Тридцать четвертая
Летняя Многопредметная Школа
Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2018 г.

10 класс, группа профи

Преподаватели:
А. В. Пастор, Е. Н. Симарова, Ф. В. Демидович

Вступительная олимпиада. 04.07.2018

1. В двух вершинах куба сидят Болек и Лёлек. За ход один из них переползает в соседнюю свободную вершину. Могут ли Болек и Лёлек при каком-то начальном положении переползать так, чтобы получились все возможные их расстановки на кубе ровно по разу?

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE и CF. Луч EF пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Отрезки CP и DE пересекаются в точке Q. Докажите, что треугольник APQ — равнобедренный.

3. Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 - b^4 = ab^2$. Докажите, что b является произведением трех последовательных натуральных чисел.

4. В связном графе 2018 вершин и n ребер. При каком наименьшем n из него заведомо можно удалить два ребра, имеющих общую вершину, так, чтобы связность сохранилась?

5. На плоскости выбрано 2018 прямых общего положения. Отметили все их точки пересечения. Стёрли все прямые и k отмеченных точек. При каком наибольшем k заведомо можно восстановить изначальные прямые.

6. Произведение положительных чисел $a_2, a_3, \ldots, a_{239}$ равно 1. Докажите, что $(1+a_2)^2(1+a_3)^3\ldots(1+a_{239})^{239} > 239^{239}$.

Графы. Связность и прочее. 05.07.2018

Определение. Граф называется k-связным, если в нем хотя бы $k+1$ вершина и при удалении менее, чем k вершин он остается связным.

1. Докажите, что в любом k-связном графе G ($k > 1$), содержащем хотя бы $2k$ вершин, есть простой цикл длины хотя бы $2k$.

2. В будущем графе 2000 вершин и изначально нет ребер. Двое игроков по очереди проводят новые ребра графа (кратные ребра и петли не допускаются). Игрок, после хода которого получается двусвязный граф, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Пусть G — двусвязный граф, $x \in V(G)$. Тогда в графе G существует вершина $y \neq x$ и цикл C, проходящий через x, y и все вершины, смежные с y.

4. Дан k-связный граф G такой, что $\alpha(G) \leq k$ (напомним, что $\alpha(G)$ — это размер наибольшего независимого множества графа G). Докажите, что в нем есть гамильтонов цикл.

5. В связном графе 600 вершин, причем любое его ребро входит в клику из четырех вершин (то есть, если вершины a и b соединены ребром, то найдутся такие вершины c и d, что любые две вершины из набора $\{a, b, c, d\}$ соединены ребром). Докажите, что в этом графе можно выделить остовное дерево, в котором а) менее 200: б) менее 100 вершин будут иметь степень 2.

6. Выпуклый n-угольник ($n > 3$) разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что у полученного графа (из сторон и диагоналей) есть остовное дерево без вершин степени 2.

Производная и неравенства. 05.07.2018

1. а) Найдите наибольшее значение функции $x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) и точку, в которой оно достигается. б) Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt[n]{n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

2. Пусть $x > -1$, $x \neq 0$ и $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что а) если $0 < a < 1$, то $(1+x)^a < 1 + ax$; б) если $a < 0$ или $a > 1$, то $(1+x)^a > 1 + ax$.

3. Пусть $x > 0$. Докажите, что $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

4. Пусть $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что

а) **(Неравенство Юнга.)** Если $a, b \geq 0$, то $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

б) **(Неравенство Гельдера.)** Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$, то $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$. (Докажите неравенство Гельдера при помощи неравенства Юнга).

в) **(Неравенство Минковского.)** Если $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$ и $p > 1$, то $\big((a_1+b_1)^p + \ldots + (a_n+b_n)^p\big)^{\frac{1}{p}} \leq (a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + \ldots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}$.

5. Дана дифференцируемая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[0, 1]$, такая, что $f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что найдется такая точка $x_0 \in (0, 1)$, что $f(x_0) + f'(x_0) = 0$.

6. Дана функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, которая непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Оказалось, что f имеет бесконечно много корней, но не существует такого x, что $f(x) = f'(x) = 0$. Докажите, что $f(a)f(b) = 0$.

Теорема Кэзи. 06.07.2018

1. Окружности S_1 и S_2 касаются окружности S в точках A и B соответственно; r_1 — радиус окружности S_1, r_2 — радиус S_2, R — радиус S, $a = |AB|$. Пусть окружности S_1 и S_2 касаются окружности S а) внешним; б) внутренним образом. Найдите длину отрезка общей внешней касательной к окружностям S_1 и S_2. в) Пусть окружность S_1 касается окружности S внутренним, а окружность S_2 — внешним образом. Найдите длину отрезка общей внутренней касательной к окружностям S_1 и S_2.

2. Теорема Кэзи (J. Casey, 1866). Окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются окружности S в точках A, B, C и D соответственно, причем точки A, B, C и D расположены на окружности S именно в таком порядке. Обозначим через d_{ij} длину отрезка общей касательной к окружностям S_i и S_j, причем касательная берется внешняя, если S_i и S_j касаются S одинаковым (внутренним или внешним) образом, и внутренняя в противном случае. Докажите, что $d_{12}d_{34} + d_{23}d_{14} = d_{13}d_{24}$.

3. Дан треугольник ABC, такой, что $BC > CA > AB$. Обозначим через T, T_A, T_B, T_C точки касания окружности девяти точек треугольника ABC с его вписанной окружностью и вневписанными окружностями, касающимися сторон BC, CA и AB соответственно. Докажите, что отрезки TT_B и T_AT_C пересекаются.

4. Дан угол с вершиной A и окружность, вписанная в него. Произвольная прямая, касающаяся данной окружности, пересекает стороны угла в точках B и C. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается фиксированной (т. е. не зависящей от выбора касательной BC) окружности, вписанной в данный угол а) в случае, если вершина A и исходная окружность лежат в разных полуплоскостях относительно касательной BC; б) в произвольном случае.

5. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки A_1 и B_1 соответственно так, что $A_1B_1 \parallel AB$. Окружности S_1 и S_2, лежащие вне треугольника ABC, касаются его описанной окружности и сторон AC и BC в точках A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что общая внешняя касательная этих окружностей параллельна AB.

Теорема (Обратная теорема Кэзи). *Даны окружности S_1, S_2, S_3 и S_4, причем каждой из них присвоен знак “+” или “−”. Пусть d_{ij} — длина отрезка общей касательной между окружностями S_i и S_j, причем касательная берется внешняя, если знаки одинаковые и внутренняя, если знаки разные. Известно, что $d_{12}d_{34} + d_{23}d_{14} = d_{13}d_{24}$. Тогда существует окружность, касающаяся окружностей S_1, S_2, S_3, S_4.*

6. Докажите обратную теорему Кэзи
а) в случае, когда три из четырех окружностей имеют нулевой радиус;
б*) в общем случае.

Линейная алгебра-1. 06.07.2018

0. (Письменное упражнение.) а) Вася выписал многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами степени 10, а так же $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(10)}(x)$. Найдите линейную оболочку полученного множества и ее размерность?

б) Аладдин выписал все четные функции, и все нечетные функции. Найдите линейную оболочку полученного множества.

1. Докажите, что множество всех подмножеств конечного множества невозможно превратить в линейное пространство над $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

2. В каждую клетку шахматной доски вписано по вещественному числу. Разрешается за один ход прибавить по α ко всем клеткам любого квадрата 3×3 или 4×4 (α меняется от хода к ходу). Все ли расстановки чисел можно получить?

3. Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

4. а) Докажите, что $1+xy+x^2y^2$ не представляется в виде $f_1(x)g_1(y)+f_2(x)g_2(y)$, где $f_1, f_2, g_1, g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольные функции.

б) Обобщите это утверждение на функцию $f(x, y) = 1 + xy + x^2y^2 + \ldots + x^n y^n$.

5. $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ — непустые подмножества n-элементного множества. Докажите, что можно выбрать такие непустые непересекающиеся множества индексов $\{i_1, \ldots, i_k\}$ и $\{j_1, \ldots, j_\ell\}$, что

$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k} = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \ldots \cup A_{j_\ell}.$$

6. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось не меньше чем $n+m-1$ чисел.

7. Докажите, что из $2n-1$ иррационального числа можно выбрать n чисел так, что сумма любых нескольких выбранных чисел из этих n будет иррациональной.

Уравнение Пелля. 07.07.2018

Определение 1. *Уравнением Пелля* называется диофантово уравнение вида

$$x^2 - dy^2 = 1, \tag{1}$$

где d — натуральное число, не являющееся точным квадратом (всюду в этой серии буквой d будет обозначаться именно такое число). Также можно рассматривать уравнение

$$x^2 - dy^2 = -1, \tag{2}$$

и в более общем случае

$$x^2 - dy^2 = k, \tag{3}$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. На самом деле, Джон Пелл (John Pell, 1611-1685) не занимался решением данного уравнения, так что название "уравнение Пелля" возникло в результате ошибки.

Определение 2. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ (легко видеть, что числа такого вида образуют кольцо). Пусть $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Элементом, *сопряженным с* α называется $\alpha' = a - b\sqrt{d}$. *Нормой* элемента α называется число $N(\alpha) = \alpha\alpha' = a^2 - db^2$.

0. (Письменное упражнение.) а) Докажите мультипликативность нормы. То есть для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ выполнено равенство $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$. б) Докажите, что элемент $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ является обратимым тогда и только тогда, когда $N(\alpha) = \pm 1$. в) Пусть $x, y \in \mathbb{N}$ таковы, что $x^2 - dy^2 = 1$. Докажите, что

$$\left| \sqrt{d} - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{2\sqrt{d}y^2}.$$

Замечание. В пункте б) упражнения мы построили биекцию между множеством всех целочисленному решений уравнений (1) и (2) и множеством обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Теорема. *Для любого $d \in \mathbb{N}$, не являющегося точным квадратом, уравнение* (1) *имеет бесконечно много решений в натуральных числах.*

Эту теорему мы докажем несколько позже, а в этой серии мы будем пользоваться ей без доказательства. На самом деле, практически в *всех встречающихся на практике случаях, минимальное решение уравнения можно найти подбором, после чего, способом, описанным в задаче **1**, выразить через него остальные решения.*

1. а) Пусть (x, y) и (z, t) — натуральные решения уравнения (1) такие, что $x + y\sqrt{d} < z + t\sqrt{d}$. Докажите, что тогда $x < z$ и $y < t$.

б) Назовем *наименьшим* такое натуральное решение (x_1, y_1) уравнения (1), для которого число $x_1+y_1\sqrt{d}$ является наименьшим возможным. Докажите, что пара (x, y) является целочисленным решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда $x + y\sqrt{d} = \pm(x_1 + y_1\sqrt{d})^n$ при некотором $n \in \mathbb{Z}$.

2. Докажите, что если d — простое число вида $4k+1$, то уравнение (2) имеет натуральное решение.

3. Пусть d таково, что уравнение (2) имеет натуральное решение. Обозначим через (x_1, y_1) и (z_1, t_1) наименьшие решения уравнений (1) и (2) соответственно. Докажите, что а) $x_1 + y_1\sqrt{d} = (z_1 + t_1\sqrt{d})^2$; б) пара (x, y) является целочисленным решением уравнения (2) тогда и только тогда, когда $x + y\sqrt{d} = \pm(z_1 + t_1\sqrt{d})^{2n+1}$ при некотором $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Вопрос о том, при каких d уравнение (2) разрешимо в целых числах полностью до сих пор не решен. Очевидно, что оно неразрешимо при d кратном четырем или имеющим простой делитель вида $4k + 3$. Однако этих условий недостаточно.

4. Докажите, что при $d = 34$ уравнение (2) не имеет решений в целых числах.

5. Докажите, что а) уравнение $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах; б) для любого натурального решения этого уравнения число y представимо в виде суммы квадратов двух последовательных целых чисел. в) Докажите, что уравнение $(x + 2)^3 - x^3 = y^2$ не имеет решений в целых числах.

Разнобой-1. 07.07.2018

1. В городе Нечётновске живёт n людей и есть m клубов, в которых эти люди состоят. Известно, что в каждом клубе состоит нечётное число людей, и при этом для любых двух клубов число людей, состоящих в них обоих, чётно. Докажите, что $n \geq m$.

2. Квадрат разбит на несколько прямоугольников так, что любая горизонтальная прямая пересекает ровно n прямоугольников, а любая вертикальная прямая — ровно m прямоугольников (рассматриваются только прямые, не содержащие сторон прямоугольников). Каково минимально возможное число прямоугольников разбиения?

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность S с центром O. Биссектриса угла ABD пересекает AD и S в точках K и M соответственно. Биссектриса угла CBD пересекает CD и S в точках L и N соответственно. Известно, что прямые KL и MN параллельны. Докажите, что описанная окружность треугольника MON проходит через середину отрезка BD.

4. В связном графе $2n$ вершин, причем все они степени 3. Докажите, что можно выбрать а) $n+1$; б) n ребер так, чтобы правильная раскраска в 3 цвета выбранных ребер однозначно задавала правильную раскраску в 3 цвета всех ребер графа (то есть, в любых двух разных правильных раскрасках рёбер графа в 3 цвета выбранные рёбра были бы покрашены по-разному).

5. Для каких натуральных n существуют ненулевые многочлены $P, Q \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ такие, что

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2).$$

6. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{x^7-1}{x-1} = y^5 - 1$.

Графы и многочлены. Хроматический многочлен и многочлен Татта. 09.07.2018

В данной серии мы рассматриваем конечные неориентированные графы, которые могут содержать кратные ребра и петли (такие графы часто называют *псевдографами*).

Обозначения. 1) Пусть $e = xy \in E(G)$ — ребро, не являющееся петлей. Через $G{*}e$ мы обозначим результат *стягивания* ребра e графа G. То есть, концы x и y ребра e из графа удалаются и заменяются новой вершиной z; любое ребро инцидентное одной из вершин x или y заменяется ребром, инцидентным z (второй конец этого ребра не меняется); отличные от e ребра, соединяющие x с y становятся петлями.

2) Пусть $e \in E(G)$. Через $G - e$ обозначим результат удаления ребра e из графа G (при этом удаляется только само ребро: его концы и все остальные ребра сохраняются).

3) Пусть $A \subseteq E(G)$. Через $G(A)$ обозначим подграф G, *индуцированный* на A (т. е. полученный из G удалением всех ребер, не входящих в множество A).

4) Через $c(G)$ обозначим количество компонент связности графа G.

Определение 1. Для любого натурального числа k обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов. Функция $\chi_G(k)$ называется *хроматическим многочленом* графа G.

Определение 2. Многочлен Татта $T_G(x, y)$ — это функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1° Если G — пустой граф (без ребер), то $T_G(x, y) = 1$.

