождествить. Поэтому паре полей на ребре сопоставляется отображение ребра в пространство линейно независимых пар векторов в $\mathbb{R}^3$. Очевидно, что это пространство связно. Поэтому построенная в вершинах двойственной схемы пара полей продолжается на объединение ребер двойственной схемы.

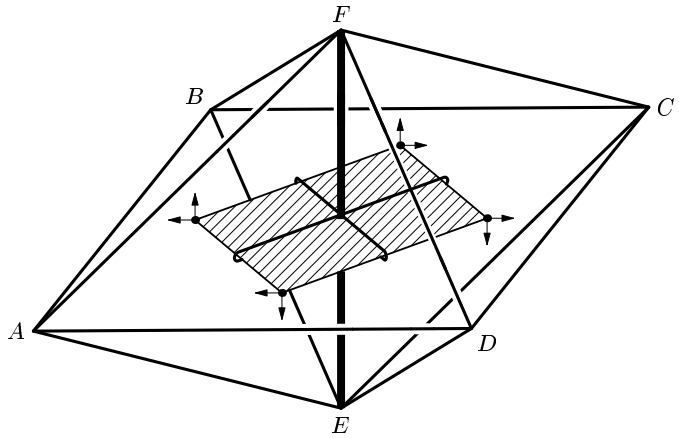


Рис. 59: Продолжение пары полей на грань двойственной схемы

Попробуем продолжить пару полей на грань a^* двойственной схемы (рис. 59). Ввиду мелкости схемы окрестность грани a^* однозначно проецируется на трехмерную касательную плоскость. При этой проекции паре векторов в точке x этой грани сопоставляется пара векторов в $\mathbb{R}^3$. Значит, паре полей на граничной окружности этой грани — отображение ее в пространство пар векторов в $\mathbb{R}^3$. Если это отображение не продолжается на грань a^*, то покрасим ребро a исходной схемы (протыкающее грань a^*), в красный цвет. Таким образом, заданию пары w ортонормированных векторных полей на объединении ребер двойственной схемы соответствует красный подграф $\varepsilon(w)$ исходной схемы, который называется *препятствующим циклом.*

12. (a) Вне препятствующего цикла пара полей существует.

(b) Число красных ребер, выходящих из каждой вершины, четно.

(c) При изменение пары полей на одном ребре двойственной схемы к препятствующему циклу добавляется граница той двумерной грани исходной триангуляции, которая соответствует выбранному ребру.

13. (a) Найдите какой-нибудь препятствующий цикл для $F \times S^1$, где F — 2-многообразие.

(b)* Для любой триангуляции произвольного трехмерного многообразия N объединение ребер ее барицентрического подразделения является препятствующим циклом для некоторой пары полей w.

Определение группы $H_1(N)$ и класса $w_2(N)$. Напомним, что подграфы с условием из 12b называются *(гомологическими) циклами.* Точно так же, как в параграфе 'ориентируемость', определяются *границы*, *гомологичность* циклов и группа $H_1(N)$ классов гомологичности циклов (несмотря на то, что эти понятия возникли при решении *другой* задачи!). *Вторым классом Штифеля-Уитни* 3-многообразия N называется

$$w_2(N) := [\varepsilon(w)] \in H_1(N).$$

Аналогично первому классу Штифеля-Уитни и числу Эйлера проверяется, что это определение корректно.

14. (a) $w_2(N) = 0$ тогда и только тогда, когда пару полей w можно продолжить на объединение многоугольников двойственной схемы.

Указание. Используйте без доказательства следующий факт (впрочем, его тоже можете попытаться доказать): $\pi_1(SO_3) \cong \mathbb{Z}_2$. Иными словами, существует ровно два гомотопических класса отображений окружности в пространство линейно независимых пар векторов в R^3. Нетривиальный гомотопический класс представляется диаметром трехмерного шара, из которого SO_3 получается склейкой.

(b) Докажите лемму Штифеля.

(c) Сформулируйте и докажите аналог леммы Штифеля для 3-многообразий с непустым краем.

Теперь Вы уже можете решить задачу 2.

Набросок простого доказательства теоремы Штифеля. Достаточно рассмотреть случай замкнутого ориентируемого 3-многообразия N. Достаточно доказать, что

Пересечение любого 2-многообразия F в N, являющегося объединением некоторого количества граней некоторой его триангуляции, и любого представителя класса $w_2(N)$, являющегося подграфом двойственной триангуляции, состоит из четного числа точек.

(Этого достаточно ввиду двойственности Пуанкаре и реализуемости элементов группы $H_2(N)$ вложениями, см. главу 4; группа $H_2(N)$ определена там аналогично задаче 15a ниже.)

Четность числа точек такого пересечения является препятствием к *существованию пары линейно независимых векторных полей на F, касательных к N* (а не к F!). (Это препятствие $w_2(\tau_N|_F) \in \mathbb{Z}_2$ строится аналогично классу $w_2(N)$ с использованием общего положения или разбиения поверхности F на многоугольники. Свойство $w_2(\tau_N|_F) = w_2(N) \cap F$ проверяется очевидно.)

Это препятствие нулевое, поскольку такая пара полей существует. Ее достаточно построить на трубчатой окрестности поверхности F в N. Так как N ориентируемо, то эта окрестность гомеоморфна ориентируемому утолщению поверхности F (задача 11c). Значит, на этой окрестности (и, в частности, на F) имеется пара полей (задача 11a). QED

Еще одно простое доказательство теоремы Штифеля. [9] Аналогично предыдущему доказательству достаточно установить тривиальность препятствия $w_2(N) \cap F \in \mathbb{Z}_2$ к *существованию пары линейно независимых векторных полей на F, касательных к N*. Она следует из $w_2(N) \cap F = \rho_2\chi(F) + w_1(F)^2 = 0$. Здесь второе равенство доказано в задаче 8c пункта 'форма пересечений' главы 2. [10] Докажем первое равенство (аналогично формуле для класса Штифеля-Уитни произведения, задача 23b ниже). Возьмем разбиение 2-многообразия F. Рассмотрим такое касательное к F поле u на F, что $u \neq 0$ вне некоторой точки $p \in F$. Возьмем такую пару v, v' касательных к F полей на F, что

• $u \perp v$, $u \perp v'$,

• $v = 0$ на объединении ребер некоторого представителя ω класса $w_1(F)$, лежащего в исходном разбиении,

• $v' = 0$ на объединении ребер некоторого представителя ω' класса $w_1(F)$, лежащего в двойственном разбиении (т.е. ω и ω' в общем положении), и

• $p \notin \omega \cup \omega'$.

Так как N ориентируемо, то определено векторное поле $u \times v'$, касательное к N и нормальное к F. Множество линейной зависимости пары полей $(u, v + u \times v')$ на F, касательных к N, есть объединение множеств тех точек, для которых $u = 0$, и тех точек, для которых обе пары (u, v) и (u, v') линейно зависимы. Первое множество есть p, второе — $\omega \cap \omega'$. Точка p входит в построенный представитель класса $w_2(N) \cap F$ с коэффициентом $\rho_2\chi(F)$, а каждая точка из $\omega \cap \omega'$ — с коэффициентом 1. Это доказывает первое равенство. QED

Характеристические классы для 4-многообразий.

Формально, содержание этого пункта не используется в дальнейшем.

Для решения следующих задач 15–17 необходимо пространство SO_4 положительных реперов в $\mathbb{R}^4$ и равенства $\pi_1(SO_4) \cong \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(SO_4) = 0$.

15. Пусть N — замкнутое связное 4-многообразие.

(a) Определите $H_2(N)$ и $w_2(N) \in H_2(N)$ как препятствие к построению *тройки* полей.

[9] Это доказательство получено из обычно приводимого в книгах отбрасыванием (большого количества) ненужных обозначений. Хотя оно немного сложнее вышеприведенного, оно интересно тем, что допускает обобщения.

[10] Доказательство, не использующее классификации 2-многообразий, вытекает из рассуждения в начале пункта 'наборы нормальных полей' и погружаемости любого 2-многообразия в $\mathbb{R}^3$.

(b) Вне окрестности любого непустого цикла, представляющего $w_2(N)$, можно построить тройку полей.

(c) Препятствие $w_2(N)$ не полно.

(d) $w_2(M \times S^1) = w_2(M) \times S^1$ для любого замкнутого 3-многообразия M. (Определите сами, что такое $\times$.)

(e) Найдите $w_2(F \times F')$ для замкнутых 2-многообразий F и F'. Ответ: $w_2(F \times F') = w_2(F)p \times F' + w_1(F) \times w_1(F') + w_2(F')F \times p'$, где $p \in F$, $w_2(F) := \rho_2\chi(F)$ и то же для F'.

Из пункта (d) следует часть 'только тогда' задачи 4b, а из (e) — задача 3a.

16. Следующие три условия на замкнутое связное 4-многообразие N равносильны.

$w_2(N) = 0$;

существует тройка полей на дополнении в N до некоторого графа;

существует тройка полей на N_0.

Для замкнутого связного ориентируемого 4-многообразия N препятствие к продолжению тройки полей с N_0 на N лежит в $\pi_3(SO_4) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, т.е. является парой чисел. Эти числа — эйлерова характеристика $\chi(N)$ и (с точностью до множителя) и сигнатура $\sigma(N)$ формы пересечений $\cap : H_2(N;\mathbb{Z}) \times H_2(N;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ (определяемой аналогично пункту 'форма пересечений' главы 2, см. параграф 'двойственность Пуанкаре' главы 4).

Теорема. *На замкнутом связном ориентируемом 4-многообразии N существует четверка ортонормированных касательных векторных полей тогда и только тогда, когда $\chi(N) = \sigma(N) = 0 \in \mathbb{Z}$ и $w_2(N) = 0 \in H_2(N)$.*

(Доказательство выходит за рамки этой книги.)

17. (a–f) Сформулируйте и докажите аналоги задачи 15 для связных ориентируемых 4-многообразий с непустым краем. Аналог пункта (c) следующий: на связном ориентируемом 4-многообразии N с непустым краем существует четверка линейно независимых касательных векторных полей тогда и только тогда, когда $w_2(N) = 0 \in H_2(N, \partial N)$.

18. Пусть N — замкнутое связное ориентируемое 4-многообразие. Для решения этой задачи необходимо многообразие Штифеля $V_{4,2}$ ортонормированных пар векторов в $\mathbb{R}^4$ и равенства $\pi_1(V_{4,2}) = 0$, $\pi_2(V_{4,2}) \cong \mathbb{Z}$.

(a) Определите $H_1(N;\mathbb{Z})$ и $W_3(N) \in H_1(N;\mathbb{Z})$ как препятствие к построению *пары* полей для ориентируемого N.

(b) Вне окрестности любого непустого графа, представляющего $W_3(N)$, можно построить пару полей.

(c) Препятствие $W_3(N)$ не полно.

(d) $W_3(N) = 0$ тогда и только тогда, когда на N_0 существует пара полей.

(e) Найдите $\rho_2 W_3(F \times F')$ для замкнутых 2-многообразий F и F'. Ответ: $\rho_2 W_3(F \times F') = w_2(F)p \times w_1(F') + w_2(F')w_1(F) \times p'$, где $p \in F$, $w_2(F) = \rho_2\chi(F)$ и то же для F'.

(f)* $x^4 = 0$ для любого $x \in H_3(N)$.

Из пункта (e) следует задача 3b.

19. Решите аналог предыдущей задачи для многообразий с непустым краем и/или неориентируемых.

20. (a) Если $w_2(N) = 0$, то $W_3(N) = 0$.

(b)* Если $w_2(N)$ представляется ориентируемым 2-многообразием, то $W_3(N) = 0$.

(c)* Придумайте гомоморфизм $\beta : H_2(N) \to H_1(N;\mathbb{Z})$, для которого $W_3(N) = \beta w_2(N)$.

(d)* Для любого ли ориентируемого 4-многообразия выполнено $W_3(N) \equiv 0 \mod 2$? (Объяснение этого в [Ki89, II.4] неправильное.)

21.* Пусть N — замкнутое связное ориентируемое 4-многообразие.

(a) Определите форму пересечений $\cap : H_2(N) \times H_2(N) \to \mathbb{Z}_2$ аналогично пункту 'форма пересечений' главы 2 (или см. параграф 'двойственность Пуанкаре' главы 4).

(b) Докажите, что $a \cap a = w_2(N) \cap a$ для любого $a \in H_2(N)$. (Ср. с пунктом 'форма пересечения' главы 2.)

(c) $w_2(N) \cap w_2(N) = \chi(N) \mod 2$.

(d) Определите *число Понтрягина* $p_1(N) \in \mathbb{Z}$ как полное препятствие к существованию *четверки касательных векторных полей, имеющей ранг не менее трех в каждой точке.*

Теорема. *Для замкнутого ориентируемого 4-многообразия N выполнено $p_1(N) = 3\sigma(N)$.*

(Доказательство намечено в пункте 'сигнатура и числа Понтрягина').

Характеристические классы для n-многообразий.

Через $\mathbb{Z}_{(i)}$ обозначается группа $\mathbb{Z}$ для четного i и $\mathbb{Z}_2$ для нечетного i.

Теорема Штифеля о препятствии. *Если на замкнутом n-многообразии N существует набор из k линейно независимых касательных векторных полей ($1 < k < n$), то* $(n-k+1)$-й класс Штифеля-Уитни $W_{n-k+1}(N) \in H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$ *нулевой.* [11]

Набросок определения класса $W_{n-k+1}(N)$, использующего общее положение. Рассмотрим набор общего положения из k касательных векторных полей на n-многообразии N. Ввиду общности положения множество точек многообразия, в которых векторы этого набора линейно зависимы, является объединением $(k-1)$-мерных подмногообразий. Если $n-k$ четно, то на них можно ввести ориентацию. Классом $W_{n-k+1}(N)$ называется класс *гомологичности* этого объединения подмногообразий (гомологичность определена в главе 4 аналогично предыдущему).

Набросок определения группы $H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$ и класса $W_{n-k+1}(N)$. Пусть $V_{n,k}$ — многообразие Штифеля ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$. Тогда [FF89], [Pr06]

$$\pi_i(V_{n,k}) = 0 \quad \text{для} \quad i < n-k \quad \text{и} \quad \pi_{n-k}(V_{n,k}) \cong \mathbb{Z}_{(n-k)} \quad \text{для} \quad 1 < k < n.$$

Аналогично трехмерному случаю первое из этих равенств влечет, что набор из k линейно независимых касательных векторных полей всегда строится на $(n-k)$-остове. Ввиду второго из этих равенств продолжению полученного набора полей на $(n-k+1)$-остов препятствует некоторая расстановка ω_{n-k+1} на $(n-k+1)$-мерных симплексах целых чисел при четном $n-k$, или нулей и единиц при нечетном $n-k$.

Аналогично предыдущему среди всех таких расстановок выделяются *циклы* и *границы*, а также определяется *гомологичность* циклов (см. детали в начале главы 4). Группа циклов с точностью до гомологичности называется группой гомологий $H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)})$. Классом Штифеля-Уитни называется класс гомологичности препятствующей расстановки

$$W_{n-k+1}(N) = [\omega_{n-k+1}] \in H_{k-1}(N, \mathbb{Z}_{(n-k)}).$$

22. (a) Препятствующая расстановка является циклом.

(b) Докажите теорему для ориентируемых многообразий.

(c) $W_{n-k+1}(N) = 0$ тогда и только тогда, когда набор из k полей существует на дополнении в N до некоторого $n-k-1$-мерного подкомплекса.

Обратная теорема (к теореме Штифеля о препятствии) неверна, т.е. препятствие W_{n-k+1} уже не всегда является полным (см. задачи 15c и 18c).

Для замкнутого n-многообразия N аналогично определяются классы $W_1(N) \in H_{n-1}(N, \mathbb{Z}_2)$ и $W_n(N) \in H_0(N, \mathbb{Z})$. Эти определения равносильны данным в параграфах 'ориентируемость' и 'векторные поля' ($W_1(N) = w_1(N)$ и $W_n(N) = \chi(N)$).

Через $\rho_2 : H_s(N; \mathbb{Z}) \to H_s(N; \mathbb{Z}_2)$ обозначается приведение по модулю два. Обозначим $w_i(N) := \rho_2 W_i(N) \in H_{n-i}(N; \mathbb{Z}_2)$. Этот класс легче вычисляется. Удобно считать, что $w_k(N) = 0$ при $k > n$ и что $w_0(N) = [N] \in H_n(N)$ представляется объединением n-мерных многогранников произвольного разбиения многообразия N.

Как выразить классы Штифеля-Уитни произведения многообразий через через классы Штифеля-Уитни сомножителей?

23. (a) *Формула Уитни-Ву.* $w_s(P \times P') = \sum\limits_{k=0}^{s} w_k(P) \times w_{s-k}(P')$. Эту формулу удобно переформулировать следующим образом. *Полный класс Штифеля-Уитни* замкнутого многообразия N определяется как

$$w(N) := 1 + w_1(N) + w_2(N) + \ldots \in H_n(N) \oplus H_{n-1}(N) \oplus H_{n-2}(N) \ldots$$

Здесь единица в сумме (но не в индексе!) обозначает $[N]$; это удобно, поскольку $[N] \cap x = x$ для любых s и $x \in H_s(N)$. В этих обозначениях формула Уитни-Ву записывается как $w(P \times P') = w(P) \times w(P')$.

[11] Это еще одно преимущество 'гомологического' подхода над 'когомологическим': некоторые 'когомологические' классы Штифеля-Уитни для неориентируемых многообразию принимают значения в *скрученных* когомологиях, которые изоморфны обычным гомологиям ввиду *скрученного* изоморфизма Пуанкаре.

(b) Вычислите $w((\mathbb{R}P^2)^k)$.

(c) Вычислите классы Штифеля-Уитни произведения любого числа 2-многообразий.

(d)* Для любой триангуляции замкнутого n-многообразия N объединение k-мерных симплексов ее барицентрического подразделения является циклом, представляющим класс $w_{n-k}(N)$.

(e)* Если $w_1(N) = w_2(N) = \ldots = w_{[n/2]}(N) = 0$, то $w_s(N) = 0$ для любого s.

24.* Для замкнутого ориентируемого n-многообразия N определите *j-й класс Понтрягина* $p_j(N) \in H_{n-4j}(N;\mathbb{Z})$ как препятствие к построению набора $n-2j+2$ векторов, имеющей ранг не менее $n-2j+1$ в каждой точке.

Наборы нормальных полей. [12]

Доказательство непогружаемости $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ *в* $\mathbb{R}^5$. Обозначим $N := \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ и $a := [\mathbb{R}P^1] \in H_1(\mathbb{R}P^2)$. Пусть $f : N \to \mathbb{R}^5$ — погружение. Рассмотрим препятствие x к наличию четверки линейно независимых векторных полей на $f(N)$ (имеются в виду векторные поля в $\mathbb{R}^5$, на них не накладывается ни условие касательности, ни условие нормальности). Тогда цепочка равенств в $H_2(N)$

$$0 = x = w_2(N) + w_1^2(N) = (a^2 \times 1 + a \times a + 1 \times a^2) + (a \times 1 + 1 \times a)^2 = a \times a \neq 0$$

дает противоречие. Здесь

• первое равенство выполнено, поскольку такая четверка существует.

• второе равенство доказывается аналогично теореме Уитни-Ву и второму доказательству теоремы Штифеля (см. детали ниже).

• третье равенство верно, поскольку $w(N) = (1 + a + a^2) \times (1 + a + a^2)$ по теореме Уитни-Ву (задача 23a).

• четвертое равенство очевидно.

• пятое следует из $(a \times a) \cap (a \times a) = 1 \in \mathbb{Z}_2 \neq 0$.

Для доказательства второго равенства возьмем четверку касательных векторных полей v_1, v_2, v_3, v_4 на N,

которые линейно зависимы на некотором трехмерном подкомплексе ω_1 некоторой триангуляции T, представляющем класс $w_1(N)$, и

для которых тройка v_2, v_3, v_4 линейно зависима на некотором двумерном подкомплексе ω_2 триангуляции T, представляющем класс $w_2(N)$.

Возьмем также четверку касательных векторных полей u_1, u_2, u_3, u_4 на N, которые линейно зависимы на некотором трехмерном подкомплексе ω_1' триангуляции T^*, представляющем класс $w_1(N)$. Возьмем нормальное касательное векторное полей u на N, модуль которого в любой точке равен четырехмерному объему параллелепипеда, натянутого на u_1, u_2, u_3, u_4, а направление (при ненулевом модуле) определяется условием $u \perp u_i$ и положительности репера u, u_1, u_2, u_3, u_4.

Теперь рассмотрим множество линейной зависимости четверки $u + v_1, v_2, v_3, v_4$ векторных полей на $f(N)$. Это множество есть $\omega_2 \cup (\omega_1 \cap \omega_1')$. Из этого следует второе равенство (аналогично задачам 13a, 15e и 18e). QED

Доказательство непогружаемости $(\mathbb{R}P^2)^3$ *в* $\mathbb{R}^8$. Обозначим $N := (\mathbb{R}P^2)^3$ и $a := [\mathbb{R}P^1] \in H_1(\mathbb{R}P^2)$. Пусть $f : N \to \mathbb{R}^8$ — погружение. Рассмотрим препятствие x к наличию шестерки линейно независимых векторных полей на $f(N)$ (имеются в виду векторные поля в $\mathbb{R}^8$, на них не накладывается ни условие касательности, ни условие нормальности). Тогда цепочка равенств в $H_3(N)$

$$0 = y = w_3(N) + w_1^3(N) = ([a^2 \times a \times 1] + a \times a \times a) + [a \times 1 \times 1]^3 = a \times a \times a \neq 0$$

дает противоречие. Здесь

• квадратные скобки обозначают ‘симметризацию’ выражения.

• первое равенство выполнено, поскольку такая шестерка существует.

• второе равенство доказывается аналогично теореме Уитни-Ву и второму доказательству теоремы Штифеля (см. детали ниже).

• третье равенство верно, поскольку $w(N) = (1 + a + a^2)^3$ по теореме Уитни-Ву (задача 23a).

[12] Возможно, читателю вместо знакомства с этим пунктом будет интересно довести до конца доказательства результатов, не требующие нормальных классов. Тогда нужно перейти к следующему параграфу. Впрочем, поработать с наборами нормальных полей полезно для мотивировки понятия расслоения из следующего параграфа.

• четвертое равенство очевидно.

• пятое следует из $(a \times a \times a) \cap (a \times a \times a) = 1 \in \mathbb{Z}_2 \neq 0$.

Для доказательства второго равенства возьмем шестерку касательных векторных полей $v_1, \dots, v_6$ на N, для которых

$v_1 \perp v_i$ и $v_1 = 0$ на некотором 5-мерном подкомплексе ω_1 некоторой триангуляции T, представляющем класс $w_1(N)$, и

пятерка $v_2, \dots, v_6$ линейно зависима на некотором 4-мерном подкомплексе ω_2 триангуляции T, представляющем класс $w_2(N)$.

четверка $v_3, \dots, v_6$ линейно зависима на некотором 3-мерном подкомплексе ω_3 триангуляции T, представляющем класс $w_3(N)$.

Возьмем также пару u_1, u_2 нормальных к $f(N)$ векторных полей на $f(N)$, для которых

$u_1 = 0$ некотором 4-мерном подкомплексе $\overline{\omega}_2$ триангуляции T^*, представляющем класс $\overline{w}_2(f)$ (определите, что это такое, аналогично пункту 'нормальные векторные поля' предыдущего параграфа).

$u_2 \perp u_1$ и $u_2 = 0$ на некотором 5-мерном подкомплексе $\overline{\omega}_1$ триангуляции T^*, представляющем класс $\overline{w}_1(f)$ (определите, что это такое, аналогично пункту 'нормальные векторные поля' предыдущего параграфа).

Теперь рассмотрим шестерку $u_1 + v_1, u_2 + v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ векторных полей на $f(N)$. Эта шестерка линейно зависима в одном из следующих трех случаев:

v_3, v_4, v_5, v_6 линейно зависимы;

$u_2 = 0$ и v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 линейно зависимы;

$u_1 = 0$ и $v_1 = 0$.

Поэтому множество линейной зависимости такой шестерки есть $\omega_3 \cup (\omega_2 \cap \overline{\omega}_1) \cup (\omega_1 \cap \overline{\omega}_2)$. Из этого и пунктов (a,b) следующей задачи вытекает второе равенство (аналогично задачам 13a, 15e и 18e). QED

25. (a) $\overline{w}_1(f) = w_1(N)$.

(b) $\overline{w}_2(f) = w_2(N) + w_1^2(N)$.

(c) $\overline{w}_3(f) = w_2(N) + w_1^3(N)$.

(d) $(\mathbb{R}P^2)^4$ не погружаемо в $\mathbb{R}^{11}$.

(e) Если замкнутое n-многообразие N погружаемо в $\mathbb{R}^{n+3}$, то $(w_4 + w_2^2 + w_2 w_1^2 + w_1^4)(N) = 0$.

Фактически мы доказали, что если замкнутое n-многообразие N погружаемо

в $\mathbb{R}^{n+1}$, то $w_2(N) + w_1^2(N) = 0$.

в $\mathbb{R}^{n+2}$, то $w_3(N) + w_1^3(N) = 0$.

Как получить аналогичное необходимое условие для погружаемости замкнутого n-многообразия в $\mathbb{R}^{n+k}$?

26. (a) Для любого замкнутого n-многообразия N существуют и единственны элементы $\overline{w}_s(N) \in H_{n-s}(N)$, $s = 0, 1, 2, \dots, n$, для суммы $\overline{w}(N)$ которых выполнено $\overline{w}(N) \cap w(N) = 1$.

Эти элементы называются *нормальными классами Уитни.*

(b) Докажите утверждение о погружаемости в следующей теореме.

Теорема Уитни о препятствии. *Пусть N — замкнутое n-многообразие.*

Если N погружаемо в $\mathbb{R}^m$, то $\overline{w}_s(N) = 0 \in H_{n-s}(N)$ при $s > m - n$.

Если N вложимо в $\mathbb{R}^m$, то $\overline{w}_s(N) = 0 \in H_{n-s}(N)$ при $s \geqslant m - n$.

Утверждение о вложимости также доказывается несложно, см. главу 7.

27. (a) Вычислите $\overline{w}((\mathbb{R}P^2)^k)$.

(b) Вычислите нормальные классы Уитни произведения любого числа 2-многообразий.

Теперь Вы уже можете решить задачу 6.

Приведем в качестве задачи прямое геометрическое определение классов $\overline{w}_s(N)$.

28. Пусть $f : N \to \mathbb{R}^m$ — погружение замкнутого n-многообразия N. Аналогично параграфу 'векторные поля' можно определить *нормальный класс Эйлера* $\overline{W}_{m-n}(f) \in H_{2n-m}(N; \mathbb{Z})$ как препятствие к построению ненулевого нормального векторного поля (ср. пункт 'нормальные векторные поля'). Аналогично многомерной теореме Штифеля о препятствии можно определить *нормальный класс Штифеля-Уитни* $\overline{W}_k(f) \in H_{n-k}(N; \mathbb{Z}_{(k-1)})$ как препятствие к построению набора из $m - n + 1 - k$ линейно независимых нормальных векторных полей ($1 < k < m - n$). Напомним, что через $\mathbb{Z}_{(i)}$ обозначается группа $\mathbb{Z}$ для четного i и $\mathbb{Z}_2$ для нечетного i.

(a) $\overline{W}_k(f)$ не зависит от f при $k < m - n$. [13]

(b) Отображение $\pi_l(V_{u+l,u}) \to \pi_l(V_{u+l+1,u+1})$, индуцированное добавлением одного вектора, является изоморфизмом при $u > 1$ или четном l, и является эпиморфизмом $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ при $u = 1$ и нечетном l.

Указание. Рассмотрите точную последовательность расслоения $V_{u+l,u} \to V_{u+l+1,u+1} \to S^{u+l}$. Воспользуйтесь [Pr06, Теорема 11.4].

(c) При фиксированном N обозначим $\overline{W}_k(N) := \overline{W}_k(f)$ при $m > k + n$. Если N погружаемо в $\mathbb{R}^m$, то $\overline{W}_s(N) = 0 \in H_{n-s}(N)$ при $s > m - n$.

(d) $\overline{W}_1(N) = w_1(N)$

(e) $\rho_2\overline{W}_2(N) = w_2(N) + w_1(N)^2$

(f) $\rho_2\overline{W}_k(N) = \overline{w}_k(N)$ для $1 \leqslant k \leqslant m - n$.

Аналогично нормальным классам Штифеля-Уитни можно определить *нормальные классы Понтрягина* $\overline{p}_k(N) \in H_{n-4k}(N;\mathbb{Z})$ для ориентируемого n-многообразия N. Они препятствуют погружаемости: если N погружаемо в $\mathbb{R}^m$, то $\overline{p}_k(N) = 0$ для $2k > m - n$.

29.* Пусть N — замкнутое ориентируемое связное 4-мерное подмногообразие замкнутого ориентируемого 6-мерного многообразия M.

(a) Определите группу $H_4(M;\mathbb{Z})$ и форму пересечений $\cap : H_4(M;\mathbb{Z})^3 \to \mathbb{Z}$.

(b) Определите *число Понтрягина* $\overline{p}_1 \in \mathbb{Z}$ как полное препятствие к существованию *пары нормальных (к N) векторных полей (касательных к M), имеющей ранг не менее одного в каждой точке.*

(c) Обозначим через $[N] \in H_4(M;\mathbb{Z})$ гомологический класс подмногообразия N и через $\overline{e} \in H_2(N;\mathbb{Z})$ и класс Эйлера нормального расслоения N в M. Тогда $[N]^3 = \overline{e} \cap \overline{e} = \overline{p}_1$.

(d) $p_1(M) \cap [N] = p_1(N) + \overline{p}_1$.

Указания к некоторым задачам.

2. Следует из леммы Штифеля и задачи 13a.

7. (c) для $N = S^3$. Докажите, что препятствие к существованию единичного векторного поля, нормального и к $f(S^3)$ и к уже построенному нормальному полю, нулевое.

9. (a) Одно решение получается, если вспомнить, что S^3 есть группа единичных кватернионов. Другое решение получается, если сначала построить тройку полей на нижней полусфере, а потом продолжить ее на верхнюю, используя равенство $\pi_2(SO_3) = 0$.

(b) Одно решение получается, если вспомнить, что $\mathbb{R}P^3$ есть факторгруппа группы единичных кватернионов. Другое решение получается, если сначала построить тройку полей на дополнении до трехмерного шара, которое является ориентируемым утолщением пространства $\mathbb{R}P^2$ (см. задачу 7), а потом продолжить ее на $\mathbb{R}P^3$, используя равенство $\pi_2(SO_3) = 0$.

(c) Используйте вложение $D^1 \times S^2 \to \mathbb{R}^3$.

(d) Дополнение до трехмерного шара есть $D^1_+ \times S^2 \cup_{\partial D^1_+ \times D^2_+} D^1_\times D^2_+$. Постройте погружение этого дополнения в $\mathbb{R}^3$. Используя его, можно построить тройку полей на этом дополнении. Потом можно продолжить ее на $\mathbb{R}P^3$, используя равенство $\pi_2(SO_3) = 0$.

(e) Аналогично (c).

(f) Следует из задачи 12 и леммы Штифеля.

10. Используя равенство $\pi_2(SO_3) = 0$.

12. (a) Рассмотрим окрестность объединения препятствующего цикла и множества вершин двойственной триангуляции. Дополнение до этой окрестности является окрестностью объединения двумерных многоугольников двойственной схемы, не являющихся красными. Пару полей на этом дополнении можно продолжить на дополнение до препятствующего цикла ввиду $\pi_2(SO_3) = 0$. (Ср. задачу 10 выше.)

(b) Для данной вершины двойственной триангуляции рассмотрим граничную сферу соответствующего многогранника исходной триангуляции. Четность количества ее двумерных граней, протыкаемых красными ребрами, равна сумме гомотопических классов отображений из границ граней в SO_3 и потому равна нулю.

[13] А вот класс $\overline{W}_{m-n}(f)$ *может зависеть* от выбора погружения f: например, существуют вложения замкнутых неориентируемых 2-многообразий в $\mathbb{R}^4$ с разными классами Эйлера.
Другое доказательство независимости $\rho_2\overline{W}_k(f)$ от f при $k < m - n$, не использующее регулярной гомотопии, следует из пункта (f).

(c) При изменении пары полей на одном ребре двойственной триангуляции на элемент $x \in \pi_1(SO_3) \cong \mathbb{Z}_2$ на каждой грани двойственной триангуляции, соседней с этим ребром, добавляется x.

13. (a) Пусть v — поле на объединении ребер некоторого разбиения 2-многообразия F, для которого ненулевые элементы препятствующей расстановки стоят в вершинах $p_1, \ldots, p_n$ двойственного разбиения и равны $\operatorname{sgn}\chi(F)$ (т.о. $n = |\chi(F)|$). Пусть v' — единичное векторное поле на S^1. Тогда для 'призматического' разбиения произведения $F \times S^1$ и пары (v, v') препятствующий цикл является объединением окружностей $p_i \times S^1$ по $i = 1, \ldots, n$. (Для доказательства этого используйте то, что гомоморфизм включения $\mathbb{Z} \cong \pi_1(SO_2) \to \pi_1(SO_3) \cong \mathbb{Z}_2$ есть приведение по модулю 2.)

Замечание. Набор из k касательных векторных полей на $X \times Y$ является набором общего положения, если обе его 'проекции' на сомножители — общего положения. (Поэтому если e — касательное векторное поле общего положения на F, а e' — единичное векторное поле на S^1, то пара (e, e') не общего положения.)

14. (b) Следует из (a) и $\pi_2(SO_3) = 0$ (см. задачу 10).

(c) На 3-многообразии N существует пара линейно независимых касательных векторных полей тогда и только тогда, когда второй класс Штифеля-Уитни $w_2(N) \in H_1(N, \partial N)$ нулевой.

15. (a) Аналогично лемме Штифеля.

(b) Аналогично задаче 12a.

(c) В качестве контрпримера годится $N = S^4$, на которой нет даже одного поля.

