XXVIII Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2012 года
10 класс, обычные группы

Оскорбин Дмитрий Николаевич Шаповалова Валентина Александровна
Чухнов Антон Сергеевич Пешнин Александр Михайлович
Мокин Василий Борисович

Оглавление

Вступительная олимпиада. . . . 3
Симметрии фигур. . . . 3
Выпуклые множества. Алгебраические свойства . . . 4
Числа Каталана. Различные интерпретации. . . . 6
Выпуклые множества. Комбинаторные свойства . . . 8
Числа Каталана. Формулы. . . . 9
Рекурренты - 1 . . . 10
Непрерывность . . . 11
Теорема Турана . . . 12
Соображения непрерывности . . . 13
Выпуклые функции . . . 14
Рекурренты - 2 . . . 15
Изогональное сопряжение . . . 16
Внутренний математический бой . . . 17
Группы преобразований и лемма Бернсайда. . . . 18
Формула Эйлера для многогранника . . . 20
Теорема Штейница . . . 22
Теорема Форда-Фалкерсона . . . 23
Матрицы в быту и в природе . . . 25
Теорема Коши о жёсткости многогранника . . . 28
Внутренний математический бой за третье место . . . 29
Математический бой обычных групп М9 — М10 . . . 30
Формальные степенные ряды. Производящие функции. . . . 31
Проективная геометрия I . . . 33
Проективная геометрия II . . . 34
Мера множеств . . . 35
Изопериметрическое неравенство . . . 36
Применение леммы Бернсайда . . . 37
Заключительная олимпиада. . . . 38

4 июля

Вступительная олимпиада.

1. Дискриминанты трех приведенных квадратных трехчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из трехчленов так, чтобы сумма выбранных корней равнялась сумме оставшихся.

2. На оси Ox расположено 10 отрезков, каждый длины 3. Всегда ли можно сдвинуть синусоиду $y = \sin x$ вдоль оси Ox так, чтобы она пересекла каждый отрезок?

3. Двое играют в крестики-нолики на бесконечной доске. Для победы надо полностью заполнить какой-нибудь квадратик 2×2. Докажите, что у первого игрока нет выигрышной стратегии.

4. Пусть $PQRS$ – выпуклый вписанный четырехугольник, в котором $\angle PSR = 90°$, H и K – основания перпендикуляров из точки Q на отрезки PR и PS. Докажите, что прямая HK делит отрезок QS пополам.

5. Существует ли такой многочлен $f(x)$ степени 2012 с целыми коэффициентами, что для каждого целого числа n числа $f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \ldots$ попарно взаимно просты?

4 июля

Симметрии фигур.

1. Сколькими способами можно покрасить вершины равностороннего треугольника а) в 2 цвета; б) в 3 цвета так, чтобы никакие две раскраски не переходили друг в друга при повороте?

2. Движение плоскости переводит квадрат в себя. Опишите как могли поменяться местами вершины квадрата на языке подстановок.

3. Сколько существует движений плоскости, переводящих правильный n-угольник в себя?

4. Придумайте многоугольник с наименьшим числом вершин такой, что количество движений плоскости, переводящих его в себя, равно:
а) 2;
б) 3;
в) 4.

5. а) У фигуры есть ровно две оси симметрии. Докажите, что они перпендикулярны. б) Две оси симметрии фигуры образуют между собой угол в 84°. Докажите, что у нее есть еще по крайней мере 13 осей симметрии.

Для самостоятельного решения

6. Какие движения пространства переводят в себя а) тетраэдр; б) куб; в) октаэдр?

7. Сколько существует различных кубиков, у которых грани бывают синие, зеленые или красные?

5 июля

Выпуклые множества. Алгебраические свойства

Определение. Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими двумя точками содержит целиком и отрезок, соединяющий эти точки.

Это определение годится и для прямой, и для плоскости, и для пространства, и, вообще, имеет смысл в любой ситуации, когда ясно, что называется отрезком между двумя точками.

Определение. *Выпуклой комбинацией* точек $X_1, X_2, ..., X_n$ плоскости либо пространства называется точка $X = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n$, где $0 \le \lambda_i \le 1, i = 1, ..., n, \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$.

1. Пусть M — некоторое множество. Докажите, что множество всех выпуклых комбинаций точек M — выпуклое.

2. Докажите, что если A, B, C - три точки, принадлежащие выпуклому множеству M, то любая точка внутри треугольника ABC также принадлежит M.

3. Докажите, что выпуклая комбинация конечного множества точек выпуклого множества принадлежит множеству.

Определение. *Выпуклой оболочкой* фигуры называется наименьшее выпуклое множество, содержащее данную фигуру.

Выпуклая оболочка существует и единственна.

Из утверждений задач 1, 3 вытекает, что выпуклая оболочка множества совпадает с множеством всех выпуклых комбинаций точек этого множества.

4. (Каратеодори) Докажите, что любая точка выпуклой оболочки плоского множества является выпуклой комбинацией не более чем трех точек исходного множества.

Очевидно, что верно и обратное утверждение.

Определение. Точка плоскости (пространства) называется *внутренней точкой* фигуры, если фигура содержит некоторый круг (шар) с центром в данной точке.

Точка плоскости (пространства) называется *внешней точкой* фигуры, если фигура не имеет общих точек с некоторым кругом (шаром) с центром в данной точке.

Точка плоскости (пространства) называется *граничной точкой* фигуры, если любой круг (шар) с центром в данной точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, ей не принадлежащие.

Множество в R_1, R^2 или R^3 называется *открытым*, если все его точки - внутренние; *замкнутым*, если его дополнение открыто; *ограниченным*, если оно является подмножеством некоторого круга (шара); *компактным*, если оно замкнуто и ограничено.

Соглашение о терминологии: области и тела далее предполагаем замкнутыми и с непустой внутренностью. Все множества рассматриваются в R^2 либо в R^3.

5. Найдите все выпуклые подмножества прямой в случаях, если дополнительно известно, что они а) открыты, б) замкнуты, в) компактны.

6. Докажите, что пересечение любого числа выпуклых множеств либо пусто, либо является выпуклым множеством

7. а) Докажите, если A — граничная точка выпуклой фигуры, а B — её внутренняя точка, то все точки отрезка AB, кроме A — внутренние.
б) Докажите, что если ограниченная фигура, содержащая хотя бы одну внутреннюю точку, выпукла тогда и только тогда, когда любая прямая, проведенная через любую внутреннюю точку, пересекает границу ровно в двух точках.

Определение. *Линейной комбинацией* точек $X_1, X_2, ..., X_n$ плоскости либо пространства называется точка $X = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n$, где $\lambda_i, i = 1, ..., n$ - вещественные числа. *Линейной комбинацией фигур* A, B называется множество линейных комбинаций вида $\lambda_1 X + \lambda_2 Y$, $X \in A, Y \in B$. При $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ говорят просто о сумме фигур.

8. Изобразите на плоскости сумму а) двух отрезков на плоскости, б) отрезка и квадрата, в) двух кругов, г) круга и квадрата, д) двух треугольников.

Для самостоятельного решения

9. Докажите, что линейная комбинация выпуклых фигур есть выпуклая фигура.

10. Докажите, что если A — квадрат, B — круг на плоскости, то $\sqrt{S(A+B)} > \frac{1}{2}(\sqrt{S(A)}+\sqrt{S(B)})$ (S — площадь).

Обязательная задача: 9

5 июля

Числа Каталана. Различные интерпретации.

Докажите, что следующие числа равны, построив биекции между множествами.

1. Количество правильных скобочных структур из $2n$ скобок, т.е. таких последовательностей из n открывающих и n закрывающих скобок, что среди любого количества первых элементов последовательности открывающих скобок не меньше, чем закрывающих.

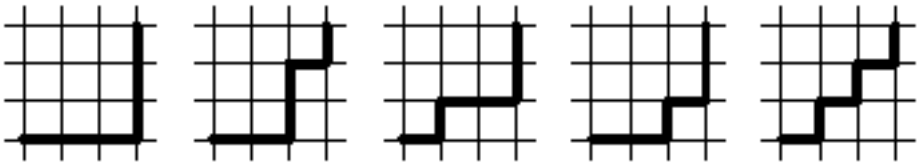
$$((()))\quad (())()\quad ()(())\quad (()())\quad ()()()$$

Это число называется n-ым *числом Каталана.*

2. Количество последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, в которых по n раз встречаются «1» и «$-$ 1», и для всякого $k \in \{1, \ldots, 2n\}$ выполняется неравенство $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq 0$.

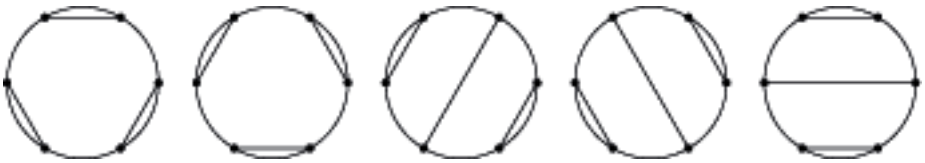
$$+1+1+1-1-1-1 \qquad +1+1-1-1+1-1 \qquad +1-1+1+1-1-1$$
$$+1+1-1+1-1-1 \quad +1-1+1-1+1-1$$

3. Количество путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо и не поднимающихся выше прямой $y = x$.



