Заключительная олимпиада.

Довывод

1. Вася написал число, увидел, что оно делится на свою последнюю цифру, и поделил на нее. Оказалось, что полученное число тоже делится на свою последнюю цифру, и Вася опять на нее поделил и т. д. После 100 делений Вася получил 1, причем до этого все результаты делений были больше 1. Какое число у него могло быть вначале? (Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.)

2. Докажите, что если произведение трёх чисел равно 1, а их сумма больше суммы их обратных, то ровно одно из этих чисел больше 1.

3. Даны два четырехугольника. Для каждого из них выписали в произвольном порядке 6 чисел — длины сторон и диагоналей. Оказалось, что выписанные наборы совпали. Верно ли, что четырехугольники равны?

4. На продолжениях сторон AB и CB треугольника ABC за точку B отмечены точки M и N так, что $AM = CN = p$ (p — полупериметр треугольника). I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Отрезок BL — диаметр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые LI и MN перпендикулярны.

5. В теннисном турнире n участников. Они хотят сыграть несколько матчей пара на пару так, чтобы каждый сыграл *против* каждого ровно один раз. При каких n им это удастся?

Вывод

6. Имеется 2012 различных конечных множеств. Докажите, что из них можно выбрать такие 10 множеств, что ни одно из выбранных не является объединением никаких нескольких из остальных 2011 множеств.

7. Даны 2012 квадратных трехчленов $x^2 - a_i x + b_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 2012$, у которых на месте коэффициентов a_i, b_i встречаются по одному разу все числа от 1 до 4024. Никакие два трехчлена не имеют общих корней. На вещественной прямой отметили все корни этих трехчленов. Докажите, что расстояние между какими-то двумя отмеченными точками меньше $1/250$.

8. На плоскости отмечено бесконечное количество точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой. Множество A состоит из радиусов вписанных окружностей всевозможных треугольников с вершинами в отмеченных точках. Докажите, что множество A бесконечно.