Ликбез по инверсии

Для тех, кто ещё не знает, как выворачивать плоскость наизнанку

Определение. Дана окружность ω с центром O и радиусом R. Рассмотрим преобразование, которое сопоставляет точке P точку P', лежащую на луче OP и удовлетворяющую свойству $OP \cdot OP' = R^2$. Такое преобразование называется *инверсией относительно окружности* ω. Точка O называется центром инверсии, для неё результат инверсии неопределён (а точнее, определён, но находится в бесконечно удалённой точке).

1. *(Как её строить?)* Пусть точка P лежит вне окружности ω. Докажите, что следующие построения выдают точку, инверсную P:

(a) Проведём касательные PT и PS к ω. Точка P' — пересечение TS и OP.

(b) Проведём диаметр AB, перпендикулярный OP. Точка M — пересечение отрезка AP с ω. Точка P' — пересечение BM и OP.

2. Докажите, что

(a) прямая, проходящая через центр инверсии, при инверсии перейдет в себя;

(b) прямая, не проходящая через центр инверсии, при инверсии перейдет в окружность, проходящую через центр инверсии;

(c) окружность, проходящая через центр инверсии, при инверсии перейдет в прямую, не проходящую через центр инверсии;

(d) окружность, не проходящая через центр инверсии, при инверсии перейдет в окружность, не проходящую через центр инверсии.

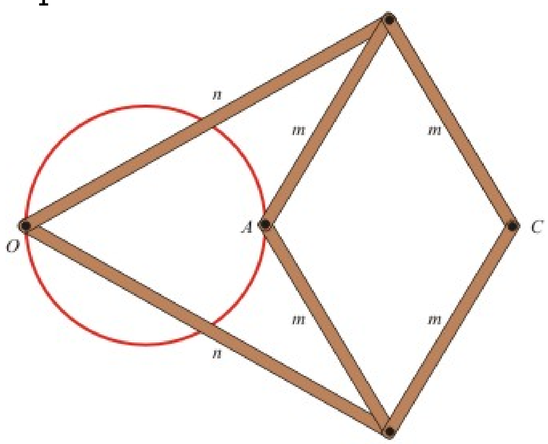
Определение. Обобщённой окружностью будем называть прямые или окружности. Таким образом, инверсия переводит обобщённые окружности в обобщённые окружности.

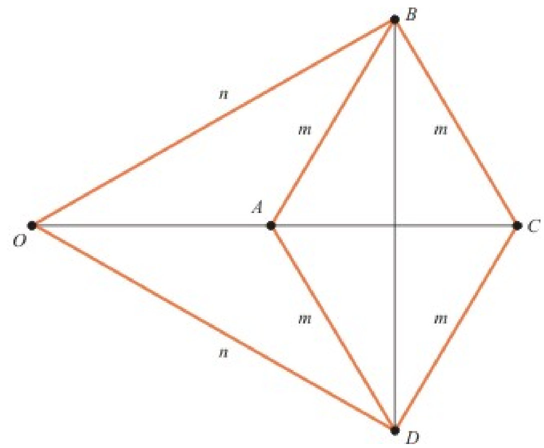
3. **(a)** Докажите, что окружность, перпендикулярная ω, при инверсии перейдёт в себя.

(b) Пусть окружность содержит две инверсные относительно ω точки. Докажите, что она перпендикулярна ω.

4. Докажите, что инверсия сохраняет углы между обобщёнными окружностями.

5. Инверсор Поселье, он же прямило Липкина — шарнирный механизм, показанный на картинке. Точка О неподвижно закреплена, остальные могут двигаться. Докажите, что точки A и C инверсны отосительно некоторой окружности с центром O.





Для тех, кто достиг просветления, но желает самосовершенствоваться

6. Даны геометрические конструкции. В каждой из них делается инверсия относительно точки O. Нарисуйте, что получится в результате применения этой инверсии.

a) Треугольник ABC и описанная около него окружность, точка $O = A$.

b) Треугольник ABC и описанная около него окружность, точка O лежит на описанной окружности, но не совпадает с вершинами треугольника.

c) Треугольник ABC и высота к нему, центр инверсии — точка на плоскости, не лежащая ни на одной из указанных прямых.

d) Треугольник ABC и вписанная окружность, точка $O = A$.

e) Треугольник ABC и вневписанная окружность, точка $O = A$.

f) Треугольник ABC и его высота AH, точка $O = A$.

7. Сделав инверсию относительно точки O, напишите, во что превращаются формулировки известных теорем.

(a) Внутренние накрест лежащие углы равны. В качестве O выберите точку на секущей, отличную от точек пересечения.

(b) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Центр инверсии — вершина треугольника.

(c) В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является также биссектрисой. Центр инверсии — вершина напротив основания.

(d) Противоположные углы вписанного четырёхугольника равны $180°$. Центр инверсии лежит на описанной окружности.

(e) Основания перпендикуляров, проведённых из точки P к сторонам треугольника, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности треугольника. Центр инверсии выберите по своему желанию.

Для тех, кто уже не видит разницы между прямыми и окружностями

Теперь мы переходим к комплексным числам.

Определение. Дробно-линейной функцией назовём функцию вида $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Примечание. **(a)** Мы предполагаем, что $f(z)$ определена и принимает значения в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. В частности, $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ и $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Коэффициенты тоже предполагаются комплексными числами.

(b) Частным случаем дробно-линейной функции является линейная функция (при $c = 0$). Таким образом, любой параллельный перенос, любой поворот и любая поворотная гомотетия может быть записана как дробно-линейная функция.

8. **(a)** Докажите, что композиция дробно-линейных функций является дробно-линейной функцией.

(b) Докажите, что дробно-линейная функция $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ обратима (т.е. существует функция $g(z)$, такая что $f(g(z)) = z$) тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$.

В дальнейшем будем рассматривать только обратимые дробно-линейные преобразования.

9. **(a)** Нет-нет, инверсия не является частным случаем дробно-линейной функции (почему?)! А вот инверсия + осевая симметрия — является. Докажите это.

(b) Докажите, что любая дробно-линейная функция раскладывается в композицию линейных функций и функции $\frac{1}{z}$.

(c) Докажите, что дробно-линейное преобразование переводит прямые или окружности в прямые или окружности. При каких условиях получается окружность, а при каких — прямая?

(d) Докажите, что дробно-линейные преобразования сохраняют углы между кривыми.

10. Докажите, что для любых троек точек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 существует единственное дробно-линейное отображение f, такое что $f(z_i) = w_i$.

11. Куда переводит функция $f(z) = \frac{z-1}{z-i}$ единичный круг? Верхнюю полуплоскость?

12. Найдите все дробно-линейные преобразования, оставляющие на месте точку a) 0; b) ∞.

13. Найдите все дробно-линейные преобразования, которые переводят верхнюю полуплоскость в себя.

Определение. Точки симметричны оноситeльно окружности, если они переходят друг в друга при инверсии относительно этой окружности.

14. Докажите, что дробно-линейные преобразования сохраняют симметрию относительно прямой или окружности.