4. Количество способов разбить $2n$ точек на отрезке на пары, соединенные непересекающимися полуокружностями, лежащими выше этого отрезка.

5. Количество способов разбить $2n$ точек на окружности на пары и соединить точки из одной пары отрезком так, чтобы отрезки не пересекались.



6. Количество способов расставить $2n$ человек разного роста в две шеренги так, чтобы в каждой шеренге люди стояли по убыванию роста и каждый человек первой шеренги был бы выше стоящего за ним человека второй шеренги.

7. Количество способов расставить скобки в арифметическом выражении с $n + 1$ переменной и n операциями.

$$(\mathrm{ab})(\mathrm{cd}) \quad \mathrm{a}(\mathrm{b}(\mathrm{cd})) \quad \mathrm{a}((\mathrm{bc})\mathrm{d}) \quad ((\mathrm{ab})\mathrm{c})\mathrm{d} \quad (\mathrm{a}(\mathrm{bc}))\mathrm{d}$$

8. Количество бинарных деревьев с $n + 1$ висячей вершиной.

Бинарным называется дерево с выделенной вершиной (корнем) степени 2, все остальные вершины которого имеют степень 1 или 3. Таким образом, из каждой невисячей вершины на следующий уровень выходит ровно два ребра. Деревья отличающиеся перестановкой веток, идущих вниз из какой-то вершины, считаются различными.

Иногда к корню присоединяют сверху вершину степени один, и называют корнем уже ее.

9. Количество способов разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями.

10. Количество способов представить сумму $n+1$ слагаемого в виде обратной польской записи не меняя порядка переменных.

abcd+++ abc++d+ ab+cd++ abc+d++ ab+c+d+

Что такое обратная польская запись? Давайте рассмотрим арифметическое выражение без унарных минусов, например $(a+b)(c-d)$. Его можно записать в такой бесскобочной форме: $ab+cd-*$. (Еще примеры: $a+b+c \to ab+c+$, $a+bc \to bc*a+$, где «*» — это умножение).

Эта запись называется *обратной польской записью* выражения. Определяется она рекурсивно: выбирается операция, выполняющаяся последней. Ее знак записывается в конец строки. Перед ним записываются обратные польские записи операндов. Обратной польской записью переменной является она сама. Аналогично определяется прямая польская запись, когда знак операции пишется в начале.

Обратная польская запись может весьма пригодиться в программировании. Такое представление формул не только более экономично с точки зрения количества символов, но и гораздо удобнее для машинного считывания.

11. Количество корневых деревьев (деревьев с выделенной вершиной), содержащих $n+1$ вершину (деревья, отличающиеся перестановкой веток, также считаются различными).

Обязательная задача: биекция между 1 и 3 множествами.

6 — 7 июля

Выпуклые множества. Комбинаторные свойства

1. Теорема Хелли на плоскости.
А) Докажите, что пересечение четырех выпуклых множеств непусто, если непусты пересечения любых трех из них.

Б) Докажите А) с заменой ":.четырех:"на ":$n > 3$:".

В) При замене в А) ":.четырех:"на ":счетного числа:"утверждение становится неверным.

Г*) Докажите, что пересечение любого числа (конечного или бесконечного) выпуклых областей непусто, если непусты пересечения любых трех из этих областей и хотя бы одна из этих областей ограничена.

2. Обобщите теорему Хелли (2Б) на случай выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$.

3. Теорема Юнга. Попарные расстояния между n точками на плоскости не больше единицы. Докажите, что все эти точки помещаются в некотором круге радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Обобщите теорему Юнга на случай выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$.

5. А) Сформулируйте и докажите аналог теоремы Каратеодори в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Б) Докажите теорему Радона при $n = 2, 3$: каждое множество из $n + 2$ или более точек в $\mathbb{R}^n$ может быть представлено как объединение двух непересекающихся множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

Для самостоятельного решения

6. Докажите, из теоремы Радона следует теорема Каратеодори: А) в $\mathbb{R}^2$, Б) в $\mathbb{R}^3$.

7. * Докажите, из теоремы Каратеодори следует теорема Хелли: А) в $\mathbb{R}^2$, Б) в $\mathbb{R}^3$.

6 — 7 июля

Числа Каталана. Формулы.

Число Каталана с номером n будем обозначать c_n.

1. Докажите рекуррентную формулу для чисел Каталана: $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$.

2. а) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку (n,n), состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по линиям сетки, и имеющих точки выше прямой $y = x$, равно количеству путей, составленных из таких же отрезков и идущих из точки $(0,0)$ в точку $(n-1, n+1)$. Найдите это количество.

б) Докажите, что $c_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$

3. Рассмотрим треугольник Каталана:

1														
	1													
1		1												
	2		1											
2		3		1										
	5		4		1									
5		9		5		1								
	14		14		6		1							
14		28		20		7		1						

На крайней диагонали стоят единицы. Каждое число является суммой стоящих над ним сверху слева и сверху справа, за исключением чисел на левой вертикали, которые равны стоящим над ними сверху справа. Докажите, что на левой вертикали стоят числа Каталана.

Определение: n-ным числом Родригеса называется количество способов расставить скобки и символы переменных в формуле, содержащей n знаков операций. (Скобки расставляются таким образом, чтобы человеку, читающему формулу не приходилось заботиться о приоритетах, т.е. каждая скобка ставится вокруг одной операции, аргументами которой являются скобочная структура или переменная).

Например, второе число Родригеса равно 12:

$(ab)c$ $a(bc)$ $(ac)b$ $a(cb)$ $(ba)c$ $b(ac)$ $(bc)a$ $b(ca)$ $(ca)b$ $c(ab)$ $(cb)a$ $c(ba)$

4. а) Докажите рекуррентную формулу для чисел Родригеса: $R_n = (4n-2)R_{n-1}$.

б) Выведите из пункта а) явную формулу для чисел Родригеса.

в) Выведите из пункта б) явную формулу для чисел Каталана.

5. На окружности стоят m целых чисел a_1, a_2, …, a_m такие, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = 1$. Назовем число a_i хорошим, если $a_i > 0$, $a_i + a_{i+1} > 0$, …, $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i-1} > 0$.

а) Докажите, что хороших чисел не более одного.

б) Докажите лемму Рени: хорошее число ровно одно.

в) Выведите из пункта б) явную формулу для чисел Каталана.

Для самостоятельного решения

6. а) Докажите, что среди получающихся друг из друга циклическим сдвигом строчек, состоящих из n знаков операций и $n+1$ символа переменой, ровно одна является обратной польской записью некоторой формулы.

б) Выведите из пункта а) явную формулу для чисел Каталана.

7. а) Докажите, что количество наборов n целых чисел от 0 до n, сумма которых делится на $n+1$ равно c_n. (наборы, отличающиеся перестановками чисел, считаются одинаковыми).

б) Докажите, что количество путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, площадь под которыми делится на $n+1$, равно c_n.

Обязательная задача: 1

9 июля

Рекурренты - 1

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется рекуррентной порядка k, если x_{n+k} выражается через $x_n, x_{n+1}, \ldots x_{n+k-1}$ для всех $n \geq 0$. Выражение $x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1})$ называется *рекуррентным соотношением.*

1. Докажите, что две рекурренты порядка k, заданные одним и тем же соотношением, совпадают тогда и только тогда, когда совпадают ее первые k членов.

Определение. Функция $f(n)$ называется *явной формулой* последовательности $\{x_n\}$, если $f(n) = x_n$ для всех $n \geq 0$.

2. Задана следующая рекуррентная последовательность:
а) $a_0 = 0, a_1 = 10, a_{n+2} = 20a_{n+1} - 100a_n$
б) $a_0 = 1, a_1 = 10, a_{n+2} = 20a_{n+1} - 100a_n$
Найдите явную формулу n-ого члена последовательности.

3. Как можно выразить следующие последовательности рекуррентно?
а) $x_n = 2^n$
б) $x_n = n!$
в) x_n – n-ое число Фибоначчи.

Определение. Рекуррентное соотношение порядка k называется *линейным*, если $x_{n+k} = z_0x_n + z_1x_{n+1} + \ldots + z_{k-1}x_{n+k-1}$, где $z_0, z_1 \ldots z_{k-1}$ – действительные (или комплексные) числа, причем $z_0 \neq 0$.

4. Найдите все геометрические прогрессии, удволетворяющие линейным рекуррентам:
а) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
б) $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$

Определение. *Характеристическим многочленом* линейной рекурренты $x_{n+k} = z_0x_n + \ldots + z_{k-1}x_{n+k-1}$ называется многочлен $P(q) = q^k - z_{k-1}q^{k-1} - \ldots - z_1q - z_0$.

5. Характеристический многочлен некоторой линейной рекурренты порядка k имеет ровно k ненулевых корней. Докажите, что:
а) Существует ровно k ненулевых геометрических прогрессий с различными знаменателями, удволетворяющих этой линейной рекурренте.
б) Любая последовательность удволетворяет этой линейной рекурренте тогда и только тогда, когда она выражается как линейная комбинация прогрессий из предыдущего пункта.

6. Найдите явную формулу для чисел Фибоначчи.

