Теорема Турана

1. Наибольшее число ребер в двудольном графе на n вершинах равно $[\frac{n^2}{4}]$.

2. В графе 2012 вершин и нет полных подграфов на 5 вершинах. Придумайте такой граф, в котором $6 \cdot 503^2$ ребер.

Теперь мы попробуем показать, что в любом другом графе (с 2012 вершинами и отсутствием полных подграфов на 5 вершинах) ребер меньше. Пусть мы взяли граф с максимальным числом ребер из удовлетворяющих условиям, тогда:

3. Докажите, что если добавить к графу еще одну вершину и соединить ее ребрами с набором соседей некоторой старой вершины, то полного подграфа на 5 вершинах не появится.

4. Докажите, что степени двух вершин равны, если они не соединены ребром. А если вершины соединены, то степени отличаются не более, чем на 1.

5. Докажите, что пример из 2 задачи — единственный подходящий.

6. Теорема Турана (частный случай): какое наибольшее число ребер может быть в графе с kx вершинами и запрещенными полными подграфами из $k+1$ вершины?

Для самостоятельного решения

7. Дайте ответ на вопрос теоремы Турана для произвольных чисел.

8. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

Обязательная задача 1

XXVIII Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2012 года • 10 класс, обычные группы • 10 июля

Теорема Турана

1. Наибольшее число ребер в двудольном графе на n вершинах равно $[\frac{n^2}{4}]$.

2. В графе 2012 вершин и нет полных подграфов на 5 вершинах. Придумайте такой граф, в котором $6 \cdot 503^2$ ребер.

Теперь мы попробуем показать, что в любом другом графе (с 2012 вершинами и отсутствием полных подграфов на 5 вершинах) ребер меньше. Пусть мы взяли граф с максимальным числом ребер из удовлетворяющих условиям, тогда:

3. Докажите, что если добавить к графу еще одну вершину и соединить ее ребрами с набором соседей некоторой старой вершины, то полного подграфа на 5 вершинах не появится.

4. Докажите, что степени двух вершин равны, если они не соединены ребром. А если вершины соединены, то степени отличаются не более, чем на 1.

5. Докажите, что пример из 2 задачи — единственный подходящий.

6. Теорема Турана (частный случай): какое наибольшее число ребер может быть в графе с kx вершинами и запрещенными полными подграфами из $k+1$ вершины?

Для самостоятельного решения

7. Дайте ответ на вопрос теоремы Турана для произвольных чисел.

8. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

Обязательная задача 1