Теорема Хелли.

Определение. Множество точек называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит весь отрезок между ними.

Определение. *Выпуклыми комбинациями* точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются точки вида $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$, где α_i — неотрицательные числа с суммой 1.

Определение. *Выпуклой оболочкой* множества A, называется пересечение всех выпуклых множеств содержащих A. Выпуклую оболочку множества A будем обозначать $\mathrm{Conv}(A)$.

Замечание. Выпуклая оболочка A есть множество всех выпуклых комбинаций точек из A. Несложно показать, что подобное определение равносильно предыдущему.

Теорема Радона. Любые $n+2$ точки в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на две группы так, что выпуклые оболочки этих групп пересекаются.

Лемма. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем K и $v_1, \ldots, v_{n+2}$ — векторы в нем. Докажите, что существует такая их нетривиальная нулевая линейная комбинация $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n+2} v_{n+2} = 0$, что $\sum\limits_{i=1}^{n+2} \alpha_i = 0$.

Теорема Хелли. Пусть конечное семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ таково, что любые $n+1$ из них имеют общую точку. Тогда все эти множества имеют общую точку.

Теорема Каратеодори. Любая точка из $\mathrm{Conv}(A)$ является выпуклой комбинацией некоторых $n+1$ точек из множества A.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдется точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его последовательных вершин.

2. В пространстве отмечено 2012 точек. Оказалось, что любые 4 из них можно накрыть шаром радиуса 1. Докажите, что их все можно накрыть шаром радиуса 1.

3. На плоскости дано конечное число вертикальных отрезков. Оказалось, что любые четыре из них можно пересечь параболой. Докажите, что все их можно пересечь параболой.

4. Докажите, что выпуклый многоугольник диаметра 1 можно поместить в круг радиуса $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (*это утверждение называется теоремой Юнга*).

5. На плоскости дано n точек. Докажите, что существует такая точка O, что по любую сторону от любой прямой, проходящей через O лежит не более $\dfrac{2n}{3}$ этих точек (точки, лежащие на прямой, не учитываются).