Для самостоятельного решения

7. Угадайте и докажите явную формулу n-ого члена последовательности для следующих (нелинейных) рекуррентных соотношений:
а) $x_0 = 1, x_1 = 2, x_{n+1} = x_n + 2n + 1$
б) $x_0 = \frac{1}{5}, x_{n+1} = 2x_n\sqrt{1 - x_n^2}$
в) $x_0 = \frac{1}{3}, x_{n+1} = \sum\limits_{i \leq n} x_i + 1$

8. Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такие, что $3f(n) - 2f(f(n)) = n$.

Обязательная задача: 5

9 июля

Непрерывность

Аксиома полноты множества вещественных чисел: любое непустое ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет точную верхнюю грань.

1. Докажите *теорему о вложенных отрезках*: если дана последовательность вложеных отрезков $I_1 = [x_1, y_1], I_2 = [x_2, y_2], \ldots, I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, длины которых стремятся к нулю, то их пересечение состоит ровно из одной точки.

2. Докажите, что из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Определение (Гейне). *Пределом функции $f(x)$ в точке a* называется такое число b, что для любой последовательности $\{a_i\} \to a$, не содержащей членов, равных a, выполнено свойство $f(a_i) \to b$.

Определение (Коши). *Пределом функции $f(x)$ в точке a* называется такое число b, для которого выполнено условие: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение. Функция называется *непрерывной* в точке a, если ее предел в точке a равен $f(a)$. Функция называется непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Свойства непрерывных функций: сумма, произведение и частное непрерывных функций непрерывны; многочлены, функция $y = \sin x$ непрерывны; если $f(x)$ непрерывна в точке a, а $g(x)$ непрерывна в точке $f(a)$, то $g(f(x))$ непрерывна в точке a.

3. (Теорема Больцано-Коши) $f(x)$ непрерывная функция на $[a, b]$, $f(a) > 0, f(b) < 0$. Докажите, что $f(x)$ имеет корень на отрезке $[a, b]$.

4. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$. Докажите, что она ограничена на $[a, b]$.

5. (Теорема Вейерштрасса) Непрерывная функция на отрезке достигает на нём максимума и минимума.

6. Докажите, что любой кубический многочлен имеет хотя бы один вещественный корень.

7. Задана непрерывная периодическая функция на $\mathbb{R}$ с периодом $T > 0$. Докажите, что её график имеет горизонтальную хорду длиной $\frac{T}{2}$.

8. Постройте отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеющее а) ни одной; б) ровно одну точку непрерывности.

Обязательная задача: 5

10 июля

Теорема Турана

1. Наибольшее число ребер в двудольном графе на n вершинах равно $[\frac{n^2}{4}]$.

2. В графе 2012 вершин и нет полных подграфов на 5 вершинах. Придумайте такой граф, в котором $6 \cdot 503^2$ ребер.

Теперь мы попробуем показать, что в любом другом графе (с 2012 вершинами и отсутствием полных подграфов на 5 вершинах) ребер меньше. Пусть мы взяли граф с максимальным числом ребер из удовлетворяющих условиям, тогда:

3. Докажите, что если добавить к графу еще одну вершину и соединить ее ребрами с набором соседей некоторой старой вершины, то полного подграфа на 5 вершинах не появится.

4. Докажите, что степени двух вершин равны, если они не соединены ребром. А если вершины соединены, то степени отличаются не более, чем на 1.

5. Докажите, что пример из 2 задачи - единственный подходящий.

6. Теорема Турана (частный случай): какое наибольшее число ребер может быть в графе с kx вершинами и запрещенными полными подграфами из $k+1$ вершины?

Для самостоятельного решения

7. Дайте ответ на вопрос теоремы Турана для произвольных чисел.

8. В группе из n^2 человек каждый имеет не более n знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать n человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

Обязательная задача: 1

10 июля

Соображения непрерывности

В задачах мы будем пользоваться тем, что замкнутые ограниченные области измеримы, то есть для них корректно определена площадь.

1. Докажите свойство выпуклой ограниченной области: если строго между двумя параллельными прямыми (в полосе, не на границе) есть хоть одна точка фигуры, то в полосе находится часть фигуры ненулевой площади.

2. Докажите, что выпуклую ограниченную область можно разделить прямой данного направления на две части равной площади. Такая прямая единственна.

3. Дана выпуклая ограниченная область и точка а) вне; б) на границе; в) внутри неё. Докажите, что существует прямая, проходящая через эту точку и делящая площадь пополам.

4. А) Теорема о неподвижной точке. Если непрерывная функция $f(x)$ отображает отрезок в себя, то существует неподвижная точка, то есть такая точка x_0, что $f(x_0) = x_0$. Б) Непрерывная функция f такова, что уравнение $f(x) = x$ не имеет действительных решений. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ тоже не имеет действительных решений.

5. Найдите все непрерывные функции, удовлетворяющие равенству $f(x) + f(y) = f(x + y)$ при всех вещественных x, y.

Определение. Функция f, определённая на промежутке (отрезке, интервале, луче, всей прямой) и принимающая действительные значения, называется *выпуклой вниз* (или просто *выпуклой*), если её график на любом отрезке $[a, b]$, входящем в область определения, лежит не выше хорды с концами $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Аналогично определяется понятие *выпуклости вверх*.

6. Функция f выпукла вниз. А) Доказать, что для любых чисел a и b из её области определения выполнено неравенство $f((a + b)/2) \leq (f(a) + f(b))/2$.

Б) (Неравенство Йенсена) Докажите, что для любых чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ из области определения и неотрицательных $\alpha_1, ..., \alpha_n$, дающих в сумме 1, выполнено неравенство: $f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n)$.

7. Доказать, что всякая выпуклая (вниз или вверх) функция, определённая на интервале, непрерывна во всех точках этого интервала. Верно ли аналогичное утверждение для отрезка?

Для самостоятельного решения

8. Монах начал восхождение из храма на гору в восемь утра и поднялся на вершину к восьми вечера. Наутро он в восемь утра начал спуск, тоже длившийся 12 часов, по тому же пути, что и восхождение. Докажите, что был момент времени, разделенных ровно сутками, когда монах находился в одной и той же точке.

9. На плоскости даны две выпуклые ограниченные фигуры. Докажите, что существует прямая, которая делит каждую из них на две части равной площади.

10. Найдите все непрерывные функции, удовлетворяющие равенству $f(x^2) + f(x) = f(x^2 + x)$.

11 июля

Выпуклые функции

1. Будем называть (средней) скоростью изменения функции f на отрезке $[a, b]$ отношение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (геометрический смысл: средняя скорость — угловой коэффициент хорды). Докажите, что функция f, определенная на интервале, выпукла вниз тогда и только тогда, когда для любых трех точек $a \leq b \leq c$ данного интервала скорость изменения f на отрезке $[a, b]$ не больше скорости изменения f на отрезке $[b, c]$.

2. Функция $f(x)$ выпукла вниз и всюду положительна. А) Можно ли утверждать, что функция $(f(x))^2$ выпукла вниз? Б) Можно ли утверждать, что эта функция выпукла вверх, если $f(x)$ выпукла вверх?

3. А) Доказать, что если выпуклая вниз функция дифференцируема, то её производная является неубывающей функцией. (Указание: если $a < b$, то $f'(a)$ и $f'(b)$ разделены средней скоростью изменения функции на $[a, b]$.)

Б) Доказать, что если функция f дифференцируема и f' является неубывающей функцией, то f выпукла вниз. (Указание: по теореме Лагранжа средняя скорость изменения есть производная в промежуточной точке.)

4. Доказать, что для дважды дифференцируемых функций выпуклость вниз (вверх) равносильна неотрицательности (неположительности) второй производной. (Мнемоническое правило: если в график можно залить воду, вторая производная имеет знак плюс, если нельзя — минус.)

5. Докажите с помощью производной и с помощью задачи 1, что функция $y = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$ выпукла вниз.

6. Выведите неравенство Коши-Буняковского: $(x_1 + ... + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + ... + x_n^2)$ из выпуклости функции $y = x^2$.

7. А) Показать, что график дифференцируемой выпуклой вниз функции лежит выше любой касательной к нему. (Указание: касательная в точке $(a, f(a))$ к графику функции f имеет угловой коэффициент $f'(a)$.)

Б) Показать, что требование предыдущей задачи (график лежит выше касательной) можно считать (равносильным) определением выпуклости для дифференцируемых функций.

Для самостоятельного решения

8. При каких p функция $y = x^p$ выпукла, а при каких вогнута на $(0, +\infty)$?

9. Выведите А) неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим из неравенства Йенсена, используя выпуклость вверх функции $\ln(x)$;

Б) докажите неравенство о средних взвешенных:

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \geq \sqrt[\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n]{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}},$$

где все x_j и α_j неотрицательны.

10. Пусть $F_p(x_1, x_2, \ldots x_n) = (\frac{x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p}{n})^{\frac{1}{p}}$, $F_0(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, Докажите для положительных $x_1, ..., x_n$, что $F_p \geqslant F_q$, где $p > q \geq 0$.

