Проективные пространства

Вас задолбало, что в многочисленных задачах-теоремах о конкурентности трёх прямых приходится делать оговорочку по Фрейду "или параллельны"? Вас бесит, что классное с виду полярное сответствие определено не для всех прямых? Вас беспокоит, что центр инверсии переходит в бесконечность, а такой точки на плоскости нет? Вы хотите об этом поговорить?

Если да, то этот листочек для Вас!

Алгебра

Определение. Пусть K — некоторое поле. Рассмотрим $(n+1)$-мерное векторное пространство K^{n+1}. Выкинем из него начало координат и введём отношение эквивалентности: векторы эквивалентны тогда и только тогда, когда они коллинеарны, т.е. $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \sim (\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$. Множество классов эквивалентности называется n-мерным проективным пространством над полем K и обозначается KP^n. Класс эквивалентности (т.е. точку в проективном пространстве) будем обозначать $[a_0 : a_1 : \cdots : a_n]$ — тем самым мы подчёркиваем, что нам важно только соотношение между координатами. Такие координаты мы называем однородными.

Нас больше всего интересуют пространства $\mathbb{R}P^2$ (будем называть её проективной плоскостью) и $\mathbb{C}P^1$ (комплексная проективная прямая).

1. Ещё одно определение $\mathbb{R}P^2$ (можно так же определить и в общем случае). $\mathbb{R}P^2$ — это множество прямых в трёхмерном пространстве, проходящих через начало координат. Докажите эквивалентность этих определений.

Геометрия

Определение. (Проективной) прямой на проективной плоскости будем называть множество точек, удовлетворяющих уравнению $Aa + By + Cz = 0$. Если проективная плоскость — это множество прямых в трёхмерном пространстве, проходящих через начало координат, то проективная прямая на ней — это множество прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через начало координат.

2. (a) Докажите, что через любые две точки проективной плоскости проходит ровно одна прямая.

(b) Докажите, что любые две прямые на проективной плоскости пересекаются ровно в одной точке.

Удобно. Никакой параллельности, никаких проблем с пятым постулатом Евклида.

3. Рассмотрим подмножество проективной плоскости $\{[a_0 : a_1 : a_2] | a_2 \neq 0\}$.

(a) Докажите, что это подмножество образует обыкновенную плоскость, причём прямые этой плоскости соответствуют (проективным) прямым на проективной плоскости.

(b) Докажите, что оставшиеся точки образуют (проективную) прямую — как в смысле прямой на проективной плоскости, так и в смысле определения $\mathbb{R}P^1$. Эту прямую назовём бесконечно удалённой, а точки на ней — бесконечно удалёнными.

(c) Докажите, что каждая прямая на проективной плоскости, кроме бесконечно удалённой прямой, содержит ровно одну бесконечно удалённую точку.

Прямые, параллельные в обыкновенной плоскости, пересекаются в бесконечно удалённой точке, а непараллельные прямые проходят через разные бесконечно удалённые точки.

Тем самым у нас есть ещё одна конструкция проективной плоскости — это плоскость, к которой добавлены бесконечно удалённые точки, по одной для каждого направления (т.е. пучка параллельных прямых).

4. Докажите, что $\mathbb{C}P^1$ — это множество комплексных чисел с ещё одной добавленной точкой, которую мы и назовём точкой ∞.

Итак, инверсия на самом деле действует на $\mathbb{C}P^1$. Если окружность единичная с центром в нуле, то инверсия действует по формуле $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Тоже неплохо.

5. (a) Докажите, что полярное соответствие корректно определяется на проективной плоскости (т.е. каждой прямой соответствует точка, а каждой точке — прямая, без исключений).

(b) Пусть окружность, относительно которой делается полярное соответствие, единичная с центром в начале координат. В какую прямую перейдёт точка $[a : b : c]$?

(c) Дана прямая на проективной плоскости. Докажите, что существуют два полярных преобразования, такие что при их композиции данная прямая переходит в бесконечно удалённую прямую.

Топология

Здесь мы не придаём строгого смысла некоторым понятиям

6. (a) Докажите, что $\mathbb{C}P^1$ является сферой.

(b) Пусть северный полюс сферы соответствует бесконечности, южный — нулю, экватор — единичной окружности. Докажите, что инверия относительно единичной окружности есть отражение сферы от экватора.

7. (a) Из проективной плоскости вырезали круг. Докажите, что получилась лента Мёбиуса. Иначе: докажите, что проективная плоскость может быть склеена из ленты Мёбиуса и круга, если клеить по краю (у каждого край представляет собой окружность).

(b) Докажите, что проективную плоскость можно получить, если взять сферу и склеить её противоположные точки.

(c) А ещё проективную плоскость можно получить, если взять круг и склеить противоположные точки ограничивающей его окружности. Докажите это.

Комбинаторика

8. Сколько точек в n-мерном проективном пространстве над полем $\mathbb{Z}_p$ (поле вычетов по модулю p)?

9. В отряде 81 человек. Каждый день трое уходят на дежурство. Докажите, что можно составить такой график дежурств, чтобы любые двое участвовали ровно в одном общем дежурстве.

10. (a) Монетный двор выпустил 31 серию юбилейных монет. У нескольких коллекционеров по шесть монет. Может ли быть так, что любая пара монет встретилась ровно у одного коллекционера, и для любых двух коллекционеров есть ровно одна монета, которая есть в коллекции у обоих?

(b) В школе 121 десятиклассник. По уставу школы в каждом кружке занимается 40 десятиклассников. Докажите, что возможна ситуация, что составы любых двух разных кружков пересекаются ровно по 13 десятиклассникам.