Оценки в ТЧ

1. Лемма Зигеля. Пусть есть ОСЛУ с целыми коэффициентами a_{ij} ($i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$). Пусть также $p < q$ и $|a_{ij}| \le A$ для всех i и j. Тогда существует нетривиальное целочисленное решение системы $(x_1, \ldots, x_q)$ такое, что $|x_j| \le 1 + (qA)^{\frac{p}{q-p}}$ для всех j.

Чтобы найти искомое решение мы будем подставлять в систему разные наборы целых чисел и смотреть на полученную правую часть.

(a) Пусть каждое число набора, которые мы подставляем в систему ограничено по модулю натуральным числом T. Среди какого количества наборов стоит искать решение системы?

(b) А сколько наборов значений после подстановки мы сможем получить?

(c) Как построить набор, на котором система дает нулевую правую часть?

(d) Докажите лемму Зигеля.

2. Теорема Дирихле (1842). Пусть α и $C > 1$ – действительные числа. Тогда существуют такие целые числа p, q, что $1 \leqslant q < C$ и

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{Cq}.$$

3. (a) Пусть α – иррациональное число. Тогда существует бесконечно много таких взаимно простых целых чисел p, q, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

(b) Для рациональных чисел аналогичное утверждение неверно: существует такое $C > 0$, что при любых p, q, $p \neq q\alpha$ выполняется $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \ge \frac{1}{Cq}$.

4. Теорема Лиувилля (1844). Пусть α – алгебраическое число степени $n > 1$ (т.е. корень многочлена степени n с целыми коэффициентами). Тогда существует такая константа $C(\alpha) > 0$, что для любых целых p, q выполняется

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{C(\alpha)q^n}.$$

5. Дано действительное число $r > 1$. Известно, что при любых натуральных m и n выполнено $m \vdots n \Rightarrow [mr] \vdots [nr]$. Докажите, что r – целое.