МИНИКУРС ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

Простейшие понятия теории графов. А.Б. Скопенков (7–8)

Данный пункт посвящен базовым определениям и понятиям теории графов. Он не потребует никаких знаний и подходит для первого знакомства с этой теорией.

1. (a) Некоторые пары (из конечного числа) городов соединены (беспосадочными) авиалиниями. Обязательно ли найдутся два города, из которых можно перелететь (за один раз) в одинаковое число городов?

(b) Агент иностранной разведки сообщил, что каждая из 15 бывших республик СССР заключила договор ровно с 3 другими. Можно ли ему доверять?

(c) Выпуклый многоугольник (отличный от треугольника) разбит на треугольники несколькими диагоналями, не пересекающимися нигде, кроме вершин. Обязательно ли найдутся хотя бы два треугольника разбиения, примыкающие к сторонам многоугольника двумя сторонами?

(d) Докажите, что в любой компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(f)* Город N состоит из нескольких площадей (кругов), соединенных непересекающимися дорогами (прямолинейными отрезками). Известно, что существует замкнутый маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз (этот маршрут может проходить по площадям несколько раз). Докажите, что существует *несамопересекающийся* маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз. (Иными словами, в любом нарисованном на плоскости без самопересечений эйлеровом графе существует эйлеров цикл, аппроксимируемый вложениями.)

Графом без петель и кратных ребер называется набор точек, некоторые пары которых соединены линиями, причем одна пара вершин не может быть соединена более чем одной линией. Точки называются *вершинами* графа, а линии – *ребрами*. Линии могут не быть отрезками. Им разрешается пересекаться, но точки пересечения "не считаются", то есть не являются вершинами.

Распространенным примером графа без петель и кратных ребер является граф знакомств. Вершины этого графа соответствуют людям, и две вершины соединены ребром если соответствующие два человека знакомы между собой. В задаче 1a можно рассмотреть граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – авиалиниям.

Графом с петлями и кратными ребрами, или просто *графом*, называется набор точек среди которых некоторые пары, возможно совпадающих, вершин соединены линиями. Ребра, соединяющие вершину саму с сабой, называются петлями, а несколько ребер соединяющих одну и ту же пару вершин – кратными ребрами. Количества вершин и ребер (с учетом кратности и включая петли) обозначаются V и E, соответственно.

Степенью вершины графа называется число выходящих из нее ребер. При этом считается, что петля выходит из вершины дважды.

2. Степени вершин. (a) В любом графе найдутся две вершины одинаковой степени.

(b) Сумма степеней вершин в любом графе четна и равна $2E$.

(c) При каких E и V существует граф с V вершинами и E ребрами, каждая вершина которого имеет степень 3? Такие графы называют *кубичными* или *правильными степени 3*.

Путем в графе называется последовательность вершин, в которой любые две соседние вершины соединены ребром. *Циклом* называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. Путь (цикл) называется *несамопересекающимся*, если он проходит по каждой своей вершине только один раз.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем. Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит несамопересекающихся циклов.

[0]Обновляемую версию см. на www.mccme.ru/circles/oim/materials/graphs.pdf.

3. Деревья. (a) В любом дереве, отличном от точки, найдется вершина степени 1 (даже две).

(b) В любом дереве $V - E = 1$.

(c) В дереве любые две вершины соединены ровно одним несамопересекающимся путем.

(d) В любом связном графе G существует *максимальное дерево*, или *остов*, т.е. дерево, содержащее все вершины графа G. Это дерево может быть не единственно.

Определения. Дадим несколько определений, которые будут использоваться далее.

Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром.

Раскраска вершин графа в несколько цветов называется *правильной*, если любые две вершины, соединенные ребром, всегда окрашены в разные цвета.

Цикл (путь) называется *эйлеровым*, если он проходит через каждое *ребро* графа ровно по одному разу. Граф называется *эйлеровым*, если в нем есть эйлеров цикл.

Цикл (путь) называется *гамильтоновым*, если он проходит через каждую *вершину* графа ровно по одному разу. Граф называется *гамильтоновым*, если в нем есть гамильтонов цикл.

Ориентированный граф – граф, каждое ребро которого является стрелкой от одной вершины ребра к другой. Путь в ориентированном графе – такая последовательность вершин, что в каждую следующую вершину ведет стрелка из предыдущей.

Замечание. Дадим строгое определение графа (хотя при решении задач можно пользоваться нестрогим, данным ранее). *Графом без петель и кратных ребер* называется конечное множество, некоторые двухэлементные подмножества (т.е. неупорядоченные пары несовпадающих элементов) которого выделены. Элементы данного множества называются *вершинами*. Выделенные пары вершин называются *ребрами*. При данном определении каждое ребро соединяет различные вершины (нет петель), и любые две вершины соединены не более чем одним ребром (нет кратных ребер).

Графом с петлями и кратными ребрами, или просто *графом*, называется конечное множество V, в котором выделены некоторые неупорядоченные пары, возможно, совпадающих элементов, и каждой выделенной паре приписано натуральное число – кратность этой пары.

При работе с графами (в их строгом определении) удобно пользоваться их изображениями. Вершины изображаются точками (например, на плоскости или в пространстве). Каждое ребро, соответствующее паре различных элементов изображается ломаной (или кривой), соединяющей соответствующие точки. Каждое ребро, соответствующее паре (A, A) изображается замкнутой ломаной (или кривой), соединяющей эту вершину A саму с собой. На изображении ломаные могут пересекаться, но точки пересечения (кроме двух концов ребра) не являются вершинами. Для простоты будем рассматривать только те рисунки, на которых ребра изображаются ломаными (а не произвольными кривыми). Важно, что граф (в строгом определении) и его изображение — не одно и то же.

Зачетные задачи: все, кроме любых двух пунктов задаче 1.

Пути в графах. Д.А. Пермяков (8–11)

1-я серия (8–9).

Для решения задач этого пункта Вам понадобится только знание основных определений теории графов, которые можно изучить в пункте "Простейшие понятия теории графов".

1. Докажите, что вершины графа можно правильно покрасить в два цвета тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины. Такие графы называются *двудольными*.

2. В графе есть цикл нечетной длины. Докажите, что в нем есть несамопересекающийся цикл нечетной длины.

3. В графе между любыми двумя вершинами существует несамопересекающийся путь четной длины. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует несамопересекающийся путь нечетной длины.

4. В графе есть несамопересекающийся цикл, проходящий через ребра a и b, а также есть несамопересекающийся цикл, проходящий через ребра b и c. Докажите, что есть несамопересекающийся цикл, проходящий через ребра a и c.

5. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые - нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того, как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека все еще не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.

6. *Эйлеровы графы.* Эйлеров цикл (путь) — цикл (путь), проходящий по всем ребрам графа ровно по одному разу.

(a) Докажите, что в связном графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четна.

(b) При каком условии в графе существует эйлеров путь?

(c) При каком условии в *ориентированном* графе (т.е. в котором на ребрах задано направление; двигаться по ребру в пути можно только вдоль направления) существует эйлеров цикл?

7. Математик забыл трехзначный код своего замка́. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если перед этим были набраны другие цифры). Математик набирает одну цифру в секунду. Докажите, что математик сможет открыть замок за

(a) 29 секунд, если в коде использованы только цифры 1, 3 и 7.

(b) 1002 секунды, если в коде использованы все десять цифр.

Зачетные задачи: все, кроме любых 2-х пунктов. Письменно: по указанию преподавателя.

Решения 1-й серии.

1-2. Рассмотрим любую вершину, по которой цикл проходит хотя бы дважды. Можно рассмотреть две части цикла: между первым и вторым прохождениями этой вершины и оставшуюся. Каждая из этих частей является циклом, и одна из них имеет нечетную длину. Уменьшая так длину нечетного цикла, получим цикл, у которого нет точек самопересечения.

1-4. Обозначим через C_1 и C_2 вершины ребра c, через T_{ab} – простой цикл, проходящий через ребра a и b, а через T_{bc} – простой цикл, проходящий через ребра b и c. Пойдем из вершины C_1 по циклу T_{bc} не по ребру c. Первое пересечение с циклом T_{ab} обозначим через C_1'. Аналогично найдем вершину C_2'. Искомый цикл будет состоять из части цикла T_{ab} от C_1' до C_2', содержащей a, пути от C_2' до C_2, ребра c и пути от C_1 до C_1'.

Пусть C_1' – вершина цикла T, что существует несамопересекающийся путь от C_1 до C_1', не проходящий через ребро c, и имеющий минимально возможную длину. Аналогично определим вершину C_2'. Искомый простой цикл будет состоять из части цикла T.

1-6. (a) Пусть в графе есть эйлеров цикл. Рассмотрим произвольную вершину. Эйлеров цикл проходит по всем выходящим из нее ребрам ровно по одному разу. При этом цикл равное число раз входит в эту вершину и выходит из нее. Значит, степень вершины четна.

