Плоские графы и формула Эйлера.

Всюду, где не оговорено иное, рассматриваются графы, возможно, с петлями и кратными ребрами.

1. Докажите, что ребро плоского графа прилегает только к одной грани, тогда и только тогда, когда оно мост.

Опр. В *границе* грани каждое ребро, разделяющее две грани, считается один раз, а каждое ребро, являющееся мостом, считается два раза.

Опр. Граф называется *планарным*, если он изоморфен некоторому плоскому графу.

2. Планарен ли полный граф на пяти вершинах?

Формула Эйлера. Пусть в связном плоском графе V вершин, E ребер и F граней. Тогда $V - E + F = 2$.

Следствие. Пусть у плоского графа k компонент связности, тогда $V - E + F = k + 1$.

Следствие. У разных укладок планарного графа одно и то же число граней.

3. Докажите, что у плоского графа с $\geqslant 3$ вершинами без петель и кратных ребер a) $2E \geqslant 3F$; b) $E \leqslant 3V - 6$.

4. Докажите, что любую карту на плоскости можно правильно раскрасить в 6 цветов.

5. а) Пусть в условиях задачи 3 в графе нет треугольных граней. Как тогда усиливаются оба неравенства?

б) Докажите, что граф $K_{3,3}$ непланарен.

6. Докажите, что каркас выпуклого многогранника является планарным графом.

7. Петя смастерил каркас выпуклого многогранника из ниточек, смял в руке и дал Васе. Сможет ли Вася однозначно восстановить грани, как наборы вершин и ребер исходного многогранника?

8. Докажите, что любую карту на плоскости можно правильно раскрасить в 5 цветов.

Для самостоятельного решения

9. На плоскости расположено n точек. Двое по очереди соединяют пары точек непересекающимися друг с другом и с собой ломаными. Не имеющий хода проигрывает (каждую пару точек можно соединять только одной ломаной). Кто выигрывает при правильной игре?

10. Докажите, что выпуклых правильных многогранников (все грани — правильные и одинаковые, степени всех вершин равны) ровно 5 (с точностью до подобия).

11. На плоскости отмечено $n \geqslant 5$ точек в общем положении. Пару точек A, B назовем интересной, если в круге построенном на AB как на диаметре нет других отмеченных точек. Докажите, что интересных пар не более $3n - 8$, но не менее $n - 1$.