2° Если $e \in E(G)$ — мост (при удалении ребра e меняется число компонент связности), то $T_G(x, y) = x \cdot T_{G*e}(x, y)$.

3° Если $e \in E(G)$ — петля, то $T_G(x, y) = y \cdot T_{G-e}(x, y)$.

4° Если $e \in E(G)$ — не мост и не петля, то

$$T_G(x, y) = T_{G*e}(x, y) + T_{G-e}(x, y).$$

Замечание. Разумеется, корректность этого определения (существование и единственность такой функции), равно как и то, что она является многочленом, нуждается в проверке.

Определение 3. Подграф графа G назовем *остовным лесом*, если он состоит из остовных деревьев всех компонент связности графа G.

Рангом множества ребер A назовем число $\rho(A) = v(G) - c(G(A))$ — количество ребер в остовном лесе графа $G(A)$.

Определение 4. Пусть $A \subseteq E(G)$. Зафиксируем любой остовный лес F графа G, содержащий в качестве подграфа некоторый остовный лес графа $G(A)$. Назовем все ребра из $E(F) \setminus A$ *важными* ребрами A, а все ребра из $A \setminus E(F)$ *лишними* ребрами A. Пусть $\rho^*(A)$ — количество важных ребер A, а $\bar{\rho}(A)$ — количество лишних ребер A.

Определение 5. *Ранговый многочлен* (или *многочлен Уитни*) графа G:

$$R_G(u, v) = \sum_{A \subseteq E(G)} u^{\rho(E(G)) - \rho(A)} v^{|A| - \rho(A)} = \sum_{A \subseteq E(G)} u^{\rho^*(A)} v^{\bar{\rho}(A)}.$$

0. (Письменное упражнение.) Пусть $e \in A'$, $A = A' \setminus e$, ранги без индексов — соответствующие ранги графа G, ранги с индексом 1 — ранги в графе $G * e$, ранги с индексом 2 — ранги в графе $G \setminus e$. Докажите, что

а) Если e — не петля, то $\rho^*(A') = \rho_1^*(A)$ и $\bar{\rho}(A') = \bar{\rho}_1(A)$.

б) Если e — не мост, то $\rho^*(A) = \rho_2^*(A)$ и $\bar{\rho}(A) = \bar{\rho}_2(A)$.

в) Если e — мост, то $\rho^*(A') + 1 = \rho^*(A)$ и $\bar{\rho}(A') = \bar{\rho}(A)$.

г) Если e — петля, то $\rho^*(A') = \rho^*(A)$ и $\bar{\rho}(A') = 1 + \bar{\rho}(A)$.

1. а) Докажите, что для любого ребра $e \in E(G)$, не являющегося петлей, выполнено равенство $\chi_G(k) = \chi_{G-e}(k) - \chi_{G*e}(k)$.

б) Докажите, что $\chi_G(k)$ является многочленом от переменной k и найдите степень этого многочлена.

2. (Теорема Татта.) Докажите, что для произвольного графа G выполняется равенство многочленов:

$$T_G(u+1, v+1) = R_G(u, v).$$

Замечание. Из теоремы Татта следует корректность построения многочлена Татта.

3. Найдите x, y, при которых значение многочлена Татта $T_G(x, y)$ равно а) количеству остовных лесов графа G; б) количеству таких подграфов H графа G, что $c(H) = c(G)$; в) количеству ациклических подграфов графа G.

4. Пусть G — плоский граф, а G^* — его двойственный граф (являющийся объединением двойственных графов его компонент связности). Докажите, что а) $T_G(x, y) = T_{G^*}(y, x)$; б) в G столько же остовных лесов, сколько и в G^*; в) количество ациклических подграфов G равно количеству подграфов графа G^* с $c(G^*)$ компонент связности, и наоборот.

5. Пусть $f(G)$ удовлетворяет следующим свойствам (здесь a, b, x_0, y_0 — константы, причем $a \neq 0$ и $b \neq 0$).

1° Если G — пустой граф (без ребер), то $f(G) = 1$.

2° Если $e \in E(G)$ — мост, то $f(G) = x_0 \cdot f(G * e)$.

3° Если $e \in E(G)$ — петля, то $f(G) = y_0 \cdot f(G - e)$.

4° Если $e \in E(G)$ — не мост и не петля, то

$$f(G) = a \cdot f(G * e) + b \cdot f(G - e).$$

Докажите, что тогда $f(G) = a^{\rho(E(G))} b^{E(G) - \rho(E(G))} \cdot T_G(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b})$.

6. Докажите, что для любого графа G и натурального числа k выполняется соотношение

$$\chi_G(k) = (-1)^{v(G) - c(G)} k^{c(G)} \cdot T_G(1 - k, 0).$$

Лемма о сегменте. 09.07.2018

1. Окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q, а также описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке PQ.

Теорема (Лемма о сегменте). *На окружности Ω отмечены точки A, B, C, D, причем отрезки AD и BC пересекаются. Окружность ω касается отрезков AD и BC в точках P и Q соответственно, а также дуги AB окружности Ω, не содержащей точек C и D. Тогда прямая PQ проходит через центры вписанных окружностей треугольников ABC и ABD.*

2. а) Докажите лемму о сегменте при помощи теоремы Кэзи.

б) Пусть R — точка касания окружностей Ω и ω (обозначения как в формулировке леммы о сегменте), J — точка пересечения биссектрисы угла BAC с прямой PQ. Докажите, что точки A, P, J, R лежат на одной окружности. в) Докажите лемму о сегменте при помощи пункта б).

3. Окружность ω касается оснований AD и BC трапеции $ABCD$, а также дуги AB описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что ω касается вписанной окружности треугольника ABC.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Окружность ω касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках P и Q, а также касается внешним образом описанной окружности треугольника AKC. Докажите, что прямая PQ проходит через центр вневписанной окружности треугольника AKC, касающейся стороны AK.

5. (Теорема Тебо.) На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Пусть I — центр его вписанной окружности; P — центр окружности, касающейся отрезков AD, BD и описанной окружности треугольника ABC; Q — центр окружности, касающейся отрезков CD, BD и описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки I, P, Q лежат на одной прямой.

6. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC. Окружность S_1 касается отрезков AL, BL и описанной окружности треугольника ABC; окружность S_2 касается отрезков CD, BD и описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что окружности S_1 и S_2 касаются и найдите точку касания.

Уравнение Пелля и цепные дроби. 10.07.2018

Определение 1. Конечной *цепной дробью* называется выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$ и $a_k \in \mathbb{N}$ при $k > 0$.

Выражения вида $\frac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k]$, где $0 \leq k \leq n$, $(P_k, Q_k) = 1$ и $Q_k > 0$, называются *подходящими дробями* к цепной дроби.

Выражения вида $\alpha_k = [a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n]$ называются *полными частными* или *остатками* цепной дроби.

Определение 2. *Бесконечной цепной дробью* называется выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}},$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$ и $a_k \in \mathbb{N}$ при $k > 0$. Понятия *подходящей дроби* и *полного частного* для бесконечной цепной дроби определяются аналогично случаю конечной дроби. *Значением* бесконечной цепной дроби называется предел последовательности ее походящих дробей.

Цепная дробь $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ называется *периодической*, если последовательность (a_i) периодическая. Периодическая цепная дробь обозначается $[a_0; a_1, \ldots, a_\ell, \overline{a_{\ell+1}, \ldots, a_{\ell+t}}]$ или $[\overline{a_0; a_1, \ldots, a_{t-1}}]$, если дробь чисто периодическая.