(d) Аналогично задаче 13a. Пусть u, v — пара полей на объединении ребер некоторого разбиения 3-многообразия M, для которой препятствующий цикл является объединением ребер $e_1, \ldots, e_n$ двойственного разбиения. Пусть v' — единичное касательное векторное поле на S^1. Тогда для 'призматического' разбиения произведения $M \times S^1$ и тройки (u, v, v') препятствующий цикл является объединением колец $e_i \times S^1$ по $i = 1, \ldots, n$.

(e) Аналогично задаче 18e. Нужно рассмотреть тройку полей $(u, v', v + u')$.

16. Аналогично лемме Штифеля с использованием равенства $\pi_2(SO_4) = 0$.

18. Аналогично задачам 15 и 16.

(e) Возьмем разбиение 2-многообразия F, для которого p есть внутренность многоугольника. Рассмотрим такую пару полей u, v (не общего положения!) на F, что $u \neq 0$ вне p, $u \perp v$, $v = 0$ на объединении ребер некоторого представителя ω класса $w_1(F)$, лежащего в двойственной триангуляции, и $p \notin \omega$. Рассмотрим пару полей v', u' общего положения на F' с аналогичными свойствами. Рассмотрим пару полей $(u + u', v + v')$ (не общего положения!) на $F \times F'$. Множество точек линейной зависимости этой пары — множество точек, где пары (u, v) и (u', v') одинаково линейно зависимы.

В точках множества $Op \times F'_0$ пара (u', v') линейно зависима только при $u' = 0$, т.е. на $Op \times \omega'$. Соответствующая линейная зависимость между u и v имеет вид $u = 0$ и имеется только в p. В точках множества $F_0 \times Op'$ пара (u, v) линейно зависима только при $v = 0$, т.е. на $\omega \times Op'$. Соответствующая линейная зависимость между u' и v' имеет вид $v' = 0$ и имеется только в p'.

Поэтому пара (u', v') невырождена вне $p \times \omega' \cup \omega \times p'$. Рассмотрим разбиение 4-многообразия $F \times F'$ на многоугольники, являющееся произведенем разбиений 2-многообразий F и F'. Красными (по модулю 2!) могут быть только ребра из подграфа $p \times \omega \cup \omega \times p'$ двойственного разбиения. Ребра подграфа $p \times \omega'$ ($\omega \times p'$) будут красными тогда и только тогда, когда $\chi(F)$ ($\chi(F')$) четно. Это доказывает искомую формулу.

19. Для неориентируемых получится также $W_3(N) \in H_1(N; \mathbb{Z})$. Для многообразий с краем (ориентируемых или нет) получится $W_3(N) \in H_1(N, \partial N; \mathbb{Z})$.

20. (a) Следует из 16 и 18d.

(c) Пусть класс в $H_2(N)$ представлен замкнутым 2-многообразием A (на самом деле, любой класс в $H_2(N)$ может быть так представлен). Рассмотрим 1-цикл на A, препятствующий ориентируемости 2-многообразия A. На нем можно ввести ориентацию (подумайте, как!). Гомологический класс в N полученного ориентируемого 1-цикла и есть $\beta[A]$.

Гомоморфизм Бокштейна β определяется так. Если $a = a_1 + \ldots + a_s$ — гомологический 2-мерный цикл, где $a_1, \ldots, a_s$ являются многоугольниками некоторого разбиения, то возьмем расстановку $\widetilde{a} = a_1 + \ldots + a_s$ целых чисел на многоугольниках, положим $\beta[a] := [\frac{1}{2}\partial\widetilde{a}]$ и проверим корректность (т.е. проверим, что $\beta(\partial b) = 0$).

21. (b) Вычет $w_2(N) \cap a$ есть препятствие к тому, чтобы на цикле, представляющем a, можно построить тройку линейно независимых касательных (к N) векторных полей. Вычет $a \cap a$ есть препятствие к тому, чтобы на 2-многообразии $A \subset N$, представляющем a, можно было бы построить *стабильное нормальное поле*, т.е. пару полей в $\mathbb{R}^{n+1}$, нормальных к A, где $A \subset N \subset \mathbb{R}^n$.

(d) Вот набросок определения, использующего общее положение. Рассмотрим четверку общего положения касательных векторных полей на N. Ввиду общности положения данная четверка векторов имеет ранг менее трех лишь в конечном количестве точек (разберитесь, почему!). У этих точек можно определить знак (разберитесь, как!). Количество этих точек с учетом знака и называется $p_1(N)$.

23. (a) Аналогично задачам 15e и 18e.

Обозначим $k = \dim P$ и $k' = \dim P'$. Возьмем $m \geqslant k + k'$. Рассмотрим следующие $m - n + 1$ (касательных векторных) полей на P. Первое поле v_1 обращается в ноль только на конечном количестве точек, представляющих класс $w_k(P)$. Второе поле v_2 перпендикулярно первому и обращается в ноль только на некотором одномерном подкомплексе некоторой триангуляции многообразия P, представляющем класс $w_{k-1}(P)$. Третье поле v_3 перпендикулярно первым двум и обращается в ноль только на некотором двумерном подкомплексе некоторой триангуляции многообразия P, представляющем класс $w_{k-2}(P)$. И т.д. k-е поле v_k перпендикулярно первым $k-1$ и обращается в ноль только на некотором $(k-1)$-мерном подкомплексе некоторой триангуляции многообразия P, представляющем класс $w_1(P)$. Поля $v_{k+1}, \dots, v_{m-n+1}$ нулевые. Аналогично строятся поля $v'_1, \dots, v'_{m-n+1}$ на P'. Теперь, рассматривая множество линейной зависимости набора полей $v_1 + v'_{m-n+1}, v_2 + v'_{m-n}, \dots, v_{m-n+1} + v'_1$, получаем искомую формулу.

(e) Обозначим $w_i := w_i(N)$.

Пусть $n = 4$. Докажем, что $w_3 = 0$ (потом аналогично получится, что $w_4 = 0$). Достаточно доказать, что $w_3 \cap [F] = 0$ для любого 3-подмногообразия F. Имеем

$$w_3 \cap [F] = w_3(\tau_N|_F) = w_3(\tau_F \oplus \nu_{F\subset N}) = w_3(F) + w_2(F)w_1(\nu_{F\subset N}) = 0 \quad \text{ибо} \quad w_3(F) = 0 \quad \text{и} \quad w_2(F) = 0.$$

Рассмотрим общий случай. Обозначим $k = [n/2]$. Желательно доказать, что $w_{k+1} = 0$ (потом аналогично получится, что $w_{k+2} = 0, \dots, w_n = 0$). Докажем, что $w_{k+1} \cap [F] = 0$ для любого $(k+1)$-подмногообразия F (это более слабое свойство). Обозначим $\nu := \nu_{F\subset N}$. Имеем $w(N) \cap [F] = w(\tau_N|_F) = w(\tau_F \oplus \nu) = w(\tau_F)w(\nu)$. Из этого и условия задачи следует, что $w_s(\nu) = \overline{w}_s(F)$ для $s \leqslant k$. Далее,

$$w_{k+1} \cap [F] = w_{k+1}(F) + w_k(F)w_1(\nu) + \ldots + w_1(F)w_k(\nu) + w_{k+1}(\nu).$$

Так как $w_{k+1}(\nu) = 0$, то это равенство влечет $w_{k+1} \cap [F] = \overline{w}_{k+1}(F)$. Последнее число нулевое, ибо F вложимо в $\mathbb{R}^{2k+2}$.

Чтобы приведенное доказательство равенства $w_{k+1} \cap x = 0$ заработало для класса x, не реализуемого подмногообразием, нужно определить классы Штифеля-Уитни для ‘нормального расслоения’ такого класса. Попытки это сделать приводят к определению *стинродовых квадратов*. (Возможно, именно так они и были придуманы. Соотвествующая работа Стинрода посвящена другой задаче, но там приводится формальное определение стинродовых квадратов без мотивировки.) Было бы интересно вычленить из всей теории стинродовых квадратов то, что нужно для решения данной задачи и то, что нужно для $\overline{w}_n(N^n) = 0$.

24. Вот набросок определения класса $p_j(N)$, использующего общее положение. Рассмотрим набор общего положения из $n - 2j + 2$ касательных векторных полей на N. Ввиду общности положения множество точек многообразия, в которых данный набор $n - 2j + 2$ векторов имеет ранг менее $n - 2j + 1$, является объединением $(n - 4j)$-мерных подмногообразий. На них можно ввести ориентацию. Объединение этих подмногообразий с точностью до *гомологичности* (определенной в главе 4 аналогично предыдущему) и называется классом $p_j(N)$.

25. (d) Следует из (e).

(e) Пусть $f : N \to \mathbb{R}^{11}$ — погружение. Рассмотрите препятствие z к наличию набора из n линейно независимых векторных полей на $f(N)$. Докажите, что

$$0 = z = w_4(N) + w_3(N)\overline{w}_1(N) + w_2(N)\overline{w}_2(N) + w_1(N)\overline{w}_3(N)$$

и воспользуйтесь пунктами (a,b,c).

26. (a) Индукция по s.

(b) Аналогично рассуждению в начале пункта и 25b.

28. Обозначим $n = \dim N$ и возьмем вложение $g : N \to \mathbb{R}^{n+k}$.

(a) Возьмем два погружения $f : N \to \mathbb{R}^m$ и $g : N \to \mathbb{R}^p$. Обозначим через i_m включение $i : \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{\max\{m,p,2n+1\}}$. Аналогично определим i_p. Тогда

$$\overline{W}_k(f) = \overline{W}_k(i_m \circ f) = \overline{W}_k(i_p \circ g) = \overline{W}_k(g).$$

Второе равенство следует из того, что по общему положению погружения $i_m \circ f$ и $i_p \circ g$ регулярно гомотопны (определение напомнено в пункте 'векторные расслоения').

Докажем первое равенство (третье доказывается аналогично). Мы используем обозначения из доказательства теоремы Штифеля о препятствии (см. предыдущий пункт). Рассмотрим отображение $V_{m-n,m-n-k+1} \to V_{s+m-n,s+m-n-k+1}$, определенное добавлением s векторов. Тогда индуцированное отображение групп π_{k-1} является изоморфизмом (пункт (b)). Поэтому препятствие $\overline{W}_k(f)$ равно препятствию $\overline{W}_k(i_m \circ f)$ к построению семейства из $s + m - n + 1 - k$ линейно независимых нормальных векторных полей для погружения $i_m \circ f$.

Другое доказательство независимости $\overline{w}_k(f)$ от f. Возьмем два погружения $f, g : N \to \mathbb{R}^m$ и включение $i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{2m}$. Используем понятия расслоения из следующего параграфа. Так как

$$\tau_N \oplus \nu_f \cong \tau_N \oplus \nu_g \cong m\varepsilon, \quad \text{то} \nu_f \oplus m\varepsilon \cong \nu_g \oplus m\varepsilon.$$

То есть нормальные расслоения погружений $i \circ f$ и $i \circ g$ изоморфны. Значит, $\overline{w}_k(f) = \overline{w}_k(i \circ f) = \overline{w}_k(i \circ g) = \overline{w}_k(g)$.

(c) Для композиции $N \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{m+n}$ погружения и включения существует семейство из n линейно независимых нормальных векторных полей, поэтому $\overline{W}_{m-n+1}(N) = \overline{W}_{m-n+1}(i \circ f) = 0$.

(d) Одновременность обнуления обоих классов следует из того, что обнуление касательного (нормального) класса равносильно возможности ввести согласованную ориентацию в касательных (нормальных) пространствах. Равенство этих классов — более сильное условие. (Поэтому, например, [FF89, доказательство Леммы 1 на стр. 178] неполно.)

Построим препятствие к наличию $n + k$ линейно независимых векторных полей на $N \subset \mathbb{R}^{n+k}$ (на векторные поля не накладывается ни условие касательности, ни условие нормальности). Это препятствие будет нулевым элементом группы $H_{n-1}(N)$.

По наборам $e_1, \dots, e_n$ касательных векторных полей общего положения и $f_1, \dots, f_k$ нормальных векторных полей общего положения построим набор $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_k$ векторных полей на N. Гомологический класс множества вырождения последнего набора есть $w_1(N) + \overline{w}_1(N) = 0$.

(e) Построим препятствие к наличию $n + k - 1$ линейно независимых векторных полей на $N \subset \mathbb{R}^{n+k}$ (на векторные поля не накладывается ни условие касательности, ни условие нормальности). Это препятствие будет нулевым элементом группы $H_{n-2}(N)$. Рассуждение аналогично пункту (a) и задаче 15e.

(f) Аналогично пунктам (d,e) и формуле Уитни-Ву (задача 23a).

29. (b) Число $\overline{p}_1$ — сумма (со знаком) тех точек, в которых ранг пары нормальных векторов общего положения меньше 1, т.е. в которых *оба* вектора нулевые.

(c) Пусть $N_1, N_2 \subset M$ — близкие к N подмногообразия, находящиеся в общем положении относительно друг друга и N. Тогда

$$[N]^3 = [N_1] \cap [N_2] \cap [N] = \#(N_1 \cap N_2 \cap N) = \#[(N_1 \cap N) \cap (N_2 \cap N)] = \overline{e} \cap \overline{e} = \overline{p}_1.$$

Здесь # означает алгебраическую сумму точек пересечения в M, а $N_1 \cap N$, $N_2 \cap N$ — *ориентированные* пересечения в N. Для доказательства последнего равенства возьмем два сечения нормального расслоения N в M, находящиеся в общем положении. Тогда $\overline{e}$ — гомологический класс надлежащим образом ориентированного нулевого многобразия каждого сечения. Поэтому $\overline{e} \cap \overline{e} = \overline{p}_1$.

(d) Аналогично второму доказательству теоремы Штифеля (или ввиду $\tau_M|_N \cong \tau_N \oplus \nu(N \subset M)$, см. ниже).

12 Расслоения и их применения

Простейшие расслоения.

В этом пункте мы не докажем новых теорем, но введем некоторые объекты, важные для дальнейшего и вообще в математике. (Эти объекты близки к *утолщениям*, рассмотренным в главе 2.)

Определение I-расслоения над графом. Для графа N с V вершинами и E ребрами возьмем E ленточек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, E$. Для каждого i зафиксируем соответствие между концами i-й ленточки и вершинами i-го ребра. Склеим концы ленточек, соответствующие одной и той же вершине. Заметим, что для каждой вершины это можно сделать несколькими способами (рис. 60). Полученный занумерованный раскрашенный двумерный объект называется *I-расслоением (или расслоением со слоем отрезок)* над графом N.

Рис. 60: Склейка концов ленточек

Примеры: цилиндр или лист Мебиуса над окружностью.

Два I-расслоения над графами называются *эквивалентными*, если можно так расставить стрелочки на отрезках склейки, что для любых двух ленточек одного цвета в этих двух расслоениях стрелки на концах обеих ленточек одновременно сонаправлены или одновременно противонаправлены.

Эквивалентное определение I-расслоения над графом для знакомых с двулистными накрытиями (см. конец параграфа 'инволюции'). Для двулистного накрытия $p : N' \to N$ и для каждой точки $x \in N$ соединим отрезком две точки из $p^{-1}(x)$. Полученный двумерный объект называется *расслоением со слоем отрезок (или I-расслоением)* над N. I-расслоения *эквивалентны*, если соответствующие двулистные накрытия эквивалентны.

Эквивалентное определение I-расслоения над графом для знакомых с основами топологии. Отображение $p : M \to N$ называется *I-расслоением* над N, если любая точка $x \in N$ имеет такую окрестность Ox, что $p^{-1}x \cong Ox \times I$ и композиция этого гомеоморфизма с проекцией на Ox совпадает с p. Расслоения $p_1 : M_1 \to N$ и $p_2 : M_2 \to N$ называются *эквивалентными*, если существует такой гомеоморфизм $h : M_1 \to M_2$, что $p_1 = p_2 \circ h$.)

Определение I-расслоения над 2-многообразием N. Пусть дана триангуляция 2-многообразия N. Раскрасим ее грани, ребра и вершины в разные цвета. Возьмем призмы тех же цветов, что и грани триангуляции. Раскрасим боковые грани и боковые ребра каждой призмы в те же цвета, что соответствующие им ребра и вершины соответствующей грани. Склеим боковые грани призм, окрашенные в один и тот же цвет, так, чтобы склеились боковые ребра, окрашенные в один и тот же цвет. Для каждой боковой грани призмы это можно сделать двумя способами (рис. 61). Полученный раскрашенный трехмерный объект называется *I-расслоением* над N.

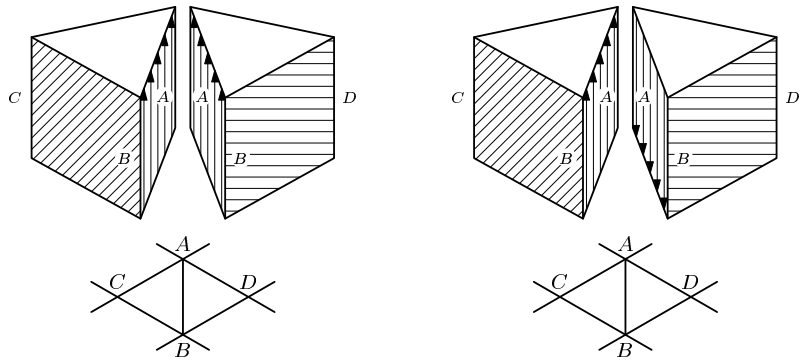


Рис. 61: Склейка призмочек

Например, регулярная окрестность (т.е. окрестность, являющаяся утолщением) 2-многообразия в 3-многообразии является пространством I-расслоения (т. е. является I-расслоением при некоторой раскраске).

Два I-расслоения над одним и тем же 2-многообразием называются *эквивалентными*, если на призмах можно так расставить стрелки, сонаправленные друг с другом и параллельные боковым ребрам, что стрелки в одноцветных боковых гранях призм этих двух расслоений одновременно сонаправлены или одновременно противонаправлены.

Ясно, что *существуют взаимно однозначные соответствия между классами эквивалентности инволюций над N, двулистных накрытий над N и I-расслоений над N.*

S^1-расслоения над графами и их эквивалентность определяются аналогично I-расслоениям с заменой прямоугольников на кольца, являющиеся прямыми произведениями окружности S^1 на ребра графа.

S^1-расслоения над 2-многообразиями и их эквивалентность определяются аналогично I-расслоениям с заменой призмочек на полнотория, являющиеся прямыми произведениями окружности S^1 на грани триангуляции.

1. Пространствами S^1-расслоений являются:

(a) $X \times S^1$ над X. (b) Бутылка Кляйна над окружностью. (c) Сфера S^3 над S^2.

(d)* Граница *регулярной окрестности* 2-многообразия N, вложенного в $\mathbb{R}^4$, над N.

(e) Пространство, полученное из несвязного объединения двух эквивалентных I-расслоений над N отождествлением их граничных двулистных накрытий по некоторой эквивалентности.

Векторные расслоения.

В топологии играет огромную роль следующее обобщение. Мы мспользуем его для вывода теоремы Штифеля о векторных полях и об алгебрах с делением из теоремы Штифеля о препятствии, для вывода теоремы Уитни из теоремы Уитни о препятствии, а также для вывода нижеследующей теоремы Масси, используемой при доказательстве теоремы Хефлигера-Хирша. Мы следуем [MS74, §2], ср. [FF89, §19], [Pr04, Глава 5]; ср. с пунктом 'накрытия и расслоения'.

Векторным расслоением называется отображение $p : E \to B$ вместе с заданием структуры векторного пространства над $\mathbb{R}$ в множестве $p^{-1}b$ для каждой точки $b \in B$, если выполнено следующее условие *локальной тривиальности*:

для любой точки $b \in B$ найдутся такие ее окрестность $Ob \subset B$, целое число $n \geqslant 0$ и гомеоморфизм $h_b : Ob \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}Ob$, что соответствие $x \mapsto h_b(b, x)$ определяет изоморфизм векторных пространств $\mathbb{R}^n$ и $p^{-1}b$.

При этом пространство B называется *базой* векторного расслоения, а отображение p называется *проекцией*.

2. Следующие конструкции действительно дают векторные расслоения.

Примеры векторных расслоений (мы строим только отображения p, а структуры векторных пространств в p-прообразах очевидны).

(ε) *Тривиальным* векторным расслоением называется проекция $p : B \times \mathbb{R}^n \to B$. Далее мы обозначаем через ε одномерное тривиальное расслоение (база которого ясна из контекста).

(τ) Пусть многообразие N гладко вложено в $\mathbb{R}^m$. Обозначим через T_xN касательную (n-мерную) плоскость к многообразию N в точке $x \in N$. Определим

$$TN := \{(x, v) \in N \times \mathbb{R}^m \mid v \in T_xN\}.$$

Касательным расслоением τ_N многообразия N называется отображение $\tau_N : TN \to N$, определенное формулой $\tau_N(x, v) := x$.

(ν) Пусть $f : N \to \mathbb{R}^m$ — гладкое погружение. Определим

$$E(f) := \{(x, v) \in N \times \mathbb{R}^m \mid v \perp T_{f(x)}f(N)\}.$$

Нормальным расслоением ν_f погружения f называется отображение $\nu_f : E(f) \to N$, определенное формулой $\nu_f(x, v) := x$.

Теорема о трубчатой окрестности. *Если $N \subset \mathbb{R}^m$ — замкнутое гладкое компактное подмногообразие и E — пространство нормального расслоения к N, то существует гладкое вложение $E \to \mathbb{R}^m$, при котором нулевое сечение переходит в N.*

(ζ_n) Напомним, что $\mathbb{R}P^n$ есть пространство прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Определим

$$E(\zeta_n) := \{(y, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in y\}.$$

Тавтологическим расслоением называется отображение $\zeta_n : E(\zeta_n) \to \mathbb{R}P^n$, определенное формулой $\zeta_n(y, v) := y$.

(*) Пусть $B = \cup_i U_i$ — открытое покрытие и $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \to O_n$ непрерывные отображения, для которых

$$\varphi_{ii} = E, \quad \varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1} \quad \text{и} \quad \varphi_{ik} = \varphi_{ij}\varphi_{jk}.$$

Положим

$$E := \bigcup_{\{(x,s)=(x,\varphi_{ij}s)\}_{x\in U_i\cap U_j}} U_i \times \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad p[x,s] = x.$$

Векторные расслоения $p_1 : E_1 \to B$ и $p_2 : E_2 \to B$ с одинаковой базой называются *изоморфными* (обозначение: $p_1 \cong p_2$), если существует гомеоморфизм $f : E_1 \to E_2$, для которого $p_2 f = p_1$ и сужение $f|_{p_1^{-1}b} : p_1^{-1}b \to p_2^{-1}b$ есть изоморфизм векторных пространств.

3. (a) τ_{S^1}, τ_{S^3} и τ_{S^7} тривиальны.

(b) τ_N тривиально тогда и только тогда, когда имеется n касательных ортонормированных векторных полей на N.

(c) $\tau_{S^{2k}}$ нетривиально.

(d) $\tau_{(S^1)^n}$ тривиально.

(e) $E(\zeta_1)$ есть лист Мебиуса, а ζ_1 — проекция на его среднюю линию.

(f) $\zeta_n \cong \nu(\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{R}P^{n+1})$.

(g) Любое векторное расслоение над шаром B^n изоморфно тривиальному.

(h)* Любое векторное расслоение (над конечным полиэдром B) может быть получено конструкцией (*). (Поэтому конструкция (*) доставляет эквивалентное определене векторного расслоения.)

Пусть задано векторное расслоение $p : E \to B$. Отображение $s : B \to E$ называется *сечением расслоения* p, если $p \circ s = \mathrm{id}_B$. Сечения называются *послойно гомотопными*, если они гомотопны в классе сечений.

Ясно, что касательное (нормальное) векторное поле — то же, что сечение касательного (нормального) расслоения.

4. (a) У проекции p листа Мебиуса на его среднюю линию существует ровно одно сечение (с точностью до послойной гомотопности).

(b) Обозначим через $S(p)$ множество классов послойной гомотопности сечений расслоения p. Опишите $S(p)$ для стандартной проекции $p : K \to S^1$ бутылки Кляйна на окружность.

(c) ζ_n не является тривиальным ни при каком n (указание: докажите, что ζ_n не имеет ненулевого сечения).

Характеристические классы Штифеля-Уитни $w_i(\xi)$ векторного расслоения ξ определяются аналогично вышеизложенному как препятствия к построению семейств линейно-независимых сечений. Ясно, что $w_i(\tau_N) = w_i(N)$ и $w_i(\nu_f) = \overline{w}_i(N)$.

Пусть $p_1 : E_1 \to B$ и $p_2 : E_2 \to B$ — векторные расслоения с одинаковой базой. Определим

$$E(p_1 \oplus p_2) := \{(x,y) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(x) = p_2(y)\}.$$

Суммой Уитни векторных расслоений p_1 и p_2 называется отображение $p_1 \oplus p_2 : E(p_1 \oplus p_2) \to B$, определенное формулой $p_1 \oplus p_2(x,y) := p_1(x) = p_2(y)$.

5. (a) Это действительно векторное расслоение.

(b) $\zeta_1 \oplus \zeta_1 \cong 2\varepsilon$

(c) $\tau_{S^2} \oplus \varepsilon \cong 3\varepsilon$.

(d) $\tau \oplus \nu_f \cong m\varepsilon$.

(e) $w_i(\xi \oplus n\varepsilon) = w_i(\xi)$.

(f) $w_1(\xi \oplus \eta) = w_1(\xi) \oplus w_1(\eta)$.

(g) Если $\dim \xi = m$ и $\dim \eta = n$, то $w_{m+n}(\xi \oplus \eta) = w_m(\xi)w_n(\eta)$.

(h) *Формула Уитни-Ву. Полный класс Штифеля-Уитни* расслоения ξ определяется как $w(\xi) := 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \ldots$. Тогда $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta)$.

(i) *Формула Уитни-Ву для классов Понтрягина. Полный класс Понтрягина* расслоения ξ определяется как $p(\xi) := 1 + p_1(\xi) + p_2(\xi) + \ldots$. Если $H_i(B;\mathbb{Z})$ не имеют 2-кручения, то $p(\xi \oplus \eta) = p(\xi)p(\eta)$.

6. (a) $\tau_{\mathbb{R}P^n} \oplus \varepsilon \cong (n+1)\zeta_n$.

(b) $w(\mathbb{R}P^n) = (1+a)^{n+1}$, где $a = [\mathbb{R}P^{n-1}] \in H_{n-1}(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ — образующая.

(c) $w_i(\mathbb{R}P^n) = \dbinom{n+1}{i} a^i$ для $0 \leqslant i \leqslant n$.

(d) Если $\binom{n+1}{i}$ четно для любого $i = 1, 2, \dots, n$, то $n+1$ есть степень двойки.

(e) Докажите теорему Штифеля об алгебрах с делением.

(f) Докажите теорему Штифеля о векторных полях.

Указание к (e), (f): $a^k \neq 0$ для $1 \leqslant k \leqslant n$, поскольку $a^k \cap a^{n-k} = 1$.

7. (a) $\overline{w}_i(\mathbb{R}P^n) = \binom{-n-1}{i} a^i = \binom{n+i}{i} a^i$ для $0 \leqslant i \leqslant n$.

(b) Докажите теорему Уитни.

(c) Если n-многообразие N погружаемо в $\mathbb{R}^{n+1}$, то $w_i(N) = (w_1(N))^i$.

(d) Докажите теорему Уитни для коразмерности 1.

8. (a) $\tau_{\mathbb{C}P^n} \oplus \varepsilon_{\mathbb{C}} \cong (n+1)\zeta_{n,\mathbb{C}}$ как *комплексные* векторные расслоения.

(b) $p(\mathbb{C}P^n) = (1+a^2)^{n+1}$, где $a = [\mathbb{C}P^{n-1}] \in H_{2n-2}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$ — образующая.

(c) $p_i(\mathbb{C}P^n) = \binom{n+1}{i} a^{2i}$ для $1 \leqslant i \leqslant n/2$,

(d) $\overline{p}_i(\mathbb{C}P^n) = (-1)^i \binom{n+i}{i} a^{2i}$ для $1 \leqslant i \leqslant n/2$.

(e) Если $\mathbb{C}P^n$ вложимо в $\mathbb{R}^m$ или погружаемо в $\mathbb{R}^{m-1}$, то $\binom{n+i}{n} = 0$ при $m - n \leqslant 2i \leqslant n$.

На языке векторных расслоений можно классифицировать погружения [Hi60], см. также [HP64], [HH62], [Sk02]. Ясно, что если n-многообразие N погружаемо в $\mathbb{R}^{n+k}$, то существует k-расслоение ν над N такое, что $\nu \oplus \tau_N \cong (n+k)\varepsilon$. (Необходимое условие из теоремы Уитни о препятствии фактически является необходимым для существования такого расслоения ν — ввиду формулы Уитни-Ву). Это необходимое условие оказывается *достаточным*.

Теорема Смейла-Хирша. *Пусть N — гладкое n-многообразие.*

(a) Если существует k-расслоение ν над N такое, что $\nu \oplus \tau_N \cong (n+k)\varepsilon$, то N погружаемо в $\mathbb{R}^{n+k}$.

(b) Если $f, g : N \to \mathbb{R}^{n+k}$ — погружения такие, что $df, dg : TN \to \mathbb{R}^{n+k}$ гомотопны в классе линейных мономорфизмов, то f и g регулярно гомотопны.

Два погружения $f, g : N \to S^m$ называются *регулярно гомотопными*, если существует погружение $F : N \times I \to S^m \times I$, для которого

(i) $F(x, 0) = (f(x), 0)$ и $F(x, 1) = (g(x), 1)$ для любого $x \in N$

(ii) $F(N \times \{t\}) \subset S^m \times \{t\}$ для любого $t \in I$.

Произведением векторных расслоений $p_1 : E_1 \to B_1$ и $p_2 : E_2 \to B_2$ называется отображение $p_1 \oplus p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$, определенное формулой $(p_1 \times p_2)(x, y) := (p_1(x), p_2(y))$ (с очевидно определяемыми структурами векторных пространств в слоях).

9. (a) $\tau_{N_1 \times N_2} = \tau_{N_1} \times \tau_{N_2}$.

(b) Если $\dim \xi = m$ и $\dim \eta = n$, то $w_{m+n}(\xi \times \eta) = w_m(\xi) \times w_n(\eta)$.

(c) $w(\xi \times \eta) = w(\xi) \times w(\eta)$.

(d)* $p(\xi \times \eta) = p(\xi) \times p(\eta)$.

Степени двойки и классы Штифеля-Уитни (набросок).

Для нормальных классов Штифеля-Уитни произвольного замкнутого многообразия выполняются интересные соотношения. (На этом основаны теорема Хефлигера-Хирша и многие другие результаты.) Например, старший нормальный класс всегда тривиален: $\overline{W}_n(N) = 0$. Это следует из вложимости любого n-многообразия в $\mathbb{R}^{2n}$ и теоремы Уитни о препятствии. (Это также является частным случаем нижеследующей формулы Ву 13b.)

Теорема Масси. *Для замкнутого гладкого n-многообразия N*

(1) Если либо n не есть степень двойки, либо N ориентируемо, то $\overline{W}_{n-1}(N) = 0$ [Ma60], [Ma62].

(2) Если q меньше количества единиц в двоичной записи числа n, то $\overline{w}_{n-q}(N) = 0$ [Ma60].

Доказательство теоремы Масси интересно тем, что является примером применения следующего важного понятия. Пусть класс $[X] \in H_{n-k}(N)$ реализуется вложением $i : X \subset N$. Положим

$$\mathrm{Sq}_s[X] := i_* w_s(\nu_N(X)) \in H_{n-k-s}(N)$$

равным i_*-образу s-го класса Штифеля-Уитни нормального расслоения вложения (это определение эквивалентно общепринятому [FF89, следствие на странице 263]).

Далее замкнутое многообразие N фиксировано и пропускается из обозначений характеристических классов. Задачи достаточно решить для классов, реализуемых подмногообразиями. (См. пункт 'реализация циклов подмногообразиями' следующей главы). А справедливы они и для общего случая, для которого Sq_s определяются более сложно. Для алгебраических вычислений этого пункта удобно *обозначить* $H^s := H_{n-s}$. (Здесь никакого другого смысла, кроме переобозначений, не подразумевается, а вообще он имеется.) Тогда умножение (т.е. билинейное отображение пересечения) в гомологиях n-многообразия устроено так: $H^k \times H^l \to H^{k+l}$.

10. (a) Проверьте корректность определения операции Sq_s относительно гомологичности, реализуемой подмногообразием.

(b) *Общее положение.* Если $x \in H_{n-k}(N)$, то $\mathrm{Sq}_s x = 0$ для $s > k$.

(c) *Случай класса Эйлера.* Если $x \in H_{n-k}(N)$, то $\mathrm{Sq}_k x = x \cap x$.

(d) $\mathrm{Sq}_1 = \rho_2\beta$, где ρ_2 — приведение по модулю 2 и β — гомоморфизм Бокштейна (см. параграф 'простейшие методы' главы 4).

(e) *Формула Картана для* Sq_1. $\mathrm{Sq}_1(x \cap y) = x \cap \mathrm{Sq}_1 y + (\mathrm{Sq}_1 x) \cap y$.

(f)* *Формула Картана.* $\mathrm{Sq}_k(x \cap y) = \sum_{s=0}^{k} (\mathrm{Sq}_s x) \cap (\mathrm{Sq}_{k-s} y)$.

(g) $\mathrm{Sq}_k x^{2^s}$ равно 0 при $k \neq 0, 2^s$.

11. Пусть N ориентируемо.

(a) $\mathrm{Sq}_1 w_{n-1} = 0$.

(b)* $\mathrm{Sq}_1 w_{2j+1} = 0$.

(c)* $\mathrm{Sq}_1 w_{2j} = w_{2j+1}$.

(d)* $\beta w_{2j} = W_{2j+1}$.

12. (a) Для любого k существует и единственен такой $v_k \in H_{n-k}(N)$, что $\mathrm{Sq}_k x = x \cap v_k$ при любом $x \in H_k(N)$.

(b) $v_1 = w_1$ (значит, $\mathrm{Sq}_1 w_{n-1} = w_1 \cap w_{n-1}$).

