Математик — это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями. Лучший математик — кто устанавливает аналогии доказательств. Более сильный может заметить аналогии теорий. Но есть и такие, кто между аналогиями видит аналогии. — Стефан Банах

Дорогой читатель!

Каждая Летняя многопредметная школа уникальна. Меняются дети, меняются преподаватели, меняется программа и содержание занятий. Неизменным остаётся разве что сам лагерь и комары в нём.

Данная брошюра также уникальна. Она содержит задачи и учебные материалы 10 класса тридцать третьей ЛМШ Кировской области 2017 года. Мы старались сделать занятия яркими, математически содержательными, чтобы они показывали красоту математики и тесные взаимосвязи между разными её областями. А насколько это нам удалось — судите сами.

Авторы восхищены стойкостью и мужеством детей, потративших этот холодный и дождливый июль на то, чтобы приехать в ЛМШ и без устали грызть гранит математической науки. Безо всякого сомнения, без них мы бы не смогли провести ни одного занятия. Мы закончим предисловие словами благодарности, обращёнными к этим героям: Абзалову Вадиму, Богдановой Алине, Воронину Андрею, Клёпову Дмитрию, Кощееву Илье, Николаеву Артёму, Паку Ди Уну, Плукчи Александру, Сафонову Николаю, Сивцову Данилу, Сиукаеву Давиду, Смирновой Анне, Сунцову Савелию, Сущенко Александру, Шамову Степану и Щипицыну Артёму.

Спасибо!

P.S. Удачи на зачёте; вы все уже победители!

Оглавление

Вступительная олимпиада

1. Дан квадратный трехчлен $f(x)$. Всегда ли можно найти такой многочлен четвертой степени $g(x)$, что уравнение $f(g(x)) = 0$ не имеет решений?

2. Натуральное число $n > 100$ разделили с остатком на 10, 35 и 42. Оказалось, что сумма остатков от деления на 35 и 42 равна остатку от деления на 10. Докажите, что число n — составное.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки K и L соответственно так, что $KB = LC$. Точка X симметрична K относительно середины стороны AC, а точка Y симметрична L относительно середины стороны AB. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла A, делит отрезок XY пополам.

4. В квадрате 100×100 отмечены k клеток таким образом, что при любом разрезании квадрата по линиям сетки на два прямоугольника один из прямоугольников содержит хотя бы 100 отмеченных клеток. При каком наименьшем k это возможно?

5. Про попарно различные числа a, b, c известно, что $a = ab + c$, $b = bc + a$, $c = ca + b$. Какие значения может принимать выражение $a + b + c$?

Лемма Шпернера

1. Отрезок разбит конечным множеством точек на малые отрезки. Левый его конец отмечен числом 0, правый конец — числом 1, и каждая точка деления имеет отметку 0 или 1. Докажите, что существует нечётное число малых отрезков, концы которых отмечены разными числами.

2. Имеется дом, в котором несколько комнат и дверей. Известно, что число дверей в каждой комнате равно 0, 1 или 2. Комнату с одной дверью назовём *тупиком*. Дверь может быть *наружной*, ведущей из дома на улицу, и *внутренней*, соединяющей две соседние комнаты. Естественно считать, что комната может иметь только одну наружную дверь, а две соседние комнаты — не более одной общей двери. Докажите, что число тупиков и число наружных дверей имеют одинаковую четность.

3. Выведите задачу **1.** из задачи **2.**

Определение. Триангуляцией фигуры F называется её разбиение на треугольники, причём любые два треугольника либо совсем не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или общую сторону.

Треугольники назовём *гранями* триангуляции, стороны маленьких треугольников — её *рёбрами*, а их вершины — её *вершинами*.

4. (Лемма Шпернера). Дан треугольник, вершины которого помечены цифрами 1, 2 и 3, и его триангуляция. Вершины триангуляции пометили теми же значениями таким образом, чтобы любая вершина на стороне исходного треугольника помечена одной из пометок вершин этой стороны. Докажите, что граней, вершины которых несут три различные отметки, т.е. 1, 2 и 3, нечётное число.

5. Обобщите лемму Шпернера на трёхмерное пространство.

6. Дан центрально симметричный $2n$-угольник, внутри которого отмечено несколько точек. Рассмотрим триангуляцию, вершинами которой будут вершины многоугольника и отмеченные точки. Пусть все вершины триангуляции помечены числами $1, -1, 2, -2$, притом в симметричных вершинах исходного многоугольника стоят противоположные числа. Докажите,что найдётся отрезок, на концах которого стоят противоположные числа.

7. Докажите, что грани триангуляции треугольника можно правильно покрасить в два цвета тогда и только тогда, когда её вершины можно пометить числами 1, 2, 3 таким образом, что для каждой грани её вершины несут отметки 1, 2, 3.

Системы линейных уравнений

1. Решите системы уравнений:

(a) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 4x - 3y - z = -1 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 4x - 3y - z = -4 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + ay + 8z = 2 \\ ax + 8y - 16z = 3 \end{cases}$.

Определение. Системой линейных уравнений (СЛУ) будем называть систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Коэффициенты a_{ij} могут быть рациональными, вещественными или комплексными. Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то такая система называется однородной (ОСЛУ).

2. *Вопросы на понимание:*

(a) Может ли быть у СЛУ 0 решений? Одно решение? Два решения? Бесконечно много решений?

(b) Пусть $n > m$. Обязательно ли у СЛУ будет бесконечно много решений?

(c) Пусть $m > n$. Верно ли, что у СЛУ нет решений?

(d) Может ли у ОСЛУ не быть решений?

(e) Всегда ли можно выразить одну переменную через остальные и подставить полученное в остальные уравнения?

3. *Альтернатива Фредгольма.* Для любой системы n линейных уравнений с n неизвестными имеет место альтернатива: либо при любой правой части решение системы существует и единственно (система невырожденная), либо существует ненулевое решение ОСЛУ.

Примечание. Решение существует и единственно тогда и только тогда, когда у соответствующей ОСЛУ (т.е. системы с теми же левыми частями и нулевыми правыми) есть ровно одно решение – нулевое.

4. *(Следствия.)*

(a) Если в ОСЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то у нее есть бесконечно много ненулевых решений.

(b) Если решение ОСЛУ единственно, то и при любой правой части решение единственно (система невырождена).

(c) Все вышеизложенные факты верны над любым полем. Например, над полем из p элементов. (На самом деле не совсем — утверждения про бесконечное число решений придётся переделать. Как?)

(d) Если СЛУ с рациональными коэффициентами и рациональной правой частью имеет ненулевое решение в действительных числах, то она имеет ненулевое решение и в рациональных числах.

5. *Линейность решений СЛУ.*

(a) Пусть $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ и $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ — два решения СЛУ. Докажите, что их разность $(c_1 - d_1, c_2 - d_2, \dots, c_n - d_n)$ — решение соответствующей ОСЛУ.

(b) Пусть $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ — решение СЛУ, а $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ — решение соответствующей ОСЛУ. Докажите, что их сумма $(c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n)$ — тоже решение СЛУ.

6. Докажите, что если у СЛУ есть только рациональные решения, то решение единственно.

7. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково.

8. На квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ отмечено несколько различных точек. При этом каждая отмеченная точка расположена либо ровно посередине между двумя другими отмеченными точками, либо ровно посередине между отмеченной точкой и вершиной квадрата. Может ли какая-то отмеченная точка иметь иррациональные координаты?

Для самостоятельного решения

9. Есть 101 корова. Если убрать любую буренку, то оставшихся можно разделить на два равных по весу и численности стада. Докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса: a) целые; b) рациональные; c) действительные.

Изогональное сопряжение

1. Пусть P — точка внутри треугольника. Проведём чевианы AP, BP и CP (они должны пересекаться в одной точке). Отразим каждую из них от соответствующей биссектрисы. Докажите, что получившиеся прямые пересекаются в одной точке (назовём её Q).

Определение. Такие точки P и Q называются *изогонально сопряжёнными.*

Заметим, что точки P и Q могут быть и вне треугольника, предыдущая задача верна и для такого случая (с оговоркой, что отражённые прямые могут вовсе не пересекаться, а быть параллельными).

2. Пусть точка P лежит на прямой AB и не совпадает с вершинами A и B. Найдите изогонально сопряжённую ей точку.

Определение. Дан треугольник ABC, и пусть P — точка на плоскости. Пусть A_P, B_P и C_P — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC, AC и AB соответственно. Треугольник $A_PB_PC_P$ (если эти точки образуют треугольник) называется *педальным треугольником* точки P, а если они лежат на одной прямой, то эта прямая называется *прямой Симсона*[1].

3. Пусть точки P и Q изогонально сопряжены в треугольнике ABC. Пусть $A_PB_PC_P$ — педальный треугольник точки P, и пусть $A_QB_QC_Q$ — педальный треугольник точки Q.

(a) Докажите, что треугольники PA_PB_P и QB_QA_Q подобны.

(b) Докажите, что четырёхугольник $A_PB_PB_QA_Q$ вписанный.

(c) Где находится центр окружности, описанной около $A_PB_PB_QA_Q$?

(d) Докажите, что все шесть точек A_P, A_Q, B_P, B_Q, C_P и C_Q лежат на одной окружности.

(e) Докажите, что верно и обратное: если педальные треугольники двух точек имеют общую описанную окружность, то эти точки изогонально сопряжены.

(f) Докажите, что $PA_P \cdot QA_Q = PB_P \cdot QB_Q = PC_P \cdot QC_Q$. Верно и обратное: если выполняется равенство $PA_P \cdot QA_Q = PB_P \cdot QB_Q = PC_P \cdot QC_Q$, то точки P и Q изогонально сопряжены.

4. *(Окружность девяти точек)* **(a)** Докажите, что ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены.

(b) Докажите, что основания высот и середины сторон треугольника лежат на одной окружности.

[1] Здесь мы сталкиваемся с очередным проявлением вселенской несправедливости — Роберт Симсон был выдающимся геометром своего времени, но в его работах никакого упоминания об этой прямой нет. Она была открыта позже Вильямом Уоллесом.

Для самостоятельного решения

5. (a) Рассмотрим треугольник ABC и точку P на плоскости, не совпадающую с вершинами треугольника. Докажите, что отражения прямых AP, BP и CP от соответствующих биссектрис параллельны (т.е. изогональное сопряжение не определено в точке P) тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

(b) Докажите, что педальный треугольник точки P вырождается тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности.

Примечание. Мы увидели, что совсем не определено изогональное сопряжение для вершин треугольника, а для точек на описанной окружности оно вырождается. Будем говорить, что точки, изогонально сопряжённые точкам описанной окружности, являются *бесконечно удалёнными точками.* Чуть позже у нас будет более строгое определение бесконечно удалённых точек.

6. (a) Дан треугольник ABC. Точка I является центром вписанной окружности, точка I_A — центром вневписанной окружности (лежащей на внутренней биссектрисе угла A). Точка K — середина II_A. Докажите, что у точки K изогонально сопряжённая точка является бесконечно удалённой.

(b) *(Лемма о трезубце)* Докажите, что точка K равноудалена от точек B, C, I и I_A.

7. *(Ещё одна конструкция изогонального сопряжения)* Пусть P_A, P_B и P_C — отражения точки P от сторон треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности $P_AP_BP_C$ изогонально сопряжён P.

Ликбез по инверсии

Для тех, кто ещё не знает, как выворачивать плоскость наизнанку

Определение. Дана окружность ω с центром O и радиусом R. Рассмотрим преобразование, которое сопоставляет точке P точку P', лежащую на луче OP и удовлетворяющую свойству $OP \cdot OP' = R^2$. Такое преобразование называется *инверсией относительно окружности* ω. Точка O называется центром инверсии, для неё результат инверсии неопределён (а точнее, определён, но находится в бесконечно удалённой точке).

1. *(Как её строить?)* Пусть точка P лежит вне окружности ω. Докажите, что следующие построения выдают точку, инверсную P:

(a) Проведём касательные PT и PS к ω. Точка P' — пересечение TS и OP.

(b) Проведём диаметр AB, перпендикулярный OP. Точка M — пересечение отрезка AP с ω. Точка P' — пересечение BM и OP.

2. Докажите, что

(a) прямая, проходящая через центр инверсии, при инверсии перейдет в себя;

(b) прямая, не проходящая через центр инверсии, при инверсии перейдет в окружность, проходящую через центр инверсии;

(c) окружность, проходящая через центр инверсии, при инверсии перейдет в прямую, не проходящую через центр инверсии;

(d) окружность, не проходящая через центр инверсии, при инверсии перейдет в окружность, не проходящую через центр инверсии.

