Мера множеств

Все множества, которые мы рассматриваем, подмножества прямой.

1.Верно ли, что пересечение (объединение) открытых (замкнутых) множеств открыто (замкнуто)?

2.Что изменится в предыдущей задаче, если допустить счетное пересечение (объединение)?

3.Придумайте пример замкнутого множества на отрезке, которое содержит несчетное число точек и не содержит ни одного интервала.

4.Докажите, что любое открытое множество есть не более, чем счетное объединение непересекающихся интервалов (возможно бесконечных).

5.Скажем, что множество имеет меру 0, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть счетным числом интервалов суммарной длины меньше ε.

а) Любое счетное множество имеет меру 0.

б) Открытое множество не может иметь меру 0.

в) Множество Кантора имеет меру 0.

г) Может ли пример в 3 задаче не иметь меру 0?

6.Можно ли каждому множеству на отрезке $[0, 1]$ сопоставить вещественное неотрицательное число так, чтобы пустому множеству был сопоставлен 0, всему отрезку - 1, а любому счетному объединению непересекающихся множеств была сопоставлена сумма чисел, сопоставленных множествам?

Для самостоятельного решения

7. Придумайте непрерывную биекцию на отрезка на себя, которая почти всюду постоянна (т.е. множество точек, в любой окрестности которых функция принимает более одного значения, имеет меру 0).

Обязательная задача 6

XXVIII Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2012 года • 10 класс, обычные группы • 20 июля

Мера множеств

Все множества, которые мы рассматриваем, подмножества прямой.

1.Верно ли, что пересечение (объединение) открытых (замкнутых) множеств открыто (замкнуто)?

2.Что изменится в предыдущей задаче, если допустить счетное пересечение (объединение)?

3.Придумайте пример замкнутого множества на отрезке, которое содержит несчетное число точек и не содержит ни одного интервала.

4.Докажите, что любое открытое множество есть не более, чем счетное объединение непересекающихся интервалов (возможно бесконечных).

5.Скажем, что множество имеет меру 0, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть счетным числом интервалов суммарной длины меньше ε.

а) Любое счетное множество имеет меру 0.

б) Открытое множество не может иметь меру 0.

в) Множество Кантора имеет меру 0.

г) Может ли пример в 3 задаче не иметь меру 0?

6.Можно ли каждому множеству на отрезке $[0, 1]$ сопоставить вещественное неотрицательное число так, чтобы пустому множеству был сопоставлен 0, всему отрезку - 1, а любому счетному объединению непересекающихся множеств была сопоставлена сумма чисел, сопоставленных множествам?

Для самостоятельного решения

7. Придумайте непрерывную биекцию на отрезка на себя, которая почти всюду постоянна (т.е. множество точек, в любой окрестности которых функция принимает более одного значения, имеет меру 0).

Обязательная задача 6