XXXIII Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 3–28 июля 2017 г.

10 КЛАСС. ГРУППА ПРОФИ

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Антропов А.В.
Латышев А.С.

От авторов

Данная брошюра содержит в себе задачи и частично материалы занятий группы профи 10 класса тридцать третьей Летней многопредметной школы Кировской области 2017 года. Отдельную благодарность хочется выразить Александру Дмитриевичу Матушкину за прекрасное занятие номер 23.

Надеемся, что нашим ученикам было интересно.

0. Лемма Шпернера. 4 июля

1. Отрезок разбит конечным множеством точек на малые отрезки. Левый его конец отмечен числом 0, правый конец — числом 1, и каждая точка деления имеет отметку 0 или 1. Докажите, что существует нечётное число малых отрезков, концы которых отмечены разными числами.

2. Имеется дом, в котором несколько комнат и дверей. Известно, что число дверей в каждой комнате равно 0, 1 или 2. Комнату с одной дверью назовём *тупиком.* Дверь может быть *наружной*, ведущей из дома на улицу, и *внутренней*, соединяющей две соседние комнаты. Естественно считать, что комната может иметь только одну наружную дверь, а две соседние комнаты — не более одной общей двери. Докажите, что число тупиков и число наружных дверей имеют одинаковую четность.

$\mathbf{0_1}$**.** Выведите задачу **1.** из задачи **2.**

Определение. *Триангуляцией* фигуры F называется её разбиение на треугольники, причём любые два треугольника либо совсем не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или общую сторону.

Треугольники назовём *гранями* триангуляции, стороны маленьких треугольников — её *рёбрами*, а их вершины — её *вершинами.*

3 (Лемма Шпернера). Дан треугольник, вершины которого помечены цифрами 1, 2 и 3, и его триангуляция. Вершины триангуляции пометили теми же значениями таким образом, чтобы любая вершина на стороне исходного треугольника помечена одной из пометок вершин этой стороны. Докажите, что граней, вершины которых несут три различные отметки, т.е. 1, 2 и 3, нечётное число.

$\mathbf{0_2}$**.** Обобщите лемму Шпернера на трёхмерное пространство.

4. Дан центрально симметричный $2n$-угольник, внутри которого отмечено несколько точек. Рассмотрим триангуляцию, вершинами которой будут вершины многоугольника и отмеченные точки. Пусть все вершины триангуляции помечены числами $1, -1, 2, -2$, притом в симметричных вершинах исходного многоугольника стоят противоположные числа. Докажите,что найдётся отрезок, на концах которого стоят противоположные числа.

5. Докажите, что грани триангуляции треугольника можно правильно покрасить в два цвета тогда и только тогда, когда её вершины можно пометить числами 1, 2, 3 таким образом, что для каждой грани её вершины несут отметки 1, 2, 3.

1. Вступительная олимпиада. 4 июля

1. Дан квадратный трехчлен $f(x)$. Всегда ли можно найти такой многочлен четвертой степени $g(x)$, что уравнение $f(g(x)) = 0$ не имеет решений?

2. Натуральное число $n > 100$ разделили с остатком на 10, 35 и 42. Оказалось, что сумма остатков от деления на 35 и 42 равна остатку от деления на 10. Докажите, что число n — составное.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки K и L соответственно так, что $KB = LC$. Точка X симметрична K относительно середины стороны AC, а точка Y симметрична L относительно середины стороны AB. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла A, делит отрезок XY пополам.

4. В квадрате 100×100 отмечены k клеток таким образом, что при любом разрезании квадрата по линиям сетки на два прямоугольника один из прямоугольников содержит хотя бы 100 отмеченных клеток. При каком наименьшем k это возможно?

5. Про попарно различные числа a, b, c известно, что $a = ab + c$, $b = bc + a$, $c = ca + b$. Какие значения может принимать выражение $a + b + c$?

2. Упражнения на направленные углы. 5 июля

Обозначение. В рамках этого занятия через $A{-}B{-}C$ обозначается, что точки A, B, C лежат на одной прямой (не обязательно в указанном порядке); через $(WXYZ)$ обозначается, что точки W, X, Y, Z лежат на одной окружности (не обязательно в указанном порядке).

Удобное обозначение. Направленный угол вида $\angle(XY, YZ)$ очень удобно обозначать как $\measuredangle XYZ$. Это не общепринятое обозначение!

1. Докажите, что если

$$(ABPQ),\ (A_1B_1PQ),\ A - P - A_1,\ B - Q - B_1,$$

то $AB \parallel A_1B_1$.

2. a) Докажите, что если

$$(PAB_1C_1),\ (PA_1B_1C),\ A{-}B{-}C_1,\ A{-}B_1{-}C,\ A_1{-}B{-}C,$$

то (PA_1BC_1).

b) Докажите, что если

$$(PA_1B_1C),\ (PA_1BC_1),\ (PAB_1C_1),\ A{-}B{-}C_1,\ A{-}B_1{-}C,\ A_1{-}B{-}C,$$

то $A_1{-}B_1{-}C_1$ тогда и только тогда, когда $(PABC)$.

3. Докажите, что если

$$(ABCD),\ (AA_1BB_1),\ (BB_1CC_1),\ (CC_1DD_1),\ (DD_1AA_1),$$

то $(A_1B_1C_1D_1)$ или $A_1{-}B_1{-}C_1{-}D_1$.

4. Докажите, что если

$$(AA_1BB_1),\ (XYAB),\ (XYA_1B_1),\ X{-}A{-}A_1,\ X{-}B{-}B_1,$$

то $(YAOB_1)$, где O — центр окружности, на которой лежат A, A_1, B и B_1.

5. Пусть имеются окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, пересекающиеся в точках A и B. Прямая O_1A пересекает ω_2 в точке P. Докажите, что точки O_1, O_2, B и P лежат на одной окружности.

3. «Основная идея аддитивной комбинаторики». 5 июля

1. Имеется последовательность натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$, в разложение каждого из которых на простые множители входят только простые числа, меньшие 1000. Докажите, что из этой последовательности можно выбрать несколько подряд идущих чисел, произведение которых точный квадрат.

2. Дано 70 различных натуральных чисел, не превосходящих 200. Докажите, что какие-то два из них различаются на четыре, пять или девять.

3. Для числового множества X определим $X' = \{s - t \mid s, t \in X, s \neq t\}$. Пусть $S = \{1, 2, \ldots, 2000\}$. Рассмотрим два множества $A, B \subset S$ такие, что $|A| \cdot |B| \geqslant 3999$. Докажите, что $A' \cap B' \neq \varnothing$.

4. Натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n дают при делении на некоторое число m попарно различные остатки, причём $n > m/2$. Докажите, что для любого целого k найдутся два не обязательно различных натуральных числа i, $j \leqslant n$, что $a_i + a_j \equiv k \pmod{m}$.

0_1. Докажите, что для любого простого p и любого целого k найдутся такие целые x и y, что $x^2 + y^2 \equiv k \pmod{p}$.

5. Даны непересекающиеся конечные множества натуральных чисел A и B, состоящие из n и m элементов соответственно. Известно, что каждое натуральное число, принадлежащее A или B, удовлетворяет хотя бы одному из условий $k + 17 \in A$, $k - 31 \in B$. Докажите, что $17n = 31m$.

6. Натуральные числа 1, 2, 3, $\ldots$, 100 содержатся в объединении N геометрических прогрессий (не обязательно с целыми знаменателями).

a) (можно не сдавать) Докажите, что $N \geqslant 13$.

b) (то, к чему мы стремимся) Докажите, что $N \geqslant 31$.

c) Докажите какой-нибудь промежуточный результат. Например, $N \geqslant 20$.

