XXXIV летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 3–28 июля 2018 г.

Математика 10 класс
Материалы занятий обычных групп

Демидович Фёдор Валерьевич
Кочкин Иван Владимирович
Яровиков Юрий Николаевич

Содержание

Место для тёплых слов

Общеотрядные файлы

4 июля. Вступительная олимпиада.

1. В двух вершинах куба сидят Болек и Лёлек. За ход один из них переползает в соседнюю свободную вершину. Могут ли Болек и Лёлек при каком-то начальном положении переползать так, чтобы получились все возможные их расстановки на кубе ровно по разу?

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Луч EF пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Отрезки CP и DE пересекаются в точке Q. Докажите, что треугольник APQ — равнобедренный.

3. Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 - b^4 = ab^2$. Докажите, что b является произведением трёх последовательных натуральных чисел.

4. В связном графе 2018 вершин и n ребёр. При каком наименьшем n из графа мозжно заведомо удалить 2 смежных ребра, чтобы он остался связным?

5. На плоскости выбрано 2018 прямых общего положения. Отметили все их точки пересечения. Затем стёрли все прямые и k отмеченных точек. При каком наибольшем k заведомо можно восстановить изначальные прямые?

6. Произведение положительных чисел $a_2, a_3, \ldots, a_{239}$ равно 1. Докажите, что

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\ldots(1+a_{239})^{239} > 239^{239}.$$

7 июля. Математические крестики-нолики. Ответы

A1(10) Найдите все α такие, что $tg\alpha = tg\alpha^\circ$.

Ответ: $\dfrac{180\pi\cdot k}{180-\pi}$ (в градусах)

A2(20) В чемпионате Гамбурга по боксу участвуют 100 боксеров разного рейтинга. Каждые два боксера проводят между собой один бой. Несколько боксеров составили заговор: каждый из них ровно в одном из боев подложит себе в перчатку свинцовую подкову. Если во время боя подкова подложена ровно у одного из двух его участников, то побеждает именно он; в противном случае побеждает боксер с более высоким рейтингом. По итогам чемпионата нашлось три боксера, выигравших больше боев, чем любой из трех участников с наивысшим рейтингом. Каким могло быть наименьшее количество заговорщиков?

Ответ: 12

A3(30) Некоторое натуральное число можно записать как $112296^2 - 79896^2$. При этом используется 14 символов. Запишите то же самое число с помощью всего трех символов

Ответ: 13!

A4(20) С центрами в вершинах n-мерного куба со стороной 1 построили сферы радиуса $\frac{1}{2}$. С центром в точке $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ построили сферу, касающуюся внешним образом построенных ранее. При каком наименьшем n последняя сфера вылезает за границу куба?

Ответ: 5

A5(10) Найдите все многочлены $f(x)$ такие, что $f(f(x)) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4$.

Ответ: x^2+2x+1

B1(20) Найдите все такие a, что числа $a+\sqrt{15}$ и $1/a-\sqrt{15}$ – целые.

Ответ: $\pm 4-\sqrt{15}$

B2(30) Найдите наименьшее значение выражения: $\sqrt{(x-5)^2+9}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{4+(y-4)^2}$

Ответ: $7\sqrt{2}$

B3(40) Найдите все натуральные числа, которые в 100 раз больше количества своих натуральных делителей.

Ответ: 2000

B4(30) Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Угол BAC равняется 37 градусам. X – точка пересечения высоты из вершины A с прямой, проходящей через B параллельно основанию, M – точка на прямой AC такая, что $BM = MX$. Найдите градусную меру угла MXB.

Ответ: 74

B5(20) В кружке занимается 21 человек. Известно, что два кружковца дружат, если их фамилии содержат различное количество букв, иначе не дружат. При этом у каждого кружковца друзей в кружке столько же, сколько букв в фамилии. Всего в кружке 175 пар друзей. Определите длины фамилий кружковцев.

Ответ: 6 человек с длиной фамилии 15, 5 - 16, 4 - 17, 3 - 18, 2 - 19, 1 - 20 букв

C1(30) Из шахматной доски вырезали 8 клеток. Для какого наибольшего n из оставшейся части гарантированно можно вырезать прямоугольник площадью n?

Ответ: 8

C2(40) На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены квадраты, 6 вершин квадратов, не являющиеся вершинами исходного треугольника лежат на одной окружности. Найдите углы треугольника.

Ответ: Задача была убрана

C3(50) На бесконечной клетчатой доске проведена горизонтальная прямая по линии сетки. В каждой клетке под этой прямой стоит шашка, а клетки над прямой пустые. Каждая шашка может перепрыгивать по горизонтали и вертикали через другую шашку на свободную клетку. Шашка, через которую перепрыгнули, убирается с поля. На какое максимальное количество клеток над прямой может продвинуться шашка такими ходами?

Ответ: 4

C4(40) Каждая сторона правильного треугольника разбита на 2007 равных отрезков, через точки разбиения проведены прямые парал-лельно сторонам треугольника, разбивающие его на 2007×2007 маленьких треугольничков. В этих треугольниках записаны числа ± 1 так, что число в любом треугольнике равняется произведению чисел в треугольничках, имеющих с ним общую сторону. Какие числа могут быть записаны в угловых треугольничках?

Ответ: одинаковые

C5(30) На окружности отметили десять точек и провели n отрезков с вершинами в этих точках, при этом любые два отрезка пересекаются. Чему, самое большее, может равняться n?

Ответ: 10

D1(20) Толя выложил в ряд 101 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между каждыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между каждыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между каждыми двумя трёхкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько трёхкопеечных монет могло быть у Толи?

Ответ: 25 или 26

D2(30) Пусть Q – единичный куб. Назовем тетраэдр хорошим, если все его вершины лежат на границе Q. Найдите все возможные объемы хороших тетраэдров.

Ответ: любой от 0 до 1/3

D3(40) Последовательность a_n задана следующим образом: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}]$. Сколько полных квадратов встречается среди членов этой последовательности, не превосходящих миллиона.

Ответ: 10

D4(30) Для каких $n \in \mathbb{N}$ существует такая перестановка $x_1, x_2, ..., x_n$ чисел $1, ..., n$, что $\forall k = 1, ..., n$ верно, что $\sum\limits_{j=1}^{k} x_j \,\vdots\, k$

Ответ: $n \in \{1, 3\}$

D5(20) На тетрадном листе разрешено проводить прямые, проходящие хотя бы через два узла сетки, но не совпадающие с линиями сетки. Как провести три прямые так, чтобы они ограничивали треугольник площадью 1/3 клетки?

Ответ: зачет по смыслу

E1(10) Найдите какой-нибудь простой делитель числа $2^6+(2^5+2^4)\cdot 7^3+(2^3+2^2)\cdot 7^6+7^9$

Ответ: 349

E2(20) Найдите наибольшее слагаемое в разложении $(1+\sqrt{3})^{100}$ по формуле бинома Ньютона.

Ответ: $C_{64}^{100} \cdot 3^{32}$

E3(30) Найдите все вещественные x, удовлетворяющие уравнению: $x^6 - 9x^4 + 8 \cdot (2x+3)^3 + 27x^2 + 135 = (4x+6)(18x^2 - 54)$

Ответ: $-3, 2 \pm \sqrt{7}$!Ошибка в условии. Задача была убрана!

E4(20) По кругу сидят 2019 человек – рыцари и лжецы. Каждый из них сделал заявление, что его соседи – рыцарь и лжец, вот только двое рыцарей ошиблись... Сколько лжецов было среди этих людей?

Ответ: 673

E5(10) Приведите пример двух строго монотоннных функций, сумма которых является периодической функцией (но не константой!)

Ответ: зачет по смыслу

12 июля. Внутренний матбой

1. 100 человек устраиваются работать на 100 различных вакантных мест. Каждый из двух агентов по трудоустройству предложил каждому из этих 100 человек одно определённое место, причём разным людям — разные места. Каждый из 100 претендентов принял одно из двух предложений, и оказалось, что все места заполнены. Докажите, что если бы каждый принял другое предложение, все места тоже оказались бы заполненными.

2. Докажите, что для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ найдётся многочлен $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ такой, что $Q(x^{2018}) \,\vdots\, P(x)$.

3. Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до n. Известно, что сумма чисел на всех карточках равна $k \cdot n!$, где k — целое число. Доказать, что карточки можно разложить на k групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, написанных на карточках, равнялась $n!$.

4. Пусть $p = 1601$ (простое число), а $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, равная сумме тех дробей,

$$\frac{1}{0^2+1}, \frac{1}{1^2+1}, \ldots, \frac{1}{(p-1)^2+1},$$

знаменатели которых не делятся на p. Докажите, что $2m + n$ делится на p.

5. По кругу стоят 2010 цифр, каждая из которых равна 1,2 или 3. Известно, что при любом k в любом блоке из $3k$ чисел каждая из цифр 1, 2, 3 встречается не больше $k + 10$ раз. Докажите, что существует блок из нескольких подряд идущих цифр, в котором цифр каждого вида поровну.

6. Вне параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K, лежащая внутри угла CBD, так, что $\angle CBD = \angle ABK$. Отрезки AK и BD пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle OCK < \angle ODA$.

7. Палиндромическим разбиением натурального числа A называется запись A в виде суммы натуральных слагаемых $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, где $a_i = a_{n+1-i}$. Например, $16 = 16$, $16 = 2 + 12 + 2$ и $16 = 7 + 1 + 1 + 7$ — палиндромические разбиения числа 16.

