

## Диаграммы Юнга

— И начал я их считать — слева направо и сверху вниз. Но сбился со счёта. Тогда я решил пересчитать их снизу вверх и справа налево.

— И тоже сбился?

— Да. А как ты догадался?

*Определение.* Диаграмма Юнга — это некоторый набор клеток, выровненных по нижней границе, в котором длины столбцов образуют невозрастающую последовательность.

Иными словами диаграмма Юнга — это несколько столбцов, идущих слева направо, причём каждый следующий столбец не выше, чем предыдущий.

Вот пример диаграммы Юнга формы  $\{5, 3, 3, 1\}$ .

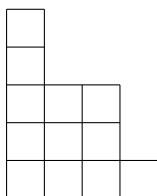


Диаграмма Юнга задаёт некоторое разбиение натурального числа  $n$ , где  $n$  — это количество клеток в диаграмме, на слагаемые. При этом разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

1. (а) Докажите, что количество разбиений числа  $n$  в сумму не более чем  $k$  слагаемых, каждое из которых не превосходит  $\ell$ , равно количеству разбиений числа  $n$  в сумму не более чем  $\ell$  слагаемых, каждое из которых не превосходит  $k$ .

(б) Докажите, что количество разбиений числа  $n$  в сумму не более чем  $k$  слагаемых, каждое из которых не превосходит  $\ell$ , равно количеству разбиений числа  $k\ell - n$  в сумму не более чем  $k$  слагаемых, каждое из которых не превосходит  $\ell$ .

2. Петя написал количество разбиений числа  $n$  в сумму не более чем  $k$  слагаемых, каждое из которых не превосходит  $\ell$ , Вася написал количество разбиений числа  $n$  в сумму не более чем  $k$  слагаемых, каждое из которых не превосходит  $\ell - 1$ , а Маша написала количество разбиений числа  $n - \ell$  в сумму не более чем  $k - 1$  слагаемых, каждое из которых не превосходит  $\ell$ . Докажите, что сумма Машиного и Васиного чисел равно числу Пети.

3. На доске написано несколько натуральных чисел:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Пишем на второй доске следующие числа:  $b_0$  — сколько всего чисел на первой доске;  $b_1$  — сколько там чисел, больших единицы;  $b_2$  — сколько чисел, больших двойки, и т.д., пока получаются положительные числа. На этом заканчиваем — нули не пишем. На третьей доске пишем числа  $c_0, c_1, c_2, \dots$ , построенные по числам

второй доски по тому же правилу, по которому числа  $b_0, b_1, b_2, \dots$  строились по числам первой доски. Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают.

### Для самостоятельного решения

4. Сколько существует способов выбрать натуральное число и разбить его не более чем на  $k$  слагаемых, каждое из которых не превосходит  $\ell$ ?

5. Диаграмму Юнга покрасили в шахматном порядке. Оказалось, что белых и чёрных клеток в ней поровну. Докажите, что её можно разрезать на домино.

6. Крюком называется часть диаграммы Юнга, состоящая из какой-либо клетки и всех клеток, расположенных либо правее, либо выше ее. Дана диаграмма Юнга из  $n$  клеток. Пусть  $s$  — количество крюков, состоящих ровно из  $k$  клеток. Докажите, что (a)  $s^2 \leq 2n$ , (b)  $s(k + s) \leq 2n$ .

7. (a) Докажите, что количество решений уравнения  $1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$ , в которых первые несколько чисел (может быть, одно)  $a_i$  натуральны, а остальные равны нулю, совпадает с количеством способов разбить число  $n$  в сумму попарно различных слагаемых.

(b) Докажите, что это количество совпадает с количеством решений уравнения  $1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = n$ , в которых все числа  $a_i$  равны 0 или 1.