Неравенство Мюрхеда

Определение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – набор целых неотрицательных чисел, в котором $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$. Назовем симметризацией одночлена $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ следующий многочлен: $T_\alpha = \dfrac{1}{n!}(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n} + ... + x_n^{\alpha_1}x_{n-1}^{\alpha_2}...x_1^{\alpha_n})$. Например,

$T_{(2,1,0)}(a,b,c) = (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b)/6$;
$T_{(3,0,0)}(a,b,c) = (a^3 + b^3 + c^3)/3$;
$T_{(1,1,1)}(a,b,c) = abc$.

Определение. Набор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ мажорирует набор $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ если выполнены условия

$$\begin{gathered}\alpha_1 \geq \beta_1,\\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \geq \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1},\\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n.\end{gathered}$$

Если A мажорирует B мы будем писать $A \succ B$ или $B \prec A$.

1. Нарисуйте все диаграммы Юнга из n кирпичей в порядке убывания и расположите их в порядке мажоризации, где **(a)** $n = 4$; **(b)** $n = 5$.

2. Верно ли, что для любых двух невозрастающих наборов одинаковой длины с одинаковой суммой один из них мажорирует другой?

3. Докажите, что $\alpha \succ \beta$ тогда и только тогда, когда β получается из α путем «сваливания кирпичей» в диаграмме Юнга.

4. Неравенство Мюрхеда. Если набор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ мажорирует набор $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, то $T_\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) \geq T_\beta(x_1, x_2, ..., x_n)$ для всех неотрицательных x_1, x_2, ..., x_n.

5. Выведите из неравенства Мюрхеда неравенство Коши.

6. $a, b, c \geqslant 0$. Тогда $a^3 + b^3 + c^3 + abc \geqslant \frac{1}{7}(a+b+c)^3$.

7. Сравните величины $\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3}$ и $\dfrac{1}{a^3}\sqrt{\dfrac{b}{a}} + \dfrac{1}{b^3}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ при положительных a и b.

8. $a, b, c \geqslant 0$. Тогда $\dfrac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \dfrac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \dfrac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geqslant a + b + c$.

Для самостоятельного решения

9. Выведите неравенство Мюрхеда для рациональных неотрицательных степеней из неравенства для целых неотрицательных степеней.

10. $a, b, c \geqslant 0$, $abc = 1$. Тогда $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c$.