В прошлом году мы доказывали следующие свойства.

Теорема. 1) *Любое рациональное число единственным образом раскладывается в конечную цепную дробь с $a_n \neq 1$.*

2) *Для любой бесконечной цепной дроби последовательность ее подходящих дробей имеет конечный предел. Этот предел иррационален. Любое иррациональное число единственным образом раскладывается в бесконечную цепную дробь.*

3) *Число α раскладывается в бесконечную периодическую цепную дробь тогда и только тогда, когда оно является квадратичной иррациональностью. Период чистый тогда и только тогда, когда когда квадратичная иррациональность является приведенной (т. е. $\alpha > 1$ и $-1 < \alpha' < 0$, где α' — квадратичная иррациональность, сопряженная с α).*

4) *Подходящие дроби и полные частные цепной дроби α удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1} = (-1)^k \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\alpha_{k+1}P_k + P_{k-1}}{\alpha_{k+1}Q_k + Q_{k-1}}.$$

0. (Письменное упражнение.) Разложите в цепную дробь $\sqrt{29}$.

1. а) Пусть α — приведенная квадратичная иррациональность. Докажите, что квадратичная иррациональность $\beta = -\frac{1}{\alpha'}$ также приведенная и период цепной дроби β состоит из чисел периода α, записанных в обратном порядке.

б) Пусть $d \in \mathbb{N}$ не является точным квадратом. Докажите, что тогда $\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_k, 2a_0}]$, где $a_0 = [\sqrt{d}]$, причем последовательность $a_1, \ldots, a_k$ симметрична (т. е. $a_1 = a_k$, $a_2 = a_{k-1}$, …).

2. Пусть $d \in \mathbb{N}$ не является точным квадратом. Докажите, что а) при разложении $\sqrt{d}$ в цепную дробь, все полные частные имеют вид $\alpha_n = \frac{A_n + \sqrt{d}}{B_n}$, где A_n и B_n —целые числа, задаваемые следующими рекуррентными соотношениями: $A_{n+1} = a_n B_n - A_n$, $B_{n+1} = \frac{d - A_{n+1}^2}{B_n}$, $A_0 = 0$, $B_0 = 1$; б) при этом $A_n \geq 0$ и $B_n > 0$ при всех n.

3. Докажите, что при всех n выполнено равенство

$$P_n^2 - dQ_n^2 = (-1)^{n+1} B_{n+1},$$

где $\frac{P_n}{Q_n}$ — подходящая дробь к $\sqrt{d}$.

4. Пусть $\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_k, 2a_0}]$. Докажите, что $B_{n+1} = 1$ тогда и только тогда, когда $n + 1 \,\vdots\, k + 1$.

Замечание. Таким образом, если k нечетно, то пара (P_k, Q_k) является решением уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$. Более того, это решение является минимальным, поскольку в упражнении к предыдущей серии мы доказали, что для любого решения уравнения Пелля $\left|\sqrt{d} - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{2\sqrt{d}y^2} < \frac{1}{2y^2}$, а в прошлом году мы доказывали, что такое неравенство может выполняться только для подходящих дробей.

При четном k пара (P_k, Q_k) является решением уравнения $x^2 - dy^2 = -1$. В этом случае, минимальное решение уравнения Пелля имеет вид (P_{2k}, Q_{2k}). Разумеется, проще всего его найти возведя в квадрат выражение $P_k + Q_k\sqrt{d}$.

5. При помощи описанного выше метода найдите наименьшие решения уравнений $x^2 - 29y^2 = -1$ и $x^2 - 29y^2 = 1$.

Выпуклая геометрия. Что, если измерений больше чем 2? 10.07.2018

Определение 1. Множество точек называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит весь отрезок между ними.

Определение 2. *Выпуклой комбинацией* точек a_1, a_2, …, a_n называется точка вида $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$, где α_i — неотрицательные числа с суммой 1.

Определение 3. *Выпуклой оболочкой* множества A, называется пересечение всех выпуклых множеств содержащих A. Выпуклую оболочку множества A будем обозначать $\mathsf{conv}(A)$.

1. Докажите, что выпуклая оболочка множества $A \subset \mathbb{R}^n$ есть множество всех конечных выпуклых комбинаций точек из A.

2. Пусть A и B — выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $\mathsf{conv}(A \cup B)$ состоит из всех отрезков, соединяющий точку из A с точкой из B.

3. а) Пусть V — векторное пространство размерности n над полем F и $v_1, \ldots, v_{n+2}$ — векторы в нем. Докажите, что существует такая их нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n+2} v_{n+2} = 0$, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+2} = 0$.

б) **(Теорема Радона.)** Докажите, что любые $n+2$ точки в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на две группы так, что выпуклые оболочки этих групп пересекаются.

4. (Теорема Хелли.) а) Пусть конечное семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ таково, что любые $n+1$ из них имеют общую точку. Докажите, что все эти множества имеют общую точку. б) Верна ли теорема Хелли для бесконечного числа выпуклых множеств? в) А для выпуклых и ограниченных?

Определение 4. Множество называется замкнутым, если вместе с любой сходящейся последовательностью точек также содержит предел этой последовательности.

5. (Теорема Хелли, бесконечный вариант.) Дан счетный набор замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, причем хотя бы одно из них ограничено. Любые $n+1$ из них имеют общую точку. Докажите, что все они имеют общую точку.

6. (Теорема Каратеодори.) Пусть A — произвольное множество из $\mathbb{R}^n$. Докажите, что любая точка из $\mathsf{conv}(A)$ является выпуклой комбинацией некоторых $n+1$ точек из A.

Многочлены деления круга. 11.07.2018

Определение 1. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ — первообразные корни степени n из единицы. *Многочленом деления круга порядка* n называется многочлен $\Phi_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{\varphi(n)} (x - \varepsilon_k)$.

0. (Письменное упражнение.) а) Напишите в явном виде многочлены $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$, $\Phi_4(x)$, $\Phi_p(x)$, где p — простое.

б) Докажите, что $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$, где произведение берётся по всем натуральным делителям d числа n.

в) Докажите, что $\Phi_n(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Определение 2. *Функция Мебиуса* $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ такова, что $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$, если n есть произведение k различных простых чисел и $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат какого-либо простого числа.

1. Докажите, что $\Phi_n(x) = \prod\limits_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(n/d)}$.

2. Пусть n — натуральное, p — простое.

а) Докажите, что если n делится на p, то $\Phi_{np}(x) = \Phi_n(x^p)$.

б) Докажите, что если n не делится на p, то $\Phi_{np}(x) = \frac{\Phi_n(x^p)}{\Phi_n(x)}$.

в) Докажите, что если $n > 1$ — нечётно, то $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

3. Пусть a, n — натуральные числа, причём $(a, n) = 1$. Докажите, что $\Phi_n(x^a) = \prod_{d|a} \Phi_{nd}(x)$.

4. Пусть $n > 2$. Найдите а) $\Phi_n(1)$; б) $\Phi_n(-1)$.

5. Докажите, что число $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ содержит в разложении на простые множители как минимум n простых чисел (возможно, совпадающих).

6. Докажите, что $\Phi_n(x)$ возрастает на промежутке $[1, +\infty)$.

7. Докажите, что

а) $\Phi_n(2) > \frac{1}{4} \cdot 2^{\varphi(n)}$ при всех натуральных n;

б) $\Phi_n(2) > n$ при всех натуральных $n > 1$, кроме $n = 6$.

