Язык СЛУ: теория.

1. Рассмотрим СЛУ *ступенчатого вида*. Как ее решать? Сколько может быть решений (перечислите все возможности, и докажите, что других нет).

Определение 1. Две СЛУ (от одинакового набора переменных) называются *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Определение 2. Рассмотрим *элементарные преобразования* СЛУ трех типов:

ЭП1) к строке прибавляем другую строку, умноженную на число;

ЭП2) строку умножаем на ненулевое число;

ЭП3) меняем местами две строки.

Упр1. Если одна СЛУ получается из другой путем применения ЭП1-ЭП3, то эти СЛУ эквивалентны.

Теорема 1(метод Гаусса). При помощи ЭП1-ЭП3 СЛУ можно привести к ступенчатому виду.

Упр2. а) Сколько решений может быть у СЛУ?

а) Сколько решений может быть у СЛУ, где переменных больше, чем уравнений?

в) За сколько действий (линейное, квадратичное, экспоненциальное,...) заведомо можно привести СЛУ размера $n \times n$ к ступенчатому виду?

Следующие несложные теоремы *чрезвычайно* важны.

Теорема 2. ОСЛУ, в которой переменных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение.

Теорема 3 (альтернатива Фредгольма). Пусть в СЛУ число уравнений равно числу неизвестных. Тогда имеет место один из двух случаев:

1) СЛУ имеет единственное решение при любом наборе свободных членов;

2) есть наборы свободных членов, при которых СЛУ не имеет решений, и есть наборы свободных переменных, при которых СЛУ имеет бесконечно много решений.

Переформулировка. Если система из n уравнений с n неизвестными имеет единственное решение при *каком-то* наборе свободных членов, то она имеет единственное решение при *любом* наборе свободных членов.

Теорема 4. Если СЛУ с рациональными коэффициентами и свободными членами имеет единственное (вещественное) решение, то это — решение в рациональных числах.

Теорема 5. Если СЛУ с целыми коэффициентами и свободными членами имеет какое-то (вещественное) решение, то она имеет решение в рациональных числах.

Нетривиальный вопрос. Пусть СЛУ разными способами приведена к ступенчатому виду. Совпадает ли число свободных переменных?

Язык СЛУ: задачи.

Упражнение. Напишите а) общее решение заданной СЛУ; б) приведите СЛУ к «перевернутому» ступенчатому виду, и напишите другое общее решение.

Игра. Есть ОСЛУ 5×5. Двое по очереди пишут коэффициенты этой ОСЛУ. Докажите, что первый может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

Дискретное уравнение теплопроводности. а) В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно расставить, причем единственным образом, числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому своих соседей (у клетки максимум 4 соседа).

б) Каков физический смысл задачи, как она «решается» по физическим соображениям, почему это решение неверно даже с физической точки зрения?

в) Решите задачу, если у клетки 8 соседей.

г) Обобщите задачу на непрямоугольные таблицы с «дырами» внутри и пространственные таблицы.

д) Как формулируется и решается задача для произвольного связного графа?

е) Решите задачу, если в таблицу расставлены комплексные числа.

10 бананов. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково. Веса бананов: а) вещественные; б) положительные; в) натуральные.

101 корова. Есть 101 корова. Если убрать любую буренку, то оставшихся можно разделить на два равных по весу и численности стада. Докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса а) *целые; б) рациональные; в) действительные; г) комплексные.

10 яблок. У Пети было 10 яблок, вес каждого – вещественное положительное число. Он проделал с ними несколько взвешиваний на чашечных весах без гирь, и каждый раз получал равенство. Докажите, что Петя сможет приписать каждому яблоку цену в *натуральное* число копеек так, чтобы при каждом из проведенных взвешиваний цены чаш были одинаковы.

Зарубки на отрезке. На отрезке $[0, 1]$ отмечены концы, а также конечное число *различных* точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.