ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ ЧИСЛА МАЛЕРА [1]

Ашум Каибханов и Аркадий Скопенков [2]

Аннотация. Приводятся простые доказательства трансцендентности чисел Лиувилля и Малера. Первое из них известно специалистам, а второе, по-видимому, является новым. Доказательства доступны старшеклассникам.

Введение.

Число x называется *трансцендентным*, если оно не является корнем уравнения

$$a_t x^t + a_{t-1}x^{t-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \text{с целыми} \qquad a_t \neq 0,\ a_{t-1}, \dots, a_0.$$

В университете или даже в старших классах изучается простое теоретико-множественное доказательство существования трансцендентных чисел [KR01, Гл. 2, §6]. Оно не дает конкретного примера трансцендентного числа. Приведение *явных* примеров трансцендентных чисел и доказательство их трансцендентности более трудно. Первый явный пример трансцендентного числа был приведен Жозефом Лиувиллем в 1835 [KR01, Гл. 2, §6].

Теорема Лиувилля. *Число* $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$ *трансцендентно.*

Общая Теорема Лиувилля. *Для любого многочлена степени n с рациональными коэффициентами и его корня z существует такое M, что для любых целых взаимно простых $q > M$ и p выполнено* $|z - \frac{p}{q}| > \frac{1}{Cq^n}$ [KR01, Гл. 2, §6].

В 1929 Курт Малер [Mah29] доказал трансцендентность следующего числа.

Теорема Малера. *Число* $\mu = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n}$ *трансцендентно.*

Эта трансцендентность не следует ни из общей теоремы Лиувилля, ни из теорем Туэ, Зигеля и Рота [KR01, Гл. 2, §6, Fel83]. В работе [Mah29] был получен более общий результат. Но доказательство в [Mah29] (так же как и в [Nis96]) не элементарно и длинно, ср. [Gal80].

Мы приведем короткое доказательство трансцендентности числа Лиувилля. Это доказательство представлено в следующем пункте и известно специалистам. К сожалению, в математических кружках обычно изучаются более сложные доказательства.

Основной результат заметки — *короткое элементарное доказательство трансцендентности числа Малера* (основанное на двоичной записи). Видимо, это доказательство является новым. Оно представлено в пункте 'Доказательство теоремы Малера' и не использует остальной части заметки. Но для удобства читателей мы представляем некоторые идеи этого доказательства в пункте 'Идея простого доказательства теоремы Малера'. Приводимые идеи дают более общий результат, см. последний пункт.

Доказательство теоремы Лиувилля.

Обозначим $\lambda_s = \sum\limits_{n=0}^{s} 2^{-n!}$.

Сначала мы докажем, что *число Лиувилля λ иррационально.* Предположим, напротив, что существует линейный многочлен $f(x) = bx + c$ с целыми коэффициентами $b \neq 0$ и

[1] Это обновленная версия заметки *'Примеры трансцендентных чисел', Мат. Просвещение 10 (2006) 176–184.* Заметка представлялась в 2002 г. А. Каибхановым на международной конференции Intel ISEF (США, Луисвилль), И. Никокошевым и А. Скопенковым на Летней Конференции Турнира Городов (Россия, Белорецк) а также А. Скопенковым в Кировской ЛМШ, Московской ОВШ и на кружках 'Математический семинар', 'Олимпиады и математика'. Благодарим В. Волкова, А. Галочкина, Д. Лешко, А. Руховича и Л. Шабанова за полезные обсуждения.

[2] Поддержан грантом фонда Саймонса. Инфо: www.mccme.ru/~skopenko

c такой, что $f(\lambda) = 0$. Заметим, что это уравнение имеет только один корень, значит $f(\lambda_s) \neq 0$. Мы получим противоречие из следующих неравенств для $s = |b|$:

$$2^{-s!} \;\leq\; |f(\lambda_s)| \;=\; |f(\lambda) - f(\lambda_s)| \;=\; |b| \cdot (\lambda - \lambda_s) \;<\; 2|b| \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Первое неравенство верно, так как $f(\lambda_s) \neq 0$ может быть представлена как дробь со знаменателем $2^{s!}$. Последнее неравенство верно, так как

$$\lambda - \lambda_s \;<\; 2^{-(s+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \;=\; 2 \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Сейчас мы докажем, что *число Лиувилля λ не является квадратной иррациональностью,* т.е. не является корнем квадратного уравнения $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами $a \neq 0$, b и c. Предположим, напротив, что λ является корнем такого уравнения. Так как квадратное уравнение имеет не более двух корней, то $f(\lambda_s) \neq 0$ для достаточно больших s. Тогда для достаточно больших s мы получим противоречие из следующих неравенств:

