Подсчет числа орбит.

1. а) Сколькими способами можно раскрасить грани куба а) в шесть цветов; б) в три цвета? Все цвета должны присутствовать.

2. Сколько различных ожерелий из 10 бусинок можно составить, если имеется 2 бусинки синего цвета, 3 — зеленого и 5 — красного? а) ожерелья можно вращать, но нельзя переворачивать; б) ожерелья можно и вращать, и переворачивать.

3. Сколько имеется различных раскрасок вершин квадрата не более чем в 2 цвета, если одинаковыми считаются раскраски, получаемые друг из друга поворотами?

4. Посчитайте число раскрасок ожерелья из p (p – простое) бусинок в a цветов (не все цвета обязаны присутствовать), и докажите малую теорему Ферма.

Опр1. Пусть G – некоторый набор преобразований множества X. *Орбита* элемента $x \in X$ относительно G – множество таких элементов $y \in X$, в которые можно перевести x преобразованиями из G.

5. Преобразование $x \to x + a$ на вещественных числах называется сдвигом. Пусть G_1 – совокупность сдвигов на всевозможные положительные числа, G_2 – на всевозможные неотрицательные числа, G_3 – на всевозможные целые числа. Опишите орбиты числа $\sqrt{2}$ относительно G_1, G_2, G_3. В каких случаях все вещественные числа разбились на непересекающиеся орбиты?

Важное упражнение. Какие именно свойства G обеспечивают разбиение на непересекающиеся орбиты?

Вывод. Разумно рассматривать не произвольные множества преобразований, а только те, которые образуют *группу*. Везде в дальнейшем будем это предполагать.

Постановка задачи. Как найти число орбит?

6. Придумайте группы преобразований, орбитами которых были бы:
а) числа, дающие одинаковые остатки по модулю 5;
б) все параллельные между собой прямые на плоскости;
в) все концентрические окружности с фиксированным центром;
г) все правильные 10-угольники с данным центром;
д) лучи, исходящие из данной точки (без нее самой).

Предложение. Если все преобразования из группы G, кроме тождественного, не имеют неподвижных точек, то длина каждой орбиты равна $|G|$, а число орбит равно.....

Мораль. В ситуации, описанной в Предложении, найти число орбит очень легко – так как они одинаковой длины. Но орбиты бывают и разной длины. Очевидно, это случается, когда в группе G есть нетождественные преобразования, имеющие неподвижные точки. Тем самым подсчет числа орбит напрямую связан с изучением неподвижных точек. **Итак, надо изучать неподвижные точки.**

Еще мораль. Элемент a неподвижен относительно преобразования g, если $g(a) = a$. Поэтому неподвижные точки можно изучать **с двух сторон**: «со стороны a» и «со стороны g». Приходим к двум определениям.

Опр2. *Стабилизатор* G_x элемента $x \in X$ – это такое множество преобразований из G, которые переводят x в себя. $|G_x|$ – число элементов в стабилизаторе.

Опр3. $\mathrm{Fix}(g)$ – число неподвижных элементов преобразования g.

7. В задаче 3 найдите стабилизаторы всех элементов и число неподвижных элементов всех преобразований.

8. Докажите, что
а) если $x, y \in X$ лежат в одной орбите, то количество преобразований, переводящих x в y, равно числу преобразований, переводящих x в x. Следовательно, это число не зависит от x и y, и равно $|G_x|$;
б) сумма мощностей стабилизаторов точек одной орбиты равна $|G|$; поэтому длина орбиты точки x равна $|G|/|G_x|$.
в) сумма мощностей стабилизаторов всех точек множества X в $|G|$ раз больше, чем количество орбит;
г) сумма мощностей стабилизаторов всех точек равна сумме мощностей множеств неподвижных элементов всех преобразований из G: $\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма [не] Бернсайда. Пусть G — группа преобразований множества X. Число орбит, на которые множество X разбивается под действием группы G, равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Fix}(g).$$

Замечание. Приложения формулы Бернсайда к решению задач основаны на том, что находить число неподвижных точек преобразования часто бывает легче, чем длины орбит.

9. Посчитайте число раскрасок ожерелья из p (p – простое) бусинок в a цветов (не все цвета обязаны присутствовать), и докажите малую теорему Ферма.

10. а) Если перестановка σ является циклом длины n, а НОД$(k, n) = d$, то перестановка σ^k является произведением d циклов длины n/d.

б) Сколькими способами можно раскрасить стороны правильного n-угольника в a цветов (относительно движений плоскости, сохраняющих ориентацию)?

11. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в не более чем в a цветов (относительно движений пространства, сохраняющих ориентацию)?