Функциональные уравнения

1. Найдите все $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

(a) $f(x)f(y) = f(xy) + x + y$

(b) $f(x+y) = x + f(y)$

(c) $f(x+y) - f(x-y) = 4xy$

для всех пар чисел $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Пусть $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям для всех $x \in \mathbb{R}^+$:

- $f(x)$ — монотонно возрастающая функция
- $f(x) > -\frac{1}{x}$
- $f(x)f(f(x) + \frac{1}{x}) = 1$

Найдите $f(1)$.

3. Найдите все $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ такие, что $f\left(x + \dfrac{y}{x}\right) = f(x) + \dfrac{f(y)}{f(x)} + 2y$ для всех $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Замечание. Для непрерывных функций f имеет место равенство $f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, где $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность вещественных чисел.

Таким образом, бывает достаточно решить ФУР (доказать единственность решения) сначала для рациональных значений, а затем воспользоваться непрерывностью функции, чтобы получить решение во всех точках.

4. Найдите все непрерывные функции $f(x)$ определённые для $x > 0$ такие, что $f(x+y) = \dfrac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^+$.

5. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ которые удовлетворяют условию $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Для самостоятельного решения

6. Найдите все непрерывные функции, удовлетворяющие условию $f(x+y) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^+$.

7. Функция F задана на всей вещественной оси, причём для любого x имеет место равенство: $F(x+1)F(x) + F(x+1) + 1 = 0$. Докажите, что функция F не может быть непрерывной.

8. Пусть t - какое-то фиксированное число, причём $0 < t < 1$. Найдите все $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывные в точке $x = 0$, такие что $f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2$.