Обязательная задача: 9

11 июля

Рекурренты - 2

1. Найдите все последовательности $\{a_n\}$, для которых выполняется рекуррентное соотношение: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

2. а) Найдите последовательность $\{a_n\}$, не являющуюся геометрической прогрессией, удовлетворяющую: $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$

б) Найдите последовательность, для которой выполняется рекуррентное соотношение из пункта а), а также $a_0 = 1, a_1 = 4$.

в) Найдите все последовательности, для которых выполняется рекуррентное соотношение из пункта а).

3. Как будет выглядеть формула n-го члена для рекуррентной последовательности k-го порядка, если ее характеристический многочлен имеет действительные (или комплексные) корни q_1,...,q_m с кратностями $t_1, \ldots, t_m$ соответственно?

4. Числовая последовательность $\{a_n\}$ такова, что при всех $m \geq n \geq 0$ выполняется соотношение: $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}$. Найдите a_{2012}, если $a_1 = 1$.

5. Конечная последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям: $a_0 = 20, a_1 = 12, a_{n+2} = a_n - \frac{1}{a_{n+1}}$. Найдите максимальное количество членов последовательности.

6. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 1, a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при всех $n \geq 2$. Докажите,что все члены последовательности – целые числа.

7. Вычислите сумму $S_n = C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - \ldots$

Для самостоятельного решения

8. Каким линейным рекуррентным соотношениям удовлетворяют последовательности:
а) $a_n = n^2$
б) $a_n = n^3$?

9. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ да надо заплатить 2 рубля, за ответ нет - 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число?

Обязательная задача: 2

12 июля

Изогональное сопряжение

Определение: Рассмотрим треугольник ABC и точку P внутри него. Если существует точка Q такая, что лучи AQ, BQ, CQ симметричны относительно биссектрис углов треугольника лучам AP, BP, CP, то точка Q называется изогонально сопряженной к точке P. Преобразование, сопоставляющее каждой точке внутри треугольника сопряженную к ней, называется изогональным сопряжением.

1. Проверьте корректность определения изогонального сопряжения.

2. А) Найдите изогонально сопряженную точку к центру вписанной окружности Б) Найдите изогонально сопряженную точку к ортоцентру (для остроугольного треугольника) В) Докажите, что проекции изогонально сопряженных точек на стороны треугольника лежат на одной окружности.

Определение: Барицентрические координаты точки в треугольнике - тройка пар (вершина число), которая задает положение точки как центра масс системы.

3. Найдите барицентрические координаты четырех замечательных точек.

4. Докажите, что барицентрические координаты корректно определены.

5. Запишите изогональное сопряжение в барицентрических координатах.

6. Докажите, что фокусы эллипса, вписанного в треугольник, изогонально сопряжены.

7. Докажите, что точки Брокара изогонально сопряжены.

8. Докажите, что точка Лемуана обладает минимальной суммой квадратов расстояний до сторон треугольника.

Обязательная задача: 6

12 июля

Внутренний математический бой

1. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность S_1 проходит через точку B и касается прямой AC в точке A. Окружность S_2 проходит через точку C и касается прямой AB в точке A. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и K. Точки B_1 и C_1 взяты на продолжениях сторон AB и AC соответственно так, что $AB_1 = AB$ и $CC_1 = AC$. Докажите, что точки A, K, B_1 и C_1 лежат на одной окружности.

2. Дано семейство подмножеств некоторого конечного множества. В каждом из этих подмножеств хотя бы два элемента и в любом непустом пересечении двух множеств тоже хотя бы два элемента. Докажите, что элементы исходного множества можно раскрасить в два цвета так, чтобы в каждом из подмножеств нашего семейства были элементы обоих цветов.

3. Даны два множества на прямой такие, что каждое из них не пересекается с замыканием другого. Докажите, что можно выбрать два неперескающихся открытых множества, каждое из которых содержит одно из данных. (Замыканием называется множество, полученное из данного добавлением всех его граничных точек.)

4. На прямых, содержащих стороны некоторого выпуклого четырёхугольника, от его вершин по часовой стрелке отложили отрезки, каждый из которых в два раза больше соответствующей стороны. Вторые концы получившихся оказались вершинами квадрата. Докажите, что исходный четырёхугольник также был квадратом.

5. Найдите 50 последних цифр числа $\sum\limits_{n=1}^{200} (n^2+1)n!$

6. Найдите все простые числа $p = a^2+b^2+c^2$ (где a, b, c – натуральные), для которых выполняется условие $a^4+b^4+c^4 \,\vdots\, p$.

7. Про числа x, y, z известно, что их произведение лежит в интервале $(1;3)$. Докажите, что $x^5y^3z + y^5z^3x + z^5x^3y + 3 > 4xyz$.

8. Существуют ли два неравных выпуклых многогранника такие, что их ребра можно разбить на пары равных и параллельных (одно из одного, одно из другого)?

14 июля

Группы преобразований и лемма Бернсайда.

Пусть $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ – конечное множество, а G – подгруппа S_n, т.е. любой элемент $g \in G$ является подстановкой из n элементов (g мы будем также называть преобразованием).

Если существует подстановка s из группы G такая, что $s(m_i) = m_j$, мы называем элемент m_i *сравнимым с элементом* m_j *по модулю* G.

1. Докажите, что элементы множества M разбиваются на классы эквивалентности по вышеописанному сравнению.

Определение. Множество элементов M, сравнимых с m по модулю G, назвается орбитой m относительно G. Обозначим такое множество $O_G(m)$ (или $O(m)$, если группа G понятна из контекста.) *Длиной* орбиты называется число $|O(m)|$.

2. Рассмотрим движения плоскости, которые переводят правильный шестиугольник в самого себя.

а) Докажите, что эти движения образуют группу G.

б) Пусть M – множество вершин шестиугольника. Найдите орбиту относительно G для каждого элемента множества M.

3. Решите задачу 2б) для следующего шестиугольника (сжатого к диагонали правильного):

4. Пусть $|M| = 10$. Как выбрать группу G, чтобы орбиты относительно этой группы

а) все были бы длины 2;

б) все были бы разной длины?

Определение. *Неподвижными точками* элемента $g \in G$ называются такие $m \in M$, что $g(m) = m$.

5. Пусть никакие элементы G, кроме тождественного, не имеют неподвижных точек. Чему равно количество орбит относительно G?

Определение. *Стабилизатор* G_x элемента $x \in M$ – это такое множество преобразований из G, которые переводят x в себя. $|G_x|$ – число элементов в стабилизаторе.

Определение. $\mathrm{Fix}(g)$ – число неподвижных элементов преобразования g.

6. Найдите все стабилизаторы для вершин шестиугольника из задачи 3.

7. Докажите, что

а) если $x, y \in X$ лежат в одной орбите, то количество преобразований, переводящих x в y, не зависит от x и y, и равно $|G_x|$;

б) сумма мощностей стабилизаторов точек одной орбиты равна $|G|$;

в) сумма мощностей стабилизаторов всех точек множества X в $|G|$ раз больше, чем количество орбит;

г) сумма мощностей стабилизаторов всех точек равна сумме мощностей множеств неподвижных элементов всех преобразований из G: $\sum\limits_{x \in X} |G_x| = \sum\limits_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)$.

8. Лемма Бернсайда. Пусть G – группа преобразований множества M. Число орбит, на которые множество M разбивается под действием группы G, равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Fix}(g).$$

Для самостоятельного решения

9. Так сколько же существует различных кубиков, у которых грани бывают синие, зеленые или красные?

10. Сколько можно составить различных ожерелий, состоящее из шести бусинок, используя бусинки трех различных цветов (выбор бусинок любого цвета неограничен)?

Обязательная задача: 7

14 июля

Формула Эйлера для многогранника

В этой теме рассматриваются выпуклые тела в $\mathbb{R}^3$ (замкнутые, ограниченные).

Определение. Выпуклым многогранником называют фигуру, которая представляет собой пересечение конечного числа полупространств, причем фигура ограничена и имеет внутренние точки.

Граница выпуклого многогранника состоит из нескольких многоугольников, называемых его *гранями*, стороны этих многоугольников называют *рёбрами* многогранника.

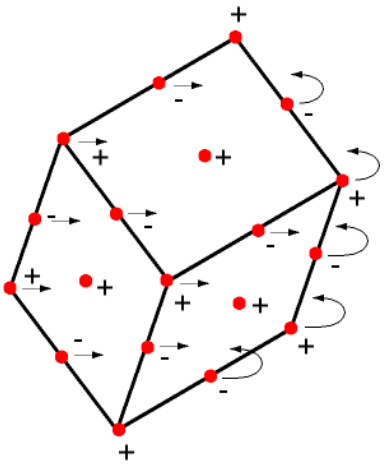
1. А) Докажите, что выпуклый многогранник является выпуклым телом. Б) Докажите, что выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин. В) Докажите, что выпуклая оболочка конечного множества точек, не лежащих в одной плоскости, является многогранником. При этом точка множества является вершиной в том случае, если она не принадлежит выпуклой оболочке остальных точек.

2. Докажите, что выпуклый многогранник не может иметь 7 ребер.

В решении следующих задач можно без доказательства использовать факт: если плоскость пересекает выпуклый многогранник и не проходит через вершины, ее можно слегка пошевелить так, чтобы в процессе шевеления она не пересекла вершины и в новом положении не была бы параллельна ни одной прямой, проходящей через пару вершин.

3. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит чётное число ребер. Докажите, что любое сечение его плоскостью, не содержащей вершин, является многоугольником с чётным числом сторон.

4. Расположим выпуклый многогранник и плоскость так, чтобы плоскость не была бы параллельна ни одной прямой, проходящей через пару вершин. В вершинах многогранника поставим +1, на серединах ребер -1, в каждой грани поставим +1. А) Предположим, что мы передвинули число из всех вершин, кроме самой наиболее и наименее удаленных от плоскости, и всех ребер на ближайшую грань в порядке обхода вокруг прямой, проходящей через внутреннюю точку многогранника перпендикулярно плоскости(см. рис.) Чему может оказаться равной сумма чисел в гранях?



Б) Докажите формулу Эйлера для выпуклого многогранника: $v - e + f = 2$, где v — количество вершин (vertices), e — количество рёбер (edges), f — количество граней (facets).

Тройку чисел (v, e, f) называют *f-вектором* многогранника.

Рассмотрим сферу с центром в вершине многогранного угла (или на ребре двугранного угла). Пересечение сферы и многогранного (двугранного) угла называют *сферическим многоугольником*, величинами углов сферического многоугольника считают величины соответствующих двугранных углов. Отношение площади части ее поверхности, заключенной внутри угла, к квадрату радиуса сферы, называется *величиной телесного угла* этого многогранного (двугранного) угла.

5. Найдите телесный угол двугранного угла величины α.

6. Докажите теорему Гаусса-Бонне (точнее, специальный случай этой теоремы): площадь S сферического n — угольника с углами $\alpha_1, ..., \alpha_n$ удовлетворяет равенству: $S = ((\alpha_1 + ... + \alpha_n) - (n-2)\pi)R^2$, R — радиус сферы.

7. Найдите: А) телесный угол n — гранного угла, если сумма его двугранных углов равна σ,

Б) разность между суммой телесных углов двугранных углов тетраэдра и суммой телесных углов его трехгранных углов.

Для выпуклого многогранника можно рассмотреть разбиение сферы с центром во внутренней точке данного многогранника на сферические многоугольники.

8. Выведите формулу Эйлера из теоремы Гаусса-Бонне.

9. Докажите неравенства для выпуклого многогранника: $3v \leq 2e, 3f \leq 2e, v \leq 2f - 4, f \leq 2v - 4$. Здесь v — количество вершин, e — количество рёбер, f — количество граней.

Кривизной вершины многогранника называется разность между 2π и суммой плоских углов многогранного угла в данной вершиной.

10. Докажите теорему Декарта: сумма кривизн вершин любого выпуклого многогранника равна 4π.

Обязательная задача: 6

15 июля

Теорема Штейница

1. Докажите равенства для выпуклого многогранника:

$$2e = 3v_3 + 4v_4 + ... = 3f_3 + 4f_4 + ...$$

, где v_i — количество вершин, в которых сходится i рёбер, f_i —и количество i-угольных граней.

2. Докажите, что каждый выпуклый многогранник имеет либо трехгранный угол, либо треугольную грань.

3. Теорема Штейница. Тройка натуральных чисел (v, e, f), для которой $v-e+f = 2$, $v \leq 2f-4$, $f \leq 2v-4$, является f — вектором некоторого выпуклого многогранника.

А) Найдите выпуклый многогранник, f — вектор которого есть a)$(4, 6, 4)$;b)$(5, 8, 5)$;c)$(6, 10, 6)$.

Б) Докажите, что если существует выпуклый многогранник с f — вектором (v, e, f), имеющий как трехгранный угол, так и треугольную грань, то существуют выпуклые многогранники с f — векторами $(v+1, e+3, f+2)$, $(v+2, e+3, f+1)$ и $(v+2i+j, e+3i+3j, f+i+2j), i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

В) Докажите теорему Штейница.

4. Пусть на рёбрах выпуклого многогранника расставлены знаки плюс и минус.

А) Докажите, что число перемен знака при обходе любой грани четно.

Назовем индексом вершины число перемен знака при обходе этой вершины.

Б) Пусть N — сумма индексов всех вершин многогранника. Докажите, что $N \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + ...$

В) Докажите, что $N \leq 4v - 8$.

Г) Докажите лемму Коши: найдется вершина выпуклого многогранника, индекс которой меньше 4.

Пусть система координат в пространстве выбрана так, что начало координат O совпадает с некоторой внутренней точкой многогранника. Для вершины V_i рассмотрим полупространство, определяемое неравенством $\langle y, OV_i \rangle \leq R^2$ ($y \in \mathbb{R}^2, R$ — радиус сферы, $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Рассмотрим пересечение этих полупространств, оно является выпуклым многогранником, который называется *полярным* к данному многограннику.

5. Найдите f — вектор полярного многогранника к многограннику с f — вектором (v, e, f).

Обязательная задача: 5

15 июля

Теорема Форда-Фалкерсона

Определение 1. Пусть задано множество вершин V, в котором выделены две вершины s (*вход* или *исток*) и t (*выход* или *сток*). Пусть определена функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям

$$c(x, y) \geq 0, \quad c(x, s) = 0, \quad c(t, y) = 0$$

для любых вершин $x, y \in V$. Тогда $G = (V, s, t, c)$ — *сеть*, функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Определение 2. Пусть G — сеть, а функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет трем условиям:

1° $f(x, y) \leq c(x, y)$;

2° $f(x, y) = -f(y, x)$;

3° Для любой вершины $v \in V$, $v \neq s, t$ выполняется условие $\sum_{x \in V} f(v, x) = 0$.

Тогда f — поток в сети G. Число $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$ называется *величиной потока*. Поток сети G с максимальной величиной называется *максимальным*.

Замечание. Вообще-то совсем не очевидно, что максимальный поток существует.

Определение 3. Пусть G — сеть, а множество ее вершин V разбито на два непересекающихся множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) — разрез сети G.

Величина $c(S, T) = \sum_{x \in S,\, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*, а $f(S, T) = \sum_{x \in S,\, y \in T} f(x, y)$ называется *потоком через разрез* (S, T). Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.

1. Назначим две противоположные вершины куба истоком и стоком соответственно. Ребра, которые содержат одну из выбранных вершин, ориентируем от истока к стоку, остальные в одном направлении. Расставьте числа от 1 до 12 на ребрах и найдите минимальный разрез, максимальный поток.

2. Для любого потока f и разреза (S, T) сети G докажите, что $|f| = f(S, T)$.

Определения.

1) Пусть f — поток в сети G. Рассмотрим сеть G_f с теми же V, s, t и пропускной способностью $c_f(x, y) := c(x, y) - f(x, y)$. Назовем G_f *остаточной сетью* потока f.

2) Проведем на множестве вершин V ориентированные ребра из x в y для всех таких пар (x, y), что $c_f(x, y) > 0$. Любой путь из s в t в полученном ориентированном графе называется *дополняющим путем* потока f.

3. (Теорема Форда—Фалкерсона, 1956) В сети G с пропускной способностью c задан поток f. Докажите, что следующие три утверждения равносильны:

1° поток f максимален;

2° существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$;

3° в остаточной сети G_f нет дополняющего пути.

Следствие. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

4. Докажите, что среди максимальных потоков целочисленной сети (т. е. в сети, пропускные способности всех ребер которой являются целыми числами) найдется целочисленный.

Для самостоятельного решения

Выведите из теоремы Форда-Фалкерсона следующие утверждения:

5. *Теорема Холла.*

6. *Теорема Менгера.* Даны граф G и его вершины u и v.

а) Пусть при удалении любых $k-1$ ребер в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих ребер.

б) Пусть вершины u и v несмежны и при удалении любых $k-1$ вершин в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих внутренних вершин.

Обязательная задача: 5

16-17 июля

Матрицы в быту и в природе

Определение. Матрицей $m \times n$ называется прямоугольная числовая таблица размера $m \times n$. Если A – матрица, элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца обычно обозначают a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы $1 \times n$ принято называть вектор-строками, а матрицы $n \times 1$ – вектор-столбцами.

Матрицы одного размера можно складывать и вычитать поэлементно. Кроме того матрицу $l \times m$ можно умножать на матрицу $m \times n$ следующим образом: элемент, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы-произведения равен скалярному произведению i-й строки первой матрицы и j-го столбца второй матрицы, рассматриваемых как m-мерные вектора в координатной форме. То есть, $C = AB$, если

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{im} b_{mj}.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 9 & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 \end{pmatrix}.$$

Получившаяся в результате умножения матрица, очевидно, имеет размер $l \times n$

Замечание. Умножение матриц не является коммутативным, т. е. AB не всегда равно BA. Более того, если одно из этих произведений существует, второе вполне может не существовать. Например, если поменять местами множители в приведённом примере, выполнить умножение будет невозможно.

Квадратная матрица $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ размера $n \times n$ называется *единичной матрицей*. Иногда ее обозначают просто E.

1. Докажите, что $AE = A$ и $EB = B$ для всех матриц A и B, которые можно умножать на E с нужной стороны.

Для умножения матриц выполняются ассоциативность и дистрибутивность: $(AB)C = A(BC)$, $A(B + C) = AB + AC$ и $(A + B)C = AC + BC$. Не будем заставлять вас это проверять, желающию на досуге могут убедиться, что это так и есть.

