

Распределение Пуассона

Папа, а правда ли, что по теории вероятностей Россия когда-нибудь выиграет чемпионат мира по футболу?
— Нет, сынок, это уже теория маловероятностей.

Напоминание про распределение Бернулли. Неправильную монету подкидывают n раз. Все подкидывания независимы (а что это значит?). Вероятность выпадения орла равна p , вероятность решки — $q = 1 - p$. Найдите вероятность того, что при n подкидываниях выпало ровно k орлов.

Примечание. Обычно в связи с распределением Бернулли говорят не про «орлы» и «решки», а про «успехи» и «неудачи». Но мы сейчас не будем придерживаться такой терминологии.

Нашли? Молодцы. А теперь представьте себе, что $N = 1.000.000$, $p = 1/500.000$, $k = 3$. Сколько примерно получилось?

А ведь именно такие задачи часто встают в реальной жизни. Представьте себе, что N — количество выпущенных автомобилей, p — вероятность отказа тормозной системы у автомобиля. Тогда k — это количество аварий, произошедших по вине завода-изготовителя.

Напоминание про число e . $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.

1. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^n$.

Рассмотрим задачу. Пусть вероятность p очень мала, а количество опытов N , наоборот, очень велико. И пусть они связаны отношением $\lambda = Np$ (λ — постоянная величина). Пусть $P(k)$ — вероятность того, что при N испытаниях ровно k окончились положительно. (Понятно, почему мы избегаем здесь терминологии «успех» и «неудача»?)

2. Найдите $\lim_{p \rightarrow 0} P(k)$.

Полученная формула называется *распределением Пуассона* с параметром λ .

3. Докажите, что целые неотрицательные числа с распределением Пуассона образуют вероятностное пространство (т.е. сумма всех вероятностей равна 1).

Для самостоятельного решения

4. Споры, несущиеся по воздуху, производят маленькие колонии плесени на пластинках желатина в лаборатории. В среднем на пластине имеется три колонии. А какова вероятность, что на данной пластине будет ровно три колонии?

5. Осторожный фальшивомонетчик кладёт в каждый ящик 99 настоящих и одну фальшивую монету. Король проверяет сто ящиков так: он наугад берёт по одной монете из каждого ящика и отправляет на экспертизу. Какова вероятность того, что фальшивомонетчик не будет разоблачён?

6. Леонид Андреевич в среднем раз в пять минут кричит "Пааапа!" Андрей Александрович был в столовой 20 минут. Какова вероятность того, что за это время Л.А. его отвлечёт от еды чётное количество раз?