# Проективная геометрия II

Определение. Рассмотрим обычную евклидову плоскость. Для каждого направления параллельных прямых добавим еще одну *бесконечно удаленную* точку, через которую они все будут проходить. Будем говорить, что множество бесконечно удаленных точек образовывают еще одну, *бесконечно удаленную* прямую. Полученная конструкция называется *проективной плоскостью.* На ней любые две прямые пересекаются ровно в одной точке, а через любые две точки проходит ровно одна прямая.

1. Придумайте определение двойному отношению четырех различных точек проективной плоскости, лежащих на одной прямой, и двойному отношению четырех различных прямых проективной плоскости, проходящих через одну точку; докажите, что для введенных определений выполняется свойство о равенстве двойного отношения четырех прямых и их точек пересечения с какой-то пятой прямой.

Определение. Проективным преобразованием называется биективное отображение проективной плоскости в себя, сохраняющее прямые.

В трехмерном пространстве располагаются плоскости $\alpha$ и $\beta$, дополненные до проективных, и точка $O$, не лежащая на этих плоскостях. Проведем прямую $l$ через точку $O$. В случае, если $l$ пересекает плоскость $\alpha$, то через $X$ обозначим точку пересечения, в противном случае обозначим через $X$ бесконечно удаленную точку плоскости $\alpha$, в которой сходятся прямые, параллельные $l$. Аналогично определим точку $Y$ для плоскости $\beta$. Отображение, переводящая точки $X$ в точки $Y$ называется *центральной проекцией* плоскости $\alpha$ на плоскость $\beta$ из точки $O$.

2. Докажите, что центральная проекция является проективным преобразованием.

3. Докажите, что любое проективное преобразование является композицией центральной проекции и аффинного преобразования.

4. Докажите, что проективное преобразование сохраняет двойные отношения.

5. а) Докажите, что любые четыре точки общего положения можно перевести в квадрат каким-то проективным преобразованием.

б) Докажите, что если есть две пары четверок точек общего положения, то существует проективное преобразование, переводящее точки первой четверки в соответственные точки второй четверки.

в) Докажите, что такое преобразование единственно.

6. Докажите, используя проективное преобразование:

а) теорему Дезарга;

б) теорему Паппа.

7. Точки $P$ и $Q$ — точки пересечения противоположных сторон четырехугольника $ABCD$. $O$ - точка пересечения диагоналей. Пусть $X$ — проекция точки $O$ на прямую $PQ$. Докажите, что $\angle AXB = \angle CXD$.

8. На сторонах треугольника $ABC$ выбраны такие точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке. А на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$ выбраны такие точки $A_2$, $B_2$ и $C_2$, что прямые $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$ пересекаются в одной точке. Докажите, что прямые $AA_2$, $BB_2$ и $CC_2$ пересекутся в одной точке.

Обязательная задача — 5.