Поля и их расширения.

Опр. *Характеристикой* поля K назовем такое минимальное натуральное число n, что $1 + \ldots + 1 = 0$ (сумма n единиц поля K равна нулю в K). Если же таких чисел нет, то считаем характеристику поля K равной нулю.

Замечание. Характеристика поля либо ноль либо простое число.

Ключевое наблюдение. Если L — расширение поля K, то L образует векторное пространство над K.

Опр. Расширение $K \subset L$ называется *конечным*, если пространство L конечномерно над K. Размерность этого пространства называется *степенью* расширения L и обозначается $[L : K]$.

Упр1. В конечном поле может быть лишь p^n элементов, где p — некоторое простое число. (Для сведения. Для каждого p^n существует ровно одно с точностью до изоморфизма поле из p^n элементов.)

Упр2. Являются ли расширения конечными; если да, то какова их степень: а) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; б) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$; в) $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p(x)$?

Теорема об алгебраичности конечного расширения. Если $K \subset L$ — конечное расширение, то все элементы L алгебраичны над K.

Упр3. Опишите все конечные расширения а) $\mathbb{C}$; б) $\mathbb{R}$.

Упр4. Если элемент α алгебраичен над K, то он является корнем некоторого неприводимого многочлена $f \in K[x]$. Более того, если $g(\alpha) = 0$ для некоторого $g \in K[x]$, то g делится на f. В частности указанный неприводимый многочлен определен однозначно с точностью до множителя из K.

Опр. В обозначениях предыдущего упражнения степень многочлена f называется степенью алгебраичности α над полем K.

Теорема о присоединении корня. Пусть α алгебраичный над K элемент степени n. Докажите, что $K \subset K(\alpha)$ конечное расширение, более того, его степень равна n и $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ — его базис.

Упр5. Пусть α_1, α_2 — два корня неприводимого многочлена f. Тогда поля $K(\alpha_1)$ и $K(\alpha_2)$ изоморфны. Приведите пример, показывающий, что они могут не совпадать.

Упр6. Докажите, что число $\sqrt[5]{3} - 7\sqrt[5]{9} + 4$ является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Оцените степень многочлена. Как найти этот многочлен?