(c) Если N ориентируемо, то $v_2 = w_2 = \overline{w}_2$.

13.* *Формулы Ву.* (a) $w_k = \sum\limits_{s=0}^{k} \mathrm{Sq}_s v_{k-s}$ [MS74, Theorem 11.14].

(b) Если $x \in H_k(N)$ и $k > 0$, то $\overline{w}_k \cap x = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{w}_{k-i} \cap \mathrm{Sq}_i x$ [Ma60].

(c) $\mathrm{Sq}_k w_m = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{m-i-1}{k-i} w_i \cap w_{m+k-i}$ [FF89, 30.2.A].

Поскольку операции Sq_s могут быть определены гомотопически, из формулы Ву 13a вытекает, что классы Штифеля-Уитни многообразия гомотопически инвариантны. См. другие формулы Ву в [MS74, Problem 11.E], [MS74, Problem 11.F].

Чтобы проиллюстрировать *идею доказательства пункта (1) теоремы Масси*, покажем, что $\overline{w}_3 = 0$ *для ориентируемого 4-многообразия* N. Для любого $x \in H_3(N)$ имеем

$$\overline{w}_3 \cap x = \overline{w}_2 \cap \mathrm{Sq}_1 x + \overline{w}_1 \cap \mathrm{Sq}_2 x + \mathrm{Sq}_3 x = \overline{w}_2 \cap x^2 = x^4 = \mathrm{Sq}_1 x^3 = 0.$$

Здесь первое равенство верно по формуле Ву (13b), второе по общему положению и поскольку $\mathrm{Sq}_1 x = x^2$ (случай класса Эйлера), третье поскольку $\overline{w}_2 = v_2$, четвертое по формуле Картана для Sq_1 (10e), а последнее поскольку и N, и окружность, представляющая класс x^3, ориентируемы. QED

14. (a) $\overline{w}_{n-1} \cap x = \overline{w}_{n-2^k} \cap x^{2^k}$ для $x \in H_{n-1}(N)$.

(b) Докажите пункт (1) теоремы Масси по модулю 2.

(c) Докажите пункт (1) теоремы Масси.

15.* (a) $\mathrm{Sq}_1 \mathrm{Sq}_1 = 0$.

(b) *Соотношения Адема.* Если $0 < a < 2b$, то

$$\mathrm{Sq}_a \mathrm{Sq}_b = \sum_{j=0}^{[a/2]} \binom{b-1-j}{a-2j} \mathrm{Sq}_{a+b-j} \mathrm{Sq}_j \mod 2.$$

(c) Докажите пункт (2) теоремы Масси.

Классификация расслоений.

17. Множество классов эквивалентности одномерных векторных расслоений над замкнутым ориентируемым n-многообразием N находится во взаимно-однозначном соответствии с $H_{n-1}(N)$.

Векторное расслоение $p : E \to B$ называется *ориентируемым*, если в векторных пространтвах $p^{-1}b$ заданы ориентации, причем изоморфизм $x \mapsto h_b(b, x)$ сохраняет ориентацию.

Ориентированные векторные расслоения $p_1 : E_1 \to B$ и $p_2 : E_2 \to B$ с одинаковой базой называются *ориентированно изоморфными*, если существует гомеоморфизм $f : E_1 \to E_2$, для которого $p_2 f = p_1$ и сужение $f|_{p_1^{-1}b} : p_1^{-1}b \to p_2^{-1}b$ есть сохраняющий ориентацию изоморфизм векторных пространств.

18. (a) Какие расслоения из предыдущего пункта являются ориентируемыми?

(b) Любые два одномерных ориентируемых векторных расслоения над одной базой ориентируемо эквивалентны.

(c) Определите класс Эйлера $e(\xi)$ как препятствие к построению ненулевого сечения для ориентируемого векторного расслоения ξ.

(d) $e(\xi \oplus \eta) = e(\xi) \cap e(\eta)$ и $e(\xi \times \eta) = e(\xi) \times e(\eta)$.

(e) Любые два ориентируемых двумерных векторных расслоения над связным 2-многообразием с непустой границей ориентируемо эквивалентны.

(f) Множество ориентируемых двумерных векторных расслоений над замкнутым ориентируемым связным 2-многообразием с точностью до ориентируемой эквивалентности находится во взаимно однозначном соответствии с $\mathbb{Z}$.

(g)* Как изменится результаты пунктов (e) и (f) для произвольных 2-многообразий?

(h)* Как изменится результат пункта (f) для векторных двумерных расслоений? Ср. [MF90].

Для непрерывного отображения $f : B' \to B$ и векторного расслоения $p : E \to B$ определим $E(f^*p) := \{(x, y) \in B' \times E \mid fx = py\}$. *Индуцированным расслоением* называется отображение $f^*p : E(f^*p) \to B'$, заданное формулой $(f^*p)(x, y) := x$ (с очевидно задаваемыми структурами векторных пространств в слоях).

Определение *гомотопности* отображений напомнено в начале главы 6. В следующих двух задачах $p : E \to B$ — одномерное векторное расслоение.

19. (a) Гомотопные отображения индуцируют эквивалентные расслоения. Иными словами, формула $[f] \mapsto f^*\zeta_m$ корректно задает отображение множества $[B, \mathbb{R}P^m]$ гомотопических классов отображений $B \to \mathbb{R}P^m$ в множество классов эквивалентности n-мерных векторных расслоений над полиэдром B.

(b) Отображение $f : B \to \mathbb{R}P^m$, для которого $p \simeq f^*\zeta_m$, существует тогда и только тогда, когда существует *линейный мономорфизм* $F : E \to \mathbb{R}^{m+1}$ (т.е. отображение, которое на каждом слое расслоения $p : E \to B$ является линейным мономорфизмом).

(c) Для каких m существует линейный мономорфизм $E(\zeta_1) \to \mathbb{R}^m$ (относительно расслоения ζ_1)?

(d) Для любой точки $x \in B$ существует ее окрестность Ox в B и линейный мономорфизм $F : p^{-1}Ox \to \mathbb{R}$.

(e) Отображение $F : E \to \mathbb{R}^{m+1}$ является линейным мономорфизмом тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in B$ существует такое i, что отображение $p\, r_i \circ F|_{p^{-1}x} : p^{-1}x \to \mathbb{R}$ является линейным мономорфизмом.

Линейным функционалом $\varphi : E \to \mathbb{R}$ называется отображение, линейное (но не обязательно мономорфное) на слоях расслоения p.

20. (a) Для любого подполиэдра $B_1 \subset B$ любой линейный функционал $\varphi_1 : p^{-1}B_1 \to \mathbb{R}$ продолжается до линейного функционала $\varphi : E \to \mathbb{R}$.

(b) Для некоторого m существует линейный мономорфизм $\varphi : E \to \mathbb{R}^{m+1}$. Иными словами, отображение $[\varphi] \mapsto \varphi^*\zeta_m$ сюръективно.

(c) Отображение $[\varphi] \mapsto \varphi^*\zeta_m$ инъективно при $m \geqslant 2 \dim B + 2$.

(d) Для некоторого m отображение $[\varphi] \mapsto \varphi^*\zeta_m$ биективно.

(e) Докажите следующую теорему.

Многообразием Грассмана $G(m, n)$ называется пространство всех n-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^m$. Например, $G(m, 1) \cong \mathbb{R}P^{m-1}$.

Теорема классификации векторных расслоений. *Множество классов эквивалентности n-мерных векторных расслоений над полиэдром B находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $[B, G(m, n)]$ гомотопических классов отображений $B \to G(m, n)$ при достаточно большом m.*

Взаимно-однозначное соответствие из сформулированной теоремы легко описать. Определим

$$E(\zeta_{m,n}) := \{(\alpha, v) \in G(m,n) \times \mathbb{R}^m \mid v \in \alpha\}.$$

Определим *тавтологическим расслоение*

$$\zeta_{m,n} : E(\zeta_{m,n}) \to G(m,n) \quad \text{формулой} \quad \zeta_{m,n}(\alpha, v) := \alpha.$$

Соответствие из теоремы задается формулой $[f] \mapsto f^*\zeta_{m,n}$.

Ориентируемым многообразием Грассмана $G_+(m,n)$ называется пространство всех ориентируемых n-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^m$. Например, $G_+(m,1) \cong S^{m-1}$.

Теорема классификации ориентируемых векторных расслоений. *Множество классов ориентируемой эквивалентности n-мерных ориентируемых векторных расслоений над полиэдром B при достаточно большом m находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $[B, G_+(m,n)]$ гомотопических классов отображений $B \to G_+(m,n)$.*

21. Докажите этот результат и явно постройте взаимно-однозначное соответствие.

При помощи приведенных теорем характеристические классы можно получать из *когомологий* пространств $G(m,n)$ или $G_+(m,n)$. Иногда характеристические классы так и определяются. Такое абстрактное алгебраическое определение неудобно для геометрических применений (но, возможно, удобно для других целей).

Указания к некоторым задачам.

6. (a) Напомним, что $\mathbb{R}P^n = \{\{x, -x\} \mid x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}\}$. Тогда $E(\zeta_n) := \{(\{\pm x\}, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \parallel x\}$. Тавтологическое расслоение определяется формулой $\zeta_n(\{\pm x\}, v) := \{\pm x\}$. Тогда нужный изоморфизм расслоений задается формулой $\pm(x, v) \oplus (\pm x, \lambda) \mapsto (\pm x, v + \lambda x)$.

12. (a) Докажите, что $\mathrm{Sq}_k : H_k(N) \to \mathbb{Z}_2$ — гомоморфизм и используйте двойственность Пуанкаре.

13. (b) В случае $k = n = \dim N$ нужно доказать, что $\overline{w}_n(N) = 0$, а это вытекает из теоремы Уитни. Покажем, как свести утверждение для класса x, реализованного k-подмногообразием X, к случаю $k = n = \dim N$. Обозначим через ν_X нормальное расслоение X в N, через ν_N нормальное расслоение N в $\mathbb{R}^m$ и через $i : X \to N$ включение. Можно считать, что $\overline{w}_s = w_s(\nu_N)$. Тогда

$$\sum_{s=0}^{k} \overline{w}_{k-s} \cap_N \mathrm{Sq}_s x = i \sum_{s=0}^{k} (\overline{w}_{k-s} \cap x) \cap_X w_s(\nu_X) = i \sum_{s=0}^{k} (\overline{w}_{k-s}(\nu_N|_X)) \cap_X w_a(\nu_X) =$$

$$= w_k(\nu_N|_X \oplus \nu_X) = w_k(\nu_{X \subset \mathbb{R}^m}) = \overline{w}_k(X) = 0.$$

14. (a) Индукция по k с использованием формулы By 13b и следствия 10g (общего положения и формулы Картана).

(c) Используйте соотношение $\beta w_{2j} = W_{2j+1}$.

15. (c) Пересечение с классом $\overline{w}_{n-1}$ дает отображение $H_{n-1}(N) \to H_0(N)$. По формуле By его можно представить как сумму *итерированных стинродовых квадратов* $\mathrm{Sq}_I := \mathrm{Sq}_{i_1} \mathrm{Sq}_{i_2} \ldots \mathrm{Sq}_{i_k}$ для разных $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Из соотношений Адема следует, что любой итерированный стинродов квадрат есть сумма *допустимых*, т.е. удовлетворяющих условию $i_1 \geqslant 2i_2, \ldots, i_2 \geqslant 2i_3 \ldots$. Поэтому если $\overline{w}_{n-q} \neq 0$, то для некоторых $q \in H_{n-1}(N)$ и допустимой последовательности I имеем $\mathrm{Sq}_I x \neq 0$.

17. Начните с $n = 2$. Можно делать аналогично классификации инволюций (глава 2) или свести к ней.

20. (b) Используйте компактность полиэдра B.

(e) Аналогично только что доказанному одномерному случаю.

ГЛАВА 4. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГОМОЛОГИЙ.

'The wise men followed the star and found the house.
But if I followed the star, should I find the house?'
'It depends, perhaps,' I said smiling, 'on whether you are a wise man'.
G. K. Chesterton, Manalive. [14]

13 Простейшие методы (набросок)

Определения.

В этой главе считается известным понятие группы, гомо-, изо-, моно- и эпиморфизма групп, а также понятие гомотопии из главы 6.

В некоторых местах этой главы мы *указываем* коэффициенты $\mathbb{Z}_2$ в обозначениях. При этом пропуск коэффициентов по-прежнему означает, что предполагаются коэффициенты $\mathbb{Z}_2$.

Дадим *определение групп гомологий (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$)*, независимое от рассуждений, в которых оно появилось. Пусть N — 3-полиэдр (или 2-полиэдр) с триангуляцией T, имеющей c_i симплексов размерности i, $i = 0, 1, 2, 3$ ($c_3 = 0$ для 2-полиэдра). (Необходимые изменения для схемы T читатель легко сделает самостоятельно.)

Обозначим через $C_i = C_i(N)$, $i = 0, 1, 2, 3$, группу расстановок нулей и единиц на i-мерных симплексах триангуляции T (относительно операции покомпонентного сложения). Ясно, что $C_i \cong \mathbb{Z}_2^{c_i}$.

Для произвольного ребра a обозначим через $\partial_0 a$ расстановку единиц в вершинах этого ребра и нулей в остальных вершинах. Продолжим ∂_0 до линейного отображения $\partial_0 : C_1 \to C_0$.

Для произвольной двумерной грани a обозначим через $\partial_1 a$ расстановку единиц на ребрах границы этой грани. Продолжим ∂_1 до линейного отображения $\partial_1 : C_2 \to C_1$.

Для произвольной трехмерной грани a обозначим через $\partial_2 a$ расстановку единиц на двумерных гранях границы грани a. Продолжим ∂_2 до линейного отображения $\partial_2 : C_3 \to C_2$.

0. $\partial_k \partial_{k+1} = 0$.

Положим

$$H_0(N) := {}_0/\partial_0 C_1, \quad H_1(N) := \partial_0^{-1}(0)/\partial_1 C_2, \quad H_2(N) := \partial_1^{-1}(0)/\partial_2 C_3$$

$$\text{и} \quad H_3(N) := \partial_2^{-1}(0).$$

Группы $\partial_{i-1}^{-1}(0)$ и $\partial_i C_{i+1}$ называются группами i-циклов и i-границ, соответственно.

Чтобы определить гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, фиксируем дополнительно *ориентацию* (т.е. порядок вершин с точностью до четной перестановки) каждого симплекса триангуляции T (никакой согласованности ориентаций разных симплексов не предполагается). Обозначим через $C_k(\mathbb{Z}) = C_k(N; \mathbb{Z})$, $k = 0, 1, 2, 3$, группу расстановок целых чисел на ориентированных k-мерных симплексах триангуляции T (относительно операции покомпонентного сложения). Ясно, что $C_k(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{c_k}$. Для k-симплекса a с вершинами $a_0 \dots a_i$ обозначим через $\hat{a}_i$ симплекс размерности $(k-1)$ с вершинами $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k$. Положим $\varepsilon_i = -1$, если ориентация симплекса $\hat{a}_i$ задается порядком $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k)$, и $\varepsilon_i = 1$, иначе. Положим $\partial_{k-1} a = \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^i \varepsilon_i \hat{a}_i$. После этого гомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}$ определяются аналогично.

Аналогично определяются i-мерные гомологии полиэдра произвольной размерности, а также гомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}$.

Все встречающиеся пространства предполагаются полиэдрами (читатель может считать, что даже 2-полиэдрами или 3-полиэдрами). Все отображения между полиэдрами предполагаются *кусочно-линейными*, т.е. уважающими некоторые схемы этих полиэдров.

Вычисление по определению.

Мы опускаем обозначения коэффициентов из записи групп гомологий, если формула верна для произвольных коэффициентов (которые мы обозначаем G). Советуем сначала проработать материал для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$, затем для $\mathbb{Z}$. Класс гомологий цикла a обозначается через $[a]$. Напомним, что D^0 — точка.

[14] *'Мудрецы следовали за звездой и нашли дом. Но если бы я последовал за звездой, нашел бы я дом?' — 'Возможно,' сказал я, улыбаясь, 'это зависит от того, мудрец ли ты.' Честертон, Живой, пер. автора.*

1. (a) $H_0(D^0;G) \cong G$ и $H_k(D^0;G) = 0$ при $k > 0$.

(b) $H_0(X;G) \cong G^{c(X)}$, где $c(X)$ — количество компонент связности полиэдра X.

Следующим результатом будем пользоваться без доказательства (которое можно найти в [Pr06]).

Теорема инвариантности гомологий. *Гомологии гомеоморфных схем изоморфны.*

Положим $\widetilde{H}_k(X) := H_k(X)$ при $k > 0$ и $\widetilde{H}_0(X) := \varepsilon^{-1}(0)/\partial_0 C_1$, где $\varepsilon : C_0 \to G$ — сумма чисел, стоящих в вершинах.

2. (a) $\widetilde{H}_k(D^n) = 0$.

(b) $\widetilde{H}_k(\operatorname{Con} X) = 0$, где Con — конус.

(c) $\widetilde{H}_k(D^0;G) \cong 0$.

(d) Для $n > 0$ группа $H_k(S^n;\mathbb{Z})$ есть 0 при $k \neq 0, n$ и $\mathbb{Z}$ при $k = 0, n$.

(e) $\widetilde{H}_k(X) \cong \widetilde{H}_{k+1}(\Sigma X)$, где Σ — надстройка. Указание. Любой k-цикл в ΣX гомологичен надстройке над некоторым циклом в X.

(f) Группа $\widetilde{H}_k(S_1^n \vee S_2^n \vee \ldots \vee S_l^n;\mathbb{Z})$ есть 0 при $k \neq n$ и $\mathbb{Z}^l$ при $k = n$.

(g) Обозначим $B_l^n = S_1^n \vee S_2^n \vee \ldots \vee S_l^n$. Для симплициального отображения $g : B_l^n \to B_m^n$ обозначим через $d_{pq}(g)$ степень композиции $S_p^n \xrightarrow{\subseteq} B_l^n \xrightarrow{g} B_m^n \xrightarrow{proj} S_q^n$. Тогда $g_* : H_n(B_l^n;\mathbb{Z}) \to H_n(B_m^n;\mathbb{Z})$ есть линейное отображение с матрицей $d_{pq}(g)$ (в стандартных базисах).

(h) $H_k(X \vee Y) \cong H_k(X) \oplus H_k(Y)$ для $k > 0$.

(i) Найдите $H_k(S^p \times S^q)$.

3. См. детали в [Pr06].

(a) Придумайте, как по отображению $f : X \to Y$ построить (*индуцировать*) отображение $f_* : H_k(X) \to H_k(Y)$.

(b) Отображение f_* является гомоморфизмом.

(c)* Гомотопные отображения индуцируют одинаковые изоморфизмы [Pr06].

(d) Докажите следующий результат.

Теорема гомотопической инвариантности гомологий. *Если X гомотопически эквивалентно Y, то $H_k(X) \cong H_k(Y)$.*

4. (a) Для связного X любой элемент группы $H_1(X;\mathbb{Z})$ представляется некоторым отображением $f : S^1 \to X$.

(b) Отображение $f : S^1 \to X$ представляет нулевой элемент группы $H_1(X;\mathbb{Z}_2)$ тогда и только тогда, когда оно продолжается на некоторое 2-многообразие N (не обязательно ориентируемое) с краем $\partial N = S^1$.

(c) Отображение $f : S^1 \to X$ представляет нулевой элемент группы $H_1(X;\mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда оно продолжается на некоторое ориентируемое 2-многообразие N с краем $\partial N = S^1$.

(d) **Теорема Пуанкаре.** *Для связного X выполнено*

$$H_1(X;\mathbb{Z}) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

Здесь $\pi_1(X)$ — *фундаментальная группа* пространства X (см. главу 6).

(e) Если у (трехмерного) додекаэдра склеить противоположные грани с поворотом на $\pi/5$, то получится трехмерное многообразие N, для которого $H_1(N;\mathbb{Z}) = 0$, но $\pi_1(N) \neq 0$.

(f)* Придумайте и докажите (или опровергните) многомерные аналоги предыдущих утверждений.

Гомологии пары. Вырезание.

Пусть A и B — подполиэдры полиэдра X в одной и той же схеме. Тогда $C_k(A) \subset C_k(X)$ Положим

$$Z_k(X,A) := \{a \in C_k(X) \mid \partial_{k-1} a \in C_{k-1}(A)\} \quad \text{и}$$

$$H_k(X,A) := \frac{Z_k(X,A)}{\partial_k C_{k+1}(X) \oplus C_k(A)}.$$

При $k = 0$ условие $\partial_{k-1} a \in C_{k-1}(A)$ пусто. (Такие группы появлялись при построении препятствий на многообразиях с краем.)

5. (a) $H_0(X,A;G) \cong G^{c(X)}$, где $c(X)$ — количество компонент связности полиэдра X, не содержащих подполиэдра A.

(b) $H_k(X) \cong H_k(X,\varnothing)$.

(c) **Связь абсолютных и относительных гомологий.** $H_k(X,A) \cong \widetilde{H}_k(X/A)$.

(d) **Изоморфизм вырезания.** $H_k(A \cup B, A) \cong H_k(B, B \cap A)$.

Более точно, отображение $H_k(B, B \cap A) \to H_k(A \cup B, A)$, *индуцированное включением* $(B, B \cap A) \to (A \cup B, A)$, *является изоморфизмом.*

Указание: сведите к случаю, когда $A - B$ есть внутренность одной клетки (симплекса) старшей размерности.

(e) Если A есть деформационный ретракт в X (т.е. если существует гомотопия $f_t : X \to X$, для которой $f_0 = \mathrm{id}\, X$, $f_1(X) \subset A$ и $f_1(a) = a$ для любого $a \in A$), то $H_k(X,A) = 0$ при $k \geqslant 1$.

Точные последовательности.

Набросок другого решения задачи 2d об $H_k(S^n;\mathbb{Z})$. Индукция по $n \geqslant 0$. Докажем шаг индукции. Заметим, что $H_k(S^n) \cong H_k(D^n, S^{n-1})$ (**задача 7a**). Определим отображение $\partial_* : H_k(D^n, S^{n-1}) \to H_{k-1}(S^{n-1})$ формулой $\partial_*[a] = [\partial a]$. Легко проверить корректность этого определения (**задача 7b**). Достаточно доказать, что отображение ∂_* является изоморфизмом.

Для доказательства эпиморфности отображения ∂_* возьмем цикл a, $[a] \in H_{k-1}(S^{n-1})$. Имеем $H_{k-1}(D^n) = 0$ (**задача 7c;** указание: $\partial \operatorname{Con} x = x$). Поэтому существует такая цепь b, что $a = \partial b$. Тогда b есть относительный цикл пары (D^n, S^{n-1}) и $[a] = \partial_*[b]$. Мономорфность отображения ∂_* проверяется аналогично (**задача 7d**). QED

Гомологической последовательностью пары (X,A)

$$\ldots \to H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j_*} H_k(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A) \to \ldots$$

называется последовательность групп и гомоморфизмов, определенных так. Гомоморфизм i_* индуцирован включением. При $k \geqslant 1$ отображения ∂_* и j_* определены формулами $\partial_*[a] = [\partial a]$ и $j_*[a] = [a]$, соответственно.

8. (a) Отображение ∂_* корректно определено и является гомоморфизмом.

(b) Если $H_k(X) = H_{k-1}(X) = 0$ (например, если X стягиваемо), то ∂_* — изоморфизм.

(c) При $k \geqslant 1$ отображение j_* корректно определено формулой $j_*[a] = [a]$ и является гомоморфизмом.

(d) Если $H_k(A) = H_{k-1}(A) = 0$ (например, если A стягиваемо), то j_* — изоморфизм.

(e) Если A есть ретракт пространства X (т.е. если существует отображение $f : X \to A$, тождественное на A), то i_* — мономорфизм, j_* — эпиморфизм и ∂_* — нулевой гомоморфизм.

(f) Если A стягиваемо по X в точку (т.е. если существует отображение $c\, on A \to X$, сужение которого на основание есть включение), то $i_* = 0$, j_* — мономорфизм и ∂_* — эпиморфизм.

(g) Если существует гомотопия $f_t : X \to X$, для которой $f_0 = \mathrm{id}$ и $f_1(X) \subset A$, то i_* — эпиморфизм, $j_* = 0$ и ∂_* — мономорфизм.

Оказывается, все факты, сформулированные в предыдущей задаче, являются частными случаями *одной* теоремы. Последовательность групп и гомоморфизмов называется *точной*, если ядро каждого ее гомоморфизма совпадает с образом предшествующего гомоморфизма.

Теорема о точности последовательности пары. *Гомологическая последовательность пары* (X,A) *точна.*

9. (a) Докажите теорему. Указание: аналогично приведенному наброску доказательства теоремы о гомологиях сфер и предыдущей задаче.

(b) Вычислите гомологическую последовательность пар (S^n, D^n) и (S^n, S^{n-1}).

10. (a) Последовательность $0 \to G \xrightarrow{\varphi} H$ точна тогда и только тогда, когда φ есть мономорфизм. Последовательность $G \xrightarrow{\varphi} H \to 0$ точна тогда и только тогда, когда φ есть эпиморфизм. Последовательность $0 \to G \xrightarrow{\varphi} H \to 0$ точна тогда и только тогда, когда φ есть изоморфизм.

(b) *Короткая точная последовательность* $0 \to G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{\psi} K \to 0$ точна тогда и только тогда, когда φ есть мономорфизм, $K \cong H/\varphi(G)$ и ψ есть естественная проекция.

(c) *5-лемма.* Если в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \to A_2 & \to A_3 & \to A_4 & \to A_5 \\ \varphi_1 \downarrow & \varphi_2 \downarrow & \varphi_3 \downarrow & \varphi_4 \downarrow & \varphi_5 \downarrow \\ B_1 & \to B_2 & \to B_3 & \to B_4 & \to B_5 \end{array}$$

с точными строками отображения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ и φ_5 являются изоморфизмами, то и φ_3 — изоморфизм.

(d) Из восьми предположений 5-леммы ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ и φ_5 — мономорфизмы и $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ и φ_5 — эпиморфизмы) для доказательства мономорфности отображения φ_3 требуются только три (какие?), а для доказательства его эпиморфности — другие три (какие?). Два оставшихся предположения являются, таким образом, вообще лишними.

(e) Если, сохранив все предположения 5-леммы, исключить из ее диаграммы стрелку φ_3, будет ли верно, что $A_3 \cong B_3$?

11. (a) Если $A \cup B$ стягиваемо, то при $k \geqslant 1$ разность гомоморфизмов включений $\alpha = i_A - i_B : H_k(A \cap B) \to H_k(A) \oplus H_k(B)$ есть изоморфизм.

Указание. Эпиморфность отображения i_A доказывается так. Пусть дан произвольный цикл a в A. Так как $A \cup B$ стягиваемо, то существует цепь c в $A \cup B$, для которой $\partial c = a$. Тогда c есть относительный цикл в $(A \cup B, A)$. При изоморфизме вырезания ему соответствует относительный цикл $c' = c \cap B$ в $(B, A \cap B)$. Тогда $\partial c'$ есть цикл в $A \cap B$, гомологичный в A циклу a.

(b) Если $A \cap B$ стягиваемо, то при $k \geqslant 1$ сумма гомоморфизмов включений $\beta = I_A \oplus I_B : H_k(A) \oplus H_k(B) \to H_k(A \cup B)$ есть изоморфизм.

(c) Композиции

$$H_k(A \cup B) \xrightarrow{j_*} H_k(A \cup B, A) \cong H_k(B, A \cap B) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A \cap B) \quad \text{и}$$

$$H_k(A \cup B) \xrightarrow{j_*} H_k(A \cup B, B) \cong H_k(A, A \cap B) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(A \cap B)$$

(в которых $\cong$ есть изоморфизм вырезания) совпадают с точностью до знака.

(d) Если A и B стягиваемы, то при $k \geqslant 1$ каждый гомоморфизм из (c) есть изоморфизм $H_k(A \cup B) \to H_{k-1}(A \cap B)$. Указание: рассмотрите случай $A \cup B = D^n_+ \cup_{S^{n-1}} D^n_-$.

(e) Докажите следующий результат для случая, когда A и B — многообразия размерности n с краем, пересекающиеся по $(n-1)$-мерному подмногообразию края.

Теорема о последовательности Майера-Виеториса. *Последовательность*

$$\to H_k(A \cap B) \xrightarrow{i_A - i_B} H_k(A) \oplus H_k(B) \xrightarrow{I_A \oplus I_B} H_k(A \cup B) \xrightarrow{\gamma} H_{k-1}(A \cap B) \to$$

точна. Здесь гомоморфизмы $i_A - i_B$, $I_A \oplus I_B$ и γ определены в предыдущей задаче.

Заметим, что эта последовательность является аналогом формулы включений-исключений.

12. Вычислите гомологии

(a) Дополнения к узлу в трехмерном пространстве.

(b) Дополнения к вложенной сфере с ручками N в четырехмерном пространстве. Указание: найдется окрестность сферы с ручками, граница которой диффеоморфна $N \times S^1$ (см. пункт 'нормальные векторные поля').

13.* Пусть f_A — линейный автоморфизм тора T^2, заданный матрицей A. Вычислите гомологии

(a) Пространства $N \cup_{f_A} D^2 \times S^1$, где N — данное 3-многообразие с краем $\partial N \supset T^2$.

(b) Пространства $T^2 \times I/(x, 0) \sim (f_A(x), 1)$.

Пусть дано пространство (например, граф или 2-многообразие) X. Если задан гомеоморфизм $f : X \to X$ на себя, то *пространством X-расслоения над окружностью* называется пространство, полученное из $X \times I$ отождествлением точек $(x, 0)$ и $(f(x), 1)$. Эквивалентность X-расслоений определяется аналогично пункту 'простейшие расслоения' в главе 5.

14.* (a) Пусть N и X — замкнутые ориентируемые 2-многообразия. Если некоторое 3-многообразие M является одновременно S^1-расслоением над N, не эквивалентным проекции $N \times S^1 \to N$, и X-расслоением над окружностью, не эквивалентным проекции $N \times S^1 \to N$, то $N = X = T^2$. Указание: вычислите гомологии 3-многообразия M через S^1-расслоение над N и через X-расслоение над S^1.

(b) Существует 3-многообразие, которое является одновременно непрямым S^1-расслоением над T^2 и непрямым T^2-расслоением над окружностью.

(c) Опишите все расслоения из (b).

Как выразить гомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ через гомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}$? Ответ дается следующей теоремой.

Формулы универсальных коэффициентов. *Для простого p*

$$H_k(X; \mathbb{Z}_p) \cong (H_k(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p) \oplus (H_k(X; \mathbb{Z}) * \mathbb{Z}_p),$$

где $G \otimes \mathbb{Z}_p := G/pG$ *и* $G * \mathbb{Z}_p$ *определяется как совокупность элементов порядка 1 или* p *в* G.

$$\textit{Если} \quad H_k(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^b \oplus \operatorname{Tors} H_k(X;\mathbb{Z}), \quad \textit{то} \quad H_k(X;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^b.$$

Замечание. Аналогичные простые формулировки и доказательства имеют остальные *формулы универсальных коэффициентов*, выражающие когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}$ через гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Чтобы сделать все эти простые и полезнейшие результаты менее доступными, их обычно формулируют и доказывают на языке абстрактных тензорных, периодических и Ext-произведений. Этот язык (как и более экзотические коэффициенты) создавался (Бокштейном) для изучения обобщений примера Понтрягина двумерных компактов A и B с трехмерным произведением $A \times B$.

15. (a) *Последовательность Бокштейна*

$$\ldots \to H_{k+1}(X;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta_k} H_k(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{2} H_k(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho_2} H_k(X;\mathbb{Z}_2) \to \ldots$$

точна. Здесь 2 — умножение на 2, ρ_2 — приведение по модулю 2, а *гомоморфизм Бокштейна* β_k определяется так. Если $a = a_1 + \ldots + a_s$ — цикл по модулю 2, где $a_1, \ldots, a_s$ являются $(k+1)$-симплексами некоторой триангуляции, то возьмем целочисленную цепь $\widetilde{a} = a_1 + \ldots + a_s$, положим $\beta_k[a] := [\frac{1}{2}\partial\widetilde{a}]$ и проверим корректность.

(b) Докажите формулы универсальных коэффициентов для $p = 2$.

(c) То же для произвольного p.

(d) То же для коэффициентов $\mathbb{Q}$.

16. Докажите следующий результат.

Формула Кюннета. *Для простого* p

$$H_k(X \times Y;\mathbb{Z}_p) \cong \oplus_{i=0}^{k} H_i(X;\mathbb{Z}_p) \otimes H_{k-i}(Y;\mathbb{Z}_p).$$

14 Двойственность Пуанкаре

Простая часть.

1. Для замкнутого ориентируемого 3-многообразия N группы $H_1(N;\mathbb{Z}_2)$ и $H_2(N;\mathbb{Z}_2)$ изоморфны.

Теорема двойственности Пуанкаре по модулю 2 (простая часть). *Для замкнутого n-многообразия N выполнено $H_i(N;\mathbb{Z}_2) \cong H_{n-i}(N;\mathbb{Z}_2)$.*

Для доказательства этой теоремы при $n=3$ (и для дальнейшего) возьмем двойственную к T триангуляцию T^* 3-многообразия N. Тогда количество i-мерных клеток в T^* равно $c_{i*} = c_{3-i}$. Используя T^* вместо T, определим аналогично вышеизложенному группы C_{i*} и граничные отображения $\partial_{i*} : C_{i+1,*} \to C_{i*}$.

Доказательство теоремы при $n=3$. Имеем

$$\dim H_1(N) = \dim \partial_0^{-1}(0) - \dim \partial_1(C_2) = c_1 - \operatorname{rk}\partial_0 - \operatorname{rk}\partial_1 \overset{1}{=}$$

$$\overset{1}{=} c_{1*} - \operatorname{rk}\partial_{0*} - \operatorname{rk}\partial_{1*} \overset{2}{=} c_2 - \operatorname{rk}\partial_1 - \operatorname{rk}\partial_2 \overset{3}{=} \dim H_2(N).$$

Равенство (1) справедливо по теореме инвариантности групп гомологий. Равенство (2) верно, поскольку $\alpha \subset \beta$ тогда и только тогда, когда $\beta^* \subset \alpha^*$, а значит, матрицы операторов ∂_{0*}, ∂_{1*} и ∂_{2*} в стандартных базисах групп C_{i*} получаются *транспонированием* из матриц операторов ∂_2, ∂_1 и ∂_0 в стандартных базисах групп C_i. Равенство (3) доказывается аналогично первым двум. QED

2. Докажите теорему для произвольного n.

