

Теорема о центральной точке

Определение. Пусть дано множество M на плоскости из n точек. Точка X называется *центральной точкой* для этого множества, если любая прямая, проходящая через X , делит плоскость на две части, каждая из которых (вместе с проведённой прямой) содержит не менее чем $\frac{n}{3}$ точек из M .

1. Найдите хотя бы одну центральную точку для четырёх точек на плоскости, образующий (а) выпуклый; (б) невыпуклый четырёхугольник.

Теорема о центральной точке. Для любого множества на плоскости найдётся центральная точка.

Научимся её строить. Пусть M — множество из n точек на плоскости. Рассмотрим множество C всех выпуклых фигур, таких что они содержат более $\frac{2n}{3}$ точек из M .

2. Докажите, что если все фигуры из C имеют общую точку, то она является центральной.

3. (а) Докажите, что любые две фигуры из C пересекаются по непустой выпуклой фигуре.

(б) Докажите, что существует такая точка X в пересечении двух фигур из C , что любая другая фигура из C , не содержащая X , содержит точки, лежащие выше X .

(с) Докажите, что все фигуры из C имеют общую точку.

Замечание. Таким образом, мы доказали теорему о центральной точке для плоскости.

4. Приведите пример, показывающий неулучшаемость оценки $1/3$ в теореме о центральной точке.

5. Докажите, что для любого множества M из n точек на плоскости существуют такие точки плоскости P и Q , что все выпуклые фигуры, содержащие более $\frac{4n}{7}$ точек из M , также содержат P или Q .

6. Придумайте меньшую оценку, чем $\frac{4n}{7}$ в предыдущей задаче, но для трёх точек.

7. На плоскости расположено 36 точек. Докажите, что существует не менее 660 треугольников (среди которых могут быть вырожденные) с вершинами в данных точках, содержащих некоторую центральную точку X .

Для самостоятельного решения

8. Докажите, что внутри выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

9. На плоскости есть множество M из $3n$ точек. Пусть X — центральная точка этого множества. Докажите, что точки M можно разбить на тройки так, чтобы X попала в каждый треугольник, образованный тройкой точек.

10. *Теорема о центральной точке для \mathbb{R}^d .* Пусть в \mathbb{R}^d есть множество M из n точек. Тогда существует такая точка X , что любое полупространство, содержащее X , содержит не менее $\frac{n}{d+1}$ точек из M .

11. Докажите, что существует пример из n точек на плоскости, таких что нет трёх точек, которые в совокупности "прокалывают" все выпуклые фигуры, содержащие не менее $\frac{5n}{11}$ из данных точек.