Проблемы кузнечиководства.

1. По окружности длины 1 прыгает кузнечик с иррациональным шагом $\alpha > 0$. Докажите, что рано или поздно кузнечик попадет на любую заранее выбранную дугу.

2. Докажите, что последовательность $\sin n$ *всюду плотна* на отрезке $[-1; 1]$ (сначала дайте строгое определение этого интуитивно понятного термина).

Теорема Кронекера. Если $\alpha > 0$ – иррациональное число, то произвольный интервал (a, b) содержит бесконечно много чисел вида $n\alpha - m$, где m, n – неотрицательные целые числа.

Замечание. Иначе говоря, последовательность $\{n\alpha\}$ всюду плотна на отрезке $[0; 1]$.

3. Докажите, что число вида 2^n может начинаться на любую комбинацию цифр.

4. Докажите, что куб целого числа может начинаться на любую комбинацию цифр.

Для самостоятельного решения

5. В каждой целочисленной точке плоскости посажена тростиночка радиуса ε. Докажите, что они загородили собой весь вид, то есть любой луч $y = kx$ пересекает какую-то тростиночку, кроме центральной.

6. Пусть $f(x) = \sin \alpha x + \sin \beta x$. Докажите, что если числа α и β несоизмеримы, то

а) эта функция принимает значения, сколь угодно близкие к 2;

б) эта функция непериодична.

XXVIII Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2012 года • 10 класс (профи) • 6 июля

Проблемы кузнечиководства.

1. По окружности длины 1 прыгает кузнечик с иррациональным шагом $\alpha > 0$. Докажите, что рано или поздно кузнечик попадет на любую заранее выбранную дугу.

2. Докажите, что последовательность $\sin n$ *всюду плотна* на отрезке $[-1; 1]$ (сначала дайте строгое определение этого интуитивно понятного термина).

Теорема Кронекера. Если $\alpha > 0$ – иррациональное число, то произвольный интервал (a, b) содержит бесконечно много чисел вида $n\alpha - m$, где m, n – неотрицательные целые числа.

Замечание. Иначе говоря, последовательность $\{n\alpha\}$ всюду плотна на отрезке $[0; 1]$.

3. Докажите, что число вида 2^n может начинаться на любую комбинацию цифр.

4. Докажите, что куб целого числа может начинаться на любую комбинацию цифр.

Для самостоятельного решения

5. В каждой целочисленной точке плоскости посажена тростиночка радиуса ε. Докажите, что они загородили собой весь вид, то есть любой луч $y = kx$ пересекает какую-то тростиночку, кроме центральной.

6. Пусть $f(x) = \sin \alpha x + \sin \beta x$. Докажите, что если числа α и β несоизмеримы, то

а) эта функция принимает значения, сколь угодно близкие к 2;

б) эта функция непериодична.