Двадцать восьмая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2012 года.

Материалы занятий десятого класса «профи»

Преподаватели

Волков Владислав Владимирович
Пахарев Алексей Анатольевич
Самойлов Леонид Михайлович
Скопенков Аркадий Борисович

Математика - это искусство называть
разные вещи одним и тем же именем.
А. Пуанкаре.

Вступительная олимпиада. 4 июля

1. Дискриминанты трех приведенных квадратных трехчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из трехчленов так, чтобы сумма выбранных корней равнялась сумме оставшихся.

2. На оси Ox расположено 10 отрезков, каждый длины 3. Всегда ли можно сдвинуть синусоиду $y = \sin x$ вдоль оси Ox так, чтобы она пересекла каждый отрезок?

3. Двое играют в крестики-нолики на бесконечной доске. Для победы надо полностью заполнить какой-нибудь квадратик 2×2. Докажите, что у первого игрока нет выигрышной стратегии.

4. Пусть PQRS – выпуклый вписанный четырехугольник, в котором $\angle PSR = 90^\circ$, H и K – основания перпендикуляров из точки Q на отрезки PR и PS. Докажите, что прямая HK делит отрезок QS пополам.

5. Существует ли такой многочлен $f(x)$ степени 2012 с целыми коэффициентами, что для каждого целого числа n числа $f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \ldots$ попарно взаимно просты?

Идея линейного отображения. 4 июля

Эзотерическое знание. Посвященные знают, что $C_{p^n}^k \vdots p$, p – простое $(0 < k < p^n)$.

1. По кругу стоят 128 целых чисел. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 128.

а) Сначала рассмотрите случай единицы и 127 нулей. Что получится через 7 ходов? Докажите, что через несколько ходов все числа станут четными.

б) Определим понятие *суммы* двух расстановок чисел по кругу. Пусть P – наша операция замены. Докажите, что P(от суммы)=сумме P-шек.

2. (Интерполяционный многочлен Лагранжа.) Докажите что для любого набора из $n+1$ точки с разными абсциссами найдётся единственный многочлен степени не выше n, который в этих точках принимает заданные значения.

Указание. Сравним с предыдущей задачей. Что здесь является аналогами 1) операции; 2) суммы расстановок; 3) умножения расстановки на число; 4) специфических расстановок?

3. По окружности расставлены p целых чисел (p – простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2012}.

4. (Китайская теорема об остатках.) а) Даны попарно взаимно простые числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и произвольные $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что существует такое число A, что $A \equiv a_i \pmod{m_i}$.

б) Число A определено однозначно по модулю $m_1 \ldots m_n$.

Для многочлена $P(x)$ рассмотрим последовательность сумм

$$S_n = S_n(P) = P(1) + \cdots + P(n).$$

Интересно найти явную формулу для $P(x)$ (особенно для $P(x) = x^k$).

Опр. *Дискретной производной (или разностным многочленом)* многочлена $f(x)$ называется многочлен $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Как связаны степени многочлена и его разностного многочлена?

5. Докажите, что если $\deg P(x) = k$, то $S_n(P)$ есть многочлен степени $k+1$ (то есть $S_n = g(n)$ для некоторого многочлена $g(x)$ степени $k+1$). Для примера вычислите (а не докажите по индукции!) $1^3 + \dots + n^3$.

6. а) **Определение.** *Икс в убывающей степени* $m \geqslant 0$: $x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)$.

б) Докажите, что $(x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$;

в) Найдите $0^{\underline{m}} + 1^{\underline{m}} + 2^{\underline{m}} + 3^{\underline{m}} + \dots + (n-1)^{\underline{m}}$. Есть ли причина тут сумме начинаться с 0, а не с 1?

г) Решите еще раз задачу 5.

Для самостоятельного решения

1. Есть вещественные числа $a_1, \dots, a_n$, среди них ровно два одинаковых. Напишите выражение от $a_1, \dots, a_n$, значение которого равно этим одинаковым числам.

2. По окружности расставлены p^n целых чисел (p – простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2012}, если за ход из каждого числа вычитается его

а) l-ый сосед слева, l фиксировано;

б) l-ый сосед слева, l может меняться от хода к ходу!!!

3. На планете каждая страна граничит не более, чем с семью другими. Страны хотят перераспределить свой золотой запас так, чтобы у любых двух граничащих стран количество золота различалось бы не более, чем в 13 раз. Докажите, что это перераспределение можно провести так, чтобы каждая страна лишилась не более, чем половины своего золота.

Теорема Эрдёша-Гинзбурга-Зива. 5 июля

---

1. а) Докажите, что среди n целых чисел найдется несколько, сумма которых делится на n.

б) Докажите, что существуют такие $2n-2$ целых числа, что среди них не найдется ровно n чисел, сумма которых делится на n.

Теорема (Эрдёш, Гинзбург, Зив, 1961). Среди любых $2n-1$ целого числа найдется ровно n чисел, сумма которых делится на n.

2. Докажите, что теорема ЭГЗ верна для $n = a$ и для $n = b$, то она верна и для $n = ab$.

Итак, достаточно доказать теорему только для простого числа p.

Доказательство I (идейное, суммирование через МТФ). Чем отличается число, кратное p, от числа, не кратного p? Тем, что a^{p-1} сравнимо с 0 или с 1. То есть нужно привести к противоречию предположение $(a_{i_1} + \dots + a_{i_p})^{p-1} \equiv 1$ для всех $\{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, 2, \dots, 2p-1\}$.

Опр. Если $A, B \subseteq M$, то $A+B = \{a+b | a \in A, b \in B\}$, $2A = \{2a | a \in A\}$ и т.п. Здесь M – множество, на котором определена операция «+», «·2» и т.п.

Доказательство II (мощное, через теорему Коши-Дэвенпорта). Выведите из нижеследующей теоремы ее аналог для суммы нескольких подмножеств, а из этого – теорему ЭГЗ.

Теорема (Коши (1813), Дэвенпорт(1935)). Если p – простое, и $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$ – непустые подмножества, то $|A+B| \geqslant \min\{p, |A| + |B| - 1\}$.

Пример. По модулю простого p уравнение $x^2 + y^2 \equiv k$ имеет решение для каждого целого k.

Схема доказательства. 1) Случай $|A|+|B|>p$ достаточно прост.

2) Пусть выполнено $|A+B|<|A|+|B|-1$. Идея состоит в том, что заменять «контрпримерную» пару множеств (A,B) на пару (A',B'), с уменьшением чего-нибудь (чтобы вести индукцию по этому чему-нибудь).

3) Заведем операцию *сдвига (по кругу)* множества, то есть замены A на $A+\{c\}$. Докажите, что если $|A|\geqslant 2$, то можно сдвинуть A так, чтобы A и B пересекались, но при этом $A\not\subset B$ (трюк Коши).

4) $(A,B)\to(A\cap B, A\cup B)$.

Доказательство III (поправки и подкрутки). Рассмотрим произвольную сумму $a_1+\dots+a_p\equiv r \pmod p$, и кажому числу a_i сопоставим в пару отсутствующее в этой сумме число b_i. Теперь будем подправлять сумму, заменяя некоторые a_i на b_i. То есть прибавлять к обеим частям по $(b_{i_1}-a_{i_1})+\dots+(b_{i_s}-a_{i_s})$. Такими поправками мы хотим превратить r в 0, но s уже не фиксировано!

3. Есть $p-1$ ненулевое число по модулю p. Тогда можно сложить несколько из них так, чтобы получить любое ненулевое по модулю p число.

Доказательство IV (безыдейная демонстрация силы правильной индукции). Пусть $k\leqslant p$. Допустим, что среди целых чисел $x_1,\dots,x_{2k-1}$ нет $k+1$ числа, сравнимых по модулю p. Тогда из этих чисел можно составить такие k сумм из k слагаемых каждая, что все суммы будут различными по модулю p.

Для самостоятельного решения

4. Докажите, что уравнение $ax^3+by^3+cz^3\equiv d \pmod p$ при $a,b,c\not\equiv 0 \pmod p$ имеет решение.

5. Абелева группа A *не имеет кручения*, если из условия $na=a+a+\dots+a=0$ следует, что $a=0$ (например, $\mathbb{Z}_3$ или группа поворотов относительно точки имеют кручение, а $\mathbb{Z}$ – нет. В частности, A бесконечна). Докажите, что если группа A не имеет кручения, то для любых конечных $B,C\subseteq A$ выполнено $|B+C|\geqslant|B|+|C|-1$.

6. Имеется n чисел, взаимно простых с n. Докажите, что любой остаток по модулю n равен сумме некоторых из этих чисел.

Плоские графы и формула Эйлера. 5 июля

Всюду, где не оговорено иное, рассматриваются графы, возможно, с петлями и кратными ребрами.

1. Докажите, что ребро плоского графа прилегает только к одной грани, тогда и только тогда, когда оно мост.

Опр. В *границе* грани каждое ребро, разделяющее две грани, считается один раз, а каждое ребро, являющееся мостом, считается два раза.

Опр. Граф называется *планарным*, если он изоморфен некоторому плоскому графу.

2. Планарен ли полный граф на пяти вершинах?

Формула Эйлера. Пусть в связном плоском графе V вершин, E ребер и F граней. Тогда $V-E+F=2$.

Следствие. Пусть у плоского графа k компонент связности, тогда $V-E+F=k+1$.

Следствие. У разных укладок планарного графа одно и то же число граней.

3. Докажите, что у плоского графа с $\geqslant 3$ вершинами без петель и кратных ребер a) $2E\geqslant 3F$; b) $E\leqslant 3V-6$.

4. Докажите, что любую карту на плоскости можно правильно раскрасить в 6 цветов.

5. а) Пусть в условиях задачи 3 в графе нет треугольных граней. Как тогда усиливаются оба неравенства?

б) Докажите, что граф $K_{3,3}$ непланарен.

6. Докажите, что каркас выпуклого многогранника является планарным графом.

7. Петя смастерил каркас выпуклого многогранника из ниточек, смял в руке и дал Васе. Сможет ли Вася однозначно восстановить грани, как наборы вершин и ребер исходного многогранника?

8. Докажите, что любую карту на плоскости можно правильно раскрасить в 5 цветов.

Для самостоятельного решения

9. На плоскости расположено n точек. Двое по очереди соединяют пары точек непересекающимися друг с другом и с собой ломаными. Не имеющий хода проигрывает (каждую пару точек можно соединять только одной ломаной). Кто выигрывает при правильной игре?

10. Докажите, что выпуклых правильных многогранников (все грани — правильные и одинаковые, степени всех вершин равны) ровно 5 (с точностью до подобия).

