Матбой 9 (полупрофи) - 10

1. В ряд стоит n очень больших бочек. В первой бочке 1 литр молока, во второй 3 литра и так далее. В последней бочке $2n-1$ литров молока. Винни Пух может перелить в любую бочку столько молока, сколько там уже есть. Выливать из бочки молоко нельзя, также нельзя переливать из одной бочки в другую молоко, если в первой бочке не хватает молока для удвоения во второй. При каких n данными операциями можно собрать все молоко в одной бочке?

2. Две окружности S_1 и S_2 касаются друг друга внутренним образом в точке A так, что S_1 лежит внутри S_2. Через точку A проведена прямая, которая пересекает S_1 в точке B, а S_2 — в точке C. Через точку B проведена касательная к S_1, которая пересекает S_2 в точках D и E. Из точки C проведены две касательные к окружности S_1, которые касаются её в точках F и G. Докажите, что точки D, F, G, E лежат на одной окружности.

3. На полке стоят 2000 томов энциклопедии, занумерованные от 1 до 2000 слева направо. Разрешается делать две операции: (1) взять слева от начала четное число томов и переставить их, не меняя порядка, в конец; (2) взять слева от начала нечетное число томов, переложить их в обратном порядке и поставить в начало. Сколько различных перестановок томов можно получить такими операциями?

4. Пусть $P(x)$ — приведенный многочлен степени n, имеющий n вещественных корней (корни считаются с учетом кратности), $P(2017) = 2017$. Пусть $Q(x) = \prod\limits_{i=1}^{2017} P(x+i)$. Докажите, что $Q(x)$ имеет как минимум 1000 различных корней, по модулю меньших 2017.

5. Пусть k, n — натуральные числа, причём $n > C_k^3$. Даны $3n$ попарно различных натуральных чисел: a_i, b_i, c_i, где $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что среди сумм вида $a_i + b_i$, $a_i + c_i$, $b_i + c_i$ хотя бы $k+1$ различных.

6. Выпуклый многоугольник на плоскости таков, что его образ при любом параллельном переносе содержит целую точку. Докажите, что расстояние между какими-то двумя вершинами многоугольника не меньше $\sqrt{2}$.

7. Докажите, что для любого натурального $k > 2$ существует такое натуральное число $n > 1$, что C_{nk}^k не делится на $n+1$.

8. На острове живут 200 человек: 100 честных, которые всегда говорят правду, и 100 лжецов, которые всегда лгут. У каждого жителя острова есть хотя бы один друг. В один прекрасный день 100 человек сказали: «Все мои друзья честные», а остальные 100 человек сказали: «Все мои друзья — лжецы». Какое наименьшее количество пар, в которых честный человек дружит с лжецом, может быть на острове? (Один человек может входить в несколько пар)

9. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ верно, что $f(x+2xy) = f(x) + 2f(xy)$. Найдите значение $f(2018)$, если $f(2017) = 2017$.

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с периметром 1 выполнены равенства $AB + CD = AC\sqrt{2}$, $BC + AD = BD\sqrt{2}$. Найдите расстояние между серединами диагоналей четырехугольника $ABCD$.