Полярное соответствие

Определение. Рассматриваем окружность ω с центром в точке O и радиусом R. Возьмем произвольную точку $A \neq O$. Пусть A_1 — точка, инверсная A относительно окружности ω. Построим через A_1 прямую a, перпендикулярную OA. Эта прямая называется *полярой* точки A. Точка A, в свою очередь, называется *полюсом* прямой a.

Примечание. В этой теме, если не оговорено особое, точки будут обозначаться большими латинскими буквами, а их поляры — теми же строчными латинскими буквами.

Вопросы на понимание.

1. Если B – произвольная точка на поляре, то какие значения может принимать $\angle AOB$?
2. Можно ли по имеющейся поляре однозначно восстановить полюс?
3. Может ли поляра проходить через полюс? (По-научному это звучит так: могут ли поляра и полюс быть инцидентны)?
4. Как располагается поляра, если полюс расположен вне окружности?

1. (a) Пусть B — точка на поляре A, и пусть AB_1 — перпендикуляр на прямую OB. Докажите, что B и B_1 инверсны, т.е. $OB \cdot OB_1 = R^2$.

(b) Докажите обратное: пусть $B \neq O$ — точка, и пусть AB_1 — перпендикуляр на прямую OB. Оказалось, что B и B_1 инверсны. Докажите, что $B \in a$.

(c) Докажите ещё одно обращение первого пункта: пусть B — точка на поляре A, и пусть B_1 — инверсная ей точка. Докажите, что $AB_1 \perp OB$.

2. *(Взаимность.)* Докажите, что если точка A лежит на прямой (поляре) b, то точка B лежит на прямой (поляре) a.

Следствие. Поляры всех точек прямой проходят через полюс этой прямой.

Многие задачи и теоремы из геометрии имеют двойственные в смысле полярного соответствия. Для этого нужно сделать следующую контекстную замену.

Таблица двойственности

Точка	Прямая
Полюс	Поляра
Лежит на	Проходит через
Конкурентны	Коллинеарны
Трехвершинник (треугольник)	Трехсторонник (треугольник)
Четырехвершинник	Четырехсторонник
Касательная	Точка касания
Множество точек	Оболочка

Четырехвершинннником будем называть полный четырехугольник, т.е. 4 точки и 6 прямых. *Четырехсторонником* — фигуру из 4 прямых и 6 точек их попарных пересечений.

Еще контрольные вопросы по таблице двойственности

1. Во что перейдут три точки, лежащие на одной прямой?
2. Во что перейдет множество точек, образующих отрезок?
3. Во что перейдет множество точек, образующих окружность с центром O?

3. Пусть A лежит вне окружности. Проведём диаметр $CD \perp OA$. Отметим P на пересечении AC и окружности. Отметим B на пересечении PD и OA. Докажите, что прямая, проведённая через B перпендикулярно к OA, будет полярой A.

4. (a) Докажите, что полюс секущей AB (не диаметра) является точкой пересечения касательных в точках A и B.

(b) Докажите, что поляра внешней точки — это прямая, соединяющая точки касания двух касательных, проходящих через эту точку.

5. Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к каждой его вершине пересекают продолжения противоположных сторон в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

6. Как связаны утверждение "медианы треугольника пересекаются в одной точке"и "Точки пересечения биссектрис внешних углов треугольника с противоположными сторонами лежат на одной прямой"?

7. Дана окружность ω с центром O и точка $A \neq O$. Докажите, что поляра A является радикальной осью окружности ω и окружности, построенной на OA как на диаметре.

8. Рассмотрим две касательные a и b к окружности S. AB — отрезок, высекаемый ими на касательной c. Докажите, что $\angle AOB$ не зависит от положения касательной c.

9. Теорема Сильвестра. На плоскости дано конечное число точек, причем такое, что любая прямая, проходящая через две из данных точек, содержит еще одну данную точку. Тогда все данные точки лежат на одной прямой.

10. Пусть l — произвольная касательная к вписанной окружности S треугольника ABC. M, N и P — точки пересечения l с сторонами треугольника. Восставим из центра I вписанной окружности S перпендикуляры к прямым IM, IN и IP. Пусть M_1, N_1 и P_1 – точки пересечения этих перпендикуляров с соответствующими сторонами треугольника. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой, касающейся вписанной окружности треугольника.