Рекурренты - 2

1. Найдите все последовательности $\{a_n\}$, для которых выполняется рекуррентное соотношение: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

2. а) Найдите последовательность $\{a_n\}$, не являющуюся геометрической прогрессией, удовлетворяющую: $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$

б) Найдите последовательность, для которой выполняется рекуррентное соотношение из пункта а), а также $a_0 = 1, a_1 = 4$.

в) Найдите все последовательности, для которых выполняется рекуррентное соотношение из пункта а).

3. Как будет выглядеть формула n-го члена для рекуррентной последовательности k-го порядка, если ее характеристический многочлен имеет действительные (или комплексные) корни $q_1,\ldots,q_m$ с кратностями $t_1, \ldots, t_m$ соответственно?

4. Числовая последовательность $\{a_n\}$ такова, что при всех $m \geq n \geq 0$ выполняется соотношение: $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}$. Найдите a_{2012}, если $a_1 = 1$.

5. Конечная последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям: $a_0 = 20, a_1 = 12, a_{n+2} = a_n - \frac{1}{a_{n+1}}$. Найдите максимальное количество членов последовательности.

6. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 1, a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при всех $n \geq 2$. Докажите,что все члены последовательности – целые числа.

7. Вычислите сумму $S_n = C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - \ldots$

Для самостоятельного решения

8. Каким линейным рекуррентным соотношениям удовлетворяют последовательности:
а) $a_n = n^2$
б) $a_n = n^3$?

9. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ да надо заплатить 2 рубля, за ответ нет – 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число?

Обязательная задача: 2.