Линейные пространства.

Определение. Пусть даны множество V («векторы») и поле K («числа», или «скаляры»), имеются операция сложения векторов и для каждого числа имеется операция умножения вектора на число. При этом:

а) сложение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по сложению элемент ($\overrightarrow{0}$) и у каждого вектора $\overrightarrow{v}$ есть обратный по сложению ($-\overrightarrow{v}$);

б) $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$; $(k_1k_2)\overrightarrow{v} = k_1(k_2\overrightarrow{v})$ (здесь $k_1, k_2 \in K$, $\overrightarrow{v} \in V$);

в) $(k_1 + k_2)\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{v} + k_2\overrightarrow{v}$; $k(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = k\overrightarrow{v}_1 + k\overrightarrow{v}_2$.

Тогда V называется *векторным (линейным) пространством* над K.

Пример.

а) K^n – строки(или столбцы) длины n;

б) множество решений однородной СЛУ от n переменных;

в) линейные уравнения вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$;

г) многочлены над полем K;

д) вещественнозначные функции, определенные на произвольном множестве.

е) последовательности комплексных чисел;

ж) последовательности комплексных чисел с конечным числом ненулевых элементов;

з) множество всех прямоугольных таблиц 5×10, заполненных остатками по модулю 2;

и) множество векторов на плоскости.

й) множество всех подмножеств данного (для определенности конечного) множества.

Упр1. Образуют ли векторные пространства следующие множества (относительно естественных операций):

а) многочлены степени n над полем K;

б) неубывающие последовательности (над $\mathbb{R}$);

в) многочлены над данным полем с фиксированным корнем α;

г) строки длины n с нулевой суммой элементов;

д) множество функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$;

е) множество функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$;

ж) строки целых чисел длины n над $\mathbb{Z}$.

з) строки целых чисел длины n над $\mathbb{Z}_p$.

Упр2. Докажите, что множество решений произвольной ОСЛУ образует векторное пространство относительно естественных операций.

Упр3. Дайте определение *подпространства.*

Упр4. В примере и упражнении 1 укажите подпространства следующих пространств: пример а; пример г; пример е; упр1 д.

Упр5. Рассмотрим пространство векторов на плоскости (над $\mathbb{R}$). Опишите все его подпространства.

Упр6. Дайте определение *изоморфизма* векторных пространств.

Упр7. Найдите пары изоморфных пространств в примере и упражнении 1.

Определение. Подмножество S векторного пространства V называется *системой образующих* этого пространства, если всякий вектор $v \in V$ можно представить в виде $v = \alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n$, где $v_1, \ldots, v_n \in S$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Выражение $\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_nv_n$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение) называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_n$.

Упр8. В пространствах из примера (в, г, е, ж, й) и упр1 (в, г) укажите какую-нибудь *минимальную систему образующих* (то есть ту, которая перестает быть системой образующих после выкидывания любого из ее векторов). В упр 1в считайте, что $\alpha \in K$.

Определение. Пусть S — произвольное подмножество векторного пространства V. *Линейной оболочкой* множества S в пространстве V называется совокупность $L(S)$ всех линейных комбинаций векторов из S.

Упр9. Линейная оболочка $L(S)$ является подпространством пространства V, содержащим множество S. При этом всякое подпространство пространства V, содержащее S, содержит и $L(S)$ (по этой причине $L(S)$ называют ещё подпространством, *натянутым* на множество S).

Упр10. а) Вася выписал 10 многочленов степеней $\leqslant 9$, степени попарно различны. Найдите линейную оболочку полученного множества.

б) Аладдин выписал все четные функции, и все нечетные функции. Найдите линейную оболочку полученного множества.

Предложение. Пусть $S = \{v_i, i \in I\}$ – семейство векторов векторного пространства V. Тогда следующие условия равносильны:

а) если вектор из V выражается через векторы из S, то единственным образом.

б) никакой вектор из S нельзя выразить через остальные;

в) если линейная комбинация векторов из S равна нулевому вектору, то все ее коэффициенты равны 0.

Определение. Семейство векторов, обладающее свойствами, описанными в предыдущем предложении, называется *линейно независимым*, а не обладающее — *линейно зависимым*.

Упр11. Дайте три определения линейной зависимости.

Упр12. Докажите следующие свойства линейной зависимости и независимости:

а) система, содержащая нулевой вектор, является ЛЗ;

б) система, содержащая пропорциональные векторы, является ЛЗ;

в) если семейство векторов ЛНЗ, то и любая его часть ЛНЗ;

г) если семейство ЛЗ, то и любое содержащее его семейство ЛЗ;

д) если ЛНЗ семейство векторов не является системой образующих векторного пространства, то к этому семейству можно добавить вектор так, чтобы оно осталось ЛНЗ.

Упр13. а) Докажите, что пространство может быть изоморфным своему собственному подпространству.

б) Изоморфны ли пространства строк длины n и m (при $n \neq m$)?

Упр14. а) Рассмотрим последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n \geqslant 1)$. Докажите, что такие последовательности образуют векторное пространство и укажите какую-нибудь минимальную систему образующих в нем.

б) То же самое, но рекуррента такая: $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$.

Упр15. Пусть S — система образующих K^n. Докажите, что $|S| \geqslant n$.

Упр16. Пусть S — система образующих K^n из $n+1$ вектора. Докажите, что один вектор можно выкинуть из системы образующих.

Упр17. Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

Упр18. Есть таблица 8×8, изначально заполненная нулями. Разрешается прибавлять по 1 к любому квадрату 3×3 или 4×4. Все ли расстановки остатков по модулю 7 можно получить?