Найдите количество всех паллиндромических разбиений числа 2018.

8. На плоскости проведено несколько прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. В каждой из ограниченных областей, на которые они делят плоскость, поставлена 1 или -1. За один ход можно взять любые 3 прямые и умножить на -1 числа во всех областях, попавших внутрь треугольника, образованного этими прямыми. Верно ли, что для любого набора прямых все числа можно сделать равными 1?

9. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно такие, что $S(AED) = S(ABF) = S(ABCD)/2$. Докажите, что прямая EF делит диагональ AC на две равные части.

10. Про положительные числа a, b, c известно, что

$$\frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{a^2+c^2+1} + \frac{1}{b^2+c^2+1} \geq 1.$$

Докажите, что $ab + bc + ac \leq 3$.

17 июля. Матбой полупрофи M9 – обычные группы M10

1. В графе есть рёбра веса 1 и рёбра веса 2. Известно, что для каждой вершины сумма весов рёбер с концом в этой вершине нечётна. Докажите, что можно ориентировать рёбра графа так, чтобы для каждой вершины сумма весов входящих в неё ребер отличалась от суммы весов исходящих из неё ребер не более, чем на 1.

2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются окружности ω в точках C и D соответственно, и пересекаются в точках A и B. AM и AN — касательные из A к ω. Оказалось, что точки A, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что прямые AB, CM и ND пересекаются в одной точке.

3. Пусть X — конечное множество. Докажите, что

$$\sum |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = (2^k - 1) \sum |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|,$$

где обе суммы берутся по всем наборам k множеств A_1, A_2, $\ldots$, $A_k \subset X$ (подмножества могут быть одинаковыми).

4. Можно ли так покрасить точки трёхмерного пространства в 2018 цветов, чтобы на любом отрезке встречались представители всех 2018 цветов?

5. Найдите все такие натуральные n, что $n! + 8$ делится на $2n + 1$.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки K, L, M и N лежат на сторонах BC, CD, DA, AB, соответственно. Могут ли все части, на которые отрезки AK, BL, CM и DN делят четырёхугольник $ABCD$, иметь равные площади?

7. Для положительных a, b и c выполнено $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{ab}\right) \geqslant 1728.$$

8. Пете и Васе дали колоду из 2018 карт, на каждой из которых написано целое число. Пусть число n таково, что $n < 2^{2007}$. Докажите, что они могут взять поровну карт из этой колоды (не обязательно брать все карты), что суммы чисел на картах каждого из них будут давать один и тот же остаток при делении на n.

9. Дан многочлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом. Докажите, что этот многочлен принимает бесконечно много натуральных значений с одинаковой суммой цифр.

10. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке K. Точки C_1 и A_1 на сторонах BA и BC соответственно таковы, что $\angle C_1LA = \angle A_1LC = \angle ABC$. Точки P и Q таковы, что четырехугольники $AKLP$ и $CKLQ$ — параллелограммы. Докажите, что $PC_1 = QA_1$.

23 июля. Заключительная олимпиада

Довывод

1. Даны действительные числа a, b и c. Известно, что $\{ab\} = \{bc\} = \{ac\} = \frac{1}{2}$. Докажите, что a, b и c иррациональны.

2. В вершинах выпуклого 2018-угольника стоят нули и единицы. Докажите, что этот многоугольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы суммы чисел в вершинах любых двух треугольников отличались не более, чем на 1.

3. На доске 100×100 стоят 2550 ладей и k фишек. Ладьи не бьют сквозь фишки. При каком наименьшем k ладьи могут не бить друг друга?

4. Точки M и N — основания высот из вершин A и C остроугольного треугольника ABC. Пусть $AB \neq BC$, а точка O — середина AC. Пусть R — точка пересечения биссектрис углов ABC и MON. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ANR и CMR лежит на прямой AC.

5. Существует ли такое $k > 2$, что последовательность

$$a_n = \text{НОК}(n+1, n+2, \ldots, n+k)$$

возрастает начиная с некоторого номера n?

Вывод

6. Докажите, что вершины связного графа на n вершинах можно пронумеровать натуральными числами от 1 до n так, чтобы для любых k и l между вершинами с такими номерами существовал путь длины не более, чем $3|k-l|$.

7. В остроугольном треугольнике ABC отмечена точка Фейербаха F (т. е. точка касания вписанной окружности треугольника ABC с окружностью девяти точек), A_1 — основание высоты на стороне BC. Докажите, что прямая, симметричная FA_1 относительно BC, перпендикулярна IO, где O — центр описанной окружности треугольника ABC, I — центр его вписанной окружности.

8. Даны натуральные числа $k < n$ и положительные числа x_1, x_2, …, x_n. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \ldots + x_{k+1}} + \frac{x_2}{x_3 + x_4 + \ldots + x_{k+2}} + \ldots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_k} \geq \frac{n}{k^2}.$$

Запас

9. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. На окружности ω_1 взята точка C. (Далее «$XY \to Z$» означает «Прямая XY пересекает окружность ω_2 повторно в точке Z»). $CB \to D$; $DO_2 \to E$; $EO_1 \to F$; $CF \to G$. Докажите, что точка E — середина дуги AG.

Первая пятидневка

5 июля. Идейная стереометрия

1. Известно, что сумма трех плоских углов при каждой вершине тетраэдра равна 180°. Докажите, что все его грани — равные треугольники.

2. Каким наименьшим количеством фонарей можно осветить поверхность шара?

3. Дан выпуклый многогранник. Докажите, что для любых трех его вершин найдется точка вне него, из которой видны эти три вершины.

4. Неизвестная планета имеет форму либо куба, либо шара. Для уточнения формы поверхности был послан зонд, который после приземления проехал в диаметрально противоположную точку планеты и отправил данные о своей траектории. Обязательно ли теперь мы можем восстановить форму планеты?

5. По двум скрещивающимся прямым скользят два отрезка. Доказать, что объём тетраэдра с вершинами в концах этих отрезков не зависит от положения последних.

6. *(Теорема Дезарга)* Из точки O выпущены 3 луча. На первом выбраны точки A и A', на втором B и B', на третьем C и C'. Пусть C'' — точка пересечения прямых AB и $A'B'$. Аналогично определяются точки B'' и A''. Докажите, что точки A'', B'' и C'' лежат на одной прямой.

7. В треугольнике ABC выбрана точка M. На отрезках AM, BM и CM выбраны точки A', B' и C' соответственно. Пусть C'' — точка пересечения прямых AB' и BA'. Аналогично определяются B'' и A''. Докажите, что прямые AA'', BB'' и CC'' пересекаются в одной точке.

8. Три грани тетраэдра опустили поворотами во внутрь четвёртой грани. Докажите, что вся четвёртая грань покрыта.

5 июля. Линейность

1. (Интерполяционный многочлен Лагранжа) (a) Постройте многочлен степени n, принимающий в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значение 0, а в точке x_0 — значение 1.

(b) Постройте многочлен степени n, принимающий в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

2. (a) Имеется 17 ящиков. В одном из них лежит одна монета, во всех остальных ничего нет. Разрешается выбрать любые 11 ящиков и добавить туда по одной монете. Докажите, что такими операциями можно уравнять число монет во всех ящиках.

(b) Имеется 17 ящиков. В каждом лежит некоторое число монет. Разрешается выбрать любые 11 ящиков и добавить в каждый из выбранных ящиков по монете. Докажите, что такими операциями можно уравнять число монет в ящиках.

3. (a) По окружности стоят 1 единица и $p-1$ нуль. За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p.

(b) По окружности расставлены p целых чисел (p — простое). За ход из каждого числа вычитается его левый сосед. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p.

(c) По окружности расставлены p целых чисел (p — простое). Перед каждым ходом выбирается некое число k и из каждого числа вычитается его k-й сосед слева. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p.

4. (Китайская теорема об остатках) Для попарно взаимнопростых модулей m_i и произвольных остатков r_i существует число X такое, что $X \equiv r_i \pmod{m_i}$.

5. По кругу расставлены 128 чисел. За один ход все числа (одновременно) заменяются на сумму своих соседей (справа и слева). Докажите что через несколько ходов все числа станут четными.

6. В каждой клетке таблицы 100×100 стоит либо $+$, либо $-$. За ход можно поменять знаки в одном столбце и в одной строке одновременно. Можно ли получить любое расположение знаков, если первоначально стоят только плюсы?

7. В клетчатой таблице 4×4 идет игра "Жизнь" по следующим правилам: клетка живет, если на предыдущем ходу у нее было нечетное число живых соседей (по стороне) и умирает в противном случае. Найдите максимум периода по всем расстановкам.

Для многочлена $P(x)$ рассмотрим последовательность сумм $S_n = S_n(P) = P(1) + \ldots + P(n)$. Интересно найти явную формулу для S_n (особенно для $P(x) = x_k$).

Определение. *Дискретной производной* многочлена $f(x)$ называется многочлен $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

8. (a) Докажите, что $\deg \Delta f(x) = \deg f(x) - 1$.

(b) Пусть $P(x)$ — многочлен степени k. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ степени $k+1$, для которого $\Delta S(x) = P(x)$.