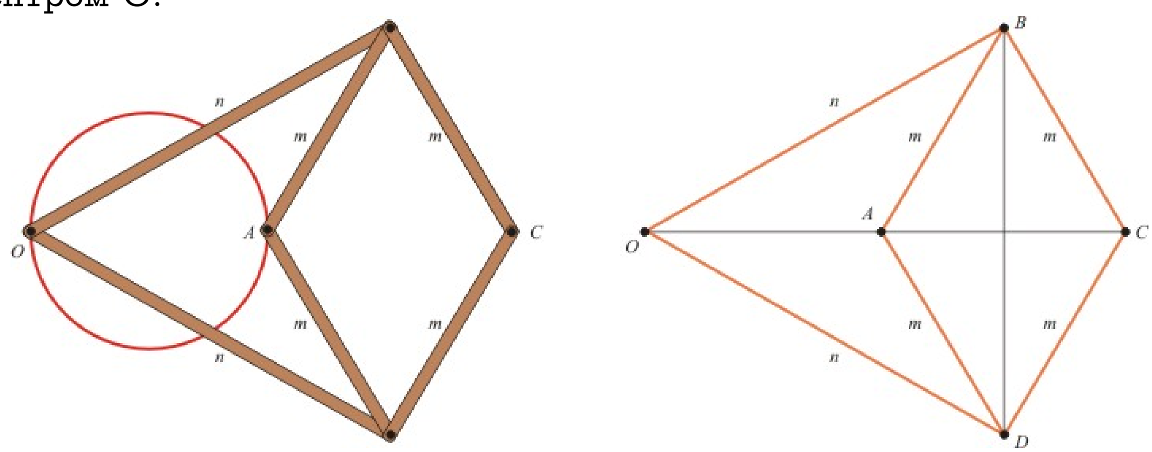
Определение. Обобщённой окружностью будем называть прямые или окружности. Таким образом, инверсия переводит обобщённые окружности в обобщённые окружности.

3. **(a)** Докажите, что окружность, перпендикулярная ω, при инверсии перейдёт в себя.

(b) Пусть окружность содержит две инверсные относительно ω точки. Докажите, что она перпендикулярна ω.

4. Докажите, что инверсия сохраняет углы между обобщёнными окружностями.

5. Инверсор Поселье, он же прямило Липкина — шарнирный механизм, показанный на картинке. Точка O неподвижно закреплена, остальные могут двигаться. Докажите, что точки A и C инверсны отосительно некоторой окружности с центром O.



Для тех, кто достиг просветления, но желает самосовершенствоваться

6. Даны геометрические конструкции. В каждой из них делается инверсия относительно точки O. Нарисуйте, что получится в результате применения этой инверсии.

a) Треугольник ABC и описанная около него окружность, точка $O = A$.

b) Треугольник ABC и описанная около него окружность, точка O лежит на описанной окружности, но не совпадает с вершинами треугольника.

c) Треугольник ABC и высота к нему, центр инверсии — точка на плоскости, не лежащая ни на одной из указанных прямых.

d) Треугольник ABC и вписанная окружность, точка $O = A$.

e) Треугольник ABC и вневписанная окружность, точка $O = A$.

f) Треугольник ABC и его высота AH, точка $O = A$.

7. Сделав инверсию относительно точки O, напишите, во что превращаются формулировки известных теорем.

(a) Внутренние накрест лежащие углы равны. В качестве O выберите точку на секущей, отличную от точек пересечения.

(b) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Центр инверсии — вершина треугольника.

(c) В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является также биссектрисой. Центр инверсии — вершина напротив основания.

(d) Противоположные углы вписанного четырёхугольника равны 180°. Центр инверсии лежит на описанной окружности.

(e) Основания перпендикуляров, проведённых из точки P к сторонам треугольника, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности треугольника. Центр инверсии выберите по своему желанию.

Для тех, кто уже не видит разницы между прямыми и окружностями

Теперь мы переходим к комплексным числам.

Определение. Дробно-линейной функцией назовём функцию вида $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Примечание. **(a)** Мы предполагаем, что $f(z)$ определена и принимает значения в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. В частности, $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ и $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Коэффициенты тоже предполагаются комплексными числами.

(b) Частным случаем дробно-линейной функции является линейная функция (при $c = 0$). Таким образом, любой параллельный перенос, любой поворот и любая поворотная гомотетия может быть записана как дробно-линейная функция.

8. **(a)** Докажите, что композиция дробно-линейных функций является дробно-линейной функцией.

(b) Докажите, что дробно-линейная функция $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ обратима (т.е. существует функция $g(z)$, такая что $f(g(z)) = z$) тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$.

В дальнейшем будем рассматривать только обратимые дробно-линейные преобразования.

9. **(a)** Нет-нет, инверсия не является частным случаем дробно-линейной функции (почему?)! А вот инверсия + осевая симметрия — является. Докажите это.

(b) Докажите, что любая дробно-линейная функция раскладывается в композицию линейных функций и функции $\frac{1}{z}$.

(c) Докажите, что дробно-линейное преобразование переводит прямые или окружности в прямые или окружности. При каких условиях получается окружность, а при каких — прямая?

(d) Докажите, что дробно-линейные преобразования сохраняют углы между кривыми.

10. Докажите, что для любых троек точек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 существует единственное дробно-линейное отображение f, такое что $f(z_i) = w_i$.

11. Куда переводит функция $f(z) = \frac{z-1}{z-i}$ единичный круг? Верхнюю полуплоскость?

12. Найдите все дробно-линейные преобразования, оставляющие на месте точку а) 0; b) ∞.

13. Найдите все дробно-линейные преобразования, которые переводят верхнюю полуплоскость в себя.

Определение. Точки симметричны оносительно окружности, если они переходят друг в друга при инверсии относительно этой окружности.

14. Докажите, что дробно-линейные преобразования сохраняют симметрию относительно прямой или окружности.

Полярное соответствие

Определение. Рассматриваем окружность ω с центром в точке O и радиусом R. Возьмем произвольную точку $A \neq O$. Пусть A_1 — точка, инверсная A относительно окружности ω. Построим через A_1 прямую a, перпендикулярную OA. Эта прямая называется *полярой* точки A. Точка A, в свою очередь, называется *полюсом* прямой a.

Примечание. В этой теме, если не оговорено особое, точки будут обозначаться большими латинскими буквами, а их поляры — теми же строчными латинскими буквами.

Вопросы на понимание.

1. Если B – произвольная точка на поляре, то какие значения может принимать $\angle AOB$?

2. Можно ли по имеющейся поляре однозначно восстановить полюс?

3. Может ли поляра проходить через полюс? (По-научному это звучит так: могут ли поляра и полюс быть инцидентны)?

4. Как располагается поляра, если полюс расположен вне окружности?

1. (a) Пусть B — точка на поляре A, и пусть AB_1 — перпендикуляр на прямую OB. Докажите, что B и B_1 инверсны, т.е. $OB \cdot OB_1 = R^2$.

(b) Докажите обратное: пусть $B \neq O$ — точка, и пусть AB_1 — перпендикуляр на прямую OB. Оказалось, что B и B_1 инверсны. Докажите, что $B \in a$.

(c) Докажите ещё одно обращение первого пункта: пусть B — точка на поляре A, и пусть B_1 — инверсная ей точка. Докажите, что $AB_1 \perp OB$.

2. *(Взаимность.)* Докажите, что если точка A лежит на прямой (поляре) b, то точка B лежит на прямой (поляре) a.

Следствие. Поляры всех точек прямой проходят через полюс этой прямой.

Многие задачи и теоремы из геометрии имеют двойственные в смысле полярного соответствия. Для этого нужно сделать следующую контекстную замену.

Таблица двойственности

Точка	Прямая
Полюс	Поляра
Лежит на	Проходит через
Конкурентны	Коллинеарны
Трехвершинник (треугольник)	Трехсторонник (треугольник)
Четырехвершинник	Четырехсторонник
Касательная	Точка касания
Множество точек	Оболочка

Четырехвершиннником будем называть полный четырехугольник, т.е. 4 точки и 6 прямых. *Четырехсторонником* — фигуру из 4 прямых и 6 точек их попарных пересечений.

Еще контрольные вопросы по таблице двойственности

1. Во что перейдут три точки, лежащие на одной прямой?
2. Во что перейдет множество точек, образующих отрезок?
3. Во что перейдет множество точек, образующих окружность с центром O?

3. Пусть A лежит вне окружности. Проведём диаметр $CD \perp OA$. Отметим P на пересечении AC и окружности. Отметим B на пересечении PD и OA. Докажите, что прямая, проведённая через B перпендикулярно к OA, будет полярой A.

4. (a) Докажите, что полюс секущей AB (не диаметра) является точкой пересечения касательных в точках A и B.

(b) Докажите, что поляра внешней точки — это прямая, соединяющая точки касания двух касательных, проходящих через эту точку.

5. Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к каждой его вершине пересекают продолжения противоположных сторон в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

6. Как связаны утверждение "медианы треугольника пересекаются в одной точке" и "точки пересечения биссектрис внешних углов треугольника с противоположными сторонами лежат на одной прямой"?

7. Дана окружность ω с центром O и точка $A \neq O$. Докажите, что поляра A является радикальной осью окружности ω и окружности, построенной на OA как на диаметре.

8. Рассмотрим две касательные a и b к окружности S. AB — отрезок, высекаемый ими на касательной c, которая касается большей дуги AB. Докажите, что $\angle AOB$ не зависит от положения касательной c.

9. Теорема Сильвестра. На плоскости дано конечное число точек, причем такое, что любая прямая, проходящая через две из данных точек, содержит еще одну данную точку. Тогда все данные точки лежат на одной прямой.

10. Пусть l — произвольная касательная к вписанной окружности S треугольника ABC. M, N и P — точки пересечения l с сторонами треугольника. Восставим из центра I вписанной окружности S перпендикуляры к прямым IM, IN и IP. Пусть M_1, N_1 и P_1 – точки пересечения этих перпендикуляров с соответствующими сторонами треугольника. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой, касающейся вписанной окружности треугольника.

Линейные пространства

Определение. Пусть K — поле (его элементы мы будем называть числами или скалярами), а V — множество (его элементы назовём векторами). Пусть определено сложение векторов и умножение вектора на число (в обеих операциях получается вектор). Назовём V линейным (или векторным) пространством над

K, если выполняются следующие свойства: сложение ассоциативно, коммутативно, существует ноль-вектор и для любого вектора существует противоположный вектор, а также свойства умножения на число:

1. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$;
2. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
3. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$;
4. $1 \cdot v = v$.

Примеры.

1. Множество векторов на плоскости или в пространстве.
2. Множество строк длины n, заполненных элементами поля K.
3. Множество многочленов степени не выше n.
4. Множество линейных уравнений от n переменных.
5. Множество решений ОСЛУ.
6. Числа вида $a+b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$ — линейное пространство над $\mathbb{Q}$. (Примеров подобного рода можно придумать ещё множество.)

Определение. Линейной комбинацией векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ называется любая сумма $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$, где α_i — числа.

Определение. Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ называется *линейно независимой*, если их линейная комбинация равна нулю только в том случае, когда все коэффициенты α_i равны нулю.

1. Система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда ни один из векторов нельзя выразить через остальные векторы системы (т.е. он не является линейной комбинацией остальных векторов).

Определение. Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ называется *порождающей*, если любой вектор является некоторой линейной комбинацией этой системы.

Примечание. Любая подсистема линейно независимой системы линейно независима. Любое расширение порождающей системы является порождающей.

Определение. Система векторов называется *базисом*, если она линейно независима и порождающая.

2. *(Критерий базиса)* Система $v_1, v_2, \ldots, v_k$ является базисом тогда и только тогда, когда для любого вектора v существует единственный такой набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, что $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$.

3. Если из порождающей системы исключить вектор, который выражается через остальные, то система останется порождающей.

4. Из любой конечной порождающей системы можно исключить несколько (возможно, ноль) векторов так, чтобы она стала базисом.

5. Если в линейно независимую систему включить ещё один вектор, не выражающийся через векторы этой системы, то система останется линейно независимой.

6. Если в пространстве существует конечная порождающая система, то любую линейно независимую систему можно дополнить до базиса.

Примечание. На самом деле существование конечной порождающей системы необязательно, но оно несколько упрощает жизнь.

7. В любой линейно независимой системе не больше векторов, чем в любой порождающей системе.

Определение. Размерностью пространства называется число элементов в базисе (если это число конечно). Обозначается: $\mathrm{dim}V$.

Итак, мы доказали важнейшую теорему.

Теорема.

1. В любых двух базисах одинаковое количество векторов.
2. Если $\mathrm{dim}V = n$, то любая линейно независимая система, содержащая n векторов, является базисом.
3. Если $\mathrm{dim}V = n$, то любая порождающая система, содержащая n векторов, является базисом.
4. Если $\mathrm{dim}V = n$, то любая линейно независимая система не может содержать более n векторов.
5. Если $\mathrm{dim}V = n$, то любая порождающая система не может содержать менее n векторов.

Для самостоятельного решения

8. У Андрея Александровича 17 детей. В медпункте детей взвесили, но результаты не сказали. Андрей Александрович хочет узнать, кто сколько весит. Для этого он может назвать числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{17}$ (все числа должны быть положительны), а в медпункте ему назовут результат $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{17} v_{17}$, где $v_1, \ldots, v_{17}$ — веса детей.

(a) В медпункте отвечают только на шестнадцать таких вопросов. Докажите, что Андрей Александрович не сможет определить, кто сколько весит.

(b) Отчаявшись, Андрей Александрович уже не хочет знать веса всех детей, он только хочет узнать, сколько весит Лёня. За какое наименьшее количество вопросов (вопросы как в предыдущем пункте) он сможет справиться с этим заданием?

(c) На следующий день аналогичные вопросы пришёл задавать чиновник Росширпотребнадзора. Он придумал 18 таких вопросов. Докажите, что результаты какого-то из них можно предсказать, если знать ответы на остальные вопросы.

Выпуклые множества на языке алгебры

Определение. Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими двумя точками содержит целиком и отрезок, соединяющий эти точки.

Определение. Выпуклой комбинацией n точек $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется точка $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$, где все $\alpha_i \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$.