7. В ряд выписано 26 ненулевых цифр. Докажите, что этот ряд можно разбить на несколько частей так, чтобы сумма чисел, образованных цифрами каждой из частей, делилась на 13.

4. Разнобой–1. 5 июля

1. Вася записал числа $1, 2, \ldots, 100$ на пятидесяти карточках, на каждой стороне каждой карточки — по числу. Затем он выложил карточки на стол. Петя видит лишь верхние числа; он может выбрать любой набор карточек и перевернуть их. Он выиграет, если после этого сумма чисел на верхних сторонах карточек будет не меньше k. При каком наибольшем k Петя гарантированно может выиграть?

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) точка D — середина основания BC, а E — основание перпендикуляра, опущенного из D на сторону AC. Прямая BE пересекает окружность, описанную около треугольника ABD, в точке $F \neq B$. Докажите, что прямая AF делит отрезок DE пополам.

3. Даны натуральные числа n и k, где $n > k$. Докажите, что если одно из уравнений $x^n + y^n = z^k$ и $x^n + y^n = z^{n-k}$ имеет решение в натуральных числах, то и другое — тоже.

4. Докажите, что из любых n чисел можно выбрать несколько (быть может, одно) так, что сумма выбранных чисел отличается от ближайшего к ней целого числа не более, чем на $\dfrac{1}{n+1}$.

5. Найдите наибольшее возможное количество единичных полукругов на плоскости, границы любых двух из которых пересекаются ровно в 6 точках.

5. Изогональное сопряжение. 6 июля

1. Дан угол ABC и точка P. Пусть P_A и P_C — основания перпендикуляров на AB и BC соответственно; BQ — прямая, перпендикулярная P_AP_C. Докажите, что $\measuredangle ABP = -\measuredangle CBQ$.

Определение. Даны треугольник ABC и точка P, не лежащая на прямых AB, BC и CA. Точка Q называется *изогонально сопряжённой* точке P в треугольнике ABC, если для каждой вершины направления на точки P и Q симметричны относительно биссектрисы, проведённой из этой вершины.

0$_1$. Почему мы исключили точки на прямых AB, BC, CA?

0$_2$. Для каких точек P точка $Q = P$?

2. Для каких точек P точка Q будет «бесконечно удалённой», т.е. прямые, симметричные прямым AP, BP и CP относительно биссектрис углов CAB, ABC и BCA соответственно, будут параллельны?

3. Точку P, не лежащую на прямых AB, BC, CA, а также окружности (ABC), отразили относительно сторон треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности полученного треугольника изогонально сопряжён точке P.

Определение. Даны треугольник ABC и точка P. Из точки P опущены перпендикуляры на стороны треугольника. Полученный треугольник называется *педальным* треугольником, а его описанная окружность — *педальной* окружностью.

4. Даны угол ABC и две точки P и Q. Из P и Q проведены перпендикуляры к сторонам угла. Докажите, что четыре основания перпендикуляров лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $\measuredangle ABP = -\measuredangle CBQ$.

5. Докажите, что педальные окружности точек P и Q совпадают тогда и только тогда, когда они изогонально сопряжены. Более того, центр совпадающих окружностей есть середина отрезка PQ.

6. Даны треугольник ABC и точка P. Пусть точка Q изогонально сопряжена точке P, а точка Q' симметрична Q относительно стороны BC. Докажите, что $\measuredangle APB = -\measuredangle Q'PC$.

7. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BPC и BQC инверсны относительно окружности (ABC).

6. Немного топологии и немного выпуклости. 6 июля

Определение. *ε-окрестность*; *внутренние*, *внешние* и *граничные* точки фигуры F.

Напоминание. Фигура F называется *выпуклой*, если для любых точек A, $B \in F$ отрезок AB целиком принадлежит фигуре F (т.е. $[AB] \subset F$).

1. Пусть F — плоская выпуклая фигура, A, $B \in F$. Что можно сказать про точки на отрезке AB, если A, B — обе внутренние точки? Если одна внутренняя, а другая – граничная? Обе граничные?

Определение. Множество F называется *открытым*, если любая точка $X \in F$ является внутренней для F. Множество F называется *замкнутым*, если дополнение F открыто.

0_1. Каким является пустое множество? Всё пространство?

2. Докажите, что множество F замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки.

3. Докажите, что пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто, а пересечение конечного количества открытых открыто. Обязательно ли объединение бесконечного количества замкнутых множеств будет замкнутым множеством? А пересечение открытых – открытым?

4. Докажите, что множество граничных точек любого множества замкнуто.

Определение. Пусть F — плоское замкнутое выпуклое множество. Прямая ℓ называется *опорной прямой* фигуры F, если она проходит хотя бы через одну граничную точку фигуры F, и вся фигура F расположена по одну сторону от прямой ℓ.

5. Пусть F — плоское замкнутое выпуклое множество. Докажите, что прямая ℓ является опорной тогда и только тогда, когда она содержит граничные, но не содержит внутренние точки F.

6. Докажите, что наименьшее замкнутое множество, содержащее F, есть множество всех граничных и внутренних точек F.

7. Придумайте плоское множество, для которого каждая точка плоскости будет граничной.

7. Разнобой–2. 6 июля

1. Последовательность натуральных чисел (A): $a_1 < \dots < a_n < \dots$ такова, что каждое натуральное число либо входит в последовательность (A), либо представляется в виде суммы двух чисел из последовательности (A), быть может, одинаковых. Докажите, что $a_n \leqslant n^2$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

2. Найдите все пары соседних натуральных чисел, что одно из них — степень двойки, а другое — степень пятерки.

3. Высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N — середины отрезков BC и AH соответственно. Докажите, что расстояние между точками пересечения прямой MN с биссектрисами внешнего и внутреннего углов при вершине A равно AH.

4. Даны натуральные числа n и k. В каждой клетке доски $n \times n$ стоит одно из чисел $0, 1, 2, \dots, k$. У каждой строки и каждого столбца имеется кнопка, при нажатии на которую все числа этой строки или этого столбца, меньшие k, увеличиваются на 1, а числа, равные k, заменяются нулем. В начале во всех клетках стояли нули. После этого было сделано произвольное количество нажатий на кнопки. Докажите, что таблицу можно вернуть к исходному состоянию, нажав на кнопки не более kn раз.

5. Каждые два из 21 города соединены прямым рейсом одной из четырёх авиакомпаний. Докажите, что существует замкнутый маршрут из четырёх рейсов одной авиакомпании.

8. Изогональное сопряжение: задачи. 7 июля

5.7. Точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BPC и BQC

инверсны относительно окружности (ABC).

1. Пусть $ABCD$ — параллелограм. Докажите, что окружность, проходящая через основания высот из точки D на прямые AB, BC и CA, проходит и через точку пересечения диагоналей $ABCD$.

2. Докажите теорему Паскаля для окружности через изогональное сопряжение:

> Пусть точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности; $X = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $Y = A_1C_2 \cap A_2C_1$, $Z = B_1C_2 \cap B_2C_1$. Тогда точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

Указание: треугольники XA_1A_2 и XB_1B_2 подобны и по разному ориентированы.

3. Пусть O — центр описанной окружности, H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Докажите, что существуют точки D, E и F на сторонах BC, CA и AB соответственно такие, что $OD + DH = OE + EH = OF + FH$ и прямые AD, BE и CF конкурентны.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD не является биссектрисой ни угла ABC, ни угла CDA. Точка P внутри $ABCD$ таковы, что $\angle PBC = \angle DBA$ и $\angle PDC = \angle BDA$. Докажите, что $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $AP = CP$.

