Заключительная олимпиада с решениями

Довывод

1. Вася написал число, увидел, что оно делится на свою последнюю цифру, и поделил на нее. Оказалось, что полученное число тоже делится на свою последнюю цифру, и Вася опять на нее поделил и т. д. После 100 делений Вася получил 1, причем до этого все результаты делений были больше 1. Какое число у него могло быть в начале? (Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.)

Ответ: $y \cdot 5^{99}$, где y – нечётная цифра, отличная от 1 **или** $x \cdot 6^{99}$, где x – нечётная цифра, отличная от 1.

Решение. Рассмотрим одну итерацию процесса, пусть число заканчивалось на цифру x, результат деления – на цифру y. Тогда $xy - x = x(y-1)$ делится на 10. Поскольку числа x, $y-1$ меньше 10, одно из них чётно, а второе равно пяти.

Пусть $x = 5$. Значит, все предыдущие шаги мы тоже делили на 5. Отсюда получаем ответы $y \cdot 5^{99}$, где y – нечётная цифра, отличная от 1.

Пусть $y - 1 = 5$, т.е. $y = 6$. Тогда все следующие шаги, пока не получится 1, мы будем делить на 6. Отсюда получаем ответы $x \cdot 6^{99}$, где x – нечётная цифра, отличная от 1.

2. Докажите, что если произведение трёх чисел равно 1, а их сумма больше суммы их обратных, то ровно одно из этих чисел больше 1.

Решение 1. Условие про то, что сумма чисел больше суммы обратных, на самом деле означает, что сумма чисел p больше суммы попарных произведений q. Наши числа являются корнями многочлена $x^3 - px^2 + qx - 1$. Этот трёхчлен в 1 отрицателен, а старший коэффициент у него положителен, значит, он имеет нечётное количество корней, больших 1, а три таких корня он иметь не может.

Решение 2. На самом деле, то же самое.

Обозначим наши числа за a, b и c. Запишем неравенство $ab + ac + bc - a - b - c < 0$. Добавим и вычтем 1, получим $1 + ab + ac + bc - a - b - c + abc < 0$, откуда $(1-a)(1-b)(1-c) < 0$. Значит, из наших чисел нечётное количество больше 1, но все три не могут быть.

3. Даны два четырехугольника. Для каждого из них выписали в произвольном порядке 6 чисел — длины сторон и диагоналей. Оказалось, что выписанные наборы совпали. Верно ли, что четырехугольники равны?

Решение. Рассмотрим четырехугольник с координатами вершин $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(3,0)$, а так же четырехугольник с координатами вершин $(-2,0)$, $(-1,1)$, $(1,1)$, $(2,0)$. Им будет соответствовать один и тот же набор $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2, \sqrt{10}, \sqrt{10}, 4)$.

4. На продолжениях сторон AB и CB остроугольного треугольника ABC за точку B отмечены точки M и N соответственно, причем $AM = CN = p$, где p — полупериметр треугольника ABC. I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Отрезок BL — диаметр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые LI и MN перпендикулярны.

Решение. Пусть J_A, A_2, A_1 - центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC, точка ее касания этой стороны и точка касания этой стороны вписанной окружности. Аналогично

определяются точки J_C, C_2, C_1. Пусть X - точка пересечения прямых J_AA_2 и J_CC_2. Известно, что $\overrightarrow{BA_2} = \overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{BC_2} = \overrightarrow{C_1A}$. Тогда проекции векторов $\overrightarrow{IL}$ и $\overrightarrow{BX}$ на прямые AB и BC равны. Значит, они равны. Достаточно доказать, что BX перпендикулярна NM. Из того, что точки N и M симметричны A_2 и C_2 относительно J_AJ_C следует, что $\angle(NM, BX) = \angle(NM, AB) + \angle(AB, BX) = \angle(BC, A_2C_2) + \angle(C_2A_2, A_2X) = \angle(BC, A_2X) = 90^\circ$.

5. В теннисном турнире n участников. Они хотят сыграть несколько матчей пара на пару так, чтобы каждый сыграл *против* каждого ровно один раз. При каких n им это удастся?

Ответ: при n сравнимых с $1 \bmod 8$.

Необходимость. Очевидно, что n должно быть нечетным (так как степень каждой вершины обязана быть четной) и общее количество ребер должно быть кратно 4. То есть $n(n-1)/2$ делится на 4, тогда $n-1$ кратно 8.

Пример. Индукция.

База $n = 9$: расставим наши точки по окружности пронумеруем числами от 1 до 9. Возьмем теперь следующий 4-цикл: $1-2-9-6-1$. Легко видеть, что его образы при поворотах замостят весь граф.

Переход $n \mapsto n+8$.

Выделим 8 вершин графа и применим предположение индукции к оставшимся n. Затем выделим среди этих n вершину A и оставшиеся $n-1$ разобьем на пары (это, очевидно, возможно так как n нечетно). Для каждой пары, построим четыре 4-цикла покрывающих все ребра между этой парой и выделенными 8 вершинами. Осталось применить к вершине A и выделенным 8 вершинам базу индукции. Получили разбиение всех ребер между $n+8$ вершинами на 4-циклы.