1. Доказать, что множество выпуклых комбинаций n точек — выпуклое.

Определение. Выпуклой оболочкой конечного множества M является множество всех выпуклых комбинаций точек из M. Обозначение $\mathrm{conv}(M)$.

2. Чем может являться выпуклая оболочка трёх точек на плоскости?

3. Докажите, что любое выпуклое множество, содержащее M, содержит $conv(M)$.

4. Докажите, что выпуклую оболочку можно эквивалентно определить следующим образом: *выпуклой оболочкой* множества M является наименьшее выпуклое множество, содержащее M.

5. **(a)** Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — точки в пространстве. Докажите, что можно подобрать такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, не все из которых равны нулю, такие что $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0$.

(b) Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 - точки на плоскости. Докажите, что можно подобрать такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, не все из которых равны нулю так, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ и $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0$.

6. **(a)** Как множно алгебраически записать что выпуклые оболочки множеств $\{X_1, ..., X_m\}$ и $\{Y_1, ..., Y_n\}$ пересекаются?

(b) *Теорема Радона для плоскости.* Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 - точки на плоскости. Докажите что их можно разбить на две группы I и J так, чтобы $conv(I)$ и $conv(J)$ имели хотя бы одну общую точку.

(c) Сформулируйте и докажите теорему Радона в пространстве $\mathbb{R}^d$.

7. *Теорема Хелли.* Пусть $K_1, K_2, \dots, K_n$ — выпуклые множества в пространстве. Докажите, что если любые 4 из этих множеств имеют общую точку, то и все n множеств имеют общую точку.

Указание: Используйте теорему Радона.

8. **(a)** *Теорема Каратеодори для плоскости.* Докажите, что выпуклая комбинация n точек на плоскости также является выпуклой комбинацией не более, чем трёх из этих точек.

(b) Сформулируйте и докажите теорему Каратеодори для трёхмерного пространства.

Поле из двух элементов

Напоминание. Вспомним, что множество $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ с естественными операциями сложения по модулю 2 и умножения является полем. А значит, над этим полем можно рассматривать векторные пространства, решать СЛУ и т.д.

Определение. Гиперкубом размерности n называется множество последовательностей длины n из 0 и 1. Таким образом, гиперкуб образует n-мерное пространство над $\mathbb{Z}_2$ (с каким базисом?).

А ещё гиперкуб можно рассматривать как граф: вершины гиперкуба соединим ребром, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одной позиции. Также гиперкуб является гиперграфом. Это означает, что можно рассматривать его k-мерные грани. Каждая k-мерная грань является множеством последовательностей, в которых $n - k$ элементов фиксированы, а остальные k могут меняться. Таким образом, каждое ребро гиперкуба является одномерной гранью.

1. Выберем какую-нибудь вершину гиперкуба и запишем в строчку количество вершин, удалённых от неё на $0, 1, 2, \dots$ рёбер. Докажите, что получится n-я строчка треугольника Паскаля.

2. Имеется n лампочек, изначально они выключены. За ход можно изменить состояние любой лампочки. Докажите, что за 2^n ходов можно получить все возможные узоры (каждый по разу), и последним ходом снова выключить все лампочки.

3. Есть таблица 5×5 лампочек. За ход можно изменить состояние всех лампочек в любом квадрате 2×2 или 3×3. Изначально лампочки выключены. Верно ли, что можно получить любой узор?

4. К каждой вершине графа прикручена лампочка. Изначально все лампочки выключены. За один раз можно выбрать любую вершину графа и поменять все состояния лампочек в ней самой и во всех её соседях на противоположные. Выражение «включить граф» означает включить все лампочки.

(a) Аня умеет включать граф за x операций, а Алина — за y. Докажите, что $|x - y|$ чётно.

(b) Докажите, что граф вообще можно включить.

5. У Андрея Александровича в группе 9 детей, а в серии 10 задач. В протоколе расставлены плюсы за решённые задачи.

(a) Докажите, что Андрей Александрович сможет объявить некоторые задачи ключевыми так, чтобы каждый ученик решил чётное количество ключевых задач.

(b) Докажите, что Андрей Александрович сможет приписать каждой задаче свой вес (целое число) так, что у каждого ученика сумма весов всех решённых им задач равнялась нулю.

Проективные пространства

Вас задолбало, что в многочисленных задачах-теоремах о конкурентности трёх прямых приходится делать оговорочку по Фрейду "или параллельны"? Вас бесит, что классное с виду полярное сответствие определено не для всех прямых? Вас беспокоит, что центр инверсии переходит в бесконечность, а такой точки на плоскости нет? Вы хотите об этом поговорить?

Если да, то этот листочек для Вас!

Алгебра

Определение. Пусть K — некоторое поле. Рассмотрим $(n+1)$-мерное векторное пространство K^{n+1}. Выкинем из него начало координат и введём отношение эквивалентности: векторы эквивалентны тогда и только тогда, когда они коллинеарны, т.е. $(a_0, a_1, \dots, a_n) \sim (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$. Множество классов эквивалентности называется n-мерным проективным пространством над полем K и обозначается KP^n. Класс эквивалентности (т.е. точку в проективном пространстве) будем обозначать $[a_0 : a_1 : \dots : a_n]$ — тем самым мы подчёркиваем, что нам важно только соотношение между координатами. Такие координаты мы называем однородными.

Нас больше всего интересуют пространства $\mathbb{R}P^2$ (будем называть её проективной плоскостью) и $\mathbb{C}P^1$ (комплексная проективная прямая).

1. Ещё одно определение $\mathbb{R}P^2$ (можно так же определить и в общем случае). $\mathbb{R}P^2$ — это множество прямых в трёхмерном пространстве, проходящих через начало координат. Докажите эквивалентность этих определений.

Геометрия

Определение. (Проективной) прямой на проективной плоскости будем называть множество точек, удовлетворяющих уравнению $Ax + By + Cz = 0$. Если проективная плоскость — это множество прямых в трёхмерном пространстве, проходящих через начало координат, то проективная прямая на ней — это множество прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через начало координат.

2. (a) Докажите, что через любые две точки проективной плоскости проходит ровно одна прямая.

(b) Докажите, что любые две прямые на проективной плоскости пересекаются ровно в одной точке.

Удобно. Никакой параллельности, никаких проблем с пятым постулатом Евклида.

3. Рассмотрим подмножество проективной плоскости $\{[a_0 : a_1 : a_2] | a_2 \neq 0\}$.

(a) Докажите, что это подмножество образует обыкновенную плоскость, причём прямые этой плоскости соответствуют (проективным) прямым на проективной плоскости.

(b) Докажите, что оставшиеся точки образуют (проективную) прямую — как в смысле прямой на проективной плоскости, так и в смысле определения $\mathbb{R}P^1$. Эту прямую назовём бесконечно удалённой, а точки на ней — бесконечно удалёнными.

(c) Докажите, что каждая прямая на проективной плоскости, кроме бесконечно удалённой прямой, содержит ровно одну бесконечно удалённую точку. Прямые, параллельные в обыкновенной плоскости, пересекаются в бесконечно удалённой точке, а непараллельные прямые проходят через разные бесконечно удалённые точки.

Тем самым у нас есть ещё одна конструкция проективной плоскости — это плоскость, к которой добавлены бесконечно удалённые точки, по одной для каждого направления (т.е. пучка параллельных прямых).

4. Докажите, что $\mathbb{C}P^1$ — это множество комплексных чисел с ещё одной добавленной точкой, которую мы и назовём точкой ∞.

Итак, инверсия на самом деле действует на $\mathbb{C}P^1$. Если окружность единичная с центром в нуле, то инверсия действует по формуле $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Тоже неплохо.

5. (a) Докажите, что полярное соответствие корректно определяется на проективной плоскости (т.е. каждой прямой соответствует точка, а каждой точке — прямая, без исключений).

(b) Пусть окружность, относительно которой делается полярное соответствие, единичная с центром в начале координат. В какую прямую перейдёт точка $[a : b : c]$?

(c) Дана прямая на проективной плоскости. Докажите, что существуют два полярных преобразования, такие что при их композиции данная прямая переходит в бесконечно удалённую прямую.

Топология

Здесь мы не придаём строгого смысла некоторым понятиям

6. **(a)** Докажите, что $\mathbb{C}P^1$ является сферой.

(b) Пусть северный полюс сферы соответствует бесконечности, южный — нулю, экватор — единичной окружности. Докажите, что инверия относительно единичной окружности есть отражение сферы от экватора.

7. **(a)** Из проективной плоскости вырезали круг. Докажите, что получилась лента Мёбиуса. Иначе: докажите, что проективная плоскость может быть склеена из ленты Мёбиуса и круга, если клеить по краю (у каждого край представляет собой окружность).

(b) Докажите, что проективную плоскость можно получить, если взять сферу и склеить её противоположные точки.

(c) А ещё проективную плоскость можно получить, если взять круг и склеить противоположные точки ограничивающей его окружности. Докажите это.

Комбинаторика

8. Сколько точек в n-мерном проективном пространстве над полем $\mathbb{Z}_p$ (поле вычетов по модулю p)?

9. В отряде 81 человек. Каждый день трое уходят на дежурство. Докажите, что можно составить такой график дежурств, чтобы любые двое участвовали ровно в одном общем дежурстве.

10. **(a)** Монетный двор выпустил 31 серию юбилейных монет. У нескольких коллекционеров по шесть монет. Может ли быть так, что любая пара монет встретилась ровно у одного коллекционера, и для любых двух коллекционеров есть ровно одна монета, которая есть в коллекции у обоих?

(b) В школе 121 десятиклассник. По уставу школы в каждом кружке занимается 40 десятиклассников. Докажите, что возможна ситуация, что составы любых двух разных кружков пересекаются ровно по 13 десятиклассникам.

Ликбез по дискретной теории вероятностей

На дне глубокого сосуда
Лежат спокойно n шаров.
Поочерёдно их оттуда
Таскают двое дураков.
Сие занятье им приятно
Они таскают m минут.
И взявши шар, его обратно
В сосуд немедленно кладут.
Ввиду условия такого,
Сколь вероятность велика,
Что первый был глупей второго,
Когда шаров он вынул k?

Определение. Пусть X — не более чем счётное множество, называемое множеством элементарных исходов. Зададим такую функцию $P : X \to \mathbb{R}_+$ (называемую вероятностью элементарного исхода), что $\sum_{x \in X} P(x) = 1$. Такая пара (X, P) называется *дискретным вероятностным пространством.*

Событием называется произвольное подмножество X. Вероятность события — это сумма вероятностей элементарных исходов, входящих в это событие.

В теории вероятностей применяется специфическая терминология: сумма событий — это объединение, произведение событий — пересечение соответствующих подмножеств.

Определение. События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

1. Опишите вероятностные пространства и найдите вероятности следующих событий.

(a) Подбрасывание кубика (если не оговорено особое, считаем, что все грани кубика, а также стороны монет и т.д. равновероятны). Событие - выпало чётное число.

(b) Подбрасывание монеты 10 раз. Порядок экспериментов важен. Событие — выпало не менее семи орлов.

(c) Вытаскивание из колоды (36 карт) шести карт. Событие — есть все четыре масти.

(d) Подбрасывание кубика до первой шестёрки. Событие — кубик пришлось подбрасывать ровно шесть раз.

Определение вероятностного пространства не работает в непрерывном случае (например, если десятиклассник приходит на ликбез в случайный момент времени от 14.30 до 14.45). В этом случае необходимо другое, гораздо более сложное определение.

2. Кидают пять кубиков. Найдите вероятности следующих событий и вычислите их приближённое значение (в процентах):

(a) «Покер» — все пять кубиков одинаковые.

(b) «Каре» — четыре кубика одинаковые (а пятый нет).

(c) «Full house» — три кубика одинаковые и остальные два тоже одинаковые (но не «покер»)

(d) «Large Street» — кубики можно упорядочить, чтобы достоинства на них образовывали подряд идущие числа.

(e) «Small Street» — кубики можно упорядочить, чтобы достоинства на них образовывали четыре подряд идущих числа, но нельзя — чтобы было пять подряд чисел.

(f) «Тройка» — три одинаковых, два других (не вышеперечисленные комбинации).

(g) «Две пары» — две пары одинаковых значений (не вышеперечисленные).

Случайные события, конечно, хорошая вещь, но с ними не всегда удобно. Часто удобнее использовать случайные величины.

Определение. Пусть X — (дискретное) вероятностное пространство. Случайной величиной будем называть отображение $\xi : X \to \mathbb{R}$. При этом говорим, что $\xi = k$ с вероятностью p, если $P(\xi^{-1}(k)) = p$. Пишется так: $P(\xi = k) = p$. Чаще всего мы будем рассматривать целочисленные случайные величины.

Так как случайные величины являются по сути функциями, то с ними можно делать все операции, которые производятся с функциями: складывать, умножать на число, умножать друг на друга, возводить в квадрат и т.д.

Примеры. 1) *(Равномерное дискретное распределение)* Например, бросаем кубик; случайная величина — это выпавшее на кубике число. Т.е. она принимает значения 1, 2, 3, 4, 5 и 6, каждое с вероятностью 1/6. Эти данные можно записать в таблицу, которая называется рядом распределения.

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Таким образом, любую (дискретную) случайную величину можно задать рядом распределения. Этот ряд может быть и бесконечным, но основное требование — сумма чисел в нижней строке должна равняться единице.

