Выпуклые множества на языке алгебры

Определение. Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими двумя точками содержит целиком и отрезок, соединяющий эти точки.

Определение. Выпуклой комбинацией n точек $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется точка $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$, где все $\alpha_i \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$.

1. Доказать, что множество выпуклых комбинаций n точек — выпуклое.

Определение. Выпуклой оболочкой конечного множества M является множество всех выпуклых комбинаций точек из M. Обозначение $conv(M)$.

2. Чем может являться выпуклая оболочка трёх точек на плоскости?

3. Докажите, что любое выпуклое множество, содержащее M, содержит $conv(M)$.

4. Докажите, что выпуклую оболочку можно эквивалентно определить следующим образом: *выпуклой оболочкой* множества M является наименьшее выпуклое множество, содержащее M.

5. (a) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — точки в пространстве. Докажите, что можно подобрать такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, не все из которых равны нулю, такие что $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0$.

(b) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 - точки на плоскости. Докажите, что можно подобрать такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, не все из которых равны нулю так, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ и $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0$.

6. (a) Как множно алгебраически записать что выпуклые оболочки множеств $\{X_1, ..., X_m\}$ и $\{Y_1, ..., Y_n\}$ пересекаются?

(b) *Теорема Радона для плоскости.* Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 - точки на плоскости. Докажите что их можно разбить на две группы I и J так, чтобы $conv(I)$ и $conv(J)$ имели хотя бы одну общую точку.

(c) Сформулируйте и докажите теорему Радона в пространстве $\mathbb{R}^d$.

7. *Теорема Хелли.* Пусть $K_1, K_2, \dots, K_n$ — выпуклые множества в пространстве. Докажите, что если любые 4 из этих множеств имеют общую точку, то и все n множеств имеют общую точку.

Указание: Используйте теорему Радона.

8. (a) *Теорема Каратеодори для плоскости.* Докажите, что линейная комбинация n точек на плоскости также является линейной комбинацией не более, чем трёх из этих точек.

(b) Сформулируйте и докажите теорему Каратеодори для трёхмерного пространства.

Для самостоятельного решения

9. Приведите пример бесконечного множества M, для которого два определения выпуклой оболочки не эквивалентны.