Рекурренты - 1

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется рекуррентной порядка k, если x_{n+k} выражается через $x_n, x_{n+1}, \ldots x_{n+k-1}$ для всех $n \geq k$.

1. Докажите, что две рекурренты порядка k, заданные одним и тем же соотношением, совпадают тогда и только тогда, когда совпадают ее первые k членов.

Определение. Функция $f(n)$ называется *явной формулой* последовательности $\{x_n\}$, если $f(n) = x_n$ для всех $n \geq 0$.

2. Задана следующая рекуррентная последовательность:
а) $a_0 = 0, a_1 = 10, a_{n+2} = 20a_{n+1} - 100a_n$
б) $a_0 = 1, a_1 = 10, a_{n+2} = 20a_{n+1} - 100a_n$
Найдите явную формулу n-ого члена последовательности.

3. Как можно выразить следующие последовательности рекуррентно?
а) $x_n = 2^n$
б) $x_n = n!$
в) x_n - n-ое число Фибоначчи.

Определение. Рекуррентное соотношение порядка k называется *линейным*, если $x_{n+k} = z_0x_n + z_1x_{n+1} + \ldots + z_{k-1}x_{n+k-1}$, где $z_0, z_1 \ldots z_{k-1}$ - действительные (или комплексные) числа, причем $z_0 \neq 0$.

4. Найдите все геометрические прогрессии, удволетворяющие линейным рекуррентам:
а) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
б) $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$

Определение. *Характеристическим многочленом* линейной рекурренты $x_{n+k} = z_0x_n + z_1x_{n+1} + \ldots + z_{k-1}x_{n+k-1}$ называется многочлен $P(q) = q^n - z_{k-1}q^{n-1} - z_{k-2}q^{n-2} - \ldots - z_0q^n$.

5. Характеристический многочлен некоторой линейной рекурренты порядка k имеет ровно k корней. Докажите, что:

а) Существует k геометрических прогрессий с различными знаменателями, удволетворяющих этой линейной рекурренте.

б) Любая последовательность удволетворяет этой линейной рекурренте тогда и только тогда, когда она выражается как линейная комбинация прогрессий из предыдущего пункта.

6. Найдите явную формулу для чисел Фибоначчи.

Для самостоятельного решения

7. Угадайте и докажите явную формулу n-ого члена последовательности для следующих (нелинейных) рекуррентных соотношений:
а) $x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+1} = x_n + 2n + 1$
б) $x_0 = \frac{1}{5}, x_{n+1} = 2x_n\sqrt{1 - x_n^2}$
в) $x_0 = \frac{1}{3}, x_{n+1} = \sum_{i<n} x_i + 1$

8. Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такие, что $3f(n) - 2f(f(n)) = n$.

Обязательная задача: 5.