11. На плоскости отмечено $n \geqslant 5$ точек в общем положении. Пару точек A, B назовем интересной, если в круге построенном на AB как на диаметре нет других отмеченных точек. Докажите, что интересных пар не более $3n - 8$, но не менее $n - 1$.

Проблемы кузнечиководства. 6 июля

1. По окружности длины 1 прыгает кузнечик с иррациональным шагом $\alpha > 0$. Докажите, что рано или поздно кузнечик попадет на любую заранее выбранную дугу.

2. Докажите, что последовательность $\sin n$ *всюду плотна* на отрезке $[-1; 1]$ (сначала дайте строгое определение этого интуитивно понятного термина).

Теорема Кронекера. Если $\alpha > 0$ – иррациональное число, то произвольный интервал (a, b) содержит бесконечно много чисел вида $n\alpha - m$, где m, n – неотрицательные целые числа.

Замечание. Иначе говоря, последовательность $\{n\alpha\}$ всюду плотна на отрезке $[0; 1]$.

3. Докажите, что число вида 2^n может начинаться на любую комбинацию цифр.

4. Докажите, что куб целого числа может начинаться на любую комбинацию цифр.

Для самостоятельного решения

5. В каждой целочисленной точке плоскости посажена тростиночка радиуса ε. Докажите, что они загородили собой весь вид, то есть любой луч $y = kx$ пересекает какую-то тростиночку, кроме центральной.

6. Пусть $f(x) = \sin \alpha x + \sin \beta x$. Докажите, что если числа α и β несоизмеримы, то

а) эта функция принимает значения, сколь угодно близкие к 2;

б) эта функция непериодична.

Язык СЛУ: теория. 6 июля

1. Рассмотрим СЛУ *ступенчатого вида*. Как ее решать? Сколько может быть решений (перечислите все возможности, и докажите, что других нет).

Определение 1. Две СЛУ (от одинакового набора переменных) называются *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Определение 2. Рассмотрим *элементарные преобразования* СЛУ трех типов:

ЭП1) к строке прибавляем другую строку, умноженную на число;

ЭП2) строку умножаем на ненулевое число;

ЭП3) меняем местами две строки.

Упр1. Если одна СЛУ получается из другой путем применения ЭП1-ЭП3, то эти СЛУ эквивалентны.

Теорема 1(метод Гаусса). При помощи ЭП1-ЭП3 СЛУ можно привести к ступенчатому виду.

Упр2. а) Сколько решений может быть у СЛУ?

а) Сколько решений может быть у СЛУ, где переменных больше, чем уравнений?

в) За сколько действий (линейное, квадратичное, экспоненциальное,...) заведомо можно привести СЛУ размера $n \times n$ к ступенчатому виду?

Следующие несложные теоремы *чрезвычайно* важны.

Теорема 2. ОСЛУ, в которой переменных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение.

Теорема 3 (альтернатива Фредгольма). Пусть в СЛУ число уравнений равно числу неизвестных. Тогда имеет место один из двух случаев:

1) СЛУ имеет единственное решение при любом наборе свободных членов;

2) есть наборы свободных членов, при которых СЛУ не имеет решений, и есть наборы свободных переменных, при которых СЛУ имеет бесконечно много решений.

Переформулировка. Если система из n уравнений с n неизвестными имеет единственное решение при *каком-то* наборе свободных членов, то она имеет единственное решение при *любом* наборе свободных членов.

Теорема 4. Если СЛУ с рациональными коэффициентами и свободными членами имеет единственное (вещественное) решение, то это — решение в рациональных числах.

Теорема 5. Если СЛУ с целыми коэффициентами и свободными членами имеет какое-то (вещественное) решение, то она имеет решение в рациональных числах.

Нетривиальный вопрос. Пусть СЛУ разными способами приведена к ступенчатому виду. Совпадает ли число свободных переменных?

Язык СЛУ: задачи. 6 июля

Упражнение. Напишите а) общее решение заданной СЛУ; б) приведите СЛУ к «перевернутому» ступенчатому виду, и напишите другое общее решение.

Игра. Есть ОСЛУ 5×5. Двое по очереди пишут коэффициенты этой ОСЛУ. Докажите, что первый может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

Дискретное уравнение теплопроводности. а) В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно расставить, причем единственным образом, числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому своих соседей (у клетки максимум 4 соседа).

б) Каков физический смысл задачи, как она «решается» по физическим соображениям, почему это решение неверно даже с физической точки зрения?

в) Решите задачу, если у клетки 8 соседей.

г) Обобщите задачу на непрямоугольные таблицы с «дырами» внутри и пространственные таблицы.

д) Как формулируется и решается задача для произвольного связного графа?

е) Решите задачу, если в таблицу расставлены комплексные числа.

10 бананов. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково. Веса бананов: а) вещественные; б) положительные; в) натуральные.

101 корова. Есть 101 корова. Если убрать любую буренку, то оставшихся можно разделить на два равных по весу и численности стада. Докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса а) *целые; б) рациональные; в) действительные; г) комплексные.

10 яблок. У Пети было 10 яблок, вес каждого – вещественное положительное число. Он проделал с ними несколько взвешиваний на чашечных весах без гирь, и каждый раз получал равенство. Докажите, что Петя сможет приписать каждому яблоку цену в *натуральное* число копеек так, чтобы при каждом из проведенных взвешиваний цены чаш были одинаковы.

Зарубки на отрезке. На отрезке $[0, 1]$ отмечены концы, а также конечное число *различных* точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

Чем трансцендентное число отличается от алгебраического? 7 июля

Знаменатели всех рациональных чисел всегда считаем положительными.

А) Линейные приближения.

Теорема Дирихле (1842). Пусть α и $C > 1$ – действительные числа. Тогда существуют такие целые числа p, q, что $1 \leqslant q < C$ и $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{Cq}$.

Б) Квадратичные приближения.

1. а) Пусть α – иррациональное число. Тогда существует бесконечно много таких взаимно простых целых чисел p, q, что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

б) Для рациональных чисел аналогичное утверждение неверно:
существует такое $C > 0$, что при любых p, q, $p \neq q\alpha$ выполняется $|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{Cq}$.

В) Приближения высоких степеней.

2. Докажите, что для любых целых p, q выполняются неравенства

а) $\left|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{4q^2}$;

б) $\left|\sqrt[3]{2} - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{10q^3}$.

Теорема Лиувилля (1844). Пусть α – алгебраическое число степени $n > 1$. Тогда существует такая константа $C(\alpha) > 0$, что для любых целых p, q выполняется $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{C(\alpha)q^n}$.

3. Докажите, что число $\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^6}+\ldots+\frac{1}{10^{n!}}+\ldots$ – трансцендентно.

Для самостоятельного решения

4. Приведите пример трансцендентного числа, в десятичной записи которого нет нулей.

5. Докажите, что в десятичной записи числа $\cos\frac{\pi}{7}$ среди знаков с n-го по $(3n+20)$-й а) есть ненулевые знаки; б) не все знаки одинаковы.

6. Среди положительных чисел a, b, c, d есть два несоизмеримых. Докажите, что функция $\sin ax+\sin bx+\cos cx+\cos dx$ непериодична.

Полярное преобразование. 7 июля

Опр. k – окружность с центром O. *Полярой* точки $P \neq O$ относительно окружности k называется прямая p, проходящая через точку P' – образ точки P при инверсии относительно S, и перпендикулярная прямой OP. Точка P называется *полюсом* прямой p относительно S.

Лемма о поляре. Пусть p — поляра P, q — поляра Q. Тогда $P \in q \Longleftrightarrow Q \in p$.

Следствие 1. Если $a=\pi(A)$, $b=\pi(B)$, то $AB=\pi(a\cap b)$ (при некоторых ограничениях).

Следствие 2. A, B, C — точки плоскости (не равные O), a, b, c — их поляры. Точки A, B, C лежат на одной прямой $\Longleftrightarrow$ прямые a, b, c проходят через одну точку или параллельны.

Сущность подхода. При помощи полярного преобразования доказывают, что
– три точки лежат на одной прямой;
– три прямые пересекаются в одной точке или параллельны;
– две прямые перпендикулярны.

1. I – центр вписанной окружности треугольника ABC, которая касается сторон AB, BC, CA в точках M, N, P. Пусть PN и AB пересекаются в точке K. Докажите, что $CM \perp IK$.

2. В какую теорему перейдет при полярном преобразовании теорема «опирающиеся на одну дугу углы равны»?

Полярное свойство касательных. Через точку $P \neq O$ проведена секущая XY. Тогда касательные к окружности в точках X и Y пересекаются на поляре точки P (или параллельны этой поляре).

Полярное свойство секущих. Через точку $P \neq O$ проведены две секущих, которые пересекают окружность в точках X_1, Y_1 и X_2, Y_2. Тогда прямые X_1X_2 и Y_1Y_2 пересекаются на поляре точки P (или параллельны этой поляре).

3. Есть окружность и непересекающая ее прямая. Точка движется по прямой, и из нее проводятся две касательные. Точки касания соединяются. Докажите, что все построенные отрезки общую точку.

4. Есть окружность и ее центр. Докажите, что то образ точки при инверсии строится одной линейкой.

Для самостоятельного решения

5. В какую теорему при полярном преобразовании относительно описанной окружности перейдет теорема «медианы треугольника пересекаются в одной точке»?

6. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в P, AB и CD – в R, BC и DA – в Q.

Гармонический четырехугольник. Пусть $ABCD$ вписан, и касательные в вершинах A и C пересекаются на прямой BD или параллельны BD. Докажите, что касательные в B и D пересекаются на прямой AC или параллельны AC.

Вписанный четырехугольник. Докажите, что если $ABCD$ вписан в окружность с центром O, то O, P, Q, R – ортоцентрическая четверка точек (*т.Брокара*).

Описанный четырехугольник. Пусть $ABCD$ описан. K, L, M, N – точки касания сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в S, LM и NK – в T. Тогда

а) Q, R, S, T лежат на одной прямой;

б) AC, BD, KM, LN пересекаются в одной точке.

Вписанный или описанный четырехугольник. Пусть $ABCD$ а) вписан в окружность S; б) описан вокруг окружности S. Докажите, что перпендикуляр из центра S на QR, проходит через P.

Вписанный и описанный четырехугольник. Пусть $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Ω с центром O. Тогда

а) O, I, P лежат на одной прямой.

б) При фиксированных ω, Ω и меняющихся $ABCD$ точка P и прямая QR постоянны.