Квадратные матрицы одного размера, очевидно, можно умножать друг на друга с любой стороны. Более того, их можно возводить в степень.

2. Найдите а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

3. Давайте каждому комплексному числу $a + bi$ сопоставим матрицу $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Докажите, что с точки зрения сложения и умножения такие матрицы ведут себя точно так же, как комплексные числа.

Матрица B называется *транспонированной* к A матрицей, если $b_{ij} = a_{ji}$, то есть эти матрицы симметричны друг другу относительно главной диагонали. Обозначается это так: $B = A^T$.

4. Докажите, что а) $A^T + B^T = (A + B)^T$ б) $A^T B^T = (BA)^T$.

Матрицы и группы

Задачу 3 можно переформулировать так: группа матриц вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ изоморфна группе комплексных чисел по сложению, а группа ненулевых матриц такого вида изоморфна группе ненулевых комплексных чисел по умножению.

5. Обобщите задачу 2а) до некоторого результата из теории групп.

6. а) Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Что она делает с другими матрицами если, её умножить на них слева? Справа?

б) Найдите группу матриц, изоморфную группе S_n (группе перестановок n элементов).

Любой вектор можно представить в виде столбца его координат. Соответственно, имеет смысл говорить об умноженим матрицы на вектор или о действии матрицы на вектор.

7. а) Что делает с вектором матрица $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$?

б) Найдите группу матриц, изоморфную группе преобразований поворота с центром в начале координат.

8. Найдите группу матриц, изоморфную группе преобразований параллельного переноса. *Подсказка:* это будут матрицы 3×3, действующие на вектор-столбцы вида $(x, y, 1)$.

Матрицы в теории графов

Пусть G — граф. Матрица I_G, столбцы которой соответствуют ребрам графа, а строки – вершинам, причем на пересечении столбца и строки стоит 1, если данная вершина является одним из концов данного ребра, и 0 в противном случае, называется *матрицей инцидентности* графа G.

Пусть G – граф с n вершинами, занумерованными в каком-то порядке числами от 1 до n. Квадратная матрица A_G размера $n \times n$ такая, что на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, если i-ая и j-ая вершины соединены ребром, и 0 в противном случае, называется *матрицей смежности* графа G.

Для мультиграфов, т.е. графов, допускающих петли и кратные ребра, на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы смежности стоит количество ребер, соединяющих соответствующие вершины, а в клетках диагонали стоит количество петель (иногда удвоенное) в соответствующей вершине.

9. Вычислите $I_G I_G^T - A_G$ для обычных графов и для мультиграфов.

10. Опишите в терминах графа G элементы матрицы A_G^k.

11. Пусть G – граф с n вершинами. Как по матрице $(A_G + E_n)^{n-1}$ понять, связен граф или нет?

Матрицы и рекурренты

В задаче 2б мы видели, как элементы одной известной последовательности порождаются возведением в степень некоторой матрицы. На самом деле, верен более общий факт.

12. Докажите, что для любой линейной рекурренты второго порядка x_n существует такая матрица A, что если матрицу A^n умножить на вектор-столбец начальных условий $(x_1, x_0)^T$, получится вектор $(x_{n+1}, x_n)^T$.

Задача В языке племени котэ четыре буквы - К, О, Т и Э, при этом слова, в которых встречается две подряд буквы Т или три подряд буквы Э считаются глубоко неприличными. Найдите количество сравнительно приличных слов длины 16 в этом языке.

13. Сформулируйте написанную выше задачу на языке матриц.

Для самостоятельного решения

14. Найдите матрицу D размера $n \times n$ такую, что если её умножить на вектор-столбец, содрежащий коэффициенты многочлена степени n, получится вектор-столбец коэффициентов производной этого многочлена.

15. а) Рассмотрим бесконечную матрицу A такую, что $a_{ij} = 0$ при $i < j$ и $a_{ij} = c_{i-j}$ при $i > j$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 14 & 5 & 2 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Что получится, если её умножить на бесконечный же вектор-столбец, k-й элемент которого равен $(k-1)$-му числу Каталана? Говорить о произведении здесь можно, поскольку в любой получающейся по формуле умножения бесконечной сумме лишь конечное число слагаемых не равно 0.

б) А что получится, если на этот же вектор-столбец умножить похожую маттрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 5 & 2 & 1 & 1 & -1 & \dots \\ 14 & 5 & 2 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

16. Докажите, что а) вещественные; б) целочисленные квадратные матрицы $n \times n$, на главной диагонали которых стоят единицы, а под диагональю – нули, образуют группу относительно умножения.

Обязательная задача: 10

16 — 17 июля

Теорема Коши о жёсткости многогранника

Длиной стороны сферического многоугольника называется длина дуги, образующей сторону.

1. *Лемма Коши (Cauchy's Arm Lemma).* Докажите, что если у двух сферических n — угольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ равны длины соответствующих сторон, кроме A_1A_n и B_1B_n, равны и $\angle A_2 \leq \angle B_2, ..., \angle A_{n-1} \leq \angle B_{n-1}$. Докажите, что $A_1A_n \leq B_1B_n$.

А) Докажите, что для сферического треугольника выполняется первая теорема косинусов: $cosa = cosbcosc + sinbsinccos\alpha$, a, b, c — длины сторон, α — угол, противолежащий a.

Б) Докажите утверждение леммы для сферического треугольника.

В) Докажите по индукции утверждение леммы для произвольного сферического n — угольника.

Замечание. Если повернуть сторону $A_{n-1}A_n$ так, чтобы угол при вершине A_{n-1} стал равен B_{n-1}, может получиться невыпуклый многоугольник. В этом случае нужно рассмотреть последний момент, когда еще сохранялась выпуклость.

2. Пусть у двух сферических n — угольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ равны длины соответствующих сторон равны, но сами многоугольники не равны. Пометим угол A_i знаком плюс, если $\angle A_i > \angle B_i$ и минус, если $\angle A_i < \angle B_i$. Докажите, что при обходе многоугольника $A_1A_2...A_n$ число строгих перемен знака (его называют индексом многоугольника) не меньше 4.

Два многогранника называют эквивалентными, если между их гранями, рёбрами и вершинами установлены взаимно-однозначные соответствия, сохраняющие отношение инцидентности: если две грани соответствуют друг другу, то принадлежащие им рёбра также соответствуют друг другу, а если два ребра соответствуют друг другу, то их концы также соответствуют друг другу.

Теорема Коши о жёсткости выпуклых многогранников: если любые две соответственные грани эквивалентных выпуклых многогранников можно совместить движением, переводящим соответственные вершины в соответственные, то многогранники равны.

Сравним двугранные углы многогранников и на ребрах первого многогранника поставим плюс, если двугранный угол при этом ребре больше, чем у второго, и минус, если двугранный угол меньше. При этом не все рёбра могут оказаться помеченными. Для доказательства теоремы Коши достаточно показать, что нет помеченных ребер.

3. Докажите, что все ребра не могут быть помечены.

4. Докажите, что если из вершины многогранника выходит хотя бы одно помеченное ребро, то индекс этой вершины не менее 4.

Рассмотрим сферические многоугольники, соответствующие граням нашего многогранника, и выбросим непомеченные ребра, а также вершины, из которых не выходит помеченных ребер.

Предположим, что помеченные ребра есть.

5. Докажите, что каждый максимальный связный граф на сфере, вершинами которого являются невыброшенные вершины, а рёбра — помеченные рёбра многогранника, является планарным.

Пусть v — число вершин данного графа, f_i — число его i-мерных граней (некоторые из них могли образоваться в результате объединения граней

6. Докажите, что в таком графе $4v = 8 + 2f_3 + 4f_4 + 6f_5 + ...$

Пусть I — сумма индексов вершин графа.

7. Докажите, что $I \leq 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + ...$

8. Докажите теорему Коши.

16 июля

Внутренний математический бой за третье место

1. Произведение положительных чисел $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Докажите, что выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k^2 + \frac{n+1}{n-1}} \leq \frac{n-1}{2}.$$

2. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырёхугольника $ABCD$ перескаются в точке K. Внутри четырёхугольника выбрана точка P такая, что $\angle PAB = \angle PBC$ и $\angle PDC = \angle PCB$. Докажите, что прямая PK проходит через середину BC.

3. На ребрах MA, MB и MC тетраэдра $MABC$ выбраны точки A_1, B_1 и C_1. Точки O_C, O_A и O_B – центры описанных окружностей треугольников MA_1B_1, MB_1C_1 и MC_1A_1. Докажите, что если MO_A перпендикулярно BC и MO_B перпендикулярно CA, то MO_C перпендикулярно AB.

4. На доске были написаны числа от 1 до 1000. Каждую минуту Агафон выбирал 2 числа, стирал их и записывал сумму всех цифр, которые входили в стертые числа. Мог ли он в конце получить цифру?

5. Докажите, что количество способов разрезать прямоугольник на уголки из трех клеток всегда четно.

6. Докажите, что для любого нечётного простого числа существует ровно одно натуральное число n, такое что $n(n+p)$ есть точный квадрат.

