Выпуклые множества. Алгебраические свойства

Определение. Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими двумя точками содержит целиком и отрезок, соединяющий эти точки.

Это определение годится и для прямой, и для плоскости, и для пространства, и, вообще, имеет смысл в любой ситуации, когда ясно, что называется отрезком между двумя точками.

Определение. *Выпуклой комбинацией* точек $X_1, X_2, ..., X_n$ плоскости либо пространства называется точка $X = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n$, где $0 \le \lambda_i \le 1, i = 1, ..., n, \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$.

1. Пусть M — некоторое множество. Докажите, что множество всех выпуклых комбинаций точек M — выпуклое.

2. Докажите, что если A, B, C - три точки, принадлежащие выпуклому множеству M, то любая точка внутри треугольника ABC также принадлежит M.

3. Докажите, что выпуклая комбинация конечного множества точек выпуклого множества принадлежит множеству.

Определение. *Выпуклой оболочкой* фигуры называется наименьшее выпуклое множество, содержащее данную фигуру.

Выпуклая оболочка существует и единственна.

Из утверждений задач 1, 3 вытекает, что выпуклая оболочка множества совпадает с множеством всех выпуклых комбинаций точек этого множества.

4. (Каратеодори) Докажите, что любая точка выпуклой оболочки плоского множества является выпуклой комбинацией не более чем трех точек исходного множества.

Очевидно, что верно и обратное утверждение.

Определение. Точка плоскости (пространства) называется *внутренней точкой* фигуры, если фигура содержит некоторый круг (шар) с центром в данной точке.

Точка плоскости (пространства) называется *внешней точкой* фигуры, если фигура не имеет общих точек с некоторым кругом (шаром) с центром в данной точке.

Точка плоскости (пространства) называется *граничной точкой* фигуры, если любой круг (шар) с центром в данной точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, ей не принадлежащие.

Множество в R_1, R^2 или R^3 называется *открытым*, если все его точки - внутренние; *замкнутым*, если его дополнение открыто; *ограниченным*, если оно является подмножеством некоторого круга (шара); *компактным*, если оно замкнуто и ограничено.

Соглашение о терминологии: области и тела далее предполагаем замкнутыми и с непустой внутренностью. Все множества рассматриваются в R^2 либо в R^3.

5. Найдите все выпуклые подмножества прямой в случаях, если дополнительно известно, что они а) открыты, б) замкнуты, в) компактны.

6. Докажите, что пересечение любого числа выпуклых множеств либо пусто, либо является выпуклым множеством

7. а) Докажите, если A — граничная точка выпуклой фигуры, а B — её внутренняя точка, то все точки отрезка AB, кроме A — внутренние.
б) Докажите, что если ограниченная фигура, содержащая хотя бы одну внутреннюю точку, выпукла тогда и только тогда, когда любая прямая, проведенная через любую внутреннюю точку, пересекает границу ровно в двух точках.

Определение. *Линейной комбинацией* точек $X_1, X_2, ..., X_n$ плоскости либо пространства называется точка $X = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n$, где $\lambda_i, i = 1, ..., n$ - вещественные числа. *Линейной комбинацией фигур* A, B называется множество линейных комбинаций вида $\lambda_1 X + \lambda_2 Y$, $X \in A, Y \in B$. При $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ говорят просто о сумме фигур.

8. Изобразите на плоскости сумму а) двух отрезков на плоскости, б) отрезка и квадрата, в) двух кругов, г) круга и квадрата, д) двух треугольников.

9. Докажите, что линейная комбинация выпуклых фигур есть выпуклая фигура.

10. Докажите, что если A — квадрат, B — круг на плоскости, то $\sqrt{S(A+B)} > \frac{1}{2}(\sqrt{S(A)} + \sqrt{S(B)})$ (S — площадь).

Обязательная задача — 9.