Две стороны линейности: математическая линейность.

Мотивация. Дан треугольник ABC. Пусть A_1 и B_1 — основания биссектрис из вершин A и B соответственно. Докажите, что для любой точки X на отрезке A_1B_1 выполнено равенство $a + b = c$, где a, b и c — расстояния от X до BC, CA и AB соответственно.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если для любой точки C, делящей отрезок AB в отношении $a : b$, выполнено равенство: $f(C) = \dfrac{b}{a+b} f(A) + \dfrac{a}{a+b} f(B)$.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют a, b, c такие, что для любой точки (x, y) плоскости $f\big((x, y)\big) = ax + by + c$.

Пример. Ориентированное расстояние до прямой линейно.

Пример. Ориентированная площадь линейна.

1. Докажите, что два этих определения равносильны.

2. Из линейности ор. площади найдите ориентированную площадь треугольника с вершинами $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2).

3. а) Из линейности ор. расстояния от точки до прямой найдите ориентированное расстояние от точки $(0, 0)$ до прямой $ax + by + c = 0$.

б) Найдите расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $ax + by + c = 0$.

Что есть множество нулей линейной функции?...

4. Докажите, что основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой.

5. Середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.

6. Пусть у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны пересекаются в точках P и Q. Докажите, что середины отрезков AC, BD и PQ лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*). А если $ABCD$ описан, то там же лежит и центр вписанной в него окружности (*теорема Ньютона*).

---

7. В четырехугольнике $ABCD$ точка X — пересечение биссектрис углов ABC и CDA, точка Y — пересечение биссектрис углов BCD и DAB. Точка Z — пересечение биссектрис двух углов, полученных при продолжении противоположных сторон $ABCD$ до пересечения. Докажите, что X, Y и Z лежат на одной прямой.

8. Для двух данных окружностей ω_1, ω_2 найдите ГМТ середин отрезков A_1A_2 таких, что $A_1 \in \omega_1$, $A_2 \in \omega_2$ и касательные из A_1 к ω_2 и из A_2 к ω_1 равны.

9. Докажите, что прямая из задачи 4 перпендикулярна линии центров вписанной и описанной окружностей треугольника.