Теорема Штейница

Определение. Выпуклым многогранником называют фигуру, которая представляет собой пересечение конечного числа полупространств, причем фигура ограничена и имеет внутренние точки.

Граница выпуклого многогранника состоит из нескольких многоугольников, называемых его *гранями*, стороны этих многоугольников называют *рёбрами* многогранника.

1. Существует ли выпуклый многогранник из семи ребер?

Напоминаем формулу Эйлера для выпуклого многогранника: $v-e+f=2$, где v — количество вершин (vertices), e — количество рёбер (edges), f — количество граней (facets).

Тройку чисел (v, e, f) называют f-*вектором* многогранника.

2. Докажите равенства для выпуклого многогранника:

$$2e = 3v_3 + 4v_4 + \ldots = 3f_3 + 4f_4 + \ldots$$

где v_i — количество вершин, в которых сходится i рёбер, f_i — количество i-угольных граней.

3. Докажите, что каждый выпуклый многогранник имеет либо трехгранный угол, либо треугольную грань.

4. Теорема Штейница. Тройка натуральных чисел (v, e, f), для которой $v-e+f=2$, $v \le 2f-4, f \le 2v-4$, является f — вектором некоторого выпуклого многогранника.

(a) Найдите выпуклый многогранник, f — вектор которого есть (i) $(4,6,4)$; (ii)$(5,8,5)$; (iii) $(6,10,6)$.

(b) Докажите, что если существует выпуклый многогранник с f — вектором (v, e, f), имеющий как трехгранный угол, так и треугольную грань, то существуют выпуклые многогранники с f — векторами $(v+1, e+3, f+2)$, $(v+2, e+3, f+1)$ и $(v+2i+j, e+3i+3j, f+i+2j), i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(c) Докажите теорему Штейница.

5. Пусть на рёбрах выпуклого многогранника расставлены знаки плюс и минус.

(a) Докажите, что число перемен знака при обходе любой грани четно.

Назовем индексом вершины число перемен знака при обходе этой вершины.

(b) Пусть N — сумма индексов всех вершин многогранника. Докажите, что $N \le 2f_3 + 4f_4 + 4f_5 + 6f_6 + 6f_7 + \ldots$

(c) Докажите, что $N \le 4v - 8$.

(d) Докажите лемму Коши: найдется вершина выпуклого многогранника, индекс которой меньше 4.