Вообще же дискретное равномерное распределение — это случайная величина, принимающая каждое значение с равной вероятностью.

2) *(Распределение Бернулли)* Эта случайная величина равна единице с вероятностью p и нулю с вероятностью $q = 1 - p$.

Рассмотрим сумму случайных величин. Всё не так просто. Например, каждая из случайных величин — это результат бросания кубика. Как распределена сумма этих случайных величин? На самом деле эта задача стоит нечётко: если эти два кубика разные и броски независимы, то распределение будет одно (какое?), а если это один и тот же бросок одного и того же кубика, то другое (какое?).

Определение. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 называются независимыми, если для любых множеств значений A и B выполнено $P(\xi_1 \in A, \xi_2 \in B) = P(\xi_1 \in A)P(\xi_2 \in B)$.

Или, что то же самое, для любых значений k_1 и k_2 выполнено $P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2) = P(\xi_1 = k_1)P(\xi_2 = k_2)$.

3. *(Биномиальное распределение)* Рассмотрим сумму n независимых распределений Бернулли с одинаковыми p и q (т.е. величины одинаково распределённые, но независимые). Реализация: проводим n испытаний Бернулли; случайная величина — это количество успехов. Найдите ряд распределения этой случайной величины.

4. *(Геометрическое распределение)* А теперь мы проводим испытания Бернулли до первого успеха. Случайная величина — это количество таких испытаний. Найдите её ряд распределения. Почему эту величину называют геометрическим распределением?

5. *(Гипергеометрическое распределение)* На дне глубокого сосуда M белых, чёрных N шаров. Поочерёдно их оттуда таскают двое дураков. Сие занятье им приятно, и n шаров берут они. И взявши шар, его обратно в сосуд... нет, не кладут, ни-ни. Ввиду условия такого, сколь вероятность велика, что первый был глупей второго, а белых вытащено k?

Распределение Пуассона

Папа, а правда ли, что по теории вероятностей Россия когда-нибудь выиграет чемпионат мира по футболу?
— Нет, сынок, это уже теория маловероятностей.

Напоминание про распределение Бернулли. Неправильную монету подкидывают n раз. Все подкидывания независимы (а что это значит?). Вероятность выпадения орла равна p, вероятность решки — $q = 1 - p$. Найдите вероятность того, что при n подкидываниях выпало ровно k орлов.

Примечание. Обычно в связи с распределением Бернулли говорят не про «орлы» и «решки», а про «успехи» и «неудачи». Но мы сейчас не будем придерживаться такой терминологии.

Нашли? Молодцы. А теперь представьте себе, что $N = 1.000.000$, $p = 1/500.000$, $k = 3$. *Сколько примерно получилось?*

А ведь именно такие задачи часто встают в реальной жизни. Представьте себе, что N *— количество выпущенных автомобилей,* p *— вероятность отказа тормозной системы у автомобиля. Тогда* k *— это количество аварий, произошедших по вине завода-изготовителя.*

Напоминание про число e. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

1. Найдите $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n$.

Рассмотрим задачу. Пусть вероятность p очень мала, а количество опытов N, наоборот, очень велико. И пусть они связаны отношением $\lambda = Np$ (λ — постоянная величина). Пусть $P(k)$ — вероятность того, что при N испытаниях ровно k окончились положительно. (Понятно, почему мы избегаем здесь терминологии «успех» и «неудача»?)

2. Найдите $\lim_{p\to 0} P(k)$.

Полученная формула называется *распределением Пуассона* с параметром λ.

3. Докажите, что целые неотрицательные числа с распределением Пуассона образуют вероятностное пространство (т.е. сумма всех вероятностей равна 1).

Для самостоятельного решения

4. Споры, несущиеся по воздуху, производят маленькие колонии плесени на пластинках желатина в лаборатории. В среднем на пластине имеется три колонии. А какова вероятность, что на данной пластине будет ровно три колонии?

5. Осторожный фальшивомонетчик кладёт в каждый ящик 99 настоящих и одну фальшивую монету. Король проверяет сто ящиков так: он наугад берёт по одной монете из каждого ящика и отправляет на экспертизу. Какова вероятность того, что фальшивомонетчик не будет разоблачён?

6. Леонид Андреевич в среднем раз в пять минут кричит "Пааапа!"Андрей Александрович был в столовой 20 минут. Какова вероятность того, что за это время Л.А. его отвлечёт от еды чётное количество раз?

Частичный порядок

1. В одно холодное утро на футбол пришло всего 5 школьников различного роста, которые выстроились в шеренгу. Всегда ли можно выбрать трех из них так, чтобы они были выстроены по росту? А если школьников было 9, а выбрать надо четверых?

2. Выпишите числа от 1 до 24 в строку таким образом, чтобы самая длинная возрастающая подпоследовательность состояла из 4 чисел, а самая длинная убывающая – из 6.

Говорят, что на множестве M *задан порядок, если для некоторых (не обязательно для всех) пар элементов* a *и* b *из множества* M *сказано, что* a *не превосходит* b *(записывается* $a \leq b$*), причем выполняются следующие условия:*

· Рефлексивность: $a \leq a$.

· Антисимметричность: если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.

· Транзитивность: если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.

Если при этом $a \neq b$ *и* $a \leq b$*, то пишут* $a < b$ *и говорят, что* a *меньше* b *или* b *больше* a.

Подмножество элементов частично упорядоченного множества M *называется цепью, если любые два элемента его сравнимы, и антицепью, если любые два элемента несравнимы.*

3. Выясните, будет ли правило задавать отношение порядка на множестве. Если да, то является ли порядок частичным: **(a)** M – множество точек координатной плоскости, $(a, b) \leq (c, d)$, если $a \leq c$ или $b \leq d$;**(b)** M – это семейство подмножеств некоторого множества X, где $A \leq B$, если $A \subset B$.**(c)** M – все вектора пятимерного линейного пространства над полем $\mathbb{Z}_p$, для векторов a и b $a > b$, если $a_3 > b_3$.

4. **(a)** Докажите, что из любых десяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать четыре, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания.

(b) **Теорема Эрдёша-Секереша.** Докажите, что в последовательности $mn+1$ различных действительных чисел найдется или возрастающая подпоследовательность из $m+1$ числа или убывающая подпоследовательность из $n+1$ числа.

5. **Теорема Мирского.** Длина максимальной цепи в конечном частично упорядоченном множестве M равна минимальному количеству антицепей, на которые разбивается множество M.

6. Можно ли разместить на прямой **(a)** 6; **(b)** 7 отрезков так, чтобы из любых трех отрезков нашлись два пересекающихся и никакая точка прямой не принадлежала четырем или более отрезкам?

7. На прямой лежат несколько отрезков, причем среди любых $k+1$ найдутся два пересекающихся. Докажите, что можно отметить k точек, так чтобы каждый отрезок проходил через хотя бы одну из них.

8. Вадим нарисовал 1001 прямоугольник с натуральными сторонами не больше 1000. Докажите, что он может выбрать три из них A, B и C, такие, что A можно поместить в B, а B можно поместить в C.

Для самостоятельного решения

9. Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых $t+1$ из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в t цветов так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

10. **Теорема Дилуорса.** Минимальное число цепей, на которые можно разбить ЧУМ, равно ширине наибольшей антицепи.

Математическое ожидание

Десять минут на остановке под проливным дождём — и ожидание автобуса превращается в мат.ожидание.

Определение. Пусть ξ — случайная величина, принимающая значение k_i с вероятностью p_i. Её математическим ожиданием называется число $M\xi = \sum_i k_i p_i$. Иначе говоря, это центр масс системы точек на прямой, если в точке k_i находится масса p_i.

1. Пусть $\xi_1 \leq \xi_2$. (Кстати, а что это значит?) Докажите, что $M\xi_1 \leq M\xi_2$.

2. Докажите, что $M(\xi_1+\xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$.

3. Пусть ξ_1 и ξ_2 независимы. **(a)** Докажите, что $M(\xi_1\xi_2) = M(\xi_1)M(\xi_2)$. **(b)** Приведите пример, когда случайные величины зависимы, и это свойство не выполняется.

4. Найдите мат.ожидание случайной величины с

(a) биномиальным распределением,

(b) геометрическим распределением,

(c) распределением Пуассона.

Для самостоятельного решения

5. Стандартная рулетка имеет 38 секторов. Можно поставить некоторую сумму на какой-то сектор. Если выпадет этот сектор, то поставленная сумма сохраняется, а игроку выплачиваетс я премия в размере 35-кратной ставки. Если сектор не выпадает, то ставка переходит к казино.

(a) Пусть ставка всегда равна одному доллару, а игра однократная. Случайная величина является выигрышем игрока в этой игре (т.е. если ставка сгорает, то выигрыш игрока составляет минус один доллар). Найдите её мат.ожидание.

(b) Билл решил отучить Джека от рулетки. Он предлагает ему пари на 20 долларов. Условия пари следующие: Джек 35 раз играет в рулетку со ставкой 1 доллар. Билл утверждает, что при этом Джек ни разу не выиграет. Выгодно ли Джеку такое пари?

6. Сколько в среднем раз нужно бросить кубик, чтобы выпали все значения от 1 до 6?

7. Даны две равные окружности, каждая разбита на 200 равных дуг. Каждая из дуг окрашена в белый или чёрный цвет, причём на каждой окружности белых и чёрных дуг поровну. Докажите, что можно так совместить эти окружности, чтобы дуги наложились друг на друга и цвета как минимум 100 дуг совпали.

8. В графе с n вершинами случайным образом проводят рёбра (каждое ребро проведено с вероятностью 1/2, рёбра проводят независимо). Сколько в среднем треугольников получится в этом графе?

9. **(a)** Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \dfrac{C^n_{2^{n/2}}}{2^{n^2/2}} = 0$.

(b) Полный граф на $2^{n/2}$ вершинах случайным образом красят в два цвета (т.е. рёбра красят независимо, каждое ребро — с равной вероятностью в первый и во второй цвет). Случайная величина ξ — количество одноцветных полных подграфов на n вершинах. Докажите, что $M\xi < 1$.

(c) **(Теорема Эрдёша, 1947)** Рёбра полного графа на $2^{n/2}$ вершинах можно покрасить в два цвета так, чтобы в нём не было одноцветных полных n-вершинных подграфов. Иными словами, число Рамсея $R(n, n) > 2^{n/2}$.

Теорема о центральной точке

Определение. Пусть дано множество M на плоскости из n точек. Точка X называется *центральной точкой* для этого множества, если любая прямая, проходящая через X, делит плоскость на две части, каждая из которых (вместе с проведённой прямой) содержит не менее чем $\dfrac{n}{3}$ точек из M.

1. Найдите хотя бы одну центральную точку для четырёх точек на плоскости, образующий **(a)** выпуклый; **(b)** невыпуклый четырёхугольник.

Теорема о центральной точке. Для любого множества на плоскости найдётся центральная точка.

Научимся её строить. Пусть M — множество из n точек на плоскости. Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ всех выпуклых фигур, таких что они содержат более $\dfrac{2n}{3}$ точек из M.

2. Докажите, что если все фигуры из $\mathcal{C}$ имеют общую точку, то она является центральной.

3. **(a)** Докажите, что любые две фигуры из $\mathcal{C}$ пересекаются по непустой выпуклой фигуре.

(b) Докажите, что существует такая точка X в пересечении двух фигур из $\mathcal{C}$, что любая другая фигура из $\mathcal{C}$, не содержащая X, содержит точки, лежащие выше X.

(c) Докажите, что все фигуры из $\mathcal{C}$ имеют общую точку.

Замечание. Таким образом, мы доказали теорему о центральной точке для плоскости.

4. Приведите пример, показывающий неулучшаемость оценки $1/3$ в теореме о центральной точке.

5. Докажите, что для любого множества M из n точек на плоскости существуют такие точки плоскости P и Q, что все выпуклые фигуры, содержащие более $\dfrac{4n}{7}$ точек из M, также содержат P или Q.

6. Придумайте меньшую оценку, чем $\dfrac{4n}{7}$ в предыдущей задаче, но для трёх точек.

7. На плоскости расположено 36 точек. Докажите, что существует не менее 660 треугольников (среди которых могут быть вырожденные) с вершинами в данных точках, содержащих некоторую центральную точку X.

Для самостоятельного решения

8. Докажите, что внутри выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

9. На плоскости есть множество M из $3n$ точек. Пусть X — центральная точка этого множества. Докажите, что точки M можно разбить на тройки так, чтобы X попала в каждый треугольник, образованный тройкой точек.

10. *Теорема о центральной точке для $\mathbb{R}^d$.* Пусть в $\mathbb{R}^d$ есть множество M из n точек. Тогда существует такая точка X, что любое полупространство, содержащее X, содержит не менее $\frac{n}{d+1}$ точек из M.

11. Докажите, что существует пример из n точек на плоскости, таких что нет трёх точек, которые в совокупности "прокалывают" все выпуклые фигуры, содержащие не менее $\frac{5n}{11}$ из данных точек.

Линейное программирование

Налево пойдёшь — коня потеряешь.
Значит, если пойдёшь направо — будет у тебя целых два коня.

1. (a) Хоббит обнаружил в логове дракона серебро, изумруды и сундук, в котором их можно унести. В сундук помещается 100 фунтов серебра или 50 фунтов изумрудов (а можно заполнять сундук частично серебром, частично — изумрудами). Серебро можно будет продать по 20 талеров за фунт, а изумруды — по 30 талеров за фунт. Однако его пони может увезти только 80 фунтов груза. Какое наибольшее количество талеров он сможет получить за сокровища, увезённые за один раз?

