Линейное программирование

> Налево пойдёшь — коня потеряешь. Значит, если пойдёшь направо — будет у тебя целых два коня.

1. (a) Хоббит обнаружил в логове дракона серебро, изумруды и сундук, в котором их можно унести. В сундук помещается 100 фунтов серебра или 50 фунтов изумрудов (а можно заполнять сундук частично серебром, частично — изумрудами). Серебро можно будет продать по 20 талеров за фунт, а изумруды — по 30 талеров за фунт. Однако его пони может увезти только 80 фунтов груза. Какое наибольшее количество талеров он сможет получить за сокровища, увезённые за один раз?

(b) Когда хоббит вернулся из похода, оказалось, что изумруды подорожали и теперь стоят 50 талеров за фунт (серебро стоит по-прежнему 20 талеров за фунт). А какова должна быть стратегия хоббита в этом случае?

2. (Задача о диете) Толстушка Кэт решила питаться правильно. Подружка ей посоветовала употреблять только продукты A и B (названия зашифрованы, чтобы не создавать рекламу). Дневное питание должно давать не менее 20 единиц белка и не менее 30 килокалорий. В одном килограмме продукта A содержится одна единица белка и одна килокалория, а в килограмме B — одна единица белка и 2 килокалории. Цена килограмма A — 80 у.е., цена килограмма B — 100 у.е. Требуется потратить минимальную сумму и выжить, питаясь этими продуктами. Как?

Вопрос на (не)понимание. В этих двух задачах фигурируют одни и те же числа и получается один и тот же ответ. Это мистическое совпадение или проявление некоторой естественной двойственности?

Определение. Прямой задачей линейного программирования называется задача

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n \to max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots x_n \ge 0 \end{cases}$$

Точка $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$, удовлетворяющая всем неравенствам, называется допустимым планом, а допустимый план, реализующий максимум функции $f(x)$, называется оптимальным планом.

3. Докажите, что множество допустимых планов выпукло.

4. Приведите пример задачи, в которой:

(a) допустимый план не существует;

(b) допустимый план существует, а оптимального плана нет;

(c) оптимальный план не единственен.

Определение. Точка называется крайней для выпуклого множества, если она не является серединой никакого отрезка, лежащего в этом выпуклом множестве. В случае многогранников это просто вершины.

5. (a) Пусть X и Y — допустимые планы, и оптимальный план лежит на отрезке XY. Докажите, что один из планов X или Y также является оптимальным.

(b) Докажите, что один из оптимальных планов (если таковые есть) достигается в крайней точке (если таковые есть) множества допустимых планов.

6. Пусть X — оптимальный план. Некоторые из неравенств $a_{i1}x_1 + \dots a_{in}x_n \leq b_i$ при этом обратились в равенство. Докажите, что остальные можно вообще исключить, и X будет оптимальным планом новой задачи.

Определение. Двойственная задача линейного программирования строится так:

$$g(y_1, y_2, \dots y_k) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_ky_k \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots a_{k1}y_k \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{k2}y_k \geq c_2 \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{kn}y_k \geq c_n \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots y_n \geq 0 \end{cases}$$

7. (a) Пусть X — допустимый план прямой задачи, а Y — допустимый план двойственной задачи. Докажите, что $f(X) \leq g(Y)$.

(b) Пусть одно из неравенств исходной задачи можно исключить так, чтобы оптимальный план остался прежним. Докажите, что в двойственной задаче можно приравнять к нулю одну из переменных так, чтобы оптимальный план в этой задаче остался прежним.

(c) Если $f(x)$ неограничено, то множество допустимых планов двойственной задачи пусто.

(d) (Теорема двойственности) Пусть X^* — оптимальный план прямой задачи, а Y^* — оптимальный план двойственной задачи. Докажите, что $f(X^*) = g(Y^*)$.

Примечание. На самом деле верно большее. Если оптимальный план X^* существует, то существует и оптимальный план Y^*.

Для самостоятельного решения

8. (Транспортная задача) Поставщики товара - оптовые коммерческие предприятия $B_1, B_2, \dots, B_k$ имеют запасы товаров соответственно в количестве $b_1, b_2, \dots, b_k$ единиц. Розничные торговые предприятия $C_1, C_2, \dots, C_n$ подали заявки на закупку товаров в объемах соответственно: $c_1, c_2, \dots, c_n$ единиц товара. Стоимость перевозки единицы товара с i-го склада j-му предприятию составляет a_{ij}. Надо найти такой план перевозки груза от поставщиков к потребителям, чтобы совокупные затраты на перевозку были минимальными.

Пусть такой оптимальный план выражается в виде таблицы $(x_{ij})_{i=1\dots k, j=1\dots n}$. Докажите, что все x_{ij}, кроме, может быть, $k+n-1$ числа, равны нулю.

9. Петя зажимает в одном кулаке рублёвую монету, а в другом — двухрублёвую. Вероятность p, с которой Петя зажимает в левом кулаке рубль, он может установить по своему усмотрению. Вася указывает на левую или правую руку Пети и получает монету в соответствующей руке. Вася выбирает левую руку с вероятностью r (r он может выбрать как захочет). За одну игру с Васи берётся плата. Какой должна быть эта плата, чтобы игра оказалась честной?