Математическое ожидание

Десять минут на остановке под проливным дождём — и ожидание автобуса превращается в мат.ожидание.

Определение. Пусть ξ — случайная величина, принимающая значение k_i с вероятностью p_i. Её математическим ожиданием называется число $M\xi = \sum_i k_i p_i$. Иначе говоря, это центр масс системы точек на прямой, если в точке k_i находится масса p_i.

1. Пусть $\xi_1 \leq \xi_2$. (Кстати, а что это значит?) Докажите, что $M\xi_1 \leq M\xi_2$.

2. Докажите, что $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$.

3. Пусть ξ_1 и ξ_2 независимы. **(a)** Докажите, что $M(\xi_1\xi_2) = M(\xi_1)M(\xi_2)$. **(b)** Приведите пример, когда случайные величины зависимы, и это свойство не выполняется.

4. Найдите мат.ожидание случайной величины с

(a) биномиальным распределением,

(b) геометрическим распределением,

(c) распределением Пуассона.

Для самостоятельного решения

5. Стандартная рулетка имеет 38 секторов. Можно поставить некоторую сумму на какой-то сектор. Если выпадет этот сектор, то поставленная сумма сохраняется, а игроку выплачиваетс я премия в размере 35-кратной ставки. Если сектор не выпадает, то ставка переходит к казино.

(a) Пусть ставка всегда равна одному доллару, а игра однократная. Случайная величина является выигрышем игрока в этой игре (т.е. если ставка сгорает, то выигрыш игрока составляет минус один доллар). Найдите её мат.ожидание.

(b) Билл решил отучить Джека от рулетки. Он предлагает ему пари на 20 долларов. Условия пари следующие: Джек 35 раз играет в рулетку со ставкой 1 доллар. Билл утверждает, что при этом Джек ни разу не выиграет. Выгодно ли Джеку такое пари?

6. Сколько в среднем раз нужно бросить кубик, чтобы выпали все значения от 1 до 6?

7. Даны две равные окружности, каждая разбита на 200 равных дуг. Каждая из дуг окрашена в белый или чёрный цвет, причём на каждой окружности белых и чёрных дуг поровну. Докажите, что можно так совместить эти окружности, чтобы дуги наложились друг на друга и цвета как минимум 100 дуг совпали.

8. В графе с n вершинами случайным образом проводят рёбра (каждое ребро проведено с вероятностью $1/2$, рёбра проводят независимо). Сколько в среднем треугольников получится в этом графе?

9. (a) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \frac{C_{2^{n/2}}^{n}}{2^{n^2/2}} = 0$.

(b) Полный граф на $2^{n/2}$ вершинах случайным образом красят в два цвета (т.е. рёбра красят независимо, каждое ребро — с равной вероятностью в первый и во второй цвет). Случайная величина ξ — количество одноцветных полных подграфов на n вершинах. Докажите, что $M\xi < 1$.

(c) (Теорема Эрдёша, 1947) Рёбра полного графа на $2^{n/2}$ вершинах можно покрасить в два цвета так, чтобы в нём не было одноцветных полных n-вершинных подграфов. Иными словами, число Рамсея $R(n, n) > 2^{n/2}$.