Пусть теперь в графе степень каждой вершины четна. Рассмотрим в нем цикл T (возможно, из единственной вершины), проходящий по каждому ребру не более одного раза и содержащий максимально возможное число ребер. Предположим, что этот цикл не эйлеров. Выкинем из графа все ребра цикла T. Степень каждой вершины полученного графа будет четной. В силу связности исходного графа, найдется вершина цикла T, из которой в новом графе выходит хотя бы одно ребро. Пойдем по этому ребру. Пока это возможно, будет идти по ребрам нового графа. Так как степень каждой вершины четна, приходя в любую вершину, отличную от исходной, мы сможем из нее выйти. Значит, движение закончится только когда мы вернемся в исходную вершину. Добавим к полученному циклу цикл T и получим цикл, больший чем T. Это противоречит выбору цикла T.

2-я серия (9-10).

1. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу. Поужинав в кафе на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал, и при этом идти только по улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Докажите, что он всегда сможет это сделать.

2. В некотором обществе любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этом обществе все имеют одинаковое число знакомых.

3. Дан граф, степень любой вершины которого не меньше k, где $k \geq 2$. Докажите, что в этом графе найдется простой цикл длины не меньшей, чем $k+1$.

4. Все ребра связного графа раскрашены в 2 цвета. Из каждой вершины выходит поровну ребер обоих цветов. Докажите, что из любой вершины до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра.

5. *Диаметр* связного графа – наибольшее из расстояний между его вершинами. Пусть в связном графе диаметра d минимальная длина цикла $2d+1$. Докажите, что степени всех вершин равны.

6. Дан двусвязный граф, т.е. связный граф, который при удалении любого своего ребра остается связным. Двое игроков по очереди ставят стрелки на ребрах. Проигрывает игрок, после хода которого от какой-то вершины нельзя добраться до какой-нибудь другой, двигаясь только вдоль стрелок и по ребрам без стрелок. Докажите, что при правильной игре обоих соперников партия закончится вничью.

7. (a) Нарисуйте гамильтоновы циклы в графах правильных многогранников.

(b) Никакой граф, гомеоморфный букве θ (т.е. графу $K_{3,2}$), не является гамильтоновым.

(c)* Если из любой вершины графа (без петель и кратных ребер) с V вершинами выходит не менее $V/2$ ребер, то этот граф гамильтонов.

Зачетные задачи: все, кроме любой одной.

Решения 2-й серии.

2-1. Назовем четными те улицы, по которым турист на пути к кофейне прошел четное число раз, остальные – нечетными. На пути к кофейне турист с вокзала выходил на один раз больше чем возвращался, значит по выходящим с вокзала улицам он проходил в сумме нечетное число раз. Следовательно, с вокзала выходит нечетное число нечетных улиц. Аналогично, из кофейни выходит тоже нечетное число нечетных улиц, а из любой другой площади четное число нечетных улиц. Пусть турист идет из кофейни по нечетным улицам как угодно, но проходя каждую улицу не более одного раза. Когда он входит на площадь, отличную от вокзала, остается еще нечетное число неиспользованных нечетных улиц выходящих с этой площади. Значит он всегда сможет с нее выйти. Значит в тот момент, когда туристу некуда идти, он уже находится на вокзале.

2-2. Рассмотрим человека A с максимальным числом знакомых (n). Пусть его знакомые – $B_1, B_2, \ldots, B_n$. У каждой пары B_i и B_j есть общий знакомый A, значит B_i и B_j не знакомы между собой. У B_1 и B_i ($i = 2, 3, \ldots, n$) есть общий знакомый C_i отличный от A. Если C_i и C_j для некоторых $i \neq j$ – один и тот же человек, то у C_i и A есть общие знакомые B_1, B_i и B_j, что невозможно по условию. Значит, у B_1 есть хотя бы n знакомых: $A, C_2, C_3, \ldots, C_n$. В силу максимальности числа n, у B_1 ровно n знакомых. Аналогично, у всех B_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, ровно по n знакомых, откуда, в свою очередь, у всех знакомых с B_i также по n знакомых. Каждый человек знаком либо с A, либо с кем-нибудь из B_i, значит у всех в обществе ровно по n знакомых.

3-я серия (10-11).

Для решения основной задачи этого пункта потребуются некоторые навыки работы с графами. Перед этой серией полезно (но не обязательно) прорешать две предыдущие.

0. В турнире без ничьих участвовало n команд. Каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. Докажите, что можно так занумеровать команды числами $1, ..., n$, чтобы $(i+1)$-ая команда выиграла у i-й (для любого $i = 1, ..., n-1$).

Турнир — ориентированный граф, между любыми двумя вершинами которого есть ровно одно ребро. Ориентированный граф называется *сильносвязным*, если от любой его вершины можно добраться до любой другой, двигаясь по направлению стрелок на ребрах.

1. (Основная) Какое минимальное количество несамопересекающихся циклов длины k может быть в сильносвязном турнире с n вершинами?

Эта задача сложная, к ней не так просто подступиться. Обычно при решении сложной задачи полезно рассмотреть частные случаи, попытаться решить близкие задачи. Это позволяет заметить закономерности, которые можно сформулировать в виде гипотез и затем доказать. Мы не будем подсказывать эти гипотезы, а предлагаем вам самим исследовать эту задачу самим и высказывать ваши предположения. Сформулируйте и докажите какую-нибудь лемму, которая, по вашему мнению, поможет в решении задачи 1. После того, как вы попробовали найти путь к решению самостоятельно, мы предлагаем вам доказать следующие утверждения. Они могут оказаться полезными в решении Задачи 1 и, возможно, помогут довести решение до конца.

2. (a) Турнир сильносвязен тогда и только тогда, когда в нем есть несамопересекающийся цикл, идущий по направлениям стрелок на ребрах и проходящий по всем вершинам графа.

(b) В сильносвязном турнире через любую вершину проходит несамопересекающийся цикл (идущий по направлениям стрелок на ребрах) любой длины от трех до количества вершин турнира.

Теорема Рамсея. Д.А. Пермяков (8–9)

Данный пункт посвящен классической оценке чисел Рамсея (задачи 7.b и 9.b). Для изучения этого пункта понадобится только знание определения графа. См. подробнее *Гарднер М., Рамсеевская теория графов, "Квант"(1988) N4.*

1. Докажите, что среди пяти человек может не найтись ни трех попарно знакомых, ни трех попарно незнакомых.

2. Среди любых шести человек найдется либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

3. Среди любых десяти человек найдется либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

4. Среди любых девяти человек найдется либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

5. Среди любых 20 человек найдется либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

Назовем *числом Рамсея* минимальное такое число $r(m, n)$, что среди любых $r(m, n)$ человек найдется либо m попарно знакомых, либо n попарно незнакомых.

6. Найдите (a) $r(3, 3)$. (b) $r(4, 3)$.

7. Докажите, что (a)$r(m, n) \leq r(m-1, n) + r(m, n-1)$. (b) $r(m, n) \leq C_{m+n}^{m}$.

8. На плоскости отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: красным, желтым или зеленым. Докажите, что найдутся 3 точки в вершинах одноцветного треугольника.

Обозначим через $r(m_1, \ldots, m_k)$ минимальное такое число, что если ребра полного графа с $r(m_1, \ldots, m_k)$ вершинами раскрашены в k цветов, то для некоторого i найдется m_i вершин, попарно соединенных ребрами цвета i.

9. (a) Докажите, что

$$r(m_1, m_2, \ldots, m_k) \leq r(m_1 - 1, m_2, ..., m_k) + r(m_1, m_2 - 1, \ldots, m_k) + \cdots + r(m_1, m_2, \ldots, m_k - 1).$$

(b) Найдите оценку на $r(m_1, m_2, ..., m_k)$, аналогичную задаче 7.b.

Зачетные задачи: 1, 5-8.

Решения.

2. Рассмотрим произвольного человека. Пусть у него есть хотя бы 3 знакомых. Если среди них есть пара знакомых между собой, то они вместе с рассмотренным человеком образуют тройку попарно знакомых. Иначе они сами образуют тройку попарно незнакомых.

Пусть теперь у рассмотренного человека среди оставшихся 5 человек нет трех знакомых. Тогда у него найдется 3 незнакомых. Если среди них есть пара незнакомых между собой, то они вместе с рассмотренным человеком образуют тройку попарно незнакомых. Иначе они сами образуют тройку попарно знакомых.

3. Рассмотрим произвольного человека. У него найдется либо 6 знакомых, либо 4 незнакомых. Пусть найдется 4 незнакомых. Если среди них есть пара незнакомых между собой, то они вместе с рассмотренным человеком образуют тройку попарно незнакомых. Иначе они сами образуют четверку попарно знакомых.

Пусть теперь у рассмотренного человека найдется 6 знакомых. Согласно задаче 1, среди них найдется либо трое попарно незнакомых, либо трое попарно знакомых, образующих с рассмотренным человеком четверку попарно знакомых.

4. Если у некоторого человека найдется 6 знакомых или 4 незнакомых, то мы найдем нужную группу людей аналогично задаче 2. Единственный плохой случай, когда у всех девяти человек ровно по 5 знакомых. Тогда количество пар знакомых людей равняется $\frac{9 \cdot 5}{2} = 22.5$, то есть не целое число, что невозможно.