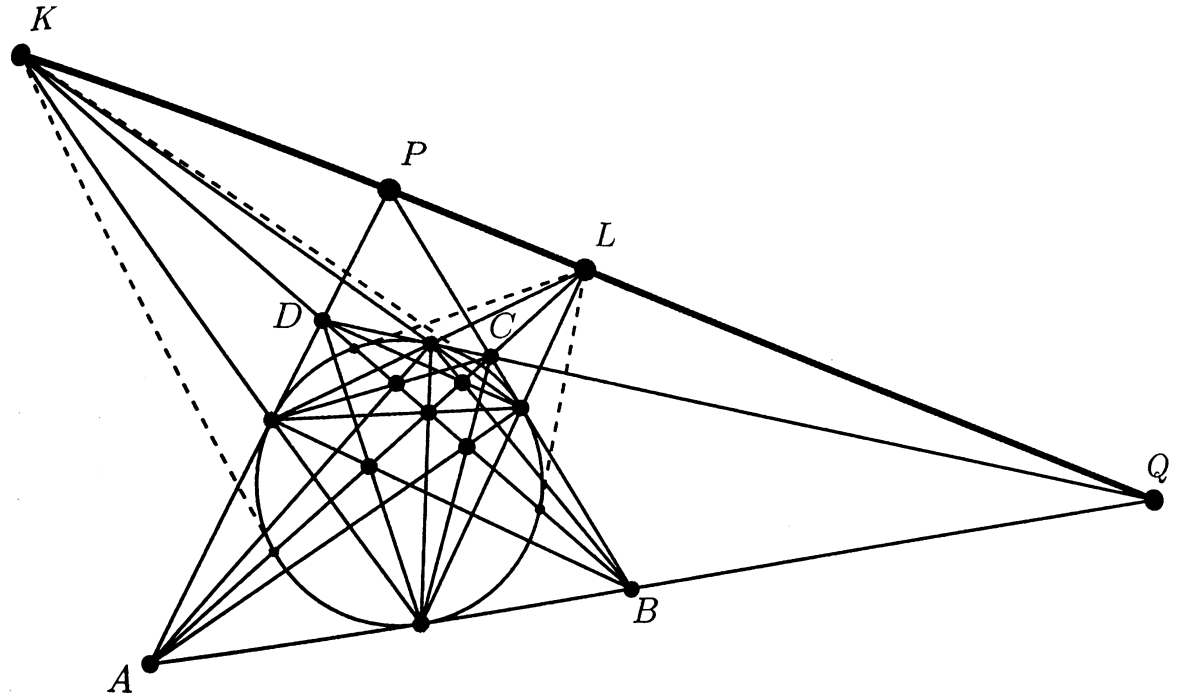
7. Точка O не лежит на сторонах и их продолжениях треугольника ABC. A_1 – точка пересечения прямой BC с перпендикуляром к OA, проходящим через точку O. Аналогично определяются точки B_1, C_1. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

8. I – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая, проходящая через I перпендикулярно AI, пересекает BC в точке A_1; аналогично определяется точка C_1. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $KI \perp AC$.

9. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты неравнобедренного остроугольного треугольника ABC; окружности, описанные около треугольников ABC и A_1B_1C, вторично пересекаются в точке P, Z – точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведённых в точках A и B. Докажите, что прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.

---

10. (Тест Роршаха) Посмотрите на картинку и расскажите, что Вы видите на ней.



Угадывание числа. Петя задумал двузначное число. За ход Вася называет любое двузначное число. Цель Васи – назвать такое число, которое отличалось бы от задуманного в каждом из двух разрядов не более чем на 1. Какое наименьшее число ходов заведомо хватит Васе?

Встреча. Мальчик и девочка договорились встретиться после отбоя между 23-00 и 24-00. Каждый приходит на место встречи случайным образом, ждет 15 минут, и если встреча не произошла, то уходит. Какова вероятность встречи?

Пьяный монах. Монах выходит из своей обители в 12 дня и идет в гору по прямой дороге (с разной скоростью, возможно, иногда спускаясь). Монах достигает вершины в 12 ночи, ночует, молится, и в 12 часов следующего дня, подкрепившись на дорогу, выходит обратно, возвращаясь в обитель в 5 часов вечера. Докажите, что найдется точка пути, в которой монах был в одно и то же время на обоих маршрутах.

Возы. Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой длины 20, смогли проехать, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись друг друга, два круглых воза радиуса 10, один из которых едет из A в B, а другой – из B в A?

Флатландцы. а) Двое флатландцев спускаются с высочайшей вершины Флатландии «Пик кипа» — один по левому склону, а второй по правому. Гора везде выше уровня моря, а её поверхность – график кусочно-линейной непрерывной функции. Флатландцы «непрерывно» двигаются, так что зависимость координат флатландца от времени – непрерывная функция, на скорость ограничений нет.

Докажите, что флатландцы могут достичь моря, все время находясь на одинаковой высоте над уровнем моря.

б) Пусть поверхность горы – график дифференцируемой функции. Тогда аналогичное утверждение может быть неверным.

Для самостоятельного решения

Отрезки и прямые. На плоскости дано несколько параллельных отрезков. Докажите, что если любые три из них можно пересечь некоторой прямой, то и все отрезки можно пересечь некоторой прямой.

Дуги на сфере. Прямая на сфере – это пересечение сферы и плоскости, проходящей через ее центр. Аналогично определяется отрезок.

Пусть на сфере единичного радиуса имеется несколько отрезков суммарной длины меньше π. Докажите, что тогда существует прямая, не пересекающая ни один из отрезков. А если имеется несколько отрезков суммарной длины больше πk, то найдется прямая, пересекающая $k+1$ отрезок.

Сосны и бесконечно длинная слега. На плоскости растет 2012 сосен общего положения. Два положения бесконечно длинной слеги назовем эквивалентными, если одно может быть получено из другого перемещением слеги между соснами. Чему равно число классов эквивалентности?

Определение. Пусть даны множество V («векторы») и поле K («числа», или «скаляры»), имеются операция сложения векторов и для каждого числа имеется операция умножения вектора на число. При этом:

а) сложение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по сложению элемент ($\overrightarrow{0}$) и у каждого вектора $\overrightarrow{v}$ есть обратный по сложению ($-\overrightarrow{v}$);

б) $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$; $(k_1k_2)\overrightarrow{v} = k_1(k_2\overrightarrow{v})$ (здесь $k_1, k_2 \in K$, $\overrightarrow{v} \in V$);

в) $(k_1 + k_2)\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{v} + k_2\overrightarrow{v}$; $k(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = k\overrightarrow{v}_1 + k\overrightarrow{v}_2$.

Тогда V называется *векторным (линейным) пространством* над K.

Пример.

а) K^n – строки(или столбцы) длины n;

б) множество решений однородной СЛУ от n переменных;

в) линейные уравнения вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$;

г) многочлены над полем K;

д) вещественнозначные функции, определенные на произвольном множестве.

е) последовательности комплексных чисел;

ж) последовательности комплексных чисел с конечным числом ненулевых элементов;

з) множество всех прямоугольных таблиц 5×10, заполненных остатками по модулю 2;

и) множество векторов на плоскости.

й) множество всех подмножеств данного (для определенности конечного) множества.

Упр1. Образуют ли векторные пространства следующие множества (относительно естественных операций):

а) многочлены степени n над полем K;

б) неубывающие последовательности (над $\mathbb{R}$);

в) многочлены над данным полем с фиксированным корнем α;

г) строки длины n с нулевой суммой элементов;

д) множество функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$;

е) множество функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$;

ж) строки целых чисел длины n над $\mathbb{Z}$.

з) строки целых чисел длины n над $\mathbb{Z}_p$.

Упр2. Докажите, что множество решений произвольной ОСЛУ образует векторное пространство относительно естественных операций.

Упр3. Дайте определение *подпространства.*

Упр4. В примере и упражнении 1 укажите подпространства следующих пространств: пример а; пример г; пример е; упр1 д.

Упр5. Рассмотрим пространство векторов на плоскости (над $\mathbb{R}$). Опишите все его подпространства.

Упр6. Дайте определение *изоморфизма* векторных пространств.

Упр7. Найдите пары изоморфных пространств в примере и упражнении 1.

Определение. Подмножество S векторного пространства V называется *системой образующих* этого пространства, если всякий вектор $v \in V$ можно представить в виде $v = \alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n$, где $v_1, \ldots, v_n \in S$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Выражение $\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение) называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_n$.

Упр8. В пространствах из примера (в, г, е, ж, й) и упр1 (в, г) укажите какую-нибудь *минимальную систему образующих* (то есть ту, которая перестает быть системой образующих после выкидывания любого из ее векторов). В упр 1в считайте, что $\alpha \in K$.

Определение. Пусть S — произвольное подмножество векторного пространства V. *Линейной оболочкой* множества S в пространстве V называется совокупность $L(S)$ всех линейных комбинаций векторов из S.

Упр9. Линейная оболочка $L(S)$ является подпространством пространства V, содержащим множество S. При этом всякое подпространство пространства V, содержащее S, содержит и $L(S)$ (по этой причине $L(S)$ называют ещё подпространством, *натянутым* на множество S).

Упр10. а) Вася выписал 10 многочленов степеней $\leqslant 9$, степени попарно различны. Найдите линейную оболочку полученного множества.

б) Аладдин выписал все четные функции, и все нечетные функции. Найдите линейную оболочку полученного множества.

Предложение. Пусть $S = \{v_i, i \in I\}$ – семейство векторов векторного пространства V. Тогда следующие условия равносильны:

а) если вектор из V выражается через векторы из S, то единственным образом.

б) никакой вектор из S нельзя выразить через остальные;

в) если линейная комбинация векторов из S равна нулевому вектору, то все ее коэффициенты равны 0.

Определение. Семейство векторов, обладающее свойствами, описанными в предыдущем предложении, называется *линейно независимым*, а не обладающее — *линейно зависимым.*

Упр11. Дайте три определения линейной зависимости.

Упр12. Докажите следующие свойства линейной зависимости и независимости:

а) система, содержащая нулевой вектор, является ЛЗ;

б) система, содержащая пропорциональные векторы, является ЛЗ;

в) если семейство векторов ЛНЗ, то и любая его часть ЛНЗ;

г) если семейство ЛЗ, то и любое содержащее его семейство ЛЗ;

д) если ЛНЗ семейство векторов не является системой образующих векторного пространства, то к этому семейству можно добавить вектор так, чтобы оно осталось ЛНЗ.

Упр13. а) Докажите, что пространство может быть изоморфным своему собственному подпространству.

б) Изоморфны ли пространства строк длины n и m (при $n \neq m$)?

