Частичный порядок.

1. В одно холодное утро на футбол пришло всего 5 школьников различного роста, которые выстроились в шеренгу. Всегда ли можно выбрать трех из них так, чтобы они были выстроены по росту? А если школьников было 9, а выбрать надо четверых?

2. Выпишите числа от 1 до 24 в строку таким образом, чтобы самая длинная возрастающая подпоследовательность состояла из 4 чисел, а самая длинная убывающая – из 6.

Говорят, что на множестве M *задан порядок, если для некоторых (не обязательно для всех) пар элементов* a *и* b *из множества* M *сказано, что* a *не превосходит* b *(записывается* $a \leq b$*), причем выполняются следующие условия:*

· Рефлексивность: $a \leq a$.

· Антисимметричность: если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.

· Транзитивность: если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.

Если при этом $a \neq b$ *и* $a \leq b$*, то пишут* $a < b$ *и говорят, что* a *меньше* b *или* b *больше* a.

Подмножество элементов частично упорядоченного множества M *называется цепью, если любые два элемента его сравнимы, и антицепью, если любые два элемента несравнимы.*

3. Выясните, будет ли правило задавать отношение порядка на множестве. Если да, то является ли порядок частичным: **(a)** M – множество точек координатной плоскости, $(a, b) \leq (c, d)$, если $a \leq c$ или $b \leq d$;**(b)** M – это семейство подмножеств некоторого множества X, где $A \leq B$, если $A \subset B$.**(c)** M – все вектора пятимерного линейного пространства над полем $\mathbb{Z}_p$, для векторов a и b $a > b$, если $a_3 > b_3$.

4. (a) Докажите, что из любых десяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать четыре, стоящие в этом ряду в порядке убывания или в порядке возрастания.

(b) Теорема Эрдёша-Секереша. Докажите, что в последовательности $mn + 1$ различных действительных чисел найдется или возрастающая подпоследовательность из $m+1$ числа или убывающая подпоследовательность из $n+1$ числа.

5. Теорема Мирского. Длина максимальной цепи в конечном частично упорядоченном множестве M равна минимальному количеству антицепей, на которые разбивается множество M.

6. Можно ли разместить на прямой **(a)** 6; **(b)** 7 отрезков так, чтобы из любых трех отрезков нашлись два пересекающихся и никакая точка прямой не принадлежала четырем или более отрезкам?

7. На прямой лежат несколько отрезков, причем среди любых $k + 1$ найдутся два пересекающихся. Докажите, что можно отметить k точек, так чтобы каждый отрезок проходил через хотя бы одну из них.

8. Вадим нарисовал 1001 прямоугольник с натуральными сторонами не больше 1000. Докажите, что он может выбрать три из них A, B и C, такие, что A можно поместить в B, а B можно поместить в C.

Для самостоятельного решения

9. Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых $t+1$ из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в t цветов так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

10. Теорема Дилуорса. Минимальное число цепей, на которые можно разбить ЧУМ, равно ширине наибольшей антицепи.