XXXIII Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2017 г.

35. Заключительная олимпиада. 23 июля

1. Функции f и g определены на множестве всех целых чисел из промежутка $[-100; 100]$ и принимают целые значения. Докажите, что для некоторого целого k число решений уравнения $f(x) - g(y) = k$ нечётно.

2. Равносторонний треугольник со стороной 20 разбит тремя семействами параллельных прямых на 400 равносторонних треугольничков со стороной 1. Какое наибольшее количество этих треугольничков можно пересечь (во внутренних точках) одной прямой?

3. Дано натуральное число. Из него вычитается самое большое простое число, не превосходящее его. С результатом снова производится такая же операция и т.д. Докажите, что существует число, из которого ровно через 1000 шагов впервые получится ноль.

4. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P под прямым углом. Точка Q на отрезке PC выбрана так, что $AP = QC$. Докажите, что периметр треугольника BQD не меньше чем $2AC$.

---

5. Вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\,.$$
Докажите, что найдутся наборы вещественных чисел $y_1, \ldots, y_n$ и $z_1, \ldots, z_n$, такие что
$$|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n| \leqslant 1, \quad \max\bigl(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|\bigr) \leqslant 1$$
и $x_i = \frac{y_i + z_i}{2}$ при всех i.

6. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина диагонали AC, причем $\angle MCB = \angle CMD = \angle MBA = \angle MBC - \angle MDC$. Докажите, что $AD = DC + AB$.

XXXIII Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2017 г.

35. Заключительная олимпиада. 23 июля

1. Функции f и g определены на множестве всех целых чисел из промежутка $[-100; 100]$ и принимают целые значения. Докажите, что для некоторого целого k число решений уравнения $f(x) - g(y) = k$ нечётно.

2. Равносторонний треугольник со стороной 20 разбит тремя семействами параллельных прямых на 400 равносторонних треугольничков со стороной 1. Какое наибольшее количество этих треугольничков можно пересечь (во внутренних точках) одной прямой?

3. Дано натуральное число. Из него вычитается самое большое простое число, не превосходящее его. С результатом снова производится такая же операция и т.д. Докажите, что существует число, из которого ровно через 1000 шагов впервые получится ноль.

4. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P под прямым углом. Точка Q на отрезке PC выбрана так, что $AP = QC$. Докажите, что периметр треугольника BQD не меньше чем $2AC$.

---

5. Вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\,.$$
Докажите, что найдутся наборы вещественных чисел $y_1, \ldots, y_n$ и $z_1, \ldots, z_n$, такие что
$$|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n| \leqslant 1, \quad \max\bigl(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|\bigr) \leqslant 1$$
и $x_i = \frac{y_i + z_i}{2}$ при всех i.

6. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина диагонали AC, причем $\angle MCB = \angle CMD = \angle MBA = \angle MBC - \angle MDC$. Докажите, что $AD = DC + AB$.