Принцип крайнего в геометрии.

Теорема Сильвестра. На плоскости нарисовано несколько прямых, причем через пересечение любых двух проходит еще хотя бы одна. Тогда все прямые проходят через одну точку.

Следствие. На плоскости отмечено несколько точек, причем на прямой соединяющей любые две лежит еще хотя бы одна. Тогда все точки лежат на одной прямой.

1. На прямой отмечен $2n+1$ отрезок, причем каждый отрезок пересекается с еще хотя бы n другими отрезками. Докажите, что есть отрезок пересекающий все остальные.

2. Каково наибольшее возможное количество точек в множестве S на плоскости, обладающих следующим свойством: для любых трех точек A, B, C из S, найдется точка $D \in S$ такая, что A, B, C, D — вершины параллелограмма в каком-то порядке.

3. На плоскости отмечено $2n+3$ точки общего положения, никакие четыре не лежат на одной окружности. Докажите, что найдутся три из них такие, что внутри и вне описанной вокруг них окружности лежат по n точек.

4. Докажите, что у выпуклого многоугольника есть не более одной триангуляции диагоналями, все треугольники которой остроугольны.

Для самостоятельного решения

5. На плоскости отмечено несколько красных и несколько синих прямых, причем через пересечение любых двух одноцветных проходит еще хотя бы одна другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

6. На плоскости расположено $\left[\frac{4}{3}n\right]$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с n прямоугольниками. Доказать, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми прямоугольниками.

7. $N \geqslant 3$ точки на плоскости устроены таким образом, что среди их попарных расстояний есть только n различных. Докажите, что $N \leqslant (n+1)^2$.

8. Несколько единичных квадратов с параллельными сторонами лежат на плоскости. Они раскрашены в n цветов таким, образом, что среди любых n квадратов разных цветов какие-то два можно прибить к плоскости одним гвоздем. Докажите, что найдется цвет, все квадраты которого можно прибить к плоскости не более чем $2n-2$ гвоздями.