Линейные пространства

Определение. Пусть K — поле (его элементы мы будем называть числами или скалярами), а V — множество (его элементы назовём векторами). Пусть определено сложение векторов и умножение вектора на число (в обеих операциях получается вектор). Назовём V линейным (или векторным) пространством над K, если выполняются следующие свойства: сложение ассоциативно, коммутативно, существует ноль-вектор и для любого вектора существует противоположный вектор, а также свойства умножения на число:

1. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$;
2. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
3. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$;
4. $1 \cdot v = v$.

Примеры.

1. Множество векторов на плоскости или в пространстве.
2. Множество строк длины n, заполненных элементами поля K.
3. Множество многочленов степени не выше n.
4. Множество линейных уравнений от n переменных.
5. Множество решений ОСЛУ.
6. Числа вида $a+b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$ — линейное пространство над $\mathbb{Q}$. (Примеров подобного рода можно придумать ещё множество.)

Определение. Линейной комбинацией векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ называется любая сумма $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$, где α_i — числа.

Определение. Система векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ называется *линейно независимой*, если их линейная комбинация равна нулю только в том случае, когда все коэффициенты α_i равны нулю.

1. Система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда ни один из векторов нельзя выразить через остальные векторы системы (т.е. он не является линейной комбинацией остальных векторов).

Определение. Система векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ называется *порождающей*, если любой вектор является некоторой линейной комбинацией этой системы.

Примечание. Любая подсистема линейно независимой системы линейно независима. Любое расширение порождающей системы является порождающей.

Определение. Система векторов называется *базисом*, если она линейно независима и порождающая.

2. *(Критерий базиса)* Система $v_1, v_2, \dots, v_k$ является базисом тогда и только тогда, когда для любого вектора v существует единственный такой набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, что $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$.

3. Если из порождающей системы исключить вектор, который выражается через остальные, то система останется порождающей.

4. Из любой конечной порождающей системы можно исключить несколько (возможно, ноль) векторов так, чтобы она стала базисом.

5. Если в линейно независимую систему включить ещё один вектор, не выражающийся через векторы этой системы, то система останется линейно независимой.

6. Если в пространстве существует конечная порождающая система, то любую линейно независимую систему можно дополнить до базиса.

Примечание. На самом деле существование конечной порождающей системы необязательно, но оно несколько упрощает жизнь.

7. В любой линейно независимой системе не больше векторов, чем в любой порождающей системе.

Определение. Размерностью пространства называется число элементов в базисе (если это число конечно). Обозначается: $\mathrm{dim}V$.

Итак, мы доказали важнейшую теорему.

Теорема.

1. В любых двух базисах одинаковое количество векторов.
2. Если $\mathrm{dim}V = n$, то любая линейно независимая система, содержащая n векторов, является базисом.
3. Если $\mathrm{dim}V = n$, то любая порождающая система, содержащая n векторов, является базисом.
4. Если $\mathrm{dim}V = n$, то любая линейно независимая система не может содержать более n векторов.
5. Если $\mathrm{dim}V = n$, то любая порождающая система не может содержать менее n векторов.

Для самостоятельного решения

8. У Андрея Александровича 17 детей. В медпункте детей взвесили, но результаты не сказали. Андрей Александрович хочет узнать, кто сколько весит. Для этого он может назвать числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{17}$ (все числа должны быть положительны), а в медпункте ему назовут результат $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{17} v_{17}$, где $v_1, \ldots, v_{17}$ — веса детей.

(a) В медпункте отвечают только на шестнадцать таких вопросов. Докажите, что Андрей Александрович не сможет определить, кто сколько весит.

(b) Отчаявшись, Андрей Александрович уже не хочет знать веса всех детей, он только хочет узнать, сколько весит Лёня. За какое наименьшее количество вопросов (вопросы как в предыдущем пункте) он сможет справиться с этим заданием?

(c) На следующий день аналогичные вопросы пришёл задавать чиновник Росширпотребнадзора. Он придумал 18 таких вопросов. Докажите, что результаты какого-то из них можно предсказать, если знать ответы на остальные вопросы.