Реберные раскраски и теорема Визинга. 11.07.2018

Определение 1. *Раскраской ребер* графа G в k цветов называется отображение $\rho : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$. Будем говорить, что в раскраске ρ цвет i *представлен* в вершине v, если хотя бы одно из инцидентных v ребер покрашено в цвет i. Количество цветов, представленных в вершине v мы будем обозначать $\rho(v)$.

Определение 2. Будем говорить, что ρ — *оптимальная* раскраска ребер графа G в k цветов, если для любой другой раскраски ρ' ребер этого графа в k цветов выполняется неравенство

$$\sum_{v \in V} \rho(v) \geq \sum_{v \in V} \rho'(v).$$

Определение 3. Раскраска ребер графа G называется *правильной*, если любые два ребра, имеющие общий конец, покрашены в разные цвета.

Реберное хроматическое число графа $\chi'(G)$ — это наименьшее количество цветов, для которого существует правильная раскраска ребер графа G.

1. Пусть G — связный граф, отличный от цикла нечетной длины. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждой вершине степени не менее двух были представлены оба цвета.

2. Пусть ρ — оптимальная раскраска ребер графа G в k цветов. Вершина v и цвета i и j таковы, что в вершине v хотя бы два раза представлен цвет i и не представлен цвет j. Рассмотрим граф H, полученный из G удалением всех ребер, кроме ребер цветов i, j. Докажите, что компонента связности графа H, содержащая вершину v, — простой цикл нечетной длины.

3. (D. König, 1916.) Пусть G — двудольный граф. Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G)$. (Напомним, что через $\Delta(G)$ обозначается наибольшая степень вершины графа G, а через $\delta(G)$ — наименьшая.)

4. (R. P. Gupta, 1966.) Пусть G — двудольный граф, $\delta(G) = d$. Докажите, что существует раскраска ребер графа G в d цветов, в которой в каждой вершине представлены все d цветов.

5. (В. Г. Визинг, 1964.) Докажите, что $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Внутренний матбой. 12.07.2018

1. 100 человек устраиваются работать на 100 различных вакантных мест. Каждый из двух агентов по трудоустройству предложил каждому из этих 100 человек одно определённое место, причём разным людям — разные места. Каждый из 100 претендентов принял одно из двух предложений, и оказалось, что все места заполнены. Докажите, что если бы каждый принял другое предложение, все места тоже оказались бы заполненными.

2. Докажите, что для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ найдётся многочлен $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ такой, что $Q(x^{2018}) \,\vdots\, P(x)$.

3. Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до n. Известно, что сумма чисел на всех карточках равна $k \cdot n!$, где k — целое число. Доказать, что карточки можно разложить на k групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, написанных на карточках, равнялась $n!$.

4. Пусть $p = 1601$ (простое число), а $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, равная сумме тех дробей,

$$\frac{1}{0^2+1}, \frac{1}{1^2+1}, \ldots, \frac{1}{(p-1)^2+1},$$

знаменатели которых не делятся на p. Докажите, что $2m + n$ делится на p.

5. По кругу стоят 2010 цифр, каждая из которых равна 1,2 или 3. Известно, что при любом k в любом блоке из $3k$ чисел каждая из цифр 1, 2, 3 встречается не больше $k+10$ раз. Докажите, что существует блок из нескольких подряд идущих цифр, в котором цифр каждого вида поровну.

6. Вне параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K, лежащая внутри угла CBD, так, что $\angle CBD = \angle ABK$. Отрезки AK и BD пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle OCK < \angle ODA$.

7. Палиндромическим разбиением натурального числа A называется запись A в виде суммы натуральных слагаемых $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, где $a_i = a_{n+1-i}$. Например, $16 = 16$, $16 = 2 + 12 + 2$ и $16 = 7 + 1 + 1 + 7$ — палиндромические разбиения числа 16. Найдите количество всех паллиндромических разбиений числа 2018.

8. На плоскости проведено несколько прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. В каждой из ограниченных областей, на которые они делят плоскость, поставлена 1 или -1. За один ход можно взять любые 3 прямые и умножить на -1 числа во всех областях, попавших внутрь треугольника, образованного этими прямыми. Верно ли, что для любого набора прямых все числа можно сделать равными 1?

9. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно такие, что $S(AED) = S(ABF) = S(ABCD)/2$. Докажите, что прямая EF делит диагональ AC на две равные части.

10. Про положительные числа a, b, c известно, что

$$\frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{a^2+c^2+1} + \frac{1}{b^2+c^2+1} \geq 1.$$

Докажите, что $ab + bc + ac \leq 3$.

Многочлены деления круга-2. 15.07.2018

Определение. Пусть K — поле, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$. *Производной* многочлена f называется многочлен $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.

0. (Письменное упражнение.) Докажите, что производную суммы и произведения многочленов над произвольным полем можно вычислять по тем же формулам, что и для функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (т.е. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$).

Замечание. В случае поля ненулевой характеристики, производная отличного от константы многочлена может быть равна нулю. Например, в поле характеристики p имеем $(x^p)' = px^{p-1} = 0$, поскольку в таком поле $p = 0$. Так что используя понятие производной многочлена над полем ненулевой характеристики нужно быть особенно внимательным.

1. а) Пусть $f(x) \in K[x]$, $a \in K$ — кратный корень многочлена f. Докажите, что тогда $f'(a) = 0$. б) Докажите, что если многочлены $f(x)$ и $f'(x)$ взаимно просты, то в разложение $f(x)$ на неприводимые множители каждый множитель входит с показателем 1.

2. Пусть p — простое, n, m — натуральные. Докажите, что а) если $n \not\vdots\, p$, то у многочлена $x^n - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$ не может быть кратных корней; б) если $nm \not\vdots\, p$, то многочлены $\Phi_n(x)$ и $\Phi_m(x)$ взаимно просты как элементы $\mathbb{F}_p[x]$.

Теорема 1 (Теорема Дирихле об арифметической прогрессии)**.** *Числа $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{Z}$ таковы, что $(a,b) = 1$. Тогда среди чисел вида $ak+b$, где $k \in \mathbb{N}$, бесконечно много простых.*

Доказательство этой теоремы в общем виде находится далеко за рамками нашей программы. Но для $b = 1$ мы уже можем ее доказать.

3. а) Пусть p — простое, $n \not\vdots\, p$ — натуральное, a — целое. Докажите, что $\Phi_n(a) \,\vdots\, p$ тогда и только тогда, когда a принадлежит показателю n по модулю p. б) **(Частный случай теоремы Дирихле.)** Докажите, что для каждого натурального n существует бесконечно много простых чисел вида $kn+1$.

Теорема 2. *Многочлен $\Phi_n(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.*

Предположим, что $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — многочлен, входящий в разложение $\Phi_n(x)$ на неприводимые множители, ε — корень f. Для доказательства теоремы 2 нам нужно проверить, что $f = \Phi_n$.

4. Пусть $p \in \mathbb{P}$, $(p, n) = 1$. Предположим, что $f(\varepsilon^p) \neq 0$. Рассмотрим многочлен g из разложения $\Phi_n(x)$ на неприводимые множители, корнем которого является ε^p. Докажите, что $g(x^p) \vdots f(x)$.

5. Теперь рассмотрим многочлены f и g как многочлены над полем $\mathbb{F}_p$. а) Докажите, что как многочлены над $\mathbb{F}_p$ они не взаимно просты. б) Выведете из этого то, что описанная ситуация невозможна, т.е. на самом деле, $f(\varepsilon^p) = 0$.

