# Теорема Коши о жёсткости многогранника

*Длиной стороны сферического многоугольника* называется длина дуги, образующей сторону.

1. *Лемма Коши (Cauchy's Arm Lemma).* Докажите, что если у двух сферических $n$ — угольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ равны длины соответствующих сторон, кроме $A_1A_n$ и $B_1B_n$, равны и $\angle A_2 \leq \angle B_2, ..., \angle A_{n-1} \leq \angle B_{n-1}$. Докажите, что $A_1A_n \leq B_1B_n$.

А) Докажите, что для сферического треугольника выполняется первая теорема косинусов: $cosa = cosbcosc + sinbsinccos\alpha$, $a, b, c$ — длины сторон, $\alpha$ — угол, противолежащий $a$.

Б) Докажите утверждение леммы для сферического треугольника.

В) Докажите по индукции утверждение леммы для произвольного сферического n — угольника.

Замечание. Если повернуть сторону $A_{n-1}A_n$ так, чтобы угол при вершине $A_{n-1}$ стал равен $B_{n-1}$, может получиться невыпуклый многоугольник. В этом случае нужно рассмотреть последний момент, когда еще сохранялась выпуклость.

2. Пусть у двух сферических $n$ — угольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ равны длины соответствующих сторон равны, но сами многоугольники не равны. Пометим угол $A_i$ знаком плюс, если $\angle A_i > \angle B_i$ и минус, если $\angle A_i < \angle B_i$. Докажите, что при обходе многоугольника $A_1A_2...A_n$ число строгих перемен знака (его называют индексом многоугольника) не меньше 4.

Два многогранника называют эквивалентными, если между их гранями, рёбрами и вершинами установлены взаимно-однозначные соответствия, сохраняющие отношение инцидентности: если две грани соответствуют друг другу, то принадлежащие им рёбра также соответствуют друг другу, а если два ребра соответствуют друг другу, то их концы также соответствуют друг другу.

Теорема Коши о жёсткости выпуклых многогранников: если любые две соответственные грани эквивалентных выпуклых многогранников можно совместить движением, переводящим соответственные вершины в соответственные, то многогранники равны.

Сравним двугранные углы многогранников и на ребрах первого многогранника поставим плюс, если двугранный угол при этом ребре больше, чем у второго, и минус, если двугранный угол меньше. При этом не все рёбра могут оказаться помеченными. Для доказательства теоремы Коши достаточно показать, что нет помеченных ребер.

3. Докажите, что все ребра не могут быть помечены.

4. Докажите, что если из вершины многогранника выходит хотя бы одно помеченное ребро, то индекс этой вершины не менее 4.

Рассмотрим сферические многоугольники, соответствующие граням нашего многогранника, и выбросим непомеченные ребра, а также вершины, из которых не выходит помеченных ребер.

Предположим, что помеченные ребра есть.

5. Докажите, что каждый максимальный связный граф на сфере, вершинами которого являются невыброшенные вершины, а рёбра — помеченные рёбра многогранника, является планарным.

Пусть $v$ — число вершин данного графа, $f_i$ — число его $i$-мерных граней (некоторые из них могли образоваться в результате объединения граней

6. Докажите, что в таком графе $4v = 8 + 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + ....$

Пусть $I$ — сумма индексов вершин графа.

7. Докажите, что $I \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + ....$

8. Докажите теорему Коши.