Упр14. а) Рассмотрим последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n \geqslant 1)$. Докажите, что такие последовательности образуют векторное пространство и укажите какую-нибудь минимальную систему образующих в нем.

б) То же самое, но рекуррента такая: $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$.

Упр15. Пусть S — система образующих K^n. Докажите, что $|S| \geqslant n$.

Упр16. Пусть S — система образующих K^n из $n+1$ вектора. Докажите, что один вектор можно выкинуть из системы образующих.

Упр17. Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

Упр18. Есть таблица 8×8, изначально заполненная нулями. Разрешается прибавлять по 1 к любому квадрату 3×3 или 4×4. Все ли расстановки остатков по модулю 7 можно получить?

Определение. Система образующих S пространства называется его *базисом*, если всякий элемент пространства представляется в виде ЛК элементов из S *единственным* образом.

Замечание. Неочевидно, существует ли базис в произвольном пространстве.

Теорема (о равносильных определениях базиса). Следующие условия равносильны:

а) S — базис пространства V;

б) S — линейно независимая система образующих пространства V;

в) S линейно независимо, но теряет это свойство при добавлении любого вектора из V;

г) S — система образующих пространства V, но теряет это свойство при удалении любого вектора.

Таким образом, базис векторного пространства можно описать, с одной стороны, как *минимальную систему образующих*, а с другой – как *максимальную линейно независимую систему*. Возникая на узком стыке двух противоположных качеств, базисы не могут не приобрести ценные свойства.

Теорема (о линейной зависимости линейных комбинаций). Если в пространстве есть базис из n векторов, то любые $n+1$ векторов линейно зависимы. Более того, любые $n+1$ векторов, являющиеся ЛК n векторов, линейно зависимы.

Следствие (корректность определения размерности). Если в пространстве есть базис из n векторов, то любой другой базис тоже содержит n векторов.

Определение. Векторное пространство, имеющее конечный базис, называется *конечномерным*, а число векторов в каждом из его базисов называется его *размерностью* ($\dim$). Если в векторном пространстве нет конечного базиса, оно называется *бесконечномерным*.

Замечание. Из аксиомы выбора следует, что базис существует в любом (ненулевом) пространстве, и что любые два базиса равномощны.

Упр1. Два конечномерных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны. В частности, любое конечномерное пространство V изоморфно $K^{\dim V}$.

Упр2. а) К любой ЛНЗ системе векторов (конечномерного) пространства можно добавить векторы так, чтобы получился базис.

б) Из любой системы образующих (конечномерного) пространства можно удалить часть векторов так, чтобы оставшиеся образовывали базис.

Упр3. Подпространство конечномерного пространства конечномерно. При этом размерность собственного подпространства меньше размерности пространства.

Науку – в жизнь!

Сюжет 1, в котором появляются пространства.

1. Докажите, что множество всех подмножеств конечного множества невозможно превратить в пространство над $\mathbb{Z}_3$.

2. а) Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

б) Рассмотрим теперь те раскраски, для которых из каждой вершины выходит фиксированное по четности число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки, или же их нет вообще.

3. В каждую клетку шахматной доски вписано по действительному числу. Разрешается за один ход прибавить по α к любому квадрату 3×3 или 4×4 (α меняется от хода к ходу). Все ли расстановки чисел можно получить?

Сюжет 2, в котором появляются характеристические векторы.

4. В классе k девочек и $n > k$ мальчиков. Некоторым мальчикам нравятся некоторые девочки. Докажите, что найдется некоторый непустой набор мальчиков такой, что каждая девочка нравится четному количеству мальчиков из этого набора.

5. Есть табло из лампочек размера 8×8. За ход можно инвертировать 15 лампочек – все лампочки в некоторой строке и некотором столбце. За какое наименьшее число можно инвертировать все лампочки на табло?

Матбой. 12 июля

1. Многочлен $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени n таков, что $|p(x)| \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Докажите, что $p(-\frac{1}{n}) \leqslant 2^{n+1} - 1$.

2. По кругу стоят 123 комплексных числа, не все нулевые. Докажите, что можно выкинуть два соседних числа так, что оставшиеся числа нельзя разбить на две равные по сумме группы.

3. В таблицу 8×8 вписаны числа. За один вопрос можно узнать сумму чисел в любом прямоугольнике. За какое наименьшее число вопросов можно узнать сумму чисел на диагонали?

4. На дуге AC описанной окружности треугольника ABC выбрана точка P. Прямые AP и CP пересекают продолжения сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно, а прямая BP пересекает сторону AC в точке B_1. Прямые C_1B_1 и A_1B_1 пересекают стороны BC и AB в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения симедиан треугольника ABC.

5. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{2012} \frac{\sqrt{x_i}}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} > 0$$

для любых положительных попарно различных $x_1, x_2, \dots, x_{2012}$.

6. Докажите, что на всех ребрах выпуклого многогранника всегда можно так расставить стрелки, что в каждую вершину будет входить не более трех стрелок.

7. Докажите, что из $2n - 1$ иррационального числа можно выбрать n чисел так, что сумма любых нескольких выбранных чисел из этих n будет иррациональной.

8. Докажите, что для каждых двух многочленов $f_1(x), f_2(x)$ найдется такой ненулевой многочлен $P(x, y)$, что $P(f_1(x), f_2(x)) = 0$.

9. На плоскости отмечены 50 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Костя соединяет эти точки отрезками, не имеющими друг с другом общих точек (в том числе общих концов). Костя уже провел 16 отрезков. Докажите, что он сможет провести еще один.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Пусть вторые точки пересечения пар окружностей, описанных около треугольников ABO и CDO, ACO и BDO, ADO и BCO это K, L, M. Докажите, что O — центр вневписанной окружности треугольника KLM.

Принцип крайнего в комбинаторной геометрии 14 июля

Теорема Сильвестра. На плоскости нарисовано несколько прямых, причем через пересечение любых двух проходит еще хотя бы одна. Тогда все прямые проходят через одну точку.

Следствие. На плоскости отмечено несколько точек, причем на прямой соединяющей любые две лежит еще хотя бы одна. Тогда все точки лежат на одной прямой.

1. На прямой отмечен $2n+1$ отрезок, причем каждый отрезок пересекается с еще хотя бы n другими отрезками. Докажите, что есть отрезок пересекающий все остальные.

2. Каково наибольшее возможное количество точек в множестве S на плоскости, обладающих следующим свойством: для любых трех точек A, B, C из S, найдется точка $D \in S$ такая, что A, B, C, D — вершины параллелограмма в каком-то порядке.

3. На плоскости отмечено $2n+3$ точки общего положения, никакие четыре не лежат на одной окружности. Докажите, что найдутся три из них такие, что внутри и вне описанной вокруг них окружности лежат по n точек.

4. Докажите, что у выпуклого многоугольника есть не более одной триангуляции диагоналями, все треугольники которой остроугольны.

Для самостоятельного решения

5. На плоскости отмечено несколько красных и несколько синих прямых, причем через пересечение любых двух одноцветных проходит еще хотя бы одна другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

6. На плоскости расположено $\left[\frac{4}{3}n\right]$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с n прямоугольниками. Доказать, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми прямоугольниками.

7. $N \geqslant 3$ точки на плоскости устроены таким образом, что среди их попарных расстояний есть только n различных. Докажите, что $N \leqslant (n+1)^2$.

8. Несколько единичных квадратов с параллельными сторонами лежат на плоскости. Они раскрашены в n цветов таким, образом, что среди любых n квадратов разных цветов какие-то два можно прибить к плоскости одним гвоздем. Докажите, что найдется цвет, все квадраты которого можно прибить к плоскости не более чем $2n-2$ гвоздями.

Скалярное произведение. 15 июля

Определение. Пусть K — поле, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ — векторы из K^n. Положим $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$ (*скалярное произведение* векторов u и v).

Упр1. Свойства скалярного произведения:
а) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;
б) $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$;
в) Если $\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_sv_s = 0$, то $\alpha_1\langle v_1, v\rangle + \ldots + \alpha_s\langle v_s, v\rangle = 0$.

Определение. Векторы $u, v \in K^n$ называются *ортогональными*, если $\langle u, v\rangle = 0$.

Упр2. Может ли ненулевой вектор быть ортогональным самому себе?

Упр3. Докажите, что любой набор попарно ортогональных ненулевых векторов в $\mathbb{R}^n$ линейно независим. На какие поля, помимо $\mathbb{R}$, переносится это свойство?

Задача 1. В городе живет n человек и имеется несколько клубов. Известно, что в каждом клубе состоит нечетное число членов, а любые два клуба различаются по составу и имеют четное число общих членов. Докажите, что количество клубов в городе не превосходит n.

Определение. Пусть M — подмножество K^n. Положим $M^\perp = \{v|(v, M) = 0\}$ — *ортогональное дополнение* к множеству M.

Упр4. а) Докажите, что $M^\perp$ является подпространством. б) Как связаны $(M^\perp)^\perp$ и M? в) Пусть M — подпространство. Докажите, что $\dim M + \dim M^\perp = n$. г) Пусть M — подпространство. Докажите, что $(M^\perp)^\perp = M$.

Задача 2. Каково наибольшее возможное количество подмножеств 100-элементного множества, таких, что пересечение любых двух (возможно, совпадающих) из них содержит четное количество элементов?

Для самостоятельного решения

1. В городе k супружеских пар и n клубов. Известно, что для мужчины и женщины количество клубов, в которых они оба бывали, нечетно тогда и только тогда, когда они — муж и жена. Докажите, что $k \leqslant n$.

2. В КИМах Единой Государственной Олимпиады (ЕГО) n вопросов с ответами «да» и «нет», за каждый правильный ответ начисляется 1 первичный балл. ЕГО сдавали k участников, и при этом они дали такой набор ответов на вопросы, что экспертная комиссия может так приписать положительные веса вопросам, чтобы участники расположились по итоговым баллам в любом нужном порядке. Докажите, что $k \leqslant n$.

3. (Неравенство Фишера). Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — различные непустые подмножества n-элементного множества. Если пересечение любых двух различных из них состоит из l элементов, то $m \leqslant n$. Указание: ЛЗ над $\mathbb{Q}$.

Инвариант Дена. 16 июля

Упр0. Можно ли круг разрезать на конечное число частей по отрезкам и дугам окружностей, и составить из них квадрат?

Опр1. Два многогранника называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на конечное число многогранных частей, из которых можно составить другой.

3-я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА: верно ли, что любые два многогранника равного объема равносоставлены?