7. В стране с N городами некоторые пары соединены дорогами, причем для любых двух городов существует единственный маршрут, который их соединяет. Какое наибольшее число городов, из которых выходит ровно три дороги, может быть?

8. В ряд рубашками вверх лежат 2012 карт. За один ход разрешается убрать любую карту, лежащую рубашкой вверх, если и справа и слева от неё лежит хотя бы одна карта. При этом ближайшая карта слева и ближайшая карта справа переворачиваются. Можно ли действуя так много раз, оставить в ряду ровно две карты?

17 июля

Математический бой обычных групп М9 — М10

1. В турнире по шахматам принимают участие n игроков. На старте турнира все они находятся на первом уровне. Если в любой момент после старта турнира имеется два или более игрока одного уровня, не занятых в партиях, они некоторым образом разбиваются на пары и начинают играть друг с другом так, что остается не более одного участника каждого уровня. Продолжительность партии непостоянна. По завершении партии победитель увеличивает свой уровень на один, а проигравший уменьшает на один (если был на первом уровне, то ничего не меняет). Турнир заканчивается, когда все участники оказываются на разных уровнях. На каком уровне будет находиться победитель в конце турнира?

2. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, точка O – центр описанной окружности. Докажите, что неравенство $\angle AIO \leq 90$ равносильно тому, что $2BC \leq AC + AB$

3. На доске 8×8 расставлены чёрные и белые ладьи (оба цвета присутствуют) так, что ладьи разных цветов не бьют друг друга. Какое наибольшее количество ладей может стоять на границе доски?

4. На столе лежит треугольник со сторонами 1 метр, 1 метр и 1 сантиметр, в котором находится точечный шарик. Основание треугольника намазывают клеем изнутри, а шарик заставляют катиться по законам физики. Докажите, что до момента прилипания к основанию шарик преодолеет менее двух метров.

5. Докажите, что начиная с некоторого n, все делители числа $(n!)^n+1$ будут больше, чем $n+2012$.

6. Дан треугольник ABC. Окружность Ω проходит через точку A и касается прямой BC в точке L – основании биссектрисы AL, а также пересекает сторону AB в точке P. Отрезко CP вторично пересекает Ω в точке Q. Докажите, что прямая AQ делит отрезок CL пополам.

7. Дан граф, степени всех вершин которого равны 3. Докажите, что можно раскрасить его в два цвета так, чтобы не было нечётных одноцветных циклов.

8. Некоторые клетки доски $n \times n$ заражены инфекцией. Клетка заражается, если хотя бы две соседние по стороне клетки уже заражены. Какое минимальное количество клеток нужно заразить, чтобы в конце концов заразилась вся доска?

9. Докажите для положительных чисел x, y, u, v неравенство

$$\frac{xy + xv + uy + uv}{x + y + u + v} \geq \frac{xy}{x + y} + \frac{uv}{u + v}.$$

10. Последовательность a_n задана рекуррентным соотношением $a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3$. Известно, что $a_0 = 9$. Докажите, что в десятичной записи числа a_{10} присутствует хотя бы 1000 девяток.

19 июля

Формальные степенные ряды. Производящие функции.

Формальным степенным рядом называется запись вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$. Сложение формальных степенных рядов определяется покоэффициентно. Что же касается умножения, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, если для любого целого неотрицательного n выполняется равенство $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Определения операций над формальными степенными рядами полностью аналогично определению тех же операций над многочленами. Более того, многочлены — это в точности формальные степенные ряды, имеющие лишь конечное количество ненулевых коэффициентов.

Формальные степенные ряды на то и формальные, чтобы мы не заботились о том, можем ли мы посчитать сумму элементов этого ряда хоть при каком либо x, отличном от нуля. Для некоторых рядов, кстати говоря, таких x и не существует.

1. Докажите, что $(1-x)(1+x+x^2+x^3+\ldots) = 1$.

Благодаря этому, мы можем говорить о равенстве $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$. Однако, понимать это равенство следует исключительно так: в множестве формальных степенных рядов ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ является обратным к ряду $1 - x$. Буква x в данном случае лишь формальный символ переменной, а то, что на самом деле это равенство выполняется для $-1 < x < 1$, а при остальных x его левая часть не имеет смысла, нас совершенно не интересует.

2. Докажите, что для любого формального степенного $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ряда свободный член которого не равен нулю, существует ровно один формальный степенной ряд, обратный к данному по умножению, т.е. дающий с ним в произведении единицу.

3. Найдите коэффициенты ряда $(1-x)^{-2}$.

4. Докажите, что для любого формального степенного $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ряда младший ненулевой коэффициент которого находится при чётной степени и положителен, существует ровно два формальных степенных ряда, при возведении в квадрат дающих $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Тот из рядов, младший ненулевой коэффициент которого положителен, мы и будем называть квадратным корнем из исходного ряда.

Выражение $\frac{1}{1-x}$ называют *производящей функцией* для последовательности коэффициентов степенного ряда $1+x+x^2+x^3+\ldots$, то есть для последовательности единиц. Выражение $(1-x)^{-2}$ также будет производящей функцией для последовательности своих коэффициентов. Когда вы познакомитесь с рядами Тэйлора, теорией сходимости и прочими прелестями математического анализа, вы узнаете, что равенства с которыми мы работаем имеют и ещё какой-то смысл, кроме формального. Однако пока нам не надо об этом задумываться и уж тем более нельзя подставлять в эти формулы какие-то числа. Под производящей функцией мы с вами будет понимать простую и маленькую формулу без бесконечного суммирования. Эта формула может содержать какие-то многочлены небольшой степени, а также такие операции над ними как сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

5. Найдите производящую функцию для биномиальных коэффициентов (т.е. производящую функцию, соответствующую ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ где $a_k = C_n^k$. Можно, конечно, рассмотреть и ряд, в котором коэффициенты занумерованы нижним индексом, но это сложнее).

6. Найдите производящую функцию для чисел Фибоначчи.

7. Докажите, что $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ является производящей функцией для чисел Каталана.

Для самостоятельного решения

8. Докажите, что коэффициент при 27 степени многочлена $(1 + x + x + \ldots + x^9)^6$ равен числу счастливых билетов.

9. Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ является производящей функцией для чисел C_{2n}^n.

Обязательная задача: 7

19 июля

Проективная геометрия I

Определение. Двойным отношением четырех различных точек A, B, C, D на прямой называется величина

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

и обозначается (A, B, C, D).

1. Докажите, что

а) $(A, B, C, D) = \frac{1}{(B,A,C,D)} = \frac{1}{(A,B,D,C)}$.

б) $(A, B, C, D) = 1 - (A, C, B, D)$.

в) какие значения может принимать (W, X, Y, Z), где $\{W, X, Y, Z\} = \{A, B, C, D\}$, а $(A, B, C, D) = \lambda$?

2. Докажите, что при фиксированных A, B, C и вещественном λ отличном от 0, 1 и $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$, существует есдинственная точка D такая, что $(A, B, C, D) = \lambda$.

Определение. Двойным отношением четырех различных прямых на плоскости a, b, c, d, проходящих через одну точку, называется величина

$$\frac{\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})}{\sin\angle(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})} : \frac{\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d})}{\sin\angle(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b})}$$

где $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ - произвольные не нулевые вектора, выбранные на прямых a, b, c, d. Оно обозначается (a, b, c, d).

3. Пусть прямые a, b, c, d проходят через одну точку и пересекают прямую l в точках A, B, C, D соответственно. Докажите, что $(a, b, c, d) = (A, B, C, D)$

4. Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке A. На l_1 выбраны точки B_1, C_1 и D_1, а на l_2 — точки B_2, C_2 и D_2. Оказалось, что $(A, B_1, C_1, D_1) = (A, B_2, C_2, D_2)$. Докажите, что прямые B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2 либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

5. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2, соответственно. Оказалось, что прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются на прямой AB, а прямые A_{12} и A_{21} пересекаются на прямой A. Докажите, что прямые B_1C_2 и B_2C_1 пересекаются на прямой BC.

6. (Дезарг) Даны два треугольника. Докажите, что три прямые проходящие через соответственные вершины треугольника пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда три точки пересечения соответственных сторон лехат на одной прямой. (Можно считать, что никакие две прямые из условия не параллельны)

7. (Папп) На двух прямых выбраны точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что точки перечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, A_1C_2 и A_2C_1, B_1C_2 и B_2C_1 лежат на одной прямой.

8. Дан треугольник ABC. На прямой BC располагаются точки H_A, L_A, I_A и J_A - основание высоты, бисектриссы, точка касания вписанной и вневписанной соответственно. Аналогично определяются точки H_B, L_B, I_B и J_B. Докажите, что прямые H_AH_B, L_AL_B, I_AI_B и J_AJ_B пересекаются в одной точке.

Обязательная задача: 6

20 июля

Проективная геометрия II

Определение. Рассмотрим обычную евклидову плоскость. Для каждого направления параллельных прямых добавим еще одну *бесконечно удаленную* точку, через которую они все будут проходить. Будем говорить, что множество бесконечно удаленных точек образовывают еще одну, *бесконечно удаленную* прямую. Полученная конструкция называется *проективной плоскостью*. На ней любые две прямые пересекаются ровно в одной точке, а через любые две точки проходит ровно одна прямая.