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

6. Из некоторой точки P треугольника ABC опущены перпендикуляры PA_1 и PA_2 на BC и высоту AA_3 соответственно. Аналогично определяются остальные точки. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

7. Внутри треугольника ABC отмечена точка P. Пусть I_A, I_B и I_C — центры вписанных окружностей треугольников PBC, PCA и PAB соответственно. Оказалось, что точка I_A лежит на биссектрисе угла CAB, а точка I_B — на биссектрисе угла ABC. Докажите, что I_C лежит на биссектрисе угла BCA.

9. Разнобой–3. 7 июля

1. На доске написаны числа 1, 2, ..., 1000. Двое играют в следующую игру. Каждый своим ходом стирает одно из оставшихся на доске чисел. Первым ходом первый игрок стирает любое число. Если предыдущим ходом стёрто число n, то можно стереть одно из чисел $n-1$, $n+1$, $n/2$ или $2n$, если, конечно, такое число есть на доске. Не имеющий хода проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Найдите наибольшее k такое, что любые положительные числа, удовлетворяющие неравенству $a^2 > bc$, удовлетворяют также неравенству $(a^2 - bc)^2 > k(b^2 - ca)(c^2 - ab)$.

3. В n-элементном множестве A $(n > 4)$ выбрано несколько четырехэлементных подмножеств так, что любые два выбранных подмножества пересекаются не более, чем по двум элементам. Докажите, что существует подмножество множества A, состоящее не менее, чем из $\sqrt[3]{6n}$ элементов и не содержащее ни одного выбранного подмножества.

10. Лемма об уточнении показателя. 9 июля

Обозначение. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Обозначим через $v_p(x)$ наибольшее целое число α такое, что $x \,\vdots\, p^\alpha$.

Лемма об уточнении показателя. Пусть x и y — целые числа, p — такое простое число, что ни x, ни y не делится на p. Тогда
a) если $p \neq 2$ и $x - y \,\vdots\, p$, то $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$.
b) если $p = 2$ и $x - y \,\vdots\, 4$, то $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n)$.

Доказательство разобьем на несколько шагов:

a. Пусть x и y — целые числа, p — такое простое число, что ни x, ни y не делится на p, а $x - y \,\vdots\, p$. Тогда для любого натурального n, взаимно простого с p, выполнено $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y)$.

b. Пусть x и y — целые числа, p — такое нечетное простое число, что ни x, ни y не делится на p, а $x - y \,\vdots\, p$. Тогда $v_p(x^p - y^p) = v_p(x - y) + 1$.

c. Пусть x и y — нечетные целые числа, такие, что $x - y \,\vdots\, 4$. Тогда для любого натурального k выполнено $v_2(x^{2^k} - y^{2^k}) = v_2(x - y) + k$.

d. Докажите лемму об уточнении показателя.

Замечание. Тот факт, что $v_p(x^n - y^n) \geqslant v_p(x - y) + v_p(n)$ легко получить из доказательства пункта **b.**, используя индукцию по $v_p(n)$. Смысл леммы об уточнении показателя в том, чтобы заменить неравенство на равенство.

1. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$, т.е. 2 является первообразным корнем по модулю 3^n.

2. Решите в натуральных числах уравнение $3^n = 2^n \cdot m + 1$.

3. Пусть a, $n > 1$ — натуральные числа. Докажите, что если для некоторого k число $(a - 1)^k$ делится на n, то тогда на n делится и число $a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1$.

4. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

5. На доске написаны n цифр в ряд. Докажите, что к ним можно приписать несколько цифр слева и не более n цифр справа так, чтобы получилась степень двойки.

11. Секвенциальная компактность. 10 июля

Определение. Множество X называется *секвенциально компактным*, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся к некоторому элементу из X подпоследовательность.

Комментарий. Мы сознательно пока опускаем упоминание о том, что понимать под «ε-окрестностью» из определения сходимости. Если в каком-то из случаев вам это непонятно, спрашивайте.

0_1. Поймите, что любое конечное множество является секвенциально компактным.

1. Докажите, что декартово произведение двух секвенциально компактных множеств является секвенциально компактным (с покоординатной сходимостью).

2. a) Докажите, что счётное декартово произведение конечных множеств является секвенциально компактным.
b) Выведите из пункта a) секвенциальную компактность $[0,1]$.

Начиная с этого момента мы рассматриваем только подмножества $\mathbb{R}^n$.

0_2. Докажите, что последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ сходится к x тогда и только тогда, когда x_n сходится к x покоординатно.

0_3. Докажите, что куб $[0,1]^n$ секвенциально компактен.

3. Докажите, что секвенциальный компакт a) ограничен; b) замкнут.

4. Докажите, что замкнутое подмножество секвенциального компакта секвенциально компактно.

5. Докажите, что множество секвенциально компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

6. Докажите, что следующее подмножество $[0,1]^5$ секвенциально компактно:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 2 \\ x_1 x_2 + x_3^3 + 17 x_5 & = & 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 & \geqslant & 0 \end{cases}.$$

---

7. Докажите, что счётное декартово произведение секвенциальных компактов секвенциально компактно (с покоординатной сходимостью).

12. Степень вхождения в $n!$. 10 июля

1. Пусть p — простое. Докажите, что степень вхождения p в $n!$ равняется $\dfrac{n - S_p(n)}{p-1}$, где $S_p(n)$ — сумма цифр числа n в его p-ичной записи.

0_1. Поймите, что $n!$ не делится на 2^n, а на 2^{n-1} делится только если $n = 2^s$.

2. Докажите, что для любого натурального m и любого целого r, $0 \leqslant r < m$, существует натуральное n такое, что показатель степени, в которой 2 входит в разложение на простые множители числа $n!$, дает остаток r при делении на m.

3. Пусть a, b — натуральные числа такие, что $a!b!$ делится на $a!+b!$. Докажите, что $3a \geqslant 2b + 2$.

4. Докажите, что никакое число вида 10^{-n}, $n \geqslant 1$, нельзя представить в виде суммы чисел, обратных факториалам разных натуральных чисел.

5. Для простого p и натурального n обозначим $\nu_p(n)$ показатель, с которым p входит в разложение $n!$ на простые множители. Докажите, что для каждого натурального d и конечного множества простых чисел $\{p_1, \ldots, p_k\}$ существует бесконечно много таких натуральных n, что $\nu_{p_i}(n)$ кратно d при всех $1 \leqslant i \leqslant k$.

13. Ликбез по проективной геометрии. 10 июля

1. Дан треугольник ABC и точка M на BC. Пусть N — такая точка на прямой BC, что $\angle MAN = 90°$. Докажите, что $(B, C; M, N) = -1$ тогда и только тогда, когда AM биссектриса угла BAC.

2. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC и AB в точках D, E и F соотвественно. Также M — такая точка, что вписанная окружность треугольника BCM касается прямой BC в точке D, а прямых BM и CM в точках P и Q соотвественно. Докажите, что прямые EF, PQ и BC конкурентны.

3. Пусть точка M_1 принадлежит стороне AB четырехугольника $ABCD$. M_2 — проекция из D точки M_1 на прямую BC, M_3 — проекция из A точки M_2 на прямую CD, M_4 — проекция из B точки M_3 на прямую DA, M_5 — проекция из C точки M_4 на прямую AB и так далее. Докажите, что $M_{13} = M_1$.