Опр2. Пусть у многогранника M (а также многогранной поверхности, например, нечто типа тора) n ребер, $l_1, \ldots, l_n$ — длины этих ребер, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — величины соответствующих двугранных углов (измеренные в радианах). Будем рассматривать набор пар $(l_1, \varphi_1), \ldots, (l_n, \varphi_n)$. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – некоторая *аддитивная* функция, для которой $f(\pi) = 0$. Величина

$$F(M) = \sum l_i f(\varphi_i)$$

называется *инвариантом Дена* многогранника.

Вопрос. Надо ли доказывать корректность этого определения?

Замечание. Будем рассматривать также наборы, полученные не из многогранников (скажем, пустой набор, или наборы, где есть отрицательные l_i).

Опр3. С набором можно проводить в ту или обратную сторону следующие преобразования:

1. пару (l, φ) заменять двумя парами (l', φ), (l'', φ), где $l' + l'' = l$;

2. пару (l, φ) заменять двумя парами (l, φ'), (l, φ''), где $\varphi' + \varphi'' = \varphi$ (последнее равенство по модулю $2\pi k$);

3. выкидывать пары вида $(0, \varphi)$ или $(l, \pi k)$, где k — целое.

Наборы *подобны*, если они получаются друг из друга одним или несколькими из таких преобразований.

Упр1. Найдите наборы, подобные наборам куба и правильного тетраэдра.

Упр2. Если наборы подобны, то их инварианты Дена равны.

Теорема Дена, 1902. а) Если многогранник M составлен из многогранников M_i, то $F(M) = \sum F(M_i)$.

б) Если два многогранника равносоставлены, то их инварианты Дена равны.

Упр3. а) Докажите, что аддитивная функция $\mathbb{Q}$-линейна.

б) Докажите, что из любого набора можно выкидывать пару $(a, \frac{p}{q}\pi)$ с сохранением инварианта Дена.

Упр4. Можно так выбрать функцию f, чтобы инварианты Дена куба и правильного тетраэдра были бы различны. Следовательно, куб и правильный тетраэдр не равносоставлены.

Упр5. Угол $\arccos(\frac{1}{3})$ не соизмерим с π, ибо общеизвестно: если φ соизмерим с π и $\cos\varphi$ — рационален, то $\cos\varphi = 0, \pm 1$ или $\pm\frac{1}{2}$. (издевательство: $\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1$)

Теорема Дена-Сидлера, 1965. Если у двух многогранников одинаковы объемы и равны все инварианты Дена, то они равносоставлены.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что параллелепипеды с равными объемами равносоставлены.

2. Рассмотрим тетраэдр, у которого три ребра равны и взаимно перпендикулярны. Докажите, что он не равносоставлен правильному тетраэдру, и не равносоставлен кубу.

3. Докажите, что правильный тетраэдр нельзя разрезать на несколько правильных тетраэдров.

Подсчет числа орбит. 17 июля

1. а) Сколькими способами можно раскрасить грани куба а) в шесть цветов; б) в три цвета? Все цвета должны присутствовать.

2. Сколько различных ожерелий из 10 бусинок можно составить, если имеется 2 бусинки синего цвета, 3 — зеленого и 5 — красного? а) ожерелья можно вращать, но нельзя переворачивать; б) ожерелья можно и вращать, и переворачивать.

3. Сколько имеется различных раскрасок вершин квадрата не более чем в 2 цвета, если одинаковыми считаются раскраски, получаемые друг из друга поворотами?

4. Посчитайте число раскрасок ожерелья из p (p – простое) бусинок в a цветов (не все цвета обязаны присутствовать), и докажите малую теорему Ферма.

Опр1. Пусть G – некоторый набор преобразований множества X. *Орбита* элемента $x \in X$ относительно G – множество таких элементов $y \in X$, в которые можно перевести x преобразованиями из G.

5. Преобразование $x \to x + a$ на вещественных числах называется сдвигом. Пусть G_1 – совокупность сдвигов на всевозможные положительные числа, G_2 – на всевозможные неотрицательные числа, G_3 – на всевозможные целые числа. Опишите орбиты числа $\sqrt{2}$ относительно G_1, G_2, G_3. В каких случаях все вещественные числа разбились на непересекающиеся орбиты?

Важное упражнение. Какие именно свойства G обеспечивают разбиение на непересекающиеся орбиты?

Вывод. Разумно рассматривать не произвольные множества преобразований, а только те, которые образуют *группу*. Везде в дальнейшем будем это предполагать.

Постановка задачи. Как найти число орбит?

6. Придумайте группы преобразований, орбитами которых были бы:

а) числа, дающие одинаковые остатки по модулю 5;

б) все параллельные между собой прямые на плоскости;

в) все концентрические окружности с фиксированным центром;

г) все правильные 10-угольники с данным центром;

д) лучи, исходящие из данной точки (без нее самой).

Предложение. Если все преобразования из группы G, кроме тождественного, не имеют неподвижных точек, то длина каждой орбиты равна $|G|$, а число орбит равно.....

Мораль. В ситуации, описанной в Предложении, найти число орбит очень легко – так как они одинаковой длины. Но орбиты бывают и разной длины. Очевидно, это случается, когда в группе G есть нетождественные преобразования, имеющие неподвижные точки. Тем самым подсчет числа орбит напрямую связан с изучением неподвижных точек. **Итак, надо изучать неподвижные точки.**

Еще мораль. Элемент a неподвижен относительно преобразования g, если $g(a) = a$. Поэтому неподвижные точки можно изучать **с двух сторон**: «со стороны a» и «со стороны g». Приходим к двум определениям.

Опр2. *Стабилизатор* G_x элемента $x \in X$ – это такое множество преобразований из G, которые переводят x в себя. $|G_x|$ – число элементов в стабилизаторе.

Опр3. $\mathrm{Fix}(g)$ – число неподвижных элементов преобразования g.

7. В задаче 3 найдите стабилизаторы всех элементов и число неподвижных элементов всех преобразований.

8. Докажите, что

а) если $x, y \in X$ лежат в одной орбите, то количество преобразований, переводящих x в y, равно числу преобразований, переводящих x в x. Следовательно, это число не зависит от x и y, и равно $|G_x|$;

б) сумма мощностей стабилизаторов точек одной орбиты равна $|G|$; поэтому длина орбиты точки x равна $|G|/|G_x|$.

в) сумма мощностей стабилизаторов всех точек множества X в $|G|$ раз больше, чем количество орбит;

г) сумма мощностей стабилизаторов всех точек равна сумме мощностей множеств неподвижных элементов всех преобразований из G: $\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма [не] Бернсайда. Пусть G — группа преобразований множества X. Число орбит, на которые множество X разбивается под действием группы G, равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Fix}(g).$$

Замечание. Приложения формулы Бернсайда к решению задач основаны на том, что находить число неподвижных точек преобразования часто бывает легче, чем длины орбит.

9. Посчитайте число раскрасок ожерелья из p (p – простое) бусинок в a цветов (не все цвета обязаны присутствовать), и докажите малую теорему Ферма.

10. а) Если перестановка σ является циклом длины n, а НОД$(k, n) = d$, то перестановка σ^k является произведением d циклов длины n/d.

б) Сколькими способами можно раскрасить стороны правильного n-угольника в a цветов (относительно движений плоскости, сохраняющих ориентацию)?

11. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в не более чем в a цветов (относительно движений пространства, сохраняющих ориентацию)?

Матбой профи9–профи10. 17 июля

1. В ряд выстроено n бюрократов различного веса, в порядке возрастания весов. Непустое множество бюрократов называется *правильным*, если вместе с каждыми двумя бюрократами оно содержит и всех бюрократов промежуточного веса между ними. Какое наибольшее число различных комиссий можно образовать из этих n бюрократов, если пересечение любых двух различных комиссий должно быть правильным множеством?

2. Рассмотрим множество A всех последовательностей длины n с элементами из $\mathbb{Z}_2$, с обычной операцией сложения последовательностей. Функция $f : A \to A$ обладает двумя свойствами: 1) $f(0) = 0$; 2) если последовательности a и b отличаются ровно в k позициях, то последовательности $f(a)$ и $f(b)$ тоже отличаются ровно в k позициях. Докажите, что если $a+b+c = 0$, то $f(a)+f(b)+f(c) = 0$.

3. Докажите, что невозможно разбить 190 последовательных натуральных чисел на два непересекающихся множества так, чтобы произведения чисел в этих двух множествах были бы равны.

4. На плоскости дано $n \geqslant 4$ точек, попарно соединенных отрезками. Докажите, что если все эти отрезки имеют целую длину, то хотя бы $1/6$ этих отрезков имеет длину, кратную 3.

5. На плоскости есть 2009 точек общего положения. Докажите, что число треугольников, в каждом из которых лежит любая фиксированная из этих точек (строго внутри), четно.

6. Есть несколько городов, некоторые из которых соединены не более чем одной дорогой, из каждого города выходит ровно 4 дороги, соответствующий граф планарен. Вася выехал на машине из города A по произвольному ребру, а затем каждый раз ехал по «средней» дороге, пока ему не надоело. Затем Петя выехал на машине из города $B \neq A$ по произвольному ребру, а затем каждый раз ехал по «средней» дороге, пока ему тоже не надоело. В итоге оказалось, что Петя и Вася побывали в совокупности во всех городах, причем нет города, в котором они побывали бы оба, или же дважды. Докажите, что число городов четно.

7. Внутри треугольника ABC выбрана точка P таким образом, что $\angle PAB = \angle PCB = \frac{1}{4}(\angle A + \angle C)$. BL — биссектриса этого треугольника. Прямая PL пересекает описанную окружность треугольника APC в точке Q. Докажите, что прямая QB — биссектриса угла AQC.

8. Дан многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ с рациональными коэффициентами, причем $d < 0$. Произведение каких-то двух корней $P(x)$ рационально. Докажите, что их сумма тоже рациональна.

9. Суду предъявлены 100 одинаковых с виду монет. Суд уже установил, что среди них есть 2 или 3 фальшивые, все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые - тоже одинаково, но легче

настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Может ли он убедить суд, что фальшивых монет три, а не две, не разгласив ни про какую монету фальшивая она или настоящая? (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)

10. Четырехугольник $ABCD$ является одновременно вписанным и описанным. Вписанная окружность касается его сторон AB и CD в точках X и Y соответственно. Перпендикуляры, восставленные к сторонам AB и CD в точках A и D соответственно, пересекаются в точке U, перпендикуляры к ним же в точках X и Y пересекаются в точке V, и, наконец, в точках B и C — в точке W. Докажите, что U, V, W лежат на одной прямой.

