Симедианы

> Отражения нет только у вампира, а у медианы оно есть.

Опредедение. Симедианой называется чевиана, симметричная медиане относительно биссектрисы. Точкой Лемуана называется точка пересечения симедиан (т.е. точка, изогонально сопряжённая точке пересечения медиан).

1. (a) Пусть ABC — треугольник, M и N — точки на стороне BC такие, что AM и AN симметричны относительно биссектрисы AL. Докажите, что $\frac{BM\cdot BN}{CM\cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

(b) Пусть точка N лежит на стороне BC. Докажите, что AN является симедианой тогда и только тогда, когда $\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Определение. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC построены точки C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BC и B_1C_1 называются антипараллельными, если $\angle ABC = \angle AB_1C_1$.

2. Докажите, что чевиана AN является симедианой тогда и только тогда, когда она делит пополам любой отрезок B_1C_1, антипараллельный отрезку BC.

3. Пусть M — середина стороны AC треугольника ABC. Докажите, что точка, инверсная M относительно описанной около ABC окружности, лежит на симедиане угла B.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BK, а также перпендикуляры KE и KF на стороны AB и BC соответственно. К окружности, описанной около треугольника BEF, проведены касательные в точках E и F. Докажите, что эти касательные пересекаются на прямой, содержащей медиану треугольника ABC.

5. В треугольнике ABC провели чевиану AS. Точка D на этой чевиане такова, что $\angle ACD = \angle BAD$ и $\angle ABD = \angle CAD$.

a) Докажите, что DS — биссектриса угла BDC.

b) Точка D внутри треугольника ABC такова, что $\angle ACD = \angle BAD$ и $\angle ABD = \angle CAD$. Докажите, что D лежит на симедиане угла A.

6. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают эту медиану в точках A' и B'. Докажите, что прямые AA' и BB' пересекаются на симедиане угла C.

7. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и D. Касательная к ω_1 в точке A второй раз пересекает ω_2 в точке B, а касательная к ω_2 в точке A второй раз пересекает ω_1 в точке C. Докажите, что радикальная ось окружностей ω_1 и ω_2 содержит симедиану треугольника ABC.