(b) Когда хоббит вернулся из похода, оказалось, что изумруды подорожали и теперь стоят 50 талеров за фунт (серебро стоит по-прежнему 20 талеров за фунт). А какова должна быть стратегия хоббита в этом случае?

2. (Задача о диете) Толстушка Кэт решила питаться правильно. Подружка ей посоветовала употреблять только продукты A и B (названия зашифрованы, чтобы не создавать рекламу). Дневное питание должно давать не менее 20 единиц белка и не менее 30 килокалорий. В одном килограмме продукта A содержится одна единица белка и одна килокалория, а в килограмме B — одна единица белка и 2 килокалории. Цена килограмма A — 80 у.е., цена килограмма B — 100 у.е. Требуется потратить минимальную сумму и выжить, питаясь этими продуктами. Как?

Вопрос на (не)понимание. В этих двух задачах фигурируют одни и те же числа и получается один и тот же ответ. Это мистическое совпадение или проявление некоторой естественной двойственности?

Определение. Прямой задачей линейного программирования называется задача

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \to max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots x_n \geq 0 \end{cases}$$

Точка $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$, удовлетворяющая всем неравенствам, называется допустимым планом, а допустимый план, реализующий максимум функции $f(x)$, называется оптимальным планом.

3. Докажите, что множество допустимых планов выпукло.

4. Приведите пример задачи, в которой:

(a) допустимый план не существует;

(b) допустимый план существует, а оптимального плана нет;

(c) оптимальный план не единственен.

Определение. Точка называется крайней для выпуклого множества, если она не является серединой никакого отрезка, лежащего в этом выпуклом множестве. В случае многогранников это просто вершины.

5. (a) Пусть X и Y — допустимые планы, и оптимальный план лежит на отрезке XY. Докажите, что один из планов X или Y также является оптимальным.

(b) Докажите, что один из оптимальных планов (если таковые есть) достигается в крайней точке (если таковые есть) множества допустимых планов.

6. Пусть X — оптимальный план. Некоторые из неравенств $a_{i1}x_1 + \dots a_{in}x_n \leq b_i$ при этом обратились в равенство. Докажите, что остальные можно вообще исключить, и X будет оптимальным планом новой задачи.

Определение. Двойственная задача линейного программирования строится так:

$$g(y_1, y_2, \dots y_k) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_ky_k \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots a_{k1}y_k \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{k2}y_k \geq c_2 \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{kn}y_k \geq c_n \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots y_n \geq 0 \end{cases}$$

7. (a) Пусть X — допустимый план прямой задачи, а Y — допустимый план двойственной задачи. Докажите, что $f(X) \leq g(Y)$.

(b) Пусть одно из неравенств исходной задачи можно исключить так, чтобы оптимальный план остался прежним. Докажите, что в двойственной задаче можно приравнять к нулю одну из переменных так, чтобы оптимальный план в этой задаче остался прежним.

(c) Если $f(x)$ неограничено, то множество допустимых планов двойственной задачи пусто.

(d) (Теорема двойственности) Пусть X^* — оптимальный план прямой задачи, а Y^* — оптимальный план двойственной задачи. Докажите, что $f(X^*) = g(Y^*)$.

Примечание. На самом деле верно большее. Если оптимальный план X^* существует, то существует и оптимальный план Y^*.

Для самостоятельного решения

8. (Транспортная задача) Поставщики товара - оптовые коммерческие предприятия $B_1, B_2, \ldots, B_k$ имеют запасы товаров соответственно в количестве $b_1, b_2, \ldots, b_k$ единиц. Розничные торговые предприятия $C_1, C_2, \ldots, C_n$ подали заявки на закупку товаров в объемах соответственно: $c_1, c_2, \ldots, c_n$ единиц товара. Стоимость перевозки единицы товара с i-го склада j-му предприятию составляет a_{ij}. Надо найти такой план перевозки груза от поставщиков к потребителям, чтобы совокупные затраты на перевозку были минимальными.

Пусть такой оптимальный план выражается в виде таблицы $(x_{ij})_{i=1\ldots k, j=1\ldots n}$. Докажите, что все x_{ij}, кроме, может быть, $k+n-1$ числа, равны нулю.

9. Петя зажимает в одном кулаке рублёвую монету, а в другом — двухрублёвую. Вероятность p, с которой Петя зажимает в левом кулаке рубль, он может установить по своему усмотрению. Вася указывает на левую или правую руку Пети и получает монету в соответствующей руке. Вася выбирает левую руку с вероятностью r (r он может выбрать как захочет). За одну игру с Васи берётся плата. Какой должна быть эта плата, чтобы игра оказалась честной?

Внутренний матбой

1. В стране между некоторыми городами осуществляются беспосадочные перелеты (рейсы односторонние). Руководство авиакомпании хочет установить цены на полёты так, чтобы если от одного города до другого можно было пролететь (с пересадками) несколькими способами, то все способы обходились бы путешественнику в одинаковую сумму. Всегда ли получится так сделать, если цена перелётов может быть любой ненулевой (в том числе отрицательной)?

2. Треугольник $\triangle ABC$, у которого $AB = AC$, вписан в окружность ω. Пусть P – переменная точка на дуге ω BC, не содержащей точку A, точки I_B и I_C – центры вписанных окружностей треугольников $\triangle ABP$ и $\triangle ACP$. Докажите, что описанные окружности треугольников $\triangle PI_BI_C$ проходят через фиксированную точку.

3. Найдите наименьшее действительное r такое, что неравенство

$$\sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \cdots + \sqrt{n^2+1} \leq \frac{1}{2}n(n+r)$$

выполняется для всех натуральных n.

4. Алина и Аня по очереди красят стороны n-угольника. Алина может своим ходом покрасить сторону, у которой 0 или 2 окрашенных соседних стороны. Аня может своим ходом красить сторону, у которой 1 окрашенная соседняя сторона. ПТКНМСХ. Кто выигрывает при правильной игре?

5. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит четное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, между которыми сидит нечетное число человек, общего знакомого нет?

6. Внутри выпуклого пятиугольника выбраны две точки. Докажите, что можно выбрать четырехугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что внутрь его попадут обе выбранные точки.

7. Докажите, что для каждого натурального $a > 1$ существует простое p такое, что число $1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$ – составное.

8. На стороне AB треугольника ABC, в котором $BC = AC + AB/2$, взята точка P так, что $AP = 3PB$. Докажите, что $\angle PAC = 2\angle CPA$.

9. Клетчатый многоугольник, клетки которого раскрашены в два цвета, назовем хорошим, если в нем ровно четверть клеток черная. Верно ли, что любой хороший квадрат 12×12 можно разрезать на 9 хороших многоугольников?

10. Найдите все такие функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которых

$$(n-1)^2 < f(n) \cdot f(f(n)) < n^2 + n$$

для всех натуральных n.

Симедианы

Отражения нет только у вампира, а у медианы оно есть.

Определение. Симедианой называется чевиана, симметричная медиане относительно биссектрисы. Точкой Лемуана называется точка пересечения симедиан (т.е. точка, изогонально сопряжённая точке пересечения медиан).

1. **(a)** Пусть ABC — треугольник, M и N — точки на стороне BC такие, что AM и AN симметричны относительно биссектрисы AL. Докажите, что $\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

(b) Пусть точка N лежит на стороне BC. Докажите, что AN является симедианой тогда и только тогда, когда $\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Определение. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC построены точки C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BC и B_1C_1 называются антипараллельными, если $\angle ABC = \angle AB_1C_1$.

2. Докажите, что чевиана AN является симедианой тогда и только тогда, когда она делит пополам любой отрезок B_1C_1, антипараллельный отрезку BC.

3. Пусть M — середина стороны AC треугольника ABC. Докажите, что точка, инверсная M относительно описанной около ABC окружности, лежит на симедиане угла B.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BK, а также перпендикуляры KE и KF на стороны AB и BC соответственно. К окружности, описанной около треугольника BEF, проведены касательные в точках E и F. Докажите, что эти касательные пересекаются на прямой, содержащей медиану треугольника ABC.

5. В треугольнике ABC провели чевиану AS. Точка D на этой чевиане такова, что $\angle ACD = \angle BAD$ и $\angle ABD = \angle CAD$.

а) Докажите, что DS — биссектриса угла BDC.

b) Точка D внутри треугольника ABC такова, что $\angle ACD = \angle BAD$ и $\angle ABD = \angle CAD$. Докажите, что D лежит на симедиане угла A.

6. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают эту медиану в точках A' и B'. Докажите, что прямые AA' и BB' пересекаются на симедиане угла C.

7. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и D. Касательная к ω_1 в точке A второй раз пересекает ω_2 в точке B, а касательная к ω_2 в точке A второй раз пересекает ω_1 в точке C. Докажите, что радикальная ось окружностей ω_1 и ω_2 содержит симедиану треугольника ABC.

Непрерывность

— А если червяка разорвать на две половинки, они будут дружить?
— С тобой — точно нет.

Аксиома полноты множества вещественных чисел. Любое непустое ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет точную верхнюю грань.

Пределом функции $f(x)$ *в точке* a называется такое число b, для которого выполнено условие: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Функция называется *непрерывной* в точке a, если ее предел в точке a равен $f(a)$. Функция называется непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Теорема Больцано-Коши. Если $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, $f(a) > 0, f(b) < 0$, то $f(x)$ имеет корень на отрезке $[a, b]$.

Упражнения

1. Чему равняется $\lim\limits_{\alpha\to 0}(a\cos\alpha + b\sin\alpha)$ для фиксированных a, b? Докажите, используя определение предела.

2. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$. Докажите, что она ограничена на $[a, b]$.

3. Пусть $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Запишите определение предела функции в точке (a, b).

Задачи

1. Полоса - это множество точек, находящиеся строго между двумя параллельными прямыми. Докажите, что для любой точки полосы можно нарисовать круг с центром в этой точке такой, что все точки круга попадут внутрь полосы.

2. Докажите, что выпуклый ограниченный многоугольник можно разделить прямой данного направления на две части равной площади и что такая прямая единственна.

3. **(a) Теорема о неподвижной точке.** Если непрерывная функция $f(x)$ отображает отрезок в себя, то существует неподвижная точка, то есть такая точка x_0, что $f(x_0) = x_0$.

(b) Непрерывная функция f такова, что уравнение $f(x) = x$ не имеет действительных решений. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ тоже не имеет действительных решений.

4. Докажите, что на Экваторе найдутся две противоположные точки с одинаковой температурой.

5. Уравнение $x^3 + ax + 1 = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что найдётся такое $\varepsilon > 0$, что для всякого $b \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ уравнение $x^3 + bx + 1 = 0$ имеет три действительных корня.

6. **(a)** Докажите, что вокруг любой выпуклой ограниченной фигуры можно описать квадрат.

(b) Докажите, что в любую центрально-симметричную ограниченную выпуклую фигуру можно вписать квадрат.

7. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, (a, b) — точка на координатной плоскости. Докажите, что среди всех точек графика функции f найдётся такая, расстояние от которой до точки (a, b) минимально (то есть не больше, чем расстояние от любой другой точки графика f до (a, b)).

Для самостоятельного решения

8. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

9. Верно ли, что каждая внутренняя точка любого выпуклого многогранника принадлежит какому-то отрезку, концы которого находятся на рёбрах этого многогранника?

10. Пусть S — единичный квадрат на плоскости, а $f : S \to S$ — непрерывная функция. Докажите, что существует $x_0 \in S$ такое, что $f(x_0) = x_0$.

Классические неравенства

Ниже в листке числа p и q положительны и связаны соотношением $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Докажите неравенство $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$, где $x \leq -1$, $0 < \alpha < 1$.

2. Неравенство Юнга. Пусть a, $b > 0$. Тогда $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Указание. Сделайте замену $p = \dfrac{1}{\alpha}$ и $\dfrac{a}{b} = 1 + x$ в предыдущем неравенстве.

3. Неравенство Гельдера. Пусть a_1, ..., a_n, b_1, ..., $b_n > 0$, $p > 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

4. (a) Пусть a_1, ..., a_n, b_1, ..., $b_n > 0$, $p \ge 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{p-1} \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^{p-1}\right)^p$$

(b) Неравенство Минковского. Пусть a_1, ..., a_n, b_1, ..., $b_n > 0$, $p \ge 1$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

5. Пусть ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^p$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i^p$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i^q$ сходятся. Что можно сказать о рядах $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^p$?

6. Обобщите неравенство Гельдера на случай трех наборов чисел a_i, b_i, c_i.

7. Что произойдет с неравенством Гельдера, если вместо положительности p и q потребовать условие $pq < 0$?

Для любого действительного $\alpha \ne 0$ средним степенным положительных чисел x_1 , x_2 , . . . , x_n порядка α называется число

$$S_\alpha(x) = \left(\frac{x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Частными случаями средних степенных являются: среднее гармоническое ($\alpha = -1$), среднее арифметическое ($\alpha = 1$), среднее квадратичное ($\alpha = 2$).

Средним степенным порядка 0 будем считать среднее геометрическое $S_0(x) = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$.