(c) Решив уравнение $\Delta S(x) = x^3$, найдите сумму $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

5 июля. Теория групп

Определение. Множество G с бинарной операцией $(\cdot\ ,\cdot)$ называется *группой*, если выполнены следующие условия:

• (*ассоциативность*) $(a,(b,c)) = ((a,b),c)$;

• (*существование нейтрального*) $\exists\ e \in G$ такой, что $(a,e) = (e,a) = a$ для любого $a \in G$;

• (*существование обратного*) $\forall\ a \in G$ существует элемент $b \in G$ такой, что $(a,b) = (b,a) = e$.

Обычно вместо (a,b) пишут $a+b$ или ab. В первом случае часто подразумевается, что $a+b = b+a$ (**Определение:** в таком случае группу называют *абелевой*), операцию называют сложением, нейтральный элемент обозначают 0, а обратный к a обозначают $-a$. Во втором случае операцию называют умножением, нейтральный элемент обозначают 1, а обратный к a обозначают a^{-1}. По возможности мы будем записывать (a,b) как ab.

1. Простейшие свойства групп.

(a) нейтральный элемент в группе единственен;

(b) для каждого элемента группы обратный к нему единственен;

(c) справедлива левая сократимость $ga = gb \Rightarrow a = b$; аналогично, правая;

(d) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;

(e) $(a^{-1})^{-1} = a$.

Определение. Подмножество группы, само являющееся группой с той же групповой операцией, называется *подгруппой.*

Определение. Число элементов группы или подгруппы называется его *порядком.*

2. Полезный критерий подгруппы. Непустое подмножество H группы G является подруппой, тогда и только тогда, когда $ab^{-1} \in H$ для любых $a, b \in H$.

Определение. Множество $aH = \{ah : a \in H\}$ называется *левым смежным классом по подгруппе* H. Аналогично определяется правый смежный класс.

3. (a) Левые смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают;

(b) $aH = bH \iff b^{-1}a \in H$;

(c) H является смежным классом по подгруппе H; если группа конечная, число элементов в любом смежном классе по подгруппе H равно $|H|$.

(d) Теорема Лагранжа. Порядок конечной группы делится на порядок любой ее подгруппы.

(e) Следствие. Порядок любого элемента конечной группы делит ее порядок.

(Наименьшее натуральное число k такое, что $a^k = 1$ называется *порядком* элемента a.)

(f) Если k — порядок элемента $a \in G$, то для любого целого m выполняется $a^m = 1$ тогда и только тогда, когда m делится на k.

4. (a) Множество всех целых степеней элемента $a \in G$ образует подгруппу группы G.

Определение. Конечная группа G порождённая одним элементом a называется циклической и обозначается (a).

(b) если порядок элемента a равен k, то $(a) = \{a, a^2, \dots, a^k = 1\}$.

(c) подгруппа (a) является наименьшей подгруппой, содержащей элемент $a \in S$.

Определение. Подгруппа H называется *нормальной подгруппой группы* G, если $aH = Ha$ для любого $a \in G$.

5. Подгруппа H нормальна в G, если для любых $h \in H, g \in G$ элемент $g^{-1}hg \in H$.

Элемент $g^{-1}hg$ называется *сопряженным к* h *с помощью элемента* g.

Определим операцию умножения смежных классов по нормальной подгруппе H следующим образом:

$$aHbH = abH.$$

6. Определенная выше операция корректна, т.е. не зависит от выбора представителей смежных классов.

7. Множество всех смежных классов по нормальной подгруппе является группой. (эта группа называется *факторгруппой* G по H и обозначается G/H.)

Определение. Пусть G и H — группы. Отображение $f : G \to H$ называется *гомоморфизмом*, если для любых $a, b \in G$ выполняется $f(ab) = f(a)f(b)$. Множества $Im\ f = \{h \in H : (\exists g \in G)(f(g) = h)\}$ и $Ker\ f = \{g \in G : f(g) = 1\}$ называются *образом* и *ядром* гомоморфизма f. Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом.*

(Изоморфные группы не различаются, хотя и могут иметь различную природу своих элементов. Например, изоморфными будут группа вычетов по модулю n, группа поворотов правильного n–угольника и группа комплексных корней n–ой степени из единицы.)

8. Образ гомоморфизма $f : G \to H$ является подгруппой группы H, а ядро — нормальной подруппой группы G.

9. Теорема о гомоморфизме.

Гомоморфный образ группы,
будь, во имя коммунизма,
изоморфен факторгруппе
по ядру гомоморфизма:

$$G/Ker\ f \cong Im\ f.$$

6 июля. Поляры

Определение. Пусть ω — окружность с центром O радиуса r, P — точка, отличная от O. *Полярой* точки P называется прямая p, перпендикулярная OP и проходящая через точку P' (образ P при инверсии относительно ω). Точка P называется *полюсом* прямой p.

1. (a) Пусть B — точка на поляре точки A, и пусть AB_1 — перпендикуляр на прямую OB. Докажите, что B и B_1 инверсны относительно ω.

(b) Докажите, что если полюс A прямой a лежит на поляре b точки B, то точка B лежит на прямой a.

Следствие. *Поляры всех точек прямой проходят через полюс этой прямой.*

(c) Пусть A, B, C — точки плоскости, a, b, c — их поляры. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда прямые a, b, c пересекаются в одной точке или параллельны.

(d) Из точки P вне окружности ω проведены касательные PM и PN. Докажите, что MN — поляра точки P.

2. Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к каждой его вершине пересекают продолжения противоположных сторон в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

3. На окружности отмечены точки A, B, C, D, E, F. Прямые AB и DE пересекаются в точке U, прямые BC и EF — в точке V, а прямые CD и FA — в точке W. (Некоторые из точек A, B, C, D, E, F могут совпадать, в этом случае в качестве соединяющей их прямой рассматривается касательная в этой точке.)

(a) Пусть X и Y — вторые точки пересечения описанной окружности треугольника BEV с прямыми AB и DE соответственно. Докажите, что соответствующие стороны треугольников XYV и ADW параллельны.

(b) (Теорема Паскаля.) При помощи пункта а) докажите, что точки U, V и W лежат на одной прямой.

(c) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную к теореме Паскаля.

4. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть E — точка пересечения его диагоналей, F — точка пересечения продолжений сторон AD и BC, G — точка пересечения продолжений сторон AB и CD, H — точка пересечения касательных к описанной окружности в точках C и D.

(a) Докажите, что точки E, F, H лежат на одной прямой.

(b) Докажите, что EF — поляра точки G, а FG — поляра точки E.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Точка O — центр его описанной окружности, T — точка пересечения диагоналей, P и Q — точки пересечения продолжений сторон. Докажите, что точки P, Q, T и O образуют *ортоцентрическую четверку* (т. е. любая из них является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими).

6. На плоскости дана окружность ω и точка A вне окружности. Одной линейкой остройте касательную из A к ω.

7. Прямая l касается вписанной окружности треугольника ABC. M, N и P — точки пересечения l со сторонами треугольника. Восставим из центра I вписанной окружности S перпендикуляры к прямым IM, IN и IP. Пусть M_1, N_1 и P_1 — точки пересечения этих перпендикуляров с соответствующими сторонами треугольника. Докажите, что точки M_1, N_1 и P_1 лежат на одной прямой, касающейся вписанной окружности треугольника.

8. Через центр вписанной окружности треугольника проведены прямые, перпендикулярные его биссектрисам. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами, на которые опущены биссектрисы, лежат на одной прямой.

6 июля. Теорема Турана

Обозначение. На протяжении всей серии n, e — количество соответственно вершин и рёбер некоторого графа G.

1. (a) Докажите, что если граф не содержит треугольников, то $e \leqslant \frac{n^2}{4}$.

(b) На каких графах без треугольников неравенство из пункта а) обращается в равенство?

2. Докажите, что если $e = \left[\frac{n^2}{4}\right]+1$, то в графе есть по крайней мере $\left[\frac{n}{2}\right]$ треугольников.

Теорема (Туран)**.** *Максимальное количество рёбер в графе на n вершинах без подграфа K_{m+1} достигается на полных m-дольных графах с почти равными долями, и только на них.*

3. Докажите теорему Турана, например, по индукции.

4. В графе 30 вершин, каждое ребро графа покрашено в красный или синий цвет так, что нет трех вершин, попарно соединенных ребрами одного цвета. Какое наибольшее количество ребер может быть в этом графе?

5. (a) Докажите, что если регулярный граф не содержит цикла длины 4, то $e < n^{3/2}$.

(b) Проделайте предыдущий пункт в случае, если граф не обязательно регулярный.

(c) Докажите, что если граф не содержит подграфа $K_{3,2}$, то $e < 2n^{3/2}$.

(d) Докажите, что если граф не содержит подграфа $K_{3,3}$, то $e < 2n^{5/3}$.

6. Даны натуральные числа s и t, причём $2 \leqslant s \leqslant t$. Докажите, что если граф не содержит подграфа $K_{s,t}$, то $e < tn^{2-\frac{1}{s}}$.

7. На плоскости дано n точек. Пришёл Вася и провёл отрезки между парами точек, расстояние между которыми равно 1. Докажите, что Вася провёл не более $2n^{3/2}$ отрезков.

6 июля. Кольца и поля

Математики не играют в баскетбол,
потому что не могут понять,
как можно попасть в поле
и не попасть в кольцо.
Фольклор

Определение. Множество K с заданными на нём бинарными операциями "+" и "·" называется *кольцом*, если:

1. K является абелевой группой по сложению;

2. Выполняется дистрибутивность: $\forall a, b, c \in K \; (a + b) \cdot c = a \cdot b + a \cdot c$.