4. Пусть P и Q изогонально сопряженные точки в треугольнике ABC; $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ — их педальные треугольники. Также пусть $X_1 = P_2Q_3 \cap P_3Q_2$, $X_2 = P_1Q_3 \cap P_3Q_1$, $X_3 = P_1Q_2 \cap P_2Q_1$. Докажите, что точки P, Q, X_1, X_2, X_3 лежат на одной прямой.

5. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а диагонали AC и BD в точке F. Описанные окружности треугольников AFD и BFC пересекаются повторно в точке H. Докажите, что $\angle EHF = 90°$.

14. Непрерывность. 11 июля

Определение 1. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$.

Определение 2. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* x_0, если для любой ε-окрестности B_ε точки $f(x_0)$, найдётся такая δ_ε-окрестность B_δ точки x_0, что для любой точки $x \in B_\delta$ выполнено $f(x) \in B_\varepsilon$.

Комментарий. a) Определения 1 и 2 эквивалентны, но доказывать мы это конечно не будем.
b) Определение 2 — это строгая формулировка естественного представления о непрерывной функции как о «функции, которая близкие точки переводит в близкие».
c) Определение 1, вместе с секвенциальной компактностью и теоремой о характеризации супремума – это СИЛА, это МОЩЬ!

1. Пусть X — секвенциальный компакт (например, отрезок $[a, b]$), а функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что f ограничена на X.

2. Пусть X — секвенциальный компакт (например, отрезок $[a, b]$), а функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что f достигает на X своего наибольшего значения. *Указание: комментарий c).*

3. Докажите, что при условии $x_i \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ существует максимум выражения $x_1^1 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_n^n$ (или какого-то похожего).

4. Докажите, что среди треугольников с периметром 1 существует треугольник наибольшей площади.

5. Пусть Φ_1 и Φ_2 — две замкнутые ограниченные фигуры на плоскости. Докажите, что существуют такие точки $X_1 \in \Phi_1$, $X_2 \in \Phi_2$, что расстояние $|X_1X_2|$ наименьшее из возможных. Останется ли утверждение верным, если отказаться от условия ограниченности?

6. Пусть Φ_1 и Φ_2 — две замкнутые ограниченные фигуры на плоскости. a) Докажите, что существует две точки $X_1 \in \Phi_1$, $X_2 \in \Phi_2$, расстояние между которыми равно $\rho(\Phi_1, \Phi_2) := \sup_{A\in\Phi_1} \inf_{B\in\Phi_2} |AB|$.
b) Верно ли, что $\rho(\Phi_1, \Phi_2) = \rho(\Phi_2, \Phi_1)$?

7. Пусть Φ — выпуклая замкнутая фигура площади 1. Докажите, что её можно заключить внутри треугольника площади 2.

15. Разнобой–4. 11 июля

1. В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках ABC, ABD, ACD лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC, AD.

2. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты n различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые n квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2n-2$ гвоздями.

3. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \ldots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число

$$(b_1+k)(b_2+k)\ldots(b_n+k)$$

является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k, но должен быть всегда больше 1.)

16. Компактные множества. 12 июля

Определение. Семейство множеств $\{U_\alpha\}$ называется *открытым покрытием* множества F, если, во-первых, каждое из U_α является открытым, а во-вторых, $F \subset \bigcup U_\alpha$.

Определение. Множество F называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

1. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — компактно. Докажите, что F a) ограничено; b) замкнуто.

2. Докажите, что замкнутое подмножество компакта — компакт.

3. Докажите, что a) $[0,1]$; b) $[0,1]^n$ — компакт.

4. Докажите, что $F \subset \mathbb{R}^n$ — компакт тогда и только тогда, когда F замкнуто и ограничено.

Комментарий. Тем самым $F \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно. Однако[в, здравствуйте] в общем случае это неверно! Но это совсем другая история…

5. Докажите, что если набор отрезков $[a_\alpha, b_\alpha]$ покрывает всю прямую, то для любого $C > 0$ найдутся несколько отрезков I_1, I_2, …, I_n такие, что

$$|I_1| + |I_2| + \ldots + |I_n| > C.$$

17. Матбой–междусобой. 12 июля

1. Дан треугольник ABC и точка M. Прямая, проходящая через M, пересекает прямые AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Прямые

AM, BM и CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

2. Пусть F — конечное семейство компактных плоских фигур. Известно, что для любого $C > 0$ круг радиуса C может быть целиком накрыт конечным количеством неперекрывающихся (т.е. не пересекающихся по внутренним точкам) копий фигур из F. Докажите, что вся плоскость может быть покрыта неперекрывающимися копиями фигур из F. (Фигуры можно поворачивать и переворачивать.)

3. Решите в натуральных числах уравнение $(n-1)! + 1 = n^k$.

4. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Обозначим описанную окружность треугольника ABO через Ω. Прямые CA и CB вторично пересекают Ω в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CO и PQ перпендикулярны.

5. Функция f называется *равномерно непрерывной* на отрезке $[0,1]$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0\colon \forall x_1, x_2 \in [0,1]\colon |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Докажите, что если f непрерывна на $[0,1]$, то она равномерно непрерывна на $[0,1]$.

6. Пусть n — натуральное число и X — множество из $n+2$ целых чисел, каждое из которых по модулю не превосходит n. Докажите, что найдутся такие a, b, $c \in X$, что $a + b = c$.

7. Каждая сторона треугольника разделена на m равных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные его сторонам. Каждая вершина полученной триангуляции окрашена в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что число разноцветных ребер триангуляции четно.

8. В рамках задачи об устойчивых паросочетаниях, докажите, что «мужской» алгоритм Гейла-Шепли (т.е. в котором мужчины выступают как proposers) приводит к паросочетанию в котором каждый мужчина m получает наилучшую из возможных для него женщин (т.е. наилучшую из тех w, для которых существует устойчивое паросочетание, содержащее пару (m, w)).

18. «Ручные» графы. 14 июля

1. Раскраска связного графа такова, что для любой вершины все вершины, соединенные с ней, одного цвета. Докажите, что цветов использовано не больше двух.

2. В кружок поступило 40 детей. Оказалось, что среди любых четверых из них есть кто-то, кто знает ещё хотя бы двоих из этой четвёрки. Кружковцы Петя и Вася незнакомы и не имеют общего знакомого; Вася знаком с кружковцем Колей. Учитель выгнал Петю из кружка. Докажите, что любые двое оставшихся либо знакомы, либо имеют общего знакомого, отличного от Пети.

3. В стране n городов, некоторые из которых соединены беспосадочными авиалиниями (действующими в обоих направлениях). Ни один город не соединён прямыми авиарейсами со всеми остальными. Оказалось, что для любых двух городов существует единственный способ добраться из одного в другой, сделав не более одной пересадки. Докажите, что $n-1$ — точный квадрат.

4. В графе 3333 вершины, и для любых двух его вершин существует гамильтонов путь (то есть путь, проходящий через каждую из вершин графа ровно один раз) с концами в этих вершинах. Какое наименьшее число рёбер может быть у такого графа?

5. Для каких натуральных N, больших 50, можно так познакомить между собой N человек, чтобы у каждых 50 из них был ровно один общий знакомый? (Человек не считается своим знакомым.)

19. Теорема о промежуточном значении. 14 июля

Теорема о промежуточном значении. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, причём $f(a)\cdot f(b) \leqslant 0$. Тогда найдётся $c \in [a,b]$ такая, что $f(c)=0$.

Следствие. $f([a,b])$ есть отрезок.

1. a) Докажите, что для любой хорошей фигуры можно провести прямую, параллельную данной, такую, что она разделит площадь пополам.

b) Докажите, что для любой хорошей фигуры можно провести прямую через данную точку так, что она разделит площадь пополам.

