Непрерывность

Аксиома полноты множества вещественных чисел: любое непустое ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет точную верхнюю грань.

1. Докажите теорему о вложенных отрезках: если дана последовательность вложеных отрезков $I_1 = [x_1, y_1], I_2 = [x_2, y_2], \ldots, I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, длины которых стремятся к нулю, то их пересечение состоит ровно из одной точки.

2. Докажите, что из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Определение (Гейне). Пределом функции $f(x)$ в точке a называется такое число b, что для любой последовательности $\{a_i\} \to a$, не содержащей членов, равных a, выполнено свойство $f(a_i) \to b$.

Определение (Коши). Пределом функции $f(x)$ в точке a называется такое число b, для которого выполнено условие: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение. Функция называется непрерывной в точке a, если ее предел в точке a равен $f(a)$. Функция называется непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Свойства непрерывных функций: сумма, произведение и частное непрерывных функций непрерывны; многочлены, функция $y = \sin x$ непрерывны; если $f(x)$ непрерывна в точке a, а $g(x)$ непрерывна в точке $f(a)$, то $g(f(x))$ непрерывна в точке a.

3. (Теорема Больцано-Коши) $f(x)$ непрерывная функция на $[a, b]$, $f(a) > 0, f(b) < 0$. Докажите, что $f(x)$ имеет корень на отрезке $[a, b]$.

4. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$. Докажите, что она ограничена на $[a, b]$.

5. (Теорема Вейерштрасса) Непрерывная функция на отрезке достигает на нём максимума и минимума.

6. Докажите, что любой кубический многочлен имеет хотя бы один вещественный корень.

7. Задана непрерывная периодическая функция на $\mathbb{R}$ с периодом $T > 0$. Докажите, что её график имеет горизонтальную хорду длиной $\frac{T}{2}$.

8. Постройте отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеющее а) ни одной; б) ровно одну точку непрерывности.

Обязательная задача — 5.