Выпуклые функции и неравенство Йенсена

Определение. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* (или *выпуклой вниз*), если для любых трёх чисел $a < b < c$ выполняется неравенство $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

Для функций, *выпуклых вверх*, имеет место противоположный знак неравенства.

1. Докажите, что функция выпукла тогда и только тогда, когда её надграфик является выпуклым множеством.

2. **(a)** Если функции $f(x), g(x)$ выпуклы, то любая их линейная комбинация $a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$ с положительными коэффициентами a, b также выпукла. Докажите это.

(b) Всегда ли композиция двух выпуклых функций также выпукла?

3. Дана выпуклая функция $f(x)$.

(a) Докажите, для любых x, y имеет место неравенство $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

(b) Докажите, *неравенство Йенсена* для 2 чисел:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

для $\alpha \in [0, 1]$ и любых x, y.

(c) Докажите неравенство Йенсена в общем виде, т.е. что для положительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с суммой 1 и любых $x_1, \ldots, x_n$ имеет место неравенство:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

.

Следствие. Если f — выпуклая функция, то для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место неравенство $f(\frac{1}{n}\sum\limits_i x_i) \leq \frac{1}{n}\sum\limits_i f(x_i)$. Если функция выпукла вверх, знак неравенства направлен в обратную сторону.

Замечание. Если функция дважды дифференцируема, то она выпукла тогда и только тогда, когда её вторая производная неотрицательна, т.е. когда первая производная монотонно неубывает.

4. Докажите, что $3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$.

5. Докажите неравенство: $n(x_1 + \cdots + x_n) \geq (\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n})^2$

6. Пусть m и n — натуральные числа, $m \geq n$. Докажите, что в любом графе на n вершинах с m рёбрами существует по крайней мере $\frac{m^2}{n}$ "галочек". Галочкой называется тройка вершин и пара ребёр, соединяющих одну из этих вершин с двумя другими.

7. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа с суммой 1. Докажите, что $\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$

Для самостоятельного решения

8. Выведите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом из неравенства Йенсена.

9. Докажите, наконец, неравенство Гёльдера (через Йенсена):

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(Все a_i, b_i — положительные и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

10. Пусть a, b, c – положительные числа, $a + b + c = 1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^{10} + \left(b + \dfrac{1}{b}\right)^{10} + \left(c + \dfrac{1}{c}\right)^{10}$.