1. Придумайте определение двойному отношению четырех различных точек проективной плоскости, лежащих на одной прямой, и двойному отношению четырех различных прямых проективной плоскости, проходящих через одну точку; докажите, что для введенных определений выполняется свойство о равенстве двойного отношения четырех прямых и их точек пересечения с какой-то пятой прямой.

Определение. Проективным преобразованием называется биективное отображение проективной плоскости в себя, сохраняющее прямые.

В трехмерном пространстве располагаются плоскости α и β, дополненные до проективных, и точка O, не лежащая на этих плоскостях. Проведем прямую l через точку O. В случае, если l пересекает плоскость α, то через X обозначим точку пересечения, в противном случае обозначим через X бесконечно удаленную точку плоскости α, в которой сходятся прямые, параллельные l. Аналогично определим точку Y для плоскости β. Отображение, переводящая точки X в точки Y называется *центральной проекцией* плоскости α на плоскость β из точки O.

2. Докажите, что центральная проекция является проективным преобразованием.

3. Докажите, что любое проективное преобразование является композицией центральной проекции и аффинного преобразования.

4. Докажите, что проективное преобразование сохраняет двойные отношения.

5. а) Докажите, что любые четыре точки общего положения можно перевести в квадрат каким-то проективным преобразованием.

б) Докажите, что если есть две пары четверок точек общего положения, то существует проективное преобразование, переводящее точки первой четверки в соответственные точки второй четверки.

в) Докажите, что такое преобразование единственно.

6. Докажите, используя проективное преобразование:

а) теорему Дезарга;

б) теорему Паппа.

7. Точки P и Q — точки пересечения противоположных сторон четырехугольника $ABCD$. O - точка пересечения диагоналей. Пусть X — проекция точки O на прямую PQ. Докажите, что $\angle AXB = \angle CXD$.

8. На сторонах треугольника ABC выбраны такие точки A_1, B_1 и C_1, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. А на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$ выбраны такие точки A_2, B_2 и C_2, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекутся в одной точке.

Обязательная задача: 5

20 июля

Мера множеств

Все множества, которые мы рассматриваем, подмножества прямой.

1. Верно ли, что пересечение (объединение) открытых (замкнутых) множеств открыто (замкнуто)?

2. Что изменится в предыдущей задаче, если допустить счетное пересечение (объединение)?

3. Придумайте пример замкнутого множества на отрезке, которое содержит несчетное число точек и не содержит ни одного интервала.

4. Докажите, что любое открытое множество есть не более, чем счетное объединение непересекающихся интервалов (возможно бесконечных).

5. Скажем, что множество имеет меру 0, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть счетным числом интервалов суммарной длины меньше ε.

а) Любое счетное множество имеет меру 0.

б) Открытое множество не может иметь меру 0.

в) Множество Кантора имеет меру 0.

г) Может ли пример в 3 задаче не иметь меру 0?

6. Можно ли каждому множеству на прямой сопоставить вещественное неотрицательное число так, чтобы пустому множеству был сопоставлен 0, каждому отрезку - его длина, а любому счетному объединению непересекающихся множеств была сопоставлена сумма чисел, сопоставленных множествам?

Для самостоятельного решения

7. Придумайте непрерывную биекцию на отрезка на себя, которая почти всюду постоянна (т.е. множество точек, в любой окрестности которых функция принимает более одного значения, имеет меру 0).

Обязательная задача: 6

22 июля

Изопериметрическое неравенство

Изопериметрическая задача. Среди всех многоугольников фиксированного периметра P с количеством вершин не более n наибольшую площадь имеет правильный n-угольник.

1. А) Докажите, что невыпуклый многоугольник не может быть решением изопериметрической задачи.

Б) Докажите, что выпуклый многоугольник с неравными сторонами не может быть решением изопериметрической задачи.

В) В угол вписана окружность. На большей (меньшей) из дуг, на которые делится окружность точками касания со сторонами угла, найдите точку, касательная в которой отсекает от угла треугольник наименьшей(наибольшей) площади.

Г) Докажите, что выпуклый многоугольник с неравными углами не может быть решением изопериметрической задачи.

2. Объясните, почему нельзя теперь просто так взять и получить из А), Б), Г) решение изопериметрической задачи.

3. А) Пусть F, G - прямоугольники на координатной плоскости со сторонами, параллельными осям координат. Найдите $\frac{F+G}{2}$ и докажите неравенство для площадей: $\sqrt{S(F+G)} \geq \sqrt{S(F)}+\sqrt{S(G)}$.

Б) Пусть F, G — некоторые области, прямые l и m параллельны оси абсцисс. l разбивает F на две части: верхнюю F_1 и нижнюю F_2, аналогично m разбивает G на G_1 и G_2. Докажите, что фигуры F_1+G_1 и F_2+G_2 лежат в разных полуплоскостях относительно некоторой прямой.

В) Пусть каждая из фигур F, G является объединением конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям. Докажите, что $\sqrt{S(F+G)} \geq \sqrt{S(F)}+\sqrt{S(G)}$.

Г) Докажите *неравенство Брунна - Минковского*: если F и G — выпуклые компакты на плоскости, то

$$\sqrt{S(F+G)} \geq \sqrt{S(F)}+\sqrt{S(G)}$$

.

Определение. Для плоской фигуры F её *ϵ-окрестностью* называется $F_\epsilon = F+\epsilon D$, где D — круг радиуса 1, $\epsilon > 0$.

4. А) Нарисуйте ϵ-окрестности круга, окружности, отрезка, границы прямоугольника.

Б) Пусть F — выпуклый многоугольник площади S и периметра P. Найдите площадь F_ϵ.

В) Выведите изопериметрическое неравенство: $4\pi S \leq P^2$ в любом выпуклом многоугольнике периметра P и площади S из неравенства Брунна — Минковского.

22 июля

Применение леммы Бернсайда

1. Доска 3×3 заполнена крестиками и ноликами: крестиков 5, а ноликов 4.

а) Сколько существует различных способов заполнить доску?

б) Сколько существует способов заполнить доску, если способы, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми?

в) Сколько есть способов если можно и поворачивать, и зеркально отражать доску (при этом способы считаются одинаковыми)?

2. Ребра тетраэдра можно красить в n цветов. Сколько различных тетраэдров можно при этом получить?

3. Сколько попарно различных шестиугольников можно вписать в правильный 15-угольник?

4. а) Посчитайте число раскрасок ожерелья из p (p – простое) бусинок в a цветов (не все цвета обязаны присутствовать; ожерелья можно поворачивать, но нельзя переворачивать.)

б) Докажите малую теорему Ферма, пользуясь пунктом а).

5. Сколько существует кубиков со знаками $\rightarrow$ на гранях (направление стрелочки должно быть перпендикулярно какому-нибудь ребру, положение – централизовано)?

Для самостоятельного решения

6. Дана таблица $n \times n$. Назовём узором раскраску её клеток в два цвета. Разрешается выбрать любой столбец или строку и перекрасить все его (её) клетки в противоположный цвет. Назовём узор А эквивалентным узору Б, если Б можно получить из А такими перекрашиваниями. Найдите количество классов эквивалентности узоров.

7. Теорема Лагранжа. Докажите, что порядок любой подгруппы конечной группы является делителем порядка группы.

Обязательная задача: 4

23 июля

Заключительная олимпиада.

Довывод

1. Вася написал число, увидел, что оно делится на свою последнюю цифру, и поделил на нее. Оказалось, что полученное число тоже делится на свою последнюю цифру, и Вася опять на нее поделил и т. д. После 100 делений Вася получил 1, причем до этого все результаты делений были больше 1. Какое число у него могло быть вначале? (Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.)

2. Докажите, что если произведение трёх чисел равно 1, а их сумма больше суммы их обратных, то ровно одно из этих чисел больше 1.

3. Даны два четырехугольника. Для каждого из них выписали в произвольном порядке 6 чисел — длины сторон и диагоналей. Оказалось, что выписанные наборы совпали. Верно ли, что четырехугольники равны?

4. На продолжениях сторон AB и CB треугольника ABC за точку B отмечены точки M и N так, что $AM = CN = p$ (p — полупериметр треугольника). I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Отрезок BL — диаметр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые LI и MN перпендикулярны.

5. В теннисном турнире n участников. Они хотят сыграть несколько матчей пара на пару так, чтобы каждый сыграл *против* каждого ровно один раз. При каких n им это удастся?

Вывод

6. Имеется 2012 различных конечных множеств. Докажите, что из них можно выбрать такие 10 множеств, что ни одно из выбранных не является объединением никаких нескольких из остальных 2011 множеств.

7. Даны 2012 квадратных трехчленов $x^2 - a_i x + b_i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2012$, у которых на месте коэффициентов a_i, b_i встречаются по одному разу все числа от 1 до 4024. Никакие два трехчлена не имеют общих корней. На вещественной прямой отметили все корни этих трехчленов. Докажите, что расстояние между какими-то двумя отмеченными точками меньше $1/250$.

8. На плоскости отмечено бесконечное количество точек, из которых никакие 3 не лежат на одной прямой. Множество A состоит из радиусов вписанных окружностей всевозможных треугольников с вершинами в отмеченных точках. Докажите, что множество A бесконечно.