- Если K ассоциативно по умножению: $\forall a, b, c \in K \; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, то K называется *ассоциативным*.

- Если $\exists 1 \in K : \forall a \in K \; 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, то K называют *кольцом с единицей*.

- Если K — ассоциативное кольцо с единицей, а также $\forall a, b \in K \; ab = ba$, то K называют *коммутативным*.

- Коммутативное кольцо, сожержащее не менее двух элементов, называется *полем*, если $\forall a \neq 0 \; \exists b \; a \cdot b = 1$

1. Являются ли следующие объекты кольцами, ассоциативными кольцами, кольцами с единицей, коммутативными кольцами, полями?

(a) $\mathbb{N}$; **(b)** $\mathbb{R}$; **(c)** $\mathbb{Z}$; **(d)** $\mathbb{Z}_m$; **(e)** $\mathbb{C}$; **(f)** $\mathbb{Z}[i]$; **(g)** $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$; **(h)** $\mathbb{Q}[x]$; **(i)** множество чисел вида $x + y\sqrt[3]{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$?

2. Докажите, что для любых a, b, $c \in K$ выполнены равенства:

(a) $a0 = 0a = 0$;

(b) $a(-b) = (-a)b = -ab$;

(c) $a(b - c) = ab - ac$ и $(a - b)c = ac - bc$.

3. **(a)** Докажите, что в кольце не может быть двух различных единиц.

(b) Пусть кольцо с единицей содержит не меньше двух элементов. Докажите, что $1 \neq 0$.

(c) Может ли элемент ассоциативного кольца иметь более одного обратного элемента?

4. Пусть K — конечное коммутативное кольцо, $a \in K$ таково, что $\forall b \in K \setminus \{0\}\ \ ab \neq 0$. Докажите, что a обратимо.

Таким образом, *конечное коммутативное кольцо без делителей нуля является полем.*

5. Придумайте поле из 4 элементов.

Определение. Характеристикой поля F (пишут $\operatorname{char} F$) называют минимальное натуральное число n, для которого $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ раз}} = 0$. Если таких n не существует, полагают $\operatorname{char} F = 0$.

6. Докажите, что характеристика поля — простое число.

7. Докажите, что в конечном поле с характеристикой p ровно p^n элементов для некоторого натурального n.

7 июля. Линейность в геометрии

Определение 1. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если для любой точки C, делящей отрезок AB в отношении $a : b$, выполнено равенство: $f(C) = \dfrac{b}{a+b} f(A) + \dfrac{a}{a+b} f(B)$.

Определение 2. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют a, b, c такие, что для любой точки (x, y) плоскости $f\big((x, y)\big) = ax + by + c$.

Пример. Ориентированное расстояние до прямой линейно.

Пример. Ориентированная площадь треугольника с фиксированным основанием линейна.

1. Докажите, что два этих определения равносильны.

2. a) Из линейности ор. расстояния от точки до прямой найдите ориентированное расстояние от точки $(0, 0)$ до прямой $ax + by + c = 0$.

b) Найдите расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $ax + by + c = 0$.

Что есть множество нулей линейной функции?

3. Докажите, что основания внешних биссектрис треугольника лежат на одной прямой.

4. В треугольнике ABC длины высот из точек A и C равны $2a$ и $2c$ соответственно. С центрами в A и C построены окружности радиусов a и c соответственно. Пусть l — общая внешняя касательная к этим окружностям, не пересекающая треугольник ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника, образованного прямыми AB, BC и l, лежит на AC.

5. Середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.

6. Пусть у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны пересекаются в точках P и Q. Докажите, что середины отрезков AC, BD и PQ лежат на одной прямой (*прямая Гаусса*). А если $ABCD$ описан, то там же лежит и центр вписанной в него окружности (*теорема Ньютона*).

7. Для двух данных окружностей ω_1, ω_2 найдите ГМТ середин отрезков A_1A_2 таких, что $A_1 \in \omega_1$, $A_2 \in \omega_2$ и касательные из A_1 к ω_2 и из A_2 к ω_1 равны.

Вторая пятидневка

9 июля. Векторные пространства.

Определение. *Векторным пространством* над полем F называется множество V, на котором определены операции *сложения* — отображения $+ : V \times V \to V$ и *умножения на скаляр* — отображения $\cdot : F \times V \to V$, удовлетворяющих следующим свойствам:

- V — абелева группа по операции $+$;
- $\forall v \in V \; 1 \cdot v = v$;
- $\forall \alpha, \beta \in F \; \forall v \in V \; \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$;
- $\forall \alpha, \beta \in F \; \forall v \in V \; (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$;
- $\forall \alpha \in F \; \forall v, w \in V \; \alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$.

Элементы поля F в данном контексте называются *скалярами.*

Определение. Набор $v_1, v_2, ..., v_n$ ненулевых векторов, принадлежащих V, называется *линейно зависимым*, если $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$, не все одновременно равные нулю, такие, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot v_j = 0$. Если таких $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ не существует, то набор называется *линейно независимым.*

1. Рассмотрим группу многочленов с вещественными коэффициентами как векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ с естественным умножением на скаляр. Докажите, что многочлены $x^2 + 3x + 2$, $x^2 + 4x + 3$ и $x + 2$ являются в нем линейно независимыми векторами.

2. Докажите, что четыре и более ненулевых многочлена не более, чем второй степени образовывывают в этом пространстве линейно зависимый набор.

3. Рассмотрим группу по сложению функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ как векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ с естественным умножением на скаляр. Проверьте, являются ли функции:

(a) e^x, $\sin x$, x^2

(b) $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$

линейно независимым набором векторов в этом пространстве.

Определение. Набор $v_1, v_2, \ldots, v_n$ векторов, принадлежащих V, называется системой образующих, если $\forall w \in V \; \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F : \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot v_j = w$

Определение. Векторное пространство, у которого существует конечная система образующих, называется *конечномерным векторным пространством* над полем F.

Определение. Линейно независимая система образующих называется *базисом.* Количество элементов базиса называется *размерностью* конечномерного пространства и обозначается $dim(V)$.

4. Докажите, что для конечномерного пространства следующие три числа равны:

- максимальное количество элементов в линейно независимом наборе;
- минимальное количество элементов в системе образующих;
- количество элементов в базисе.

Определение. Пусть $K \subset V$ и выполнены два условия:

- $\forall \alpha \in F, \forall k \in K$ верно, что $\alpha \cdot k \in K$;
- $\forall k, l \in K$, верно, что $k + l \in K$.

тогда векторное пространство $(K, F, \cdot)$ называется *векторным подпространством* векторного пространства $(V, F, \cdot)$.

5. Докажите, что пересечение любого семейства векторных подпространств — тоже векторное подпространство.

Определение. *Суммой векторных подпространств* $K_1, K_2, \ldots, K_n$ называется множество $K_1 + K_2 + \ldots + K_n$ всех $\sum\limits_{j=1}^{n} k_j$, где $k_1 \in K_1, k_2 \in K_3, ..., k_n \in K_n$.

6. Докажите, что сумма нескольких подпространств векторного пространства тоже является его векторным подпространством.

7. Докажите, что $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$.

9 июля. Двойное отношение

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четвёрки точек (A, B, C, D), лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$.

Определение. Двойным отношением упорядоченной четверки прямых (a, b, c, d), называется величина $(a, b, c, d) = \frac{\sin\angle(\overline{a}, \overline{c})}{\sin\angle\left(\overline{c}, \overline{b}\right)} : \frac{\sin\angle\left(\overline{a}, \overline{d}\right)}{\sin\angle\left(\overline{d}, \overline{b}\right)}$ где $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d.

1. Точки A, B, C и D лежат на на прямых a, b, c и d соответственно, а также прямой l, причём a, b, c и d пересекаются в одной точке. Докажите, что $(A, B, C, D) = (a, b, c, d)$.

2. (a) Докажите, что если $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

(b) Докажите, что $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$.

3. Докажите, что двойное отношение сохраняется при полярном преобразовании.

Вопрос. Пусть $(A, B, C, D) = k$. Какие значения может принимать двойное отношения той же четверки точек, взятых в другом порядке?

Определение. Упорядоченная четвёрка точек (или прямых) называется *гармонической*, если их двойное отношение равно -1.

4. Пусть (A, B, C, D) — гармоническая четвёрка, причём C — середина AB. Докажите, что D — бесконечно удалённая точка.

5. (a) Пусть M и N — основания внутренней и внешней биссектрис треугольника ABC с основанием BC. Докажите, что $(B, C, M, N) = -1$.

(b) Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, продолжения BC и AD — в точке F, прямые AC и BD пересекают EF в точках M и N. Докажите, что $(E, F, M, N) = -1$.

(c) Пусть у окружностей разного радиуса с центрами X, Y общие внешние касательные пересекаются в точке A, а общие внутренние касательные в точке B. Докажите, что $(A, B, X, Y) = -1$.

(d) На вещественной прямой отметим точки $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$. Докажите, что (A, B, O, X) -1 тогда и только тогда, когда координата X равна среднему гармоническому чисел a и b.

(e) Докажите, что $(A, B, C, D) = -1$ тогда и только тогда, когда C и D инверсны относительно окружности, построенной на AB как на диаметре.

6. В треугольнике ABC точки P и Q — основания соответственно внутренней и внешней биссектрис, опущенных из вершины B. Точка M — середина стороны BC. Прямые PM и AB пересекаются в точке R. Докажите, что $RQ = RB$.

7. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые AD и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что AC — биссектриса (какая-то) угла QOP.

8. В треугольнике ABC точки I и I' — центры вписанной окружности и вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Точки L и L' — точки касания этих окружностей со стороной AC. Докажите, что IL', $I'L$ и высота треугольника ABC из вершины B пересекаются в одной точке.

9. Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Прямая AB пересекается с CD в точке E, F — точка пересечения диагоналей. Описанные окружности треугольников AFD и BFC пересекаются в точке H. Докажите, что $\angle EHF = 90^\circ$.

10 июля. Задачи на векторные пространства

Определение. Линейной_оболочкой векторов $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ называется минимальное по включению подпространство V, включающее в себя вектора $v_1, v_2, ..., v_n$.

1. Докажите, что у любого набора векторов произвольного векторного пространства Vсуществует линейная оболочка, и при том ровно одна.

2. а) Вася выписал многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами степени 10, а так же $f'(x)$, $f^{''}(x)$, $\ldots$, $f^{(10)}(x)$. Найдите линейную оболочку полученного множества и ее размерность.

б) Аладдин выписал все четные функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, и все нечетные функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Найдите линейную оболочку полученного множества.

3. Докажите, что множество всех подмножеств конечного множества невозможно превратить в линейное пространство над F_5.

4. Докажите, что если у СЛУ есть только рациональные решения, то решение единственно.

5. (Альтернатива Фредгольма) Для любой системы n линейных уравнений с n неизвестными имеет место альтернатива: либо при любой правой части решение системы существует и единственно (система невырожденная), либо существует ненулевое решение ОСЛУ.

6. (Дискретное уравнение теплопроводности) В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно расставить (причем единственным образом) числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому соседних по стороне чисел.

7. В каждую клетку шахматной доски вписано по вещественному числу. Разрешается за один ход прибавить по α ко всем клеткам любого квадрата 3×3 или 4×4 (α можно менять каждый ход). Все ли расстановки чисел можно получить?

8. Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

9. $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ — непустые подмножества n-элементного множества. Докажите, что можно выбрать такие непустые непересекающиеся множества индексов $\{i_1, \ldots, i_k\}$ и $\{j_1, \ldots, j_\ell\}$, что
$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k} = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \ldots \cup A_{j_\ell}.$$

10 июля. Разнобой по теории чисел

Определение. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. *Содержанием* многочлена f называется наибольший общий делитель всех его коэффициентов. Содержание многочлена f обозначается $c(f)$.

1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

(a) Докажите, что если $c(f) = c(g) = 1$, то $c(fg) = 1$.

(b) (Лемма Гаусса) Докажите, что $c(fg) = c(f)c(g)$.

(c) Докажите, что многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим и над $\mathbb{Q}$.

2. (Критерий Эйзенштейна) Пусть все коэффициенты многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, кроме старшего, кратны простому числу p, а свободный член не кратен p^2. Докажите, что многочлен $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

3. При каких натуральных m, n выполняется равенство $\left(5 + 3\sqrt{2}\right)^m = \left(3 + 5\sqrt{2}\right)^n$?

4. Найдите все простые $p = a^2 + b^2 + c^2 (a, b, c \in \mathbb{N})$ такие, что $a^4 + b^4 + c^4 \vdots p$

5. Для последовательности натуральных $\{a_i\}$ известно, что для любых различных натуральных i и j справедливо равенство $(a_i, a_j) = (i, j)$. Докажите, что $a_i = i$ для любого i.

6. Натуральные числа $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ и f таковы, что:
- $f < a$;
- $abd + 1 \vdots c$;
- $ace + 1 \vdots b$;
- $bcf + 1 \vdots a$.

Докажите, что если $\frac{d}{c} < 1 - \frac{e}{b}$, то $\frac{d}{c} < 1 - \frac{f}{a}$.

7. Существует ли такое натуральное n, что 2^n начинается на 5, а 5^n начинается на 2?

8. Дано натуральное число $a > 1$. Для каждого натурального n положим $x_n = a^n + a^{n-1} - 1$. Докажите, что из последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, члены которой взаимно просты в совокупности.

11 июля. Неприводимые многочлены

Определение. Пусть K — коммутативное кольцо. Многочлен $f \in K[x]$ называется *неприводимым* над K, если не существует многочленов $g, h \in K[x]$ степени выше нулевой, для которых $f = gh$.

1. Докажите, что многочлены

(a) $x^2 - 2$; **(b)** $x^2 + 5$; **(c)** $x^4 - 10x^2 + 1$; **(d)** $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ при $p \in \mathbb{P}$;

(e) (эту пока можете не решать) $((x^2 - 6)^2 - 8x^2 - 60)^2 - 1920x^2$

неприводимы над $\mathbb{Z}$.

Определение. Число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется *алгебраическим*, если существует многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является α. Множество алгебраических чисел обозначается буквой $\mathbb{A}$.

2. Докажите, что существуют числа, не являющиеся алгебраическими (их называют *трансцендентными*).

Определение. Пусть α — алгебраическое число. Унитарный многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ минимальной степени, для которого $f(\alpha) = 0$, называется *минимальным* для α.

3. (a) Докажите, что минимальный многочлен неприводим.

(b) Докажите, что минимальный многочлен определён единственным образом.

Указание. Рассмотрите НОД двух различных минимальных многочленов.

(c) Пусть m_α — минимальный многочлен для α. Докажите, что если $g \in \mathbb{Q}[x]$ и $g(\alpha) = 0$, то $g \vdots m_\alpha$.

Замечание. Таким образом, если мы нашли неприводимый многочлен, обнуляющий число α, то мы нашли минимальный многочлен.

4. Найдите минимальные многочлены для следующих чисел:

(a) $\sqrt{2}$; **(b)** $i\sqrt{5}$; **(c)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; **(d)** ξ_p — корня p-ой степени из 1, где p — простое число;

(e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

5. (a) Докажите, что сумма двух алгебраических чисел — также алгебраическое число.

(b) Докажите, что произведение двух алгебраических чисел — также алгебраическое число.

(c) Докажите, что множество алгебраических чисел является полем.

6. Докажите, что следующие многочлены неприводимы над $\mathbb{Z}$:

(a) $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1$, где $a_1,a_2,\dots,a_n$ — различные целые числа;

(b) $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1$, где $a_1,a_2,\dots,a_n$ — различные целые числа.

7. Дано простое число p и натуральное $a>p+1$. Докажите, что при любых натуральных m, n многочлен $x^n(x-a)^m+p$ неприводим над $\mathbb{Z}$

11 июля. Ликбез по математическому анализу

Определение. *Точной верхней гранью* множества $A\subset\mathbb{R}$ называется число $\sup A=\{\min r\in\mathbb{R}:\forall a\in A\ ,r\geq a\}$. Если таких r не существует, примем $\sup A=+\infty$. Если A – пустое множество, примем $\sup A=-\infty$.

1. (a) Сформулируйте определение точной нижней грани.

(b) Докажите существование точной верхней грани для любого подмножества $\mathbb{R}$.

Лемма о вложенных отрезках. Для всякой системы вложенных отрезков $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$, существует хотя бы одна точка c, принадлежащая всем отрезкам этой системы.

Определение. Если для последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathbb{R}$,существует число $A\in\mathbb{R}$, удовлетворяющее следующему свойству: $\forall\epsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall n\in\mathbb{N},n>N\Rightarrow|a_n-A|<\epsilon$, то последовательность называется *сходящейся*, а число A – *пределом последовательности* a_n. Обозначается это дело так: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

2. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, то **(a)** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$; **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$; **(c)** если $B\neq0$ и $\forall n,b_n\neq0$ то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}$.

3. Докажите, что последовательность $a_n=-1+(-1)^n$ не является сходящейся.

4. Докажите, что последовательность $a_n=\sin n$ не является сходящейся.

5. Лемма о двух милиционерах Докажите, что если даны последовательности a_n , b_n , c_n и известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=X$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=X$ и $\forall n\in\mathbb{N}a_n\leq c_n\leq b_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ тоже равняется X.

Определение. Последовательность a_n называется *сходящейся в себе*, если $\forall\ \epsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall m,n\in\mathbb{N}\ m,n>N\Rightarrow|a_n-a_m|<\epsilon$

6. Докажите, что последовательность a_n имеет предел тогда и только тогда, когда она сходится в себе.

7. Докажите, что если в определении предела заменить все вхождения $\mathbb{R}$ на $\mathbb{Q}$, то утверждение предыдущей задачи будет выполняться в одну из сторон, а в другую – не будет.

Определение. Если $\forall\ c\ \exists\ n \in \mathbb{N} : a_n > c$, будем говорить, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Аналогично определяется $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

8. Докажите, что монотонная последовательность либо сходится, либо имеет предел $\pm\infty$.

9. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, c_n — ограниченная последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = 0$

10. Найдите предел последовательности $a_n =$

(a) $\dfrac{2n^6 + n^3 - n + 2}{(2n^3 + n - 2)^2}$; **(b)** $\dfrac{2^n}{n^{10}}$; **(c)** $\dfrac{\ln n}{n^2}$; **(d)** $\dfrac{\sin n}{n}$;

(e) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; **(f)** $\sqrt[n]{n}$; **(g)** $b_n = \frac{1}{n^2+n}$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

Третья пятидневка

14 июля. Дискретная вероятность

1. Колоду из 52 карт очень хорошо перетасовали.

