Теорема Форда-Фалкерсона

Рассмотрим замкнутую систему водопроводных труб с единственным источником и единственным стоком воды. Такую систему можно изобразить в виде графа, каждому ребру которого сопоставлено число – пропускная способность этого ребра. Можно попробовать пропустить через эту систему от истока к стоку некоторое количество воды. Естественно, поток через ребро не может превышать его пропускной способности.

1. На ребрах куба расставили числа от 1 до 12, обозначающие пропускную способность. Запустим максимальный поток между парой противоположных вершин. Какое **(a)** минимальное; **(b)** максимальное значение он может принимать?

Теперь каждую трубу оснастим клапаном, который пропускает воду только в одном направлении. Пропускную способность в направлении, противоположном направлению ребра, считают равной нулю. Обозначим (x, y) *ребро, ведущее из вершины* x *в вершину* y.

Определение. Ориентированный граф с двумя выделенными вершинами (источником s и стоком t), а также с назначенной каждому ребру пропускной способностью $C(x, y)$ называется транспортной сетью. У источника нет входящих рёбер, а у стока – исходящих. Потоком называют функцию $F(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям. Для любого ребра $F(x, y) \leq C(x, y)$; для любой вершины, кроме источника и стока, суммарный входящий поток равен суммарному исходящему. Будем также считать, что $F(x, y) = -F(y, x)$, то есть одновременно с положительным потоком F, идущим от источника к стоку, в противоположном направлении идёт равный по абсолютной величине отрицательный поток.

Определение. Остаточной сетью для заданного потока называется граф, на котором каждому ребру и направлению на нём сопоставлена остаточная пропускная способность, то есть разность пропускной способности и потока через это ребро.

Определение. Разрезом графа называется разбиение множества вершин графа на две части (S, T), одна из которых содержит исток s, а другая – сток t. Сумма пропускных способностей по всем ребрам с концами из разных частей называется пропускной способностью разреза.

2. (a) Пусть на некотором графе задан поток и нет разреза с нулевой суммарной остаточной пропускной способностью. Докажите, что тогда поток через граф можно как-нибудь увеличить. **(b)** А можно ли его при этом оставить целочисленным? (Здесь мы рассматриваем целочисленные пропускные способности.)
(c) Теорема Форда-Фалкерсона. Величина максимального потока в графе равна пропускной способности разреза с минимальной пропускной способностью.

Следующие теоремы выводятся из предыдущей. Нужно лишь построить сеть.

3. Лемма Холла. Есть n юношей и несколько девушек. Известно, что для любой группы из k юношей есть не менее k девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из этих k юношей для любого k от 1 до n. Тогда можно всех юношей женить на знакомых девушках. **(a)** Добавим к двудольному графу исток, соединённый со всеми юношами, а также сток, соединённый со всеми девушками. Присвоим каждому ребру пропускную способность 1. Пусть произвольный разрез делит граф на две компоненты: в S находится исток, а в T – сток. Пусть в S попали ровно b юношей и w девушек. Докажите, что между S и T не менее n рёбер. **(b)** Докажите лемму Холла.

Определение. Вершинным покрытием в графе называется такое множество вершин, что каждое ребро имеет конец в этом множестве.

4. Теорема Кёнига. В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания. Пусть имеется двудольный граф с единичной пропускной способностью каждого ребра, дополненный истоком и стоком, как в доказательстве предыдущей теоремы. **(a)** Докажите, что размер максимального паросочетания равен максимальному потоку. **(b)** Рассмотрим минимальный разрез. Постройте по нему вершинное покрытие, в котором вершин не больше, чем пропускная способность разреза. **(c)** Докажите теорему Кёнига.

5. Теорема Менгера. **(a)** Между вершинами u и v существует k реберно непересекающихся путей тогда и только тогда, когда после удаления любых $k-1$ ребер существует путь из u в v. **(b)** Между вершинами u и v существует k вершинно непересекающихся путей тогда и только тогда, когда после удаления любых $k-1$ вершин существует путь из u в v.