Системы линейных уравнений

1. Решите системы уравнений:

(a) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 4x - 3y - z = -1 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 4x - 3y - z = -4 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + ay + 8z = 2 \\ ax + 8y - 16z = 3 \end{cases}$.

Определение. Системой линейных уравнений (СЛУ) будем называть систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Коэффициенты a_{ij} могут быть рациональными, вещественными или комплексными. Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то такая система называется однородной (ОСЛУ).

2. *Вопросы на понимание:*

(a) Может ли быть у СЛУ 0 решений? Одно решение? Два решения? Бесконечно много решений?

(b) Пусть $n > m$. Обязательно ли у СЛУ будет бесконечно много решений?

(c) Пусть $m > n$. Верно ли, что у СЛУ нет решений?

(d) Может ли у ОСЛУ не быть решений?

(e) Всегда ли можно выразить одну переменную через остальные и подставить полученное в остальные уравнения?

3. *Альтернатива Фредгольма.* Для любой системы n линейных уравнений с n неизвестными имеет место альтернатива: либо при любой правой части решение системы существует и единственно (система невырожденная), либо существует ненулевое решение ОСЛУ.

Примечание. Решение существует и единственно тогда и только тогда, когда у соответствующей ОСЛУ (т.е. системы с теми же левыми частями и нулевыми правыми) есть ровно одно решение – нулевое.

4. *(Следствия.)*

(a) Если в ОСЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то у нее есть бесконечно много ненулевых решений.

(b) Если решение ОСЛУ единственно, то и при любой правой части решение единственно (система невырождена).

(c) Все вышеизложенные факты верны над любым полем. Например, над полем из p элементов. (На самом деле не совсем — утверждения про бесконечное число решений придётся переделать. Как?)

(d) Если СЛУ с рациональными коэффициентами и рациональной правой частью имеет ненулевое решение в действительных числах, то она имеет ненулевое решение и в рациональных числах.

5. *Линейность решений СЛУ.*

(a) Пусть $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ и $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — два решения СЛУ. Докажите, что их разность $(c_1 - d_1, c_2 - d_2, \ldots, c_n - d_n)$ — решение соответствующей ОСЛУ.

(b) Пусть $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — решение СЛУ, а $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — решение соответствующей ОСЛУ. Докажите, что их сумма $(c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n)$ — тоже решение СЛУ.

6. Докажите, что если у СЛУ есть только рациональные решения, то решение единственно.

7. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково.

8. На квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ отмечено несколько различных точек. При этом каждая отмеченная точка расположена либо ровно посередине между двумя другими отмеченными точками, либо ровно посередине между отмеченной точкой и вершиной квадрата. Может ли какая-то отмеченная точка иметь иррациональные координаты?

Для самостоятельного решения

9. Есть 101 корова. Если убрать любую буренку, то оставшихся можно разделить на два равных по весу и численности стада. Докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса: a) целые; b) рациональные; c) действительные.