Формула Эйлера для многогранника

В этой теме рассматриваются выпуклые тела в $\mathbb{R}^3$ (замкнутые, ограниченные).

Определение. Выпуклым многогранником называют фигуру, которая представляет собой пересечение конечного числа полупространств, причем фигура ограничена и имеет внутренние точки.

Граница выпуклого многогранника состоит из нескольких многоугольников, называемых его *гранями*, стороны этих многоугольников называют *рёбрами* многогранника.

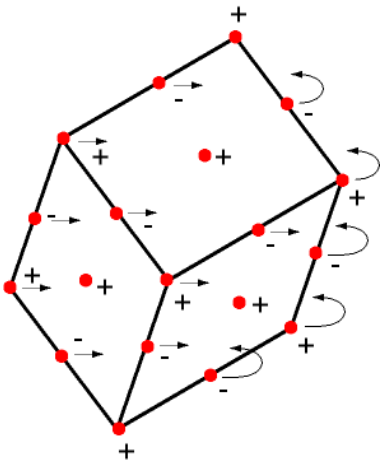
1. А) Докажите, что выпуклый многогранник является выпуклым телом. Б) Докажите, что выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин. В) Докажите, что выпуклая оболочка конечного множества точек, не лежащих в одной плоскости, является многогранником. При этом точка множества является вершиной в том случае, если она не принадлежит выпуклой оболочке остальных точек.

2. Докажите, что выпуклый многогранник не может иметь 7 ребер.

В решении следующих задач можно без доказательства использовать факт: если плоскость пересекает выпуклый многогранник и не проходит через вершины, ее можно слегка пошевелить так, чтобы в процессе шевеления она не пересекла вершины и в новом положении не была бы параллельна ни одной прямой, проходящей через пару вершин.

3. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит чётное число ребер. Докажите, что любое сечение его плоскостью, не содержащей вершин, является многоугольником с чётным числом сторон.

4. Расположим выпуклый многогранник и плоскость так, чтобы плоскость не была бы параллельна ни одной прямой, проходящей через пару вершин. В вершинах многогранника поставим $+1$, на серединах ребер -1, в каждой грани поставим $+1$. А) Предположим, что мы передвинули число из всех вершин, кроме самой наиболее и наименее удаленных от плоскости, и всех ребер на ближайшую грань в порядке обхода вокруг прямой, проходящей через внутреннюю точку многогранника перпендикулярно плоскости(см. рис.) Чему может оказаться равной сумма чисел в гранях?



Б) Докажите формулу Эйлера для выпуклого многогранника: $v - e + f = 2$, где v — количество вершин (vertices), e — количество рёбер (edges), f — количество граней (facets).

Тройку чисел (v, e, f) называют *f-вектором* многогранника.

Рассмотрим сферу с центром в вершине многогранного угла (или на ребре двугранного угла). Пересечение сферы и многогранного (двугранного) угла называют *сферическим многоугольником*, величинами углов сферического многоугольника считают величины соответствующих двугранных углов. Отношение площади части ее поверхности, заключенной внутри угла, к квадрату радиуса сферы, называется *величиной телесного угла* этого многогранного (двугранного) угла.

5. Найдите телесный угол двугранного угла величины α.

6. Докажите теорему Гаусса-Бонне (точнее, специальный случай этой теоремы): площадь S сферического n — угольника с углами $\alpha_1, ..., \alpha_n$ удовлетворяет равенству: $S = ((\alpha_1 + ... + \alpha_n) - (n-2)\pi)R^2$, R — радиус сферы.

7. Найдите: А) телесный угол n — гранного угла, если сумма его двугранных углов равна σ,

Б) разность между суммой телесных углов двугранных углов тетраэдра и суммой телесных углов его трехгранных углов.

Для выпуклого многогранника можно рассмотреть разбиение сферы с центром во внутренней точке данного многогранника на сферические многоугольники.

8. Выведите формулу Эйлера из теоремы Гаусса-Бонне.

9. Докажите неравенства для выпуклого многогранника: $3v \leq 2e, 3f \leq 2e, v \leq 2f - 4, f \leq 2v - 4$. Здесь v — количество вершин, e — количество рёбер, f — количество граней.

Кривизной вершины многогранника называется разность между 2π и суммой плоских углов многогранного угла в данной вершиной.

10. Докажите теорему Декарта: сумма кривизн вершин любого выпуклого многогранника равна 4π.

Обязательная задача: 6.