Применение леммы Бернсайда

1. Доска 3×3 заполнена крестиками и ноликами: крестиков 5, а ноликов 4.

а) Сколько существует различных способов заполнить доску?

б) Сколько существует способов заполнить доску, если способы, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми?

в) Сколько есть способов если можно и поворачивать, и зеркально отражать доску (при этом способы считаются одинаковыми)?

2. Ребра тетраэдра можно красить в n цветов. Сколько различных тетраэдров можно при этом получить?

3. Сколько попарно различных шестиугольников можно вписать в правильный 15-угольник?

4. а) Посчитайте число раскрасок ожерелья из p (p – простое) бусинок в a цветов (не все цвета обязаны присутствовать; ожерелья можно поворачивать, но нельзя переворачивать.)

б) Докажите малую теорему Ферма, пользуясь пунктом а).

5. Сколько существует кубиков со знаками $\to$ на гранях (направление стрелочки должно быть перпендикулярно какому-нибудь ребру, положение – централизовано)?

Для самостоятельного решения

6. Дана таблица $n \times n$. Назовём узором раскраску её клеток в два цвета. Разрешается выбрать любой столбец или строку и перекрасить все его (её) клетки в противоположный цвет. Назовём узор А эквивалентным узору Б, если Б можно получить из А такими перекрашиваниями. Найдите количество классов эквивалентности узоров.

7. Теорема Лагранжа. Докажите, что порядок любой подгруппы конечной группы является делителем порядка группы.

Обязательная задача: 4.