Полярное преобразование.

Опр. k – окружность с центром O. *Полярой* точки $P \neq O$ относительно окружности k называется прямая p, проходящая через точку P' – образ точки P при инверсии относительно S, и перпендикулярная прямой OP. Точка P называется *полюсом* прямой p относительно S.

Лемма о поляре. Пусть p — поляра P, q — поляра Q. Тогда $P \in q \iff Q \in p$.

Следствие 1. Если $a = \pi(A)$, $b = \pi(B)$, то $AB = \pi(a \cap b)$ (при некоторых ограничениях).

Следствие 2. A, B, C — точки плоскости (не равные O), a, b, c — их поляры. Точки A, B, C лежат на одной прямой $\iff$ прямые a, b, c проходят через одну точку или параллельны.

Сущность подхода. При помощи полярного преобразования доказывают, что
– три точки лежат на одной прямой;
– три прямые пересекаются в одной точке или параллельны;
– две прямые перпендикулярны.

1. I – центр вписанной окружности треугольника ABC, которая касается сторон AB, BC, CA в точках M, N, P. Пусть PN и AB пересекаются в точке K. Докажите, что $CM \perp IK$.

2. В какую теорему перейдет при полярном преобразовании теорема «опирающиеся на одну дугу углы равны»?

Полярное свойство касательных. Через точку $P \neq O$ проведена секущая XY. Тогда касательные к окружности в точках X и Y пересекаются на поляре точки P (или параллельны этой поляре).

Полярное свойство секущих. Через точку $P \neq O$ проведены две секущих, которые пересекают окружность в точках X_1, Y_1 и X_2, Y_2. Тогда прямые X_1X_2 и Y_1Y_2 пересекаются на поляре точки P (или параллельны этой поляре).

3. Есть окружность и непересекающая ее прямая. Точка движется по прямой, и из нее проводятся две касательные. Точки касания соединяются. Докажите, что все построенные отрезки общую точку.

4. Есть окружность и ее центр. Докажите, что то образ точки при инверсии строится одной линейкой.

Для самостоятельного решения

5. В какую теорему при полярном преобразовании относительно описанной окружности перейдет теорема «медианы треугольника пересекаются в одной точке»?

6. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в P, AB и CD – в R, BC и DA – в Q.

Гармонический четырехугольник. Пусть $ABCD$ вписан, и касательные в вершинах A и C пересекаются на прямой BD или параллельны BD. Докажите, что касательные в B и D пересекаются на прямой AC или параллельны AC.

Вписанный четырехугольник. Докажите, что если $ABCD$ вписан в окружность с центром O, то O, P, Q, R – ортоцентрическая четверка точек (*т.Брокара*).

Описанный четырехугольник. Пусть $ABCD$ описан. K, L, M, N – точки касания сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в S, LM и NK – в T. Тогда

а) Q, R, S, T лежат на одной прямой;

б) AC, BD, KM, LN пересекаются в одной точке.

Вписанный или описанный четырехугольник. Пусть $ABCD$ а) вписан в окружность S; б) описан вокруг окружности S. Докажите, что перпендикуляр из центра S на QR, проходит через P.

Вписанный и описанный четырехугольник. Пусть $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Ω с центром O. Тогда

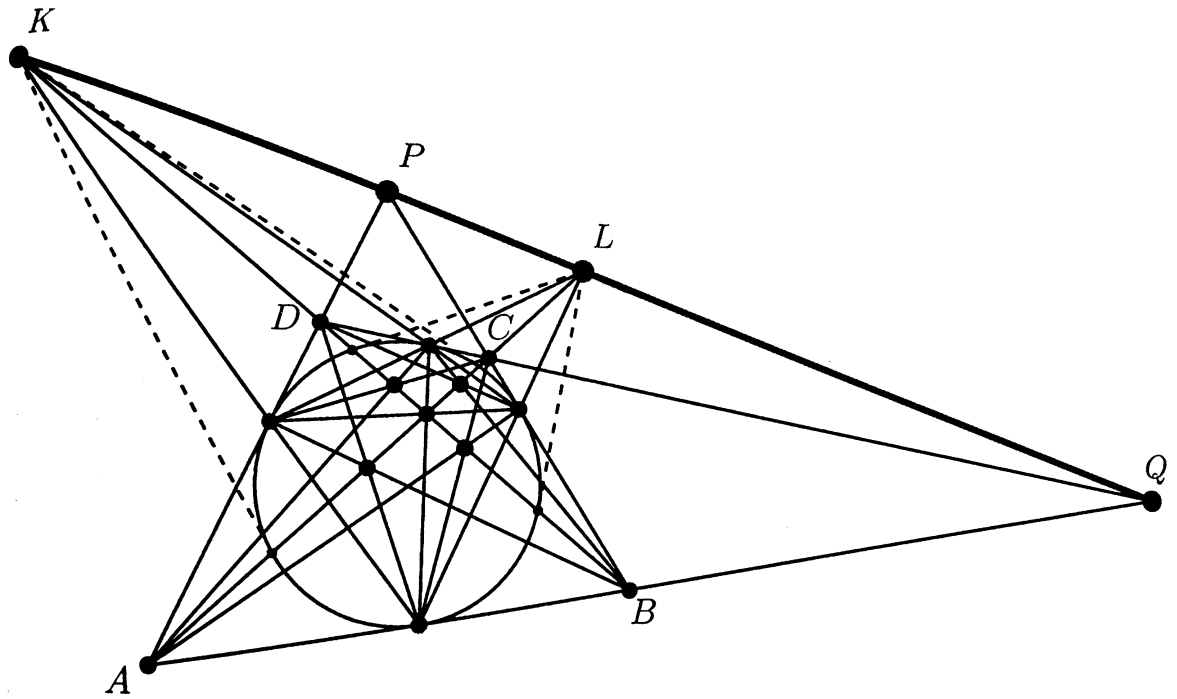
а) O, I, P лежат на одной прямой.

б) При фиксированных ω, Ω и меняющихся $ABCD$ точка P и прямая QR постоянны.

7. Точка O не лежит на сторонах и их продолжениях треугольника ABC. A_1 – точка пересечения прямой BC с перпендикуляром к OA, проходящим через точку O. Аналогично определяются точки B_1, C_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

8. I – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая, проходящая через I перпендикулярно AI, пересекает BC в точке A_1; аналогично определяется точка C_1. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $KI \perp AC$.

9. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC; окружности, описанные около треугольников ABC и A_1B_1C, вторично пересекаются в точке P, Z – точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведённых в точках A и B. Докажите, что прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.

---

10. (Тест Роршаха) Посмотрите на картинку и расскажите, что Вы видите на ней.