3. Для замкнутого ориентируемого 3-многообразия N
(a) свободные части групп $H_1(N;\mathbb{Z})$ и $H_2(N;\mathbb{Z})$ изоморфны.
(b) кручение группы $H_2(N;\mathbb{Z})$ нулевое.

Теорема двойственности Пуанкаре (простая часть). *Для замкнутого ориентируемого n-многообразия N*

- *свободные части групп $H_i(N;\mathbb{Z})$ и $H_{n-i}(N;\mathbb{Z})$ изоморфны;*
- *кручения групп $H_i(N;\mathbb{Z})$ и $H_{n-i-1}(N;\mathbb{Z})$ изоморфны.*

4. Докажите теорему.

Заметим, что иногда (с целью усложнения доказательства) простую часть теоремы двойственности Пуанкаре доказывают с использованием индекса пересечения.

Сложная часть по модулю 2.

Впрочем, индекс пересечения действительно крайне полезен: например, для сложной части теоремы двойственности Пуанкаре. Следующие определение, задачи и теорема интересны даже для $n=3$.

Определение формы пересечений

$$\cap : H_i(N) \times H_{n-i}(N) \to \mathbb{Z}_2$$

для замкнутого n-многообразия N. (Аналогично пункту 'форма пересечений' главы 2.) Для i-мерной грани x схемы T и $(n-i)$-мерной грани y двойственной схемы T^* положим $x \cap y = 1$, если x и y двойственны, и $x \cap y = 0$ иначе. Продолжим это умножение до билинейной формы $C_i \times C_{n-i,*} \to \mathbb{Z}_2$. Тогда формула $[a] \cap [b] := a \cap b$ корректно задает форму пересечений ввиду теоремы инвариантности групп гомологий и следующей задачи.

5. (a) Пересечение цикла и границы всегда нулевое.
(b) Определение формы пересечений корректно.
(c) $(\alpha+\beta)\cap\gamma = \alpha\cap\gamma + \beta\cap\gamma$ и $\alpha\cap(\beta+\gamma) = \alpha\cap\beta + \alpha\cap\gamma$, т.е. пересечение на гомологиях билинейно.

Теорема двойственности Пуанкаре по модулю 2 (сложная часть). *Для замкнутого n-многообразия N форма пересечений по модулю 2 невырождена, т.е. для любого $\alpha \in H_i(N) - \{0\}$ существует такой $\beta \in H_{n-i}(N)$, что $\alpha \cap \beta = 1 \in \mathbb{Z}_2$.*

6. (a) Докажите теорему для $i = n-1$.
(b) Выведите случай $i=1$ из случая $i = n-1$.

Простая идея, работающая для $i = 1, n-1$, не годится для других случаев. Приведем в виде цикла задач план другого (чуть более сложного) доказательства случая $n = 3$, $i = 1$, которое годится для общего случая (см. детали в [ST04, §71]).

7. (a) Пусть базис $x_1, \dots, x_{c_1}$ группы C_1 получен из стандартного базиса этой группы оператором A. Базис $y_1, \dots, y_{c_1}$ группы C_{2*} получен из стандартного базиса этой группы оператором $(A^{-1})^*$ тогда и только тогда, когда $x_i \cap y_j = \delta_{ij}$.

Указание. При преобразованиях базисов в C_1 и C_{2*}, заданных матрицами A и B, матрица M билинейной формы переходит в $A^T M B$.

(b) Пусть $x_1, \dots, x_{c_1}$ и $y_1, \dots, y_{c_1}$ — такие базисы групп C_1 и C_{2*}, что $x_i \cap y_j = \delta_{ij}$. Возьмем стандартные базисы в группах C_0 и C_{3*}. Тогда матрицы операторов ∂_0 и ∂_2^* получаютя друг из друга транспонированием.

(c) Пусть $x_1, \dots, x_{c_1}$ — такой базис группы C_1, что

$x_1, \dots, x_{b_1}$ — базис группы 1-границ и $x_1, \dots, x_{z_1}$ — базис группы 1-циклов.

Возьмем такой базис $y_1, \dots, y_{c_1}$ группы C_{2*}, что $x_i \cap y_j = \delta_{ij}$. Тогда

$y_{b_1+1}, \dots, y_{c_1}$ — базис группы 2-циклов и $y_{z_1+1}, \dots, y_{c_1}$ — базис группы 2-границ.

(d) для любого базиса $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ группы $H_1(N)$ существует базис $\beta_1, \dots, \beta_k$ группы $H_2(N)$, для которого $\alpha_i \cap \beta_j = \delta_{ij}$.

(e) Докажите сложную часть теоремы двойственности Пуанкаре для $n = 4$ и $i = 2$.

(f) То же для общего случая.

8. (a) Для n-многообразия N с краем билинейное умножение $\cap\colon H_i(N) \times H_{n-i}(N) \to \mathbb{Z}_2$ определено корректно формулой $[a] \cap [b] := a \cap b$, но может быть вырожденным.

(b) Для листа Мебиуса N формула $[a] \cap [b] := a \cap b$ не определяет корректно умножения $\cap\colon H_1(N, \partial N) \times H_1(N, \partial N) \to \mathbb{Z}_2$.

(c) Для многообразия N с краем определите *форму пересечений по модулю 2*

$$\cap\colon H_i(N, \partial N) \times H_{n-i}(N) \to \mathbb{Z}_2.$$

(d) Докажите следующий результат.

Теорема двойственности Лефшеца по модулю 2. *Для (компактного) n-многообразия N с краем $H_i(N) \cong H_{n-i}(N, \partial N)$.*

Более того, форма пересечений по модулю 2 невырождена.

9. Для n-многообразия N с краем (возможно, пустым) формула $[a] \cap [b] := a \cap b$ корректно определяет билинейные умножения

$$H_i(N) \times H_j(N) \to H_{i+j-n}(N), \quad H_i(N) \times H_j(N, \partial N) \to H_{i+j-n}(N)$$

$$\text{и} \quad H_i(N, \partial N) \times H_j(N, \partial N) \to H_{i+j-n}(N, \partial N).$$

Сложная часть с целыми коэффициентами (набросок).

Теорема двойственности Пуанкаре (сложная часть). *Для замкнутого ориентируемого n-многообразия N*

целочисленная форма пересечений

$$\cap\colon H_i(N; \mathbb{Z}) \times H_{n-i}(N; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

невырождена и унимодулярна, т.е. для любого примитивного (т.е. не делящегося на целое число, большее 1) элемента $\alpha \in H_i(N; \mathbb{Z})$ существует такой $\beta \in H_{n-i}(N; \mathbb{Z})$, что $\alpha \cap \beta = 1 \in \mathbb{Z}$;

форма зацеплений

$$\mathrm{lk}\colon \operatorname{Tors} H_i(N; \mathbb{Z}) \times \operatorname{Tors} H_{n-1-i}(N; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

невырождена.

10. (a) Определите целочисленную форму пересечений и докажите первую половину сложной части теоремы двойственности Пуанкаре.

(b) Форма зацеплений корректно определена формулой

$$\mathrm{lk}([a], [b]) := [\frac{a \cap b'}{n}], \quad \text{где} \quad \partial b' = nb.$$

(c) Докажите вторую половину сложной части теоремы двойственности Пуанкаре. См. детали в [ST04, §69, §71, Предложение 2].

(c) Докажите следующий результат.

Теорема двойственности Лефшеца. *Для (компактного) ориентируемого n-многообразия N с краем свободные части групп $H_i(N;\mathbb{Z})$ и $H_{n-i}(N,\partial N;\mathbb{Z})$ изоморфны; кручения групп $H_i(N;\mathbb{Z})$ и $H_{n-i-1}(N,\partial N;\mathbb{Z})$ изоморфны.*

Более того, целочисленная форма пересечений невырождена и унимодулярна, а форма зацеплений

$$\mathrm{lk} : \operatorname{Tors} H_i(N;\mathbb{Z}) \times \operatorname{Tors} H_{n-1-i}(N,\partial N;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

невырождена.

Надеюсь, следующее шутливое замечание будет полезно начинающему. Сложную часть теоремы двойственности Пуанкаре часто либо не доказывают (в [FF89] теорема 6 в §17 на стр. 148 названа очевидной), либо доказывают с использованием когомологий и формулы универсальных коэффициентов (с целью усложнения доказательства). Когомологии действительно полезны при работе с дифференциальными формами, при изучении алгебраической геометрии или гомотопической топологии произвольных комплексов — там естественно возникают и применяются именно когомологии, а не гомологии. А во многих учебниках и лекционных курсах *когомологии многообразий* (и *изоморфизм Пуанкаре*) вводятся намного раньше тех проблем, для решения которых они необходимы. В таких ситуациях когомогогии применяются для усложнения доказательств (которые прозрачны, если использовать только гомологии), а также чтобы дать возможность студентам почаще допускать ошибки (что гораздо легче сделать, если обозначать канонически изоморфные группы по-разному).

Реализация циклов подмногообразиями (набросок).

Приведем план наглядного изложения простейших результатов о гомотопической классификации отображений многообразий (и их следствий о реализуемости гомологических классов подмногообразиями).

11. Пусть N — замкнутое n-многообразие.

(a) При $n \geqslant 3$ любой гомологический класс по модулю 2 размерности 1 реализуется вложенной окружностью, и гомологичность по модулю 2 между окружностями реализуется 2-подмногообразием многообразия $N \times I$.

(b) При $n \geqslant 5$ любой гомологический класс по модулю 2 размерности 2 реализуется 2-подмногообразием (естественно, замкнутым), и гомологичность по модулю 2 между 2-подмногообразиями реализуется 3-подмногообразием (естественно, с краем) многообразия $N \times I$.

12. Пусть N — замкнутое ориентируемое n-многообразие.

(a) Сформулируйте и докажите аналоги предыдущей задачи.

(b) Отображение

$$[N;S^1] \to H_{n-1}(N;\mathbb{Z}), \quad [f] \mapsto [f^{-1}(x)],$$

ставящее в соответствие гомотопическому классу отображения $f : N \to S^1$ гомологический класс прообраза $f^{-1}(x)$ регулярного значения, корректно определено.

(c) Для любого $y \in H_{n-1}(N;\mathbb{Z})$ существует и единственно (с точностью до гомотопии) отображение $f : N \to S^1$, для которого гомоморфизм $f_* : H_1(N) \to H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ задается формулой $f_*(a) = a \cap y$.

(d) Отображения из предыдущих пунктов являются взаимно обратными биекциями $[N;S^1] \leftrightarrow H_{n-1}(N;\mathbb{Z})$.

(e) Любой целочисленный гомологический класс коразмерности 1 реализуется ориентируемым подмногообразием, и целочисленная гомологичность между ориентируемыми подмногообразиями коразмерности 1 реализуется ориентируемым подмногообразием многообразия $N \times I$.

13. Пусть N — замкнутое ориентируемое n-многообразие.

(a) Отображение

$$[N;\mathbb{C}P^n] \to H_{n-2}(N;\mathbb{Z}), \quad [f] \mapsto [f^{-1}(\mathbb{C}P^{n-1})]$$

ставящее в соответствие гомотопическому классу отображения $f : N \to \mathbb{C}P^n$, трансверсального вдоль $\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$, гомологический класс прообраза $f^{-1}(\mathbb{C}P^{n-1})$, корректно определено и является биекцией.

(b) Любой целочисленный гомологический класс коразмерности 2 реализуется ориентируемым подмногообразием, и целочисленная гомологичность между ориентируемыми подмногообразиями коразмерности 2 реализуется реализуется ориентируемым подмногообразием многообразия $N \times I$.

(c) Если $n \leqslant 5$, то любой целочисленный класс гомологий с целыми коэффициентами реализуется ориентированным подмногообразием.

14. Пусть N — замкнутое n-многообразие.

(a) Отображение

$$[N; \mathbb{R}P^{n+1}] \to H_{n-1}(N), \quad [f] \mapsto [f^{-1}(\mathbb{R}P^n)]$$

ставящее в соответствие гомотопическому классу отображения $f : N \to \mathbb{R}P^{n+1}$, трансверсального вдоль $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{R}P^{n+1}$, гомологический класс прообраза $f^{-1}(\mathbb{R}P^n)$, корректно определено и является биекцией.

(b) Любой гомологический класс по модулю 2 коразмерности 1 реализуется подмногообразием, и гомологичность по модулю 2 между подмногообразиями коразмерности 1 реализуется подмногообразием многообразия $N \times I$.

(c)* При $n \leqslant 4$ любой гомологический класс по модулю 2 реализуется подмногообразием, но не любая гомологичность по модулю 2 между 2-подмногообразиями реализуется 3-подмногообразием в $N \times I$ [Ki89, II.1].

15. Пусть N — замкнутое ориентируемое n-многообразие.

(a) Любое ориентируемое 2-многообразие, кроме сферы, ретрагируется на некоторую окружность.

(b) *Теорема Хопфа.* N ретрагируется на окружность $\Sigma \subset N$ тогда и только тогда, когда $[\Sigma] \subset H_1(N; \mathbb{Z})$ *примитивен*, т.е. не делится ни на одно число, отличное от ± 1.

Указание: докажите, что оба этих условия равносильны наличию $(n-1)$-подмногообразия в N, трансверсально пересекающего Σ ровно в одной точке.

(c) N ретрагируется на некоторую окружность тогда и только тогда, когда группа $H_1(N; \mathbb{Z})$ бесконечна (А. Т. Фоменко и И. Н. Шнурников).

Теорема Тома. *Некоторое кратное любого k-мерного целочисленного гомологического класса замкнутого ориентируемого n-многообразия реализуется отображением ориентируемого многообразия; при $k < n/2$ это отображение можно считать вложением* [DNF84, §27, Следствие 3].

Указания к некоторым задачам.

2b. Возьмем такие 3-цепь y и 2-цикл z, что $\partial y = kz$ для некоторого целого k. Кратность (в цепи y) 3-симплекса, не входящего в y, равна нулю и поэтому делится на k. Если кратность некоторого 3-симплекса делится на k, то кратность любого соседнего с ним 3-симплекса делится на k. Поэтому $y = ky_1$.

4. Аналогично вышеприведенному рассуждению и задаче 2, ср. [ST04, §69].

6a. Приведем рассуждения для $n = 3$. Класс α представляется подмногообразием A (задача 14b). Подмногообразие A не разбивает многообразие N. (Действительно, иначе A было бы границей каждой компоненты связности дополнения $N - A$, а значит, было бы гомологично нулю.)

Возьмем маленький отрезок, трансверсально пересекающий 2-многообразие A ровно в одной точке. Так как A не разбивает N, то концы этого отрезка можно соединить ломаной вне A. Объединение этих ломаной и отрезка является 1-циклом, трансверсально пересекающим A ровно в одной точке. Гомологический класс этого 1-цикла является искомым.

6b. Следует из простой части.

14b. Приведем рассуждения для $n = 3$. Возьмем 2-цикл a, представляющий класс $\alpha \in H_2(N)$. К каждому ребру схемы примыкает четное число граней цикла a. 'Растащим' эти грани на пары, получим 2-цикл в N, гомологичный 2-циклу a и представленный 2-полиэдром, каждая точка которого имеет (в этом 2-полиэдре) окрестность, гомеоморфную конусу над несвязным объединением окружностей. Тех точек, для которых окружностей больше одной, конечное число. Для каждой из таких точек 'растащим' конусы, отвечающие разным окружностям. Получим 2-цикл, гомологичный 2-циклу a и представленный несамопересекающимся связным замкнутым 2-подмногообразием A в N (не обязательно ориентируемым). Это подмногообразие является подкомплексом в некотором измельчении схемы T.

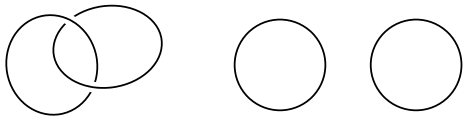
15 Двойственность Александера-Понтрягина

Коэффициент зацепления.

Формально, этот пункт не используется далее.

Определение изотопности напомнено в начале главы 7.

Теорема. *Существуют два не изотопных зацепления $S^n \sqcup S^n$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$ (т.е. вложения многообразия $N = S^n \sqcup S^n$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$).*



(a) (b)

Рис. 62: Зацепление Хопфа

Для $n = 1$ нужные зацепления легко построить явно, рис. 62. Зацепление f_1 образовано окружностями, зацепленные как звенья цепи. Зацепление f_0 образовано парой непересекающихся окружностей, лежащих в одной плоскости.

Эта теорема интересна даже для случая $n = 1$, для которого мы ее и докажем (доказательство общего случая аналогично). Доказательство основано на понятии коэффициента зацепления, которое является одним из важнейших в топологии. Здесь мы излагаем только то, что нужно для теоремы, и рекомендуем читателю обратиться к [BE82] за бóльшим.

Определение коэффициента зацепления для вложения $f : S^1_1 \sqcup S^1_2 \to \mathbb{R}^3$. Рассмотрим отображение $g : D^2 \to \mathbb{R}^3$ общего положения, сужением которого на границу является первая компонента зацепления, т.е. $g|_{\partial D^2} = f|_{S^1_1}$. (Можно взять $g = c\,on f|_{S^1_1}$.) Тогда образ $g(D^2)$ пересекает вторую компоненту $f(S^1_2)$ зацепления в конечном числе точек. Ввиду общности положения можно считать, что эти точки не лежат на (одномерном) множестве самопересечений отображения g. Назовем *коэффициентом зацепления по модулю 2* зацепления f количество точек пересечения gD^2 с $f(S^1_2)$ по модулю 2:

$$\mathrm{lk}(f) := \#(g(D^2) \cap f(S^1_2)) \mod 2.$$

1. (a) Определение коэффициента зацепления корректно, т.е. $\mathrm{lk}(f)$ не зависит от выбора отображения $g : D^2 \to \mathbb{R}^3$ общего положения, сужением которого на границу является первая компонента зацепления.

Указание. Рассмотрим два (несамопересекающихся) диска общего положения D^2 и $\overline{D}^2$ такие, что $\partial D^2 = \partial \overline{D}^2 = f(S^1_1)$ и объединение $D^2 \cup \overline{D}^2$ является несамопересекающейся сферой общего положения. Тогда независимость вытекает из того, что окружность $f(S^1_2)$ пересекает эту сферу в четном числе точек.

(b) Коэффициент зацепления инвариантен (т.е. не меняется) при изотопии зацепления f.

Указание. Пусть f_t — изотопия вложения f. Поскольку отображение $\mathrm{lk}(f_t)$ непрерывно и принимает значения в $\{0, 1\}$, то оно постоянно.

(c) Докажите теорему. Указание: утверждение теоремы следует из того, что $\mathrm{lk}(f_0) = 0$, $\mathrm{lk}(f_1) = 1$ и $\mathrm{lk}(f)$ не меняется при изотопии.

2. (a) Найдите $\mathrm{lk}(f)$ по проекции вложения на плоскость.

(b) Определите аналогично *целочисленный* коэффициент зацепления $\mathrm{lk}(f) \in \mathbb{Z}$.

(c) Определите аналогично коэффициент зацепления $\mathrm{lk}(f) \in \mathbb{Z}$ для произвольного зацепления f (сужения которого на компоненты могут быть заузлены).

(d) Этот инвариант не полон.

3.* Обозначим через $E^{2n+1}(N)$ множество вложений $N \to \mathbb{R}^{2n+1}$ с точность до изотопии.

(a) Определите коэффициент зацепления $\mathrm{lk}(f) \in \mathbb{Z}$ для вложения $f : S^n_1 \sqcup S^n_2 \to \mathbb{R}^{2n+1}$.

(b) Отображение $\mathrm{lk} : E^{2n+1}(S^n_1 \sqcup S^n_2) \to \mathbb{Z}$ является биекцией при $n \geqslant 2$.

(c) Для $n \geqslant 2$ существует биекция $E^{2n+1}(S^n_1 \sqcup S^n_2 \sqcup \ldots \sqcup S^n_k) \to \mathbb{Z}^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

Двойственность Александера-Понтрягина.

В этом и следующем пунктах коэффициенты групп гомологий, если они не указаны, могут быть произвольными.

Теорема о прообразе. *Для замкнутого гладкого ориентируемого n-подмногообразия $N \subset S^m$ выполнено $H_s(N) \cong H_{s+m-n-1}(S^m - N)$.*

Указанный изоморфизм легко построить. Рассмотрим $(s+n-m+1)$-цикл $x \subset N$ (симплициальный цикл в некоторой гладкой триангуляции, или погруженное подмногообразие). Концы нормальных (к N) векторов длины ε, начала которых пробегают x, образуют подмножество в $S^m - N$, обозначаемое $AD(x) = AD_\varepsilon(x)$. При достаточно малом ε множество $AD(x)$ является s-циклом в $S^m - N$, и AD индуцирует изоморфизм $AD : H_{s+n-m+1}(N) \to H_s(S^m - N)$.

Обозначим через ON множество концов нормальных векторов длины не более ε. Положим $C_N := S^m - \operatorname{Int} ON$. Эти пространства ON и C_N являются m-мерными многообразиями с общим краем (край образован концами векторов длины ровно ε). Обозначим через $p : ON \to N$ отображение, ставящее в соответствие точке нормального вектора его начало (этим отображение корректно определено при достаточно малых ε).

Отображение AD является композицией

$$H_{s+n-m+1}(N) \overset{p|^!_{\partial C_N}}{\to} H_s(\partial C_N) \overset{i_*}{\to} H_s(C_N)$$

гомоморфизмов включения и прообраза. Вооще говоря, ни один из этих гомоморфизмов не является изоморфизмом.

Теорема о прообразе следует из того, что AD есть композиция изоморфизмов прообраза (Тома), вырезания и граничного:

$$H_{s+n-m+1}(N) \overset{p^!}{\to} H_{s+1}(ON, \partial ON) \overset{i_*}{\to} H_{s+1}(S^m, C_N) \overset{\partial}{\to} H_s(C_N).$$

4. (a) Дайте строгое определение отображения $p^!$.

(b) Докажите, что $p^!$ и ∂ — изоморфизмы (в нашей ситуации).

(Изоморфизм AD совпадает с композицией "обычной"двойственности Александера [Pr05] и изоморфизма Пуанкаре. Действительно, $AD(x)$ является границей $(s+1)$-цепи $p^{-1}(x)$, пересечение которой в S^m с любым $(n-1-(s+n-m+1))$-циклом из N совпадает с пересечением в N этого цикла и x.)

Легко построить изоморфизм AD^{-1} (и тем самым получить еще одно доказательство теоремы о прообразе). Для s-цикла a в C_N возьмем $(s+1)$-цепь a' общего положения в S^m, для которой $\partial a' = a$. (Формально, пусть N — подкомплекс сферы S^m в некоторой триангуляции, тогда цепь a' берем в двойственной триангуляции.) Тогда пересечение $a' \cap N$ будет $(s+1+n-m)$-циклом в N. Положим $AD^{-1}[a] = [a' \cap N]$.

5. (a) Это определение осмысленно, т.е. $\partial(a' \cap N) = 0$.

(b) Это определение корректно, т.е. не зависит от выбора a и a'.

(c) Построенное отображение AD^{-1} действительно обратно к AD и действительно является изоморфизмом.

6. (a) Для гладкого n-подмногообразия $N \subset S^m$ с краем выполнено $H_s(N, \partial N) \cong H_{s+m-n-1}(S^m - N)$.

(b) Теорема о прообразе верна для неориентируемых многообразий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$.

Для подполиэдра $N \subset S^m$ обозначим через ON его *регулярную* (т.е. являющуюся его утолщением) окрестность в S^m. Положим $C_N := S^m - \operatorname{Int} ON$. Обозначим через $p : ON \to N$ ретракцию.

Теорема двойственности Александера. *Для подполиэдра $N \subset S^m$ выполнено $H_s(N) \cong H_{s+1}(C_N, \partial C_N)$.*

Более точно, изоморфизмом является композиция

$$H_{s+1}(C_N, \partial C_N) \overset{\partial}{\to} H_s(\partial C_N) \overset{p_*}{\to} H_s(N).$$

Теорема следует из того, что композиция $p_*\partial$ обратна следующей:

$$H_s(N) \cong H_s(ON) \cong H_{s+1}(S^m, ON) \cong H_{s+1}(C_N, \partial C_N).$$

Здесь первый изоморфизм получается ввиду гомотопической инвариантности гомологий, второй из точной последовательности пары (S^m, ON), а третий из теоремы вырезания.

Применяя двойственность Лефшеца к m-многообразию C_N с краем, получаем следующие следствия.

Следствие. *Для подполиэдра $N \subset S^m$ выполнено*
(a) $H_s(N;\mathbb{Z}_2) \cong H_{m-s-1}(S^m - N;\mathbb{Z}_2)$.
(b) свободные части групп $H_s(N;\mathbb{Z})$ и $H_{m-s-1}(S^m - N;\mathbb{Z})$ изоморфны;
(c) кручения групп $H_s(N;\mathbb{Z})$ и $H_{m-s-2}(S^m - N;\mathbb{Z})$ изоморфны.

Теорема о прообразе вытекает из теоремы двойственности Александера, если взять $N = C_X$ и применить изоморфизм Тома $p^! : H_{s+1}(OX, \partial OX) \to H_{s+1+n-m}(X)$.

7. Для многообразий N изоморфизмы Александера $p_*\partial$ и $i_*p|^!_{\partial C_N}$ 'не коммутируют': для вложения $\xi : N \to \partial C_N$ вообще говоря, $i_*p|^!_{\partial C_N}\xi^!\partial \neq i_*\xi_*p_*\partial$ (рассмотрите, например, стандартную окружность $N \subset \mathbb{R}^3$).

В этом смысле для случая многообразий имеется *две разные* двойственности Александера $p_*\partial$ и $i_*p|^!_{\partial C_N}$.

Теорема Александера является 'простой частью' двойственности Александера-Понтрягина (ср. с 'простой частью' двойственности Пуанкаре). 'Сложная часть' была открыта Л. С. Понтрягиным около 1930 г. (это было одним из первых его научных достижений).

Теорема двойственности Понтрягина. *Для подполиэдра $N \subset S^m$*
форма зацеплений

$$\mathrm{lk} : H_s(N;\mathbb{Z}) \times H_{m-s-1}(S^m - N;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

невырождена и унимодулярна.
форма вторичных зацеплений

$$\mathrm{lk} : TorsH_s(N;\mathbb{Z}) \times TorsH_{m-s-2}(S^m - N;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

невырождена.

Для $(m-s-1)$-цикла b в $S^m - N$ возьмем $(m-s)$-цепь b' общего положения в S^m, для которой $\partial b' = b$. (Формально, пусть N — подкомплекс сферы S^m в некоторой триангуляции, тогда цикл b' берем в двойственной триангуляции.) Для s-цикла a в N положим $\mathrm{lk}([a],[b]) := a \cap b'$.

7. (a) Это определение корректно.
(b) Докажите первую часть теоремы двойственности Понтрягина.
(c) Форма вторичных зацеплений корректно определена формулой

$$\mathrm{lk}([a],[b]) := [\frac{a' \cap b'}{n}], \quad \text{где} \quad \partial a' = na.$$

(d) Докажите вторую часть теоремы двойственности Понтрягина.

Применения двойственности Александера.

8. (a) Если полиэдр N вложим в S^m, то $H_m(N) = 0$.
(b) Для подполиэдра $N \subset S^m$ выполнено $H_i(\partial C_N) \cong H_i(N) \oplus H_i(S^m - N)$. Указание. Примените теорему о прообразе или последовательность Майера-Виеториса.
(c) $\mathbb{R}P^3$ (и трехмерные линзовые пространства) не вложимо в S^4.
(d) $\mathbb{R}P^n$ не вложимо в S^{n+1} для $n \neq 4k+1$.
(e) Если $2l$-многообразие N вложимо в S^{2l+1}, то оно ориентируемо и его эйлерова характеристика четна (т.е. $\mathrm{rk}\, H_l(N;\mathbb{Z})$ или l-е число Бетти многообразия N четны).
(f) Если $(2l+1)$-многообразие N вложимо в S^{2l+2}, то оно ориентируемо и подгруппа кручения группы $H_l(N;\mathbb{Z})$ представима в виде прямой суммы $G \oplus G$ для некоторой группы G.

В (e) условие вложимости N в S^{2l+1} может быть заменено на более слабое: требуется всего лишь, чтобы N было краем некоторого ориентируемого $(2l+1)$-мерного многообразия (см. конец следующей главы). Пример $N = \mathbb{R}P^3$ показывает, что (f) таким образом ослабить нельзя.

Аналогично, изучая двойственность с учетом формы персесечений (или двойственность между *кольцами гомологий* многообразия $N \subset S^m$ и его дополнения $S^m - N$), можно получать необходимые условия на вложимость. Так Х. Хопф доказал в 1940, что $\mathbb{R}P^n$ не вложимо в S^{n+1} (даже для $n = 4k+1$).

Теорема Хопфа о вложении. *Если замкнутое связное n-многообразие N вложимо в S^{n+1}, то существует такой набор подгрупп $A_s, B_s \subset H_s(N;\mathbb{Z}_2)$ для $0 < s < n$, что $A_s \cong B_s$, $H_s(N;\mathbb{Z}_2) \cong A_s \oplus B_s$ и сужения формы пересечений на $A_s \times A_{n-s}$ и на $B_s \times B_{n-s}$ нулевые.*

Набросок доказательства. Пусть $N \subset S^{n+1}$. Обозначим через A и B замыкания компонент дополнения $S^{n+1} - N$. Будем опускать коэффициенты $\mathbb{Z}_2$. Возьмем в качестве A_s образ композиции

$$H_s(A) \to H_{s+1}(B, \partial B) \to H_s(\partial B) = H_s(N)$$

двойственности Александера и граничного гомоморфизма. Определим аналогично B_s.

Применяя теорему о прообразе или последовательность Майера-Виеториса, получаем, что $H_s(N) \cong A_s \oplus B_s$. По следствию из двойственности Александера получаем $A_s \cong B_s$ (только для этого нужны коэффициенты $\mathbb{Z}_2$). Так как форма пересечений сферы S^{n+1} нулевая, то форма пересечений $H_{n-s}(A) \times H_s(A) \to \mathbb{Z}_2$ нулевая. Значит, сужение формы пересечений многообразия N на $A_{n-s} \times A_s$ нулевое. QED

Согласно двойственности Пуанкаре, в обозначениях теоремы Хопфа о вложении $A_s \cong A_{n-s}$ и сужение формы пересечений на $A_{n-s} \times B_s$ невырождено, ср. [SE62, III, 2.1].

9. (a) Сформулируйте и докажите аналого теоремы Хопфа о вложении для целых коэффициентов и свободной части.

(b) В предположениях 8f форма зацепления многообразия N обращается в ноль на каждом из двух прямых слагаемых G [GS99, Exercise 4.5.12.d].

(c) Сформулируйте и докажите аналого теоремы Хопфа о вложении для целых коэффициентов и кручения.

(d) $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}P^3$ не вложимо в $\mathbb{R}^7$ [ARS01].

(e) $(\mathbb{R}P^3)^r$ не вложимо в $\mathbb{R}^{3r+1}$ [ARS01].

10. (a) Произведение тора с дыркой на окружность не вложимо в $\mathbb{R}^3$.

(b) $K_5 \times S^1$ не вложимо в $\mathbb{R}^3$.

(c) Какие прямые произведения графов вложимы в $\mathbb{R}^3$ [Sk03]?

(d) А S^1-расслоения над графами?

(e)* А T-расслоения над графами (определение аналогично определению I- и S^1-расслоений в пункте 'простейшие расслоения' главы 5)?

(f)* Какие I-расслоения над 2-полиэдрами вложимы в $\mathbb{R}^3$? А S^1-расслоения?

(g)* Какие косые произведения графов вложимы в $\mathbb{R}^3$?

16 Препятствия к кобордантности и нестандартные гомотопические сферы

He looked at the snail. Can it see me? he wondered. Then he felt, how little I know, and how little it is possible to know; and with this thought he experienced a moment of joy.
I. Murdoch, The Flight From The Enchanter. [15]

В этих записках приводится построение знаменитого примера Милнора нестандартной гомотопической сферы, а также набросок доказательства знаменитой теоремы Кервера-Милнора о конечности множества гомотопических сфер. Для понимания большей части текста достаточно владения понятием многообразия и основами теории гомологий ([FF89], §§12,13,17 или [Pr04], §15, [Pr06], I). Более того, он содержит набор упражнений по основами теории гомологий и поэтому может быть использован на семинарских занятиях по этой теме (например, в НМУ на 2-м курсе).

Первый и второй пункты независимы друг от друга; третий пункт использует второй.

Большая часть материала преподносится в виде задач. (Это характерно не только для дзенских монастырей, но и для серьезного изучения математики.) Для решения задач достаточно уверенного владения понятием многообразия и основами теории гомологий. Все необходимые *новые* определения приводятся здесь (или даются ссылки). Иногда подсказками являются соседние задачи. Задачи, для решения которых читателю нужна литература (или консультация специалиста), приводятся со звездочками и ссылками. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то это утверждение и надо доказать.

Мы пропускаем целые коэффициенты из обозначений групп гомологий. Мы работаем в гладкой категории, если не оговорено противное.

[15] *Он посмотрел на улитку. 'Может ли она видеть меня?' задумался он. Тогда он почувствовал, как мало он знает, и как мало возможно знать; и эта мысль принесла ему радость. А. Мердок, Бегство от волшебника, пер. автора.*

Нестандартные гомотопические сферы

Пример сферы Милнора. *Существует замкнутое гладкое 7-мерное многообразие, гомотопически эквивалентное (и гомеоморфное) сфере S^7, но не диффеоморфное ей.*

Многообразия M и N называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют непрерывные отображения $f : M \to N$ и $g : N \to M$ такие, что $f \circ g$ гомотопно id_N и $g \circ f$ гомотопно id_M.