Раскраски графов. Д.А. Пермяков (8–10)

Данный пункт посвящен нахождению наименьшего количества цветов, в которые можно правильно раскрасить вершины графов. Для решения задач этого пункта полезно иметь некоторые навыки работы с графами, например, прорешать пункт "Пути в графах".

1-я серия (8–9).

Напомним, что раскраска графа (т.е. раскраска всех вершин графа) называется *правильной* если любые две вершины, соединенные ребром, окрашены в разный цвет.

1. (a) Докажите, что граф двудолен (т.е. его можно правильно раскрасить в 2 цвета) тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.

(b) В нарисованном на плоскости без самопересечений графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда грани можно правильно раскрасить в 2 цвета.

2. Все ребра связного графа раскрашены в два цвета. Из каждой вершины выходит поровну ребер обоих цветов. Докажите, что из любой вершины до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра.

3. (a) В графе степени всех вершин не превосходят d. Докажите, что его можно правильно раскрасить в $d + 1$ цвет.

(b) В связном графе степени всех вершин не превосходят d, и есть вершина степени меньше d. Докажите, что его можно правильно раскрасить в d цветов.

(c) В связном графе степени всех вершин не превосходят d, и есть вершина, после удаления которой граф перестает быть связным. Докажите, что исходный граф можно правильно раскрасить в d цветов.

4. Вершины некоторого графа нельзя правильным образом раскрасить в менее, чем k цветов. Докажите, что для любой правильной раскраски вершин этого графа в k цветов существует путь, в котором встречается ровно по одной вершине каждого цвета.

5. В ориентированном графе из каждой вершины выходит не более d ребер. Докажите, что его вершины можно правильно раскрасить в $2d + 1$ цвет.

6. В графе максимальный несамопересекающийся путь проходит через l вершин. Докажите, что граф можно правильно раскрасить в l цветов.

Зачетные задачи: все, кроме любого одного пункта.

Решения 1-я серии.

3. (a) Будем красить вершины как попало и в произвольном порядке. На цвет каждой очередной вершины имеется не более d запретов, поэтому мы сможем ее окрасить.

(b) Докажем индукцией по количеству вершин. Удалим из графа вершину степени меньше d со всеми выходящими из нее ребрами. Оставшийся граф можно правильно раскрасить по предположению индукции. Вернем удаленную вершину. На ее цвет меньше чем d запретов, поэтому мы сможем ее окрасить.

4. Все вершины цвета $k-1$, не соединенные ребром с цветом k, перекрасим в цвет k. После этого все вершины цвета $k-2$, которые можно, перекрасим в цвет $k-1$. Аналогично перекрасим вершины цветов $k-3, \ldots, 2, 1$. Согласно условию, в полученной раскраске найдется вершина цвета 1. Мы ее не перекрасили, значит есть соседняя с ней вершина цвета 2. Мы не перекрасили вершину цвета 2, значит есть соседняя с ней вершина цвета 3. Аналогично найдутся вершины цветов $3, 4, \ldots, k$, что каждая следующая соседняя с предыдущей. Эти вершины имели те же цвета в исходной раскраске графа (до перекрашиваний) в силу правильности исходной раскраски. Значит, мы нашли требуемый путь.

6. Сразу следует из задачи 4.

2-я серия (9–10).

1. В графе максимальный нечетный несамопересекающийся цикл имеет длину l. Докажите, что граф можно правильно раскрасить в $l+1$ цвет.

2. (a) В связном графе степень каждой вершины не превосходит 3. Его можно правильно раскрасить в 3 цвета, чтобы для некоторой вершины среди ее соседей не встречалось хотя бы второго цвета. Добавили одну вершину и выходящие из нее ребра так, что по-прежнему степени всех вершин не превосходят 3. Докажите, что полученный граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

(b) В связном графе степень каждой вершины не превосходит 3. Его можно правильно раскрасить в 3 цвета, но при любой правильной раскраске у каждой вершины найдется соседняя каждого из двух оставшихся цветов. Добавили одну вершину и выходящие из нее ребра так, что по-прежнему степени всех вершин не превосходят 3 и полученный граф отличен от полного четырехвершинника. Докажите, что полученный граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

(c) **Теорема Брукса.** В графе степень каждой вершины не превосходит $d \geq 3$ и нет полного подграфа с $d+1$ вершиной. Докажите, что его можно правильно раскрасить в d цветов.

3. Степень любой вершины графа не превосходит d. Натуральные числа $d_1, \ldots, d_k$ таковы, что $d_1 + d_2 + \cdots + d_k = d + 1 - k$. Докажите, что вершины можно разбить на k групп, что любая вершина $i-$ой группы соединена не более, чем с d_i вершинами своей группы.

4. В выпуклом многоугольнике провели несколько диагоналей, не пересекающихся между собой во внутренних точках Докажите, что полученный плоский граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

5. Трем смышленым девочкам Ире, Тане и Юле выдали по копии одного и того же графа. Юля и Таня раскрасили свои графы правильно, то есть так покрасили все вершины, что концы каждого ребра - разного цвета. Юля использовала меньше цветов, чем Таня, зато у Тани в каждый цвет покрашены минимум две вершины. Докажите, что Ира может правильно раскрасить свой граф так, чтобы использовать цветов не больше чем у Юли, и покрасить в каждый цвет не меньше двух вершин.

6. Пусть G — граф без петель и кратных ребер. Если степень каждой вершины не превосходит d, то ребра графа можно раскрасить в d цветов так, чтобы ребра, имеющие общий конец, были окрашены в разные цвета.

7. *Теорема Уитни.* Число $P_G(n)$ правильных раскрасок графа G с V занумерованными вершинами в n цветов есть многочлен от n степени V.

Зачетные задачи: все, кроме любого одного пункта.

Подсчеты в графах. Д.А. Пермяков (9–11)

Для решения задач этого пункта нужно не изучать устройство графа, а посчитать количество некоторых объектов в нем: ребер, треугольников, определенных вершин и т.п. Потребуется только знание определения графа. Но если возникнут затруднения, можно сначала прорешать пункт "Теория Рамсея", содержащий более простые задачи по близкой теме.

1. Назовем человека малообщительным, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека чудаком, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.

2. На вечеринку пришли 10 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно $2, 3, 4, \ldots, 9$ знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

3. В круговом турнире участвовало 2007 команд и не было ничьих. Найдите максимальное возможное количество троек команд, что первая команда выиграла у второй, вторая у третьей, а третья у первой.

4. В каждой из трех школ учится по n человек. Любой ученик имеет в сумме ровно $n+1$ знакомых учеников из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы все трое выбранных учеников были знакомы друг с другом.

5. (a) В графе для любых двух смежных вершин есть ровно одна вершина, смежная с ними обеими. Может ли в этом графе быть ровно 100 ребер?

(b) В графе для любых двух смежных вершин есть две вершины, смежные с ними обеими. Может ли в этом графе быть ровно 100 ребер?

6. В графе 2007 вершин и степень каждой вершины является степенью двойки. Володя посчитал для каждой вершины количество выходящих из нее путей, проходящих не более чем по двум ребрам, а затем просуммировал полученные результаты по всем вершинам. У него получилось 100000. Докажите, что Володя ошибся.

7. На предприятии трудятся 50000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчиненных равна 7. В понедельник каждый работник предприятия издает приказ и выдает копию этого приказа каждому своему непосредственному подчиненному (если такие есть). Далее, каждый день работник берет все полученные им в предыдущие дни приказы и либо раздает их копии всем своим непосредственным подчиненным, либо, если таковых у него нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по предприятию не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников.

8. *Теорема Турана.* (a) Пусть в некоторой компании среди любых трех человек найдутся два друга. Обязательно ли эту компанию можно разбить на две группы так, чтобы любые два человека из одной группы были друзьями?

(b) Найти наибольшее возможное количество ребер в графе с n вершинами, если известно, что среди любых трех его вершин есть две, не соединенные ребром.

(c)* То же для "четырех его вершин".

Зачетные задачи: все, кроме любых трех пунктов.

Решения.

1. Малообщительных, не являющихся чудаками, будем называть "просто малообщительными", а чудаков не являющихся малообщительными – "просто чудаками". Малообщительные чудаки не могут быть знакомы с просто чудаками, значит просто чудаки знакомы только

с просто малообщительными. Каждый просто чудак знаком с хотя бы 10 просто малообщительными, а каждый малообщительный не более чем с 9 просто чудаками. Пусть между просто чудаками и просто малообщительными всего n знакомств. Тогда просто чудаков не более $\frac{n}{10}$, а просто малообщительных не менее $\frac{n}{9}$. Получаем, что просто чудаков не больше чем просто малообщительных, а значит всего чудаков не больше чем всего малообщительных.

2. Нетрудно проверить, что если все пришедшие, кроме двух человек A и B, были знакомы между собой, то в конце должны остаться все кроме A и B, т.е. 8 человек. Докажем что не могло остаться 9 человек. Ясно, что человек A, имевший изначально меньше всего знакомых (k), в некоторый момент уйдет. Если больше никто не ушел, то все остальные (кроме A) имели больше k знакомых до ухода A и меньше $k+1$ после его ухода. Но тогда A должен быть знаком со всеми остальными, т.е. $k = 9$, что противоречит строгой минимальности k.

