Внутренний матбой

1. В стране между некоторыми городами осуществляются беспосадочные перелеты (рейсы односторонние). Руководство авиакомпании хочет установить цены на полёты так, чтобы если от одного города до другого можно было пролететь (с пересадками) несколькими способами, то все способы обходились бы путешественнику в одинаковую сумму. Всегда ли получится так сделать, если цена перелётов может быть любой ненулевой (в том числе отрицательной)?

2. Треугольник $\triangle ABC$, у которого $AB = AC$, вписан в окружность ω. Пусть P – переменная точка на дуге ω BC, не содержащей точку A, точки I_B и I_C – центры вписанных окружностей треугольников $\triangle ABP$ и $\triangle ACP$. Докажите, что описанные окружности треугольников $\triangle PI_BI_C$ проходят через фиксированную точку.

3. Найдите наименьшее действительное r такое, что неравенство

$$\sqrt{1^2+1}+\sqrt{2^2+1}+\cdots+\sqrt{n^2+1} \leq \frac{1}{2}n(n+r)$$

выполняется для всех натуральных n.

4. Алина и Аня по очереди красят стороны n-угольника. Алина может своим ходом покрасить сторону, у которой 0 или 2 окрашенных соседних стороны. Аня может своим ходом красить сторону, у которой 1 окрашенная соседняя сторона. ПТКНМСХ. Кто выигрывает при правильной игре?

5. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит четное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, между которыми сидит нечетное число человек, общего знакомого нет?

6. Внутри выпуклого пятиугольника выбраны две точки. Докажите, что можно выбрать четырехугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что внутрь его попадут обе выбранные точки.

7. Докажите, что для каждого натурального $a > 1$ существует простое p такое, что число $1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$ – составное.

8. На стороне AB треугольника ABC, в котором $BC = AC + AB/2$, взята точка P так, что $AP = 3PB$. Докажите, что $\angle PAC = 2\angle CPA$.

9. Клетчатый многоугольник, клетки которого раскрашены в два цвета, назовем хорошим, если в нем ровно четверть клеток черная. Верно ли, что любой хороший квадрат 12×12 можно разрезать на 9 хороших многоугольников?

10. Найдите все такие функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которых

$$(n-1)^2 < f(n) \cdot f(f(n)) < n^2 + n$$

для всех натуральных n.