Поле из двух элементов

Напоминание. Вспомним, что множество $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ с естественными операциями сложения по модулю 2 и умножения является полем. А значит, над этим полем можно рассматривать векторные пространства, решать СЛУ и т.д.

Определение. Гиперкубом размерности n называется множество последовательностей длины n из 0 и 1. Таким образом, гиперкуб образует n-мерное пространство над $\mathbb{Z}_2$ (с каким базисом?).

А ещё гиперкуб можно рассматривать как граф: вершины гиперкуба соединим ребром, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одной позиции. Также гиперкуб является гиперграфом. Это означает, что можно рассматривать его k-мерные грани. Каждая k-мерная грань является множеством последовательностей, в которых $n - k$ элементов фиксированы, а остальные k могут меняться. Таким образом, каждое ребро гиперкуба является одномерной гранью.

1. Выберем какую-нибудь вершину гиперкуба и запишем в строчку количество вершин, удалённых от неё на $0, 1, 2, \ldots$ рёбер. Докажите, что получится n-я строчка треугольника Паскаля.

2. Имеется n лампочек, изначально они выключены. За ход можно изменить состояние любой лампочки. Докажите, что за 2^n ходов можно получить все возможные узоры (каждый по разу), и последним ходом снова выключить все лампочки.

3. На табло есть n лампочек и несколько кнопок. Каждая кнопка соединена с некоторыми лампочками (одна лампочка может быть присоединена к нескольким кнопкам). Нажатие на кнопку меняет состояние всех присоединённых к ней лампочек.

(a) Докажите, что количество узоров, которые можно получить нажатием кнопок есть степень двойки.

(b) Докажите, что если лампочек меньше, чем кнопок, то есть кнопка, которую можно сломать так, что никто-никто об этом не пожалеет.

(c) Пусть кнопка входит в такой набор кнопок, что каждая лампочка подсоединена к чётному количеству кнопок этого набора. Докажите, что тогда эту кнопку можно не использовать для получения всевозможных узоров.

4. Есть таблица 5×5 лампочек. За ход можно изменить состояние всех лампочек в любом квадрате 2×2 или 3×3. Изначально лампочки выключены. Верно ли, что можно получить любой узор?

5. К каждой вершине графа прикручена лампочка. Изначально все лампочки выключены. За один раз можно выбрать любую вершину графа и поменять все состояния лампочек в ней самой и во всех её соседях на противоположные. Выражение «включить граф» означает включить все лампочки.

(a) Аня умеет включать граф за x операций, а Алина — за y. Докажите, что $|x - y|$ чётно.

(b) Докажите, что граф вообще можно включить.

6. У Андрея Александровича в группе 9 детей, а в серии 10 задач. В протоколе расставлены плюсы за решённые задачи.

(a) Докажите, что Андрей Александрович сможет объявить некоторые задачи ключевыми так, чтобы каждый ученик решил чётное количество ключевых задач.

(b) Докажите, что Андрей Александрович сможет приписать каждой задаче свой вес (целое число) так, что у каждого ученика сумма весов всех решённых им задач равнялась нулю.