8. Если $\alpha < \beta$, то $S_\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) \le S_\beta(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Функциональные уравнения

1. Найдите все $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

(a) $f(x)f(y) = f(xy) + x + y$

(b) $f(x + y) = x + f(y)$

(c) $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$

для всех пар чисел $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Пусть $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям для всех $x \in \mathbb{R}^+$:

- $f(x)$ — монотонно возрастающая функция
- $f(x) > -\frac{1}{x}$
- $f(x)f(f(x)+\frac{1}{x}) = 1$

Найдите $f(1)$.

3. Найдите все $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ такие, что $f\left(x+\dfrac{y}{x}\right) = f(x) + \dfrac{f(y)}{f(x)} + 2y$ для всех $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Замечание. Для непрерывных функций f имеет место равенство $f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, где $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность вещественных чисел.

Таким образом, бывает достаточно решить ФУР (доказать единственность решения) сначала для рациональных значений, а затем воспользоваться непрерывностью функции, чтобы получить решение во всех точках.

4. Найдите все непрерывные функции $f(x)$ определённые для $x > 0$ такие, что $f(x+y) = \dfrac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^+$.

5. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ которые удовлетворяют условию $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Для самостоятельного решения

6. Найдите все непрерывные функции, удовлетворяющие условию $f(x+y) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^+$.

7. Функция F задана на всей вещественной оси, причём для любого x имеет место равенство: $F(x+1)F(x) + F(x+1) + 1 = 0$. Докажите, что функция F не может быть непрерывной.

8. Пусть t - какое-то фиксированное число, причём $0 < t < 1$. Найдите все $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывные в точке $x = 0$, такие что $f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2$.

Менелай и его друзья

И возлёг Он с двенадцатью точками; и сказал им: истинно говорю вам, что трое из вас будут лежать на одной прямой. Они весьма опечалились, и тогда каждый начал говорить Ему: не я ли, Учитель?

1. (Теорема Менелая) Дан треугольник ABC. На прямой AB отмечена точка K, на прямой BC — точка L, на прямой AC — точка M. Докажите, что точки K, L и

M лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено соотношение (в направленных отрезках)

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

2. (Теорема Паппа) Пусть на одной прямой лежат точки A, C и E, а на другой прямой — точки B, D и F. Если прямые AB, CD и EF пересекают прямые DE, FA и BC соответственно в точках L, M и N, то точки L, M и N коллинеарны.

Подсказка. Докажем эту теорему в случае, когда прямые AB, CD и EF образуют треугольник UVW. Рассмотрите всевозможные тройки точек, удовлетворяющие условию теоремы Менелая для UVW (таких троек должно быть пять). Запишите соответствующие отношения. Выведите из них теорему Паппа.

Но вам нужно доказать эту теорему в общем случае.

3. (Теорема Дезарга) Пусть два треугольника ABC и $A'B'C'$ таковы, что прямые AA', BB' и CC' конкурентны. Пусть прямые AB, BC и AC пересекают прямые $A'B'$, $B'C'$ и $A'C'$ соответственно в точках L, M и N. Докажите, что точки L, M N коллинеарны.

4. (Теорема Паскаля) Пусть A, B, C, D, E F — точки на окружности. Обозначим точки пересечения AB и DE, BC и EF, CD и AF за L, M и N соответственно. Докажите, что точки L, M и N коллинеарны.

Подсказка. Обозначим точки пересечения прямых CD и EF, AB и EF, AB и CD за U, V и W соответственно. Снова напишите всевозможные теоремы Менелая относительно треугольника UVW.

Для посвящённых. Поймите, что теорема Паскаля верна и в случае, если изначальные шесть точек лежали на эллипсе.

Для совсем посвящённых. Поймите, что теорема Паскаля верна и в случае, если эти шесть точек лежали на параболе или на гиперболе.

5. (Теорема Брианшона) Пусть шесть прямых AB, BC, CD, DE, EF и FA касаются одной окружности. Докажите, что прямые AD, BE и CF конкурентны.

Опять-таки, прямые могут касаться не окружности, а эллипса, параболы или гиперболы — такова проективная природа этой задачи.

Для самостоятельного решения

6. Дан лист бумаги, две прямые, пересекающиеся вне этого листа, и точка на листе. Постройте через эту точку прямую, проходящую через точку пересечения нарисованных прямых. Построения не должны выводить за лист бумаги.

7. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения сторон AB и CD и точка пересечения касательных к вершинам B и C коллинеарны.

8. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Произвольная окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

9. Пусть P и Q — две изогонально сопряжённые точки в треугольнике ABC. Пусть $P_AP_BP_C$ и $Q_AQ_BQ_C$ — педальные треугольники точек P и Q. И пусть ещё K, L и M — точки пересечения прямых P_AQ_B и P_BQ_A, P_AQ_C и P_CQ_A, P_BQ_C и P_CQ_B соответственно.

(a) Докажите, что точки K, L и M лежат на одной прямой.

(b) Докажите, что точки P и Q лежат на той же прямой

Диаграммы Юнга

— И начал я их считать — слева направо и сверху вниз. Но сбился со счёта. Тогда я решил пересчитать их снизу вверх и справа налево.
— И тоже сбился?
— Да. А как ты догадался?

Определение. Диаграмма Юнга — это некоторый набор клеток, выровненных по нижней границе, в котором длины столбцов образуют невозрастающую последовательность.

Иными словами диаграмма Юнга — это несколько столбцов, идущих слева направо, причём каждый следующий столбец не выше, чем предыдущий.

Вот пример диаграммы Юнга формы $\{5, 3, 3, 1\}$.

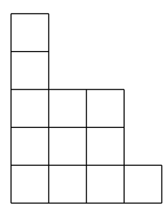


Диаграмма Юнга задаёт некоторое разбиение натурального числа n, где n — это количество клеток в диаграмме, на слагаемые. При этом разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

1. (a) Докажите, что количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ, равно количеству разбиений числа n в сумму не более чем ℓ слагаемых, каждое из которых не превосходит k.

(b) Докажите, что количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ, равно количеству разбиений числа $k\ell - n$ в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ.

2. Петя написал количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ, Вася написал количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $\ell - 1$, а Маша написала количество разбиений числа $n - \ell$ в сумму не более чем $k - 1$ слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ. Докажите, что сумма Машиного и Васиного чисел равно числу Пети.

3. На доске написано несколько натуральных чисел: a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Пишем на второй доске следующие числа: b_0 — сколько всего чисел на первой доске; b_1 — сколько там чисел, больших единицы; b_2 — сколько чисел, больших двойки, и т.д., пока получаются положительные числа. На этом заканчиваем — нули не пишем. На третьей доске пишем числа $c_0, c_1, c_2, \ldots$, построенные по числам второй доски по тому же правилу, по которому числа $b_0, b_1, b_2, \ldots$ строились по числам первой доски. Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают.

Для самостоятельного решения

4. Сколько существует способов выбрать натуральное число и разбить его не более чем на k слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ?

5. Диаграмму Юнга покрасили в шахматном порядке. Оказалось, что белых и чёрных клеток в ней поровну. Докажите, что её можно разрезать на домино.

6. Крюком называется часть диаграммы Юнга, состоящая из какой-либо клетки и всех клеток, расположенных либо правее, либо выше ее. Дана диаграмма Юнга из n клеток. Пусть s — количество крюков, состоящих ровно из k клеток. Докажите, что **(a)** $s^2 \leq 2n$, **(b)** $s(k+s) \leq 2n$.

7. **(a)** Докажите, что количество решений уравнения $1a_1 + 2a_2 + \ldots na_n = n$, в которых первые несколько чисел (может быть, одно) a_i натуральны, а остальные равны нулю, совпадает с количеством способов разбить число n в сумму попарно различных слагаемых.

(b) Докажите, что это количество совпадает с количеством решений уравнения $1a_1 + 2a_2 + \ldots na_n = n$, в которых все числа a_i равны 0 или 1.

Теорема Форда-Фалкерсона

Рассмотрим замкнутую систему водопроводных труб с единственным источником и единственным стоком воды. Такую систему можно изобразить в виде графа, каждому ребру которого сопоставлено число – пропускная способность этого ребра. Можно попробовать пропустить через эту систему от истока к стоку некоторое количество воды. Естественно, поток через ребро не может превышать его пропускной способности.

1. На ребрах куба расставили числа от 1 до 12, обозначающие пропускную способность. Запустим максимальный поток между парой противоположных вершин. Какое **(a)** минимальное; **(b)** максимальное значение он может принимать?

Теперь каждую трубу оснастим клапаном, который пропускает воду только в одном направлении. Пропускную способность в направлении, противоположном направлению ребра, считают равной нулю. Обозначим (x, y) *ребро, ведущее из вершины* x *в вершину* y.

Определение. Ориентированный граф с двумя выделенными вершинами (источником s и стоком t), а также с назначенной каждому ребру пропускной способностью $C(x, y)$ называется транспортной сетью. У источника нет входящих рёбер, а у стока – исходящих. Потоком называют функцию $F(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям. Для любого ребра $F(x, y) \leq C(x, y)$; для любой вершины, кроме источника и стока, суммарный входящий поток равен суммарному исходящему. Будем также считать, что $F(x, y) = -F(y, x)$, то есть одновременно с положительным потоком F, идущим от источника к стоку, в противоположном направлении идёт равный по абсолютной величине отрицательный поток.

Определение. Остаточной сетью для заданного потока называется граф, на котором каждому ребру и направлению на нём сопоставлена остаточная пропускная способность, то есть разность пропускной способности и потока через это ребро.

Определение. Разрезом графа называется разбиение множества вершин графа на две части (S, T), одна из которых содержит исток s, а другая – сток t. Сумма пропускных способностей по всем ребрам с концами из разных частей называется пропускной способностью разреза.

2. **(a)** Пусть на некотором графе задан поток и нет разреза с нулевой суммарной остаточной пропускной способностью. Докажите, что тогда поток через граф можно как-нибудь увеличить. **(b)** А можно ли его при этом оставить целочисленным? (Здесь мы рассматриваем целочисленные пропускные способности.) **(c)** **Теорема Форда-Фалкерсона.** Величина максимального потока в графе равна пропускной способности разреза с минимальной пропускной способностью.

Следующие теоремы выводятся из предыдущей. Нужно лишь построить сеть.

3. Лемма Холла. Есть n юношей и несколько девушек. Известно, что для любой группы из k юношей есть не менее k девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из этих k юношей для любого k от 1 до n. Тогда можно всех юношей женить на знакомых девушках. **(a)** Добавим к двудольному графу исток, соединённый со всеми юношами, а также сток, соединённый со всеми девушками. Присвоим каждому ребру пропускную способность 1. Пусть произвольный разрез делит граф на две компоненты: в S находится исток, а в T – сток. Пусть в S попали ровно b юношей и w девушек. Докажите, что между S и T не менее n рёбер. **(b)** Докажите лемму Холла.

Определение. Вершинным покрытием в графе называется такое множество вершин, что каждое ребро имеет конец в этом множестве.

4. Теорема Кёнига. В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания. Пусть имеется двудольный граф с единичной пропускной способностью каждого ребра, дополненный истоком и стоком, как в доказательстве предыдущей теоремы. **(a)** Докажите, что размер максимального паросочетания равен максимальному потоку. **(b)** Рассмотрим минимальный разрез. Постройте по нему вершинное покрытие, в котором вершин не больше, чем пропускная способность разреза. **(c)** Докажите теорему Кёнига.

5. Теорема Менгера. **(a)** Между вершинами u и v существует k реберно непересекающихся путей тогда и только тогда, когда после удаления любых $k-1$ ребер существует путь из u в v. **(b)** Между вершинами u и v существует k вершинно непересекающихся путей тогда и только тогда, когда после удаления любых $k-1$ вершин существует путь из u в v.

Матбой 9-10

1. В ряд стоит n очень больших бочек. В первой бочке 1 литр молока, во второй 3 литра и так далее. В последней бочке $2n-1$ литров молока. Винни Пух может перелить в любую бочку столько молока, сколько там уже есть. Выливать из бочки молоко нельзя, также нельзя переливать из одной бочки в другую молоко, если в первой бочке не хватает молока для удвоения во второй. При каких n данными операциями можно собрать все молоко в одной бочке?

2. Две окружности S_1 и S_2 касаются друг друга внутренним образом в точке A так, что S_1 лежит внутри S_2. Через точку A проведена прямая, которая пересекает S_1 в точке B, а S_2 — в точке C. Через точку B проведена касательная к S_1, которая пересекает S_2 в точках D и E. Из точки C проведены две касательные к окружности S_1, которые касаются её в точках F и G. Докажите, что точки D, F, G, E лежат на одной окружности.

3. На полке стоят 20 томов энциклопедии, занумерованные от 1 до 20 слева направо. Разрешается делать две операции: (1) взять слева от начала четное число томов и переставить их, не меняя порядка, в конец; (2) взять слева от начала нечетное число томов, переложить их в обратном порядке и поставить в начало. Сколько различных перестановок томов можно получить такими операциями?

4. Докажите, что из любой бесконечной последовательности букв русского алфавита можно вычеркнуть бесконечно много букв таким образом, чтобы получилась исходная последовательность.

5. Пусть треугольник ABC — остроугольный, а точка D — основание высоты, проведенной из вершины C. Биссектриса угла B пересекает CD в точке E, а описанную окружность ω треугольника ADE вторично пересекает в точке F. Известно, что угол ADF равен $45°$. Докажите, что CF — касательная к окружности ω.

6. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ верно, что $f(xy) + f(xz) \geq f(x)f(yz) + 1$. Найдите все такие функции.