$$2^{-2s!} \;\leq\; |f(\lambda_s)| \;=\; |f(\lambda) - f(\lambda_s)| \;=\; (\lambda - \lambda_s) \cdot |a(\lambda + \lambda_s) + b| \;<\; (2|a|\lambda + |b|) \cdot 2 \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Первое неравенство верно, так как $f(\lambda_s) \neq 0$ может быть представлена как дробь со знаменателем $2^{2s!}$. Последнее неравенство доказывается аналогично случаю линейного многочлена.

Теперь мы приведем доказательство *трансцендентности числа Лиувилля λ.* Предположим, напротив, что число λ является корнем алгебраического уравнения $f(x) = a_t x^t + a_{t-1}x^{t-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами $a_0, \ldots, a_{t-1}, a_t \neq 0$. Так как это уравнение имеет лишь конечное число корней, то $f(\lambda_s) \neq 0$ для достаточно больших s. Тогда для достаточно больших s мы получим противоречие из следующих неравенств:

$$2^{-ts!} \;\leq\; |f(\lambda_s)| \;=\; |f(\lambda) - f(\lambda_s)| \;=\; (\lambda - \lambda_s) \cdot \left| \sum_{0 \leq i < n \leq t} a_n \lambda^{n-1-i} \lambda_s^i \right| \;<\; C \cdot 2^{-(s+1)!}.$$

Первое неравенство верно, т.к. $f(\lambda_s) \neq 0$ является дробью со знаменателем $2^{ts!}$. Последнее неравенство доказывается аналогично случаю линейного многочлена. $\square$

Идея простого доказательства теоремы Малера.

Продемонстрируем идею доказательства на следующем примере. Докажем, что число

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-2^n} = 0,11010001000000010\ldots_{10}$$

не является *квадратной иррациональностью*, т.е. корнем квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами b и c. (Аналогично доказывается, что μ не является квадратной иррациональностью.) Рассмотрим десятичную запись числа $-b\nu - c$ для некоторых целых b и c одного знака (случай различных знаков доказывается аналогично). Рассмотрим ненулевые цифры в этой десятичной записи, расположенные достаточно далеко от запятой. Ясно, что они образуют ‘сгустки’ около позиций с номерами 2^n: каждый ’сгусток’ представляет число b. Например для $b = -17$ мы имеем следующее:

$$17\nu - c = \ldots, 87170017000000170\ldots017\ldots.$$

А в десятичной записи числа

$$\nu^2 = \sum_{k,l=0}^{\infty} 10^{-2^k-2^l} = 0,0121220...122020002000000012...{}_{10}$$

некоторые ненулевые цифры расположены около позиций с номерами 2^k+2^l, где $k \neq l$. Но для достаточно больших k и l на этих же позициях числа $-b\nu-c$ стоят нули. Следовательно $\nu^2 \neq -b\nu - c$.

Простое доказательство теоремы Малера.

Пусть, напротив, $f(\mu) = a_t x^t + a_{t-1}x^{t-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ для некоторых целых $a_t \neq 0,\ a_{t-1}, \ldots, a_0$. Раскрывая скобки, получим

$$\mu^q = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n}\right)^q = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(q) 2^{-n},$$

где $d_n(q)$ есть количество упорядоченных представлений числа n в виде суммы q степеней двойки (не обязательно различных степеней). Другими словами, $d_n(q)$ является количеством упорядоченных наборов $(w_1, \ldots, w_q)$ длины q таких, что $n = 2^{w_1} + \cdots + 2^{w_q}$ (в этих наборах допускаются равные числа). Например, $d_3(2) = 2$, поскольку $3 = 2^0 + 2^1 = 2^1 + 2^0$. По определению полагаем $d_0(0) = 1$.