Обозначим $T_n := \{(x, y) \in S^n \times S^n \ : \ |x, y| \leqslant 1\}$ (трубчатую окрестность диагонали).

1. (a) Чему гомеоморфно T_1?
(b) Чему гомеоморфны T_3 и T_7?
(c) T_2 не гомеоморфно $S^2 \times D^2$. Указание: $H_1(\partial T_2) \ncong \mathbb{Z}$ аналогично задаче 4d ниже.
(d) T_4 не гомеоморфно $S^4 \times D^4$.

2. (a) Любое отображение $S^1 \to \partial T_4$ гомотопно отображению в точку.
(b) Любое отображение $S^2 \to \partial T_4$ гомотопно отображению в точку.
(c) Не любое отображение $S^3 \to \partial T_4$ гомотопно отображению в точку.

Это значит, что ∂T_4 не является гомотопически эквивалентным сфере S^7 и необходимо усложнение конструкции.

Обозначим $T := T_4$. Для нахождения группы $H_3(\partial T)$ рассмотрим фрагмент

$$H_4(T) \xrightarrow{j} H_4(T, \partial) \xrightarrow{\partial} H_3(\partial T) \xrightarrow{i} H_3(T) = 0$$

точной последовательности пары $(T, \partial T)$. Здесь i — гомоморфизм включения, j — гомоморфизм 'позволяющий границу' и ∂ — граничный гомоморфизм.

Для ориентируемого $2n$-многообразия M обозначим через

$$\cap : H_n(M) \times H_n(M) \to \mathbb{Z}$$

его *форму пересечений* [Sk, Sk05, Remark 2.3]. For a manifold M we denote $(M, \partial M)$ shortly by (M, ∂). Аналогично определяется билинейное отображение $\cap : H_n(M, \partial) \times H_n(M) \to \mathbb{Z}$.

3. (a) Обозначим через $[S^4] \in H_4(T)$ гомологический класс диагонали в $S^4 \times S^4$.
(a) $[S^4]$ порождает $H_4(T)$ и $[S^4] \cap [S^4] = 2$.
(b) Для любых $x, y \in H_4(T)$ выполнено $x \cap jy = x \cap y$.
(c) Существует $[D^4] \in H_4(T, \partial)$, для которого $[D^4] \cap [S^4] = 1$.
(d) $H_3(\partial T) \neq 0$.
Указание: $[D^4] \notin \operatorname{im} j = \ker \partial$, поэтому $\partial \neq 0$.
(e) $H_3(\partial T) \cong \mathbb{Z}_2$.

Обозначим через $p : T \to S^4$ сужение на T проекции $S^4 \times S^4 \to S^4$ на первый сомножитель. Обозначим через (T', p') копию пары (T, p).

4. Существует диффеоморфизм $f : (p')^{-1} D^4 \to p^{-1} D^4$, переводящий пересечение с диагональю в $p^{-1} z$, $z \in \operatorname{Int} D^4$.

Обозначим $V := T \cup_f T'$. После сглаживания получится 8-многообразие V с краем (которое называется *водопроводным соединением* двух копий многообразия T).

5. (a) Любое отображение $S^1 \to \partial V$ или $S^2 \to \partial V$ гомотопно отображению в точку.
(b) V гомотопически эквивалентно $S^4 \vee S^4$.
(c) $H_4(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ имеет базис, в котором матрица формы пересечений $H_4(V) \times H_4(V) \to \mathbb{Z}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
(d) Для этого базиса S_1, S_2 существует базис D_1, D_2 группы $H_4(T, \partial)$, для которого $S_i \cap D_j = \delta_{ij}$.
(e) $H_3(\partial V) \neq 0$.
(f) $H_3(\partial V) \cong \mathbb{Z}_3$.

Итак, ∂V не является гомотопически эквивалентным сфере S^7 и необходимо усложнение конструкции.

П остроение сферы Милнора. Рассмотрим граф с вершинами $1, \dots, 8$ и ребрами $12, 23, 34, 45, 56, 67$ и 58. Для каждой вершины a графа
возьмем свой экземпляр (T_a, p_a) пары (T, p), и
выберем столько непересекающихся дисков $D^4_{ab} \subset S^4$, сколько вершин соединено с a.

Для каждого ребра ab склеим $p_a^{-1}D^4_{ab}$ и $p_b^{-1}D^4_{ba}$, как при построении многообразия V. После сглаживания получится 8-многообразие W с краем. (Оно называется *водопроводным соединением* копий многообразия T сообразно графу.) Край ∂W этого многообразия и есть 7-многообразие из примера Милнора.

6. (a) Любое отображение $S^1 \to \partial W$ или $S^2 \to \partial W$ гомотопно отображению в точку.

(b) Выберите базисы $S_1, \dots, S_8$ и $D_1, \dots, D_8$ групп $H_4(W)$ и $H_4(W, \partial)$, для которых $S_i \cap D_j = \delta_{ij}$.

(c) Найдите матрицу формы пересечений многообразия W.

(d) $H_3(\partial W) = 0$.

(e) Край ∂W гомотопически эквивалентен S^7.

(f) Сигнатура (формы пересечений) многообразия W равна 8.

Читатель, не знакомый с понятием расслоения, может не решать пункты (b,c,d,e) следующей задачи.

7. (a) $S^n \times S^n$ вложимо в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

(b) Сумма касательного расслоения к $S^n \times S^n$ и одномерного тривиального расслоения над $S^n \times S^n$ тривиальна.

(c) Многообразие T_n *параллелизуемо*, т.е. имеет семейство из $2n$ касательных векторных полей, линейно независимых в каждой точке.

(d) Многообразие V параллелизуемо.

(e) Многообразие W параллелизуемо.

(f) Выведите недиффеоморфность ∂W и S^7 из задач 6f, 7e и следующего результата.

Теорема Хирцебруха о сигнатуре. *Сигнатура гладкого замкнутого почти параллелизуемого 8-мерного многообразия делится на 7 (даже на 224).*

8. Построим аналогично 4-мерное многообразий W с краем. Докажите, что ∂W не вложимо гладко в S^4, используя следующий результат. (Заметим, что по теореме Фридмана, ∂W топологически вложимо в S^4.)

Теорема Рохлина о сигнатуре. *Сигнатура гладкого замкнутого почти параллелизуемого 4-мерного многообразия делится на 16.*

Указания.

2. (a) Отображение $S^1 \to \partial T_4$ продолжается до отображения $D^2 \to T_4$. Отображение $D^2 \to T_4$ можно изменить малым шевелением, чтобы оно перестало пересекать диагональ в $S^2 \times S^2$. Отображение $D^2 \to T_4$, не пересекающее диагональ в $S^2 \times S^2$, гомотопно отображению $D^2 \to \partial T_4$.

Замечание. Задачу 2 можно делать, используя точную последовательность расслоения. Для S^1 и S^2 получится то же решение, что и выше, но более сложно изложенное.

5. (a) Используя теорему Зейферт-Ван Кампена и последовательность Майера-Виеториса, докажите $\pi_1(V) = H_2(V) = 0$. Затем воспользуйтесь теоремой Гуревича.

6. (d) Ответ: $a_{ii} = 2$, $a_{ij} = 1$ или $a_{ij} = 0$ сообразно тому, соединены ли вершины i, j ребром или нет.

(e) (ср. [Br72, V.2.7]) Достаточно доказать, что $j : H_4(W) \to H_4(W, \partial)$ эпиморфно. Для произвольного $x' \in H_4(W, \partial)$ определим линейную функцию $f_{x'} : H_4(W) \to \mathbb{Z}$ формулой $f_{x'}(y) = x' \cap y$. По (c) форма пересечений $H_4(W) \times H_4(W) \to \mathbb{Z}$ унимодулярна. Поэтому существует $x \in H_4(W)$, для которого $f_{x'}(y) = x \cap y$ для любого $y \in H_4(W)$. По двойственности Пуанкаре $x' - jx = 0$. Итак, j эпиморфно.

7. (b,c) Докажите и используйте следующий факт: если $p : E \to B$ — векторное расслоение со слоем $\mathbb{R}^n$, $p \oplus \varepsilon$ тривиально и $b := \dim B < n$, то p тривиально. Для доказательства этого факта убедитесь, что препятствия к тривиальности обоих расслоений одинаковы (и, значит, нулевые) ввиду того, что отображение включения $\pi_b(SO_n) \to \pi_b(SO_{n+1})$ является изоморфизмом.

Препятствия к кобордантности

Напомним, что все многообразия в книге предполагаются компактными.

1. (a) Если A и B — замкнутые многообразия и $A = \partial M$, то $A \times B = \partial(M \times B)$.

(b) Любое одномерное или двумерное замкнутое ориентируемое многообразие является краем некоторого многообразия.

(c) Любое двумерное замкнутое неориентируемое многообразие четной эйлеровой характеристики является краем некоторого многообразия.

2. (a) $\mathbb{R}P^2$ не является краем многообразия.

Решение. Пусть, напротив, M — 3-многообразие и $\partial M \cong \mathbb{R}P^2$. Обозначим через M' копию многообразия M. Тогда $0 = \chi(M \cup_{\mathbb{R}P^2} M') = \chi(M) + \chi(M') - \chi(\mathbb{R}P^2)$, откуда $\chi(\mathbb{R}P^2)$ четно. Противоречие.

(b) Замкнутое 2-многообразие является краем многообразия тогда и только тогда, когда его эйлерова характеристика четна.

(c) **Теорема.** *Если замкнутое многообразие является краем многообразия, то его эйлерова характеристика четна.*

(Эта теорема интересна только для четномерных многообразий.)

(d) Если замкнутое $2k$-многообразие N является краем многообразия, то $\operatorname{rk} H_k(N)$ четен.

Теорема. *Любое замкнутое 3-многообразие является краем некоторого многообразия.* (Для ориентируемых см. [Ki89, VII, Theorem 2], для произвольных см. [St68, Chapter 6].)

3. (a) $\mathbb{R}P^{2k+1}$ является краем некоторого многообразия.

(b) $\mathbb{R}P^n$ является краем многообразия тогда и только тогда, когда n нечетно ([FF89, Упражнение 29] можно усилить).

(c) $\mathbb{C}P^{2k}$ не является краем многообразия.

(d) $\mathbb{C}P^{2k+1}$ является краем многообразия (даже ориентируемого).

(e) $\mathbb{C}P^n$ является краем многообразия тогда и только тогда, когда n нечетно ([FF89, Упражнение 29] можно усилить).

(f) $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ не является краем многообразия.

(g) При каком условии $\mathbb{R}P^{n_1} \times \ldots \mathbb{R}P^{n_k}$ является краем многообразия?

4. (a) Край ориентируемого многообразия замкнут и ориентируем.

(b) Любое одномерное или двумерное замкнутое ориентируемое многообразие является краем некоторого ориентируемого многообразия.

(c) Любое одномерное или двумерное замкнутое ориентированное многообразие является ориентированным краем краем некоторого ориентированного многообразия.

Напомним, что *ориентированным* многообразием называется *ориентируемое* многообразие с фиксированной ориентацией.

Теорема. *Любое замкнутое ориентированное 3-многообразие является ориентированным краем некоторого ориентированного многообразия.*

5. Ориентированное (произвольно) многообразие $\mathbb{C}P^2 \sqcup \mathbb{C}P^2$ не является ориентированным краем ориентированного многообразия.

(Иными словами, многообразия $\mathbb{C}P^2$ и $-\mathbb{C}P^2$ не являются ориентированно кобордантными.)

Указание: если не получается, то см. следующие задачи.

6. Для $2n$-мерного многообразия M с краем и гомоморфизма включения $i : H_n(\partial M) \to H_n(M)$

(a) $ix \cap ix = 0$ при любом $x \in H_n(\partial M)$;

(b) $\operatorname{im} i = H_n(M)^\perp$, где ортогональное дополнение берется относительно формы пересечений $H_n(M) \times H_n(M) \to \mathbb{Z}$.

Указание: используйте следующий результат.

Теорема двойственности Пуанкаре (сложная часть). *Для ориентированного гладкого m-многообразия M билинейное умножение $\cap : H_n(M) \times H_{m-n}(M, \partial) \to \mathbb{Z}$ унимодулярно, т.е. для любого примитивного (т.е. не делящегося на целое число, большее 1) элемента $\alpha \in H_n(M)$ существует такой $\beta \in H_{m-n}(M, \partial)$, что $\alpha \cap \beta = 1 \in \mathbb{Z}$.*

7. (ср. [Pr06, теорема 8.16]) Для ориентированного $(2n+1)$-многообразия M и гомоморфизмов $H_{n+1}(M, \partial) \xrightarrow{\partial} H_n(\partial M) \xrightarrow{i} H_n(M)$ имеем

(a) $x \cap \partial y = ix \cap y$ для любых $x \in H_n(\partial M)$ и $y \in H_{n+1}(M, \partial)$.

(b) $\partial y \cap \partial y = 0$ при любом $y \in H_{n+1}(M, \partial)$.

(c) $\operatorname{im} \partial = (\operatorname{im} \partial)^\perp$, где ортогональное дополнение берется относительно формы пересечений $H_n(\partial M) \times H_n(\partial M) \to \mathbb{Z}$.

(d) $2 \operatorname{rk} \operatorname{im} \partial = \operatorname{rk} H_n(\partial M)$.

8. Теорема Понтрягина. *Если замкнутое ориентированное $4k$-многообразие N является ориентированным краем ориентируемого многообразия, то сигнатура $\sigma(N)$ (формы пересечений на $H_{2k}(N; \mathbb{Z})$) равна нулю.*

(Или, эквивалентно, если замкнутые ориентированные $4k$-многообразия N_1 и N_2 ориентированно кобордантны, то $\sigma(N_1) = \sigma(N_2)$.)

9. (a) *Аддитивность.* $\sigma(M \sqcup N) = \sigma(M) + \sigma(N)$.

(b) *Мультипликативность.* $\sigma(M \times N) = \sigma(M)\sigma(N)$.

(c)* *Аддитивность Новикова-Рохлина.* $\sigma(M \bigcup\limits_{\partial M = \partial N} N) = \sigma(M) + \sigma(N)$ [Pr06].

Указания.

Второе решение задачи 2a. Пусть, напротив, M — 3-многообразие и $\partial M \cong \mathbb{R}P^2$. Тогда

$$\tau(M)|_{\partial M} \cong \tau(\partial M) \oplus \nu(\partial M \subset M) \cong \tau(\partial M) \oplus \varepsilon.$$

Поэтому $0 = e(M) \cap \partial M = e(\partial M) \neq 0$, где e — класс Эйлера по модулю 2 и равенства означают сравнения по модулю 2.

Третье решение задачи 2a. Пусть, напротив, M — 3-многообразие и $\partial M \cong \mathbb{R}P^2$. Тогда $w_1(\partial M) = \partial w_1(M)$, где $\partial : H_2(M, \partial M) \to H_1(M)$ — граничный гомоморфизм. Пусть $(\omega, \partial\omega) \subset (M, \partial M)$ — 2-подмногообразие с краем, реализующее класс $w_1(M)$. Тогда $\partial\omega \subset \partial M$ реализует класс $w_1(\partial M)$. Значит, $\omega \cap_M \omega$ есть 1-подмногообразие с краем $\partial\omega \cap_{\partial M} \partial\omega$. Поэтому $w_1(\partial M) \cap w_1(\partial M) = 0$, что неверно для $\partial M = \mathbb{R}P^2$.

3. (d) Постройте и используйте расслоение $\mathbb{C}P^{2k+1} \to HP^k$ со слоем S^2. Или постройте и используйте инволюцию на $\mathbb{C}P^{2k+1}$ без неподвижных точек.

(f) $e(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) = e(\mathbb{R}P^2)^2 \equiv 1 \mod 2$.

7. (c) Используйте (a,b) и двойственность Пуанкаре.

Если $x \in H_n(\partial M)$ и $x \cap \operatorname{im}\partial = 0$, то $ix \cap y = x \cap \partial y = 0$ для любого $y \in H_{n+1}(M, \partial)$. Значит, по двойственности Пуанкаре $ix = 0$, т.е. $x \in \operatorname{im}\partial$.

(d) Используйте (c) и двойственность Пуанкаре.

Числа Штифеля-Уитни.

3. (a) Если многообразия гомеоморфны, то они кобордантны. Обратное неверно.

(b) Если непустые многообразия кобордантны, то их размерности равны. Размерность кобордизма на 1 больше размерности того из многообразий M_1, M_2, которое непусто.

(c) Многообразия кобордантны тогда и только тогда, когда их несвязное объединение является краем некоторого многообразия.

(d) Приведите пример непустых некобордантных многообразий одинаковой размерности.

4. (a) Многообразия $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ и $\mathbb{R}P^4$ не кобордантны. Иными словами, не существует многообразия с границей $N := \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \sqcup \mathbb{R}P^4$.

Указание. Аналогично третьему доказательству того, что $\mathbb{R}P^2$ не ограничивает. Используйте $w_1(N) = (a+b, c)$, $w_1(N)^4 = (0, c^4)$ и $0 + c^4 \neq 0$.

(b) Не существует многообразия, границей которого является непустое объединение одного, двух или трех различных многообразий из $N_1 := \mathbb{R}P^6$, $N_2 = \mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^2$ и $N_3 := \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$.

(c) Докажите часть 'только тогда' следующего результата (принадлежащую Понтрягину).

Неориентируемая теорема Тома. *Замкнутое многообразие является краем многообразия тогда и только тогда, когда*

$$\Sigma w_{i_1}(N) \cap \ldots \cap w_{i_s}(N) = 0$$

для любых целых положительных $i_1, \ldots, i_s$ с $i_1 + \ldots + i_s = n$. Здесь Σ означает суммирование компонент вектора $w_{i_1}(N) \cap \ldots \cap w_{i_s}(N)$ (которые нумеруются компонентами связности многообразия N).

Иными словами, замкнутые многообразия N_1 и N_2 кобордантны тогда и только тогда, когда

$$\Sigma w_{i_1}(N_1) \cap \ldots \cap w_{i_s}(N_1) = \Sigma w_{i_1}(N_2) \cap \ldots \cap w_{i_s}(N_2)$$

для любых целых положительных $i_1, \ldots, i_s$ с $i_1 + \ldots + i_s = n$.

Часть 'тогда' доказывается гораздо труднее части 'только тогда' [St68].

Числом Штифеля-Уитни n-многообразия N (отвечающим разбиению $n = i_1 + \ldots + i_s$) называется число $w_{i_1,\ldots,i_s}(N) := \Sigma w_{i_1}(N) \cap \ldots \cap w_{i_s}(N)$.

На множестве Ω^O классов кобордизма замкнутых многообразий (всевозможных размерностей) имеются операции несвязного объединения и (декартова, или прямого) произведения.

5. (a) Эти операции действительно корректно определены.

(b) Множестве Ω^O с этими операциями является градуированным коммутативным кольцом с единицей и соотношением $a + a = 0$.

(c)* Для целых положительных чисел рассмотрим гиперповерхность $H \subset \mathbb{R}P^4 \times \mathbb{R}P^2$ степени $(1, 1)$. Тогда H является 5-многообразием и не является краем никакого многообразия.

(d)* Для целых положительных чисел рассмотрим гиперповерхность $H_{p,q} \subset \mathbb{R}P^{2^{p+1}\times q} \times \mathbb{R}P^{2^p}$ степени $(1, 1)$. Тогда $H_{p,q}$ является многообразием размерности $2^p(2q + 1) - 1$ и не является краем никакого многообразия.

Классификационная теорема Тома. *Градуированное кольцо Ω^O изоморфно градуированному кольцу полиномов над $\mathbb{Z}_2$ от образующих x_i размерности i, где i пробегает все положительные целые числа, не равные $2^s - 1$.*

В качестве x_{2i} можно взять класс кобордизма многообразия $\mathbb{R}P^{2i}$. Нечетномерные образующие были построены, например, Дольдом (ориентируемые) и Милнором (см. последний пункт предыдущего упражнения).

Сигнатура и числа Понтрягина (набросок).

Замкнутые ориентированные многообразия N_1 и N_2 называются *ориентированно кобордантными*, если существует ориентированное многообразие (*ориентированный кобордизм*) с границей $N_1 \sqcup (-N_2)$ (при этом одно из многообразий может быть пустым). Через $-N_2$ обозначается ориентированное многообразие, полученное из N_2 изменением ориентации. Классификация ориентируемых многообразий с точностью до ориентируемого кобордизма была также начата Понтрягиным в 1930-х.

9.* (a) Многообразия $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{C}P^4$ не являются ориентированно кобордантными. Иными словами, $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2 \sqcup (-\mathbb{C}P^4)$ не является краем ориентируемого многообразия.

Указание: если не получается, то докажите и используйте следующие пункты.

(b) Докажите следующий результат.

Указание: аналогично части 'только тогда' в неориентируемой теореме Понтрягина.

Теорема Понтрягина (сложный случай). *Если $4k$-многообразие N является краем ориентируемого многообразия, то*

$$\Sigma p_{i_1}(N) \cap \ldots \cap p_{i_s}(N) = 0$$

для любых целых положительных $i_1, \ldots, i_s$ с $i_1 + \ldots + i_s = n$. Здесь Σ означает суммирование компонент вектора $p_{i_1}(N) \cap \ldots \cap p_{i_s}(N)$ (которые нумеруются компонентами связности многообразия N).

Или, эквивалентно, если замкнутые ориентированные $4k$-многообразия N_1 и N_2 ориентированно кобордантны, то

$$\Sigma p_{i_1}(N_1) \cap \ldots \cap p_{i_s}(N_1) = \Sigma p_{i_1}(N_2) \cap \ldots \cap p_{i_s}(N_2)$$

для любых целых положительных $i_1, \ldots, i_s$ с $i_1 + \ldots + i_s = k$.

Числом Понтрягина $4k$-многообразия N (отвечающим разбиению $k = i_1 + \ldots + i_s$) называется число $p_{i_1,\ldots,i_s}(N) := \Sigma p_{i_1}(N) \cap \ldots \cap p_{i_s}(N)$.

10. Если $N \cong -N$, то $N \sqcup N$ кобордантно пустому и $\sigma(N) = p_{i_1,\ldots,i_s}(N) = 0$.

Теорема Тома. *Если все числа Понтрягина замкнутого ориентируемого многообразия нулевые (например, если его размерность не делится на 4), то объединение нескольких экземпляров многообразия X (которые все берутся с одинаковой ориентацией) является краем замкнутого ориентируемого многообразия.*

По поводу описания кольца Ω^{SO} классов ориентированной кобордантности ориентированных многообразий см. [FF89, §19.6.D, §43.2].

Теорема Хирцебруха о сигнатуре (упрощенная). *Для любого k существуют такие рациональные числа $a_{j_1,\ldots,j_r}$, что для любого замкнутого ориентируемого $4k$-многообразия M выполнено $\sigma(M) = \sum\limits_{j_1,\ldots,j_r} a_{j_1,\ldots,j_r} p_{j_1,\ldots,j_r}(M)$.*

11. (a) Выведите этот результат из теоремы Тома.

(b) Для любого замкнутого ориентируемого 4-многообразия M выполнено $p_1 = 3\sigma$.

Указание: по теореме Хирцебруха достаточно проверить это для $M = \mathbb{C}P^2$.

(c) Для любого замкнутого ориентируемого 8-многообразия M выполнено $7p_2 - p_{1,1} = 45\sigma$.

Указание: по теореме Хирцебруха достаточно проверить это для $M = \mathbb{C}P^4$ и $M = \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$.

Построение сферы Милнора. Рассмотрим граф с вершинами $1, \dots, 8$ и ребрами $12, 23, 34, 45, 56, 67$ и 58. Для каждой вершины графа

возьмем свой экземпляр подрасслоения касательных векторов длины не более 1 в касательном расслоении к S^4, и

выберем столько непересекающихся четырехмерных дисков в соответствующем экземпляре сферы S^4, сколько ребер выходит из вершины.

Для каждого ребра склеим сужения расслоений на четырехмерные диски, соответствующие концам этого ребра, отождествляя базу одного сужения расслоения со слоем другого. Получится 8-многообразие V с краем (*водопроводное соединение* касательных расслоений над сферами сообразно графу). Граница ∂V этого многообразия и есть сфера Милнора.

Пример сферы Милнора вытекает из формулы Хирцебруха и следующей задачи.

12. (a) Многообразие V параллелизуемо (и, значит, $p_1(V) = 0$).

(b) Сигнатура многообразия V равна 8.

(c) Край ∂V гомотопически эквивалентен S^7.

Многообразие Милнора можно строить и как S^3-расслоение над S^4 [DNF84, 28]. Если V — соответствующее D^4-расслоение, то можно добиться того, что $\sigma(V) = 1$ и $p_{1,1}(V) = 36$, тогда $\partial V \simeq S^7$, но ∂V не может быть 7-сферой по формуле Хирцебруха.

Перестройки и классификация гомотопических сфер

Замкнутые ориентированные многообразия N_1 и N_2 называются *ориентированно кобордантными*, если существует ориентированное многообразие (*ориентированный кобордизм*) с границей $N_1 \sqcup (-N_2)$ (при этом одно из многообразий может быть пустым). Через $-N_2$ обозначается ориентированное многообразие, полученное из N_2 изменением ориентации.

1. (a) $M \sqcup N$ кобордантно $M \# N$.

(b) Любое многообразие кобордантно связному.

2. (a) Перестройка дает многообразие, кобордантное исходному.

(b)* Обратно, если многообразия кобордантны, то одно можно получить из другого перестройками.

3. (a) Любое ориентируемое многообразие размерности $\neq 3$ кобордантно односвязному.

(b) Любое спинорное (т.е. параллелизуемое в окрестности двумерного остова некоторой триангуляции) многообразие размерности $\geqslant 6$ кобордантно двусвязному.

(c) Любое спинорное многообразие размерности $\geqslant 8$ параллелизуемо в окрестности трехмерного остова некоторой триангуляции и потому кобордантно трехсвязному.

Теорема Кервера-Милнора. *Множество ϑ_n ориентированных n-многообразий, гомотопически эквивалентных S^n (гомотопической сфер), с точностью до сохраняющего ориентацию диффеоморфизма, конечно при $n \geqslant 6$.*

4. Этот результат равносилен следующему: множество n-многообразий, гомотопически эквивалентных S^n, с точностью до диффеоморфизма, конечно при $n \geqslant 6$.

Лемма. *Нормальное расслоение вложения гомотопической сферы в $\mathbb{R}^m$ тривиально для большого m.*

Препятствие к тривиальности лежит в $\pi_{n-1}(SO)$. Поэтому лемма верна для $n \equiv 3, 5, 6, 7 \bmod 8$. Для других n доказательство более сложно.

О конструкции Понтрягина см., например, [Pr04], §18.

Для гомотопической сферы $N \subset \mathbb{R}^m$ с нормальным оснащением ζ обозначим через $p(N, \zeta) \in \pi_m(S^{m-n}) \cong \pi_n^S$ класс оснащенного кобордизма.

5. Для стандартной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^m$, большого m и $x \in \pi_n(SO_{m-n}) \cong \pi_n(SO)$ рассмотрим оснащение нормального расслоения, полученное из стандартного оснащения при помощи x. Обозначим через $J(x) \in \pi_n^S$ класс оснащенного кобордизма полученного оснащенного многообразия.

(a) Определите аналогично и вычислите $J : \pi_1(SO_2) \to \pi_3(S^2)$.

(b) Вычислите $J : \pi_1(SO) \to \pi_1^S$.

(c)* Вычислите $J : \pi_3(SO) \to \pi_3^S$.

(d) $J : \pi_n(SO) \to \pi_n^S$ гомоморфизм.

(e)* $p(N, x\zeta) = p(N, \zeta) + J(x)$.

Ввиду 5de отображение $p : \vartheta_n \to \pi_n^S / \operatorname{im} J$ корректно определено формулой $p(N) := p(N, \zeta) + \operatorname{im} J$.

6. (a) Операция связного суммирования превращает ϑ_n в группу.

(b) p гомоморфизм.

Поэтому и поскольку группа $\pi_n :$ конечна для $n > 0$, достаточно доказать, что $\ker p$ конечно.

7. (a) Если нормальное расслоение тривиально, то сумма касательного и одномерного тривиального тривиальна.

(b) Для связного многообразия с непустым краем если сумма касательного и одномерного тривиального расслоений тривиальна, то касательное расслоение тривиально.

(c) $p(N) = 0$ тогда и только тогда, когда N является границей параллелизуемого многообразия.

В следующих задачах $N = \partial W$ гомотопическая n-сфера и W параллелизуемо. По поводу задач, отмеченных звездочками, см. [KM63].

8. (a) Если W стягиваемо, то $N \cong S^n$.

(b)* Можно так выбрать оснащение сферы $S^i \subset W$, чтобы результат перестройки по этой сфере с этим оснащением был параллелизуемым.

(c) Перестройками можно добиться того, чтобы W стало $([n/2] - 1)$-связным.

9. Пусть $n = 2k$ и W' получено из W перестройкой сферы $S^k \subset W$.

(a) Существует $x \in H_k(W')$, для которого $H_k(W')/x \cong H_k(W)/[S^k]$.

(b) Если $[S^k] \in H_k(W)$ примитивен, то $H_k(W') \cong H_k(W)/[S^k]$.

(c) Если $k \geqslant 4$ четно, то $\operatorname{rk} H_k(W') \neq \operatorname{rk} H_2(W)$.

(d)* Если $k \geqslant 4$ четно, то $N \cong S^n$.

(e)* Если $k \geqslant 3$ нечетно, то $N \cong S^n$.

10. (a)* Если $n = 4l - 1 \geqslant 7$ и $\sigma(W) = 0$, то $N \cong S^n$.

(b)* Существует замкнутое почти параллелизуемое $4l$-многообразие M, для которого $\sigma(M) \neq 0$.

(c) Если $n = 4l - 1 \geqslant 7$ и $\sigma(W)$ делится на $\sigma(M)$, то $N \cong S^n$.

11. Пусть $n = 4l + 1 \geqslant 17$. Перестройками можно добиться того, чтобы W стало $2l$-связным (и осталось параллелизуемым). Реализуем элемент $x \in H_{2l+1}(W)$ вложением $x : S^{2l+1} \to W$. Обозначим через

$$q(x) \in \ker[i_* : \pi_{2l}(SO_{2l+1}) \to \pi_{2l}(SO)] \cong \mathbb{Z}_2$$

препятствие к тривиальности нормального расслоения вложения x. Обозначим $Arf(N) := Arf(q) := \sum_i q(a_i)q(b_i) \in \mathbb{Z}_2$, where $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ is a symplectic basis of $H_{2l+1}(W)$.

(a) q квадратичная форма над $\mathbb{Z}_2$.

(b) $Arf(N)$ действительно зависит только от N.

(c) Если $Arf(N) = 0$, то $N \cong S^n$.

Заметим, что $Arf(N) = 0$ для $l \neq 1, 3, 7, 15, 31$. Это решение знаменитой проблемы Кервера, полученное около 2008 г.

12. Выведите теорему Кервера-Милнора из предыдущего.

17 Вложения и заузливания (приложение)

It is a riddle which shares with the universe
the merit of having no answer.
W. Maugham, The Moon and Sixpence. [16]

Введение: проблемы вложимости и заузливания.

Как писал Е. К. Зиман, тремя классическими проблемами топологии являются

(1) *Проблема гомеоморфизма.* Когда данные два пространства N и M гомеоморфны? Как описать множество гомеоморфических классов многообразий из заданного класса, например, заданной размерности n?

(2) *Проблема вложимости.* Какие пространства N вложимы в S^m для данного m?

(3) *Проблема заузливания.* Какие вложения $f, g : N \to S^m$ изотопны? Как описать множество изотопических класов вложений $N \to S^m$?

Идеи и методы, применяемые для изучения проблем вложимости и заузливания, применяются и для проблемы гомеоморфизма (и для других проблем топологии и ее приложений).

Определение гладкого и кусочно-линейного вложения приведены в пунктах 'нормальные классы Уитни' и 'препятствие Уитни к вложимости'. Два вложения $f, g : N \to S^m$ называются *(объемлемо) изотопными*, если существует такой гомеоморфизм $F : S^m \times I \to S^m \times I$, что

(i) $F(y, 0) = (y, 0)$ для любого $y \in S^m$,

(ii) $F(f(x), 1) = (g(x), 1)$ для любого $x \in N$, и

(iii) $F(S^m \times \{t\}) = S^m \times \{t\}$ для любого $t \in I$.

Этот гомеоморфизм F называется (объемлющей) изотопией. (Объемлющей) изотопией также называют гомотопию $S^m \times I \to S^m$ или семейство отображений $F_t : S^m \to S^m$, очевидным образом порожденные отображением F.

Через CAT будем обозначать гладкую (DIFF) или кусочно-линейную (PL) категорию. Если определение или утверждение имеет силу в обеих категориях, то CAT опускается. Если любые два вложения $N \to S^m$ (объемлемо) изотопны, то N называется *незаузленным в* S^m.

0. Два PL вложения $f, g : N \to S^m$ называются *PL не объемлемо изотопными*, если существует такое PL вложение $F : N \times I \to S^m \times I$, что

$F(x, 0) = (f(x), 0)$ для любого $x \in N$,

$F(x, 1) = (g(x), 1)$ для любого $x \in N$, и

$F(N \times \{t\}) \subset S^m \times \{t\}$ для любого $t \in I$.

(a) Любые два PL вложения $S^1 \to S^3$ (т.е. узла) являются PL не объемемо изотопными.

(b) То же для $S^n \to S^m$.

(c)** Определение *гладкой не объемлемой изотопности* гладких вложений получается из предыдущего определения заменой PL на DIFF. Существуют два гладких вложения $S^1 \to S^3$ (т.е. узла), не являющиеся гладко не объемемо изотопными.

Общее положение.

Теорема. *Любой n-мерный полиэдр вложим в $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Набросок доказательства. Это доказательство достаточно разобрать для $n = 1$ или $n = 2$. Поставим в соответствии вершинам данного n-полиэдра N точки пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$ *общего положения*, т.е. такие, что никакие $2n + 2$ из них не лежат в одной $2n$-мерной плоскости. (Это возможно, т.к. если точки $A_1, \ldots, A_k$ выбраны, то можно взять точку A_{k+1} вне объединения $2n$-мерных плоскостей, натянутых на наборы $2n + 1$ точек.) Отобразим теперь каждый симплекс полиэдра P^n линейно на симплекс, натянутый на соответсвующие точки в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Получим отображение f.