Вывод

6. Имеется 2012 различных конечных множеств. Докажите, что из них можно выбрать такие 10 множеств, что ни одно из выбранных не является объединением никаких нескольких из остальных 2011 множеств.

Решение. Выберем наибольшее количество множеств таких, что любое из них не является объединением нескольких оставшихся. Докажем, что выбрано не менее 10 множеств. Действительно, рассмотрим любое из невыбранных множеств. Оно является объединением некоторых других. Покажем, что можно обойтись только выбранными. Возьмем невыбранное множество с наименьшим количеством элементов. Оно, очевидно, может представляться только в виде объединения выбранных множеств (так как в каждом из невыбранных не меньше элементов). Теперь рассмотрим второе по количеству элементов среди невыбранных множеств. Оно получается как объединение нескольких выбранных и, возможно, наименьшего множества. То есть мы тоже обошлись только выбранными множествами. Так мы получаем для каждого из невыбранных множеств. Но если выбрано не более 9 множеств, то у них не более $2^9 = 512$ различных объединений, что меньше, чем $2012 - 9 = 2003$. Значит выбранных множеств не меньше 10.

7. Даны 2012 квадратных трехчленов $x^2 - a_ix + b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 2012$, у которых на месте коэффициентов a_i, b_i встречаются по одному разу все числа от 1 до 4024. Никакие два трехчлена

не имеют общих корней. На вещественной прямой отметили все корни этих трехчленов. Докажите, что расстояние между какими-то двумя отмеченными точками меньше $1/250$.

Решение. Рассмотрим только те трехчлены, у которых и a_i и b_i от 1000 до 3984. Заметим, что их точно не меньше, чем 901 (потому что не взято 1029 коэффициентов, каждый из которых запрещает не более одного трехчлена). При этом, меньший корень каждого из таких трехчленов равен $\dfrac{a_i - \sqrt{a_i^2 - 4b_i}}{2}$. Легко проверить, что этот корень, при указанных ограничениях на a_i и b_i, обязан лежать на полуинтервале $(2, 4]$. Тогда по принципу Дирихле расстояниями между какими-то двумя из этих корней меньше $1/450$.

8. На плоскости отмечено бесконечное количество точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Множество A состоит из радиусов вписанных окружностей всевозможных треугольников с вершинами в отмеченных точках. Докажите, что множество A бесконечно.

Решение. Обозначим за $F_{CD}(X)$ функцию от точки X, равную радиусу вписанной окружности треугольника CDX.

Лемма 1. Если $F_{CD}(X_1) = F_{CD}(X_2) =$ и точки X_1 и X_2 находятся в одной полуплоскости относительно CD, то для любой точки Y внутри отрезка X_1X_2 выполнено $F_{CD}(Y) > c$.

Заметим, что $c = \dfrac{S(CDX_1)}{p(CDX_1)} = \dfrac{S(CDX_2)}{p(CDX_2)}$, где S — функция площади, p — функция полупериметра. Пусть Y делит отрезок X_1X_2 в отношении $a\colon b$, где $a+b=1$. Тогда $c = \dfrac{aS(CDX_1) + bS(CDX_2)}{ap(CDX_1) + bp(CDX_2)} = \dfrac{S(CDY)}{ap(CDX_1) + bp(CDX_2)}$. Следовательно, достаточно понять, что $p(CDY) < ap(CDX_1) + bp(CDX_2)$. Но ясно, что $CY < aCX_1 + bCX_2$, аналогично $DY < aDX_1 + bDX_2$, и $CD = aCD + bCD$, откуда сразу вытекает желаемое.

Лемма 2. На луче с вершиной в C функция F_{CD} строго возрастает.

Действительно, пусть точка X лежит на отрезке между точками C и Y. Заметим, что вписанная окружность треугольника CDY получается из вписанной окружности треугольника CDX гомотетией с центром в C. Если ее коэффициент не превосходит 1, то образ вписанной окружности CDX будет лежать в CDX, но тогда образ не может касаться отрезка YD. Значит, в точке Y F_{CD} больше, чем в X.

Предположим, что $|A| = n$ и $A = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$. Известно, что среди достаточно большого количества точек на плоскости найдутся $2n+1$ точек, образующих выпуклый $(2n+1)$-угольник. Обозначим за C и D две любые соседние вершины этого многоугольника. По принципу Дирихле, найдется i такое, что для трех вершин X_1, X_2 и X_3 (нумерация в порядке обхода вершин многоугольника от C до D) многоугольника выполнено $F_{CD}(X_1) = F_{CD}(X_2) = F_{CD}(X_3) = t_i$. Т.к. многоугольник выпуклый, отрезки AX_2 и X_1X_3 пересекаются в точке P. По леммам 2 и 1 верно, что $F_{CD}(X_2) > F_{CD}(P) > t_i$. Противоречие.