Задачи по комбинаторной теории графов. А.Б. Скопенков (9–11)

1. *Компоненты связности.* (a) В некотором царстве имеется столица, город Дальний и несколько других городов. Некоторые пары городов соединены дорогами (дороги могут пересекаться). Из столицы выходит 21 дорога, из города Дальнего 1 дорога, а из остальных городов по 20 дорог. Обязательно ли из столицы можно проехать в Дальний (возможно, с пересадками)?

(b) В городе нет ни мостов, ни туннелей, ни тупиков. Все перекрестки имеют крестообразную форму и образованы пересечением ровно двух улиц. Совершая инспекционную поездку по городу, губернатор на каждом перекрестке поворачивал либо направо, либо налево. Через некоторое время шофер губернатора заметил, что они едут по дороге, по которой уже проезжали. Докажите, что они едут в ту же сторону, что и в первый раз.

(c)* Два альпиниста стоят на уровне моря на противоположных сторонах горного хребта (плоской ломаной с конечным числом звеньев), расположенного целиком над уровнем моря. Докажите, что они смогут встретиться, оставаясь в процессе движения все время на одной высоте над уровнем моря.

2. (a) *Лемма о паросочетаниях.* Пусть есть несколько (конечное число) юношей и девушек, причем каждый юноша знаком с некоторым (возможно с нулевым) числом девушек. Доказать, что всех юношей можно женить на (попарно различных) девушках, если и только если для любого множества наших юношей число девушек знакомых хотя бы с одним из них не меньше числа этих юношей.

(b) *Теорема Холла.* Пусть X — непустое конечное множество, а $X_1, \dots, X_n$ — его подмножества. Доказать, что в каждом из них можно выбрать по элементу $x_i \in X_i$ так, чтобы все x_i были различны если и только если для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ объединение любых k из этих подмножеств имеет не менее чем k элементов.

3. (a) В Думе 450 депутатов, каждый из которых ударил одного из других. Докажите, что среди них можно выбрать 150 депутатов, среди которых никто никого не бил.

(b) На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, голосует за себя (если он является кандидатом) и за всех тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается *хорошим*, если в нем правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и *нехорошим* в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется *нехорошим*.

Задачи по топологической теории графов. А.Б. Скопенков и И.Н. Шнурников (9–11)

Используемы здесь определение плоского графа, его грани, гомеоморфизма и формула Эйлера напомнены в начале заметки "Вокруг критерия Куратовского планарности графов".

1. (a) Докажите формулу Эйлера $V - E + F = 2$ для плоского связного графа с ребрами-отрезками (V, E и F — число вершин, ребер и граней, соответственно).

(b) Найдите аналог формулы Эйлера для несвязного плоского графа с k компонентами связности.

2. *Применения формулы Эйлера.* (a) K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

(b) На плоскости отмечено n точек. Разрешается соединять некоторые две из них ломаной, не проходящей через другие точки. Два игрока по очереди соединяют ломаной какие-то две еще не соединенные точки. При этом требуется, чтобы эти ломаные не самопересекались и не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от n)?

(c)* Выпуклых правильных многогранников (все грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон, степени всех вершин равны) ровно 5 (с точностью до изоморфизма их графов).

Указание к (a), (b) и (c): если не получается, то решайте следующие пункты.

(d) Для любого плоского связного графа без петель и кратных ребер, имеющего более двух вершин, $2E \geq 3F$ и $E \leq 3V - 6$.

(e) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.

(f) В любом выпуклом многограннике есть либо треугольная грань, либо вершина степени 3.

(g) Если каждая вершина плоского связного графа имеет степень d, а в границе каждой грани ровно k ребер, то $d \leq 5$ и $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}$.

(h) В любом планарном графе с хотя бы четырьмя вершинами найдется хотя бы четыре вершины степени не более пяти.

3. Раскраска граней плоского графа в несколько цветов называется *правильной*, если любые две грани, имеющие общее ребро, окрашены в разные цвета.

(a) Грани эйлерова плоского графа можно правильно раскрасить в 2 цвета.

(b) Грани гамильтонова плоского графа можно правильно раскрасить в 4 цвета.

(c) Вершины (или грани) любого плоского графа можно правильно раскрасить в 5 цветов. Напомним, что раскраска вершин графа называется *правильной*, если любые две соседние вершины окрашены в разные цвета.

4. *Гомологии и когомологии графов.* (a) В дереве нет непустых подграфов без изолированных вершин, у которых степень каждой вершины четна.

(b) Для данного графа обозначим через a число его подграфов без изолированных вершин, у которых степень каждой вершины четна. Тогда a – степень двойки. Выразите a через количества V вершин, E ребер и C компонент сязности графа.

(c) На ребрах дерева стоят знаки $+$ и $-$. Разрешается менять знаки на всех ребрах, выходящих из одной вершины. Тогда из любого узора можно получить любой другой.

(d) Пусть b – наибольшее количество узоров из $+$ и $-$ на ребрах данного графа, ни один из которых нельзя получить из другого описанными выше операциями. Тогда b — степень двойки. Выразите b через V, E и C.

(e)* Операция *стягивания ребра* (отличного от петли) удаляет из графа это ребро и заменяет вершины A и B этого ребра на одну вершину C, а все ребра, выходящие из вершин A и B в некоторые вершины заменяет на ребра, выходящие из вершины C в те же вершины. Например, если граф – простой цикл с четырьмя вершинами, то при стягивании любого его ребра получится простой цикл с тремя вершинами. Докажите, что a и b инвариантны при стягивании ребра, и выведите отсюда, что $a = b$.

6. *Изотопии в пространстве.* (a) Любой узел $S^1 \subset \mathbf{R^3}$ можно непрерывно и без самопересечений продеформировать в узел, лежащий в "книжке" с тремя листами $T \times I \subset \mathbf{R^3}$.

(b) Любой граф (или даже поверхность с краем) $N \subset \mathbf{R^3}$ можно непрерывно и без самопересечений продеформировать в граф, лежащий в "книжке" с тремя листами $T \times I \subset \mathbf{R^3}$.

7. В плоском графе с треугольными гранями выкинули вершину вместе с выходящими из нее ребрами.

(a) Верно ли, что получившаяся грань ограничена простым циклом?

(b) Верно ли, что если выкинуть еще одну вершину, то все грани опять будут ограничены простыми циклами?

(c) Пусть в полученном графе степень каждой вершины не менее 3. Верно ли, что любую вершину нового графа можно удалить и получить граф, все грани которого будут ограничены простыми циклами?

8. (a) Дан невыпуклый многоугольник с непрозрачными сторонами. Назовем его *ядром* множество его внутренних точек, из которых видны все вершины многоугольника. Докажите, что многоугольник с непустым ядром можно разрезать прямой на два многоугольника с непустыми ядрами.

(b) *Теорема Фари.* Плоский граф можно нарисовать на плоскости без самопересечений так, что все ребра будут отрезками.

(c) Любой связный граф с g ребрами можно так нарисовать внутри правильного $2g$-угольника, диаметрально противоположные стороны которого склеены, что некоторые ребра являются отрезками, а остальные ребра являются объединениями двух непересекающихся отрезков, у каждого из которых один конец — вершина графа, а другой конец лежит на стороне $2g$-угольника.

Зачетные задачи: 1ab, 2bdef, 3ab, 4b, 5a, 7a, 8a.

Указания.

2. (a) Приведем доказательство непланарности графа K_5, основанное на формуле Эйлера. Пусть граф K_5 нарисован на плоскости без самопересечений. Тогда по формуле Эйлера $5 - 10 + F = 2$. Значит, $F = 7$. Нарисуем около каждого ребра графа K_5, нарисованного на плоскости, стрелку вправо и стрелку влево. Тогда число стрелок равно $2E = 20$. Но поскольку граница каждой грани состоит не менее чем из трех ребер, то число стрелок не меньше $3F = 21 > 20$. Противоречие. Основываясь на этой идее, можно доказать непланарность графа $K_{3,3}$.

(d) Нарисуем около каждого ребра графа стрелку вправо и стрелку влево. Тогда число стрелок равно $2E$. Поскольку граница каждой грани состоит не менее, чем из трех ребер, то $3F \leq 2E$. По формуле Эйлера $V - E + F = 2$. Значит, $6 = 3(V - E + F) \leq 3V - E$, откуда $E \leq 3V - 6$.

(e) Если степень каждой вершины ≥ 6, то $2E \geq 6V$. А это противоречит предыдущему пункту.

(f) Допустим, что в некотором многограннике нет вершины степени 3 и нет треугольной грани. Т.к. это многогранник, то степень каждой вершины не менее 4. Значит, $2E \geq 4V$. Т.к. нет треугольных граней, то каждая грань содержит не менее, чем 4 ребра. Значит, $2E \geq 4F$. Следовательно $2 = V - E + F \leq 0$. Противоречие.

Теорема Менгера (А.Б. Скопенков) (10-11)

В этом листе графы могут иметь петли и кратные ребра.

