

Непрерывность

— А если червяка разорвать на две половинки, они будут дружить?
— С тобой — точно нет.

Аксиома полноты множества вещественных чисел. Любое непустое ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет точную верхнюю грань.

Пределом функции $f(x)$ *в точке* a называется такое число b , для которого выполнено условие: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Функция называется *непрерывной* в точке a , если ее предел в точке a равен $f(a)$. Функция называется непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Теорема Больцано-Коши. Если $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, то $f(x)$ имеет корень на отрезке $[a, b]$.

Упражнения

1. Чему равняется $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (a \cos \alpha + b \sin \alpha)$ для фиксированных a, b ? Докажите, используя определение предела.

2. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$. Докажите, что она ограничена на $[a, b]$.

3. Пусть $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Запишите определение предела функции в точке (a, b) .

Задачи

1. Полоса — это множество точек, находящиеся строго между двумя параллельными прямыми. Докажите, что для любой точки полосы можно нарисовать круг с центром в этой точке такой, что все точки круга попадут внутрь полосы.

2. Докажите, что выпуклый ограниченный многоугольник можно разделить прямой данного направления на две части равной площади и что такая прямая единственна.

3. (а) **Теорема о неподвижной точке.** Если непрерывная функция $f(x)$ отображает отрезок в себя, то существует неподвижная точка, то есть такая точка x_0 , что $f(x_0) = x_0$.

(б) Непрерывная функция f такова, что уравнение $f(x) = x$ не имеет действительных решений. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ тоже не имеет действительных решений.

4. Докажите, что на Экваторе найдутся две противоположные точки с одинаковой температурой.

5. Уравнение $x^3 + ax + 1 = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что найдётся такое $\varepsilon > 0$, что для всякого $b \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ уравнение $x^3 + bx + 1 = 0$ имеет три действительных корня.

6. (a) Докажите, что вокруг любой выпуклой ограниченной фигуры можно описать квадрат.

(b) Докажите, что в любую центрально-симметричную ограниченную выпуклую фигуру можно вписать квадрат.

7. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, (a, b) — точка на координатной плоскости. Докажите, что среди всех точек графика функции f найдётся такая, расстояние от которой до точки (a, b) минимально (то есть не больше, чем расстояние от любой другой точки графика f до (a, b)).

Для самостоятельного решения

8. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

9. Верно ли, что каждая внутренняя точка любого выпуклого многогранника принадлежит какому-то отрезку, концы которого находятся на рёбрах этого многогранника?

10. Пусть S — единичный квадрат на плоскости, а $f : S \rightarrow S$ — непрерывная функция. Докажите, что существует $x_0 \in S$ такое, что $f(x_0) = x_0$.