2. Докажите, что для любой хорошей фигуры можно найти две точки A и B, делящие периметр пополам, такие, что прямая AB параллельна данной прямой.

3. Функция F задана на всей вещественной оси, причём для любого x имеет место равенство:

$$F(x+1)F(x)+F(x+1)+1=0.$$

Докажите, что функция F не может быть непрерывной.

4. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 1. Может ли площадь треугольника быть равна 6?

5. Докажите, что непрерывная функция на окружности в некоторых двух диаметрально противоположных точках принимает одинаковые значения.

6. Докажите, что любую хорошую фигуру можно вписать в квадрат.

7. Аладдин побывал во всех точках экватора, [непрерывно] двигаясь то на восток, то на запад, а иногда мгновенно перемещаясь в диаметрально противоположную точку Земли. Докажите, что был отрезок времени, за которое разность расстояний, пройденных Аладдином на восток и на запад, не меньше половины длины экватора.

20. Проективные преобразования плоскости. 14 июля

Определение. *Центральным проектированием* плоскости α на плоскость β относительно точки O называется «отображение» такое, что точке $A \in \alpha$ сопоставляется точка $OA \cap \beta$.

Понятно, что это на самом деле не отображение, потому что есть точки, которым ничего не ставится в соответствие. А именно это прямая $l = \gamma \cap \alpha$, где γ — плоскость проходящая через O параллельно β.

Обычно, чтобы избежать этой проблемы добавляют бесконечно удаленную прямую, как образ $\gamma \cap \alpha$. Плоскость с добавленной прямой называется проективной плоскостью.

Центральное проектирование очевидно сохраняет отношение «лежать на одной прямой», а также двойное отношение четырех точек на прямой.

Замечание. Частным случаем центрального проектирования будем считать параллельное проектирование. Когда с плоскостью β мы пересекаем пучок параллельных прямых (а не пересекающихся в точке O).

1. Докажите, что существует центральное проектирование, переводящее четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой, в вершины a) параллелограмма; b) квадрата.
c) Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ проведены четыре прямые, пересекающие его стороны в точках K и K', L и L', M и M', N и N'. Прямые KM и LN пересекаются в точке P, а прямые $K'M'$ и $L'N'$ — в точке P'. Докажите, что точки P, O и P' лежат на одной прямой.

2*. Докажите, что существует центральное проектирование, переводящее окружность в окружность и точку внутри этой окружности в её центр.

3 (Теорема о бабочке). Через середину C хорды AB проведены две хорды KM и LN. Прямые KL и MN пересекают хорду AB в точках D и E. Докажите, что $CD = CE$.

4. Пусть U — центральное проектирование, сохраняющее окружность ω. Докажите, что U сохраняет свойство «быть полярой».

0_1. Поймите, что существует центральное проектирование, сохраняющее окружность ω и переводящее непересекающую ω прямую в бесконечно удаленную.

Определение. Преобразование проективной плоскости, переводящее любую прямую в прямую, называется *проективным.*

5. Докажите, что проективное преобразование однозначно задается образами 4 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой

6. Докажите, что любое проективное преобразование может быть представлено композицией не более чем двух центральных проектирований.

21. Проективные преобразования: задачи. 16 июля

Проективные преобразования (в частности центральное проектирование) позволяют доказывать «проективные» свойства конструкции, например «три прямых пересекаются в одной точке» или «три точки на одной прямой».
Существуют следующие проективные преобразования:

- которое переводит четырехугольник в любой другой (чаще всего удобно в квадрат);
- которое окружность оставляет на месте, а внутреннюю точку переводит в ее центр;
- которое окружность оставляет на месте, а непересекающуюся с ней прямую переводит в бесконечно удаленную.

1. Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке (*точка Жергона*).

2. Докажите, что прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырехугольника, проходят через точку пересечения диагоналей.

3. Точки A, B, C и D лежат на окружности, SA и SD — касательные к этой окружности, P и Q — точки пересечения прямых AB и CD, AC и BD соответственно. Докажите, что точки P, Q и S лежат на одной прямой.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть E, F — точки пересечения продолжений противоположных сторон AB и CD, AD и BC соответственно, M — произвольная точка внутри четырёхугольника. Пусть S — точка пересечения прямых AD и EM, P — точка пересечения прямых AB и FM. Докажите, что прямые BS, PD и MC конкурентны.

5. Докажите, что для любого нечётного $n > 3$ на плоскости можно указать $2n$ различных точек, не лежащих на одной прямой, и разбить их на пары так, чтобы любая прямая, проходящая через две точки из разных пар, проходила бы ещё через одну из этих $2n$ точек.

6. На окружности выбрана хорда KL. Для каждого диаметра AB, не пересекающего KL, построим точку C так, что прямые BC и AC проходят через концы хорды K и L соответственно. Рассмотрим высоты всех таких треугольников ABC, проведенные из вершины C. Докажите, что все эти высоты пересекаются в одной точке.

22. Арифметические свойства биномиальных коэффициентов. 16 июля

1 (теорема Люка́). Пусть p — простое, n — натуральное, $k \leqslant n$ — целое неотрицательное число. Пусть $n = \overline{n_m n_{m-1} \ldots n_0}_p$, $k = \overline{k_m k_{m-1} \ldots k_0}_p$ — записи чисел n и k в p-ичной системе счисления. Тогда

$$C_n^k \equiv \prod_{i=0}^{m} C_{n_i}^{k_i} \pmod p.$$

2 (теорема Куммера). Пусть p — простое и пусть n, $k < n$ — натуральные числа. Тогда $v_p\left(C_n^k\right)$ равняется количеству переносов при сложении $n - k$ и k в p-ичной системе счисления.

---

3. Сколько существует нечётных чисел среди C_n^0, C_n^1, …, C_n^n?

4. Пусть $p > 2$ — простое. Найдите все натуральные n, для которых
a) каждое из чисел C_n^1, C_n^2, …, C_n^{n-1} делится на p.
b) ни одно из чисел C_n^1, C_n^2, …, C_n^{n-1} не делится на p.

5. Докажите, что среди чисел $C_{2^n}^k$, $k = 1, \ldots, 2^n - 1$, ровно одно делится на 2, но не делится на 4.

6. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 2$ такие, что C_{n-k}^k чётно для всех $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$.

7. Пусть p — простое, j, k — натуральные числа, не превосходящие $p - 1$. Докажите, что для любого n, $n \equiv k \pmod{p-1}$, выполнено

$$\sum_{m \equiv j \pmod{p-1}} C_n^m \equiv C_k^j \pmod p.$$

23. [Графский] разнобой–5. 16 июля

1. a) На вечеринку в честь начала смены пришли $2n$ человек. Допустим, что кто-то из них имеет нечетное число друзей среди собравшихся. Докажите, что найдутся двое, которые имеют четное число общих друзей.
b) То же самое, но без предположения о существовании вершины нечетной степени.

2. В стране некоторые пары городов соединены односторонним автобусным или железнодорожным сообщением. Между двумя городами может быть и несколько рейсов, в частности — в разные стороны. Известно, что для любых двух городов A и B либо из A в B, либо из B в A можно добраться, используя только один вид транспорта. Докажите, что найдётся такой город X, что для любого другого города Y из X в Y можно добраться с использованием только одного вида транспорта (для разных Y эти виды могут быть разными).

3. Связный граф, имеющий хотя бы три вершины, не теряет связности при удалении любой вершины. Пусть x — одна из его вершин. Докажите, что в графе существует простой цикл, проходящий через x и содержащий некоторую вершину $y \neq x$ вместе со всеми её соседями.

