Инвариант Дена.

Упр0. Можно ли круг разрезать на конечное число частей по отрезкам и дугам окружностей, и составить из них квадрат?

Опр1. Два многогранника называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на конечное число многогранных частей, из которых можно составить другой.

3-я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА: верно ли, что любые два многогранника равного объема равносоставлены?

Опр2. Пусть у многогранника M (а также многогранной поверхности, например, нечто типа тора) n ребер, $l_1, \ldots, l_n$ — длины этих ребер, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — величины соответствующих двугранных углов (измеренные в радианах). Будем рассматривать набор пар $(l_1, \varphi_1), \ldots, (l_n, \varphi_n)$. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – некоторая *аддитивная* функция, для которой $f(\pi) = 0$. Величина

$$F(M) = \sum l_i f(\varphi_i)$$

называется *инвариантом Дена* многогранника.

Вопрос. Надо ли доказывать корректность этого определения?

Замечание. Будем рассматривать также наборы, полученные не из многогранников (скажем, пустой набор, или наборы, где есть отрицательные l_i).

Опр3. С набором можно проводить в ту или обратную сторону следующие преобразования:

1. пару (l, φ) заменять двумя парами (l', φ), (l'', φ), где $l' + l'' = l$;

2. пару (l, φ) заменять двумя парами (l, φ'), (l, φ''), где $\varphi' + \varphi'' = \varphi$ (последнее равенство по модулю $2\pi k$);

3. выкидывать пары вида $(0, \varphi)$ или $(l, \pi k)$, где k — целое.

Наборы *подобны*, если они получаются друг из друга одним или несколькими из таких преобразований.

Упр1. Найдите наборы, подобные наборам куба и правильного тетраэдра.

Упр2. Если наборы подобны, то их инварианты Дена равны.

Теорема Дена, 1902. а) Если многогранник M составлен из многогранников M_i, то $F(M) = \sum F(M_i)$.

б) Если два многогранника равносоставлены, то их инварианты Дена равны.

Упр3. а) Докажите, что аддитивная функция $\mathbb{Q}$-линейна.

б) Докажите, что из любого набора можно выкидывать пару $(a, \frac{p}{q}\pi)$ с сохранением инварианта Дена.

Упр4. Можно так выбрать функцию f, чтобы инварианты Дена куба и правильного тетраэдра были бы различны. Следовательно, куб и правильный тетраэдр не равносоставлены.

Упр5. Угол $\arccos(\frac{1}{3})$ не соизмерим с π, ибо общеизвестно: если φ соизмерим с π и $\cos\varphi$ — рационален, то $\cos\varphi = 0$, ± 1 или $\pm\frac{1}{2}$. (издевательство: $\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1$)

Теорема Дена-Сидлера, 1965. Если у двух многогранников одинаковы объемы и равны все инварианты Дена, то они равносоставлены.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что параллелепипеды с равными объемами равносоставлены.

2. Рассмотрим тетраэдр, у которого три ребра равны и взаимно перпендикулярны. Докажите, что он не равносоставлен правильному тетраэдру, и не равносоставлен кубу.

3. Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на несколько правильных тетраэдров.