Проверим, что f — вложение. Нужно доказать, что образы любых двух симплексов не имеют 'лишних' (т.е. отличных от образа пересечения) общих точек. Пусть, напротив образы какого-то k-мерного и l-мерного симплекса пересекаются не по образу их общей s-мерной грани ($s = -1$ для непересекающихся симплексов). Тогда $k + l + 1 - s$ образов их вершин лежат в некотором $(k + l - s - 1)$-мерном пространстве. Добавим к этим образам еще $2n + 2 - (k + l + 1 - s)$ образов других вершин. Тогда полученные $2n + 2$ точки лежат в $2n$-мерной плоскости, что противоречит построению отображения f. QED

[16] *Это загадка, имеющая общее с мирозданием достоинство: отсутствие ответа. У. С. Моэм, Луна и грош, пер. автора.*

1. (a) Любые два вложения окружности в $\mathbb{R}^4$ (объемлемо) изотопны.

(b) Любые две окружности в $\mathbb{R}^4$ не зацеплены, т.е. их можно заключить в непересекающиеся четырехмерные шары.

Теорема. *Любое n-многообразие вложимо в $\mathbb{R}^{2n}$.*

Набросок доказательства для PL категории. Будем считать, что $n \geqslant 3$ (случай $n \leqslant 2$ разберите самостоятельно) и что данное n-многообразие N связно. Существует кусочно линейное отображение $f : N \to \mathbb{R}^{2n}$ *общего положения*, т.е. имеющее конечное число попарно различных двойных точек $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$, где $f(x_i) = f(y_i)$ (a). Тогда на $N - \{x_1, y_1, \dots, x_k, y_k\}$ отображение f является вложением. Так как $n \geqslant 2$, то можно соединить дугой l_1 точку x_1 с y_1 так, чтобы дуга l_1 не пересекала других точек x_i, y_i. Тогда $f(l_1)$ — замкнутая кривая в $\mathbb{R}^{2n}$. Так как $n \geqslant 2$, то эта кривая незаузлена в $\mathbb{R}^{2n}$. Поэтому существует диск $D^2 \subset \mathbb{R}^{2n}$ такой, что $\partial D^2 = f(l_1)$. Поскольку $n + 2 < 2n$, то мы можем взять диск D^2 *общего положения*, т.е. $D^2 \cap f(N^n) = f(l_1)$ (b). Существует окрестность B^{2n} диска D^2 в $\mathbb{R}^{2n}$, гомеоморфная $2n$-шару, для которой

(1) $B^n = f^{-1}(B^{2n})$ гомеоморфно n-шару, причем

(2) граница и внутренность шара B^n переходят при отображении f в границу и внутренность шара B^{2n}, соответственно (c).

Определим отображение $g : B^n \to B^{2n}$ формулой $g(s, r) := (rf(s), r)$, где $s \in \partial B^n$. Заменим отображение f на B^n отображением g. Таким образом мы избавимся от двойных точек x_1, y_1. Аналогично для остальных $i = 2, \dots, k$ избавимся от двойных точек x_i, y_i и получим вложение N в $\mathbb{R}^{2n}$. QED

2. (a)–(c) Докажите утверждения, отмеченные в наброске соответствующими буквами. Указание к (c): нужно брать *регулярную* окрестность, т.е. 'тесную' окрестность без 'лишних' дыр.

Заметим, что доказательство Уитни *гладкой* вложимости любого n-многообразия в $\mathbb{R}^{2n}$ более сложно [Ad93], [Pr06].

Не существует одной теоремы или одного определения, формализующего идею *общего положения*. Формально, для каждой конкретной задачи определение общего положения свое. Подробнее см. [Ru73, 1.6.D], [RS72].

Дальнейшие задачи, сформулированны для произвольного n, интересно решить даже для наименьшего n, удовлетворяющего условию.

3. В этой задаче подразумевается PL категория.

(a) Вложение $S^n \to \mathbb{R}^m$ объемлемо изотопно стандартному тогда и только тогда, когда оно продолжается до вложения $D^{n+1} \to \mathbb{R}^m$.

(b) Любые два вложения $S^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$ объемлемо изотопны при $n \geqslant 2$.

(c) Любые два вложения $S^n \to \mathbb{R}^{2n}$ объемлемо изотопны при $n \geqslant 4$.

(d)* Любые два вложения $S^3 \to \mathbb{R}^6$ изотопны.

(e) Любые два вложения $S^n \to \mathbb{R}^m$ объемлемо изотопны при $2m \geqslant 3n + 4$.

(f)* *Теорема Зимана.* Любые два вложения $S^n \to \mathbb{R}^m$ объемлемо изотопны при $m \geqslant n + 3$ [Sk08, §2].

Заметим, что в гладкой категории утверждение 3e верно, а утверждения 3d и 3f — нет!

Для доказательства *изотопических аналогов* приведенных теорем (т.е. задач 4ab ниже) полезен следующий факт (доказательство которого непросто). Определение *конкордантности* вложений получается из определения изотопности отбрасыванием условия сохранения уровней.

Теорема. *В коразмерности больше двух конкордантность влечет объемлемую изотопию.*

Доказательство этой теоремы является обобщением доказательства теоремы Зимана о незаузленности сфер (поэтому очевидное решение задачи 3 с его помощью неразумно).

4. (a) Любые два вложения n-мерного полиэдра в $\mathbb{R}^{2n+2}$ изотопны при $n \geqslant 2$. (Эту и следующую теоремы интересно доказать даже для $n = 2$.)

(b) Любые два вложения связного n-мерного многообразия в $\mathbb{R}^{2n+1}$ изотопны при $n \geqslant 2$.

(c) Связная сумма трилистника со своим зеркальным образом конкордантна тривиальному узлу, но не изотопна ему.

Препятствие Уитни к вложимости.

Кусочно-линейным вложением $f : N \to \mathbb{R}^m$ называется инъективное отображение, линейное в некоторой триангуляции.

Доказательство несуществования кусочно-линейного вложения бутылки Кляйна K в $\mathbb{R}^3$. Возьмем кусочно-линейное отображение $f : K \to \mathbb{R}^3$ общего положения (т.е. такое, что для некоторой триангуляции бутылки Кляйна K образы никаких четырех вершин не лежат в одной плоскости). Определим *множество самопересечений*

$$\Sigma(f) := \mathrm{Cl}\{x \in K \mid \#f^{-1}fx > 1\}.$$

1. (a) Если f — вложение, то $\Sigma(f) = \varnothing$.

(b) $\Sigma(f)$ — подграф данной триангуляции.

(c) $\Sigma(f)$ — цикл, то есть степень любой его вершины четна.

Возьмем теперь окружность S в K, которая при обычном представлении бутылки Клейна в виде квадрата со склеенными сторонами представляется каждой из параллельных сторон квадрата, склеивающихся без перекрутки. Эту окружность можно считать подграфом *двойственной* триангуляции. Поэтому S пересекает $\Sigma(f)$ в конечном числе точек (и причем трансверсально). Определим *S-препятствие Уитни* как

$$w_f := \#(S \cap \Sigma(f)) \mod 2.$$

Невложимость бутылки Клейна в $\mathbb{R}^3$ вытекает теперь из пунктов 2a, 2b и 3d следующих задач. QED

2. (a) Если f — вложение, то $w_f = 0$.

(b) Для стандартного отображения $f_0 : K \to \mathbb{R}^3$ выполнено $w_{f_0} = 1$.

3. Рассмотрим кусочно-линейную гомотопию $F : K \times I \to \mathbb{R}^3 \times I$ общего положения между $f = f_1$ и f_0 (т.е. такую гомотопию, для которой образы никаких пяти вершин триангуляции произведения $K \times I$ не лежат в одной трехмерной гиперплоскости). Определим $\Sigma(F)$ аналогично предыдущему.

(a) $\Sigma(f_i) \cap S = \Sigma(F) \cap (S \times i)$.

(b) $\Sigma(F) \cap (S \times I)$ — граф (вообще, $\Sigma(F)$ — 2-полиэдр).

(c) В этом графе вершины нечетной степени встречаются только на $S \times \{0, 1\}$ (вообще, $\partial[\Sigma(F)] = [\Sigma(f_0)] - [\Sigma(f_1)]$ и $\#\partial(\Sigma(F) \cap (S \times I)) \mod 2 = w(f_0) - w(f_1)$).

(d) w_f не зависит от f.

Заметим, что можно доказать невложимость бутылки Кляйна K в $\mathbb{R}^3$ с использованием многомерного аналога теоремы Жордана: *если бы бутылка Кляйна была бы вложена в $\mathbb{R}^3$, то разбивала бы $\mathbb{R}^3$.* При помощи этой идеи доказывается невложимость неориентируемых n-многообразий в $\mathbb{R}^{n+1}$, но не получается доказать невложимость n-многообразий в $\mathbb{R}^m$ для $m > n + 1$. Для последнего нужны препятствия к 'старшей ориентируемости', т.е. препятствия Уитни.

4. (a) Постройте препятствие Уитни к вложимости $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^3$ и докажите невложимость $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^3$.

(b) Постройте препятствие Уитни

$$\overline{W}_{m-n}(N) := [\Sigma(f)] \in H_{2n-m}(N, \mathbb{Z}_{(m-n)})$$

к вложимости n-многообразия N в $\mathbb{R}^m$ как гомологический класс множества самопересечений для отображения общего положения [Sk08, §2].

Теорема Уитни о препятствии. *Пусть N — замкнутое ориентируемое n-многообразие. Если N вложимо в $\mathbb{R}^m$, то и $\overline{W}_{m-n}(N) = 0 \in H_{2n-m}(N)$.*

7. Пусть N — замкнутое ориентируемое n-многообразие, $f : N \to \mathbb{R}^m$ — вложение и $f' : N \to \mathbb{R}^m$ — близкое к f отображение.

(a) Гомологический класс ориентированного погруженного подмногообразия $\mathrm{Cl}\, f^{-1}f'N$ (многообразия N) равен классу $\overline{W}_{m-n}(f)$. Указание: начните со случая $m = 2n$.

(b) Этот класс нулевой. Указания. Возьмем гомотопию $F : N \times I \to \mathbb{R}^m$ общего положения между f' и отображением, образ которого не пересекает $f(N)$. Тогда $\mathrm{Cl}\, f^{-1}FN$ есть ориентированное погруженное подмногообразие (многообразия N) с краем $\mathrm{Cl}\, f^{-1}f'N$. Поэтому $[\mathrm{Cl}\, f^{-1}f'N] = 0$.

(c) Докажите теорему. Указание: $\overline{W}_{m-n}(N) = \overline{W}_{m-n}(f) = [\mathrm{Cl}\, f^{-1}f'N] = 0$.

(d)* Определения препятствия Уитни $\overline{W}_{m-n}(N)$ из главы 3 и этого пункта эквивалентны.

(e) Если N замкнуто, ориентируемо и вложимо в $\mathbb{R}^{n+2k}$, то $\overline{p}_k(N) = 0$.

Чтобы использовать эту теорему для получения конкретных результатов (например, невложимости $\mathbb{R}P^4$ в $\mathbb{R}^7$) нужны продвинутые методы вычисления, см. главу 6.

Идея дополнения.

Инварианты (т.е. препятствия к *изотопности*) вложений можно получить, рассматривая дополнение $S^m - fN$ до образа многообразия N при вложении в S^m. В самом деле, если $f, g : N \to S^m$ — два изотопных вложения, то $S^m - fN \cong S^m - gN$. Поэтому любой топологический инвариант пространства $S^m - fN$ является инвариантом изотопии вложения f. Впервые эта идея была применена Дж. Александером около 1910 г. к изучению узлов в трехмерной сфере.

Ясно, что $H_1(S^3 - f_0S^1) = \mathbb{Z}$ для стандартного узла f_0. Для другого узла f группу $H_1(S^3 - fS^1)$ можно вычислить, располагая весь узел, кроме переходов, в плоскости проекции, а переходы над плоскостью, и применяя последовательность Майера-Виеториса. По-видимому, Александер, проделывая такие вычисления, заметил, что для любого узла f получается $H_1(S^3 - fS^1) \cong \mathbb{Z}$, что привело его к открытию двойственности, носящей его имя (см. выше). Но если вместо одномерной группы гомологий использовать *фундаментальную группу* (см. начало главы 6 или [Pr04, VI]), то узлы уже можно различать.

(Приведем доказательство для тех, кто знаком с этим понятием. По-прежнему $\pi_1(S^3 - f_0S^1) = \mathbb{Z}$ для стандартного узла f_0. Используя теорему Зейферта–Ван Кампена о фундаментальной группе объединения, для трилистника $f : S^1 \to S^3$ нетрудно получить, что $\pi_1(S^3 - fS^1) = \langle x, y \mid xyx = yxy\rangle$. Для различения трилистника и тривиального узла достаточно построить нетривиальный гомоморфизм из этой группы в S_3. Его можно определить формулами $x \to (12)$, $y \to (23)$. Значит, $\pi_1(S^3 - fS^1)$ не абелева и не изоморфна группе $\mathbb{Z}$.)

Изложение дальнейшего развития идеи дополнения в теории узлов $f : S^1 \to S^3$ (или вообще $f : S^n \to S^{n+2}$) не входит в нашу задачу. Ограничимся лишь формулировками достаточных условий полноты инварианта дополнения (см. пункт 'приложение: об узлах в коразмерности 1 и 2).

Препятствия к *вложимости* полиэдра в S^m можно получить, основываясь на следующей идее, также восходящей к Александеру. Рассматривая дополнение $S^m - N$ полиэдра $N \subset S^m$, можно вывести необходимые условия на сам полиэдр N. Эта идея проиллюстрирована на примере вложений графов в плоскость в главе 0. В общем случае формула Эйлера заменяется на ее обобщение — двойственность Александера.

Метод дополнения развивался и в дальнейшем. Например, Р. Том получил условия на кольцо (ко)гомологий замкнутого $(m-1)$-многообразия, необходимые для вложимости в S^m [Th51], см. также [ARS01]. Петерсон изучал двойственность между *(ко)гомологическими операциями* пространств N и $S^m - N$ и получил некоторые интересные теоремы невложимости. Дальнейших результатов не приводим ввиду их необъятности.

Инвариант дополнения для узлов в коразмерности 1 и 2.

Теорема Папакириякопулоса. *Вложение $f : S^1 \to S^3$ изотопно стандартному тогда и только тогда, когда $\pi_1(S^3 - fS^1) \cong \mathbb{Z}$* [Pa57].

Теорема Левина. *Для любого $n \neq 2$ гладкое вложение $f : S^n \to S^{n+2}$ гладко изотопно стандартному тогда и только тогда, когда $S^{n+2} - fS^n$ гомотопически эквивалентно окружности* [Le65].

Для $n = 1$ теорема Левина равносильна теореме Папакириякопулоса, поскольку условие $(S^3 - fS^1) \simeq S^1$ равносильно условию $\pi_1(S^3 - fS^1) \cong \mathbb{Z}$ (ввиду асферичности пространства $S^3 - fS^1$).

Аналог теоремы Левина справедлив в PL и TOP локально плоских категориях при $n \neq 2, 3$ [Pa57], [St63], [Le65], см. также [Gl62]. Напомним, что (PL или TOP) вложение $S^n \subset S^m$ называется (PL или TOP) *локально-плоским*, если каждая точка из S^n обладает такой окрестностью U в S^m, что пара $(U, U \cap S^n)$ (PL или TOP) гомеоморфна паре $(B^n \times B^{m-n}, B^n \times 0)$.

Краткая история изучение узлов *в коразмерности 1*, т.е. вложений $S^n \to S^{n+1}$, такова. Известная теорема Жордана, впервые доказанная Брауэром, утверждает, что сфера S^n, содержащаяся в S^{n+1}, разбивает сферу S^{n+1} на две компоненты. Легко доказывается, что *вложение $f : S^n \to S^{n+1}$ незаузлено тогда и только тогда, когда замыкания этих компонент дополнения являются шарами.* (Теорема Левина в некотором смысле является аналогом этого утверждения.) В 1912 г. Шенфлис доказал, что любая окружность $S^1 \subset S^2$ незаузлена.

Утвержение о незаузленности S^n в S^{n+1} получило название *гипотезы Шенфлиса.* В 1921 г. Александер объявил, что он доказал гипотезу Шенфлиса для произвольного n. Однако, в

1923 г. он нашел контрпример — знаменитую рогатую сферу Александера (с помощью той же идеи дополнения [Ru73]). Тем не менее, он доказал, что в кусочно-линейной категории гипотеза Шенфлиса верна для $n = 2$.

После появления рогатой сферы Александера гипотезой Шенфлиса стали также называть утверждение о незаузленности *локально плоского* вложения $f : S^n \to S^{n+1}$. Она была доказана только в 1960-1973 годах:

для гладкого случая при $n \neq 3$ в [Sm61], [Ba65].

для кусочно-линейного локально плоского случая при $n \neq 3$ (следует из TOP локально плоского случая и результатов Кирби-Зибенмана [Ho90]).

для топологического локально плоского случая в [Br60], [Ma59], [Mo60]. (Заметим, что элегантное и короткое доказательство Брауна топологического локально плоского аналога теоремы Смейла-Бардена послужило началом теории 'клеточных множеств', которая затем стала важной частью геометрической топологии.)

Кусочно-линейный случай гипотезы Шенфлиса для $n \geqslant 3$ (или, эквивалентно, локально плоский кусочно-линейный случай гипотезы Шенфлиса для $n = 3$) остается известной и трудной нерешенной *проблемой Шенфлиса* [RS72].

Общий инвариант дополнения.

Для n-мерного пространства N и вложения $f : N \to S^m$ положим

$$C(f) := S^m - f(N) \simeq S^m - Of(N),$$

где $Of(N)$ — регулярная окрестность образа $f(N)$ в S^m. Топологический и гомотопический тип пространства $C(f)$ являются инвариантами вложения f.

Для $m - n \geqslant 3$ пространство $C(f)$ односвязно, и по двойственности Александера его гомологические группы не зависят от f (см. также задачу 5b). Поэтому инвариант $C(f)$ относительно слабый для $m - n \geqslant 3$.

Обозначим через $i : S^m \to S^{m+1}$ стандартное включение.

5. (a) Если $N = S^{n_1} \sqcup \ldots \sqcup S^{n_r}$, $m - n_i \geqslant 3$ и $f : N \to S^m$ — произвольное вложение, то $C(f) \simeq S^{m-n_1-1} \vee \ldots \vee S^{m-n_r-1}$.

(b) $C(i \circ f) \simeq \Sigma C(f)$.

(c) Для стандартного вложения $f : S^p \times S^q \to S^m$ имеем $C(f) \simeq S^{m-p-q-1} \vee S^{m-q-1} \vee S^{m-p-1}$.

(d)* Гомотопический тип дополнения к образу тора $N = S^p \times S^q$ может зависеть от вложения в S^m при $m - p - q \geqslant 3$. Указание (П. Ламбрехтс). Рассмотрим расслоение Хопфа $S^3 \to S^7 \xrightarrow{h} S^4$. Возьмем стандартное вложение $S^2 \subset S^4$. Его дополнение гомотопически эквивалентно S^1. Имеем $h^{-1}(S^1) \cong S^1 \times S^3 \subset S^7$, причем дополнение до этого вложения f есть

$$C(f) \simeq h^{-1}(S^2) \cong S^2 \times S^3 \not\simeq S^2 \vee S^3 \vee S^5 \simeq C(f_0),$$

где $f_0 : S^1 \times S^3 \to S^7$ — стандартное вложение. Аналогично строятся два вложения $S^3 \times S^7 \subset S^{15}$, дополнения которых не гомотопически эквивалентны.

(e)* Существуют гладкие вложения $f : \mathbb{R}P^2 \to S^4$ и $g : \mathbb{C}P^2 \to S^7$, для которых $C(f) \simeq \mathbb{R}P^2$ и $C(g) \simeq \mathbb{C}P^2$. (Это 'стандартные' вложения; для $\mathbb{C}P^2$ других и не существует [KS05].)

(f) $C(f)$ ретрагируется на ('меридианальную') окружность для $m = n + 2$.

По соображениям общего положения, $C(f)$ не зависит от f для $m \geqslant 2n + 2$. Это пространство обозначим через $C_m(N)$. Так как

$$C(i \circ f) \simeq \Sigma C(f), \quad \text{то} \quad \Sigma^{M-m} C(f) \simeq C_M(f) \quad \text{для} \quad M \geqslant 2n + 2.$$

Необходимым условием дополнения для вложимости N в S^m является $(M - m)$-денадстраиваемость пространства $C_M(N)$, то есть существование пространства C такого, что $\Sigma^{M-m} C \simeq C_M(f)$. Если это условие выполняется для $M = 2n + 2$, то оно автоматически выполняется для любого $M \geqslant 2n + 2$.

Общий инвариант окрестности.

По соображениям общего положения нормальное расслоение $\nu(f)$ погружения $f : N \to S^{n+k}$ не зависит от f для $k \geqslant n + 1$. Это *стабильное нормальное расслоение* обозначим через $\nu_k(N)$. Отметим, что

$$\nu(i \circ f) = \nu(f) \oplus 1, \quad \text{поэтому} \quad \nu(f) \oplus (K - k)\varepsilon = \nu_K(f) \quad \text{для} \quad K \geqslant n + 1.$$

Необходимым условием нормального расслоения для погружаемости многообразия N в S^{n+k} является существование k-расслоения ν над N, стабильно эквивалентного расслоению $\nu_K(N)$. Так как $\nu(f) \oplus \tau(N) = (n+k)\varepsilon$, то необходимое условие нормального расслоения эквивалентно стабильной тривиальности расслоения $\nu(f) \oplus \tau(N)$ и тривиальности последнего расслоения (по соображениям общего положения, потому что размерность расслоения $\nu(f) \oplus \tau(N)$ больше, чем n). Теорему Смейла-Хирша можно переформулировать так: *если существует k-расслоение ν над N такое, что $\nu \oplus (K-k)\varepsilon \cong \nu_K(N)$, то N погружаемо в $\mathbb{R}^{n+k}$.*

6. $C(f) \simeq D\nu(f)/S\nu(f)$ для $m \geqslant 2n+2$.

Нормальное расслоение $\nu(f)$ погружения f с точностью до эквивалентности является инвариантом регулярной гомотопии погружения f (и инвариантом изотопии погружения f, если оно является вложением). Этот изотопический инвариант не очень сильный, потому что, например, нормальные расслоения различных вложений стабильно эквивалентны. Для вложения f пространство расслоения $\nu(f)$ и регулярная окрестность $Of(N)$ образа $f(N)$ в S^m могут быть отождествлены при помощи гомеоморфизма κ, при котором нулевое сечение переходит в $f(N)$. Заметим, что этот гомеоморфизм κ определен неоднозначно (более точно, различающие элементы лежат в группе $H^l(N, \pi_l(SO_{k-1})))$.

(О близком понятии утолщения и утолщаемости см. главы 0 и 2.)

Комбинация инвариантов дополнения и окрестности.

Совмещая идею дополнения и идею окрестности, Дж. Левин, С. П. Новиков и В. Браудер получили *редукцию* проблем вложимости и изотопии к алгебраическим проблемам (впрочем, достаточно сложным). Доказательство достаточности *комбинация* инвариантов дополнения и окрестности условий — одно из наиболее важных приложений *хирургии* к топологии многообразий. По поводу развития этого подхода и преодоления возникающих трудностей см. [KS05], [Sk08'].

Дадим определение нормальной системы и сформулируем теорему Браудера-Левина. Композиция $S\nu(f) \overset{\kappa}{=} \partial C(f) \subset C(f)$ называется *приклеивающим отображением* $a(f,\kappa)$. Тройка $S(f,\kappa) = (\nu(f), C(f), a(f,\kappa))$ называется *нормальной системой пары* (f,κ). Вообще, *нормальная система коразмерности k на многообразии N* — это тройка $S = (\nu, C, a)$, состоящая из

(i) векторного k-расслоения ν;

(ii) пространства C; и

(iii) непрерывного отображения $p : S\nu \to C$.

Будем говорить, что нормальные системы (ν, C, p) и (ν_1, C_1, p_1) *эквивалентны*, если существуют изоморфизм расслоений $b : \nu \to \nu_1$ и гомотопическая эквивалентность $r : C \to C_1$, для которых $r \circ p \simeq p_1 \circ Sb$. Очевидно, класс эквивалентности нормальной системы (f,κ) не зависит от κ. Этот класс называется *нормальной системой $S(f)$ вложения f*. Нормальная система вложения является изотопическим инвариантом. Так как любые два вложения $N \to S^{n+K}$ изотопны при $K > n+1$, то $S(f)$ не зависит от вложения f при $K > n+1$. Эта нормальная система называется *стабильной нормальной системой многообразия N* и обозначается $S_K(N)$.

Надстройка ΣS над нормальной системой (ν, C, p) — это нормальная система $(\nu \oplus 1, \Sigma C, p')$, в которой p' является надстройкой над p на каждом слое. *Необходимое условие Браудера-Левина* для вложимости многообразия N в S^{n+k} состоит в существовании нормальной системы S на N, такой что $\Sigma^{K-k} S \sim S_K(N)$ (ясно, что это условие не зависит от K).

Теорема Браудера-Левина. *Пусть N — замкнутое гладкое n-многообразие, $K > n+1$, $k \geqslant 3$ и существует такая нормальная система $S = (\nu, C, p)$ на N, что $\Sigma^{K-k} S \sim S_K(N)$ и $\pi_1(C) = 0$. Тогда существует гладкое вложение $f : N \to S^{n+k}$ такое, что $S(f) \sim S$.*

Для гомотопической сферы N теорема Браудера-Левина была доказана в [Le65'], а в общем случае — в [Br68]. См. также [Gi71]. Теорема Браудера-Левина вытекает из следующей леммы.

Лемма о компрессии и денадстройке. *Пусть $F : N \to S^{n+k+1}$ — вложение замкнутого гладкого n-многообразия, $k \geqslant 3$, $n+k \geqslant 5$ и существует такая нормальная система $S = (\nu, C, p)$ на N, что $\Sigma S \sim S(F)$ и $\pi_1(C) = 0$. Тогда существует такое гладкое вложение $f : N \to S^{n+k}$, что $S(f) \sim S$.*

Доказательство леммы о компрессии и денадстройке (принадлежащее Браудеру) использует понятие нормального инварианта и приводится в [CRS04].

ГЛАВА 6. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

Увы! Что б ни сказал потомок просвещенный,
все так же на ветру, в одежде оживленной,
к своим же Истина склоняется перстам,
с улыбкой женскою и детскою заботой,
как будто в пригоршне рассматривая что-то,
из-за ее плеча невидимое нам.
В. Набоков, Дар. [17]

18 Теорема Хопфа

Определения и исторические замечания.

Отображением подмножества K пространства $\mathbb{R}^m$ (например, графа в $\mathbb{R}^2$) в (стандартную) окружность S^1 называется сопоставление каждой точке $x \in K$ некоторой точки $f(x) \in S^1$. Отображение $f : K \to \mathbb{R}^m$ замкнутого ограниченного подмножества K называется *непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $x, y \in K$ с условием $|x, y| < \delta$ выполнено $|f(x), f(y)| < \varepsilon$. Далее все отображения считаются непрерывными и прилагательное 'непрерывное' часто опускается.

Для подмножества K пространства $\mathbb{R}^m$ (например, графа в $\mathbb{R}^3$) непрерывное отображение $f : K \to S^1$ можно представлять себе как семейство единичных векторов $f(x)$ в точках $x \in K$, параллельных фиксированной плоскости $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^m$ и непрерывно зависящих от x. (В этой интерпретации можно заменить 'в точках $x \in K$' на 'в точке $0 \in \mathbb{R}^m$'.) При этом векторы не считаются касающимися графа K (на самом деле, для $K \ncong S^1$ такое касание вообще нельзя определить).

Два отображения $f_0, f_1 : K \to S^1$ называются *гомотопными* (обозначение: $f_0 \simeq f_1$), если существует семейство $f_t : K \to S^1$ отображений, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$. (Последнее эквивалентно существованию такого непрерывного отображения $F : K \times [0, 1] \to X$, что $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$.)

1. (a) Любые два отображения дерева в окружность гомотопны.

(b) Отображение $\partial D^2 \to S^1$ гомотопно отображению в точку тогда и только тогда, когда оно продолжается на D^2.

(c) *Рефлексивность.* $f \simeq f$.

(d) *Симметричность.* Если $f \simeq g$, то $g \simeq f$.

(e) *Транзитивность.* Если $f \simeq g$ и $g \simeq h$, то $f \simeq h$.

Указание. Положим

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t) & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ H_2(x, 2t-1) & 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases},$$

где H_1 и H_2 — гомотопии, соединяющие f и g, g и h, соответственно.

Итак, гомотопность отображений — отношение эквивалентности. Обозначим через $[K, S^1]$ множество отображений $K \to S^1$ с точностью до гомотопии.

Непрерывные отображения в другие пространства Y определяются ниже аналогично. Их гомотопность и множество $[K, Y]$ определяются дословно так же.

Задача о классификации непрерывных отображений с точностью до гомотопности, рассматриваемая в этой главе, — одна из важнейших в алгебраической топологии, поскольку к ней сводятся многие другие задачи топологии и ее приложений. Основная теорема топологии о гомотопической классификации отображений $S^n \to S^n$ была доказана Хайнцем Хопфом в 1926 г. с использованием инварианта 'степень', введенного Лейтзеном Эгбертом Яном Брауэром в 1911 г. В 1932 г. Хопф обобщил этот результат до классификации отображений n-полиэдра в S^n ('по заказу' Павла Сергеевича Александрова). Приводимые здесь формулировка и доказательство теоремы Хопфа принадлежит Хасслеру Уитни (1937). Дальнейшее развитие теорема Хопфа-Уитни получила в работах Сэмюэля Эйленберга и Сондерса Маклейна (1940), Льва Семеновича Понтрягина (1941),

[17] *Alas! In vain historians pry and probe: The same wind blows, and in the same live robe Truth bends her head to fingers curved cupwise; And with a woman's smile and a child's care Examines something she is holding there Concealed by her own shoulders from our eyes. V. Nabokov, Gift.*

Нормана Стинрода (1947), Джона Генри Константина Уайтхеда (1949) и Михаила Михайловича Постникова (1950).

Основная теорема топологии (набросок).

Теорема о промежуточном значении непрерывной функции является нульмерной версией основной теоремы топологии.

2. *Соображения непрерывности.*

(a) На плоскости дано $2n$ красных и $2n$ синих точек общего положения. Докажите, что существует прямая, по каждую сторону от которой находится по n красных и синих точек.

(b) Пусть дан (выпуклый) многоугольник на плоскости и точка x вне него. Тогда существует прямая l, содержащая x и делящая многоугольник на две части равной площади.

(c) То же для точки x внутри многоугольника.

(d) Для любого (выпуклого) многоугольника на плоскости существует прямая, делящая его на две части с равными площадями и периметрами.

(e) Любой ли (выпуклый) многоугольник на плоскости можно разрезать на четыре части равной площади двумя перепендикулярными разрезами?

(f) Всегда ли можно разрезать прямолинейным разрезом бутерброд с маслом на две равноценные части?

(g) То же для бутерброда с маслом и сыром.

(h) На неровном полу табуретку всегда можно поставить на все четыре ножки.

(i) Вокруг лобой выпуклой плоской фигуры можно описать квадрат.

(j)* Любую плоскую выпуклую фигуру диаметра 1 можно поместить в правильном шестиугольнике, расстояние между противоположными сторонами которого равно 1.

Обозначим диск $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, окружность $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$ и интервал $I = [0,1]$.

3. Следующие утверждения эквивалентны.

(1) Любое отображение $f : D^2 \to D^2$ диска в себя имеет неподвижную точку, т.е. такую точку $x \in D^2$, что $f(x) = x$.

(2) Не существует отображения диска в его граничную окружность, тождественного на этой окружности, т.е. отображения $f : D^2 \to S^1$, для которого $f(x) = x$ при $x \in S^1$ (или, говоря неформально, барабан нельзя смять на его обод).

(3) теорема продолжаемости (из пункта 'существование векторных полей на 2-многообразиях').

(4) Тождественное отображение окружности ($f(x) = x$) не гомотопно постоянному ($g(x) = 1$).

Неформально, *степенью* $\deg f$ отображения $f : S^1 \to S^1$ называется число оборотов вектора $f(x)$ (вокруг своего неподвижного начала) при однократном обходе точкой x окружности S^1 против часовой стрелки. Строгое математическое определение этого понятия непросто [An03], [Pr04].

Стандартной n-намоткой называется отображение $w_n : S^1 \to S^1$, заданное формулой $w_n(z) = z^n$.

4. (a) $\deg(w_n) = n$

(b) w_n не гомотопно w_m при $m \neq n$. (Значит, утверждения предыдущей задачи верны.)

(c) Каждое отображение $f : S^1 \to S^1$ гомотопно отображению $w_{deg(f)}$.

(d) Отображения $g, h : S^1 \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда $\deg(g) = \deg(h)$.

(e) Получите следующий результат.

Основная теорема топологии. *Любое непрерывное отображение $f : S^1 \to S^1$ гомотопно d-кратной намотке окружности на себя для $d = \deg f$, и отображения $S^1 \to S^1$ разных степеней не гомотопны. Иными словами, отображение $\deg : [S^1, S^1] \to \mathbb{Z}$ является взаимно однозначным соответствием (биекцией) и переводит класс d-кратной намотки в число d.*

Этот результат назван основной теоремой топологии по аналогии с так называемой “Основной теоремой алгебры"(из него Основная теорема алгебры и вытекает). Суть дела, конечно, лучше бы отражали такие названия как “основная теорема алгебры полиномов"и “основная теорема одномерной топологии но эти названия в литературе не используются. Основной теорему топологии мы не доказываем, но не ввиду ее сложности, а ввиду наличия прекрасных изложений ее доказательства в литературе [BE82, §21], [Pr04, §6].