6. Докажите, что $f = \Phi_n$ и, тем самым, завершите доказательство теоремы 2.

Разнобой-2. 15.07.2018

1. Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите неравенство
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \ldots + \frac{1}{[a_1, a_2, \ldots, a_n]} \leq 2.$$

2. Дано простое число $p > 2$. Иван посчитал все остатки от деления чисел $1!, 2!, \ldots, (p-1)!$ на p. Докажите, что он получил больше, чем $\sqrt{p}$ различных остатков.

3. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Точка B_2 симметрична точке B_1 относительно прямой A_1C_1, а точка B_3 — точка пересечения BB_2 и AC, аналогично определяются точки A_3 и C_3. Докажите, что точки A_3, B_3 и C_3 лежат на одной прямой, проходящей через центр описанной окружности треугольника ABC.

4. Есть табло из лампочек размера 8×8. За ход можно инвертировать 15 лампочек — все лампочки в некоторой строке и некотором столбце. За какое наименьшее число ходов можно инвертировать все лампочки на табло?

5. Найдите все многочлены с вещественными коэффициентами $P(x)$ такие, что
$$P(x) \cdot P(2x^2 - 1) = P(x^2) \cdot P(2x - 1)$$
для каждого $x \in \mathbb{R}$.

6. 13 четырехэлементных подмножеств множества M обладают следующим свойством: для любых двух элементов M ровно одно из 13 подмножеств содержит оба эти элемента. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать так, чтобы каждый элемент M входил не более, чем в три из них?

Определение. Граф G называется *k-критическим*, если $\chi(G) = k$ (то есть, граф имеет правильную раскраску в k цветов, но не имеет в $k-1$ цвет), а для любого подграфа H графа G выполнено $\chi(H) \leq k-1$.

7. Докажите, что k-критический граф является $(k-1)$-рёберно связным (то есть остается связным после удаления любых $k-2$ рёбер).

Графы: потоки и потоковые многочлены. 16.07.2018

Определение 1. Множество G с определенной на нем бинарной операцией $*: G \times G \to G$ называется *группой* $(G, *)$, если выполнены следующие соотношения:

1) ***ассоциативность*:** для любых $a, b, c \in G$ выполнено, что $(a * b) * c = a * (b * c)$;

2) ***наличие нейтрального элемента*:** существует $e \in G$, такой, что $e * a = a * e = a$;

3) ***наличие обратного элемента*:** для любого $a \in G$ существует $a^{-1} \in G$, такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Группа называется *абелевой*, если есть коммутативность, то есть для любых элементов $a, b \in G$ выполнено, что $a * b = b * a$.

Замечание. Для абелевой группы ее групповая операция часто называется сложением и обозначается знаком “+”. Нейтральный элемент в этом случае обозначается “0”, а обратный к a элемент обозначается “$-a$”.

Определение 2. Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный граф, возможно содержащий петли и кратные ребра, и H — абелева группа. Мы определим *H-циркуляцию*, как функцию $f : V \times V \times E \to H$ со следующими свойствами:

(f1) если $f(x, y, e) \neq 0$, то $e = xy \in E$;

(f2) если $x, y \in V(G), x \neq y$, то $f(x, y, e) = -f(y, x, e)$;

(f3) для любой вершины $x \in V$ верно, что $\sum\limits_{y \in V \setminus \{x\},\ e \in E} f(x, y, e) = 0$.

Будем говорить, что H-циркуляция f *невырождена* на ребре $e = xy$, если $f(x, y, e) \neq 0$. H-циркуляция, невырожденная на всех ребрах G называется *H-потоком*.

Определение 3. Пусть $x, y \in V$ — вершины графа G и $S, T \subset V$ — подмножества множества его вершин. Введем следующие обозначения:

$$f(x, y) = \sum_{e \in E} f(x, y, e), \quad f(x, T) = \sum_{y \in T} f(x, y), \quad f(S, y) = \sum_{x \in S} f(x, y),$$

$$f(S,T)=\sum_{x\in S,\ y\in T} f(x,y).$$

0. (Письменное упражнение.) Пусть $V=S\cup T$, $S\cap T=\varnothing$. Тогда для любой H-циркуляции f выполнено, что $f(S,T)=0$.

Определение 4. Пусть $k\in\mathbb{N}$. Тогда k-поток в графе G — это такой $\mathbb{Z}$-поток f, что $|f(x,y,e)|<k$ для всех x,y,e.

1. Докажите, что в графе есть 2-поток тогда и только тогда, когда все степени его вершин четны.

Определение 5. Пусть G — граф, H — абелева группа. Через $\Phi_G(H)$ обозначим число H-потоков в графе G.

2. а) Пусть $e=xy\in E$ — не петля. Докажите, что $\Phi_G(H)=\Phi_{G*e}(H)-\Phi_{G-e}(H)$.

б) Докажите, что для графа G существует такой многочлен $\varphi_G\in\mathbb{Z}[x]$ что для конечной абелевой группы выполнено, что $\Phi_G(H)=\varphi_G(|H|)$, где $|H|$ — количество элементов группы H.

Определение 6. Потоковым многочленом графа G называется многочлен $\varphi_G(k)$.

3. Пусть $e=xy\in E$. Докажите, что выполнены следующие утверждения а) если e — мост, то $\varphi_G(k)=0$ и $\chi_G(k)=(k-1)\cdot\chi_{G*e}(k)$; б) если e — петля, то $\varphi_G(k)=(k-1)\varphi_{G-e}(k)$ и $\chi_G(k)=0$.

4. Для любого графа G и натурального числа k докажите соотношение

$$\varphi_G(k)=(-1)^{e(G)+v(G)+c(G)}\cdot T_G(0,1-k).$$

5. Пусть G — плоский граф, G^* — его двойственный, $k\in\mathbb{N}$. Докажите, что $\chi_G(k)=k^{c(G)}\cdot\varphi_{G^*}(k)$.

6. а) **(Теорема Матиясевича.)** Для любого графа G докажите равенство:

$$\chi_G(k)=\frac{(k-1)^{e(G)}}{k^{e(G)-v(G)}}\sum_{A\subseteq E}\frac{\varphi_{G(A)}(k)}{(1-k)^{|A|}}$$

(подграф $G(\varnothing)$ считаем пустым, а его потоковый многочлен равным 1).

б) Для плоского графа G докажите равенство

$$\chi_G(k)=\frac{(k-1)^{e(G)}}{k^{e(G)-v(G)}}\sum_{A\subseteq E}\frac{\varphi_{G^*(A^*)}(k)}{(1-k)^{|A|}\cdot k^{c(G^*(A^*))}}.$$

7. а) Докажите, что граф имеет k-поток тогда и только тогда, когда он имеет $\mathbb{Z}_k$-поток. б) Пусть H — абелева группа порядка k. Докажите, что $\Phi_G(H) > 0$ тогда и только тогда, когда G имеет k-поток. в) Докажите, что граф G имеет 4-поток тогда и только тогда, когда $G = G_1 \cup G_2$ и оба графа имеют только четные степени вершин.

Разная алгебра: кольца, поля, линейность. 16.07.2018

Определение. *Характеристикой* поля F называется такое наименьшее число $p \in \mathbb{N}$, что $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p \text{ слагаемых}} = 0$. Если такого p нет, то характеристика поля считается равной нулю.

0. (Письменное упражнение.) Докажите, что а) характеристика всякого поля — простое число или ноль; б) в любом поле F характеристики $p > 0$ для любых $x, y \in F$ выполняется соотношение $(x+y)^p = x^p + y^p$.

