Проективные преобразования.

Определение. *Коника* — образ окружности при проективном преобразовании. Если прообраз бесконечно удаленной прямой не пересекал окружность, то коника называется *эллипсом*, если касался окружности — *параболой*, если пересекал окружность — *гиперболой*.

Вопрос. Какие точки находятся внутри коники, а какие — вне?

Упр1. Конику и точку внутри нее можно проективным преобразованием перевести в окружность и ее центр.

Упр2. Конику и прямую, не пересекающую ее, можно проективным преобразованием перевести в окружность и бесконечно удаленную прямую.

1. В треугольник ABC вписан эллипс ω, который касается его сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

2. На конике ω отмечены точки A, B, C, D, X, Y, Z, T так, что прямые AC, BD, XZ, YT пересекаются в точке K. Прямые AB и XY пересекаются в точке L, прямые CD и ZT пересекаются в точке M. Докажите, что точки K, L и M лежат на одной прямой.

3. Шестиугольник $ABCDEF$ описан около эллипса ω. Точки касания противоположных сторон шестиугольника с ω соединили отрезками. Полученные три отрезка пересеклись в одной точке. Докажите, что там же пересекутся и диагонали $ABCDEF$.

4. Эллипс ω пересекает стороны AB, BC, CA треугольника ABC в точках C_1 и C_2, A_1 и A_2, B_1 и B_2 соответственно. Касательные к эллипсу в точках A_1 и A_2 пересекаются в точке A'; аналогично определяются точки B' и C'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

---

5. В четырехугольник $ABCD$ вписаны эллипсы ω_1 и ω_2. ω_i касается сторон AB, BC, CD, DA в точках K_i, L_i, M_i и N_i соответственно. ω_1 и ω_2 пересекаются в точках (перечисление против часовой стрелки по любой из этих коник) X, Y, Z и T. Докажите, что прямые AC, BD, XZ, YT, K_1M_1, L_1N_1, K_2M_2, L_2N_2 пересекаются в одной точке.

6. Вписанная в тетраэдр $ABCD$ сфера ω касается его граней ABC, BCD, CDA и DAB в точках D', A', B' и C' соответственно. Оказалось, что отрезки AA' и BB' пересекаются на ω. Докажите, что отрезки CC' и DD' тоже пересекаются на ω.