1. Из каждого связного графа можно удалить вершину (вместе со всеми выходящими из нее ребрами) так, что он останется связным.

2. Пусть граф G остается связным после удаления любой вершины.

(a) *Частный случай (вершинной) теоремы Менгера.* Любые две различные вершины в G, не соединенные ребром, лежат на некотором несамопересекающемся цикле в G (т.е. их можно соединить двумя несамопересекающимися путями, непересекающимися нигде, кроме их концов).

(b) Верно ли, что для любого пути P в графе G, имеющем не менее трех вершин, найдется другой путь в G с теми же концами, не пересекающийся с P нигде, кроме концов?

3. *Частный случай реберной теоремы Менгера.* В графе есть хотя бы одно ребро и при удалении любого ребра найдется путь между вершинами a и b. Докажите, что в этом графе найдутся два пути между вершинами a и b, не имеющих общих ребер.

4. Пусть граф G, отличный от треугольника, остается связным после удаления любой вершины. (Такие графы называются *двусвязными.*) Докажите, что для любого ребра e графа G либо $G - e$ двусвязен, либо G/e двусвязен.

5. (a) *Теорема Уитни.* Граф остается связным после удаления любой $k-1$ вершины тогда и только тогда, когда любые две его вершины можно соединить k путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.

(b) *Теорема Менгера.* Если вершины a и b графа G, не соединенные ребром, остаются в одной компоненте связности после удаления любых $k-1$ других вершин, то a и b можно соединить k путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.

Указание. Следующая задача является подсказкой.

(c) Пусть G — минимальный по числу ребер контрпример к теореме Менгера (b) для $k = 3$. Докажите, что вершины a и b оказываются в разных компонентах после удаления некоторых трех вершин x, y, z, две из которых соединены ребром.

6.* Вершины A и B графа назовем *эквивалентными*, если существует такая последовательность вершин $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями без общих промежуточных вершин. Докажите, что любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями без общих ребер. [Решившему приз.]

7. (a) Докажите, что для любых двух вершин выпуклого многогранника существуют три непересекающиеся (нигде, кроме этих вершин) пути по его ребрам из одной вершины в другую. (Такие графы называют *трехсвязными.*)

(b) Пусть G — трехсвязный граф с ребром xy. Докажите, что G/xy трехсвязен тогда и только тогда, когда $G - x - y$ двусвязен.

Указания.

2a, 3. Рассмотрите несамопересекающийся цикл, проходящий через первую вершину и ближайший (по ребрам) ко второй вершине.

5c. Если любое ребро графа G содержит a или b, то утверждение очевидно. Иначе обозначим через e ребро графа G, не содержащее ни a, ни b. Так как в G нет трех $a-b$ путей, то в G/e нет трех $(a/e) - (b/e)$ путей. Ввиду минимальности графа G граф G/e содержит две вершины, разделяющие a/e и b/e. Среди них есть вершина e/e, ибо в G нет двух вершин, разделяющих a и b. Значит, прообразы в G этих двух вершин являются искомыми тремя вершинами.

5b для $k = 3$. Используем вершины x, y, z из 5c. Обозначим через G_a граф, состоящий из

- компоненты A связности графа $G - \{x, y, z\}$,
- вершин x, y, z и ребер, соединяющих их с некоторой вершиной из A,
- новой вершины b' и ребер $b'x$, $b'y$ и $b'z$.

Вершины a и b' графа G_a остаются в одной компоненте связности после удаления любых двух вершин графа G_a. Так как степень вершины b в графе G не менее 3, то в графе G_a меньше ребер, чем в графе G. Значит, в G_a есть три пути из a в b', пересекающиеся только в концах.

Аналогично определяем граф G_b и в нем три пути из a' в b, пересекающиеся только в концах. Построенные шесть путей дают в G три пути из a в b, пересекающиеся только в концах.

Доказательство теоремы Менгера. Докажем теорему для $k = 3$; для произвольного k доказательство аналогично. Назовем *тройкой $a - b$ путей* тройку путей из a в b, любые два из которых пересекаются только в концах.

Пусть G — минимальный по числу ребер контрпример к теореме Менгера (для $k = 3$). Тогда *вершины a и b оказываются в разных компонентах после удаления некоторых трех вершин x, y, z, две из которых соединены ребром.*

(Действительно, если любое ребро графа G содержит a или b, то это утверждение очевидно. Иначе обозначим через e ребро графа G, не содержащее ни a, ни b. Обозначим через

G/e граф, полученный из G стягиванием ребра e. Так как в G нет тройки $a-b$ путей, то в G/e нет тройки $(a/e)-(b/e)$ путей. Ввиду минимальности графа G граф G/e содержит две вершины, разделяющие a/e и b/e. Среди них есть вершина e/e, ибо в G нет двух вершин, разделяющих a и b. Значит, прообразы в G этих двух вершин являются искомыми тремя вершинами.)

Обозначим через G_a граф, состоящий из

- компоненты A связности графа $G-\{x,y,z\}$ содержащей вершину a,
- вершин x,y,z и ребер, соединяющих их с вершинами из A,
- новой вершины b' и ребер $b'x$, $b'y$ и $b'z$.

Вершины a и b' графа G_a остаются в одной компоненте связности после удаления любых двух вершин графа G_a. Так как степень вершины b в графе G не менее 3, то в графе G_a меньше ребер, чем в графе G. Значит, в G_a есть тройка $a-b'$ путей.

Аналогично определяем граф G_b и находим в нем тройку $a'-b$ путей. Построенные шесть путей дают тройку $a-b$ путей в G. QED

Степенны́е последовательности. В.А. Волков, М.Н. Вялый и А.Б. Скопенков (10-11)

Мы используем экспоненциальную запись невозрастающих целочисленных последовательностей: a^k означает, что k последовательных членов последовательности равны a.

1. Существует ли граф, последовательность степеней вершин которого есть (15^{77})?

2. Даны целые положительные числа $n, d_1, \dots, d_n$.

(a) При каких условиях существует граф с n вершинами (возможно, имеющий петли и кратные ребра), из которых выходит $d_1, \dots, d_n$ ребер, соответственно?

(b) То же, если граф не может иметь кратных ребер (но, возможно, имеет петли).

(c) То же, если граф не может иметь петель (но, возможно, имеет кратные ребра).

(d)* То же, если граф не может иметь ни петель, ни кратных ребер.

Основной вопрос состоит в том, чтобы определить, какие последовательности являются *степенными*, то есть представляют последовательность степеней вершин некоторого графа *без петель и кратных ребер* (задача 2d). В задачах 3-13 под графом понимается граф без петель и кратных ребер.

Невозрастающую последовательность из n положительных целых чисел будем называть *правильной*, если первый ее член не превосходит $n-1$, а сумма всех членов четна.

3. Докажите, что степенная последовательность является правильной.

4. *Дерево* — связный граф без циклов. Докажите, что последовательность из n положительных целых чисел является последовательностью степеней вершин некоторого дерева тогда и только тогда, когда сумма ее членов равна $2(n-1)$.

5. Являются ли степенными последовательности

(a) $(4^3, 1^6)$, (b) $(6^4, 2^3)$, (c) $(5^3, 3^3)$, (d) $(18^{10}, 12^3, 6^8)$, (e) $(15^8, 10^6, 3^4)$?

6. Докажите, что если $0<k<n$ и kn четно, то существует граф на n вершинах, степени которых равны k.

7. Докажите, что для степенной последовательности $d_1, \dots, d_n$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i) \quad \text{для любого} \quad 1 \le k \le n-1.$$

8. Пусть a,b,c,d — различные вершины графа, причем (ab), (cd) — ребра, а $(ac),(bd)$ — не ребра. Назовем *обменом* преобразование графа, состоящее в удалении ребер $(ab),(cd)$ и добавлении ребер $(ac),(bd)$.

Пусть G_1, G_2 — два графа с одинаковыми последовательностями степеней $d_1 \ge d_2 \ge \dots \ge d_n$. Докажите, что обменами можно перевести граф G_1 в граф G_2.

9. Приведите пример правильной последовательности из n чисел, не являющейся степенной, для всех членов которой выполняются неравенства $n/2004 \geq d_i \geq 2004$.

10. Докажите, что правильная последовательность из n чисел, в которой $d_i \leq \sqrt{n}/2$ для любого i, — степенная.

11. Пусть последовательность $d_1, d_2, \ldots, d_n$ правильная и

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min(k, d_j),$$

для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Пусть не все d_i равны. Обозначим $t = \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$. Определим новую последовательность

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad \text{формулой} \quad c_i := \begin{cases} d_i, & i \neq t, n, \\ d_i - 1, & i = t, n. \end{cases}$$

Докажите, что если последовательность

(a) c степенная, то и d степенная. (b) d правильная, то и c правильная.

12. В обозначениях предыдущей задачи докажите неравенства

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}$$

(a) при $k \geq t$;
(b) при $d_k \leq k-1 \leq t-2$;
(c) при $d_k = k \leq t-1$;
(d) при $d_k \geq k+1 \leq t$.

13. Докажите, что невозрастающая последовательность является степенной тогда и только тогда, когда сумма ее членов четна и выполняются неравенства из задачи 7.