1. Докажите, что количество элементов в конечном поле равно p^n для некоторого простого p и натурального n.

Замечание. Поле из $q = p^n$ элементов обозначается через $\mathbb{F}_q$. Можно доказать, что при всех $p \in \mathbb{P}$ и $n \in \mathbb{N}$ такое поле существует и единственно с точностью до изоморфизма.

2. Пусть $q = p^n$, где $p \in \mathbb{P}$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что а) любой элемент поля $\mathbb{F}_q$ является корнем многочлена $x^q - x$. б) любой элемент поля $\mathbb{F}_q$ является корнем ненулевого многочлена степени не более, чем n, с коэффициентами из $\mathbb{F}_p$.

3. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}_q$. а) Сколькими способами в V можно выбрать базис? б) Сколько в V линейных подпространств размерности m (где $m \leq n$)?

4. Существуют ли такие матрицы A и B размера $n \times n$, что $AB - BA = E_n$?

5. Есть 101 корова. Если убрать любую из них, то оставшихся можно разделить на два равных по весу и численности стада. Докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса а) целые; б) рациональные; в) вещественные.

6. (Неравенство Фишера.) Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — различные непустые подмножества n-элементного множества. Пересечение любых двух различных множеств из этого набора состоит из k элементов. Докажите, что $m \leq n$.

Матбой 9-10 ПРОФИ. 17.07.2018

1. На доске написаны 10 натуральных чисел. За один ход разрешается пару чисел a, b заменить на их сумму и модуль разности. Верно ли, что такими операциями всегда можно сделать все числа равными?

2. Многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами таков, что для любого иррационального α число $P(\alpha)$ иррационально. Докажите, что степень многочлена P не выше 1.

3. Существует ли множество точек на плоскости, которое пересекается с любым треугольником площади 1 по конечному непустому подмножеству?

4. В школе 3 класса по n человек. У каждого ученика не менее $\frac{3}{4}n$ знакомых в каждом из других классов. Докажите, что можно разбить всех школьников на группы по 3 попарно знакомых человека так, чтобы в каждой группе были люди из разных классов.

5. Даны взаимно простые натуральные числа m и n. Натуральные числа $a_1, a_2 \ldots a_n$ не превосходят m, а натуральные $b_1, b_2 \ldots b_m$ не превосходят n. Докажите, что можно выбрать по несколько чисел из каждого набора с равными суммами.

6. Дано натуральное число n и произвольные вещественные числа $a_1, a_2 \ldots a_n$. Докажите, что для любого подмножества $S \subset \{1, 2, \ldots n\}$ выполнено неравенство

$$\left(\sum_{i \in S} a_i\right)^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (a_i + \ldots + a_j)^2.$$

7. Даны окружность ω с центром O и точка T вне ее. Касательные из точки T к окружности ω касаются ее в точках B и C. Окружности ω_1 и ω_2 расположены в треугольнике TBC, касаются окружности ω внешним образом и касаются друг друга в точке J; кроме того, ω_1 касается отрезка TB в точке K, ω_2 касается отрезка TC в точке H. Точка I -— центр вписанной окружности треугольника OBC. Докажите, что четырехугольник $BKJI$ вписанный.

8. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка P, а на сторонах AC и BC точки S и T таким образом, что $AP = AS$ и $BP = BT$. Описанная окружность треугольника PST вторично пересекает стороны AB и BC в точках Q и R соответственно. Прямые PS и QR пересекаются в точке L. Докажите, что прямая CL делит отрезок PQ пополам.

9. Докажите, что для любых натуральных $d > 1$ и m в последовательности $a_n = 2^{2^n} + d$ найдутся два числа a_k и a_ℓ $(k \neq \ell)$, у которых наибольший общий делитель больше m.

10. Существует ли такая функция f, сопоставляющая бесконечным целочисленным последовательностям целые числа, что:
1) $f(u+v)=f(u)+f(v)$ (последовательности складываются почленно);
2) Если у последовательности v конечное число ненулей, то $f(v)=0$;
3) Для некоторой последовательности u выполнено $f(u)\neq 0$.

Матбой 10 ПРОФИ – преподаватели. 17.07.2018

1. На доске написаны 10 натуральных чисел. За один ход разрешается пару чисел a, b заменить на их сумму и модуль разности. Верно ли, что такими операциями всегда можно сделать все числа равными?

2. Найдите все непостоянные многочлены $P(x)$ такие, что

$$P(2x^2-1)=\frac{1}{2}P^2(x)-1.$$

3. Существует ли множество точек на плоскости, которое пересекается с любым треугольником площади 1 по конечному непустому подмножеству?

4. В школе 3 класса по n человек. У каждого ученика не менее $\frac{3}{4}n$ знакомых в каждом из других классов. Докажите, что можно разбить всех школьников на группы по 3 попарно знакомых человека так, чтобы в каждой группе были люди из разных классов.

5. Даны взаимно простые натуральные числа m и n. Натуральные числа $a_1, a_2 \ldots a_n$ не превосходят m, а натуральные $b_1, b_2 \ldots b_m$ не превосходят n. Докажите, что можно выбрать по несколько чисел из каждого набора с равными суммами.

6. Дано натуральное число n и произвольные вещественные числа $a_1, a_2 \ldots a_n$. Докажите, что для любого подмножества $S \subset \{1, 2, \ldots n\}$ выполнено неравенство

$$\left(\sum_{i\in S} a_i\right)^2 \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (a_i+\ldots+a_j)^2.$$

7. Даны окружность ω с центром O и точка T вне ее. Касательные из точки T к окружности ω касаются ее в точках B и C. Окружности ω_1 и ω_2 расположены в треугольнике TBC, касаются окружности ω внешним образом и касаются друг друга в точке J; кроме того, ω_1 касается отрезка TB в точке K, ω_2 касается отрезка TC в точке H. Точка I — центр вписанной окружности треугольника OBC. Докажите, что четырехугольник $BKJI$ вписанный.

8. Четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны, вписан в окружность с центром в точке O. Касательные к этой окружности в точках A и C вместе с прямой BD образуют треугольник Δ. Докажите, что описанные окружности треугольников BOD и Δ касаются.

9. Докажите, что для любых натуральных $d > 1$ и m в последовательности $a_n = 2^{2^n} + d$ найдутся два числа a_k и a_ℓ $(k \neq \ell)$, у которых наибольший общий делитель больше m.

10. Существует ли такая функция f, сопоставляющая бесконечным целочисленным последовательностям целые числа, что:
1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$ (последовательности складываются почленно);
2) Если у последовательности v конечное число ненулей, то $f(v) = 0$;
3) Для некоторой последовательности u выполнено $f(u) \neq 0$.

Геометрия. Проективная и не только. 19.07.2018

1. (Теорема о дважды перспективных треугольниках.) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O, и прямые AB_1, BC_1 и CA_1 пересекаются в одной точке O_1. Докажите, что прямые AC_1, BA_1 и CB_1 тоже пересекаются в одной точке O_2.

2. (Теорема о трижды перспективных треугольниках.) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O, прямые AA_1, BC_1 и CB_1 пересекаются в одной точке O_1 и прямые AC_1, BB_1 и CA_1 пересекаются в одной точке O_2. Докажите, что прямые AB_1, BA_1 и CC_1 тоже пересекаются в одной точке O_3.