24. Теорема Брауэра. 17 июля

1 (Теорема Брауэра; частный случай). Пусть T — треугольник с границей. Отображение $f\colon T \to T$ является непрерывным. Докажите, что существует такая точка $x \in T$, что $f(x) = x$. *Указание: лемма Шпернера.*

Следующий набор задач нужен для «расширения» множества фигур, для которых верна теорема Брауэра о неподвижной точке. Все множества лежат в $\mathbb{R}^n$.

---

2. Докажите, что $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение тогда и только тогда, когда для любого открытого $U \subset \mathbb{R}^m$ множество

$$g^{-1}(U) := \{x \in \mathbb{R}^n\colon g(x) \in U\}$$

открыто («прообраз открытого открыт»).

3*. Пусть $g\colon X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное соответствие; X — секвенциальный компакт.

a) Осознайте, что Y — секвенциальный компакт.

b) Докажите, что $g^{-1}\colon Y \to X$ — непрерывное отображение.

4. Пусть $g\colon T \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное соответствие; T — треугольник с границей. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f\colon Y \to Y$ существует такая точка $x \in Y$, что $f(x) = x$.

0_1. Придумайте непрерывное отображение треугольника на круг, четырёхугольника на круг.

---

5. Пусть C — круг, ω — его граница. Существует ли непрерывное отображение $f\colon C \to \omega$ такое, что для любого $x \in \omega$ $f(x) = x$?

25. Матбой ПРОФИ–9 — ПРОФИ-10. 17 июля

1. Пусть k, n — натуральные числа, причём $n > C_k^3$. Даны $3n$ попарно различных натуральных чисел: a_i, b_i, c_i, где $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что среди сумм вида $a_i + b_i$, $a_i + c_i$, $b_i + c_i$ хотя бы $k + 1$ различных.

2. В таблице $n \times n$ расставлены различные натуральные числа, не превосходящие $2n^2$. В каждой строке и в каждом столбце посчитан НОД всех чисел. Расстановка называется *удивительной*, если все эти $2n$ НОДов различны. При каких n существует удивительная расстановка?

3. Множество S вершин графа называется *доминирующим*, если любая вершина графа, не входящая в S, смежна с какой-то вершиной из S. Существует ли граф с четным числом доминирующих множеств?

4. Стороны AB и EF вписанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке X, стороны EF и CD — в точке Y, а стороны CD и AB — в точке Z. На прямой EF выбрана точка M так, что $MB \perp AE$. На прямой CD выбрана точка N так, что $NF \perp CE$, а на прямой AB выбрана точка K так, что $KD \perp AC$. Точки O_x, O_y и O_z центры описанных окружностей треугольников MBE, FNC и AKD соответственно. Докажите, что прямые XO_x, YO_y и ZO_z пересекаются в одной точке.

5. В 10 коробках лежат камни: в k-ой коробке лежит $2000 + k$ камней ($k = 1, 2, \ldots, 10$). Двое играют в такую игру: один из игроков выбирает любые 5 коробок и вынимает из каждой из них некоторое ненулевое количество камней. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

6. Даны числа a, b, $c \in [-1, 1]$. Известно, что $a^2+b^2+c^2 \leqslant 1+2abc$. Докажите, что для всякого натурального n имеет место неравенство

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \leqslant 1 + 2(abc)^n.$$

7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle A = 90^\circ$) биссектрисы BD и CE пересекаются в точке I. Могут ли длины каждого из отрезков AB, AC, BI, ID, CI, IE быть целыми числами?

8. Выпуклый многоугольник на плоскости таков, что его образ при любом параллельном переносе содержит целую точку. Докажите, что расстояние между какими-то двумя вершинами многоугольника не меньше $\sqrt{2}$.

9. Пусть $P(x)$ — приведенный многочлен степени n, имеющий n вещественных корней с учетом кратностей; $P(2017) = 2017$. Пусть $Q(x) = \prod_{i=1}^{2017} P(x + j)$. Докажите, что $Q(x)$ имеет как минимум 1000 различных корней, по модулю меньших 2017.

10. На каждой клетке бесконечной шахматной доски написано наименьшее количество ходов, за которое конь может дойти от этой клетки до данной клетки O. Назовем клетку *особой*, если на ней написано число 100, а на всех соседних с ней (по стороне) клетках — 101. Сколько существует особых клеток?

26. Кривые второго порядка. 19 июля

Определение. *Эллипсом* называется ГМТ с фиксированной суммой s расстояний до двух точек F_1 и F_2. Эти точки называются *фокусами эллипса.*

Гиперболой называется ГМТ с фиксированным модулем разности расстояний до двух точек F_1 и F_2. Эти точки называются *фокусами гиперболы.*

Параболой называется ГМТ, равноудалённых от точки F и прямой ℓ. Точка называется *фокусом параболы*, а прямая *директрисой параболы.*

Факт. Эллипс, гипербола и парабола являются кривыми второго порядка, т.е. задаются выражением вида $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$.

1. Докажите, что точки внутри эллипса есть ГМТ, сумма расстояний от которых до F_1 и F_2 меньше s, а точки вне эллипса — больше.

0_1. На плоскости даны точки F_1 и F_2, а также прямая ℓ. Постройте с помощью циркуля и линейки точку $P \in \ell$, для которой сумма $F_1P + F_2P$ минимальна.

2 (оптическое свойство эллипса). На плоскости имеется эллипс с фокусами F_1 и F_2. Прямая ℓ касается эллипса в точке P. Докажите, что ℓ — внешняя биссектриса угла F_1PF_2.

3. Пусть a, b, c — положительные числа, X — некоторая точка на плоскости. Рассмотрим всевозможные треугольники ABC такие, что $XA = a$, $XB = b$ и $XC = c$. Для какого из них периметр ABC будет наибольший? *Почему такой треугольник вообще существует?*

4. Проведем из любой точки P, лежащей вне эллипса, две касательные к нему. Пусть они касаются эллипса в точках X и Y. Докажите, что $\measuredangle F_1PX = -\measuredangle F_2PY$ (F_1 и F_2 — фокусы эллипса).

0_2. В треугольник вписан эллипс. Докажите, что его фокусы изогонально сопряжены относительно данного треугольника.

5. В выпуклый четырехугольник вписан эллипс, фокусы которого лежат на [разных] диагоналях четырехугольника. Докажите, что произведения длин противоположных сторон равны.

6. Сформулируйте и докажите свойства, аналогичные задачам **1.**, **2.**, **4.** для гиперболы и параболы.

7. Пусть вокруг параболы описан треугольник ABC (т. е. парабола касается прямых AB, BC, CA). Докажите, что фокус этой параболы лежит на описанной окружности треугольника ABC.

27. Комбинаторная геометрия в $\mathbb{R}^{\geqslant 3}$. 19 июля

Воспоминания. Системы линейных уравнений, метод Гаусса, однородные системы.

Определение. *Выпуклой комбинацией* точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется точка вида $\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \ldots + \alpha_nA_n$, где $\alpha_i \geqslant 0$ и $\sum \alpha_i = 1$.

1. Докажите, что выпуклая оболочка множества F совпадает с множеством всевозможных выпуклых комбинаций точек из F. (Т.е. докажите, что множество выпуклых комбинаций выпукло, а также, что любое выпуклое множество, содержащее F, содержит и множество его выпуклых комбинаций.)

0_1. Как записать в терминах выпуклых комбинаций условие пересечения выпуклых оболочек множеств F и G?

2. Докажите, что любые 5 точек в пространстве можно разбить на два набора, выпуклые оболочки которых пересекаются.

3. Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разбить на непересекающиеся тетраэдры, вершины которых совпадают с вершинами многогранника.

4. Точка A принадлежит выпуклой оболочке множества $\Phi \subset \mathbb{R}^3$. Докажите, что A принадлежит выпуклой оболочке некоторого набора из четырёх точек Φ
a) используя результат задачи **3.**.
b) используя линейную алгебру и выпуклые комбинации.

5. Обобщите результаты задач **2.**, **3.** и **4.** на множество $\mathbb{R}^n$.

6. Верно ли, что любой многогранник можно разбить на непересекающиеся тетраэдры, вершины которых совпадают с вершинами многогранника?

7. В пространстве даны $n \geqslant 3$ точек общего положения. Для каждой посчитали сумму расстояний до остальных, и все эти суммы оказались равными. Докажите, что точки являются вершинами выпуклого многогранника.

8. Какое наибольшее количество точек A_1, A_2, $\ldots$, A_n можно разместить в пространстве таким образом, чтобы любой угол вида $\angle A_iA_jA_k$ был a) острый; b) не тупой?

9. Внутри непрозрачного единичного куба находится выпуклый многогранник M, чей объём больше $1/4$. Вася не знает ни формы, ни положения этого многогранника. Зато он может пронзить куб k прямолинейными лазерными лучами. При каком наименьшем k Вася может гарантировать, что хотя бы один из лучей будет иметь общую точку с M?

10. Даны шесть точек в пространстве; никакие четыре из них не лежат в одной плоскости, никакие пять не лежат на одной сфере. Докажите, что их можно разбить на две тройки так, что описанные окружности этих троек зацеплены.

28. Разнобой – 6. 19 июля

1. Дан треугольник ABC. На луче AB отложили отрезок $AB_1 = CA$, на луче BC отложили отрезок $BC_1 = AB$, на луче CA отложили отрезок $CA_1 = BC$. Докажите, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ не больше периметра треугольника ABC.

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ca = 1$. Докажите неравенство

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geqslant 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$

3. Для некоторого натурального m нашлось $4m$ таких строк одинаковой длины, составленных из нулей и единиц, что для любого натурального $k \leqslant 2m(4m-1)$ среди них найдутся две строки, отличающиеся ровно в k разрядах. Докажите, что m — точный квадрат.

29. Счётная геометрия. 20 июля

1. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C отмечена точка D такая, что $CD = BC$. На продолжении стороны CA за точку A отмечена точка E такая, что $AE = 2CA$. Докажите, что если $AD = BE$, то треугольник ABC — прямоугольный.

2. Треугольник ABC таков, что $2BC = AB + AC$; I — центр вписанной окружности, ω — описанная окружность, D — пересечение AI и ω. Докажите, что I — середина AD.

3. Окружности Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точках B и C, причём BC — диаметр Γ_1. Касательная к Γ_1 в точке C пересекает Γ_2 в точке A. Прямая AB пересекает Γ_1 в точке E; прямая CE пересекает Γ_2 в точке F. Пусть H — произвольная точка отрезка AF. Прямая HE пересекает Γ_1 в точке G, прямая BG пересекает прямую AC в точке D. Докажите, что $AH : HF = AC : CD$.

4. В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает описанную окружность в точке R, серединный перпендикуляр к BC — в точке P, серединный перпендикуляр к AC — в точке Q; K — середина BC, L — середина AC. Докажите, что треугольники RPK и RQL равновелики.

5. Четырёхугольник $XABY$ вписан в полуокружность ω с диаметром XY. Отрезки AY и BX пересекаются в точке P. Точка Z — основание перпендикуляра из точки P на XY. Точка C на ω такова, что прямая XC перпендикулярна прямой AZ. Пусть Q — пересечение отрезков AY и XC. Докажите, что $\frac{BY}{XP}+\frac{CY}{XQ}=\frac{AY}{AX}$.

6. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Прямая AO пересекает BC в точке D. Точки E и F на сторонах AB и AC соответственно таковы, что A, E, D и F лежат на одной окружности. Докажите, что длина проекции отрезка EF на прямую BC не зависит от положения точек E и F.

7. Точка D внутри ABC такова, что $\angle DAC = \angle DCA = 30^\circ$, кроме того $\angle DBA = 60^\circ$; E — середина BC; F на отрезке AC такова, что $AF = 2FC$. Докажите, что $DE \perp EF$.

8. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности; AP — высота. Докажите, что если $\angle BCA \geqslant \angle ABC + 30^\circ$, то $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

9. Пусть AP и BQ — биссектрисы треугольника ABC. Оказалось, что $\angle BAC = 60^\circ$, а $AB + BP = AQ + QB$. Найдите углы треугольника ABC.

10. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность ω касается сторон AB и AC в точках B' и C', причём центр ω лежит на стороне BC, а центр O окружности (ABC) лежит на меньшей дуге $B'C'$ окружности ω. Докажите, что окружности (ABC) и ω пересекаются по двум точкам.

30. Конфигурации точек и прямых. 20 июля

21.5. Докажите, что для любого нечётного $n > 3$ на плоскости можно указать $2n$ различных точек, не лежащих на одной прямой, и разбить их на пары так, чтобы любая прямая, проходящая через две точки из разных пар, проходила бы ещё через одну из этих $2n$ точек.

1. На плоскости расположено несколько прямых и точек. Докажите, что на плоскости найдётся точка A, не совпадающая ни с одной из данных точек, расстояние от которой до любой из данных точек больше расстояния от неё до любой из данных прямых.

2. a) На плоскости нарисовано несколько прямых, причем через пересечение любых двух из них проходит еще хотя бы одна. Докажите, что тогда все прямые пересекаются в одной точке, либо параллельны.
b) На плоскости отмечено несколько точек, причем на прямой, соединяющей любые две точки лежит еще хотя бы одна точка. Докажите, что тогда все точки лежат на одной прямой.

3. На плоскости имеется бесконечно много точек, попарные расстояния между которыми целые. Докажите, что все точки лежат на одной прямой.

4. Докажите, что на плоскости можно отметить бесконечно много точек, не лежащих на одной прямой, попарные расстояния между которыми рациональны.

5. На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

31. Вокруг теоремы Понселе. 21 июля

Теорема Понселе, частный случай. Пусть даны две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Из точки A_0 большей окружности проведем касательную к меньшей и найдем вторую точку A_1 пересечения этой касательной с большей окружностью. По точке A_1 аналогично построим точку A_2 и т.д. Тогда, если $A_0 = A_n$ для какой-то точки A_0, это будет выполнено и для любой другой точки большой окружности.

1. Пусть O и I — центры описанной и вписанной окружностей, R, r — их радиусы. Докажите *формулу Эйлера* $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

2. Докажите, теорему Понселе для $n = 3$.

3. Когда треугольник «вращается» между вписанной и описанной окружностью, замечательные точки треугольника движутся по каким-то кривым. Какую траекторию описывает a) центр тяжести M; b) ортоцентр H; c*) точка Жергона G?

4. Дана окружность и точка P внутри нее. Рассмотрим пары перпендикулярных лучей с началом P, пересекающих окружность в точках A и B.
a) Найти геометрическое место середин отрезков AB.
b) Найти геометрическое место точек пересечения касательных к окружности в точках A и B.

5. Докажите теорему Понселе для $n = 4$.

6. Пусть две окружности с центрами O, I и радиусами R, r удовлетворяют теореме Понселе для $n = 4$. Вывести соотношение, связывающее величины R, r и $d = OI$.

