Матрицы в быту и в природе

Определение. Матрицей $m \times n$ называется прямоугольная числовая таблица размера $m \times n$. Если A – матрица, элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца обычно обозначают a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы $1 \times n$ принято называть вектор-строками, а матрицы $n \times 1$ – вектор-столбцами.

Матрицы одного размера можно складывать и вычитать поэлементно. Кроме того матрицу $l \times m$ можно умножать на матрицу $m \times n$ следующим образом: элемент, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы-произведения равен скалярному произведению i-й строки первой матрицы и j-го столбца второй матрицы, рассматриваемых как m-мерные вектора в координатной форме. То есть, $C = AB$, если

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{im} b_{mj}.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 \end{pmatrix}.$$

Получившаяся в результате умножения матрица, очевидно, имеет размер $l \times n$

Замечание. Умножение матриц не является коммутативным, т. е. AB не всегда равно BA. Более того, если одно из этих произведений существует, второе вполне может не существовать. Например, если поменять местами множители в приведённом примере, выполнить умножение будет невозможно.

Квадратная матрица $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ размера $n \times n$ называется *единичной матрицей.* Иногда ее обозначают просто E.

1. Докажите, что $AE = A$ и $EB = B$ для всех матриц A и B, которые можно умножать на E с нужной стороны.

Для умножения матриц выполняются ассоциативность и дистрибутивность: $(AB)C = A(BC)$, $A(B + C) = AB + AC$ и $(A + B)C = AC + BC$. Не будем заставлять вас это проверять, желающию на досуге могут убедиться, что это так и есть.

Квадратные матрицы одного размера, очевидно, можно умножать друг на друга с любой стороны. Более того, их можно возводить в степень.

2. Найдите а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

3. Давайте каждому комплексному числу $a + bi$ сопоставим матрицу $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Докажите, что с точки зрения сложения и умножения такие матрицы ведут себя точно так же, как комплексные числа.

Матрица B называется *транспонированной* к A матрицей, если $b_{ij} = a_{ji}$, то есть эти матрицы симметричны друг другу относительно главной диагонали. Обозначается это так: $B = A^T$.

4. Докажите, что а) $A^T + B^T = (A + B)^T$ б) $A^T B^T = (BA)^T$.

Матрицы и группы

Задачу 3 можно переформулировать так: группа матриц вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ изоморфна группе комплексных чисел по сложению, а группа ненулевых матриц такого вида изоморфна группе ненулевых комплексных чисел по умножению.

5. Обобщите задачу 2а) до некоторого результата из теории групп.

6. а) Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Что она делает с другими матрицами если, её умножить на них слева? Справа?

б) Найдите группу матриц, изоморфную группе S_n (группе перестановок n элементов).

Любой вектор можно представить в виде столбца его координат. Соответственно, имеет смысл говорить об умноженим матрицы на вектор или о действии матрицы на вектор.

7. а) Что делает с вектором матрица $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$?

б) Найдите группу матриц, изоморфную группе преобразований поворота с центром в начале координат.

8. Найдите группу матриц, изоморфную группе преобразований параллельного переноса. *Подсказка:* это будут матрицы 3×3, действующие на вектор-столбцы вида $(x, y, 1)$.

Матрицы в теории графов

Пусть G — граф. Матрица I_G, столбцы которой соответствуют ребрам графа, а строки – вершинам, причем на пересечении столбца и строки стоит 1, если данная вершина является одним из концов данного ребра, и 0 в противном случае, называется *матрицей инцидентности* графа G.

Пусть G – граф с n вершинами, занумерованными в каком-то порядке числами от 1 до n. Квадратная матрица A_G размера $n \times n$ такая, что на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, если i-ая и j-ая вершины соединены ребром, и 0 в противном случае, называется *матрицей смежности* графа G.

Для мультиграфов, т.е. графов, допускающих петли и кратные ребра, на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы смежности стоит количество ребер, соединяющих соответствующие вершины, а в клетках диагонали стоит количество петель (иногда удвоенное) в соответствующей вершине.

9. Вычислите $I_G I_G^T - A_G$ для обычных графов и для мультиграфов.

10. Опишите в терминах графа G элементы матрицы A_G^k.

11. Пусть G – граф с n вершинами. Как по матрице $(A_G + E_n)^{n-1}$ понять, связен граф или нет?

Матрицы и рекурренты

В задаче 2б мы видели, как элементы одной известной последовательности порождаются возведением в степень некоторой матрицы. На самом деле, верен более общий факт.

12. Докажите, что для любой линейной рекурренты второго порядка x_n существует такая матрица A, что если матрицу A^n умножить на вектор-столбец начальных условий $(x_1, x_0)^T$, получится вектор $(x_{n+1}, x_n)^T$.

Задача В языке племени котэ четыре буквы - К, О, Т и Э, при этом слова, в которых встречается две подряд буквы Т или три подряд буквы Э считаются глубоко неприличными. Найдите количество сравнительно приличных слов длины 16 в этом языке.

13. Сформулируйте написанную выше задачу на языке матриц.

Для самостоятельного решения

14. Найдите матрицу D размера $n \times n$ такую, что если её умножить на вектор-столбец, содрежащий коэффициенты многочлена степени n, получится вектор-столбец коэффициентов производной этого многочлена.

15. а) Рассмотрим бесконечную матрицу A такую, что $a_{ij} = 0$ при $i < j$ и $a_{ij} = c_{i-j}$ при $i > j$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 14 & 5 & 2 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Что получится, если её умножить на бесконечный же вектор-столбец, k-й элемент которого равен $(k-1)$-му числу Каталана? Говорить о произведении здесь можно, поскольку в любой получающейся по формуле умножения бесконечной сумме лишь конечное число слагаемых не равно 0.

б) А что получится, если на этот же вектор-столбец умножить похожую маттрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 5 & 2 & 1 & 1 & -1 & \dots \\ 14 & 5 & 2 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

16. Докажите, что а) вещественные; б) целочисленные квадратные матрицы $n \times n$, на главной диагонали которых стоят единицы, а под диагональю – нули, образуют группу относительно умножения.

Обязательная задача: 10