Изогональное сопряжение

1. Пусть P — точка внутри треугольника. Проведём чевианы AP, BP и CP (они должны пересекаться в одной точке). Отразим каждую из них от соответствующей биссектрисы. Докажите, что получившиеся прямые пересекаются в одной точке (назовём её Q).

Определение. Такие точки P и Q называются *изогонально сопряжёнными*.

Заметим, что точки P и Q могут быть и вне треугольника, предыдущая задача верна и для такого случая (с оговоркой, что отражённые прямые могут вовсе не пересекаться, а быть параллельными).

2. Пусть точка P лежит на прямой AB и не совпадает с вершинами A и B. Найдите изогонально сопряжённую ей точку.

Определение. Дан треугольник ABC, и пусть P — точка на плоскости. Пусть A_P, B_P и C_P — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC, AC и AB соответственно. Треугольник $A_PB_PC_P$ (если эти точки образуют треугольник) называется *педальным треугольником* точки P, а если они лежат на одной прямой, то эта прямая называется *прямой Симсона*[1].

3. Пусть точки P и Q изогонально сопряжены в треугольнике ABC. Пусть $A_PB_PC_P$ — педальный треугольник точки P, и пусть $A_QB_QC_Q$ — педальный треугольник точки Q.

(a) Докажите, что треугольники PA_PB_P и QB_QA_Q подобны.

(b) Докажите, что четырёхугольник $A_PB_PB_QA_Q$ вписанный.

(c) Где находится центр окружности, описанной около $A_PB_PB_QA_Q$?

(d) Докажите, что все шесть точек A_P, A_Q, B_P, B_Q, C_P и C_Q лежат на одной окружности.

(e) Докажите, что верно и обратное: если педальные треугольники двух точек имеют общую описанную окружность, то эти точки изогонально сопряжены.

(f) Докажите, что $PA_P \cdot QA_Q = PB_P \cdot QB_Q = PC_P \cdot QC_Q$. Верно и обратное: если выполняется равенство $PA_P \cdot QA_Q = PB_P \cdot QB_Q = PC_P \cdot QC_Q$, то точки P и Q изогонально сопряжены.

4. *(Окружность девяти точек)* **(a)** Докажите, что ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены.

(b) Докажите, что основания высот и середины сторон треугольника лежат на одной окружности.

[1]Здесь мы сталкиваемся с очередным проявлением вселенской несправедливости — Роберт Симсон был выдающимся геометром своего времени, но в его работах никакого упоминания об этой прямой нет. Она была открыта позже Вильямом Уоллесом.

Для самостоятельного решения

5. (a) Рассмотрим треугольник ABC и точку P на плоскости, не совпадающую с вершинами треугольника. Докажите, что отражения прямых AP, BP и CP от соответствующих биссектрис параллельны (т.е. изогональное сопряжение не определено в точке P) тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

(b) Докажите, что педальный треугольник точки P вырождается тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности.

Примечание. Мы увидели, что совсем не определено изогональное сопряжение для вершин треугольника, а для точек на описанной окружности оно вырождается. Будем говорить, что точки, изогонально сопряжённые точкам описанной окружности, являются *бесконечно удалёнными точками.* Чуть позже у нас будет более строгое определение бесконечно удалённых точек.

6. (a) Дан треугольник ABC. Точка I является центром вписанной окружности, точка I_A — центром вневписанной окружности (лежащей на внутренней биссектрисе угла A). Точка K — середина II_A. Докажите, что у точки K изогонально сопряжённая точка является бесконечно удалённой.

(b) *(Лемма о трезубце)* Докажите, что точка K равноудалена от точек B, C, I и I_A.

7. *(Ещё одна конструкция изогонального сопряжения)* Пусть P_A, P_B и P_C — отражения точки P от сторон треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности $P_AP_BP_C$ изогонально сопряжён P.