Матбой опытные профи10 – неопытные преподаватели. 17 июля

1. Точка P находится внутри остроугольного треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные P относительно сторон треугольника ABC. Оказалось что шестиугольник $AB_1CA_1BC_1$ — описанный. Докажите, что P — точка Торричелли (т. е. точка внутри треугольника, из которой все стороны треугольника ABC видны под равными углами).

2. Назовем натуральное число n *точной степенью*, если оно имеет вид $n = m^k$ при $m, k > 1$. Существует ли такое множество из 2012 натуральных чисел, у которого среднее арифметическое любого непустого подмножества элементов является точной степенью?

3. Пусть $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ – неотрицательные вещественные числа. Докажите, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} \min\{a_i a_j, b_i b_j\} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \min\{a_i b_j, a_j b_i\}.$$

4. Есть карточки с числами от 1 до 100. Фокусник с помощником хотят показать такой фокус. Зритель выбирает пять карточек, отдает их помощнику, тот выбирает из них четыре, и в каком-то порядке выдает фокуснику. Фокусник угадыват оставшуюся пятую карточку. Как показать такой фокус?

5. На плоскости дано $n \geqslant 4$ точек, попарно соединенных отрезками. Докажите, что если все эти отрезки имеют целую длину, то хотя бы $1/6$ этих отрезков имеет длину, кратную 3.

6. Есть несколько городов, некоторые из которых соединены не более чем одной дорогой, из каждого города выходит ровно 4 дороги, соответствующий граф планарен. Вася выехал на машине из города A по произвольному ребру, а затем каждый раз ехал по «средней» дороге, пока ему не надоело. Затем Петя выехал на машине из города $B \neq A$ по произвольному ребру, а затем каждый раз ехал по «средней» дороге, пока ему тоже не надоело. В итоге оказалось, что Петя и Вася побывали в совокупности во всех городах, причем нет города, в котором они побывали бы оба, или же дважды. Докажите, что число городов четно.

7. Найдите все пары простых чисел (p, q), для которых сравнение $a^{3pq} \equiv a \pmod{3pq}$ выполнено для всех $a \in \mathbb{Z}$.

8. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant 1$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Докажите, что найдется такая аддитивная функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $|g(x) - f(x)| \leqslant 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

9. Лягушка прыгает по координатной плоскости из начала координат. После каждого прыжка одна из ее координат увеличивается на 1, а другая не меняется. Докажите, что найдется прямая, содержащая не менее 1000000 точек, в которых побывала лягушка.

10. Дан выпуклый шестиугольник. Пусть s — сумма длин трех отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон. Докажите, что в шестиугольнике существует точка, сумма расстояний от которой до прямых, содержащих его стороны, не превосходит s.

Две стороны линейности: математическая линейность. 19 июля

Мотивация. Дан треугольник ABC. Пусть A_1 и B_1 — основания биссектрис из вершин A и B соответственно. Докажите, что для любой точки X на отрезке A_1B_1 выполнено равенство $a + b = c$, где a, b и c — расстояния от X до BC, CA и AB соответственно.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если для любой точки C, делящей отрезок AB в отношении $a : b$, выполнено равенство: $f(C) = \dfrac{b}{a+b}f(A) + \dfrac{a}{a+b}f(B)$.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют a, b, c такие, что для любой точки (x, y) плоскости $f\big((x, y)\big) = ax + by + c$.

Пример. Ориентированное расстояние до прямой линейно.

Пример. Ориентированная площадь линейна.

1. Докажите, что два этих определения равносильны.

2. Из линейности ор. площади найдите ориентированную площадь треугольника с вершинами $(0, 0), (x_1, y_1)$, (x_2, y_2).

3. а) Из линейности ор. расстояния от точки до прямой найдите ориентированное расстояние от точки $(0, 0)$ до прямой $ax + by + c = 0$.

б) Найдите расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $ax + by + c = 0$.

Что есть множество нулей линейной функции?...

4. Докажите, что основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой.

5. Середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.

6. Пусть у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны пересекаются в точках P и Q. Докажите, что середины отрезков AC, BD и PQ лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*). А если $ABCD$ описан, то там же лежит и центр вписанной в него окружности (*теорема Ньютона*).

---

7. В четырехугольнике $ABCD$ точка X — пересечение биссектрис углов ABC и CDA, точка Y — пересечение биссектрис углов BCD и DAB. Точка Z — пересечение биссектрис двух углов, полученных при продолжении противоположных сторон $ABCD$ до пересечения. Докажите, что X, Y и Z лежат на одной прямой.

8. Для двух данных окружностей ω_1, ω_2 найдите ГМТ середин отрезков A_1A_2 таких, что $A_1 \in \omega_1$, $A_2 \in \omega_2$ и касательные из A_1 к ω_2 и из A_2 к ω_1 равны.

9. Докажите, что прямая из задачи 4 перпендикулярна линии центров вписанной и описанной окружностей треугольника.

Опр. *Полем* K называется множество, где определены операции сложения и умножения, причем выполняются следующие свойства:

а) Сложение ассоциативно, коммутативно, обладает нейтральным элементом (он обозначается 0) и обратными элементами.

б) Умножение ассоциативно, коммутативно, обладает нейтральным элементом (он обозначается 1) и для каждого ненулевого элемента существует обратный к нему по умножению.

в) Сложение и умножение связаны законом дистрибутивности: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

г) При этом 0 не совпадает с 1.

Опр. Если K и L — поля, и $K \subset L$, то K называют *подполем* в L, а L — *расширением* K.

Упр1. а) Существует ли расширение поля $\mathbb{R}$? б) Существует ли расширение поля $\mathbb{C}$?

Упр2. а) Докажите, что если в поле $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

б)При каких n множество $\mathbb{Z}_n$ является полем?

Упр3. Постройте поле из четырех элементов (это – не $\mathbb{Z}_4$!).

Загадка. Существует ли поле из шести элементов?

Упр4. Являются ли полями множества комплексных чисел вида а) $a+bi$, б) $a-b\sqrt{2}$, в) $a+b\sqrt{d}$ (где a, b, d — рациональные числа)?

Упр5. Являются ли полями множества комплексных чисел вида а) $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, б) $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$ (где a, b, c, d — рациональные числа)?

Упр6. Из чисел какого вида состоит наименьшее подполе в $\mathbb{C}$, содержащее $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ одновременно (укажите общий вид элементов этого поля и докажите, что других чисел в нем нет)? Это поле естественно обозначить через $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Определение. Пусть имеется расширение $K \subset L$, S — некоторое подмножество в L. Обозначим через $K(S)$ наименьшее (по включению) подполе поля L, содержащее все элементы из K и из S. Мы будем говорить, что $K(S)$ получено *присоединением* элементов S к K.

Упр7. Докажите, что $K(S)$ существует.

Упр8. Докажите, что $K(S)(M) = K(M)(S)$ – расширение не зависит от порядка присоединения элементов – важнейшее свойство!!!

Опр. Два поля K и L называются *изоморфными*, если существует такая биекция φ между их элементами, при которой сумма переходит в сумму, произведение — в произведение.

Упр9. Докажите, что при изоморфизме нулевой элемент переходит в нулевой, единичный — в единичный, разность — в разность, а частное — в частное.

Главная задача. Описать поле, полученное присоединением одного элемента к данному полю.

Определение. Пусть $K \subset L$ — расширение полей. Говорят, что элемент $\alpha \in L$ **алгебраичен** над K, если он является корнем некоторого многочлена с коэффициентами из K. В противном случае говорят, что α **трансцендентен** над K. Мы будем опускать указание поля K, если имеется в виду $\mathbb{Q}$.

Теорема. Если $\alpha \in L$ трансцендентен, то $K(\alpha)$ изоморфно $K(t)$, то есть полю рациональных функций над K от одной переменной.

1. Существует ли расширение $\mathbb{R}$, где уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет корней?

2. а) Является ли изоморфизмом $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ на себя отображение $a + b\sqrt{2} \to a - b\sqrt{2}$?

б) Является ли изоморфизмом $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ на $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ отображение $a + b\sqrt{2} \to a + b\sqrt{3}$?

в) Изоморфны ли эти поля?

Поля и их расширения. 20 июля

Опр. *Характеристикой* поля K назовем такое минимальное натуральное число n, что $1 + \ldots + 1 = 0$ (сумма n единиц поля K равна нулю в K). Если же таких чисел нет, то считаем характеристику поля K равной нулю.

Замечание. Характеристика поля либо ноль либо простое число.

Ключевое наблюдение. Если L — расширение поля K, то L образует векторное пространство над K.

Опр. Расширение $K \subset L$ называется *конечным*, если пространство L конечномерно над K. Размерность этого пространства называется *степенью* расширения L и обозначается $[L : K]$.

Упр1. В конечном поле может быть лишь p^n элементов, где p — некоторое простое число. (Для сведения. Для каждого p^n существует ровно одно с точностью до изоморфизма поле из p^n элементов.)

Упр2. Являются ли расширения конечными; если да, то какова их степень: а) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; б) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$; в) $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p(x)$?

Теорема об алгебраичности конечного расширения. Если $K \subset L$ — конечное расширение, то все элементы L алгебраичны над K.

Упр3. Опишите все конечные расширения а) $\mathbb{C}$; б) $\mathbb{R}$.

Упр4. Если элемент α алгебраичен над K, то он является корнем некоторого неприводимого многочлена $f \in K[x]$. Более того, если $g(\alpha) = 0$ для некоторого $g \in K[x]$, то g делится на f. В частности указанный неприводимый многочлен определен однозначно с точностью до множителя из K.

Опр. В обозначениях предыдущего упражнения степень многочлена f называется степенью алгебраичности α над полем K.

Теорема о присоединении корня. Пусть α алгебраичный над K элемент степени n. Докажите, что $K \subset K(\alpha)$ конечное расширение, более того, его степень равна n и 1, α, α^2, $\ldots$, α^{n-1} — его базис.

Упр5. Пусть α_1, α_2 — два корня неприводимого многочлена f. Тогда поля $K(\alpha_1)$ и $K(\alpha_2)$ изоморфны. Приведите пример, показывающий, что они могут не совпадать.

Упр6. Докажите, что число $\sqrt[5]{3} - 7\sqrt[5]{9} + 4$ является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Оцените степень многочлена. Как найти этот многочлен?

Теорема Хелли. 20 июля

Определение. Множество точек называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит весь отрезок между ними.

Определение. *Выпуклыми комбинациями* точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются точки вида $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$, где α_i — неотрицательные числа с суммой 1.

Определение. *Выпуклой оболочкой* множества A, называется пересечение всех выпуклых множеств содержащих A. Выпуклую оболочку множества A будем обозначать $\mathrm{Conv}(A)$.