5. *Основная теорема алгебры.* Любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Фундаментальная группа и накрытия (набросок).

Для пространства X с отмеченной точкой x_0 *петлей* называется отображение $f : [0,1] \to X$, для которого $f(0) = f(1) = x_0$.

6. Гомотопия в классе петель является отношением эквивалентности на множестве петель $[0,1] \to X$.

Множество $\pi_1(X, x_0)$ петель с точностью до гомотопности в классе петель называется *фундаментальной группой* пространства (X, x_0). Отмеченную точку часто не указывают в обозначениях. Групповая структура на множестве $\pi_1(X)$ вводится следующим образом. Положим $[f_1][f_2]$ равным гомотопическому классу отображения

$$f_1 f_2(t) = \begin{cases} f_1(2t) & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ f_2(2t-1) & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Единичным элементом называется гомотопический класс постоянного отображения. Обратным элементом к $[f]$ называется гомотопический класс отображения $\bar{f}(t) := f(1-t)$. Равенства $[\bar{f}][f] = [f][\bar{f}] = e$ и $([f_1][f_2])[f_3] = [f_1]([f_2][f_3])$ ясны из рисунков 63, 64.

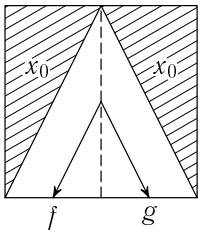


Рис. 63: Обратный элемент фундаментальной группы

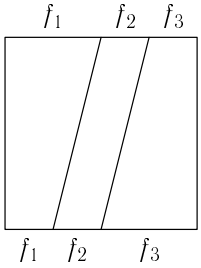


Рис. 64: Ассоциативность умножения

Указания и решения некоторых из следующих задач есть в [Pr04, §2, §11].

7. (a) Если X линейно-связно, то $\pi_1(X, x_0)$ не зависит от x_0.

8. Найдите фундаментальные группы следующих пространств (если не получается, см. следующую задачу).

(a) кольца $S^1 \times I$; (b) листа Мебиуса; (c) тора $S^1 \times S^1$;
(d)* сферы S^2; (e) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$;
(f) 'восьмерки' $S^1 \vee S^1$; (g) бутылки Кляйна с дыркой;
(h)* бутылки Кляйна; (i) S^3; (j) $SO_3 \cong \mathbb{R}P^3$; (k) $L(p,q) := S^3/\mathbb{Z}_p$.

Отображение $p : \widetilde{X} \to X$ между связными полиэдрами (или, более общо, линейно-связными пространствами) называется *накрытием*, если для любой точки $x \in X$ существуют
ее окрестность Ox,
дискретное множество F и
гомеоморфизм $h : p^{-1}Ox \to Ox \times F$, для которого $pr_F \circ h = p$.

9. Пусть $p : \widetilde{X} \to X$ — накрытие.

(a) Для любых пути $s : I \to X$ и точки $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ с условием $p(\widetilde{x}) = s(0)$ существует путь $\widetilde{s} : I \to \widetilde{X}$ (*поднятие* пути s) такой, что $\widetilde{s}(0) = \widetilde{x}$ и $p \circ \widetilde{s} = s$.

(b) Такое поднятие единственно, т.е. если $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 : I \to \widetilde{X}$ — два поднятия одного и того же отображения $f : I \to X$, причем $\widetilde{f}_1(0) = \widetilde{f}_2(0)$, то $\widetilde{f}_1(t) = \widetilde{f}_2(t)$ для любого t.

(c) Докажите (еще раз) основную теорему топологии.

(d) *Лемма о поднятии гомотопии.* Для любых гомотопии $\{f_t : I \to X\}_{t\in I}$ и поднятия $\widetilde{f}_0 : I \to \widetilde{X}$ существует единственное поднятие $\{\widetilde{f}_t : I \to \widetilde{X}\}_{t\in I}$ гомотопии f_t.

(e) Выберем $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Для точек $a, b \in p^{-1}(x_0)$ выберем пути $s_a, s_b : I \to \widetilde{X}$, соединяющие $\widetilde{x}_0$ с a и b. Положим ab равным концу того поднятия пути $(s_a \circ p)(s_b \circ p)$, которое начинается в $\widetilde{x}_0$. Докажите, что это определение задает групповую структуру в $p^{-1}(x_0)$, если для любой петли с началом в x_0 ее поднятия, начинающиеся разных точках множества $p^{-1}(x_0)$, одновременно замкнуты или одновременно незамкнуты. (Такие накрытия называются *регулярными.*)

В следующих задачах либо подразумеваются изо- и мономорфизмы *множеств*, либо накрытие предполагается регулярным.

(f) Если $\pi_1(\widetilde{X}) = 0$, то $\pi_1(X) \cong p^{-1}(x_0)$.

(g) $p_* : \pi_1(\widetilde{X}) \to \pi_1(X)$ является мономорфизмом.

(h) Докажите следующий результат. Указание. Определим отображение $\varphi : \pi_1(X) \to p^{-1}(x_0)$ так. Для петли $s : [0,1] \to X$ рассмотрим такое ее поднятие $\widetilde{s} : [0,1] \to \widetilde{X}$, для которого $\widetilde{s}(0) = \widetilde{x}_0$. Положим $\varphi(s)$ равным тому элементу $a \in p^{-1}(x_0)$, для которого $a\widetilde{x}_0 = \widetilde{s}(1)$.

Теорема о накрытии. *Если $p : \widetilde{X} \to X$ — регулярное накрытие, то $\pi_1(X)/p_*(\pi_1(\widetilde{X})) \cong p^{-1}(x_0)$.*

Отображения графа в окружность.

10. (a) Пусть K — несвязное объединение или букет k окружностей (рис. 1). Фиксируем произвольно направление на каждой из этих окружностей. Для отображения $f : K \to S^1$ поставим на каждой из этих окружностей степень сужения f на эту окружность. Полученную расстановку k целых чисел обозначим $\deg f$. Тогда $\deg : [K, S^1] \to \mathbb{Z}^k$ — биекция.

(b) Множество $[K, S^1]$ не меняется при стягивании ребра.

(c) $[K, S^1] = \mathbb{Z}^{E-V+C}$.

Приведем описание множества $[K, S^1]$ на другом языке, следуя общему методу теории препятствий (и тоже развивая идею предыдущей задачи). Хотя эти формулировка и доказательство более сложны, но с помощью их обобщения можно получить результаты, которые не получаются при помощи 'стягивания ребер' (и многомерного аналога стягивания).

Теорема Хопфа-Уитни. *Для графа K существует биекция* $\deg : [K, S^1] \to H^1(K; \mathbb{Z})$.

Начало доказательства теоремы Хопфа-Уитни: определение препятствующей расстановки. Знакомство с этим доказательством рекомендуем начать со случая $K = K_4$ (рис. 1).

Фиксируем произвольную точку $v \in S^1$. Произвольное отображение $K \to S^1$ гомотопно *клеточному*, т.е. такому, для которого каждой вершине графа K соответствует вектор v (докажите!). Поэтому достаточно классифицировать клеточные отображения $K \to S^1$ с точностью до гомотопии, отображения которой не обязательно клеточны.

Построим для отображения f препятствие $\deg f$ к гомотопности отображения f постоянному отображению. Фиксируем произвольно направление на каждом ребре графа K (препятствие $\deg f$ будет зависеть от этого выбора). Возьмем клеточное отображение $f : K \to S^1$. Поставим на каждом ребре $e \subset K$ число оборотов вектора $f(x)$ при проходе точкой x по ребру e вдоль направления. Полученную расстановку обозначим $\gamma(f)$.

Если $f, g : K \to S^1$ — клеточные отображения, для которых $\gamma(f) = \gamma(g)$, то по Основной теореме топологии $f \simeq g$.

Изменение препятствующей расстановки. Обратное неверно, как показывает пример следующей гомотопии (рис. 65). Для вершины a графа K изменим отображение f так, чтобы вектор в a сделал один оборот против часовой стрелки, вектора в маленькой окрестности вершины a 'потянулись' за вектором в a, а вне этой маленькой окрестности отображение осталось прежним. В результате получим отображение $g : K \to S^1$, гомотопное отображению f. Понятно, что $\gamma(f)$ и $\gamma(g)$ отличаются на расстановку плюс или минус единиц (в зависимости от ориентации) на ребрах, содержащих вершину a, и нулей на всех остальных ребрах. Эта расстановка называется *элементарной кограницей вершины a* и обозначается δa.

В окрестностях вершин $a_1, \ldots, a_s$ сделаем описанную выше гомотопию отображения f, поворачивая вектора в этих вершинах на $n_1, \ldots, n_s$ оборотов, соответственно. Обозначим полученное отображение через $f_{n_1a_1+\ldots+n_sa_s}$. Расстановки целых чисел на ребрах можно складывать: для этого просто складываются числа, стоящие на каждом ребре (такое сложение называется *покомпонентным*). Тогда

$$\gamma(f) - \gamma(f_{n_1a_1+\ldots+n_sa_s}) = n_1\delta a_1 + \ldots + n_s\delta a_s.$$

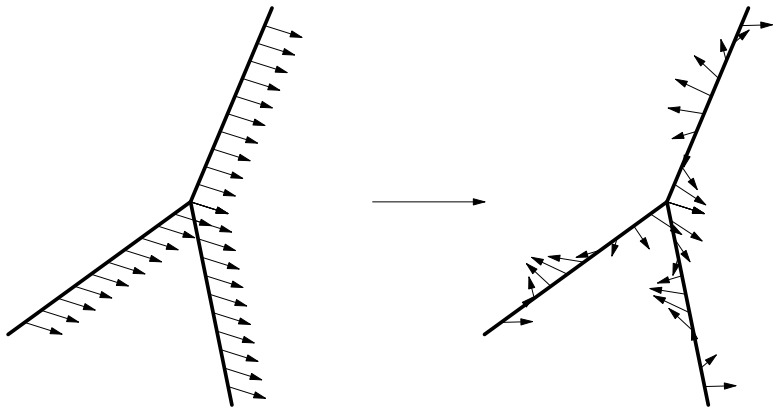


Рис. 65: Подкручивание отображения в окрестности вершины

Теперь рассмотрим гомотопию $f_t : K \to S^1$ между клеточными отображениями f_0, f_1. Поставим на каждой вершине a число оборотов вектора $f_t(a)$ при изменении t от 0 до 1. Полученную расстановку обозначим $n_1a_1 + \ldots + n_sa_s$. Легко проверить, что $\gamma(f_0) - \gamma(f_1) = n_1\delta a_1 + \ldots$ $\ldots + n_s\delta a_s$.

Определение одномерной группы когомологий $H^1(K;\mathbb{Z})$, отображения deg *и доказательство его биективности.* Назовем расстановки γ_1, γ_2 целых чисел на ребрах *когомологичными*, если $\gamma_1 - \gamma_2 = n_1\delta a_1 + \ldots + n_s\delta a_s$ для некоторых целых чисел $n_1, \ldots, n_s$ и вершин $a_1, \ldots, a_s$. Группа $H^1(K;\mathbb{Z})$ расстановок с точностью до когомологичности называется *одномерной группой когомологий графа K (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$).* Обозначим

$$\deg f = [\gamma(f)] \in H^1(K;\mathbb{Z})$$

Ясно, это определение корректно.

Если $\deg f = \deg g$ для некоторых клеточных отображений f и g, то $\gamma(f) - \gamma(g) = n_1\delta a_1 + \ldots + n_V\delta a_V$ для некоторых целых чисел $n_1, \ldots, n_V$. Тогда $f \simeq f_{n_1a_1+\ldots+n_sa_s} \simeq g$. Поэтому отображение deg инъективно.

Чтобы доказать сюръективность отображения deg, возьмем произвольную расстановку γ целых чисел на ребрах. Положим $f(a) = v$ для каждой вершины a графа K. В качестве $f|_e$ возьмем γ_e-кратный обход вдоль окружности S^1. Для построенного клеточного отображения f имеем $\gamma(f) = \gamma$, поэтому $\deg f = [\gamma]$. QED

11. В этой задаче используются понятия группы и изоморфизма групп.

(a) Группа $H^1(K;\mathbb{Z})$ зависит только от топологического типа графа K, т.е. одномерные группы когомологий гомеоморфных графов изоморфны.

(b) $H^1(K,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{E-V+C}$.

(c) Отображение $\deg : [K, S^1] \to H^1(K,\mathbb{Z})$ является изоморфизмом групп (S^1 является группой, поэтому $[K, S^1]$ является группой).

Отображения 2-многообразий в окружность.

Здесь мы будем использовать теоремы продолжаемости и гомотопности (из пункта 'существование векторных полей на 2-многообразиях' и параграфа 'классификация векторных полей', соответственно).

12. (a) Отображение $S^1 \to S^2$, образ которого не совпадает с S^2, гомотопно отображению в точку.

(b)* Любое отображение $S^1 \to S^2$ гомотопно отображению в точку. Предостережение: существуют сюръективные отображения $S^1 \to S^2$. Указание: докажите, что любое отображение $S^1 \to S^2$ гомотопно гладкому или кусочно-линейному (определите, что это такое), и что гладкое или кусочно-линейное отображение $S^1 \to S^2$ не сюръективно.

(c) Для любого отображения $f : S^2 \to S^1$ существует такое отображение $\overline{f} : S^2 \to \mathbb{R}$, что $f(x) = \overline{f}(x) \mod 2\pi$ для любого $x \in S^2$.

(d) Любое отображение $S^2 \to S^1$ гомотопно отображению в точку.

Обобщением пункта (d) является следующий результат.

Теорема Брушлинского. *Для 2-многообразия K существует биекция* $\deg : [K; S^1] \to H^1(K,\mathbb{Z})$.

Набросок определения группы когомологий $H^1(K;\mathbb{Z})$, отображения deg *и доказательства его биективности.* Фиксируем произвольную триангуляцию 2-многообразия K.

Второй и третий абзацы доказательства теоремы Хопфа нужно повторить без изменений (т.е. клеточные отображения и препятствующая расстановка $\gamma(f)$ определяются так же, как и в теореме Хопфа). По теореме продолжаемости, для расстановки $\gamma(f)$

сумма чисел на ребрах границы любой грани $c \subset K$ равна 0.

(Действительно, эта сумма равна количеству оборотов вектора $f(x)$ при обходе точкой x границы этой грани.) Расстановки с этим условием называются *коциклами.*

Кограница δa вершины $a \in K$, отношение *когомологичности*, группа $H^1(K;\mathbb{Z})$ классов когомологичности *коциклов* и отображение $\deg : [K, S^1] \to H^1(K;\mathbb{Z})$ определяются как и в теореме Хопфа.

Для доказательства инъективности отображения deg мы сначала соединяем отображения одинаковой степени гомотопией на объединении $K^{(1)}$ ребер триангуляции (аналогично доказательству теоремы Хопфа). По теореме гомотопности эту гомотопию можно продолжить на все K (докажите!).

Для доказательства сюръективности отображения deg мы сначала для коцикла γ строим такое непрерывное отображение $f : K^{(1)} \to S^1$, что $\gamma(f) = \gamma$ (аналогично доказательству теоремы Хопфа). Так как сумма чисел расстановки γ на ребрах границы ∂c произвольной грани $c \subset K$ равна нулю, то по теореме продолжаемости существует продолжение отображения $f : \partial c \to S^1$ на грань c. Аналогично продолжаем f на остальные грани триангуляции. QED

13. (a) Вычислите $H^1(K;\mathbb{Z})$ для 2-многообразия K с триангуляцией, имеющей V вершин, E ребер и F граней.

(b) Любое отображение $S^i \to S^1$ гомотопно отображению в точку при $i \geqslant 2$.

(c) Найдите $[K, S^1]$ для 2-полиэдра K, т.е. определите одномерную группу когомологий $H^1(K;\mathbb{Z})$ с $\mathbb{Z}$-коэффициентами и биекцию $\deg : [K, S^1] \cong H^1(K;\mathbb{Z})$.

(d) То же для n-полиэдра K, см. определение в следующем пункте.

14. (a) Для подсхемы $A \subset K$ и расстановки x чисел на ребрах схемы K рассмотрим ограничение $x|_A$ этой расстановки на ребра схемы A. Тогда соответствие $[x] \mapsto [x|_A]$ определяет отображение $H^1(K;\mathbb{Z}) \to H^1(A;\mathbb{Z})$. Оно называется *сужением.*

(b) *Теорема Хопфа.* Окружность $S^1 \subset K$ в 2-полиэдре K является его ретрактом (т.е. существует отображение $K \to S^1$, тождесвенное на S^1) тогда и только тогда, когда существует $x \in H^1(K;\mathbb{Z})$, сужение которого на S^1 является образующей группы $H^1(S^1;\mathbb{Z})$. (Это утверждение интересно даже для 2-многообразия K.)

Отображения графа в проективное пространство.

Пусть граф K расположен в трехмерном пространстве. Назовем непрерывным отображением $f : K \to \mathbb{R}P^2$ семейство прямых $f(x)$ трехмерного пространства, проходящих через точки $x \in K$, непрерывно зависящих от x. (В этом определении можно заменить 'через точки $x \in K$' на 'через точку $0 \in \mathbb{R}^3$'.)

15. (a) Любые два отображения дерева в $\mathbb{R}P^2$ гомотопны.

(b) Для любого отображения $f : S^1 \to \mathbb{R}P^2$ композиция двукратной намотки $S^1 \to S^1$ и f гомотопна отображению в точку.

(c) Стандартное включение $S^1 \cong \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^2$ не гомотопно отображению в точку.

(d) $[S^1, \mathbb{R}P^2] \cong \mathbb{Z}_2$.

(e) Опишите $[K, \mathbb{R}P^2]$ (указание: используйте (b) и стягивание ребра).

Теорема Хопфа по модулю 2. *Для графа K существует биекция* $\deg : [K, \mathbb{R}P^2] \to H^1(K)$.

Набросок определения одномерной группы когомологий $H^1(K)$, отображения deg *и доказательства его биективности.* Фиксируем в $\mathbb{R}^3$ некоторую прямую l_0 и плоскость α_0, ее содержащую (т.е. фиксируем на проективной плоскости точку $\mathbb{R}P^0$ и окружность $\mathbb{R}P^1$, рис. 66). Любое отображение $f : K \to \mathbb{R}P^2$ гомотопно *клеточному*, т.е. такому, для которого все прямые параллельны α_0, а прямая в вершине параллельна l_0 (т.е. переводящему любую вершину графа K в $\mathbb{R}P^0$, а любое ребро в $\mathbb{R}P^1$). Поэтому достаточно классифицировать клеточные отображения $f : K \to \mathbb{R}P^2$ с точностью до гомотопии (отображения которой не обязательно клеточны).

Для клеточного отображения $f : K \to \mathbb{R}P^2$ поставим на каждом ребре e количество оборотов прямой $f(x)$ при прохождении по этому ребру от одной вершины до другой. Это количество не зависит от выбора начальной вершины. Полученную расстановку нулей и единиц на ребрах графа K обозначим $\gamma(f)$.

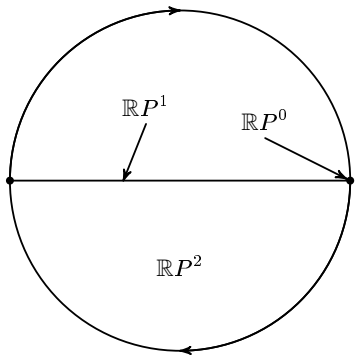


Рис. 66: Схема (клеточное разбиение) проективной плоскости

Если $f, g : K \to \mathbb{R}P^2$ — клеточные отображения и $\gamma(f) = \gamma(g)$, то $f \simeq g$ (поскольку $[S^1, \mathbb{R}P^2] \cong \mathbb{Z}_2$).

Так как $\mathbb{R}P^2$ является 2-многообразием, то любая гомотопия клеточного отображения f гомотопна *клеточной*, т.е. такой, в процессе которой прямые в вершинах графа K параллельны плоскости α_0 (т.е. образы вершин находятся на окружности $\mathbb{R}P^1$). Заметим, что отображения, из которых состоит клеточная гомотопия, не обязательно клеточны. Для клеточной гомотопии $f_t : K \to S^1$ между клеточными отображениями f_0 и f_1 и вершины $a \in K$ рассмотрим количество оборотов прямой $f_t(a)$ при прохождении параметром t отрезка $[0, 1]$. Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — все вершины, для которых это количество нечетно. Тогда $\gamma(f_0) - \gamma(f_1) = \delta a_1 + \ldots + \delta a_s$. *Кограница* δa вершины $a \in K$, отношение *когомологичности*, группа $H^1(K)$ и класс $\deg f = [h_f] \in H^1(K)$ определяются как и в теореме Хопфа с заменой $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}_2$. Корректность определения, инъективность и сюръективность отображения deg доказываются аналогично теореме Хопфа. QED

Эквивариантные отображения графа.

Пусть дан связный граф с симплициальной инволюцией $\tau : K \to K$, не имеющей неподвижных точек (см. определение в параграфе 'инволюции'). Отображение $f : K \to S^1$ называется *эквивариантным* (относительно t), если $f(\tau(x)) = -f(x)$ для любой $x \in K$ (т.е. если векторы в τ-симметричных точках противоположны). Такие отображения возникали в пункте 'конфигурационные пространства и планарность'. Обозначим через $[K, S^1]_\tau$ множество эквивариантных отображений $K \to S^1$ с точностью до эквивариантной гомотопии (т.е. гомотопии в классе эквивариантных отображений).

Эквивариантная теорема Хопфа. *Для связного графа K с симплициальной инволюцией $\tau : K \to K$, не имеющей неподвижных точек, существует биекция* $\deg : [K; S^1]_\tau \to H^1(K/\tau; \mathbb{Z})$.

Набросок определения отображения deg *и доказательства его биективности.* Предположим, что в графе K нет петель и кратных ребер.

Фиксируем произвольный единичный вектор v. Произвольное эквивариантное отображение $K \to S^1$ эквивариантно гомотопно *клеточному*, т.е. такому, для которого каждой вершине графа K соответствует один из векторов v или $-v$ (докажите!). Поэтому достаточно классифицировать клеточные эквивариантные отображения с точностью до эквивариантной гомотопии (отображения которой не обязательно клеточны).

Ясно, что существует некоторое эквивариантное клеточное отображение $K \to S^1$: его можно задать произвольно на вершинах и затем произвольно продолжить на ребра. Обозначим одно из таких отображений через f_0.

Фиксируем ориентации на окружности S^1 и на ребрах графа K так, чтобы ориентации на инволютивных ребрах были согласованы. Возьмем клеточное эквивариантное отображение $f : K \to S^1$. Для на каждого ребра рассмотрим полуцелое число оборотов вектора $f(x)$ при пробегании x этого ребра в направлении ориентации ребра. Поставим на этом ребре разность этого числа и аналогичного числа для f_0. Получим расстановку $\gamma(f)$ полуцелых чисел на ребрах графа K. Тогда

(i) на паре инволютивных ребер стоят равные числа.

(ii) сумма чисел на ребрах любого пути в графе K, соединяющего две инволютивные вершины, целая.

(iii) сумма чисел на ребрах любого цикла в графе K целая.

Второе утверждение следует из $f(a) = -f(\tau a)$ и $f_0(a) = -f_0(\tau a)$.

Будем называть *эквивариантными* расстановки, удовлетворяющие этим условию.

Определим *эквивариантную кограницу* $\delta(a, \tau a)$ пары инволютивных вершин $a, \tau a$ так: на всех ребрах, не содержащих ни a, ни τa, ставим нули, на ребрах, входящих в одну из этих вершин, ставим $+1/2$, на выходящих ставим $-1/2$. При этом если есть ребро с концами только в вершинах a и τa, то на нем ставим 0. Определим отношение *эквивариантной когомологичности*, группу $H^1_\tau(K;\mathbb{Z})$ эквивариантных расстановок с точность до эквивариантной когомологичности и отображение $\deg : [K; S^1]_\tau \to H^1_\tau(K;\mathbb{Z})$, как и в доказательстве теоремы Хопфа. Доказательства корректности определения отображения deg и его инъективности аналогичны доказательству теоремы Хопфа.

Для доказательства сюръективности отображения deg возьмем произвольную эквивариантную расстановку γ и любую вершину $a \in K$. Положим $f(a) = f_0(a)$ и $f(\tau a) = f_0(\tau a) = -f_0(a)$. Постепенно, выходя от вершины a, будем продолжать построенное отображение f на пары $e, \tau e$ инволютивных ребер, наматывая их 'с одинаковой скоростью' на окружность нужное число раз. Ввиду условия (ii) это построение корректно (проверьте!). Для построенного отображения f получаем $\gamma(f) = \gamma$.

Доказательство изоморфизма $H^1_\tau(K;\mathbb{Z}) \to H^1(K/\tau;\mathbb{Z})$ оставляем в качестве задачи. QED

16. (a) $H^1_\tau(K;\mathbb{Z}) \cong H^1(K/\tau;\mathbb{Z})$.

(b) В приведенном построении рассмотрим произвольную вершину b графа K. Если сумма чисел на ребрах некоторого пути, соединяющего a и b, целая, то $f(b) = 1$ и $f(\tau b) = -1$, иначе $f(b) = -1$ и $f(\tau b) = 1$. (Ввиду условия (iii) сумма чисел на ребрах любого пути, соединяющего a и b, является целой или полуцелой в зависимости только от вершины b, а не от выбора пути).

(c) Приведите другое доказательство теоремы, основанное на одновременном стягивании τ-симметричных ребер в K.

Отображения полиэдра в сферу той же размерности.

Этот пункт интересно разобрать даже для $n = 2$ и $m = 3$ (общий случай аналогичен). Для подмножества K пространства $\mathbb{R}^m$ непрерывное отображение $f : K \to S^n$ определяется аналогично случаю $n = 1$. Такое непрерывное отображение можно также представлять себе как семейство единичных векторов $f(x)$ в точках $x \in K$, параллельных фиксированной плоскости $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^m$ и непрерывно зависящих от x.

В этом пункте мы будем заниматься проблемой описания *множества* гомотопических классов непрерывных отображений $K \to S^n$. Для $K = S^n$ на этом множестве имеется естественная структура *группы*, которая необходима при решении нашей задачи для произвольного K (несмотря на то, что для произвольного K такой естественной структуры *группы* нет и ответ, когда он известен, дается именно в терминах *множеств*).

Нулем группы $[S^n, S^n]$ называется гомотопический класс отображения в точку. *Обратным элементом* к гомотопическому классу отображения $f : S^n \to S^n$ называется гомотопический класс композиции $s \circ f$ отображения f с зеркальной симметрией s. *Сумма* гомотопических классов отображений f и g строится, как на рис. 67 вверху (или внизу, если под отображением $S^n \to S^n$ понимать отображение $I^n \to S^n$, переводящее границу куба I^n в точку).

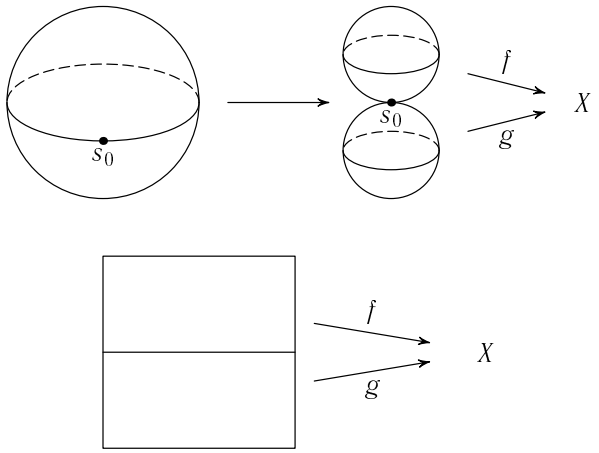


Рис. 67: Сумма сфероидов, заменить $X \to S^n$

Мы будем использовать следующий факт.

Многомерная основная теорема топологии. *Существует изоморфизм групп* $\deg : [S^n, S^n] \to \mathbb{Z}$.

17. (a) Для замкнутого ориентируемого 2-многообразия K существует биекция $\deg : [K, S^2] \cong \mathbb{Z}$.

(b) Найдите $[K, S^n]$ для произвольных (известных Вам) многообразий K.

Конечный n-полиэдр можно представлять себе как объединение некоторого количества граней размерностей не более n в разбиении пространства $\mathbb{R}^m$ на единичные m-кубы.

Многомерная теорема Хопфа. *Для n-полиэдра K существует биекция* $\deg : [K, S^n] \to H^n(K; \mathbb{Z})$.

Набросок определений n-мерной группы когомологий $H^n(K; \mathbb{Z})$, отображения deg *и доказательства его биективности.* Фиксируем произвольную точку $v \in S^n$. Фиксируем триангуляцию полиэдра K и ориентации на n-мерных гранях триангуляции. Любое отображение $f : K \to S^n$ гомотопно клеточному, т.е. переводящему объединение $(n-1)$-мерных граней в v. Поэтому достаточно классифицировать клеточные отображения с точностью до гомотопии (отображения которой не обязательно клеточны).

Для клеточного отображения $f : K \to S^n$ рассмотрим произвольную n-мерную грань $c \subset K$. Поскольку f отображает ее границу ∂c в точку, то отображение $f|_c$ представляется в виде композиции схлопывания границы грани c в точку (при котором получается S^n) и некоторого отображения $S^n \to S^n$. Поставим на грани c степень последнего отображения. Полученную расстановку обозначим $\gamma(f)$.

Кограница $(n-1)$-мерной грани, отношение *когомологичности*, группа $H^n(K; \mathbb{Z})$ и отображение deg определяются как и в (одномерной) теореме Хопфа.

Корректность определения отображения deg, его инъективность и сюръективность доказываются аналогично (одномерной) теореме Хопфа, используя $[S^i, S^n] \cong 0$ для $i < n$ и многомерную основную теорему топологии. Для доказательства инъективности необходимо следующее добавление: в силу общего положения можно считать, что гомотопия между $f, g : K \to S^n$ отображает объединение $(n-2)$-мерных граней полиэдра K в $v \in S^n$. QED

Для полиэдра K *произвольной размерности* и любого клеточного отображения $f : K \to S^n$ можно точно так же определить препятствующую расстановку $\gamma(f)$. Из многомерной основной теоремы топологии следует, что для расстановки $\gamma(f)$

сумма чисел на границе любой $(n+1)$-мерной грани равна 0.

Расстановки с этим условием называются *коциклами. Кограница* $(n-1)$-мерной грани, отношение *когомологичности коциклов* и группа $H^n(K; \mathbb{Z})$ определяются как и в (одномерной) теореме Хопфа. Ввиду важности этого определения приведем его.

Определение групп когомологий. (Ср. с определением групп гомологий в начале главы 4; $C^n(X; \mathbb{Z}) = C_n(X; \mathbb{Z})$.) Введем ориентации на симплексах (некоторой триангуляции) полиэдра X. Обозначим через $C^n = C^n(X; \mathbb{Z})$ группу расстановок целых чисел на ориентированных n-симплексах (с операцией покомпонентного сложения). Для n-мерного симплекса σ определим его *элементарную кограницу* $\partial\sigma$ как расстановку плюс или минус единиц на $(n+1)$-симплексах, содержащих σ, и нулей на остальных $(n+1)$-симплексах. Уточните знаки, исходя из предыдущих примеров, мотивирующих это определение. Элементарные кограницы определяют линейное отображение $\delta = \delta_{n+1} : C^n \to C^{n+1}$.

18. $\delta_{n+1}\delta_n = 0$.

Положим

$$H^n(X; \mathbb{Z}) := \delta_{n+1}^{-1}(0)/\delta_n(C^{n-1}) \quad \text{для } n \geqslant 1 \quad \text{и} \quad H^0(X; \mathbb{Z}) := \delta_1^{-1}(0).$$

19. Для полиэдра K *произвольной размерности* и любого клеточного отображения $f : K \to S^n$ отображение $\deg : [K, S^n] \to H^n(K; \mathbb{Z})$ определяется как и в (одномерной) теореме Хопфа (ср. с доказательством теоремы Брушлинского).

(a) Отображение deg по-прежнему корректно определено.

(b) Если $\dim K = n+1$, то deg сюръективно.

(c) Приведите пример не инъективности отображения deg для $n = 2$. Указание. Если не получается, то см. далее.

19 обобщения теоремы Хопфа (набросок)

Отображения трехмерного полиэдра в двумерную сферу.

Представим $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ и отождествим S^2 с $\mathbb{C}P^1$. Определим *отображение Хопфа*

$$\eta : S^3 \to S^2 \quad \text{формулой} \quad \eta(z_1, z_2) = (z_1 : z_2).$$

Инвариант Хопфа определяется как коэффициент зацепления прообразов регулярных точек при гладком или кусочно-линейном отображении (коэффициент зацепления определен в пункте 'коэффициент зацепления'). Приведем аккуратное определение. Любое отображение $f : S^3 \to S^2$ гомотопно гладкому отображению g [DNF79], [Pr04, 18.4]. Точка $a \in S^2$ называется *регулярным значением* гладкого отображения g, если $\operatorname{rk} J(x) = 2$ для любой точки $x \in g^{-1}a$. Для гладкого отображения $g : S^3 \to S^2$ найдутся регулярные значения $a_1, a_2 \in S^2$ [DNF79, Pr04]. Тогда $g^{-1}a_i = S^1_{i1} \sqcup S^1_{i2} \sqcup \ldots \sqcup S^1_{ik_i}$ есть несвязное объединение окружностей [DNF79], [Pr04]. Определим *инвариант Хопфа*

$$H(f) := \sum_{i=1,j=1}^{k_1,k_2} \operatorname{lk}(S^1_{1i}, S^1_{2j}).$$

1. (a) $H(f)$ не зависит от выбора точки a_1 (и точки a_2).

(b) $H(f)$ не меняется при гладкой гомотопии отображения g.

(c) $H(f)$ не зависит от выбора отображения g.

(d) $H(\eta) = 1$.

(e) Отображение Хопфа не гомотопно отображению в точку.

(f) Введите структуру группы на $[S^3, S^2]$ аналогично вышеописанной структуре группы на $[S^n, S^n]$.

(g) Инвариант Хопфа является гомоморфизмом.

