Теорема о размерности башни.

Теорема о размерности башни (часть I). Пусть $K \subset E \subset L$ — поля, причем расширения $K \subset E$ и $E \subset L$ – конечны. Тогда расширение $K \subset L$ конечно и $[L : K] = [L : E] \cdot [E : K]$.

Следствие. Сумма, разность, произведение и частное алгебраических чисел (в данном поле над данным подполем) является алгебраическим числом. Иначе говоря, множество алгебраических чисел (в данном поле над данным подполем) является полем.

Упр1. Найдите размерность и базис расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$.

Упр2. Пусть α, β – два различных корня многочлена многочлена $x^3 - 3$. Найдите размерность и базис расширения $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

Упр3. Докажите, что многочлен $x^5 - 7$ неприводим над полем $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$.

Упр4. Докажите, что число $a\sqrt[3]{3} + b\sqrt[5]{7/2} + c\sqrt[8]{8}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ рационально тогда и только тогда, когда оно равно нулю.

Упр5. А) Поле $F \subset \mathbb{C}$ получено из $\mathbb{Q}$ присоединением квадратных корней из а) ста; б) всех рациональных чисел. Докажите, что в F нет ни одного кубического корня из а) целого; б) рационального числа, который не являлся бы кубом рационального числа.

Б) Изначально дано поле $\mathbb{Q}$. Очередное поле получается из предыдущего присоединением некоторого корня из какого-то элемента этого предыдущего этажа степени 2,3 или 4. Докажите, что ни в каком этаже нет элемента $\sqrt[5]{5}$. ($\sqrt[5]{5}$ *не выражаются через радикалы степеней 2,3 и 4.*)

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Теорема (о размерности башни, часть II). Пусть $K \subset E \subset L$ — поля, причем расширение $K \subset L$ конечно. Тогда расширения $K \subset E$ и $E \subset L$ конечны, причем $[L : K] = [L : E] \cdot [E : K]$.

Теорема об алгебраической замкнутости поля алгебраических чисел. Если некоторое комплексное число является корнем многочлена с алгебраическими (над $\mathbb{Q}$) коэффициентами, то это число алгебраично (над $\mathbb{Q}$).