Соображения непрерывности

В задачах мы будем пользоваться тем, что замкнутые ограниченные области измеримы, то есть для них корректно определена площадь.

1. Докажите свойство выпуклой ограниченной области: если строго между двумя параллельными прямыми (в полосе, не на границе) есть хоть одна точка фигуры, то в полосе находится часть фигуры ненулевой площади.

2. Докажите, что выпуклую ограниченную область можно разделить прямой данного направления на две части равной площади. Такая прямая единственна.

3. Дана выпуклая ограниченная область и точка а) вне; б) на границе; в) внутри неё. Докажите, что существует прямая, проходящая через эту точку и делящая площадь пополам.

4. А) Теорема о неподвижной точке. Если непрерывная функция $f(x)$ отображает отрезок в себя, то существует неподвижная точка, то есть такая точка x_0, что $f(x_0) = x_0$. Б) Непрерывная функция f такова, что уравнение $f(x) = x$ не имеет действительных решений. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ тоже не имеет действительных решений.

5. Найдите все непрерывные функции, удовлетворяющие равенству $f(x) + f(y) = f(x + y)$ при всех вещественных x, y.

Определение. Функция f, определённая на промежутке (отрезке, интервале, луче, всей прямой) и принимающая действительные значения, называется *выпуклой вниз* (или просто *выпуклой*), если её график на любом отрезке $[a, b]$, входящем в область определения, лежит не выше хорды с концами $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Аналогично определяется понятие *выпуклости вверх*.

6. Функция f выпукла вниз. А) Доказать, что для любых чисел a и b из её области определения выполнено неравенство $f((a + b)/2) \leq (f(a) + f(b))/2$.

Б) (Неравенство Йенсена) Докажите, что для любых чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ из области определения и неотрицательных $\alpha_1, ..., \alpha_n$, дающих в сумме 1, выполнено неравенство: $f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n)$.

7. Доказать, что всякая выпуклая (вниз или вверх) функция, определённая на интервале, непрерывна во всех точках этого интервала. Верно ли аналогичное утверждение для отрезка?

Для самостоятельного решения

8. Монах начал восхождение из храма на гору в восемь утра и поднялся на вершину к восьми вечера. Наутро он в восемь утра начал спуск, тоже длившийся 12 часов, по тому же пути, что и восхождение. Докажите, что был момент времени, разделенных ровно сутками, когда монах находился в одной и той же точке.

9. На плоскости даны две выпуклые ограниченные фигуры. Докажите, что существует прямая, которая делит каждую из них на две части равной площади.

10. Найдите все непрерывные функции, удовлетворяющие равенству $f(x^2) + f(x) = f(x^2 + x)$.