7. Докажите, что для любого натурального $k > 2$ существует такое натуральное число $n > 1$, что C_{nk}^{k} не делится на $n+1$.

8. На острове живут 200 человек: 100 честных, которые всегда говорят правду, и 100 лжецов, которые всегда лгут. У каждого жителя острова есть хотя бы один друг. В один прекрасный день 100 человек сказали: «Все мои друзья честные», а остальные 100 человек сказали: «Все мои друзья — лжецы». Какое наименьшее количество пар, в которых честный человек дружит с лжецом, может быть на острове? (Один человек может входить в несколько пар)

Матбой 9 (полупрофи) - 10

1. В ряд стоит n очень больших бочек. В первой бочке 1 литр молока, во второй 3 литра и так далее. В последней бочке $2n-1$ литров молока. Винни Пух может перелить в любую бочку столько молока, сколько там уже есть. Выливать из бочки молоко нельзя, также нельзя переливать из одной бочки в другую молоко, если в первой бочке не хватает молока для удвоения во второй. При каких n данными операциями можно собрать все молоко в одной бочке?

2. Две окружности S_1 и S_2 касаются друг друга внутренним образом в точке A так, что S_1 лежит внутри S_2. Через точку A проведена прямая, которая пересекает S_1 в точке B, а S_2 — в точке C. Через точку B проведена касательная к S_1, которая пересекает S_2 в точках D и E. Из точки C проведены две касательные к окружности S_1, которые касаются её в точках F и G. Докажите, что точки D, F, G, E лежат на одной окружности.

3. На полке стоят 2000 томов энциклопедии, занумерованные от 1 до 2000 слева направо. Разрешается делать две операции: (1) взять слева от начала четное число томов и переставить их, не меняя порядка, в конец; (2) взять слева от начала нечетное число томов, переложить их в обратном порядке и поставить в начало. Сколько различных перестановок томов можно получить такими операциями?

4. Пусть $P(x)$ — приведенный многочлен степени n, имеющий n вещественных корней (корни считаются с учетом кратности), $P(2017) = 2017$. Пусть $Q(x) = \prod\limits_{i=1}^{2017} P(x+i)$. Докажите, что $Q(x)$ имеет как минимум 1000 различных корней, по модулю меньших 2017.

5. Пусть k, n — натуральные числа, причём $n > C_k^3$. Даны $3n$ попарно различных натуральных чисел: a_i, b_i, c_i, где $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что среди сумм вида $a_i + b_i$, $a_i + c_i$, $b_i + c_i$ хотя бы $k+1$ различных.

6. Выпуклый многоугольник на плоскости таков, что его образ при любом параллельном переносе содержит целую точку. Докажите, что расстояние между какими-то двумя вершинами многоугольника не меньше $\sqrt{2}$.

7. Докажите, что для любого натурального $k > 2$ существует такое натуральное число $n > 1$, что C_{nk}^k не делится на $n+1$.

8. На острове живут 200 человек: 100 честных, которые всегда говорят правду, и 100 лжецов, которые всегда лгут. У каждого жителя острова есть хотя бы один друг. В один прекрасный день 100 человек сказали: «Все мои друзья честные», а остальные 100 человек сказали: «Все мои друзья — лжецы». Какое наименьшее количество пар, в которых честный человек дружит с лжецом, может быть на острове? (Один человек может входить в несколько пар)

9. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ верно, что $f(x + 2xy) = f(x) + 2f(xy)$. Найдите значение $f(2018)$, если $f(2017) = 2017$.

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с периметром 1 выполнены равенства $AB+CD = AC\sqrt{2}$, $BC+AD = BD\sqrt{2}$. Найдите расстояние между серединами диагоналей четырехугольника $ABCD$.

Гармонические четырёхугольники

Определение. Вписанный четырёхугольник $ABCD$ называется *гармоническим*, если $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

1. Пусть точки B и D лежат на окружности. Касательные к этой окружности в точках B и D пересекаются в точке K. Из точки K проведена секущая, пересекающая окружность в точках A и C. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — гармонический.

2. Пусть точки A, B, C, D соответствуют комплексным числам a, b, c, d.

(a) Докажите, что $ABCD$ лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ является вещественным числом.

(b) Докажите, что $ABCD$ является гармоническим четырёхугольником тогда и только тогда, когда $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = -1$.

(c) Дан треугольник ABC. Докажите, что на дуге AC описанной около ABC окружности существует ровно одна такая точка D, что четырёхугольник $ABCD$ является гармоническим.

Определение. Число $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ называется *двойным отношением* четвёрки точек A, B, C и D.

3. (a) Вписанный четырёхугольник $ABCD$ обладает свойством, что продолжение диагонали AC и касательные к описанной окружности в точках B и D пересекаются в точке K. Из точки A провели прямую, параллельную касательной BK. Эта прямая пересекает отрезки BD и BC в точках E и F соответственно. Докажите, что $AE = EF$.

(b) Дан треугольник ABC. В точке B провели касательную к описанной окружности, которая пересекла прямую AC в точке K. Ещё одна касательная из точки K касается окружности в точке D. Докажите, что BD — симедиана в треугольнике ABC.

4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Докажите, что следующие его свойства равносильны:

(a) $ABCD$ гармонический,

(b) Касательные к описанной окружности в точках B и D и прямая AC пересекаются в одной точке,

(c) Диагонали AC и BD являются симедианами соответствующих (каких?) треугольников.

(d) $\frac{AL}{CL} = \frac{AB^2}{BC^2}$, где точка L — пересечение диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

Для самостоятельного решения

5. К окружности провели касательные в точках A, B, C и D. Оказалось, что касательные в A и C пересеклись на прямой BD. Докажите, что касательные в B и D пересекаются на прямой AC.

6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Прямые, симметричные диагонали AC относительно биссектрис углов A и C, пересекаются в середине диагонали BD. Докажите, что прямые, симметричные диагонали BD относительно биссектрис углов B и D, пересекаются в середине диагонали AC.

7. Пусть $ABCD$ — гармонический четырёхугольник, и пусть P_1, P_2 и P_3 — основания перпендикуляров, опущенных из D на прямые AB, AC и BC. Докажите, что P_2 — середина отрезка P_1P_3.

Оценки в ТЧ

1. Лемма Зигеля. Пусть есть ОСЛУ с целыми коэффициентами a_{ij} $(i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q)$. Пусть также $p < q$ и $|a_{ij}| \leq A$ для всех i и j. Тогда существует нетривиальное целочисленное решение системы $(x_1, \ldots, x_q)$ такое, что $|x_j| \leq 1 + (qA)^{\frac{p}{q-p}}$ для всех j.

Чтобы найти искомое решение мы будем подставлять в систему разные наборы целых чисел и смотреть на полученную правую часть.

(a) Пусть каждое число набора, которые мы подставляем в систему ограничено по модулю натуральным числом T. Среди какого количества наборов стоит искать решение системы?

(b) А сколько наборов значений после подстановки мы сможем получить?

(c) Как построить набор, на котором система дает нулевую правую часть?

(d) Докажите лемму Зигеля.

2. Теорема Дирихле (1842). Пусть α и $C > 1$ – действительные числа. Тогда существуют такие целые числа p, q, что $1 \leqslant q < C$ и

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{Cq}.$$

3. (a) Пусть α – иррациональное число. Тогда существует бесконечно много таких взаимно простых целых чисел p, q, что $|\alpha - \frac{p}{q}\Big| < \frac{1}{q^2}$.

(b) Для рациональных чисел аналогичное утверждение неверно: существует такое $C > 0$, что при любых p, q, $p \neq q\alpha$ выполняется $\Big|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{Cq}$.

4. Теорема Лиувилля (1844). Пусть α – алгебраическое число степени $n > 1$ (т.е. корень многочлена степени n с целыми коэффициентами). Тогда существует такая константа $C(\alpha) > 0$, что для любых целых p, q выполняется

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{C(\alpha)q^n}.$$

5. Дано действительное число $r > 1$. Известно, что при любых натуральных m и n выполнено $m \vdots n => [mr] \vdots [nr]$. Докажите, что r – целое.

Теорема Штейница

Определение. Выпуклым многогранником называют фигуру, которая представляет собой пересечение конечного числа полупространств, причем фигура ограничена и имеет внутренние точки.

Граница выпуклого многогранника состоит из нескольких многоугольников, называемых его *гранями*, стороны этих многоугольников называют *рёбрами* многогранника.

1. Существует ли выпуклый многогранник из семи ребер?

Напоминаем формулу Эйлера для выпуклого многогранника: $v - e + f = 2$, где v — количество вершин (vertices), e — количество рёбер (edges), f — количество граней (facets).

Тройку чисел (v, e, f) называют f-*вектором* многогранника.

2. Докажите равенства для выпуклого многогранника:

$$2e = 3v_3 + 4v_4 + \ldots = 3f_3 + 4f_4 + \ldots$$

где v_i — количество вершин, в которых сходится i рёбер, f_i — количество i-угольных граней.

3. Докажите, что каждый выпуклый многогранник имеет либо трехгранный угол, либо треугольную грань.

4. Теорема Штейница. Тройка натуральных чисел (v, e, f), для которой $v - e + f = 2$, $v \le 2f - 4, f \le 2v - 4$, является f — вектором некоторого выпуклого многогранника.

(a) Найдите выпуклый многогранник, f — вектор которого есть (i) $(4, 6, 4)$; (ii)$(5, 8, 5)$; (iii) $(6, 10, 6)$.

(b) Докажите, что если существует выпуклый многогранник с f — вектором (v, e, f), имеющий как трехгранный угол, так и треугольную грань, то существуют выпуклые многогранники с f — векторами $(v + 1, e + 3, f + 2)$, $(v + 2, e + 3, f + 1)$ и $(v + 2i + j, e + 3i + 3j, f + i + 2j), i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(c) Докажите теорему Штейница.

5. Пусть на рёбрах выпуклого многогранника расставлены знаки плюс и минус.

(a) Докажите, что число перемен знака при обходе любой грани четно.

Назовем индексом вершины число перемен знака при обходе этой вершины.

(b) Пусть N — сумма индексов всех вершин многогранника. Докажите, что $N \le 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + \ldots$

(c) Докажите, что $N \le 4v - 8$.

(d) Докажите лемму Коши: найдется вершина выпуклого многогранника, индекс которой меньше 4.

Выпуклые функции и неравенство Йенсена

Определение. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* (или *выпуклой вниз*), если для любых трёх чисел $a < b < c$ выполняется неравенство $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

Для функций, *выпуклых вверх*, имеет место противоположный знак неравенства.

1. Докажите, что функция выпукла тогда и только тогда, когда её надграфик является выпуклым множеством.

2. (a) Если функции $f(x), g(x)$ выпуклы, то любая их линейная комбинация $a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$ с положительными коэффициентами a, b также выпукла. Докажите это.

(b) Всегда ли композиция двух выпуклых функций также выпукла?

3. Дана выпуклая функция $f(x)$.

(a) Докажите, для любых x, y имеет место неравенство $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

(b) Докажите, *неравенство Йенсена* для 2 чисел:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

для $\alpha \in [0, 1]$ и любых x, y.

(c) Докажите неравенство Йенсена в общем виде, т.е. что для положительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с суммой 1 и любых $x_1, \ldots, x_n$ имеет место неравенство:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

.

Следствие. Если f — выпуклая функция, то для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет место неравенство $f(\frac{1}{n}\sum\limits_i x_i) \leq \frac{1}{n}\sum\limits_i f(x_i)$. Если функция выпукла вверх, знак неравенства направлен в обратную сторону.

Замечание. Если функция дважды дифференцируема, то она выпукла тогда и только тогда, когда её вторая производная положительна, т.е. когда первая производная монотонно возрастает.

4. Докажите, что $3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$.

5. Докажите неравенство: $n(x_1 + \cdots + x_n) \geq (\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n})^2$

6. Пусть m и n — натуральные числа, $m \geq n$. Докажите, что в любом графе на n вершинах с m рёбрами существует по крайней мере $\frac{m^2}{n}$ "галочек". Галочкой называется тройка вершин и пара ребёр, соединяющих одну из этих вершин с двумя другими.

7. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа с суммой 1. Докажите, что $\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$

Для самостоятельного решения

8. Выведите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом из неравенства Йенсена.

9. Докажите, наконец, неравенство Гёльдера (через Йенсена):

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(Все a_i, b_i — положительные и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

10. Пусть a, b, c – положительные числа, $a + b + c = 1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^{10} + \left(b + \dfrac{1}{b}\right)^{10} + \left(c + \dfrac{1}{c}\right)^{10}$.

Двойное отношение

Определение. Пусть A, B, C, D — упорядоченная четвёрка точек, находящаяся на одной прямой. Их двойным отношением называется величина $\{AB, CD\} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ (все отрезки берутся упорядоченные). Четвёрка точек называется грамонической, если $\{AB, CD\} = -1$.

Если прямая совпадает с осью координат, то двойное отношение будет записываться как $\{AB, CD\} = \frac{C-A}{C-B} : \frac{D-A}{D-B}$.

1. Докажите, что для любых трёх точек A, B, C на прямой (кроме случая, когда C — середина AB) существует ровно одна такая точка D на этой же прямой, что четвёрка (A, B, C, D) — гармоническая.

Замечание. Если C является серединой отрезка AB, то $D = \infty$. Таким образом, двойное отношение имеет смысл задавать на проективной прямой.