Имеем

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{-n}, \quad \text{где} \quad d_n = a_t d_n(t) + a_{t-1} d_n(t-1) + \cdots + a_0 d_n(0).$$

Ясно, что $d_n(q) = 0$ тогда и только тогда, когда n имеет более q единиц в двоичной записи. Обозначим через U_q множество чисел n, имеющих не более q единиц в двоичной записи. Тогда $d_n = 0$ для $n \notin U_t$. Для каждого p положим $k = k(p) := 2^{t+p}$. Число $m = m(p) := 2^p(2^t - 1)$ — наибольшее число из U_t, меньшее k. Число $s = s(p) := 2^p(2^t - 1) - 2^{p-1}$ — наибольшее число из U_t, меньшее m. Тогда

$$\{2^s f(\mu)\} \ = \ \left\{\sum_{n=0}^{\infty} d_n 2^{s-n}\right\} \ = \ \left\{d_m 2^{s-m} + \sum_{n=k}^{\infty} d_n 2^{s-n}\right\}.$$

Это отлично от нуля, ибо

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} d_n 2^{s-n}\right| \ \overset{(1)}{<} \ |d_m| 2^{s-m} \ \overset{(2)}{<} \ 1/2.$$

Для доказательства неравенств (1) и (2) нам понадобится следующая лемма, которую мы докажем позже.

Лемма о представлении. *Количество $d_n(q)$ упорядоченных представлений числа n в виде суммы q степеней двойки не превосходит $(q!)^2$.*

Из леммы о представлении получаем, что существует число $D = D(f)$ такое, что $|d_n| \leq D$ для каждого n. Следовательно неравенство (2) верно, т.к. $|d_m| 2^{s-m} \leq D \cdot 2^{-2^{p-1}} < 1/2$ для достаточно больших p. Неравенство (1) верно, поскольку для достаточно больших p

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} d_n 2^{s-n}\right| \ \leq \ D \sum_{n=k}^{\infty} 2^{s-n} \ = \ D \cdot 2^{s+1-k} \ = \ D \cdot 2^{s-m+1-2^p} \ < \ 2^{s-m} \ \leq \ |d_m| 2^{s-m}.$$

Здесь последнее неравенство верно, поскольку $m \in U_t - U_{t-1}$, и $d_m(q) = 0$ для $q < t$, следовательно $d_m = a_t d_m(t) \neq 0$. $\square$

Доказательство леммы о представлении. (Предложено В. Волковым.) Индукция по q. Для $q = 0$ имеем $d_0(0) = 1 \leq 0!^2$. Шаг индукции вытекает из

$$d_n(q+1) \leq 1 + q^2 d_n(q).$$

Докажем это неравенство. Наборов $\vec{w} := (w_1, \ldots, w_{q+1})$, для которых $n = 2^{w_1} + 2^{w_2} + \cdots + 2^{w_{q+1}}$ и в которых все числа различны, не более одного. В каждом наборе $\vec{w} := (w_1, \ldots, w_{q+1})$, для которого $n = 2^{w_1} + 2^{w_2} + \cdots + 2^{w_{q+1}}$ и в котором не все числа различны, 'объединим две равные степени двойки и поставив их на место левой из них'. Получим некоторый набор $f(\vec{w}) = \vec{v} := (v_1, \ldots, v_q)$, для которого $n = 2^{v_1} + 2^{v_2} + \cdots + 2^{v_q}$. Возможно, набор $f(\vec{w})$ строится по набору $\vec{w}$ неоднозначно; выберем некоторое такое соответствие f. Набор $\vec{w}$ получается из набора $f(\vec{w})$ 'разделением одной из степеней двоек на две и постановкой полученной новой степени двойки правее исходной'. Поэтому у каждого набора $\vec{v}$, для которого $n = 2^{v_1} + 2^{v_2} + \cdots + 2^{v_q}$, не более q^2 прообразов при отображении f. Это доказывает нужное неравенство. $\square$

Другое доказательство леммы о представлении. Для $q = 0$ имеем $d_0(0) = 1 \leq 0!^2$. Для $q \geq 1$ имеем $d_n(q) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} d_{n-2^r}(q-1)$. Следовательно, при помощи индукции по q получаем, что достаточно доказать следующее утверждение:

для каждого $n \in U_q$ существует не более q^2 целых $r \geq 0$ таких, что $n - 2^r \in U_{q-1}$.

Рассмотри двоичное представление числа $n \in U_q$:

$$n = 2^{w_k} + 2^{w_{k-1}} + \cdots + 2^{w_1}, \quad \text{где} \quad w_k > w_{k-1} > \cdots > w_1 \geq 0 \quad \text{и} \quad k \leq q.$$

Обозначим $w_0 = -1$. Так как $n - 2^r < 0$ для $r > w_k$, то достаточно доказать, что

для каждого $i = 1, 2, ..., k$ существует не более q целых $r \in [w_{i-1} + 1, w_i]$ таких, что $n - 2^r \in U_{q-1}$.

