Матбой опытные профи10 – неопытные преподаватели.

1. Точка P находится внутри остроугольного треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные P относительно сторон треугольника ABC. Оказалось что шестиугольник $AB_1CA_1BC_1$ — описанный. Докажите, что P — точка Торричелли (т. е. точка внутри треугольника, из которой все стороны треугольника ABC видны под равными углами).

2. Назовем натуральное число n *точной степенью*, если оно имеет вид $n = m^k$ при $m, k > 1$. Существует ли такое множество из 2012 натуральных чисел, у которого среднее арифметическое любого непустого подмножества элементов является точной степенью?

3. Пусть $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ – неотрицательные вещественные числа. Докажите, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} \min\{a_i a_j, b_i b_j\} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \min\{a_i b_j, a_j b_i\}.$$

4. Есть карточки с числами от 1 до 100. Фокусник с помощником хотят показать такой фокус. Зритель выбирает пять карточек, отдает их помощнику, тот выбирает из них четыре, и в каком-то порядке выдает фокуснику. Фокусник угадыват оставшуюся пятую карточку. Как показать такой фокус?

5. На плоскости дано $n \geqslant 4$ точек, попарно соединенных отрезками. Докажите, что если все эти отрезки имеют целую длину, то хотя бы $1/6$ этих отрезков имеет длину, кратную 3.

6. Есть несколько городов, некоторые из которых соединены не более чем одной дорогой, из каждого города выходит ровно 4 дороги, соответствующий граф планарен. Вася выехал на машине из города A по произвольному ребру, а затем каждый раз ехал по «средней» дороге, пока ему не надоело. Затем Петя выехал на машине из города $B \neq A$ по произвольному ребру, а затем каждый раз ехал по «средней» дороге, пока ему тоже не надоело. В итоге оказалось, что Петя и Вася побывали в совокупности во всех городах, причем нет города, в котором они побывали бы оба, или же дважды. Докажите, что число городов четно.

7. Найдите все пары простых чисел (p, q), для которых сравнение $a^{3pq} \equiv a \pmod{3pq}$ выполнено для всех $a \in \mathbb{Z}$.

8. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant 1$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Докажите, что найдется такая аддитивная функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $|g(x) - f(x)| \leqslant 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

9. Лягушка прыгает по координатной плоскости из начала координат. После каждого прыжка одна из ее координат увеличивается на 1, а другая не меняется. Докажите, что найдется прямая, содержащая не менее 1000000 точек, в которых побывала лягушка.

10. Дан выпуклый шестиугольник. Пусть s — сумма длин трех отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон. Докажите, что в шестиугольнике существует точка, сумма расстояний от которой до прямых, содержащих его стороны, не превосходит s.