32. Разнобой–7. 21 июля

1. В треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Обозначим через P точку пересечения CC_1 и A_1B_1, а через M — середину A_1B_1. Докажите, что точки A, B, P и M лежат на одной окружности.

2. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном $(2n+1)$-угольнике $(n > 1)$. Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с четным числом ранее проведенных диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Ненулевой многочлен $P(x)$ имеет рациональные коэффициенты и не раскладывается в произведение двух многочленов меньшей степени с рациональными коэффициентами. Докажите, что никакие три его комплексных корня не образуют арифметическую прогрессию. *Указание: три числа образуют арифметическую прогрессию, если одно из них является полусуммой двух других.*

33. Комбинаторная геометрия, топология и анализ. 22 июля

14.7. Пусть Φ — выпуклая замкнутая фигура площади 1. Докажите, что её можно заключить внутри треугольника площади 2. *Указание: рассмотрите треугольник наибольшей площади, целиком принадлежащий фигуре.*

17.2. Пусть F — конечное семейство компактных плоских фигур. Известно, что для любого $C > 0$ круг радиуса C может быть целиком накрыт конечным количеством неперекрывающихся (т.е. не пересекающихся по внутренним точкам) копий фигур из F. Докажите, что вся плоскость может быть покрыта неперекрывающимися копиями фигур из F. (Фигуры можно поворачивать и переворачивать.)

1. Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \ldots$ — выпуклые компактные фигуры. Докажите, что если любые три из них пересекаются, то и все пересекаются. Можно ли отказаться от условия ограниченности? От условия замкнутости?

2. Докажите, что для любого натурального $n > 2$ внутри любой выпуклой хорошей фигуры существует замкнутая бильярдная траектория из n звеньев.

3. Докажите, что на границе любой хорошей фигуры можно отметить точки A, B, C так, что ABC — равносторонний треугольник.

34. Разнобой–8. 22 июля

1. На ребрах SA, SB, SC тетраэдра $SABC$ взяты точки A', B', C' соответственно. Точка C_1 — точка пересечения прямых AB и $A'B'$, а точка C_2 — общая точка окружностей, описанных около треугольников C_1AA' и C_1BB', отличная от C_1. Аналогично определяются точки A_1, B_1, A_2 и B_2. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 и S лежат в одной плоскости.

2. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые несколько из них перевести вперед. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

3. Дано простое $p > 3$. Для каждого натурального $k \leqslant p-1$ обозначим x_k число, не превосходящее $p-1$ и такое, что $kx_k - 1$ кратно p, а n_k определим равенством $kx_k = 1 + pn_k$. Докажите, что $\sum_{k=1}^{p-1} kn_k \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$.

35. Заключительная олимпиада. 23 июля

1. Функции f и g определены на множестве всех целых чисел из промежутка $[-100; 100]$ и принимают целые значения. Докажите, что для некоторого целого k число решений уравнения $f(x) - g(y) = k$ нечётно.

2. Равносторонний треугольник со стороной 20 разбит тремя семействами параллельных прямых на 400 равносторонних треугольничков со стороной 1. Какое наибольшее количество этих треугольничков можно пересечь (во внутренних точках) одной прямой?

3. Дано натуральное число. Из него вычитается самое большое простое число, не превосходящее его. С результатом снова производится такая же операция и т.д. Докажите, что существует число, из которого ровно через 1000 шагов впервые получится ноль.

4. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P под прямым углом. Точка Q на отрезке PC выбрана так, что $AP = QC$. Докажите, что периметр треугольника BQD не меньше чем $2AC$.

---

5. Вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\,.$$

Докажите, что найдутся наборы вещественных чисел $y_1, \ldots, y_n$ и $z_1, \ldots, z_n$, такие что

$$|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n| \leqslant 1, \quad \max\bigl(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|\bigr) \leqslant 1$$

и $x_i = \frac{y_i + z_i}{2}$ при всех i.

6. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина диагонали AC, причем $\angle MCB = \angle CMD = \angle MBA = \angle MBC - \angle MDC$. Докажите, что $AD = DC + AB$.

36. Список вопросов к теоретическому зачёту

Комбинаторика

1. Алгоритм Гейла–Шепли.

2. Признак гамильтоновости Эрдёша–Хватала.

3. Дистанционный граф $G(3, 1)$ как контрпример к критерию Дирака.

4. Числа Рамсея для двудольных графов.

5. Теоремы Сильвестра (задачи **30.2.** и **30.3**).

6. Теоремы Радона и Каратеодори (задача **27.5**).

Анализ

7. Секвенциальная компактность **vs.** замкнутость и ограниченность.

8. Компактность **vs.** замкнутость и ограниченность.

9. Непрерывные функции на секвенциальных компактах.

10. Теорема Коши о равномерной непрерывности (задача **17.5.**).

11. Лемма Шпернера, вывод из неё частного случая теоремы Брауэра.

Теория чисел

12. Степень вхождения p в $n!$ и теорема Куммера.

13. Теорема Люка́. Количество нечётных чисел в n-й строчке треугольника Паскаля.

14. Лемма об уточнении показателя.

Геометрия

15. Изогональное сопряжение: существование.

16. Изогональное сопряжение: педальная окружность.

17. Кривые второго порядка: оптическое и изогональное свойства.

18. Теорема Понселе для $n = 3$. Траектории центра тяжести и ортоцентра при вращении треугольника Понселе.

19. Теорема Понселе для $n = 4$. Соотношение между R, r и OI в вписанном и описанном четырехугольнике.

20. Существование центрального проектирования переводящего окружность в себя, а внутреннюю точку в центр.

21. Проективное преобразование. Задание проективного преобразования образами четырех точек.

Избранные задачи

3.3. Для числового множества X определим $X' = \{s - t \mid s, t \in X, s \neq t\}$. Пусть $S = \{1, 2, \ldots, 2000\}$. Рассмотрим два множества $A, B \subset S$ такие, что $|A| \cdot |B| \geqslant 3999$. Докажите, что $A' \cap B' \neq \varnothing$.

3.7. В ряд выписано 26 ненулевых цифр. Докажите, что этот ряд можно разбить на несколько частей так, чтобы сумма чисел, образованных цифрами каждой из частей, делилась на 13.

8.2. Докажите теорему Паскаля для окружности через изогональное сопряжение.

10.5. На доске написаны n цифр в ряд. Докажите, что к ним можно приписать несколько цифр слева и не более n цифр справа так, чтобы получилась степень двойки.

12.4. Докажите, что никакое число вида 10^{-n}, $n \geqslant 1$, нельзя представить в виде суммы чисел, обратных факториалам разных натуральных чисел.

14.7. Пусть Φ — выпуклая замкнутая фигура площади 1. Докажите, что её можно заключить внутри треугольника площади 2.

17.1. Дан треугольник ABC и точка M. Прямая, проходящая через M, пересекает прямые AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Прямые AM, BM и CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

18.5. Для каких натуральных N, больших 50, можно так познакомить между собой N человек, чтобы у каждых 50 из них был ровно один общий знакомый? (Человек не считается своим знакомым.)

19.6. Докажите, что любую хорошую фигуру можно вписать в квадрат.

23.1. На вечеринку в честь начала смены пришли $2n$ человек. Докажите, что найдутся двое, которые имеют четное число общих друзей.

24.5. Пусть C — круг, ω — его граница. Существует ли непрерывное отображение $f\colon C \to \omega$ такое, что для любого $x \in \omega$ $f(x) = x$?

33.2. Докажите, что для любого натурального $n > 2$ внутри любой выпуклой хорошей фигуры существует замкнутая бильярдная траектория из n звеньев.