14. (abcd*) То же, что в задаче 2, для *связных* графов.

Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы внутренности ребер (то есть ребра без их концов) не пересекались и не самопересекались. Подробнее см. [Ha, Pr04, Sk05].

15. (abcd*) То же, что в задаче 2, для *планарных* графов.

16. (abcd*) То же, что в задаче 2, для *связных планарных* графов.

Ответы и указания.

Обозначим $e := (d_1 + \cdots + d_n)/2$.

2. Ответы: (a,b) e целое. (c) e целое и $d_i \leq e$ для любого i. (d) См. задачи 7 и 14.

2.c. Теорема. *Граф без петель (но, возможно, с кратными ребрами и, возможно, не связный) с n вершинами степеней $d_1, d_2, ..., d_n \geq 0$ существует тогда и только тогда, когда $e := (d_1 + \cdots + d_n)/2$ целое и $d_i \leq e$ для любого i.*

Доказательство (А. Рухович). Необходимость целочисленности e вытекает из того, что e равно числу ребер в графе. Второе условие необходимо, поскольку в графе нет петель, а значит степень каждой вершины не больше суммы степеней остальных вершин.

Докажем достаточность индукцией по e. База индукции: утверждение для $e = 0$ очевидно. Докажем шаг индукции. Пусть утверждение для $e < k$. Докажем, что оно верно и для $e = k \geq 1$. Из $k \geq 1$ и условия $d_i \leq e$ следует, что найдутся хотя бы две вершины ненулевой степени. Можно считать, что $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$. Рассмотрим набор $d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, ..., d_n$. Условия теоремы для него выполнены, поскольку сумма степеней вершин уменьшилась на 2, а степень каждой вершины понизилась не более, чем на 1. Поэтому можно воспользоваться предположением индукции: существует граф для набора $d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, ..., d_n$. В этом графе соединим ребром вершины 1 и 2. Поскольку эти вершины различны, то петель не появилось. Следовательно, новый граф не содержит петель. Ясно, что набор степеней его вершин — $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$. QED

4. Используйте индукцию с откидыванием висячей вершины.

5. (a,c) да. (b,d,e) нет.

6. Расположите вершины графа в вершинах правильного n-угольника. Соедините ребрами вершины, расстояние между которыми по окружности не превосходит $[k/2]$. Для четного k построение графа закончено. Для нечетного k число n четно, поэтому можно и нужно добавить большие диагонали.

7. Оцените сверху количество ребер, выходящих из первых k вершин.

11. (a) Если хотим добавить ребро AB, а оно уже есть, то возьмем вершину C, не соединенную с A. А потом возьмем вершину D, соединенную с C, но не с B.

Доказательство С.А. Чоудама теоремы о степенных последовательностях (решение задач 12, 13). Докажем, что если последовательность $d_1, d_2, \ldots, d_n$ *неотрицательных* чисел правильная и

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min(k, d_j),$$

для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то существует граф со степенями $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Доказательство ведем индукцией по сумме элементов последовательности $\sum d_i$. Случай, когда все d_i равны, рассмотрен в задаче 6. Пусть теперь не все d_i равны. Можно считать, что $d_n > 0$. Обозначим $t = \min\{i : d_i > d_{i+1}\}$. Определим новую последовательность

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad \text{формулой} \quad c_i := \begin{cases} d_i, & i \ne t, n, \\ d_i - 1, & i = t, n. \end{cases}$$

Обозначим $\quad S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i, \quad S'_k = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i$. По задаче 11 достаточно доказать неравенства

$$(*) \qquad S'_k \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}.$$

При $k \ge t$

$$S'_k = S_k - 1 \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} - 1 \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}.$$

Пусть теперь $k \le t-1$. Тогда $S'_k = S_k = kd_k$.

Для $d_k \le k-1$ неравенство (*) тривиально.

Для $d_k = k$

$$S'_k - k(k-1) = k^2 - k(k-1) = k \overset{(3)}{=} d_{k+1} \overset{(4)}{\le} d_{k+1} + \left(\sum_{i=k+2}^{n} d_i - 2\right) \overset{(5)}{=} \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\}, \quad \text{где}$$

• третье равенство выполнено, поскольку $k \le t-1$;

• четвертое неравенство очевидно, если $k+2 < n$; если же $k+2 = n$, то $d = ((n-2)^{(n-1)}, d_n)$ и $d_n \ge 2$ в силу четности суммы $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.

• пятое равенство выполнено, поскольку $\min\{k, c_i\} = c_i$ при $i \ge k+1$.

Случай $d_k \ge k+1$. Если $d_n \ge k+1$, то $\min\{k, d_i\} = \min\{k, c_i\} = k$ при $i \ge k+1$ и неравенство (*) следует из аналогичного для S_k.

Пусть теперь $d_n \le k$. Имеем

$$\min\{k, c_i\} = \min\{k, d_i\} \quad \text{при} \quad k+1 \le i < n \quad \text{и} \quad \min\{k, c_n\} = \min\{k, d_n\} - 1.$$

В нашем случае $S'_k = S_k$, поэтому достаточно показать, что

$$(**) \qquad S_k \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, c_i\} = k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} - 1.$$

Учитывая, что $d_{k+1} = d_k \geq k+1$, получаем

$$S_{k+1} = (k+1)d_k = \frac{k+1}{k} S_k \overset{(3)}{\leq} (k+1)(k-1) + \frac{k+1}{k} \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\} =$$

$$= (k+1)(k-1) + (k+1) + \frac{k+1}{k} \sum_{i=k+2}^{n} \min\{k, d_i\} \overset{(5)}{>} (k+1)k + \sum_{i=k+2}^{n} \min\{k+1, d_i\} \geq S_{k+1}.$$

Неравенство (5) выполнено, так как при всех $k+2 \leq i < n$ имеем нестрогое неравенство и при $i = n$ строгое. Значит, в (3) неравенство строгое. Отсюда вытекает (**).

Комментарий. Можно также доказать, что если для правильной последовательности $d_1, \ldots, d_n$ выполняются неравенства из задачи 7, то последовательность, полученная из $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_{n-1}, d_n$ расположением чисел по возрастанию, правильная и для нее выполняются аналогичные неравенства.

14. То же, что в соответствующих пунктах задачи 2, с добавлением условия $e \geq n-1$.

14.c. *Связный граф без петель (но, возможно, с кратными ребрами) с n вершинами степеней $d_1, d_2, ..., d_n \geq 1$ существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

(1) $e := (d_1 + d_2 + ... + d_n)/2$ целое;

(2) $d_i \leq e$ для любого i;

(3) $n - 1 \leq e$.

Доказательство (А. Рухович). Для доказательства необходимости обозначим через e количество ребер в графе. Условия (1) и (2) необходимы по задаче 2.c. Необходимость условия (3) легко проверяется.

Для доказательства достаточности рассмотрим граф, полученный по задаче 2.c. Обозначим через c количество компонент связности этого графа.

Докажем, что если $c > 1$, то можно уменьшить количество компонент связности, не меняя степеней вершин. Ввиду условия (3) $e \geq n - 1 > n - c$. Поэтому хотя бы в одной компоненте связности есть цикл. Тогда можно взять ребро a_1a_2 этого цикла и ребро b_1b_2 из другой компоненты связности. Удалим эти ребра, и вместо них добавим ребра a_1b_1 и a_2b_2 (ср. с задачей 8). Тогда степени вершин сохранятся, а количество компонент связности уменьшится на 1.

Такими операциями можно понизить количество компонент связности до 1. Получится связный граф без петель с заданными степенями вершин. QED

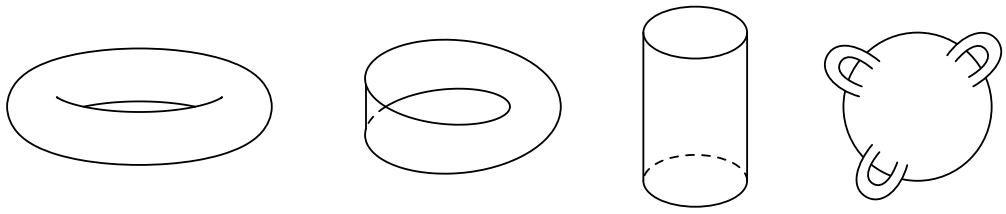
15, 16. (a,b,c) То же, что в 14. (d) Не знаем.

Задачи для исследования, простые и сложные.

1.* Можно ли опустить какие-нибудь неравенства из задачи 6 предыдущей части так, чтобы достаточность (т.е. утверждение задачи 14) осталась верной? Если да, попробуйте найти минимальный набор неравенств.

2.* Если слить две степенные последовательности, то обязательно получится степенная последовательность. А какие степенные последовательности обладают тем свойством, что их нельзя разбить на две степенные последовательности?

Тор, лист Мебиуса и сфера с ручками изображены на рис.



Тор, лист Мебиуса, цилиндр и сфера с ручками

Пусть на торе (или на сфере с ручками, или на диске с листами Мебиуса) нарисован без самопересечений граф. Назовем *гранью* замкнутую область на торе, ограниченную ребрами этого графа.