(a) Какова вероятность того, что все трефы лежат по возрастанию достоинства?

(b) Какова вероятность того, что все трефы и все черви лежат по возрастанию достоинства?

Определение. Пусть Ω — конечное (ну или на худой конец счётное) множество. И пусть дана функция $\mathsf{P} : \Omega \to \mathbb{R}$, для которой справедливо равенство $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathsf{P}(\omega) = 1$. Тогда P называется *функцией вероятности* или *дискретной вероятностной мерой* на множестве Ω. Множество Ω называется *пространством элементарных исходов.* И всё это вместе, то есть пара (Ω, P), называется *вероятностным пространством.*

Замечание. Хочется уметь вычислять вероятность произвольного $A \subseteq \Omega$. Вот мы и положим $\mathsf{P}(A) = \sum\limits_{\omega \in A} \mathsf{P}(\omega)$.

Упражнение. Опишите в терминах вероятностных пространств известные рандомайзеры (монетка, кубик, перемешивание карт).

2. В отряде М-10 34 ребёнка. Считая, что День рождения ребёнка с равной вероятностью приходится на любой день в году, найдите вероятность того, что у каких-то двух детей День рождения совпадает.

Эта вероятность больше $\frac{1}{2}$, поэтому и у нас скорее всего такие есть.

В следующей задаче вероятностное пространство будет несчётным (ШОК!), поэтому описать его не выйдет.

3. Наугад независимо друг от друга выбираются три числа из отрезка $[0, 1]$. Какова вероятность того, что из отрезков, равных по длине этим числам, можно сложить треугольник?

Определение. События A и B называются *независимыми*, если $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$. События A_1, A_2, …, A_n называются *независимыми в совокупности*, если для любых различных i_1, …, i_k от 1 до n справедливо равенство

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}\left(A_{i_j}\right).$$

4. (a) Приведите пример трех событий A_1, A_2, A_3, которые попарно независимы, но не независимы в совокупности.

Определение. *Условной вероятностью* события A при условии B называется величина

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)},$$

при $\mathsf{P}(B) \neq 0$. Эту величину следует интерпретировать как вероятность события A в вероятностном "подпространстве", в котором событие B неизбежно.

5. (**«Зачётка работает на вас»**) Группа студентов состоит из 5 отличников, 15 хорошистов и 5 троечников. Отличники на экзамене получают пятерку с вероятностью 1, хорошисты — пятерку или четверку равновероятно, а троечники — любую случайную оценку (пятерку, четверку или тройку).

(a) Наугад выбирается студент. Чему равна вероятность, то он получит четверку или пятерку?

(b) Случайно выбираются два студента. Найдите вероятность того, что они получат пятерку и тройку (в любом порядке).

6. (**Парадокс Монти Холла**) Поздравляем! Вы дошли до супер-игры, в которой Вы можете выиграть АВТОМОБИЛЬ! Для этого вам нужно только угадать, за какой из трех дверей он скрывается. Правила просты. Вы выбираете одну из трех дверей, после чего я случайно называю одну из оставшихся дверей, за которой автомобиля нет. Затем у Вас появляется возможность изменить свой выбор, и если Вы угадываете, то автомобиль Ваш! Какую максимальную вероятность выигрыша Вы можете себе обеспечить и какой стратегии для этого надо придерживаться?

7. (a) (**Формула Байеса**) Докажите формулу

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(B \mid A) \cdot \mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(B)}.$$

(b) (**«Байесова ловушка»**) Одним утром Незнайка начал подозревать у себя синдром Мюнхгаузена[1], который встречается в мире лишь в 0.1% случаев. Доктор Пилюлькин провел над Незнайкой один тест, который оказался положительным. Известно, что вне зависимости от того, болен ли тестируемый, точность этого теста составляет 99%. Естественно, теперь Незнайка трезвонит на каждом углу, что он страдает синдромом Мюнхгаузена. Выясните, насколько на самом деле вероятно то, что Незнайка действительно им болен.

8. **«Бешеная бабулька»** На сеанс кино скупили все n билетов. За секунду до открытия зала в него ворвалась бешеная бабка и села на случайное место. Каждый последующий человек, приходя, садился на своё место, если оно свободное, иначе — на случайное не занятое. Какова вероятность, что последний человек сядет на своё место?

[1] симулятивное расстройство, при котором человек симулирует, преувеличивает на глобальном уровне или искусственно вызывает у себя симптомы болезни, чтобы подвергнуться медицинскому обследованию, лечению, госпитализации, хирургическому вмешательству и т. п.

15 июля. Последовательности

1. Найдите предел последовательности:

(a) $a_1 = 2;\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$.

(b) $a_1 = 2;\ a_{n+1} = \frac{2 \cdot a_n + \frac{1}{a_n}}{3}$.

2. Пусть a_n – возрастающая ограниченная последовательность. Докажите, что в этом случае любая последовательность b_n такая, что $b_{n+1} - 1 = b_n - \frac{a_n}{a_{n+1}}$ имеет предел.

3. Пусть $a_1 = a;\ b_1 = b;\ a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n};\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ Докажите, что последовательности a_n и b_n сходятся и при том имеют общий предел.

4. Докажите *признак Даламбера*: если члены последовательности a_n - положительные числа, и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то последовательность b_n, члены которой удовлетворяют соотношению $b_{n+1} = b_n + a_{n+1}$:

(a) сходится, если $q < 1$

(b) стремится к $+\infty$, если $q > 1$

(c) приведите пример сходящихся и стремящихся к $+\infty$ последовательностей b_n при $q = 1$

5. Выясните, сходится ли последовательность b_n, заданная следующим образом: $b_1 = 0$ $b_{n+1} = b_n + a_{n+1}$, где a_n=

(a) $\frac{2^n}{n!}$;

(b) $\frac{n!}{(n^2+2n+3) \cdot 4^n}$;

(c) $\left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^{n^2-1}$.

6. Хозяин обещает работнику платить в среднем рублей в день. Для этого каждый день он платит 1 или 2 рубля с таким расчётом, чтобы для любого натурального n выплаченная за первые n дней сумма была натуральным числом, наиболее близким к $n \cdot \sqrt{2}$ Вот величины первых пяти выплат: 1, 2, 1, 2, 1. Докажите, что последовательность выплат непериодическая.

7. Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(2n!!)^2}{2n!}$.

8. Зададим $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{N}$ с помощью следующего соотношения: $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$. Найдите $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{c_n}$.

9. Докажите, что в последовательности a_n, заданной следующим образом: $a_1 = 1000000$ $a_{n+1} = n\left[\frac{a_n}{n}\right] + n$, найдется бесконечная подпоследовательности, являющаяся арифметической прогрессией.

15 июля. Расширения полей

Определение 1. Пусть $\mathbb{K}$ и $\mathbb{L}$ — поля, причём $\mathbb{K}$ подполе $\mathbb{L}$, тогда поле $\mathbb{L}$ называется *расширением* поля $\mathbb{K}$.

Замечание. Пусть $\mathbb{L}$ является расширением поля $\mathbb{K}$, тогда $\mathbb{L}$ является векторным пространством над $\mathbb{K}$.

Определение 2. Размерность векторного пространства $\mathbb{L}$ над полем $\mathbb{K}$ называется *степенью расширения* $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ и обозначается $[\mathbb{L} : \mathbb{K}\,]$.

Определение 3. Если степерь расширения полей конечна, то и само расширерение полей называется конечным.

Обозначение. Через $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ наименьшее подполе $\mathbb{C}$, содержащее поле $\mathbb{Q}$ и элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

1. Найдите степени расширений **(a)** $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})]$; **(b)** $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}), \mathbb{Q}]$

2. Докажите, что если если $\alpha \in \mathbb{L}$, и расширение $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ конечно, то α алгебраичен над $\mathbb{K}$, причём степень минимального многочлена m_α не больше $[\mathbb{L} : \mathbb{K}\,]$.

3. Теорема о башне расширений. Пусть $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ — последовательные конечные расширения. Докажите, что расширение $\mathbb{K} \subset \mathbb{M}$ тоже конечно, причём $[\mathbb{M} : \mathbb{K}\,] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}\,] \cdot [\mathbb{L} : \mathbb{K}\,]$.

4. Найдите размерности полей $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{17})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \sqrt{10})$ над $\mathbb{Q}$.

5. Если алгебраическое число степени d лежит в расширении степени n поля $\mathbb{Q}$, то n кратно d.

6. Найдите все подполя в $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

7. Найдите все корни многочлена $x^p - x = 0$ в $\mathbb{Z}/(p)$

Лирическое отступление

Определения. Пусть $f(x)$ — многочлен. Рассмотрим многочлен от двух переменных $f(x + t)$ и разность $f(x + t) - f(x)$.

8. Докажите, что эта разность делится на t.

Стало быть, остаток от деления разности на t^2 имеет вид $p(x)t$. Многочлен $p(x)$ назовем формальной производной многочлена $f(x)$ и в дальнейшем будем писать $p(x) = f(x)'$.

Упражнение. Докажите следующие свойства формальной производной: **(a)** $c' = 0$; **(b)** $(x^n)' = nx^{n-1}$ **(c)** $(u + v)' = u' + v'$; **(d)** $(uv)' = u'v + uv'$.

9. Докажите, что корень многочлена является кратным тогда и только тогда, когда он является корнем формальной производной этого многочлена.

