Размерность.

Определение. Система образующих S пространства называется его *базисом*, если всякий элемент пространства представляется в виде ЛК элементов из S *единственным* образом.

Замечание. Неочевидно, существует ли базис в произвольном пространстве.

Теорема (о равносильных определениях базиса). Следующие условия равносильны:

а) S — базис пространства V;

б) S — линейно независимая система образующих пространства V;

в) S линейно независимо, но теряет это свойство при добавлении любого вектора из V;

г) S — система образующих пространства V, но теряет это свойство при удалении любого вектора.

Таким образом, базис векторного пространства можно описать, с одной стороны, как *минимальную систему образующих*, а с другой – как *максимальную линейно независимую систему.* Возникая на узком стыке двух противоположных качеств, базисы не могут не приобрести ценные свойства.

Теорема (о линейной зависимости линейных комбинаций). Если в пространстве есть базис из n векторов, то любые $n+1$ векторов линейно зависимы. Более того, любые $n+1$ векторов, являющиеся ЛК n векторов, линейно зависимы.

Следствие (корректность определения размерности). Если в пространстве есть базис из n векторов, то любой другой базис тоже содержит n векторов.

Определение. Векторное пространство, имеющее конечный базис, называется *конечномерным*, а число векторов в каждом из его базисов называется его *размерностью* ($\dim$). Если в векторном пространстве нет конечного базиса, оно называется *бесконечномерным.*

Замечание. Из аксиомы выбора следует, что базис существует в любом (ненулевом) пространстве, и что любые два базиса равномощны.

Упр1. Два конечномерных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны. В частности, любое конечномерное пространство V изоморфно $K^{\dim V}$.

Упр2. а) К любой ЛНЗ системе векторов (конечномерного) пространства можно добавить векторы так, чтобы получился базис.

б) Из любой системы образующих (конечномерного) пространства можно удалить часть векторов так, чтобы оставшиеся образовывали базис.

Упр3. Подпространство конечномерного пространства конечномерно. При этом размерность собственного подпространства меньше размерности пространства.

Науку – в жизнь!

Сюжет 1, в котором появляются пространства.

1. Докажите, что множество всех подмножеств конечного множества невозможно превратить в пространство над $\mathbb{Z}_3$.

2. а) Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

б) Рассмотрим теперь те раскраски, для которых из каждой вершины выходит фиксированное по четности число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки, или же их нет вообще.

3. В каждую клетку шахматной доски вписано по действительному числу. Разрешается за один ход прибавить по α к любому квадрату 3×3 или 4×4 (α меняется от хода к ходу). Все ли расстановки чисел можно получить?

Сюжет 2, в котором появляются характеристические векторы.

4. В классе k девочек и $n > k$ мальчиков. Некоторым мальчикам нравятся некоторые девочки. Докажите, что найдется некоторый непустой набор мальчиков такой, что каждая девочка нравится четному количеству мальчиков из этого набора.

5. Есть табло из лампочек размера 8×8. За ход можно инвертировать 15 лампочек – все лампочки в некоторой строке и некотором столбце. За какое наименьшее число можно инвертировать все лампочки на табло?