Матбой профи9–профи10.

1. В ряд выстроено n бюрократов различного веса, в порядке возрастания весов. Непустое множество бюрократов называется *правильным*, если вместе с каждыми двумя бюрократами оно содержит и всех бюрократов промежуточного веса между ними. Какое наибольшее число различных комиссий можно образовать из этих n бюрократов, если пересечение любых двух различных комиссий должно быть правильным множеством?

2. Рассмотрим множество A всех последовательностей длины n с элементами из $\mathbb{Z}_2$, с обычной операцией сложения последовательностей. Функция $f : A \to A$ обладает двумя свойствами: 1) $f(0) = 0$; 2) если последовательности a и b отличаются ровно в k позициях, то последовательности $f(a)$ и $f(b)$ тоже отличаются ровно в k позициях. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

3. Докажите, что невозможно разбить 190 последовательных натуральных чисел на два непересекающихся множества так, чтобы произведения чисел в этих двух множествах были бы равны.

4. На плоскости дано $n \geqslant 4$ точек, попарно соединенных отрезками. Докажите, что если все эти отрезки имеют целую длину, то хотя бы $1/6$ этих отрезков имеет длину, кратную 3.

5. На плоскости есть 2009 точек общего положения. Докажите, что число треугольников, в каждом из которых лежит любая фиксированная из этих точек (строго внутри), четно.

6. Есть несколько городов, некоторые из которых соединены не более чем одной дорогой, из каждого города выходит ровно 4 дороги, соответствующий граф планарен. Вася выехал на машине из города A по произвольному ребру, а затем каждый раз ехал по «средней» дороге, пока ему не надоело. Затем Петя выехал на машине из города $B \neq A$ по произвольному ребру, а затем каждый раз ехал по «средней» дороге, пока ему тоже не надоело. В итоге оказалось, что Петя и Вася побывали в совокупности во всех городах, причем нет города, в котором они побывали бы оба, или же дважды. Докажите, что число городов четно.

7. Внутри треугольника ABC выбрана точка P таким образом, что $\angle PAB = \angle PCB = \frac{1}{4}(\angle A + \angle C)$. BL — биссектриса этого треугольника. Прямая PL пересекает описанную окружность треугольника APC в точке Q. Докажите, что прямая QB — биссектриса угла AQC.

8. Дан многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ с рациональными коэффициентами, причем $d < 0$. Произведение каких-то двух корней $P(x)$ рационально. Докажите, что их сумма тоже рациональна.

9. Суду предъявлены 100 одинаковых с виду монет. Суд уже установил, что среди них есть 2 или 3 фальшивые, все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые - тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Может ли он убедить суд, что фальшивых монет три, а не две, не разгласив ни про какую монету фальшивая она или настоящая? (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)

10. Четырехугольник $ABCD$ является одновременно вписанным и описанным. Вписанная окружность касается его сторон AB и CD в точках X и Y соответственно. Перпендикуляры, восставленные к сторонам AB и CD в точках A и D соответственно, пересекаются в точке U, перпендикуляры к ним же в точках X и Y пересекаются в точке V, и, наконец, в точках B и C — в точке W. Докажите, что U, V, W лежат на одной прямой.