# Гармонические четырёхугольники

*Определение.* Вписанный четырёхугольник $ABCD$ называется *гармоническим*, если $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

**1.** Пусть точки $B$ и $D$ лежат на окружности. Касательные к этой окружности в точках $B$ и $D$ пересекаются в точке $K$. Из точки $K$ проведена секущая, пересекающая окружность в точках $A$ и $C$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — гармонический.

**2.** Пусть точки $A$, $B$, $C$, $D$ соответствуют комплексным числам $a$, $b$, $c$, $d$.

**(a)** Докажите, что $ABCD$ лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ является вещественным числом.

**(b)** Докажите, что $ABCD$ является гармоническим четырёхугольником тогда и только тогда, когда $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = -1$.

**(c)** Дан треугольник $ABC$. Докажите, что на дуге $AC$ описанной около $ABC$ окружности существует ровно одна такая точка $D$, что четырёхугольник $ABCD$ является гармоническим.

*Определение.* Число $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ называется *двойным отношением* четвёрки точек $A$, $B$, $C$ и $D$.

**3. (a)** Вписанный четырёхугольник $ABCD$ обладает свойством, что продолжение диагонали $AC$ и касательные к описанной окружности в точках $B$ и $D$ пересекаются в точке $K$. Из точки $A$ провели прямую, параллельную касательной $BK$. Эта прямая пересекает отрезки $BD$ и $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Докажите, что $AE = EF$.

**(b)** Дан треугольник $ABC$. В точке $B$ провели касательную к описанной окружности, которая пересекла прямую $AC$ в точке $K$. Ещё одна касательная из точки $K$ касается окружности в точке $D$. Докажите, что $BD$ — симедиана в треугольнике $ABC$.

**4.** Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Докажите, что следующие его свойства равносильны:

**(a)** $ABCD$ гармонический,

**(b)** Касательные к описанной окружности в точках $B$ и $D$ и прямая $AC$ пересекаются в одной точке,

**(c)** Диагонали $AC$ и $BD$ являются симедианами соответствующих (каких?) треугольников.

**(d)** $\frac{AL}{CL} = \frac{AB^2}{BC^2}$, где точка $L$ — пересечение диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

## Для самостоятельного решения

**5.** К окружности провели касательные в точках $A$, $B$, $C$ и $D$. Оказалось, что касательные в $A$ и $C$ пересеклись на прямой $BD$. Докажите, что касательные в $B$ и $D$ пересекаются на прямой $AC$.

**6**. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Прямые, симметричные диагонали $AC$ относительно биссектрис углов $A$ и $C$, пересекаются в середине диагонали $BD$. Докажите, что прямые, симметричные диагонали $BD$ относительно биссектрис углов $B$ и $D$, пересекаются в середине диагонали $AC$.

**7**. Пусть $ABCD$ — гармонический четырёхугольник, и пусть $P_1$, $P_2$ и $P_3$ — основания перпендикуляров, опущенных из $D$ на прямые $AB$, $AC$ и $BC$. Докажите, что $P_2$ — середина отрезка $P_1P_3$.