Замечание. Выпуклая оболочка A есть множество всех выпуклых комбинаций точек из A. Несложно показать, что подобное определение равносильно предыдущему.

Теорема Радона. Любые $n+2$ точки в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на две группы так, что выпуклые оболочки этих групп пересекаются.

Лемма. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем K и $v_1, \ldots, v_{n+2}$ — векторы в нем. Докажите, что существует такая их нетривиальная нулевая линейная комбинация $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n+2} v_{n+2} = 0$, что $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0$.

Теорема Хелли. Пусть конечное семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ таково, что любые $n+1$ из них имеют общую точку. Тогда все эти множества имеют общую точку.

Теорема Каратеодори. Любая точка из $\mathrm{Conv}(A)$ является выпуклой комбинацией некоторых $n+1$ точек из множества A.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдется точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его последовательных вершин.

2. В пространстве отмечено 2012 точек. Оказалось, что любые 4 из них можно накрыть шаром радиуса 1. Докажите, что их все можно накрыть шаром радиуса 1.

3. На плоскости дано конечное число вертикальных отрезков. Оказалось, что любые четыре из них можно пересечь параболой. Докажите, что все их можно пересечь параболой.

4. Докажите, что выпуклый многоугольник диаметра 1 можно поместить в круг радиуса $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (*это утверждение называется теоремой Юнга*).

5. На плоскости дано n точек. Докажите, что существует такая точка O, что по любую сторону от любой прямой, проходящей через O лежит не более $\dfrac{2n}{3}$ этих точек (точки, лежащие на прямой, не учитываются).

Проективные преобразования. 20 июля

Определение. *Коника* — образ окружности при проективном преобразовании. Если прообраз бесконечно удаленной прямой не пересекал окружность, то коника называется *эллипсом*, если касался окружности — *параболой*, если пересекал окружность — *гиперболой*.

Вопрос. Какие точки находятся внутри коники, а какие — вне?

Упр1. Конику и точку внутри нее можно проективным преобразованием перевести в окружность и ее центр.

Упр2. Конику и прямую, не пересекающую ее, можно проективным преобразованием перевести в окружность и бесконечно удаленную прямую.

1. В треугольник ABC вписан эллипс ω, который касается его сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

2. На конике ω отмечены точки A, B, C, D, X, Y, Z, T так, что прямые AC, BD, XZ, YT пересекаются в точке K. Прямые AB и XY пересекаются в точке L, прямые CD и ZT пересекаются в точке M. Докажите, что точки K, L и M лежат на одной прямой.

3. Шестиугольник $ABCDEF$ описан около эллипса ω. Точки касания противоположных сторон шестиугольника с ω соединили отрезками. Полученные три отрезка пересеклись в одной точке. Докажите, что там же пересекутся и диагонали $ABCDEF$.

4. Эллипс ω пересекает стороны AB, BC, CA треугольника ABC в точках C_1 и C_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2 соответственно. Касательные к эллипсу в точках A_1 и A_2 пересекаются в точке A'; аналогично определяются точки B' и C'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

---

5. В четырехугольник $ABCD$ вписаны эллипсы ω_1 и ω_2. ω_i касается сторон AB, BC, CD, DA в точках K_i, L_i, M_i и N_i соответственно. ω_1 и ω_2 пересекаются в точках (перечисление против часовой стрелки по любой из этих коник) X, Y, Z и T. Докажите, что прямые AC, BD, XZ, YT, K_1M_1, L_1N_1, K_2M_2, L_2N_2 пересекаются в одной точке.

6. Вписанная в тетраэдр $ABCD$ сфера ω касается его граней ABC, BCD, CDA и DAB в точках D', A', B' и C' соответственно. Оказалось, что отрезки AA' и BB' пересекаются на ω. Докажите, что отрезки CC' и DD' тоже пересекаются на ω.

Две стороны линейности: физическая линейность. 21 июля

Определение. Скажем, что объект движется *линейно*, если существует такой вектор $\overrightarrow{v}$, что за время t объект сдвигается на вектор $t \cdot \overrightarrow{v}$.

Пример: Пересечение двух линейно движущихся прямых движется линейно.

Пример: Проекция линейно движущейся точки на линейно движущуюся прямую движется линейно.

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка X такова, что $CX \perp BD$. Из точки X опущены перпендикуляры XB' и XD' на прямые AB и AD, $B' \in AB$, $D' \in AD$. Докажите, что $BB' \cdot BA = DD' \cdot DA$.

2. Дан треугольник ABC. На прямой AC выбраны точки M и N такие, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$. X — основание перпендикуляра из M на BC, Y — основание перпендикуляра из N на AB, H — ортоцентр ABC. Докажите, что B, X, Y и H лежат на одной окружности.

---

3. (a) Дан треугольник ABC. На прямой AC выбрана точка X_1. Из нее проведена прямая, антипараллельная AB, которая пересекла BC в точке X_2. Из нее проведена прямая, параллельная AC, которая пересекла AB в точке X_3. Из нее проведена прямая, антипараллельная BC и т.д. Докажите, что $X_7 = X_1$.

(b) Докажите, что точки $X_1, \ldots, X_6$ лежат на одной окружности (*окружность Такера*).

(c) Докажите, что ее центр лежит на прямой через центр описанной окружности и точку Лемуана.

4. На плоскости даны 4 прямые. Каждые три из них образуют треугольник. Докажите, что ортоцентры этих четырех треугольников лежат на одной прямой (*прямая Обера*).

5. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности. Для любого разбиения этих четырех точек на пары опустим из фиксированной точки P перпендикуляры на две прямые, соединяющие точки, находящиеся в одной паре. После отметим середину отрезка между их основаниями. Докажите, что три полученные точки лежат на одной прямой.

Теорема о размерности башни. 21 июля

Теорема о размерности башни (часть I). Пусть $K \subset E \subset L$ — поля, причем расширения $K \subset E$ и $E \subset L$ – конечны. Тогда расширение $K \subset L$ конечно и $[L : K] = [L : E] \cdot [E : K]$.

Следствие. Сумма, разность, произведение и частное алгебраических чисел (в данном поле над данным подполем) является алгебраическим числом. Иначе говоря, множество алгебраических чисел (в данном поле над данным подполем) является полем.

Упр1. Найдите размерность и базис расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$.

Упр2. Пусть α, β – два различных корня многочлена многочлена $x^3 - 3$. Найдите размерность и базис расширения $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

Упр3. Докажите, что многочлен $x^5 - 7$ неприводим над полем $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$.

Упр4. Докажите, что число $a\sqrt[3]{3} + b\sqrt[5]{7/2} + c\sqrt[8]{8}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ рационально тогда и только тогда, когда оно равно нулю.

Упр5. А) Поле $F \subset \mathbb{C}$ получено из $\mathbb{Q}$ присоединением квадратных корней из а) ста; б) всех рациональных чисел. Докажите, что в F нет ни одного кубического корня из а) целого; б) рационального числа, который не являлся бы кубом рационального числа.

Б) Изначально дано поле $\mathbb{Q}$. Очередное поле получается из предыдущего присоединением некоторого корня из какого-то элемента этого предыдущего этажа степени 2,3 или 4. Докажите, что ни в каком этаже нет элемента $\sqrt[5]{5}$. ($\sqrt[5]{5}$ *не выражаются через радикалы степеней 2,3 и 4.*)

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Теорема (о размерности башни, часть II). Пусть $K \subset E \subset L$ — поля, причем расширение $K \subset L$ конечно. Тогда расширения $K \subset E$ и $E \subset L$ конечны, причем $[L : K] = [L : E] \cdot [E : K]$.

Теорема об алгебраической замкнутости поля алгебраических чисел. Если некоторое комплексное число является корнем многочлена с алгебраическими (над $\mathbb{Q}$) коэффициентами, то это число алгебраично (над $\mathbb{Q}$).

Теорема Хелли. 21 июля

Бесконечная теорема Хелли. Пусть есть (возможно бесконечный) набор замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, причем хотя бы одно из них ограничено. Тогда если любые $n+1$ из них имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

1. На окружности дана система дуг, причем длина каждой не больше половины окружности. Оказалось, что любые три имеют общую точку. Докажите, что все они имеют общую точку.

2. Пусть F ограниченная выпуклая фигура на плоскости. Докажите, что в F найдется такая точка, что любая хорда, проходящая через эту точку, делится ей в отношении λ таком, что: $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 2$ (*т.е. эта точка является почти центром симметрии*).

3. Докажите, что в любую выпуклую фигуру на плоскости ширины 1 можно вписать круг радиуса $1/3$.

4. а) Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^3$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{3/8}$. б) Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^n$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{\dfrac{n}{2n+2}}$.

Дано: На плоскости задана декартова система координат (с единичным отрезком), циркуль и линенейка (ЦЛ).

Требуется: Решить некую задачу на построение или доказать, что она неразрешима.

Опр. Число $x \in \mathbb{R}$ назовем *построимым*, если можно построить отрезок длины $|x|$ ($\Longleftrightarrow$ можно построить точку, абсцисса/ордината которой равна x).

Опр. *Построение при помощи ЦЛ* – это любая последовательность элементарных шагов:

1) взятие произвольной точки (x_0, y_0);

2) проведение прямой через две имеющиеся точки;

3) проведение окружности с центром в имеющейся точке, радиус которой равен расстоянию между какими-то двумя имеющимися точками;

4) взятие точки пересечения двух построенных прямых, прямой и окружности, двух окружностей;

5) уже построенные прямые и окружности разбивают плоскость на области; шагом является взятие произвольной точки *строго внутри* одной из этих областей;

Замечание. В алгоритмах построения ЦЛ допускаются ветвления типа: если точка пересечения таких-то прямых лежит внутри такой-то окружности, то..., если вне окружности, то..., если на окружности, то...

ВАЖНЕЙШАЯ ИДЕЯ. В пунктах 1 и 5 можно выбирать только точки *с рациональными координатами* (в силу всюду плотности $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{R}^2$.)

Упр1. Если построимы числа a, b, то построимы числа $a \pm b$, ab, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{ab}$.

Упр2. Построимо каждое число x, которое можно получить из 1 при помощи операций сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадратного корня. Например, число $\frac{\sqrt[8]{2+\sqrt{3}}-500\sqrt{25-\sqrt{6}}}{10\sqrt[4]{5}+7/3}$ построимо. Множество чисел такого вида обозначим $\mathbb{Q}'$.

Замечание. $\mathbb{Q}'$ подполе в $\mathbb{R}$.

Теорема. Множество построимых чисел совпадает с $\mathbb{Q}'$.

