Внутренний математический бой за третье место

1. Произведение положительных чисел $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Докажите, что выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k^2 + \frac{n+1}{n-1}} \leq \frac{n-1}{2}.$$

2. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ перескаются в точке K. Внутри четырёхугольника выбрана точка P такая, что $\angle PAB = \angle PBC$ и $\angle PDC = \angle PCB$. Докажите, что прямая PK проходит через середину BC.

3. На ребрах MA, MB и MC тетраэдра $MABC$ выбраны точки A_1, B_1 и C_1. Точки O_C, O_A и O_B – центры описанных окружностей треугольников MA_1B_1, MB_1C_1 и MC_1A_1. Докажите, что если MO_A перпендикулярно BC и MO_B перпендикулярно CA, то MO_C перпендикулярно AB.

4. На доске были написаны числа от 1 до 1000. Каждую минуту Агафон выбирал 2 числа, стирал их и записывал сумму всех цифр, которые входили в стертые числа. Мог ли он в конце получить цифру?

5. Докажите, что количество способов разрезать прямоугольник на уголки из трех клеток всегда четно.

6. Докажите, что для любого нечётного простого числа существует ровно одно натуральное число n, такое что $n(n+p)$ есть точный квадрат.

7. В стране с N городами некоторые пары соединены дорогами, причем для любых двух городов существует единственный маршрут, который их соединяет. Какое наибольшее число городов, из которых выходит ровно три дороги, может быть?

8. В ряд рубашками вверх лежат 2012 карт. За один ход разрешается убрать любую карту, лежащую рубашкой вверх, если и справа и слева от неё лежит хотя бы одна карта. При этом ближайшая карта слева и ближайшая карта справа переворачиваются. Можно ли действуя так много раз, оставить в ряду ровно две карты?