# Математический бой обычных групп М9 — М10

1. В турнире по шахматам принимают участие $n$ игроков. На старте турнира все они находятся на первом уровне. Если в любой момент после старта турнира имеется два или более игрока одного уровня, не занятых в партиях, они некоторым образом разбиваются на пары и начинают играть друг с другом так, что остается не более одного участника каждого уровня. Продолжительность партии непостоянна. По завершении партии победитель увеличивает свой уровень на один, а проигравший уменьшает на один (если был на первом уровне, то ничего не меняет). Турнир заканчивается, когда все участники оказываются на разных уровнях. На каком уровне будет находиться победитель в конце турнира?

2. В треугольнике $ABC$ точка $I$ – центр вписанной окружности, точка $O$ – центр описанной окружности. Докажите, что неравенство $\angle AIO \leq 90$ равносильно тому, что $2BC \leq AC + AB$

3. На доске $8 \times 8$ расставлены чёрные и белые ладьи (оба цвета присутствуют) так, что ладьи разных цветов не бьют друг друга. Какое наибольшее количество ладей может стоять на границе доски?

4. На столе лежит треугольник со сторонами 1 метр, 1 метр и 1 сантиметр, в котором находится точечный шарик. Основание треугольника намазывают клеем изнутри, а шарик заставляют катиться по законам физики. Докажите, что до момента прилипания к основанию шарик преодолеет менее двух метров.

5. Докажите, что начиная с некоторого $n$, все делители числа $(n!)^n+1$ будут больше, чем $n+2012$.

6. Дан треугольник $ABC$. Окружность $\Omega$ проходит через точку $A$ и касается прямой $BC$ в точке $L$ – основании биссектрисы $AL$, а также пересекает сторону $AB$ в точке $P$. Отрезко $CP$ вторично пересекает $\Omega$ в точке $Q$. Докажите, что прямая $AQ$ делит отрезок $CL$ пополам.

7. Дан граф, степени всех вершин которого равны 3. Докажите, что можно раскрасить его в два цвета так, чтобы не было нечётных одноцветных циклов.

8. Некоторые клетки доски $n \times n$ заражены инфекцией. Клетка заражается, если хотя бы две соседние по стороне клетки уже заражены. Какое минимальное количество клеток нужно заразить, чтобы в конце концов заразилась вся доска?

9. Докажите для положительных чисел $x$, $y$, $u$, $v$ неравенство

$$\frac{xy + xv + uy + uv}{x + y + u + v} \geq \frac{xy}{x + y} + \frac{uv}{u + v}.$$

10. Последовательность $a_n$ задана рекуррентным соотношением $a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3$. Известно, что $a_0 = 9$. Докажите, что в десятичной записи числа $a_{10}$ присутствует хотя бы 1000 девяток.