10. Докажите, что многочлен $x^{p^n} - x$ не имеет кратных корней над любым полем характеристики p.

16 июля. Построимость циркулем и линейкой

Цель этого листочка — научиться доказывать, что какие-то объекты нельзя построить используя циркуль и линейку. Но для этого нужно формально определить, какие именно операции мы разрешаем производить. Итак, встречайте: список того, что можно делать.

- Отмечать на плоскости (и в любой её части, ограниченной построенными кривыми) точку, обе координаты которой рациональны;

- Отмечать на построенной кривой произвольную точку с рациональной абсциссой;
- Отмечать точку пересечения двух построенных кривых;
- Проводить прямую через две отмеченные точки;
- Устанавливать раствор циркуля на расстояние между двумя отмеченными точками и проводить окружность с центре произвольной отмеченной точке и радиусом, равным длине раствора;
- Устанавливать раствор циркуля на расстояние 1.

Картинкой будем называть конечную последовательность построений.

Зафиксируем картинку. Действительное число α будем называть *построенным*, если оно равно одной из координат какой-то построенной точки или одному из коэффициентов приведённого уравнения какой-то построенной кривой.

Действительное число α будем называть *построимым*, если существует картинка, для которой α является построенным.

1. Докажите, что построимые числа образуют поле.

2. (a) Пусть картинка K_2 получается из картинки K_1 одним действием. Пусть A_1, A_2 — множества всех построенных чисел на первой и второй картинках. Положим F_1, F_2 — минимальные числовые поля, содержащие A_1 и A_2 соответственно. Докажите, что либо $F_2 = F_1$, либо $[F_2 : F_1] = 2$.

(b) Пусть α построимо. Докажите, что $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^k$ для некоторого k.

Три неразрешимые задачи древности

Проблемой построения циркулем и линейкой вплотную занимались древние греки. Самых известных таких задач было три: квадратура круга, трисекция угла и удвоение куба. Найти решение этих задач для греков означало заполнить прорехи в их почти религиозной философии, ставившей во главу угла математику и рациональность. Представьте, сколько древние греки бились над этими проблемами. Мы же, пользуясь плодами цивилизации, докажем, что их деятельность была напрасной.

3. Пользуясь тем, что число π трансцендентно, докажите, что первая задача древности неразрешима.

4. Рассмотрев число $\sin 10^\circ$, докажите, что вторая задача древности неразрешима.

5. Ну и третью прибейте под конец.

Вывод: Почти ничего построить нельзя. Расходимся.

16 июля. Ликбез по непрерывности

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}$. $f : D \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке x_0, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Определение. Функция называется непрерывной на своей области задания (или просто непрерывной), если она непрерывна во всех ее точках.

1. Докажите, что функция $f(x)$ является непрерывной на своей области задания:

(a) $x^q, q \in \mathbb{Q}$

(b) $a^x, a > 0, a \in \mathbb{R}$

(c) $\ln x$

2. Пусть a_n ограниченная последовательность вещественных чисел. Докажите, что в ней можно выбрать сходящуюся подпоследоватлеьность . Это утверждение называется *теоремой Больцано-Вейерштрасса.*

3. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Докажите, что эта функция достигает максимума на своей области задания. Это утверждение называется *теоремой Вейерштрасса.*

4. Приведите пример $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ – непрерывной функции, не достигающей максимума на своей области задания.

Четвёртая пятидневка

19 июля. Уравнение Пелля. Теория

1. Пусть $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

(a) Докажите, что $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

(b) Напишите рекуррентные и явные формулы для a_n, b_n.

(c) Выразите a_n, b_n через a_{n+1}, b_{n+1}.

(d) Пусть (a, b) — положительное решение уравнения $x^2 - 2y^2 = \pm 1$. Докажите, что $(a, b) = (a_n, b_n)$ для некоторого n.

Определение. *Уравнением Пелля* называется диофантово уравнение вида

$$x^2 - my^2 = 1,$$

где m — натуральное число, не являющееся точным квадратом.

В задаче 1 мы научились решать уравнение Пелля при $m = 2$. К сожалению, вполне обобщить такой подход на случай произвольного m не удаётся: проблема в обобщении пункта a).

Определение. *Тривиальным решением уравнения Пелля* называется решение $(1; 0)$. *Наименьшим решением уравнения Пелля* называется такое положительное решение (a, b), что a — минимальное.

Общий вид решения уравнения Пелля при произвольном m.

2. Пусть (a, b) и (c, d) — два решения уравнения Пелля. Докажите, что $(ac+mbd, ad+bc)$ — также решение уравнения Пелля.

Замечание. Отождествим пару целых чисел (x, y) с числом $x + y\sqrt{m}$. Тогда предыдущая задача может быть сформулирована так: произведение двух решений уравнения Пелля является решением уравнения Пелля.

3. Пусть (a_1, b_1) — наименьшее решение уравнения Пелля. Положим

$$a_{n+1} = a_1 a_n + m b_1 b_n; \qquad b_{n+1} = a_1 b_n + b_1 a_n.$$

(a) Найдите явный вид для a_n, b_n.

(b) Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$ пара (a_n, b_n) является решением уравнения Пелля.

(c) Выразите a_n, b_n через a_{n+1}, b_{n+1}, a_1 и b_1.

(d) Пусть (a, b) — положительное решение уравнения $x^2 - my^2 = 1$. Докажите, что $(a, b) = (a_n, b_n)$ для некоторого n.

Замечание. Таким образом, любое положительное решение уравнения Пелля имеет вид $a + b\sqrt{m} = a_n + b_n\sqrt{m} = (a_1 + b_1\sqrt{m})^n$.

Существование решения уравнения Пелля.

Определим рекуррентно последовательность квадратичных форм $g_n(x, y) = a_n x^2 + b_n xy + c_n y^2$ следующим образом:

$$g_{n+1}(x, y) = \begin{cases} x^2 - my^2, & n = 0; \\ g_n(x + y, x), & a_n + b_n + c_n < 0; \\ g_n(x, x + y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. Докажите, что:

(a) При всех n справедливо соотношение $D_n := b_n^2 - 4a_n c_n = 4m$;

(b) Последовательности a_n, b_n, c_n ограничены;

(c) Последовательности a_n, b_n, c_n зацикливаются без предпериода.

5. Пусть $g_N(x, y) = g_1(x, y)$. Для всех $n < N$ постройте нетривиальные решения уравнения $g_n(x, y) = 1$.

Указание. Положите $(x_N, y_N) = (1, 0)$ и выразите (x_n, y_n) через (x_{n+1}, y_{n+1}).

Замечание. Таким образом, доказано существование нетривиального решения уравнения Пелля.

19 июля. Уравнение Пелля. Практика.

1. Докажите, что уравнение $x^2 - 3y^2 = 13$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

Указание. Воспользуйтесь представлением решения в виде $a + b\sqrt{3}$.

2. Докажите, что уравнение $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$ имеет бесконечное количество решений в натуральных числах.

3. Найдите все пары натуральных чисел (m, n), удовлетворяющие уравнению $5^n = 6m^2 + 1$.

4. Докажите, что существует бесконечно много троек последовательных натуральных чисел, представимых в виде суммы двух квадратов целых чисел.

20 июля. Математическое ожидание и вероятностный метод

Определение. Пусть в конечном вероятностном пространстве каждому элементраному исходу, имеющему вероятность p_i соответствует число ξ_i, где i. Тогда *математическим ожидаением (expected value)* называется число $E(\xi) = \sum p_i \xi_i$. Каков естественный смысл у математического ожидания?

1. Два человека бросают кубик. Если выпадают 1 или 5, то первый платит второму k рублей, иначе — второй платит первому 1 рубль. При каком k в среднем от данной игры никто не будет в выигрыше.

2. Пользуясь естественным смыслом матожидания, решите задачу. На плоскости проведены вертикальные прямые, проходящие через все целые точки оси OX. В случайное место на плоскости кидается круг диаметра **(a)** $k \in \mathbb{Z}$; **(b)** $k \in \mathbb{R}$. Найдите матожидание кол-ва точек пересечения круга и прямых.

3. Неравенство Маркова; частный случай. Пусть ξ — случайная величина, принимающая конечное число значений. Тогда для любого $a > 0$ выполнено неравенство

$$P(|\xi| > a) \leqslant \frac{E(|\xi|}{a}. \tag{1}$$

4. Парадокс двух конвертов. Вам и вашему знакомому выдали по конверту с деньгами. В одном конверте x рублей, а в другом $10x$. Вы открыли ваш конверт и увидели сумму в 100 рублей. После этого вы можете поменяться с другом. Можете ли вы поменяться?

Напоминание. Если вероятность какого-то события меньше 1, то в некоторых случаях данное событие не удовлетворяется.

5. Барон Мюнхгаузен, вернувшись из Кытая, рассказал, что там проводится круговой чемпионат по пинг-понгу (каждые два участника встречаются ровно один раз) с очень ровным составом: каких бы 1000 участников ни взять, найдётся участник, который обыграл их всех! Не преувеличивает ли барон?

6. Пусть G — вершинный граф с e ребрами. Докажите, что G содержит двудольный подграф с не менее, чем $e/2$ ребрами.

7. Докажите, что числа $1, 2, \ldots, 2018$ можно покрасить в четыре цвета так, чтобы не было одноцветных арифметических прогрессий из 10 членов.

