Поля.

Опр. *Полем* K называется множество, где определены операции сложения и умножения, причем выполняются следующие свойства:

а) Сложение ассоциативно, коммутативно, обладает нейтральным элементом (он обозначается 0) и обратными элементами.

б) Умножение ассоциативно, коммутативно, обладает нейтральным элементом (он обозначается 1) и для каждого ненулевого элемента существует обратный к нему по умножению.

в) Сложение и умножение связаны законом дистрибутивности: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

г) При этом 0 не совпадает с 1.

Опр. Если K и L — поля, и $K \subset L$, то K называют *подполем* в L, а L — *расширением* K.

Упр1. а) Существует ли расширение поля $\mathbb{R}$? б) Существует ли расширение поля $\mathbb{C}$?

Упр2. а) Докажите, что если в поле $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

б)При каких n множество $\mathbb{Z}_n$ является полем?

Упр3. Постройте поле из четырех элементов (это – не $\mathbb{Z}_4$!).

Загадка. Существует ли поле из шести элементов?

Упр4. Являются ли полями множества комплексных чисел вида а) $a+bi$, б) $a-b\sqrt{2}$, в) $a+b\sqrt{d}$ (где a, b, d — рациональные числа)?

Упр5. Являются ли полями множества комплексных чисел вида а) $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, б) $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$ (где a, b, c, d — рациональные числа)?

Упр6. Из чисел какого вида состоит наименьшее подполе в $\mathbb{C}$, содержащее $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ одновременно (укажите общий вид элементов этого поля и докажите, что других чисел в нем нет)? Это поле естественно обозначить через $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Определение. Пусть имеется расширение $K \subset L$, S — некоторое подмножество в L. Обозначим через $K(S)$ наименьшее (по включению) подполе поля L, содержащее все элементы из K и из S. Мы будем говорить, что $K(S)$ получено *присоединением* элементов S к K.

Упр7. Докажите, что $K(S)$ существует.

Упр8. Докажите, что $K(S)(M) = K(M)(S)$ – расширение не зависит от порядка присоединения элементов – важнейшее свойство!!!

Опр. Два поля K и L называются *изоморфными*, если существует такая биекция φ между их элементами, при которой сумма переходит в сумму, произведение — в произведение.

Упр9. Докажите, что при изоморфизме нулевой элемент переходит в нулевой, единичный — в единичный, разность — в разность, а частное — в частное.

Главная задача. Описать поле, полученное присоединением одного элемента к данному полю.

Определение. Пусть $K \subset L$ — расширение полей. Говорят, что элемент $\alpha \in L$ **алгебраичен** над K, если он является корнем некоторого многочлена с коэффициентами из K. В противном случае говорят, что α **трансцендентен** над K. Мы будем опускать указание поля K, если имеется в виду $\mathbb{Q}$.

Теорема. Если $\alpha \in L$ трансцендентен, то $K(\alpha)$ изоморфно $K(t)$, то есть полю рациональных функций над K от одной переменной.

Упражнения на понимание ситуации.

1. Существует ли расширение $\mathbb{R}$, где уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет корней?

2. а) Является ли изоморфизмом $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ на себя отображение $a + b\sqrt{2} \to a - b\sqrt{2}$?

б) Является ли изоморфизмом $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ на $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ отображение $a + b\sqrt{2} \to a + b\sqrt{3}$?

в) Изоморфны ли эти поля?