2. (a) Пусть (A, B, C, D) — точки на прямой, а точка X лежит вне этой прямой. Запишите в синусах углов условие, что четвёрка (A, B, C, D) гармоническая.

(b) Пусть из точки X выходит четыре прямые, и какая-то прямая, пересекая эти прямые, образует гармоническую четвёрку. Докажите, что любая прямая, пересекающая эти прямые, образует гармоническую четвёрку.

Определение. Пучок прямых с такими свойствами мы будем называть *гармонической четвёркой прямых.*

3. Докажите, что полярное соответствие переводит гармонические четвёрки точек в гармонические четвёрки прямых (и наоборот).

Примечание. И вообще полярное соответствие сохраняет двойные отношения — если только правильно (как?) придумать, что такое двойное отношение четвёрки прямых, пересекающихся в одной точке.

4. Докажите, что инверсия переводит гармонический четырёхугольник или гармоническую четвёрку в гармонический четырёхугольник или в гармоническую четвёрку.

5. (a) Пусть ω — окружность, а D — точка вне этой окружности. Прямая ℓ, проходящая через D, пересекает ω в точках A и B, а поляру D(относительно ω) — в точке C. Докажите, что четвёрка (A, B, C, D) — гармоническая.

(b) *(Построение поляры)* Пусть ω — окружность, а X — точка вне этой окружности. Одна прямая, проходящая через X, пересекает ω в точках A и B, а другая прямая — в точках C и D. Пусть Y — точка пересечения прямых AC и BD. Докажите, что Y лежит на поляре X.

6. (Двойные отношения с Чевой и Менелаем) Дан треугольник ABC. Пусть на сторонах BC, AC и AB соответственно отмечены точки X, Y и Z, а на продолжении стороны BC — точка F. Докажите, что из любых двух условий следует третье:

(1) четвёрка (B, X, C, F) гармоническая;
(2) чевианы AX, BY и CZ пересекаются в одной точке;
(3) точки Y, Z и F лежат на одной прямой.

7. Пусть точки A, C, B и D лежат на прямой (именно в таком порядке), а точка X — вне этой прямой. Докажите, что из любых двух условий следует третье:

(1) Четвёрка (A, B, C, D) гармоническая;
(2) $\angle CXD = 90°$,
(3) XC является биссектрисой $\angle AXB$.

Для самостоятельного решения

8. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Пусть E — точка пересечения AB и CD, F — точка пересечения AD и BC, G и H — точки пересечения прямых AC и BD соответственно с прямой EF. Докажите, что (E, H, F, G) — гармоническая четвёрка.

9. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Пусть P — его точка пересечения диагоналей, E — точка пересечения AB и CD, F — точка пересечения AD и BC, G — точка пересечения прямых BD и EF. Из точки G выпустили луч, параллельный AB. Точки X и Y — точки пересечения этого луча с прямыми CD и EP. Докажите, что EX — медиана в треугольнике EGY.

10. Пусть D, E, F — точки касания вписанной окружности и сторон BC, AC и AB соответственно. Пусть X — такая точка внутри треугольника ABC, что вписанная окружность треугольника XBC касается сторон в точках D, Y и Z.

(a) Докажите, что прямые BC, EF и YZ конкурентны.
(b) Докажите, что четырёхугольник $EFYZ$ вписанный.

11. Из точки O выпущены лучи l_1, l_2 и l_3. На луче l_1 отмечены точки A и B, на l_2 — C и D, на l_3 — E и F (точки на каждом луче в порядке удаления от O). Оказалось, что $\angle AEO = \angle ACO$, $\angle ADO = \angle AFO$ и $\angle BDO = \angle BEO$. Точка N — точка пересечения окружностей, описанных около BFO и $ACEO$ (отличная от O). Докажите, что $AC \cdot EN = CE \cdot AN$.

Неравенство Мюрхеда

Определение. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – набор целых неотрицательных чисел, в котором $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$. Назовем симметризацией одночлена $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ следующий многочлен: $T_\alpha = \frac{1}{n!}(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n} + ... + x_n^{\alpha_1}x_{n-1}^{\alpha_2}...x_1^{\alpha_n})$. Например,

$T_{(2,1,0)}(a,b,c) = (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b)/6$;
$T_{(3,0,0)}(a,b,c) = (a^3 + b^3 + c^3)/3$;
$T_{(1,1,1)}(a,b,c) = abc$.

Определение. Набор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ мажорирует набор $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ если выполнены условия

$$\begin{gathered}
\alpha_1 \geq \beta_1, \\
\alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \geq \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}, \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n.
\end{gathered}$$

Если A мажорирует B мы будем писать $A \succ B$ или $B \prec A$.

1. Нарисуйте все диаграммы Юнга из n кирпичей в порядке убывания и расположите их в порядке мажоризации, где **(a)** $n = 4$; **(b)** $n = 5$.

2. Верно ли, что для любых двух невозрастающих наборов одинаковой длины с одинаковой суммой один из них мажорирует другой?

3. Докажите, что $\alpha \succ \beta$ тогда и только тогда, когда β получается из α путем «сваливания кирпичей» в диаграмме Юнга.

4. Неравенство Мюрхеда. Если набор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ мажорирует набор $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, то $T_\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) \geq T_\beta(x_1, x_2, ..., x_n)$ для всех неотрицательных x_1, x_2, ..., x_n.

5. Выведите из неравенства Мюрхеда неравенство Коши.

6. $a, b, c \geqslant 0$. Тогда $a^3 + b^3 + c^3 + abc \geqslant \frac{1}{7}(a + b + c)^3$.

7. Сравните величины $\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3}$ и $\dfrac{1}{a^3}\sqrt{\dfrac{b}{a}} + \dfrac{1}{b^3}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ при положительных a и b.

8. $a, b, c \geqslant 0$. Тогда $\dfrac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \dfrac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \dfrac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geqslant a + b + c$.

Для самостоятельного решения

9. Выведите неравенство Мюрхеда для рациональных неотрицательных степеней из неравенства для целых неотрицательных степеней.

10. $a, b, c \geqslant 0$, $abc = 1$. Тогда $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c$.

c_0 и l^p

Определение. Пусть есть линейное пространство X. Функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$, только если $x = 0$
2) $\|kx\| = |k|\|x\|$, для любого $k \in \mathbb{R}$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, для любых $x, y \in X$

называется нормой, а само X – нормированным пространством.

Естественным обобщением какого понятия является норма?

Определение. Выберем число $p \in [1, \infty)$. Обозначим l^p множество последовательностей $\{a_n\}$ удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty$.

1. **(a)** Докажите, что l^p – линейное пространство над $\mathbb{R}$. **(b)** Докажите, что l^p – нормированное пространство с нормой $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Определение. Обозначим l^∞ множество всех ограниченных последовательностей.

Определение. Обозначим c_0 множество всех последовательностей с нулевым пределом.

2. **(a)** Проверьте, что l^∞ и c_0 также являются линейными пространствами.

(b) Проверьте, что l^∞ и c_0 также являются нормированными пространствами с нормой $\|x\| = sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.

3. Пусть $1 \leq p < q < \infty$. Докажите, что $l^p \subset l^q \subset c_0 \subset l^\infty$.

4. Придумайте базис в этих пространствах.

Вопросы для раздумий:

1) А существует ли конечный базис в этих пространствах?
2) Далее мы будем задавать линейные функции на векторных пространствах (со значениями в $\mathbb{R}$). Что необходимо определить для задания такой функции?

Определение. $f : X \to \mathbb{R}$ – линейный функционал на X, если $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$.

5. Пусть есть линейный функционал f, определенный на пространстве X. Докажите, что следующие условия равносильны:

(i) f – непрерывен;
(ii) f – непрерывен в нуле;
(iii) f – ограничен ($|f(x)| \leq C\|x\|$).

6. **(a)** Пусть X^* – все непрерывные линейные функционалы, определенные на элементах пространства X. Докажите, что l^{p*} – линейное пространство. **(b)** А что это за линейное пространство? **(c)** Найдите l^{p**}.

7. Найдите c_0^{**}.

Теорема Тверберга или "чуть-чуть подвинем"

1. Даны n точек на плоскости. Докажите, что на границе круга наименьшего радиуса, содержащего эти точки,

(a) есть по крайней мере две точки из множества;

(b) есть либо по крайней мере три точки из множества, либо две точки из множества, лежащие диаметрально противоположно.

Теорема Тверберга. Пусть в $\mathbb{R}^d$ даны $(r-1)(d+1)+1$ точек. Тогда их можно разбить на непересекающиеся подмножества $P_1, P_2, \ldots, P_r$ так, чтобы у выпуклых оболочек этих подмножеств имелась хотя бы одна общая точка.

2. Выведите из утверждения теоремы Тверберга

(a) теорему Радона для $\mathbb{R}^d$; **(b)** теорему о центральной точке для $\mathbb{R}^2$;

(c) теорему о центральной точке для $\mathbb{R}^d$.

3. Докажите теорему Тверберга для $\mathbb{R}^2$: множество P из $3r-2$ точек на плоскости всегда можно разбить на подмножества $P_1, P_2, \ldots, P_r$, для которых выпуклые оболочки имеют общую точку. Докажите следующие утверждения:

(a) Существует какое-то разделение P и какой-то круг B, пересекающий все $conv(P_i)$.

(b) Если есть разбиение P и B из предыдущего пункта, то можно перераспределить точки между множествами P_i так, чтобы каждое содержало не более трёх точек и B всё ещё продолжал пересекать все $conv(P_i)$. (С этого момента будем считать, что все множества из P_i содержат не более трёх точек.)

(c) Если B содержит внутренние точки всех $conv(P_i)$, то радиус B можно уменьшить (не теряя свойства пересечения с выпуклыми оболочками).

(d) Пусть с некоторыми $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ круг B пересекается только по граничным точкам. Если центр B не лежит внутри выпуклой оболочки точек пересечения (касания) с этими множествами, то B можно чуть-чуть подвинуть и уменьшить радиус, не теряя главного свойства.

(e) Пусть с некоторыми $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ круг B пересекается только по граничным точкам. Если центр B лежит внутри выпуклой оболочки точек касания с этими множествами, то среди этих множеств найдётся хотя бы одно, состоящее из трёх (или более) точек. (Есть пара особых случаев, когда это не так, тогда перераспределите точки P так, чтобы круг можно было уменьшить.)

(f) Если центр B лежит внутри выпуклой оболочки точек касания, как в предыдущем пункте, то он лежит внутри выпуклой оболочки каких-то трёх из точек касания. Тогда можно перераспределить точки множеств $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ так, чтобы хотя бы одна из выпуклых оболочек множеств пересекала B по внутренним точкам.

(g) Если радиус B положителен, то его можно уменьшить и при этом сохранить пересечение со всеми выпуклыми оболочками P_i. Тогда существует такое разбиение P, что B — это одна точка.

Для самостоятельного решения

4. Теорема Киршбергера для $\mathbb{R}^2$. Пусть $P_1, \ldots, P_r$ — множества точек на плоскости, для которых пересечение их выпуклых оболочек непусто. Тогда существуют подмножества $P_1' \subset P_1, \ldots, P_r' \subset P_r$ с суммарным количеством точек равным $3r-2$, такие что все $conv(P_i')$ имеют хотя бы одну общую точку.

5. Обобщите доказательство теоремы Тверберга для $\mathbb{R}^d$.

6. Цветная теорема Каратеодори. Пусть A_1 — множество синих, A_2 — множество красных, а A_3 – множество зелёных точек на плоскости, у которых выпуклые оболочки имеют хотя бы одну общую точку X. Докажите, что тогда X принадлежит какому-то треугольнику с разноцветными вершинами.

Заключительная олимпиада

1. Функции f и g определены на множестве всех целых чисел из промежутка $[-100; 100]$ и принимают целые значения. Докажите, что для некоторого целого k число решений уравнения $f(x) - g(y) = k$ нечётно.

2. Равносторонний треугольник со стороной 20 разбит тремя семействами параллельных прямых на 400 равносторонних треугольничков со стороной 1. Какое наибольшее количество этих треугольничков можно пересечь (во внутренних точках) одной прямой?

3. Дано натуральное число. Из него вычитается самое большое простое число, не превосходящее его. С результатом снова производится такая же операция и т.д. Докажите, что существует число, из которого ровно через 1000 шагов впервые получится ноль.

4. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P под прямым углом. Точка Q на отрезке PC выбрана так, что $AP = QC$. Докажите, что периметр треугольника BQD не меньше чем $2AC$.

---

5. Вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\,.$$
Докажите, что найдутся наборы вещественных чисел $y_1, \ldots, y_n$ и $z_1, \ldots, z_n$, такие что
$$|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n| \leqslant 1, \quad \max\bigl(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|\bigr) \leqslant 1$$
и $x_i = \frac{y_i + z_i}{2}$ при всех i.

6. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина диагонали AC, причем $\angle MCB = \angle CMD = \angle MBA = \angle MBC - \angle MDC$. Докажите, что $AD = DC + AB$.

Пешнин Александр Михайлович
Солынин Андрей Александрович
Шаповалова Валентина Александровна

Материалы занятий. 10 класс. Кировская ЛМШ 2017.

Редактор *В.А. Шаповалова*
TEXнический редактор *В.А. Шаповалова*
Корректор *А.А. Солынин*

Сдано в набор 23.07.17. Подписано к печати 24.07.14. Формат А5
Заказ $\sin(\ln(e^{\pi}))$. Тираж 24
Издательство «Ильдар»