Две стороны линейности: физическая линейность.

Определение. Скажем, что объект движется *линейно*, если существует такой вектор $\overrightarrow{v}$, что за время t объект сдвигается на вектор $t \cdot \overrightarrow{v}$.

Пример: Пересечение двух линейно движущихся прямых движется линейно.

Пример: Проекция линейно движущейся точки на линейно движущуюся прямую движется линейно.

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка X такова, что $CX \perp BD$. Из точки X опущены перпендикуляры XB' и XD' на прямые AB и AD, $B' \in AB$, $D' \in AD$. Докажите, что $BB' \cdot BA = DD' \cdot DA$.

2. Дан треугольник ABC. На прямой AC выбраны точки M и N такие, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$. X — основание перпендикуляра из M на BC, Y — основание перпендикуляра из N на AB, H — ортоцентр ABC. Докажите, что B, X, Y и H лежат на одной окружности.

---

3. (a) Дан треугольник ABC. На прямой AC выбрана точка X_1. Из нее проведена прямая, антипараллельная AB, которая пересекла BC в точке X_2. Из нее проведена прямая, параллельная AC, которая пересекла AB в точке X_3. Из нее проведена прямая, антипараллельная BC и т.д. Докажите, что $X_7 = X_1$.

(b) Докажите, что точки $X_1, \ldots, X_6$ лежат на одной окружности (*окружность Такера*).

(c) Докажите, что ее центр лежит на прямой через центр описанной окружности и точку Лемуана.

4. На плоскости даны 4 прямые. Каждые три из них образуют треугольник. Докажите, что ортоцентры этих четырех треугольников лежат на одной прямой (*прямая Обера*).

5. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности. Для любого разбиения этих четырех точек на пары опустим из фиксированной точки P перпендикуляры на две прямые, соединяющие точки, находящиеся в одной паре. После отметим середину отрезка между их основаниями. Докажите, что три полученные точки лежат на одной прямой.