# Теорема Хелли.

**Бесконечная теорема Хелли.** Пусть есть (возможно бесконечный) набор замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, причем хотя бы одно из них ограничено. Тогда если любые $n+1$ из них имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

**1.** На окружности дана система дуг, причем длина каждой не больше половины окружности. Оказалось, что любые три имеют общую точку. Докажите, что все они имеют общую точку.

**2.** Пусть $F$ ограниченная выпуклая фигура на плоскости. Докажите, что в $F$ найдется такая точка, что любая хорда, проходящая через эту точку, делится ей в отношении $\lambda$ таком, что: $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 2$ (*т.е. эта точка является почти центром симметрии*).

**3.** Докажите, что в любую выпуклую фигуру на плоскости ширины 1 можно вписать круг радиуса $1/3$.

**4.** а) Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^3$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{3/8}$.
б) Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^n$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{\dfrac{n}{2n+2}}$.

---

*XXVIII Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2012 года • 10 класс (профи) • 21 июля*

# Теорема Хелли.

**Бесконечная теорема Хелли.** Пусть есть, возможно бесконечный, набор замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, причем хотя бы одно из них ограничено. Тогда, если любые $n+1$ из них имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

**1.** На окружности дана система дуг, причем длина каждой не больше половины окружности. Оказалось, что любые три имеют общую точку. Докажите, что все они имеют общую точку.

**2.** Пусть $F$ ограниченная выпуклая фигура на плоскости. Докажите, что в $F$ найдется такая точка, что любая хорда, проходящая через эту точку, делится ей в отношении $\lambda$ таком, что: $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 2$ (*т.е. эта точка является почти центром симметрии*).

**3.** Докажите, что в любую выпуклую фигуру на плоскости ширины 1 можно вписать круг радиуса $1/3$.

**4.** а) Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^3$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{3/8}$.
б) Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^n$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{\dfrac{n}{2n+2}}$.

---

*XXVIII Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2012 года • 10 класс (профи) • 21 июля*

# Теорема Хелли.

**Бесконечная теорема Хелли.** Пусть есть, возможно бесконечный, набор замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, причем хотя бы одно из них ограничено. Тогда, если любые $n+1$ из них имеют общую точку, то все они имеют общую точку.

**1.** На окружности дана система дуг, причем длина каждой не больше половины окружности. Оказалось, что любые три имеют общую точку. Докажите, что все они имеют общую точку.

**2.** Пусть $F$ ограниченная выпуклая фигура на плоскости. Докажите, что в $F$ найдется такая точка, что любая хорда, проходящая через эту точку, делится ей в отношении $\lambda$ таком, что: $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 2$ (*т.е. эта точка является почти центром симметрии*).

**3.** Докажите, что в любую выпуклую фигуру на плоскости ширины 1 можно вписать круг радиуса $1/3$.

**4.** а) Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^3$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{3/8}$.
б) Докажите, что любое множество в $\mathbb{R}^n$ диаметра 1 можно покрыть шаром радиуса $\sqrt{\dfrac{n}{2n+2}}$.