

c_0 и l^p

Определение. Пусть есть линейное пространство X . Функция $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая свойствами:

- 1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$, только если $x = 0$
- 2) $\|kx\| = |k|\|x\|$, для любого $k \in \mathbb{R}$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, для любых $x, y \in X$

называется нормой, а само X – нормированным пространством.

Естественным обобщением какого понятия является норма?

Определение. Выберем число $p \in [1, \infty)$. Обозначим l^p множество последовательностей $\{a_n\}$ удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty$.

1. (a) Докажите, что l^p – линейное пространство над \mathbb{R} . (b) Докажите, что l^p – нормированное пространство с нормой $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Определение. Обозначим l^{∞} множество всех ограниченных последовательностей.

Определение. Обозначим c_0 множество всех последовательностей с нулевым пределом.

2. (a) Проверьте, что l^{∞} и c_0 также являются линейными пространствами.

(b) Проверьте, что l^{∞} и c_0 также являются нормированными пространствами с нормой $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

3. Пусть $1 \leq p < q < \infty$. Докажите, что $l^p \subset l^q \subset c_0 \subset l^{\infty}$.

4. Придумайте базис в этих пространствах.

Вопросы для раздумий:

1) А существует ли конечный базис в этих пространствах?

2) Далее мы будем задавать линейные функции на векторных пространствах (со значениями в \mathbb{R}). Что необходимо определить для задания такой функции?

Определение. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – линейный функционал на X , если $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$.

5. Пусть есть линейный функционал f , определенный на пространстве X . Докажите, что следующие условия равносильны:

- (i) f – непрерывен;
- (ii) f – непрерывен в нуле;
- (iii) f – ограничен ($|f(x)| \leq C\|x\|$).

6. (a) Пусть X^* – все непрерывные линейные функционалы, определенные на элементах пространства X . Докажите, что l^{p*} – линейное пространство. (b) А что это за линейное пространство? (c) Найдите l^{p**} .

7. Найдите c_0^{**} .