20 июля. Непрерывные функции

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}$. $f : D \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке x_0, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Определение. Функция называется непрерывной на своей области задания (или просто непрерывной), если она непрерывна во всех ее точках.

1. Докажите, что выпуклый многоугольник можно разделить прямой на две части равной площади.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Докажите, что $\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ на графике f найдется точка, расстояние от которой до (x_0, y_0) минимально среди всех точек на этом графике

3. Пусть $f : [a, b] \to [a, b]$ - непрерывная функция. Докажите, что $\exists x \in [a, b]$ такой, что $x = f(x)$

4. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция, и уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных решений, то уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет вещественных решений

5. Уравнение $x^3 + ax + 1 = 0$ имеет три вещественных корня. Докажите, что $\exists \epsilon > 0$ такой, что $\forall b \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ уравнение $x^3 + bx + 1 = 0$ тоже имеет три вещественных корня.

6. Докажите, что:

(a) Вокруг любого выпуклого многоугольника можно описать квадрат.

(b) В любой центрально-симметричный выпуклый многоугольник можно вписать квадрат.

7. Пусть $x_1, ..., x_n \in [0,1]$. Докажите, что $\exists x \in [0,1]$ такое, что $\sum\limits_{j=1}^{n} |x - x_n| = \frac{n}{2}$

8. На доске написано $x^3 + ...x^2 + ...x + ...$ Два школьника по очереди выписывают вместо многоточий вещественные числа. Цель первого - получить уравнение, имеющее ровно один вещественный корень. Сможет ли второй ему помешать?

21 июля. Функциональные уравнения

1. Найдите все $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующему соотношению $\forall x, y$:

(a) $f^2(xy) = f^2(x) + f^2(y)$;

(b) $f(x+y) = f(x) + y$;

(c) $f(xy) = \frac{f(x)+f(y)}{x+y}, x + y \neq 0$.

2. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению Коши: $\forall x, t \in \mathbb{R} f(x) + f(y) = f(x+y)$. Докажите следующие утверждения:

(a) $\forall x \in \mathbb{R} q \in \mathbb{Q} f(qx) = qf(x)$.

(b) Если f - непрерывная функция, то f - линейная функция, т.е $f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$.

(c) Если f - монотонная функция, то f - линейная функция.

(d) Если f - ограничена сверху на некотором непустом интервале, то f - линейная функция.

3. Найдите все $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующему соотношению $\forall x$:

(a) $2f(x) + f(\frac{1}{x}) = x$;

(b) $2f(x) + f(1-x) = x^2$.

4. Найдите все $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующему соотношению $\forall x$:

(a) $f(2x-1) = 7x^2 + 14x + 7$;

(b) $f(x^2 - 4x + 7) = x$;

(c) $f(\frac{x^2}{2} + x) = (x+1)^2$.

5. Найдите все $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующему соотношению $\forall x$: $xf(x) + f(-\frac{1}{x}) = 2, x \neq 0$.

6. Найдите все $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующему соотношению $\forall x, y$: $f(1) = 2, f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$.

7. Найдите все $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующему соотношению $\forall x, y$ $f(x+y) = f(x)cosy + f(y)cosx$.

21 июля. Потоки

Определение. *Сетью* называется ориентированный граф $G = (V, E)$, в котором выделены две вершины s (*исток*) и t (*сток*) и задана функция $c : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям

1° $\forall u, v\ (c(u, v) \geq 0)$;

2° $c(u, v) > 0 \Leftrightarrow (u, v) \in E$.

Функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Определение. *Потоком* в сети G называется функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим трем условиям:

1° $\forall\ u, v(f(u, v) \leq c(u, v))$;

2° $\forall\ u, v(f(u, v) = -f(v, u))$;

3° $\forall v \in V \setminus \{s, t\}\ \left(\sum\limits_{x \in V} f(v, x) = 0\right)$.

Число $|f| = \sum\limits_{x \in V} f(s, x)$ называется *величиной потока*. Поток сети G с максимальной величиной называется *максимальным*.

Определение. Пусть G — сеть, а множество ее вершин V разбито на два непересекающихся множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Тогда (S, T) — разрез сети G.

Величина $c(S, T) = \sum\limits_{x \in S,\ y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*, а $f(S, T) = \sum\limits_{x \in S,\ y \in T} f(x, y)$ — *потоком через разрез* (S, T). Любой разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.

1. Минимальный разрез существует.

2. Для любого потока f и разреза (S, T) сети G докажите, что $|f| = f(S, T)$.

Определение. 1) Пусть f — поток в сети G. Рассмотрим сеть G_f с теми же V, s, t, пропускной способностью $c_f(x, y) := c(x, y) - f(x, y)$ и множеством ребер $E_f = \{(u, v) \mid c_f(u, v) > 0\}$. Назовем G_f *остаточной сетью* потока f.

2) Любой путь из s в t в сети G_f называется *дополняющим путем* потока f.

Теорема Форда-Фалкерсона (L. Ford, D. Fulkerson, 1956.) В сети G с пропускной способностью c задан поток f. Докажите, что следующие три утверждения равносильны:

1° поток f максимален;

2° существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$;

3° в остаточной сети G_f нет дополняющего пути.

Следствие. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

3. Докажите, что в целочисленной сети (т. е. в сети, пропускные способности всех ребер которой являются целыми числами) существует максимальный поток, причем среди максимальных потоков данной сети найдется целочисленный.

4. Пусть (S_1, T_1) и (S_2, T_2) — минимальные разрезы в сети G. Докажите, что разрезы $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ и $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ также являются минимальными **(a)** для целочисленной сети G; **(b)** для произвольной сети G.

5. Теорема Холла В двудольном графе с долями A и B для любого подмножества $V \subseteq A$ существует не менее $|V|$ вершин доли B, смежных хотя бы с одной из вершин множества V. Тогда существует паросочетание, содержащее все вершины из A.

6. Теорема Кенига Пусть G — двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$, где $\alpha'(G)$ — количество рёбер в максимальном паросочетании и $\beta(G)$ — количество вершин в минимальном доминирующем множестве графа G.

Вопросы к зачёту

1. Группы. Базовые свойства. Абелевы группы. Примеры абелевых и неабелевых групп.

2. Подгруппы: определение и критерий.

3. Смежные классы: определение. Порядок группы и элемента. Теорема Лагранжа.

4. Нормальные подгруппы. Фактор-группа. Теорема о гомоморфизме.

5. Кольца. Определение, базовые свойства, примеры.

6. Поля. Примеры полей. Конечное кольцо без делителей нуля = поле.

7. Характеристика поля. Количество элементов в конечном поле.

8. Теорема Турана.

9. Два определения линейной функции на плоскости. Их эквивалентность. Описание множества нулей линейной функции.

10. Полярное преобразование: определение и основные свойства.

11. Теорема Паскаля и двойственная к ней.

12. Двойное отношение точек и прямых. Простейшие свойства, поведение при полярном преобразовани.

13. Гармоническая четвёрка. Примеры.

14. Лемма Гаусса. Критерий Эйзенштейна.

15. Неприводимые многочлены. Минимальные многочлены. Неприводимость и единственность приведённого минимального многочлена.

16. Алгебраические числа. Поле алгебраических чисел. Степень алгебраического числа.

17. Векторные пространства: определение, примеры. Линейная зависимость. Система образующих.

18. Определение базиса. Равносильность трех определений размерности конечномерного векторного пространства.

19. Сумма и пересечение векторных подпространств.

20. Верхние и нижние грани. Существование inf и sup.

21. Лемма о вложенных промежутках.

22. Предел последовательности, свойства пределов. Бесконечный предел.

23. Равносильность сходимости и сходимости в себе для $\mathbb{R}$ и неравносильность для $\mathbb{Q}$.

24. Дискретная вероятность. Обычные рандомайзеры в терминах дискретной вероятности.

25. Зависимые величины. Условная вероятность. Формула Байеса.

26. Парадокс Монти Холла, Байесова ловушка, задача о бабушке.

27. Расширения полей. Степень расширения. Теорема о башне.

28. Построимость циркулем и линейкой. Поле построимых чисел.

29. $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 2^k$ для построимого α.

30. Связь степени алгебраического числа и степени расширения. Три задачи древности.

31. Непрерывность функции в точке. Равносильность двух определений.

32. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

33. Теорема Вейерштрасса.

34. Лемма о среднем.

35. Уравнение Пелля. Выражение решения через наименьшее.

36. Существование решения уравнения Пелля.

37. Матожидание. Бросание окружности и отрезка на решётку.

38. Неравенство Маркова.

39. Уравнение Коши для непрерывных/монотонных/огр. на отрезке функций.

40. Теорема Форда Фалкерсона. Существование целочисленного максимального потока в целочисленной сети.

41. Теорема Холла через потоки.

42. Любое аффинное преобразование задаётся не более, чем тремя параллельными проецированиями.

43. Центральное проектирование. Проективное преобразование. Образ прямой.

44. Теорема Паппа.

Редактор *Кочкин Ваня*
TEXнический редактор *Пастор Лёша*
TEXнический редактор *Google.*
Корректор *Демидович Федя*
Корректор *Яровиков Юра*
Корректор *Холмогоров Ефим*
Поддерживала морально *Симарова Катя*

Сдано в набор в последний момент. Подписано к печати за 30 минут до печати.
Формат A5
Бумага казённая. Печать нормальная.
Тираж $\geqslant 20$.
Издательство «Принтер на тумбе»

El. Psy. Congroo.