Упр3. а) Если разрешима задача удвоения единичного куба, то построимо число $\sqrt[3]{2}$;

б) если разрешима задача квадратуры круга то построимо число π;

в) если разрешима задача трисекции угла 60°, то построим вещественный корень некоторого неприводимого над $\mathbb{Q}$ кубического многочлена;

г) если можно построить правильный девятиугольник, то разрешима задача трисекции угла в 60°.

Вывод. Для доказательства неразрешимости классических задач на построение достаточно показать, что перечисленные выше числа не лежат в поле $\mathbb{Q}'$.

Упр4. Докажите неразрешимость (при помощи ЦЛ) классических задач на построение.

Упр5. а) Если n-угольник можно построить ЦЛ, то построимо число $\cos 2\pi/n$;

б) Рассмотрим $\mathbb{Q}(\cos 2\pi/n) \subset \mathbb{Q}(\cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n)$. Это расширение, и оно имеет степень 2.

Осталось выяснить, какую степень имеет неприводимый многочлен для $\cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n$ над $\mathbb{Q}$. Это нелегко, поэтому обойдем этот вопрос.

в) Если $n = kl, (k, l) = 1, k > 1, l > 1$, то n-угольник можно построить тогда и только тогда, когда можно построить k-угольник и l-угольник. Тем самым достаточно выяснить только вопрос о построении p^n-угольника, $p > 2$– простое.

Упр6. $x^{p^n} - 1 = (x^{p^{n-1}} - 1)(x^{p^{n-1}(p-1)} + x^{p^{n-1}(p-2)} + \dots + x^{p^{n-1}} + 1)$. Тогда многочлен во вторых скобках неприводим над $\mathbb{Q}$.

Упр7. Если p^n-угольник ($p > 2$) можно построить ЦЛ, то $n = 1$ и $p = 2^{2^k} + 1$ – простое число Ферма.

Мы не будем доказывать, что если p – простое число Ферма, то p-угольник можно построить ЦЛ.

Теорема. Если n-угольник построим ЦЛ, то n – произведение степени двойки и нескольких различных чисел Ферма. Верно и обратное.

Упр8. Одной линейкой нельзя построить: а) прямой угол; б) середину заданного отрезка.

Для самостоятельного решения

1. Одной линейкой нельзя построить: б) правильный треугольник. б) центр данной окружности; в) отрезок вдвое больше данного.

2. На плоскости дана пара параллельных прямых и отрезок на одной из них. При помощи одной линейки а) поделите его пополам; б) удвойте его.

Двойное отношение точек на конике. 22 июля

Определение. *Двойным отношением* $(A, B; C, D)$ точек A, B, C и D на конике ω называется двойное отношение прямых $(PA, PB; PC, PD)$, где P — любая точка коники, отличная от A, B, C и D.

Упр1. Докажите, что это определение корректно.

Упр2. Докажите, что в определении можно разрешить точке P быть равной какой-то точке из A, B, C и D, но тогда в двойном отношении следует заменить прямую через P и эту точку на касательную в точке P к ω.

Упр3. Докажите, что проективное преобразование не меняет двойного отношения точек на конике.

1. Докажите, что вписанный четырехугольник является гармоническим тогда и только тогда, когда его вершины образуют гармоническую четверку точек на описанной окружности.

2. Докажите, что двойное отношение не меняется при проецировании точек с коники на себя: если точки A, B, C, D лежат на конике ω, а точка P не лежит на ней, и прямые PA, PB, PC и PD пересекают ω второй раз в точках A', B', C' и D' соответственно, то $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

3. Точки A, B, C и D лежат на конике ω. Прямая ℓ пересекается с прямыми AB, BC, CD и DA в точках K, L, M и N соответственно, и пересекается с ω в точках P и Q. Точка O делит отрезок PQ и отрезок KM пополам. Докажите, что и отрезок LN она делит пополам (*обобщенная теорема о бабочке*).

Вопросы к зачету: алгебра.

1. Три доказательства теоремы Эрдёша-Гинзбурга-Зива (не через теорему Коши-Дэвенпорта).

2. Теорема Коши-Дэвенпорта для произвольной абелевой группы без кручения и для $\mathbb{Z}_p$. Вывод из нее теоремы Эрдёша-Гинзбурга-Зива.

3. Сумма $1^k + \cdots + n^k$ – многочлен степени $k+1$ от n.

4. Интерполяционный многочлен Лагранжа, ЛНЗ геометрических прогрессий с различными знаменателями. ЛНЗ множества $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx$.

5. СЛУ: метод Гаусса, альтернатива Фредгольма. Применения: дискретное уравнение теплопроводности, задача о зарубках на отрезке.

6. Определения линейных пространств, ЛЗ и ЛНЗ систем векторов, их свойства. Изоморфизм пространств.

7. Равносильность нескольких определений базиса, корректность определения размерности, размерность подпространства. Конечномерные пространства с точностью до изоморфизма.

8. Совпадение строчного и столбцового ранга матрицы.

9. Скалярное произведение, размерность ортогонального дополнения к подпространству. Неравенство Фишера, задача про ЕГО.

10. Инвариант Дена. Решение третьей проблема Гильберта.

11. Действие группы на множестве. Орбиты, связь между длиной орбиты и мощностью стабилизатора. Лемма [не] Бернсайда.

12. Поле. Расширение поля. Характеристика поля. Из скольки элементов могут состоять конечные поля?

13. Независимость расширения от порядка присоединения элементов. Присоединение к полю трансцендентного элемента.

14. Присоединение к полю алгебраического элемента.

15. Теорема о размерности башни. Почему алгебраические числа образуют поле – два доказательства. Алгебраическая замкнутость поля алгебраических чисел.

16. Критерий построимости числа ЦЛ. Неразрешимость классических задач на построение.

17. Критерий построимости числа ЦЛ. Построение правильных n-угольников.

Вопросы к зачету: геометрия и комбигео.

18. Полярное преобразование, полярное свойство секущих и касательных, гармонический четырехугольник.

19. Тест Роршаха.

20. Равносильность двух определений линейной функции на плоскости. Примеры линейных функций на плоскости. Прямая Гаусса.

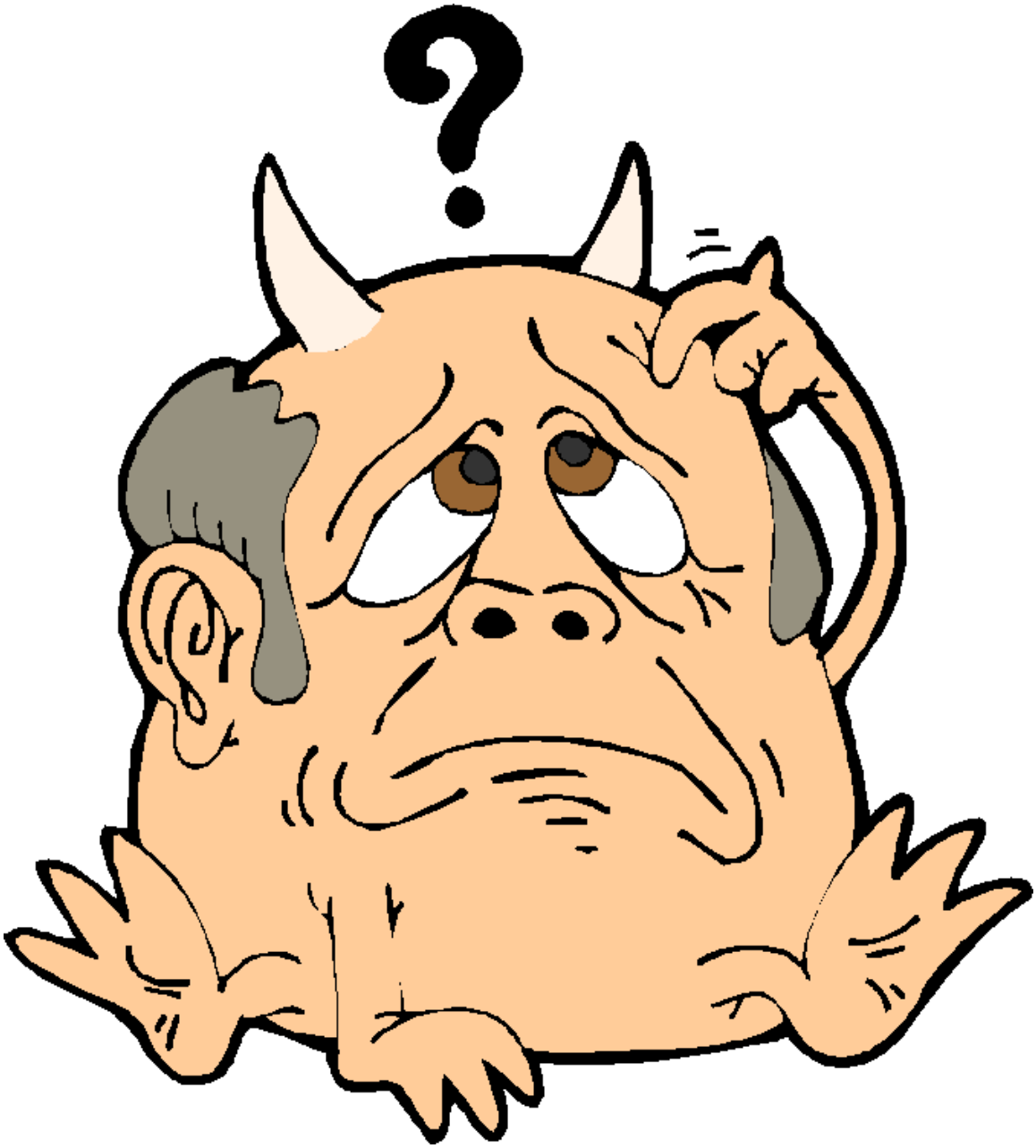
21. Коники, расположение точек относительно коники. Образ коники и точки внутри нее и коники и непересекающей ее прямой при подходящем проективном преобразовании.

22. Линейное движение объектов на плоскости. Примеры конструкций, элементы которой движутся линейно при линейном движении одного из них. Необходимое количество моментов для различных утверждений: три прямые пересекаются в одной точке, три точки лежат на одной прямой. Прямая Обера.

23. Двойное отношение точек на конике: определение, корректность, основные свойства. Обобщенная теорема о бабочке.

24. Равносильность двух определений выпуклой оболочки. Теорема Радона.

25. Теорема Хелли. Теорема Каратеодори.

26. Три определения компакта в $\mathbb{R}^n$. Бесконечная теорема Хелли.

27. Теорема Бляшке. Существование «почти центра симметрии». Теорема Юнга в $\mathbb{R}^n$.