Классические неравенства

Ниже в листке числа p *и* q *положительны и связаны соотношением* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. Докажите неравенство $(1+x)^\alpha \le 1+\alpha x$, где $x \le -1$, $0<\alpha<1$.

2. Неравенство Юнга. Пусть a, $b>0$. Тогда $ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

Указание. Сделайте замену $p=\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{a}{b}=1+x$ в предыдущем неравенстве.

3. Неравенство Гельдера. Пусть $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$, $p>1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

4. (a) Пусть $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$, $p \ge 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{p-1} \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^{p-1}\right)^{p}$$

(b) Неравенство Минковского. Пусть $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0$, $p \ge 1$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

5. Пусть ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^p$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i^p$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i^q$ сходятся. Что можно сказать о рядах $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (a_i+b_i)^p$?

6. Обобщите неравенство Гельдера на случай трех наборов чисел a_i, b_i, c_i.

7. Что произойдет с неравенством Гельдера, если вместо положительности p и q потребовать условие $pq<0$?

Для любого действительного $\alpha \ne 0$ средним степенным положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ порядка α называется число

$$S_\alpha(x) = \left(\frac{x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Частными случаями средних степенных являются: среднее гармоническое ($\alpha=-1$), среднее арифметическое ($\alpha=1$), среднее квадратичное ($\alpha=2$).

Средним степенным порядка 0 будем считать среднее геометрическое $S_0(x)=\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$.

8. Если $\alpha<\beta$, то $S_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le S_\beta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.