Следовательно, достаточно доказать, что

для каждого $i = 1, 2, ..., k$ и $r \in [w_{i-1} + 1, w_i - q]$ имеем $n - 2^r \notin U_{q-1}$.

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что $2^{w_i} - 2^r = 2^{w_i - 1} + 2^{w_i - 2} \cdots + 2^r$ есть сумма $w_i - r \geq q$ различных степеней двойки, каждая из которых больше $2^{w_{i-1}}$ и меньше $2^{w_i} < 2^{w_{i+1}}$. Поэтому число $n - 2^r$ представляется в виде суммы более чем $q - 1$ различных степеней двойки. Значит, $n - 2^r \notin U_{q-1}$. $\square$

Обобщение.

Аналогично доказывается, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n 2^{-2^n}$ трансцендентно для любой ограниченной последовательности $\{b_n\}$ целых чисел, среди которых бесконечно много ненулевых.

Предположим теперь, что дана строго возрастающая последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел.

Пусть дано натуральное число q. Натуральное число m называется *q-представимым*, если m можно представить в виде суммы не более чем q членов последовательности $\{a_i\}$: $m = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_q}$. Эти члены не обязательно различны (например, число $m = a_2 + a_2$ является 2-представимым).

Последовательность $\{a_i\}$ называется *q-разреженной*, если для любого целого M существует три последовательных q-представимых числа a, b и c, промежутки между которыми больше M (т.е. таких, что $b - a > M$ и $c - b > M$).

Последовательность $\{a_i\}$ называется *разреженной*, если она q-разреженная для любого q.

Например, последовательность $a_i = i$ всех целых положительных чисел является 1-представимой, следовательно, эта последовательность не 1-разрежена и тем более не разрежена. При доказательстве теоремы Малера было доказано, что последовательность 2^i является разреженной.

Последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел называется *q-рыхлой*, если количество способов представления числа n в виде суммы q членов этой последовательности (не обязательно различных) не превосходит некоторой константы, не зависящей от n (но, возможно, зависящей от q). Сформулируем это немного по-другому. Для любых натуральных q и n обозначим через $d_n(q)$ количество представлений числа n в виде суммы q членов последовательности $\{a_i\}$ (не обязательно различных членов). Другими словами, $d_n(q)$ — это число решений уравнения $n = a_{i_1} + \cdots + a_{i_q}$ с $i_1 \leq \cdots \leq i_q$. Последовательность $\{a_i\}$ называется *q-рыхлой*, если существует число C_q такое, что $d_n(q) < C_q$ при любом n.

Последовательность $\{a_i\}$ называется *рыхлой*, если она является q-рыхлой для любого натурального q.

Например последовательность $a_i = i$ не рыхлая и даже не 2-рыхлая. Действительно, натуральное число n имеет не менее $n/2-1$ представлений в виде суммы двух натуральных чисел, т.о. $d_n(2) \geq n/2 - 1$. Из леммы о представлении вытекает, что последовательность 2^i является рыхлой.

Аналогично доказательству теоремы Малера можно доказать следующий результат.

Теорема. *Если последовательность $\{a_n\}$ рыхлая и разреженная, то число $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n 2^{-a_n}$ трансцендентно для любой ограниченной последовательности $\{b_n\}$ целых чисел.*

Было бы интересно выяснить, трансцендентны ли следующие числа (например, применив приведенную теорему или метод ее доказательства):

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n2^{-2^n}$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n-2^n}$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-[1,1^n]}$.
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-f_n}$, где $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_0 = f_1 = 1$ — последовательность Фибоначчи.

Было бы интересно обобщить наше доказательство трансцендентности числа Малера и теоремы о редкости до достаточного условия трансцендентности числа, включающего два приближения этого числа.

Литература.

[Fel83] Н. Фельдман, Алгебраические и трансцендентные числа, Квант, N7 (1983), 2–7.

[Gal80] А. Галочкин, О мере трансцедентности значений функций, удовлетворяющих некоторым функциональным уравнениям, Мат. Заметки, 27:2 (1980), 175–183.

[KR01] Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика? МЦНМО, Москва, 2001.

[Mah29] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, Mathematische Annalen, 1 (1929) 342–366.

[Nis96] K. Nishioka, Mahler Functions and Transcendence, Lecture Notes in Math. **1631** (1996), Springer-Verlag, Berlin-New York.