(h) *Теорема Хопфа (1931).* Существует бесконечно много попарно негомотопных отображений $S^3 \to S^2$.

(i)* Отображения $S^3 \to S^2$ с равными инвариантами Хопфа гомотопны.

(j) **Теорема Хопфа-Понтрягина-Фрейденталя** (1938). *Инвариант Хопфа является изоморфизмом* $[S^3, S^2] \to \mathbb{Z}$.

2.* (a) Множество $[S^3, S^2]$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством *оснащенных зацеплений* в S^3 с точностью до *оснащенного кобордизма.* См. [Po76], [Pr04, 18.5], ср. [CRS].

(b) Получите другое доказательство теоремы Хопфа-Понтрягина-Фрейденталя.

3. (a) Для любого $a \in S^2$ выполнено $\eta^{-1}a \cong S^1$.

(b) Отображение Хопфа является *локально-тривиальным расслоением*, т.е. для любой точки $a \in S^2$ существует гомеоморфизм $h : \eta^{-1}(S^2 \backslash \{-a\}) \to S^2 \backslash \{-a\} \times S^1$, для которого $pr_1 \circ h = \eta$.

(c) Отображение Хопфа является *расслоением в смысле Серра*, т.е. для любого полиэдра X, его отображения $F_0 : X \to S^3$ и гомотопии $f_t : X \to S^2$ отображения $f_0 = \eta \circ F_0$ существует (*накрывающая*) гомотопия $F_t : X \to S^3$ отображения F_0, для которой $f_t = \eta \circ F_t$.

Указание. Доказательство для локально-тривиальных расслоений аналогично доказательству для накрытий.

(d) Отображение $[S^3, S^3] \to [S^3, S^2]$, определенное композицией с отображением Хопфа, является гомоморфизмом.

(e) Это отображение мономорфно. Указание. Пусть для отображения $F_0 : S^3 \to S^3$ композиция $\eta \circ F_0$ гомотопна отображению в точку $a \in S^2$. Возьмем накрывающую гомотопию F_t. Тогда $F_1(S^3) \subset \eta^{-1}(a) \cong S^1$. Значит, F_1 пропускается через S^1 и потому гомотопно отображению в точку. Следовательно, и F гомотопно отображению в точку.

(f) Это отображение эпиморфно.

(g) Получите еще одно доказательство теоремы Хопфа-Понтрягина-Фрейденталя.

4.* (a) Для ориентируемого 3-многообразия K и $n = 2$ постройте биекцию $\deg^{-1} 0 \to \mathbb{Z}$.

(b) Для 3-полиэдра K и $n = 2$ постройте биекцию $\deg^{-1} 0 \to H^3(K; \mathbb{Z})$ [Pr06, 3.1.4].

Теорема Понтрягина. *Для 3-полиэдра K имеется сюръекция* $\deg : [K, S^2] \to H^2(K; \mathbb{Z})$ *и, для любого* $\gamma \in H^2(K; \mathbb{Z})$, *биекция* $\deg^{-1} \gamma = \dfrac{H^3(K; \mathbb{Z})}{2\gamma \cup H^1(K; \mathbb{Z})}$.

Теорема Понтрягина интересна даже для *3-многообразий* K (в этом случае имеется более простая формулировка ответа — см. теорему классификации векторных полей — и более простое доказательство [CRS]). Определение произведения $\cup : H^1(K;\mathbb{Z}) \times H^2(K;\mathbb{Z}) \to H^3(K;\mathbb{Z})$ аналогично определению операции Sq в пункте 'препятствие Ван Кампена к планарности графов', см. [FF89, §16]. Впрочем, это определение естественно появляется при изучении множества $[K, S^2]$, поэтому читатель может попытаться переоткрыть его самостоятельно.

Отображения полиэдра в сферу меньшей размерности.

Приведем без доказательства описание множества $[K, S^n]$ для $(n+1)$-полиэдра K.

Введем на $[S^m, S^n]$ структуру группы аналогично вышеописанной структуре группы на $[S^n, S^n]$. Полученную группу обозначим $\pi_m(S^n)$.

5. (a) Множество $\pi_{n+1}(S^n)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством *оснащенных зацеплений* в S^{n+1} с точностью до *оснащенного кобордизма.*

(b) **Теорема Понтрягина** (1938). $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}_2$ *для* $n \geqslant 3$.

6. *Теорема Александера.* Любой сохраняющий ориентацию кусочно-линейный гомеоморфизм $D^n \to D^n$ изотопен тождественному.

7.* *Теорема Фрейденталя.*

(a) $\Sigma : \pi_{n+k}(S^n) \to \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$ есть эпиморфизм при $n \geqslant 2k-1$.

(b) $\Sigma : \pi_{n+k}(S^n) \to \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$ есть изоморфизм при $n \geqslant 2k-2$.

(c)* $\ker \Sigma : \pi_3(S^2) \to \pi_4(S^3)$ порождается отображением 2η.

(d) Получите другое доказательство теоремы Понтрягина.

8. (a) Пусть A — подполиэдр полиэдра X и $f : A \to S^n$ — непрерывное отображение. Определите группы $H^{s+1}(X, A; \pi_s(S^n))$ (аналогично вышеприведенному определению групп когомологий) и постройте препятствия $o(f) \in H^{s+1}(X, A; \pi_s(S^n))$ к продолжению f на X. Замечание. Препятствующая расстановка будет 'более чем коциклом': если подполиэдр $Z \subset X$ изоморфен границе $(s+2)$-симплекса, то сумма элементов группы $\pi_s(S^n)$ по s-мерным симплексам подполиэдра Z равна нулю, даже если сам Z не является границей $(s+2)$-симплекса. Более общее утверждение доказано в (d).

В оставшихся пунктах мы пропускаем коэффициенты $\pi_s(S^n)$.

(b) Для непрерывного отображения $g : (Y, B) \to (X, A)$ определите гомоморфизм $g^* : H^{s+1}(X, A) \to H^{s+1}(Y, B)$ и докажите, что построенные препятствия естественны, т.е. $o(f \circ g) = g^* o(f)$.

(c) Определите гомоморфизм $j^* : H^{s+1}(X, A) \to H^{s+1}(X)$ (ср. с пунктом 'точные последовательности' главы 4) и докажите, что $jo(f) = 0$.

(d) $o(f) \cdot H_{s+1}(X) = 0$. Определение группы $H_{s+1}(X)$ аналогично приведенному в начале главы 4; умножение $\cdot$ происходит из скалярного умножения $C_n(X) \cdot C_n(X) \to \mathbb{Z}$.

Теорема Стинрода. *Для* $n \geqslant 3$ *и* $(n+1)$*-полиэдра* K *существует биекция*

$$[K, S^n] \to H^n(K;\mathbb{Z}) \times H^{n+1}(K)/\operatorname{Sq}^2 \rho_2 H^{n-1}(K;\mathbb{Z}).$$

Более точно, для любого $\gamma \in H^n(K;\mathbb{Z})$ *существует биекция* $\deg^{-1}\gamma \to$ $\to H^{n+1}(K)/\operatorname{Sq}^2 \rho_2 H^{n-1}(K;\mathbb{Z})$.

Здесь $\rho_2 : H^n(K;\mathbb{Z}) \to H^n(K)$ — приведение по модулю 2. Операция $\operatorname{Sq}^2 : H^{n-1}(K) \to H^{n+1}(K)$ определяется тем условием, что для отображения $f : K^{(n-1)} \to S^{n-1}$, продолжаемого на $K^{(n)}$, элемент $\operatorname{Sq}^2 \rho_2(\deg f) \in H^{n+1}(K)$ является препятствием к продолжению отображения f на все K. (Это условие равносильно тому, что последовательность $[K, S^{n-1}] \xrightarrow{\deg} H^{n-1}(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\operatorname{Sq}^2 \circ \rho_2} H^{n+1}(K)$ множеств с отмеченными точками точна.)

9.* (a) Это определение корректно, т.е. препятствие действительно пропускается через ρ_2.

(b) Операция Sq^2 естественна по K.

(c) Для 4-полиэдра K и отображения $f : K^{(2)} \to S^2$, продолжаемого на $K^{(3)}$, постройте препятствие $\operatorname{Sq}^2(\deg f) \in H^4(K; \pi_3(S^2))$ к продолжению отображения f на все K (аналогично задаче 9). Получится отображение Sq^2, для которого последовательность $[K, S^2] \xrightarrow{\deg} H^2(K;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\operatorname{Sq}^2} H^4(K;\mathbb{Z})$ множеств с отмеченными точками точна.

(d) Для коцикла $a \in Z^2(K;\mathbb{Z})$ элемент $\operatorname{Sq}^2[a]$ представляется коциклом $b \in Z^4(K, \mathbb{Z})$, определенным по формуле $b(\sigma_{01234}) = a(\sigma_{012})a(\sigma_{234})$.

(e) Пусть K — ориентируемое четырехмерное многообразие и класс $a \in H^2(K;\mathbb{Z})$ двойственен по Пуанкаре классу $Da \in H_2(K;\mathbb{Z})$, представляющемуся вложением $h : N \to K$ замкнутого ориентируемого 2-многообразия (т.е. сферы с ручками) N. Тогда $\mathrm{Sq}^2 a$ есть сумма точек (со знаком) в $hN \cap h'N$, где h' — погружение, близкое к h.

(f) Если $\alpha \in H^2(K;\mathbb{Z})$, то $f_{\mathrm{Sq}^2\alpha} = f_1 \circ f_\alpha$, где $1 \in H^4(\mathbb{C}P^3;\mathbb{Z}) \cong H_2(\mathbb{C}P^3;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ — образующая и отображения $f_{\mathrm{Sq}^2\alpha} : K \to K(\mathbb{Z},4)$, $f_1 : \mathbb{C}P^3 \to K(\mathbb{Z},4)$ и $f_\alpha : K \to \mathbb{C}P^3$ соответствуют классам $\mathrm{Sq}^2\alpha$, 1 и α при изоморфизмах $H^4(K;\mathbb{Z}) \cong [K, K(\mathbb{Z},4)]$, $H^4(\mathbb{C}P^3;\mathbb{Z}) \cong [\mathbb{C}P^3, K(\mathbb{Z},4)]$ и $H^2(K;\mathbb{Z}) \cong [K, \mathbb{C}P^3]$ из теоремы Эйленберга-Маклейна ниже.

Отображения в пространства Эйленберга-Маклейна.

Попытавшись обобщить наше вычисление множества $[K, \mathbb{R}P^2]$ на 2-полиэдр K, легко найти такой 2-полиэдр K, что $[K, \mathbb{R}P^2] \neq H^1(K)$. Например, $K = S^2$. Однако, теорему Хопфа по модулю 2 все-таки можно обобщить на многомерный случай.

Пусть полиэдр K (например, 2-многообразие) расположен в $\mathbb{R}^m$. Назовем непрерывным отображением $f : K \to \mathbb{R}P^n$ семейство прямых $f(x)$ в точках $x \in K$, параллельных фиксированному подпространству $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^m$ и непрерывно зависящих от x. Гомотопность таких отображений и множество $[K, \mathbb{R}P^n]$ определяются аналогично предыдущему.

10. $[S^1, \mathbb{R}P^n] = \mathbb{Z}_2$ для $n \geqslant 2$ и $[S^i, \mathbb{R}P^n] = [S^i, S^n] = 0$ для $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Указание: используйте *накрытие* $S^n \to \mathbb{R}P^n$.

Теорема Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{R}P^{n+1}$. *Для n-полиэдра K существует биекция* $\deg : [K, \mathbb{R}P^{n+1}] \to H^1(K)$.

Случай $n = 1$ есть теорема Хопфа по модулю 2. Теорема Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{R}P^n$ интересна даже для $n = 2$ (и даже для 2-многообразий). Доказательство мы приводим тоже для $n = 2$ (общий случай аналогичен).

Набросок определения одномерной группы когомологий $H^1(K)$ и доказательства теоремы Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{R}P^3$. Фиксируем разложение $\mathbb{R}P^0 \in \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$. Как и раньше, будем классифицировать только *клеточные* отображения, т.е. переводящие вершины 2-полиэдра K в точку $\mathbb{R}P^0$, ребра в $\mathbb{R}P^1$ и грани в $\mathbb{R}P^2$. Для клеточного отображения $f : K \to \mathbb{R}P^3$, как и в теореме Хопфа по модулю 2 определим *препятствующий коцикл* $\gamma(f)$ (расстановку целых чисел на ребрах, для которой сумма чисел по границе любой грани равна нулю) и кограницу δa вершины a. Так как $[S^2, \mathbb{R}P^3] = 0$ (см. конец пункта 'характеристические классы для 3-многообразий'), то $\gamma(f) = \gamma(g)$ влечет $f \simeq g$.

Как и раньше, любая гомотопия клеточного отображения f может быть заменена на *клеточную*, т.е. такую, для которой образы вершин полиэдра K находятся на $\mathbb{R}P^1$, а ребер — на $\mathbb{R}P^2$. Так как $[S^2, \mathbb{R}P^3] = 0$, то $f \simeq g$ тогда и только тогда, когда $\gamma(f) - \gamma(g) = \delta a_1 + \ldots + \delta a_s$ для некоторых вершин $a_1, \ldots, a_s \in K$. Назовем такие расстановки $\gamma(f)$ и $\gamma(g)$ *когомологичными.*

Определим группу $H^1(K)$ и отображение deg как и в доказательстве теоремы Хопфа по модулю 2. Тогда отображение deg определено корректно. Инъективность этого отображения доказывается аналогично инъективности отображения deg из теоремы Хопфа по модулю 2. Сюръективность доказывается аналогично теореме Брушлинского с использованием $[S^2, \mathbb{R}P^3] = 0$ и заменой $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}_2$. QED

Доказательства теоремы Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{R}P^{n+1}$ сводится к предыдущему, поскольку в силу условия $[S^i; \mathbb{R}P^{n+1}] \cong 0$ любое отображение $K^{(2)} \to \mathbb{R}P^{n+1}$ можно продолжить на все K и любую гомотопию на $K^{(1)}$ можно продолжить на все K.

Далее мы используем понятия непрерывного отображения в более общие пространства и гомотопий таких отображений, см. [FF89].

11. $[S^2, \mathbb{C}P^n] \cong \mathbb{Z}$ и $[S^i, \mathbb{C}P^n] = 0$ для $i = 1, 3, 4, 5, \ldots, 2n$. Указание: используйте *многомерное расслоение Хопфа* $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ и общее положение: $[S^i, \mathbb{C}P^n] = [S^i, \mathbb{C}P^1]$ для $i \leqslant 2$.

Теорема Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{C}P^n$. *Для n-полиэдра K существует биекция* $\deg : [K, \mathbb{C}P^n] \to H^2(K;\mathbb{Z})$.

Случай $n = 1$ очевиден. Случай $n = 2$ фактически был рассмотрен в двумерной теореме Хопфа: $[K; \mathbb{C}P^2] = [K; S^2] = H^2(K;\mathbb{Z})$, поскольку любое отображение 2-полиэдра K в $\mathbb{C}P^2$ и любая его гомотопия вытесняются на $S^2 = \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$.

12. (a) Докажите теорему Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{C}P^3$ (доказательство общего случая аналогично). Указание. Рассмотрим точку $v = \mathbb{C}P^0 \in \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{C}P^3$. Как и выше, $[K, \mathbb{C}P^3]$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством *клеточных* отображений $f : K \to \mathbb{C}P^3$

(таких, что $f(K^{(1)}) = v$ и $f(K^{(3)}) \subset \mathbb{C}P^2$) с точностью до *клеточных* гомотопий f_t (таких, что $f_t(K^{(0)}) = v$, $f_t(K^{(2)}) \subset \mathbb{C}P^1$ и $f_t(K^{(3)}) \subset \mathbb{C}P^2$ для любого t). В частности, $[K, \mathbb{C}P^3] = [K, \mathbb{C}P^2]$. Дальнейшее аналогично доказательству теоремы Эйленберга-Маклейна для $\mathbb{R}P^{n+1}$.

(b) Найдите $[K, (S^1)^n]$.

Напомним, что для любого n существует такой (как правило, бесконечномерный) полиэдр

$$K(\mathbb{Z}, n), \text{ что } [S^n, K(\mathbb{Z}, n)] \cong \mathbb{Z} \text{ и } [S^i, K(\mathbb{Z}, n)] = 0 \text{ для любого } i \neq n.$$

Например, $K(\mathbb{Z}, 1) \cong S^1$ и $K(\mathbb{Z}, 2) \cong \mathbb{C}P^\infty$.

Теорема Эйленберга-Маклейна. *Для любого полиэдра K существует биекция* $\deg : [K, K(\mathbb{Z}, n)] \to H^n(K; \mathbb{Z})$.

13. (a) Докажите теорему Эйленберга-Маклейна для $n = 3$ (доказательство общего случая аналогично).

(b) Для полиэдра K и абелевой группы π определите (вообще говоря, бесконечномерный) полиэдр $K(\pi, n)$ и группу $H^n(K; \pi)$ так, чтобы существовала биекция $\deg : [K, K(\pi, n)] \to H^n(K; \pi)$.

Литература.

Звездочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

[Ad93] **M. Adachi.* Embeddings and Immersions. Amer. Math. Soc., 1993. (Transl. of Math. Monographs, 124).

[Ak00] **П. М. Ахметьев.* Вложения компактов, стабильные гомотопические группы сфер и теория особенностей // Успехи Мат. Наук. 2000. 55:3. С. 3-62.

[An03] **Д. В. Аносов.* Отображения окружности, векторные поля и их применения. М: МЦНМО, 2003.

[BFM90] **А. В. Болсинов, С. В. Матвеев и А. Т. Фоменко.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Успехи Мат. Наук. 1990. 45:2. С. 49-77.

[Bi83] **R. H. Bing.* The Geometric Topology of 3-Manifolds. Providence, R. I. 1983. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 40).

[BE82] **В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович.* Наглядная топология М.: Наука, 1982.

[BP97] **R. Benedetti and C. Petronio.* Branched standard spines of 3-manifolds // Lecture Notes in Math. 1653, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.

[CL95] *Чжуан-цзы. Ле-цзы. М.: Мысль, 1995.

[CRS04] **М. Ценцель, Д. Реповш и А. Скопенков.* О теоремах вложения Браудера-Левина-Новикова // Труды МИРАН. 2004. 247. С. 280-290.

[DNF79] **Б. А. Дубровин, С. П. Новиков и А. Т. Фоменко.* Современная геометрия: методы и приложения. М.: Наука, 1979.

[DNF84] **Б. А. Дубровин, С. П. Новиков и А. Т. Фоменко.* Современная геометрия: методы теории гомологий. М.: Наука, 1984.

[DZ93] **Дымарский Я. и Заверач И.* Пересечение двух кривых на торе. // Квант. 1993. 6. http://kvant.mccme.ru/1993/06/ peresechenie_dvuh_krivyh_na_to.htm

[FF89] **А. Т. Фоменко и Д. Б. Фукс.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.

[Fo92] **А. Т. Фоменко.* Наглядная геометрия и топология. М.: Изд-во МГУ, 1992.

[Gi71] **S. Gitler.* Embedding and immersion of manifolds // Proc. Symp. Pura Appl. Math., AMS, Providence. 1971. 22. P. 87–96.

[GS99] **R. Gompf and A. Stipsicz.* 4-Manifolds and Kirby Calculus. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999.

[GT87] **J. L. Gross and T. W. Tucker.* Topological graph theory. New York: Wiley-Interscience, 1987.

[Ha] **F. Harary.* Graph theory. Рус. пер.: Ф. Харари. Теория графов. М., Мир, 1973.

[HMS93] **C. Hog-Angeloni, W. Metzler and A. J. Sieradski.* Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. (London Math. Soc. Lecture Notes, 197).

[Ho90] **K. Horvatič.* Classical problems of geometric topology (in Croatian). Zagreb: Tehnička knjiga, 1990

[Ki89] **R. C. Kirby.* The Topology of 4-Manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1989. (Lect. Notes Math., 1374).

[Ko81] **U. Koschorke.* Vector Fields and Other Vector Bundle Morhpisms — a Singularity Approach. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1981. (Lect. Notes Math., 847).

[KPS] **A. Kaibkhanov, D. Permyakov and A. Skopenkov.* Realization of graphs with rotation // http://www.turgor.ru/lktg/2005/3/index.htm.

[KS99] **П. Кожевников и А. Скопенков.* Узкие деревья на плоскости // Мат. Образование. 1999. 2-3. С. 126-131.

[Ku68] **К. Куратовский.* Топология. Т. 1, 2. М.: Мир, 1969.

[LZ] *S. Lando and A. Zvonkin.* Embedded Graphs. Springer

[MF90] **С. В. Матвеев и А. Т. Фоменко.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Изд-во МГУ. М.: Наука. 1990.

[MS74] **Дж. Милнор, Дж. Сташефф.* Характеристические классы. М.: Мир, 1979.

[MT01] **B. Mohar and C. Thomassen.* Graphs on Surfaces. The John Hopkins University Press, 2001.

[NN04] **?.* The forgotten mathematician //Math. Intelligencer, 2004.

[No76] **С. П. Новиков.* Топология-1. М.: Наука, 1976. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Основные направления, 12).

[Po76] **Л. С. Понтрягин.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М.: Наука, 1976.

[Pr95] **В. В. Прасолов.* Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.

[Pr04] **В. В. Прасолов.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. См. `http://www.mccme.ru/prasolov/`.

[Pr06] **В. В. Прасолов.* Элементы теории гомологий. М.: МЦНМО, 2006. См. `http://www.mccme.ru/prasolov/`.

[PS05] **В. В. Прасолов и М. Скопенков.* Рамсеевская теория зацеплений // Мат. Просвещение. 2005. 9. С. 108-115.

[RS72] **К. П. Рурк и Б. Дж. Сандерсон.* Введение в кусочно-линейную топологию // Москва. Мир. 1974.

[RS96] **D. Repovš and A. B. Skopenkov.* Embeddability and isotopy of polyhedra in Euclidean spaces // Труды МИРАН. 1996. 212; Proc. of the Steklov Inst. Math. 1996. 212. P. 173-188.

[RS99] **Д. Реповш и А. Скопенков.* Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространств // УМН. 1999. 54:6. С. 61-109.

[RS99'] **Д. Реповш и А. Скопенков.* Кольца Борромео и препятствия к вложимости // Труды МИРАН. 1999. 225. С. 331-338.

[RS00] **Д. Реповш и А. Скопенков.* Характеристические классы для начинающих // Мат. Просвещение. 2000. 4. С. 151-176.

[RS02] **Д. Реповш и А. Скопенков.* Теория препятствий для начинающих // Мат. Просвещение. 2002. 6. С. 60-77.

[Ru73] **T. B. Rushing.* Topological Embeddings. New York: Academic Press, 1973.

[SE62] **Н. Стинрод и Д. Эпштейн.* Когомологические операции // Москва. Наука. 1983.

[St68] **Р. Стонг.* Заметки по теории кобордизмов // Москва. Мир. 1973.

[ST04] **Г. Зейферт и В. Трельфалль.* Топология. 2004.

[Sk05] **А. Скопенков.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов // Мат. Просвещение. 2005. 9. С. 116-128. http://www.mccme.ru/free-books/matprosc.html

[Sk08] **A. Skopenkov.* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces // London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342; arxiv:math/0604045.

[ST07] **А. Скопенков и А. Телишев.* И вновь о критерии Куратовского планарности графов // Мат. Просвещение, 11 (2007), 159–160, http://www.mccme.ru/free-books/matprosc.html

[VINH07] **О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев и В. М. Харламов.* Элементарная топология // МЦНМО. 2007.

[Wu65] **W. T. Wu.* A Theory of Embedding, Immersion and Isotopy of Polytopes in an Euclidean Space. Peking: Science Press, 1965.

[ARS01] *P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov.* P. Akhmetiev, D. Repovs and A. Skopenkov, Embedding products of low-dimensional manifolds in R^m // Topol. Appl. 2001. 113. P. 7-12.

[ARS02] *P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov.* Obstructions to approximating maps of n-manifolds into $\mathbb{R}^{2n}$ by embeddings // Topol. Appl. 2002. 123. P. 3-14.

[Ba65] *D. Barden.* Simply-connected five-manifolds // Ann. of Math. 1965. 82. P. 365–385.

[Br60] *M. Brown.* A proof of the generalized Schoenfliess theorem // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. 66. P. 74–76.

[BF94] *А. В. Болсинов и А. Т. Фоменко.* Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I, II // Мат. Сборник. 1994. 185:4. С. 27-80; 185:5. С. 27-78.

[BM58] *R. Bott, J. Milnor.* On the parallelizability of the spheres // Bull. Amer. Math. Soc. 1958. 64. P. 87-89.

[Br68] *W. Browder.* Embedding smooth manifolds // Proc. Int. Congr. Math. Moscow 1966. 1968. P. 712–719.

[BRS99] *D. Repovš, N. Brodsky and A. B. Skopenkov.* A classification of 3-thickenings of 2-polyhedra // Topol. Appl. 1999. 94. P. 307-314.

[Co85] *R. L. Cohen.* The immersion conjecture for differentiable manifolds // Ann. of Math. 1985. 122. P. 237-328.

[CRS98] *A. Cavicchioli, D. Repovš and A. B. Skopenkov.* Open problems on graphs, arising from geometric topology // Topol. Appl. 1998. 84. P. 207-226.

[CRS00] *A. Cavicchioli, D. Repovš and A. B. Skopenkov.* An extension of the Bolsinov-Fomenko theorem on classification of Hamiltonian systems // Rocky Mount. J. Math. 2000. 30:2. P. 447-476.

[CRS] *M. Cencelj, D. Repovš and M. Skopenkov.* Classification of framed links in 3-manifolds.

[Cu81] *M. Culler.* Using surfaces to solve equations in free groups // Topology. 1981. 20. P. 133-145.

[DW59] *A. Dold and H. Whitney.* Classification of oriented sphere bundles over a 4-complex // Ann. Math. 1959. 69. P. 667–677.

[FKT94] *M. H. Freedman, V. S. Krushkal and P. Teichner.* Van Kampen's embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in $\mathbb{R}^4$ // Math. Res. Letters. 1994. 1. P. 167-176.

[Gl62] *H. Gluck.* The embedding of two-spheres in the four-sphere // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. 104:2. P. 308–333.

[GS] *М. Гортинский и О. Скрябин.* Критерий вложимости графов в плоскость вдоль прямой // препринт.

[Ha67] *A. Haefliger.* Lissage des immersions-I // Topology. 1967. 6. 221–240.

[HH62] *A. Haefliger and M. W. Hirsch.* Immersions in the stable range // Ann. of Math. 1962. 75:2. P. 231–241.

[Hi60] *M. W. Hirsch.* Immersions of manifolds // Trans. Amer. Mat. Soc. 1960. 93. P. 242–276.

[HJ64] *R. Halin and H. A. Jung.* Karakterisierung der Komplexe der Ebene und der 2-Sphäre // Arch. Math. 1964. 15. P. 466-469.

[HP64] *A. Haefliger and V. Poenaru.* La classification des immersions combinatoires // Publ. Math. IHES. 1964. 23. P. 75–91.

[Ke59] *M. Kervaire.* An interpretation of G. Whitehead's generalization of H. Hopf's invariant // Ann. of Math. 1959. 69. P. 345-362.

[Ko01] *U. Koschorke.* Homotopy classification of line fields and Lorentz metrics on closed manifolds // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2001.

[KS05] *M. Kreck and A. Skopenkov.* Inertia groups of smooth embeddings // submitted, arxiv:math/0512594.

[La00] *F. Lasheras.* An obstruction to 3-dimensional thickening // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. 128. P. 893-902.

[Le65] *J. Levine.* Unknotting spheres in codimension 2 // Topology. 1965. 4. P. 9–16.

[Le65'] *J. Levine.* A classification of differentiable knots // Ann. of Math. 1965. 82. P. 15–

[LS69] *W. B. R. Lickorish and L. C. Siebenmann.* Regular neighborhoods and the stable range // Trans. AMS. 1969. 139. P. 207-230.

[Ma59] *B. Mazur.* On embeddings of spheres // Bull. Amer. Math. Soc. 1959. 65. P. 91–94.

[Ma60] *W. S. Massey.* On the Stiefel-Whitney classes of a manifold, 1 // Amer. J. Math. 1960. 82. P. 92-102.

[Ma62] *W. S. Massey.* On the Stiefel-Whitney classes of a manifold, 2 // Proc. AMS 1962. 13. P. 938-942.

[Ma69] *W. S. Massey.* Pontryagin squares in the Thom space of a bundle // Pacific J. Math. 1969. 31. P. 133-142.

[Ma73] *С. В. Матвеев.* Специальные остовы кусочно-линейных многообразий // Мат. Сборник. 1973. 92. С. 282-293.

[Ma05] *V. Manturov.* A proof of the Vasiliev conjecture on the planarity of singular links //Izv. RAN 2005.

[Mi97] *P. Minc.* Embedding simplicial arcs into the plane // Topol. Proc. 1997. 22. 305–340.

[Mo60] *M. Morse.* A reduction of the Schoenfliess extension problem // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. 66. P. 113–117.

[Mo89] *B. Mohar.* An obstruction to embedding graphs in surfaces // Discrete Math. 1989. 78. P. 135–142.

[OS74] *R. P. Osborne and R. S. Stevens.* Group presentations corresponding to spines of 3-manifolds, I // Amer. J. Math. 1974. 96. P. 454-471; II // Amer. J. Math. 1977. 234. P. 213-243; III // Amer. J. Math. 1977. 234 P. 245-251.

[Pa57] *C. D. Papakyriakopoulos.* On Dehn's lemma and the asphericity of knots // Ann. of Math. 1957. 66. P. 1–26.

[Pe] *D. Permyakov.* On embedding of graphs with rotations into the Moebius strip //Preprint. 2005.

[Pe'] *D. Permyakov.* Embeddings into the plane for degree 4 graphs //Preprint. 2005.

[PV] *G. Pogudin and P. Verevkin.* On the embeddability of cubic R-graphs into the torus // Preprint. 2007.

[RS98] *D. Repovš and A. B. Skopenkov.* A deleted product criterion for approximability of a map by embeddings // Topol. Appl. 1998. 87 P. 1-19.

[RS99"] *Д. Реповш и А. Скопенков.* Теория препятствий для расслоений Зейферта и классификация интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1999. 54:3. С. 183-184.

[RS01] *D. Repovš and A. Skopenkov.* Cell-like resolutions of polyhedra by special ones // Colloq. Math. 2000. 86:2. P. 231–237.

[RS01] *D. Repovš and A. Skopenkov.* On contractible n-dimensional compacta, non-embeddable into $\mathbb{R}^{2n}$ // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. 129. P. 627-628.

[RSS95] *D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V. Ščepin.* On uncountable collections of continua and their span // Colloq. Math. 1995. 69:2. P. 289-296.

[RSS95'] *D. Repovš, A. B. Skopenkov and E. V Ščepin.* On embeddability of $X \times I$ into Euclidean space // Houston J. Math. 1995. 21. P. 199-204.

[RS68] *C. P. Rourke and B. J. Sanderson.* Block bundles, I // Ann. of Math. (2). 1968. 87. P. 1-28.

[SSS98] *J. Segal, A. Skopenkov and S. Spież.* Embeddings of polyhedra in $\mathbb{R}^m$ and the deleted product obstruction // Topol. Appl. 1998. 85. P. 225-234.

[Sa91] *K. S. Sarkaria.* A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion // Israel J. Math. 1991. 73. P. 79-89.

[SS83] *Е. В. Щепин, М. А. Штанько.* Спектральный критерий вложимости компактов в евклидовы пространства // Труды Ленинградской Международной Топологической конференции. Л.: Наука, 1983. С. 135-142.

[Si69] *K. Sieklucki.* Realization of mappings // Fund. Math. 1969. 65. P. 325-343.

[Sk94] *А. Скопенков.* Геометрическое доказательство теоремы Нойвирта об утолщаемости 2-мерных полиэдров // Мат. заметки. 1994. 56:2. С. 94-98.

[Sk98] *A. B. Skopenkov.* On the deleted product criterion for embeddability in $\mathbb{R}^m$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. 126:8. P. 2467-2476.

[Sk02] *A. Skopenkov.* On the Haefliger-Hirsch-Wu invariants for embeddings and immersions // Comment. Math. Helv. 2002. 77. P. 78-124.

[Sk03] *M. Skopenkov.* Embedding products of graphs into Euclidean spaces // Fund. Math. 2003. 179. P. 191-198.

[Sk03'] *M. Skopenkov.* On approximability by embeddings of cycles in the plane // Topol. Appl. 2003. 134. P. 1-22.

[Sk08'] *A. Skopenkov.* A classification of smooth embeddings of 3-manifolds into 6-space //, Math. Zeitschrift, to appear, arxiv:math/0603429.

[Sm61] *S. Smale.* Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than 4 // Ann. of Math. 1961. 74. P. 391–466.

[St63] *J. Stallings.* On topologically unknotted spheres // Ann. of Math. 1963. 77. P. 490–503.

[Sz91] *A. Szücs.* On the cobordism groups of immersions and embeddings // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1991. 109. P. 343-349.

[Te] *А. Телишев.* О реализуемости графов на бутылке Клейна. Препринт.

[Th51] *R. Thom.* Une théorie intrinseque des puissances de Steenrod
Coll. Top. Strassbourg. 1951.

[Vd95] *A. Vdovina.* Construction of orientable Wicks forms and estimation of their number, Comm. Algebra 23 (1995), 3205-3233.

[Vd96] *A. Vdovina.* On the number of nonorientable Wicks forms in a free group, Proc. Royal Soc. Edinb. Sect. A 126 (1996), 113-116.

[Vd97] *A. Vdovina.* Product of commutators in free products, Internat. J. Algebra Comput. 7 (1997), 471-485.

[Wa67] *C. T. C. Wall.* Classification problems in differential topology, IV, Thickenings // Topology 1966. 5. P. 73–94.

[Wa67] *F. Waldhausen.* Eine Klasse von 3-dimensional Mannigfaltigkeiten, I // Invent. Math. 1967. 3. P. 308-333.

[Wr77] *P. Wright.* Covering 2-dimensional polyhedra by 3-manifolds spines // Topology. 1977. 16. P. 435-439.