p-адические числа

Спецкурс

Определение: целым p-адическим числом называется запись в p-ичной системе счисления, возможно бесконечная влево. Сложение и умножение p-адических чисел определяется естественным образом, при этом для того, чтобы вычислить n последних цифр суммы или произведения достаточно знать n последних цифр слагаемых или множителей. Нецелое p-адическое число может иметь также несколько (конечное количество) знаков после запятой.

1. Вычислите в 7-адических числах а) $\ldots 6666+1$; б) $\ldots 3334\cdot 2$. в) Запишите в 7-адических числах а) $1/7$; б) $27/49$.

2. Как записывается в 7-адических числах $\frac{1}{3}$?

3. а) Докажите, что любое целое p-адическое число, заканчивающееся не на 0, имеет обратный элемент по умножению среди целых p-адических чисел. б) Докажите, что любое p-адическое число, кроме 0, обратимо.

Таким образом, для p-адических чисел определены операции сложения, вычитания, умножения и деления, обладающие естественными свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

4. Докажите, что из целого p-адического числа извлекаетя p-адический корень тогда и только тогда, когда его последняя ненулевая цифра является квадратичным вычетом по модулю p, а количество нулей на конце чётно.

Определение: Очевидно, любое ненулевое p-адическое число x можно представить в виде $y\cdot p^k$, где y – целое p-адическое число, заканчивающееся не на 0. Функция $|x|_p = p^{-k}$ называется *p-адической нормой* числа x. При этом $|0|_p$ считается равной 0.

5. Докажите, что для нормы выполняются следующие свойства: а) мультипликативность: $|x\cdot y|_p = |x|_p \cdot |y|_p$; б) неравенство треугольника: $|a \pm b|_p \le |a|_p + |b|_p$

Выполнение неравенства треугольника позволяет нам при помощи нормы определить p-адическую метрику, задав расстояние между числами a и b как $|a-b|_p$. Понятно, что для этой метрики выполняются другие необходимые свойства: расстояние между двумя числами не зависит от порядка, в котором они берутся и равно нулю тогда и только тогда, когда эти числа совпадают.

Определение: Рассмотрим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность p-адических чисел. Число x называется (*p-адическим*) *пределом* этой последовательности, если $|x_n - x|_p$ стремится к нулю.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *фундаментальной* (*сходящейся в себе*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что для любых $n, m > N$ верно неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

6. Докажите, что для последовательностей p-адических чисел выполняется *критерий Коши*: последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

На самом деле в жизни всё не так, как на этом листочке, а почти что в обратном порядке. Сначала мы пытаемся ввести мультипликативную и удовлетворяющую неравенству треугольнику норму на рациональных числах и обнаруживаем, что это можно сделать только двумя способами: описанным выше, а также классическим, где в роли нормы выступает модуль. Потом обнаруживаем, что в поле рациональных чисел относительно нашей нормы имеются дырки: не любая фундаментальная последовательность сходится, что, вообще говоря, противоестественно. Тогда мы затыкаем эти дырки, добавляя к рациональным числам все пределы фундаментальных последовательностей и у нас получаются p-адические числа.

Почему мы говорим именно о p-адических числах, где p – простое, а не о n-адических для произвольного натурального n? Дело в том, что полученная аналогичным образом алгебраическая структура не будет иметь деления, опрелённого для всех чисел.

7. Докажите, что среди 10-адических числах есть делители нуля, т.е. два ненулевых числа, которые в произведении дают 0.