Чем трансцендентное число отличается от алгебраического?

Знаменатели всех рациональных чисел всегда считаем положительными.

А) Линейные приближения.

Теорема Дирихле (1842). Пусть α и $C > 1$ – действительные числа. Тогда существуют такие целые числа p, q, что $1 \leqslant q < C$ и $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{Cq}$.

Б) Квадратичные приближения.

1. а) Пусть α – иррациональное число. Тогда существует бесконечно много таких взаимно простых целых чисел p, q, что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

б) Для рациональных чисел аналогичное утверждение неверно:
существует такое $C > 0$, что при любых p, q, $p \neq q\alpha$ выполняется $|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{Cq}$.

В) Приближения высоких степеней.

2. Докажите, что для любых целых p, q выполняются неравенства

а) $\left|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{4q^2}$;

б) $\left|\sqrt[3]{2} - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{10q^3}$.

Теорема Лиувилля (1844). Пусть α – алгебраическое число степени $n > 1$. Тогда существует такая константа $C(\alpha) > 0$, что для любых целых p, q выполняется $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{C(\alpha)q^n}$.

3. Докажите, что число $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^6} + \ldots + \dfrac{1}{10^{n!}} + \ldots$ – трансцендентно.

Для самостоятельного решения

4. Приведите пример трансцендентного числа, в десятичной записи которого нет нулей.

5. Докажите, что в десятичной записи числа $\cos\frac{\pi}{7}$ среди знаков с n-го по $(3n + 20)$-й а) есть ненулевые знаки; б) не все знаки одинаковы.

6. Среди положительных чисел a, b, c, d есть два несоизмеримых. Докажите, что функция $\sin ax + \sin bx + \cos cx + \cos dx$ непериодична.

XXVIII Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2012 года • 10 класс (профи) • 7 июля

Чем трансцендентное число отличается от алгебраического?

Знаменатели всех рациональных чисел всегда считаем положительными.

А) Линейные приближения.

Теорема Дирихле (1842). Пусть α и $C > 1$ – действительные числа. Тогда существуют такие целые числа p, q, что $1 \leqslant q < C$ и $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{Cq}$.

Б) Квадратичные приближения.

1. а) Пусть α – иррациональное число. Тогда существует бесконечно много таких взаимно простых целых чисел p, q, что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

б) Для рациональных чисел аналогичное утверждение неверно:
существует такое $C > 0$, что при любых p, q, $p \neq q\alpha$ выполняется $|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{Cq}$.

В) Приближения высоких степеней.

2. Докажите, что для любых целых p, q выполняются неравенства

а) $\left|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{4q^2}$;

б) $\left|\sqrt[3]{2} - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{10q^3}$.

Теорема Лиувилля (1844). Пусть α – алгебраическое число степени $n > 1$. Тогда существует такая константа $C(\alpha) > 0$, что для любых целых p, q выполняется $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{C(\alpha)q^n}$.

3. Докажите, что число $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^6} + \ldots + \dfrac{1}{10^{n!}} + \ldots$ – трансцендентно.

Для самостоятельного решения

4. Приведите пример трансцендентного числа, в десятичной записи которого нет нулей.

5. Докажите, что в десятичной записи числа $\cos\frac{\pi}{7}$ среди знаков с n-го по $(3n + 20)$-й а) есть ненулевые знаки; б) не все знаки одинаковы.

6. Среди положительных чисел a, b, c, d есть два несоизмеримых. Докажите, что функция $\sin ax + \sin bx + \cos cx + \cos dx$ непериодична.