Реализация графа на торе (или на сфере с ручками) называется *клеточной*, если каждая грань разбивается любой ломаной с концами на границе этой грани (т.е. топологически эквивалентна замкнутому диску на плоскости).

3. (abcd*) То же, что в задаче 2 предыдущей части, для связных *клеточно реализуемых на торе* графов.

4. (abcd*) То же, что в задаче 2 предыдущей части, для связных *клеточно реализуемых на сфере с g ручками* графов (g дано вместе с n и $d_1, \dots, d_n$).

Для получения необходимых условий в задачах 3 и 4 нужен следующий факт.

Формула Эйлера для сферы с g ручками. *Пусть на сфере с g ручками нарисован без самопересечений клеточно связный граф с V вершинами и E ребрами. Пусть F — число граней. Тогда $V - E + F = 2 - 2g$.*

Для решения следующих задач 5 и 6 полезен аналог этого факта для диска с m листами Мебиуса.

Более подробно о сферах с ручками и дисках с листами Мебиуса см. [BE82, Pr95, Sk07].

Реализация графа на листе Мебиуса (или на диске с листами Мебиуса, нарисованном на лекции) называется *клеточной*, если одна грань топологически эквивалентна кольцу, а каждая из оставшихся остальных — замкнутому диску на плоскости.

5. (abcd) То же, что в задаче 2 предыдущей части, для связных *клеточно реализуемых на листе Мебиуса* графов.

6. (abcd) То же, что в задаче 2 предыдущей части, для связных *клеточно реализуемых на диске с m листами Мебиуса* графов (m дано вместе с n и $d_1, \dots, d_n$).

7-11. (abcd) То же, что в задачах 3-6, если требуется построить граф с n гранями, в границе которых $d_1, \dots, d_n$ ребер, соответственно.

12. То же, что выше, для *ориентируемых* графов.

Пункты (a,b) задач 3-6 известны [Mo]. По-видимому, пункты (c) этих задач неизвестны Пункты (d) этих задач неизвестны.

Ответы.

4. (a) e целое и $e \geq n - 1 + 2g$ [Mo]. (b) e целое, $e \geq \max d_i$ и $e \geq n - 1 + 2g$ [Mo].

6. (a) e целое и $e \geq n - 1 + m$ [Mo]. (b) e целое, $e \geq \max d_i$ и $e \geq n - 1 + m$ [Mo].

Литература

[BE82] В. Г. Болтянский и В. А. Ефремович, Наглядная топология, Наука, Москва, 1982.

[Ha] F. Harary, Graph theory.

[Mo] B. Mohar, 2-cell embeddings with prescribed face lengths and genus, Ann. Combin. 14 (2010) 525-532.

http://www.fmf.uni-lj.si/ mohar/Reprints/Inprint/BM06_AC_Mohar_2cellEmbeddings.pdf

[Pr95] В. В. Прасолов, Наглядная топология, МЦНМО, Москва, 1995.

[Pr04] В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, МЦНМО, Москва, 2004.

[Sk05] А. Скопенков, Вокруг критерия Куратовского планарности графов, Мат. Просвещение, 9 (2005), 116–128 и 10 (2006), 276–277. http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html. Расширенная обновляемая версия: http://arxiv.org/abs/0802.3820

[Sk08] А. Скопенков, Алгебраическая топология с элементарной точки зрения, МЦНМО, Москва, в печати, http://arxiv.org/abs/0808.1395

Изоморфизмы графов. И.Н. Шнурников (10–11)

Используемое здесь определение изоморфизма графов напомнено в начале заметки "Вокруг критерия Куратовского планарности графов".

1. (a) Сколько существует изоморфизмов $K_5 \to K_5$? А $K_{3,3} \to K_{3,3}$?

(b) Изоморфны ли графы G_2 и G_3, вершины каждого из которых занумерованы числами от 1 до 7, вершины графа G_k соединены ребром, если либо $i - j \equiv 1 \mod 7$, либо $i - j \equiv k \mod 7$.

(c) Постройте граф с наименьшим числом $n > 1$ вершин такой, что никакая не тождественная перестановка его вершин не является изоморфизмом.

2. *Симметричные графы.* Мы будем работать со связными ориентированными графами, из каждой вершины графа выходят два ребра и в каждую входят два ребра. Такой граф назовем симметричным, если для любой пары ребер a, b существует перестановка вершин графа (а если есть кратные ребра, то и перестановка их между собой), при которой все ребра графа переходят в ребра этого же графа, а ребро a переходит в ребро b (направления всех ребрах сохраняются). При этом никакое ребро не должно остаться на месте.

(a) Для каждого натурального n придумайте два (неизоморфных) симметричных графа с n вершинами каждый.

(b) Придумайте симметричные графы с 6, 12 и 30 вершинами (не изоморфные графам из (a)).

(c) Найдите все симметричные графы, которые имеют хотя бы одну петлю или хотя бы одно кратное ребро.

(d) Найдите все симметричные графы с p-вершинами (p — простое число).

(e) Найдите все симметричные графы с не более, чем 8 вершинами.

(f) Найдите все симметричные графы, которые можно нарисовать (без самопересечений) на плоскости так, что для каждой вершины входящие ребра чередуются с выходящими.

(g)* Найдите все плоские симметричные графы.

3. У Васи есть несвязный граф. Он всеми возможными способами удалил из этого графа по одной вершине и каждый из полученных графов нарисовал на отдельном листочке бумаге, после чего все листочки отдал Коле. Докажите, что Коля может восстановить исходный граф.

4*. *Нерешенные задачи о вершинной и реберной реконструируемости.*

(a) Пусть G и $\tilde{G}$ — связные графы без петель и кратных ребер с $V \geq 3$ занумерованными вершинами. Для каждого $k \in \{1, \ldots, V\}$ рассмотрим графы $G - k$ и $\tilde{G} - k$, полученные из графов G и $\tilde{G}$ удалением в каждом из них вершины с номером k и всех выходящих из нее ребер. Пусть для всех $k \in \{1, \ldots, V\}$ графы G_k и $\tilde{G}_k$ изоморфны. Верно ли, что графы G и $\tilde{G}$ изоморфны?

(b) Пусть G и $\tilde{G}$ — простые графы с $E \geq 5$ ребрами. Для каждого $k \in \{1, \ldots, E\}$ рассмотрим графы G_k и $\tilde{G}_k$, полученные из графов G и $\tilde{G}$ соответственно путем удаления в каждом из них ребра с номером k. Пусть для всех $k \in \{1, \ldots, E\}$ графы G_k и $\tilde{G}_k$ изоморфны. Верно ли, что графы G и $\tilde{G}$ изоморфны?

Зачетные задачи: 1abc, 2abcdef, 3.

Метод минимального контрпримера и спуск в графах. А.Я. Канель (10-11)

При решении многих задач используется так называемый *метод минимального контрпримера* (разновидность *принципа крайнего*), который заключается в следующем.

Предположим, что надо доказать, что объекта, удовлетворяющего некоторым свойствам, не существует. Предположим противное — тогда найдется (в некотором смысле) *минимальный* контрпример. После чего строят еще "меньший" контрпример и получают противоречие.

Понятие "меньше" подбирается в процессе доказательства. Особенно распространен такой метод решения в задачах на графы. При этом обычно ведется индукция сперва по числу вершин, потом по числу ребер.

Начнем с простейшего примера.

Доказательство теоремы Эйлера о плоских графах (формулировку см. выше). Пусть граф G не удовлетворяет условиям теоремы Эйлера. Рассмотрим ребро графа G и пойдем по ребрам. В этом случае мы либо попадем в висячую вершину V, либо пройдем цикл.

В первом случае уничтожим вершину V и входящее в нее ребро l. При этом количества вершин и ребер уменьшатся на 1, а количество граней не изменится.

Во втором случае уничтожим ребро r из цикла. В этом случае количества граней и ребер уменьшатся на 1, а количество вершин не изменится.

В обоих случаях граф остается связным и мы получаем меньший контрпример. □

Более содержательный пример — знаменитая теорема Дилуорса о частично упорядоченных множествах.

1. Множество A с отношением $\prec$ называется *частично упорядоченным*, если отношение $\prec$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$(1)\quad a \not\prec a, \qquad (2)\quad a \not\prec b \ \text{ либо } \ b \not\prec a \ \text{ и } \qquad (3)\quad \text{если} \quad a \prec b \ \text{ и } \ b \prec c, \quad \text{то} \quad a \prec c.$$

Если $a \prec b$ или $b \prec a$, то элементы a и b называются *сравнимыми*. Если же $a \not\prec b$ и $b \not\prec a$, то они называются *несравнимыми*. *Цепью* называется множество попарно сравнимых элементов, а *антицепью* — попарно несравнимых. *Диаметром* частично упорядоченного множества называется максимальный размер антицепи.

(a) Количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, не меньше его диаметра.

(b) *Теорема Дилуорса.* Количество цепей, на которые разбивается частично упорядоченное множество, совпадает с его диаметром.

2. Докажите теорему Менгера из предыдущего пункта.

