Ликбез по дискретной теории вероятностей

На дне глубокого сосуда
Лежат спокойно n шаров.
Поочерёдно их оттуда
Таскают двое дураков.
Сие занятье им приятно
Они таскают m минут.
И взявши шар, его обратно
В сосуд немедленно кладут.
Ввиду условия такого,
Сколь вероятность велика,
Что первый был глупей второго,
Когда шаров он вынул k?

Определение. Пусть X — не более чем счётное множество, называемое множеством элементарных исходов. Зададим такую функцию $P : X \to \mathbb{R}_+$ (называемую вероятностью элементарного исхода), что $\sum_{x \in X} P(x) = 1$. Такая пара (X, P) называется *дискретным вероятностным пространством.*

Событием называется произвольное подмножество X. Вероятность события — это сумма вероятностей элементарных исходов, входящих в это событие.

В теории вероятностей применяется специфическая терминология: сумма событий — это объединение, произведение событий — пересечение соответствующих подмножеств.

Определение. События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

1. Опишите вероятностные пространства и найдите вероятности следующих событий.

(a) Подбрасывание кубика (если не оговорено особое, считаем, что все грани кубика, а также стороны монет и т.д. равновероятны). Событие - выпало чётное число.

(b) Подбрасывание монеты 10 раз. Порядок экспериментов важен. Событие — выпало не менее семи орлов.

(c) Вытаскивание из колоды (36 карт) шести карт. Событие — есть все четыре масти.

(d) Подбрасывание кубика до первой шестёрки. Событие — кубик пришлось подбрасывать ровно шесть раз.

Определение вероятностного пространства не работает в непрерывном случае (например, если десятиклассник приходит на ликбез в случайный момент времени от 14.30 до 14.45). В этом случае необходимо другое, гораздо более сложное определение.

2. Кидают пять кубиков. Найдите вероятности следующих событий и вычислите их приближённое значение (в процентах):

(a) «Покер» — все пять кубиков одинаковые.

(b) «Каре» — четыре кубика одинаковые (а пятый нет).

(c) «Full house» — три кубика одинаковые и остальные два тоже одинаковые (но не «покер»)

(d) «Large Street» — кубики можно упорядочить, чтобы достоинства на них образовывали подряд идущие числа.

(e) «Small Street» — кубики можно упорядочить, чтобы достоинства на них образовывали четыре подряд идущих числа, но нельзя — чтобы было пять подряд чисел.

(f) «Тройка» — три одинаковых, два других (не вышеперечисленные комбинации).

(g) «Две пары» — две пары одинаковых значений (не вышеперечисленные).

Случайные события, конечно, хорошая вещь, но с ними не всегда удобно. Часто удобнее использовать случайные величины.

Определение. Пусть X — (дискретное) вероятностное пространство. Случайной величиной будем называть отображение $\xi : X \to \mathbb{R}$. При этом говорим, что $\xi = k$ с вероятностью p, если $P(\xi^{-1}(k)) = p$. Пишется так: $P(\xi = k) = p$. Чаще всего мы будем рассматривать целочисленные случайные величины.

Так как случайные величины являются по сути функциями, то с ними можно делать все операции, которые производятся с функциями: складывать, умножать на число, умножать друг на друга, возводить в квадрат и т.д.

Примеры. 1) *(Равномерное дискретное распределение)* Например, бросаем кубик; случайная величина — это выпавшее на кубике число. Т.е. она принимает значения 1, 2, 3, 4, 5 и 6, каждое с вероятностью 1/6. Эти данные можно записать в таблицу, которая называется рядом распределения.

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Таким образом, любую (дискретную) случайную величину можно задать рядом распределения. Этот ряд может быть и бесконечным, но основное требование — сумма чисел в нижней строке должна равняться единице.

Вообще же дискретное равномерное распределение — это случайная величина, принимающая каждое значение с равной вероятностью.

2) *(Распределение Бернулли)* Эта случайная величина равна единице с вероятностью p и нулю с вероятностью $q = 1 - p$.

Рассмотрим сумму случайных величин. Всё не так просто. Например, каждая из случайных величин — это результат бросания кубика. Как распределена сумма этих случайных величин? На самом деле эта задача стоит нечётко: если эти два кубика разные и броски независимы, то распределение будет одно (какое?), а если это один и тот же бросок одного и того же кубика, то другое (какое?).

Определение. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются независимыми, если для любых множеств значений A и B выполнено $P(\xi_1 \in A, \xi_2 \in B) = P(\xi_1 \in A)P(\xi_2 \in B)$.

Или, что то же самое, для любых значений k_1 и k_2 выполнено $P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2) = P(\xi_1 = k_1)P(\xi_2 = k_2)$.

3. *(Биномиальное распределение)* Рассмотрим сумму n независимых распределений Бернулли с одинаковыми p и q (т.е. величины одинаково распределённые, но независимые). Реализация: проводим n испытаний Бернулли; случайная величина — это количество успехов. Найдите ряд распределения этой случайной величины.

4. *(Геометрическое распределение)* А теперь мы проводим испытания Бернулли до первого успеха. Случайная величина — это количество таких испытаний. Найдите её ряд распределения. Почему эту величину называют геометрическим распределением?

5. *(Гипергеометрическое распределение)* На дне глубокого сосуда M белых, чёрных N шаров. Поочерёдно их оттуда таскают двое дураков. Сие занятье им приятно, и n шаров берут они. И взявши шар, его обратно в сосуд... нет, не кладут, ни-ни. Ввиду условия такого, сколь вероятность велика, что первый был глупей второго, а белых вытащено k?