Двойное отношение

Определение. Пусть A, B, C, D — упорядоченная четвёрка точек, находящаяся на одной прямой. Их двойным отношением называется величина $\{AB, CD\} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ (все отрезки берутся упорядоченные). Четвёрка точек называется гармонической, если $\{AB, CD\} = -1$.

Если прямая совпадает с осью координат, то двойное отношение будет записываться как $\{AB, CD\} = \frac{C-A}{C-B} : \frac{D-A}{D-B}$.

1. Докажите, что для любых трёх точек A, B, C на прямой (кроме случая, когда C — середина AB) существует ровно одна такая точка D на этой же прямой, что четвёрка (A, B, C, D) — гармоническая.

Замечание. Если C является серединой отрезка AB, то $D = \infty$. Таким образом, двойное отношение имеет смысл задавать на проективной прямой.

2. (a) Пусть (A, B, C, D) — точки на прямой, а точка X лежит вне этой прямой. Запишите в синусах углов условие, что четвёрка (A, B, C, D) гармоническая.

(b) Пусть из точки X выходит четыре прямые, и какая-то прямая, пересекая эти прямые, образует гармоническую четвёрку. Докажите, что любая прямая, пересекающая эти прямые, образует гармоническую четвёрку.

Определение. Пучок прямых с такими свойствами мы будем называть *гармонической четвёркой прямых.*

3. Докажите, что полярное соответствие переводит гармонические четвёрки точек в гармонические четвёрки прямых (и наоборот).

Примечание. И вообще полярное соответствие сохраняет двойные отношения — если только правильно (как?) придумать, что такое двойное отношение четвёрки прямых, пересекающихся в одной точке.

4. Докажите, что инверсия переводит гармонический четырёхугольник или гармоническую четвёрку в гармонический четырёхугольник или в гармоническую четвёрку.

5. (a) Пусть ω — окружность, а D — точка вне этой окружности. Прямая ℓ, проходящая через D, пересекает ω в точках A и B, а поляру D(относительно ω) — в точке C. Докажите, что четвёрка (A, B, C, D) — гармоническая.

(b) *(Построение поляры)* Пусть ω — окружность, а X — точка вне этой окружности. Одна прямая, проходящая через X, пересекает ω в точках A и B, а другая прямая — в точках C и D. Пусть Y — точка пересечения прямых AC и BD. Докажите, что Y лежит на поляре X.

6. (Двойные отношения с Чевой и Менелаем) Дан треугольник ABC. Пусть на сторонах BC, AC и AB соответственно отмечены точки X, Y и Z, а на продолжении стороны BC — точка F. Докажите, что из любых двух условий следует третье:

(1) четвёрка (B, X, C, F) гармоническая;

(2) чевианы AX, BY и CZ пересекаются в одной точке;

(3) точки Y, Z и F лежат на одной прямой.

7. Пусть точки A, C, B и D лежат на прямой (именно в таком порядке), а точка X — вне этой прямой. Докажите, что из любых двух условий следует третье:

(1) Четвёрка (A, B, C, D) гармоническая;

(2) $\angle CXD = 90^\circ$,

(3) XC является биссектрисой $\angle AXB$.

Для самостоятельного решения

8. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Пусть E — точка пересечения AB и CD, F — точка пересечения AD и BC, G и H — точки пересечения прямых AC и BD соответственно с прямой EF. Докажите, что (E, H, F, G) — гармоническая четвёрка.

9. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Пусть P — его точка пересечения диагоналей, E — точка пересечения AB и CD, F — точка пересечения AD и BC, G — точка пересечения прямых BD и EF. Из точки G выпустили луч, параллельный AB. Точки X и Y — точки пересечения этого луча с прямыми CD и EP. Докажите, что EX — медиана в треугольнике EGY.

10. Пусть D, E, F — точки касания вписанной окружности и сторон BC, AC и AB соответственно. Пусть X — такая точка внутри треугольника ABC, что вписанная окружность треугольника XBC касается сторон в точках D, Y и Z.

(a) Докажите, что прямые BC, EF и YZ конкурентны.

(b) Докажите, что четырёхугольник $EFYZ$ вписанный.

11. Из точки O выпущены лучи l_1, l_2 и l_3. На луче l_1 отмечены точки A и B, на l_2 — C и D, на l_3 — E и F (точки на каждом луче в порядке удаления от O). Оказалось, что $\angle AEO = \angle ACO$, $\angle ADO = \angle AFO$ и $\angle BDO = \angle BEO$. Точка N — точка пересечения окружностей, описанных около BFO и $ACEO$ (отличная от O). Докажите, что $AC \cdot EN = CE \cdot AN$.