3. (Задача зонального этапа Всероссийской олимпиады 1994 г.) В каждый город ведет 3 дороги: красная, синяя и белая. В зависимости от цветов входящих дорог, считая по часовой стрелке, города разделяются на два типа КСБ и КБС. Доказать, что разность количеств городов разных типов делится на 4.

4. (IMO, 2004, Shortlist) С конечным графом разрешается производить следующую операцию: выбрать произвольный цикл длины 4 и выбросить из него произвольное ребро. Дан полный граф из n вершин. Какое минимальное число ребер можно оставить с помощью этой операции?

5. (IMO, 2001, Shortlist) k-клика есть подмножество из k человек попарно знакомых. Известно, что каждые две 3-клики имеют общего члена и нет 5-клик. Докажите, что удалив двух людей можно все 3-клики разрушить.

6. (IMO, 1992, Longlist) Дан граф G с n вершинами, $m < n$. Докажите, что G содержит подмножество из $m + 1$ вершины степени которых отличаются не больше чем на $m - 1$.

7. Доказать, что каждую конечную карту на плоскости можно правильно раскрасить в 5 цветов. (См. необходимые определения выше.)

См. также доказательство теоремы Куратовского.

Указания к задачам.

1. (a) Ясно, что цепь и антицепь могут пересекаться не более чем по одному элементу. Поэтому количество цепей, на которые можно разбить частично упорядоченное множество, не меньше его диаметра.

(b) (*Доказательство теоремы Дилуорса.*) Рассмотрим минимальный контрпример. Пусть C — цепь диаметра D. Тогда каждый элемент множества $M - D$ либо больше некоторого элемента из D, либо строго его меньше. Таким образом, $M - D$ есть несвязное объединение двух частей M' (выше D) и M'' (ниже D).

Если $M' \cup D$ и $M'' \cup D$ разбиваются на d цепей, то и все M разбивается на d цепей (каждая цепь склеивается из верхней и нижней половин).

Если

$$M' \neq \emptyset \quad \text{и} \quad M'' \neq \emptyset, \quad \text{то} \quad \#(M' \cup D) < \#M \quad \text{и} \quad \#(M'' \cup D) < \#M.$$

Мы осуществили спуск. В противном случае имеется не более двух максимальных антицепей: верхняя (если $M' = \emptyset$) и нижняя (если $M'' = \emptyset$). Рассмотрим случай наличия только верхней антицепи (случай наличия только нижней антицепи симметричен).

Пусть имеется единственная максимальная антицепь D и $x \in D$. Тогда $M - \{x\}$ имеет диаметр $d-1$ и в силу минимальномти контрпримера разбивается на $d-1$ цепь $C_1, \ldots, C_{d-1}$. Поэтому $x \cup \{C_i\}_{i=1}^{d-1}$ есть искомое разбиение на d цепей.

Пусть имеются две максимальные антицепи D_1 и D_2. Легко показать, что найдется пара элементов $x \in D_1$ и $y \in D_2$ таких, что $x \prec y$. Тогда диаметр множества $M - \{x, y\}$ строго меньше диаметра M и доказательство завершается аналогично.

Случайные графы. А.М. Райгородский (10–11)

Зафиксируем целое положительное число n, а также $p \in [0,1]$ и $q = 1 - p$. Рассмотрим множество $V = \{1, \ldots, n\}$. *Вероятностью* графа $G = (V, E)$ без петель и кратных ребер назовем $P(G) := p^{|E|} q^{C_n^2 - |E|}$. *Вероятностью* произвольного семейства (или, что то же самое, свойства[1]) графов с множеством вершин V называется сумма вероятностей входящих в него графов.

0. Если Ω — множество всех графов с n вершинами, то $P(\Omega) = 1$.

(Говоря научно, ребра графа выбираются с помощью "схемы испытаний Бернулли", т.е. каждое ребро независимо от остальных имеется в графе с вероятностью $p \in [0,1]$; соответственно, с вероятностью $q = 1 - p$ его нет в графе. В результате возникает *случайный граф*, множество вершин которого фиксировано, а множество ребер случайно. Всякое событие строится из элементарных, как из кирпичиков, и считается произошедшим, коль скоро случайный граф ему — как множеству — принадлежит. Имея понятие случайного графа, можно судить о том, с какой степенью достоверности граф обладает тем или иным свойством. Например, можно определить вероятность связности графа или вероятность того, что граф имеет какое-то хроматическое число, и т.д.)

Любая функция X, определенная на множестве графов, будет называться *случайной величиной*. Например, количество ребер графа - случайная величина. Пусть X принимает k различных значений $y_1, \ldots, y_k$. Тогда *математическим ожиданием* величины X называется ее "взвешенное среднее" $MX = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i P(X^{-1}(y_i))$, где $X^{-1}(y_i)$ – семейство таких графов G, для которых $X(G) = y_i$. Для краткости можно последнюю вероятность можно обозначать $P(X = y_i)$.

1. (a) Докажите *линейность* математического ожидания: $M(c_1X_1 + \cdots + c_sX_s) = c_1MX_1 + \cdots + c_sMX_s$ для любых случайных величин $X_1, \ldots, X_s$ и констант $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$.

(b) Докажите, что если X принимает неотрицательные целые значения, то $P(X = 0) \geq 1 - MX$.

2. Найдите MX для графов G с n вершинами и случайной величины X, равной

(a) числу треугольников в G;

(b) числу циклов длины k в G;

(c) числу полных подграфов на k вершинах (k - *клик*) в G;

(d) числу различных k - вершинных деревьев в G;

(e) числу изолированных k - вершинных деревьев в G;

(f) числу вершин на древесных компонентах G;

(g) числу вершин на циклических компонентах G.

---

[1]Сказать, что для графа выполнено некоторое свойство, это все равно, что отнести граф к множеству графов, указанным свойством обладающих.

Пусть f и g - некоторые функции натурального аргумента n, причем $g(n) \neq 0$ для всех n. Скажем, что $f = o(g)$ (читается "f - о малое от g"), если $\frac{f(n)}{g(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Например $1 = o(\sqrt{n})$ или $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. Пусть P_a и P_b – многочлены степеней a и b соответственно, $a < b$. Докажите, что $P_a = o(P_b)$.

Полезно бывает изучать различные вероятности при $n \to \infty$. Пусть теперь n меняется и величина p_n (вероятность появления ребра случайного графа) зависит от n. (В этом есть глубокий смысл, который мы ниже пронаблюдаем.) Свойство B называется *исключительно достоверным*, если $P(B_n) \to 1$, при $n \to \infty$, где B_n – семейство графов с n вершинами, удовлетворяющих свойству B. Говорят даже, что в таком случае это свойство выполнено *почти наверное*.

4. Докажите, что если $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то в случайном графе почти наверное нет треугольников.

5. Пусть $k \geq 2$ - константа. Докажите, что если $p_n = o\left(n^{-\frac{k}{k-1}}\right)$, то в случайном графе почти наверное нет компонент связности, являющихся деревьями на k вершинах.

6. Докажите, что если $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то случайный граф почти наверное является лесом.

7. Докажите, что если $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то случайный граф почти наверное двудолен.

8. Определим *число независимости* $\alpha(G)$ графа G как размер максимального подмножества вершин в G, которые попарно не соединены ребрами. Пусть $p_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что $P\left(\alpha(G) < 2\log_2 n + 10\log_2\log_2 n\right) \to 1$ при $n \to \infty$.

Хроматическое число $\chi(G)$ графа G – минимальное количество цветов, в которое можно раскрасить вершины графа G правильным образом.

9. Докажите, что если $p_n = \frac{1}{2}$, то хроматическое число случайного графа почти наверное больше, чем $\frac{n}{2\log_2 n} + o\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)$. Более строго: для некоторой функции $f_n = o\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)$ почти наверно выполнено свойство $\chi(G) > \frac{n}{2\log_2 n} + f_n$ (зависящее от n).

10. Докажите, что если $p_n > \frac{3\ln n}{n}$, то почти наверное случайный граф связен.

11*. Пусть $p_n = n^{-\alpha}$, где $\alpha > \frac{5}{6}$. Докажите, что

$$P\left(\forall\, S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} : \chi(G|_S) \leq 3\right) \to 1, \;\; n \to \infty.$$

Здесь $G|_S$ - *порожденный* или *индуцированный* подграф графа $G = (V, E)$, т.е. граф $H = (S, F)$, у которого $e = (x, y) \in F$ тогда и только тогда, когда $x, y \in S$ и $e \in E$. Иными словами, H получается из G удалением всех вершин, не принадлежащих S, вместе со всеми выходящими из них ребрами.

12*. *Граф расстояний* на плоскости – граф, вершины которого являются точками плоскости, и ребрами соединены пары вершин, находящиеся на расстоянии 1. Докажите, что если $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то случайный граф почти наверное может быть реализован как граф расстояний на плоскости, а если $p_n > \frac{1000}{n}$, то почти наверное выполнено обратное свойство.

Зачетные задачи: Все, кроме задач со звездочкой, и еще любых двух.

Решение задачи 0. $P(\Omega) = \sum\limits_{k=0}^{C_n^2} C_{C_n^2}^k p^k (1-p)^{C_n^2 - k} = (p + (1-p))^{C_n^2} = 1.$