Менелай и его друзья

И возлёг Он с двенадцатью точками; и сказал им: истинно говорю вам, что трое из вас будут лежать на одной прямой. Они весьма опечалились, и тогда каждый начал говорить Ему: не я ли, Учитель?

---

1. (Теорема Менелая) Дан треугольник ABC. На прямой AB отмечена точка K, на прямой BC — точка L, на прямой AC — точка M. Докажите, что точки K, L и M лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено соотношение (в направленных отрезках)

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

2. (Теорема Паппа) Пусть на одной прямой лежат точки A, C и E, а на другой прямой — точки B, D и F. Если прямые AB, CD и EF пересекают прямые DE, FA и BC соответственно в точках L, M и N, то точки L, M и N коллинеарны.

Подсказка. Докажем эту теорему в случае, когда прямые AB, CD и EF образуют треугольник UVW. Рассмотрите всевозможные тройки точек, удовлетворяющие условию теоремы Менелая для UVW (таких троек должно быть пять). Запишите соответствующие отношения. Выведите из них теорему Паппа.

Но вам нужно доказать эту теорему в общем случае.

3. (Теорема Дезарга) Пусть два треугольника ABC и $A'B'C'$ таковы, что прямые AA', BB' и CC' конкурентны. Пусть прямые AB, BC и AC пересекают прямые $A'B'$, $B'C'$ и $A'C'$ соответственно в точках L, M и N. Докажите, что точки L, M N коллинеарны.

4. (Теорема Паскаля) Пусть A, B, C, D, E F — точки на окружности. Обозначим точки пересечения AB и DE, BC и EF, CD и AF за L, M и N соответственно. Докажите, что точки L, M и N коллинеарны.

Подсказка. Обозначим точки пересечения прямых CD и EF, AB и EF, AB и CD за U, V и W соответственно. Снова напишите всевозможные теоремы Менелая относительно треугольника UVW.

Для посвящённых. Поймите, что теорема Паскаля верна и в случае, если изначальные шесть точек лежали на эллипсе.

Для совсем посвящённых. Поймите, что теорема Паскаля верна и в случае, если эти шесть точек лежали на параболе или на гиперболе.

5. (Теорема Брианшона) Пусть шесть прямых AB, BC, CD, DE, EF и FA касаются одной окружности. Докажите, что прямые AD, BE и CF конкурентны.

Опять-таки, прямые могут касаться не окружности, а эллипса, параболы или гиперболы — такова проективная природа этой задачи.

Для самостоятельного решения

6. Дан лист бумаги, две прямые, пересекающиеся вне этого листа, и точка на листе. Постройте через эту точку прямую, проходящую через точку пересечения нарисованных прямых. Построения не должны выводить за лист бумаги.

7. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Докажите, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения сторон AB и CD и точка пересечения касательных к вершинам B и C коллинеарны.

8. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Произвольная окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

9. Пусть P и Q — две изогонально сопряжённые точки в треугольнике ABC. Пусть $P_AP_BP_C$ и $Q_AQ_BQ_C$ — педальные треугольники точек P и Q. И пусть ещё K, L и M — точки пересечения прямых P_AQ_B и P_BQ_A, P_AQ_C и P_CQ_A, P_BQ_C и P_CQ_B соответственно.

(a) Докажите, что точки K, L и M лежат на одной прямой.

(b) Докажите, что точки P и Q лежат на той же прямой.