Числа Каталана. Формулы.

Число Каталана с номером n будем обозначать c_n.

1. Докажите рекуррентную формулу для чисел Каталана: $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$.

2. а) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку (n,n), состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по линиям сетки, и имеющих точки выше прямой $y = x$, равно количеству путей, составленных из таких же отрезков и идущих из точки $(0,0)$ в точку $(n-1, n+1)$. Найдите это количество.

б) Докажите, что $c_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$

3. Рассмотрим треугольник Каталана:

1								
	1							
1		1						
	2		1					
2		3		1				
	5		4		1			
5		9		5		1		
	14		14		6		1	
14		28		20		7		1

На крайней диагонали стоят единицы. Каждое число является суммой стоящих над ним сверху слева и сверху справа, за исключением чисел на левой вертикали, которые равны стоящим над ними сверху справа. Докажите, что на левой вертикали стоят числа Каталана.

Определение: n-ным числом Родригеса называется количество способов расставить скобки и символы переменных в формуле, содержащей n знаков операций. (Скобки расставляются таким образом, чтобы человеку, читающему формулу не приходилось заботиться о приоритетах, т.е. каждая скобка ставится вокруг одной операции, аргументами которой являются скобочная структура или переменная).

Например, второе число Родригеса равно 12:

$(ab)c$ $a(bc)$ $(ac)b$ $a(cb)$ $(ba)c$ $b(ac)$ $(bc)a$ $b(ca)$ $(ca)b$ $c(ab)$ $(cb)a$ $c(ba)$

4. а) Докажите рекуррентную формулу для чисел Родригеса: $R_n = (4n-2)R_{n-1}$.

б) Выведите из пункта а) явную формулу для чисел Родригеса.

в) Выведите из пункта б) явную формулу для чисел Каталана.

5. На окружности стоят m целых чисел a_1, a_2, …, a_m такие, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 1$. Назовем число a_i хорошим, если $a_i > 0$, $a_i + a_{i+1} > 0$, …, $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i-1} > 0$.

а) Докажите, что хороших чисел не более одного.

б) Докажите лемму Рени: хорошее число ровно одно.

в) Выведите из пункта б) явную формулу для чисел Каталана.

Для самостоятельного решения

6. а) Докажите, что среди получающихся друг из друга циклическим сдвигом строчек, состоящих из n знаков операций и $n+1$ символа переменой, ровно одна является обратной польской записью некоторой формулы.

б) Выведите из пункта а) явную формулу для чисел Каталана.

7. а) Докажите, что количество наборов n целых чисел от 0 до n, сумма которых делится на $n+1$ равно c_n. (наборы, отличающиеся перестановками чисел, считаются одинаковыми).

б) Докажите, что количество путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, площадь под которыми делится на $n+1$, равно c_n.

Обязательная задача: 1