3. Пусть M, N и K — точки касания вписанной окружности треугольника ABC его сторон. Q — центр окружности, проходящей через середины отрезков MN, NK и KM. Докажите, что точка Q, центр описанной окружности и центр вписанной окружности треугольника лежат на одной прямой.

4. Внутри $\triangle ABC$ расположены 3 окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и двух других окружностей. Пусть A_1 — точка касания двух окружностей, касающихся стороны BC, аналогично определяются точки касания B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны.

5. На окружности ω взяты точки A, M, B, C, N, D в указанном порядке. Пусть O — точка пересечения отрезков AC, BD и MN, а ω_1

и ω_2 — окружности, описанные около треугольников AOB и COD соответственно. Прямая MN вторично пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PM = NQ$.

6. В проективной плоскости дан треугольник ABC и точка S, не лежащая не на одной из его сторон. Пусть P, Q и R — точки пересечения прямых AS, BS и CS соответственно с прямыми BC, CA и AB, а L, M и N — точки, четвертые гармонические к тройкам BCP, CAQ и ABR соответственно. Докажите, что точки L, M и N лежат на одной прямой.

7. Можно ли на плоскости отметить 21 белую и 21 черную точку, так чтобы для каждой точки хотя бы 20 из 21 "разноцветных" прямых (содержащих данную точку и противоположную ей по цвету) содержали еще ровно одну отмеченную точку.

Символы Якоби или еще раз о законе взаимности. 19.07.2018

Определение 1. Пусть $n > 1$ — нечетное число и $n = p_1 p_2 \dots p_r$ — разложение n на простые множители (среди которых могут быть равные). Пусть далее $(a, n) = 1$. Тогда *символ Якоби* $\left(\frac{a}{n}\right)$ определяется равенством

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)\dots\left(\frac{a}{p_r}\right).$$

Замечание. В отличии от символа Лежандра, $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ не означает, что a квадратичный вычет по модулю n. Придумайте контрпример сами!

0. (Письменное упражнение.) Докажите следующие свойства символа Якоби. а) $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)$; б) $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$; в) $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$.

1. Умножение всех элементов приведенной системы вычетов по нечетному простому модулю p на вычет $a \not\equiv 0 \pmod p$ производит в ней перестановку.

а) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то получившаяся перестановка четна.

б) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p, то она нечетна.

2. Пусть p и q — различные нечетные простые числа. Рассмотрим два множества $M = \{0, 1, \dots, pq-1\}$ и $\overline{M} = \{(a, b) \mid 0 \le a < p,\ 0 \le b < q\}$. Каждому элементу $x \in M$ поставим в соответствие пару $\overline{x} = (x_p, x_q) \in \overline{M}$, где $x_p \equiv x \pmod p$ и $x_q \equiv x \pmod q$. Заметим (поймите это!), что данное отображение будет биекцией между M и $\overline{M}$.

Рассмотрим пару отображений $f, g : \overline{M} \to \overline{M}$, заданную следующими равенствами: $f(a, b) = \overline{a + pb}$ и $g(a, b) = \overline{qa + b}$. Соответствующие им отображения из M в M мы также будем обозначать буквами f и g.

а) Докажите, что f и g — перестановки на множестве $\overline{M}$.

б) Докажите, что перестановка f четна тогда и только тогда, когда $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$.

в) Рассмотрим перестановку $f \circ g^{-1}$ на множестве M. Вычислите число инверсий этой перестановки.

г) **(Доказательство Золотарёва.)** При помощи предыдущих пунктов докажите квадратичный закон взаимности:

$$\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

3. (Квадратичный закон взаимности для символов Якоби.) Пусть m, n — взаимно простые нечетные числа, большие 1. Докажите, что

$$\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}}.$$

4. Докажите, что $3^n - 1$ не делится на $2^n - 1$ ни при каком натуральном $n > 1$.

5. Пусть $x_1 = 1, y_1 = 100,\ x_{n+1} = x_n^{237} + y_n,\ y_{n+1} = y_n^{237} + x_n$. Докажите, что $x_n y_n$ не делится на 239 ни при каком натуральном n.

6. Даны $a, b \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{P}$ такие, что $a \not\vdots\ 2$ и $a^2 + b^2 = p$. Докажите, что a — квадратичный вычет по модулю p.

Линейность в геометрии. 20.07.2018

Определение 1. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если для любой точки C, делящей отрезок AB в отношении $a : b$, выполнено равенство: $f(C) = \dfrac{b}{a+b} f(A) + \dfrac{a}{a+b} f(B)$.

Определение 2. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют a, b, c такие, что для любой точки (x, y) плоскости $f\big((x, y)\big) = ax + by + c$.

Замечание. На самом деле, эти определения равносильны. Примерами линейных функций являются ориентированное расстояние от точки до прямой и ориентированная площадь треугольника (у которого две вершины фиксированы, а третья — переменная). Из второго определения очевидно, что множеством нулей линейной функции может быть либо прямая, либо плоскость, либо пустое множество.

Определение 3. Будем говорить, что объект *движется линейно*, если существует такой вектор $\overrightarrow{v}$, что за время t объект сдвигается на вектор $t \cdot \overrightarrow{v}$.

Замечание. Сформулируем данное определение более строго. Под *объектом* в данном случае понимается произвольное множество точек плоскости $X \subset \mathbb{R}^2$ (например, прямая или одна точка). *Движение* объекта — это функция $F : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, которая каждому вещественному t ставит в соответствие подмножество $F(t) \subset \mathbb{R}^2$. Движение называется *линейным*, если существует такой вектор $\overrightarrow{v}$, что для любых $t_0, t \in \mathbb{R}$ множество $F(t_0 + t)$ получается из $F(t_0)$ параллельным переносом на вектор $t \cdot \overrightarrow{v}$.

0. (Письменное упражнение.) а) Докажите равносильность определений 1 и 2. б) Докажите, что пересечение двух линейно движущихся прямых движется линейно. в) Докажите, что проекция линейно движущейся точки на линейно движущуюся прямую движется линейно.

1. Середины отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что 8 треугольников $A_iB_jC_k$ можно так разбить на 2 группы, что суммы площадей в группах равны.

2. В четырехугольнике $ABCD$ точка X — пересечение биссектрис углов ABC и CDA, точка Y — пересечение биссектрис углов BCD и DAB. Точка Z — пересечение биссектрис двух углов, полученных при продолжении противоположных сторон $ABCD$ до пересечения. Докажите, что точку Z и биссектрисы, при пересечении которых она образуется, можно выбрать так, что точки X, Y и Z будут лежать на одной прямой.

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка X такова, что $CX \perp BD$. Из точки X опущены перпендикуляры XB' и XD' на прямые AB и AD, $B' \in AB$, $D' \in AD$. Докажите, что $BB' \cdot BA = DD' \cdot DA$.

4. Дан треугольник ABC. На прямой AC выбраны точки M и N такие, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$. X — основание перпендикуляра из M на BC, Y — основание перпендикуляра из N на AB, H — ортоцентр ABC. Докажите, что B, X, Y и H лежат на одной окружности.

5. Для двух данных окружностей ω_1, ω_2 найдите ГМТ середин отрезков A_1A_2 таких, что $A_1 \in \omega_1$, $A_2 \in \omega_2$ и касательные из A_1 к ω_2 и из A_2 к ω_1 равны.

6. а) Дан треугольник ABC. На прямой AC выбрана точка X_1. Из нее проведена прямая, антипараллельная AB, которая пересекла BC в точке X_2. Из нее проведена прямая, параллельная AC, которая пересекла AB в точке X_3. Из нее проведена прямая, антипараллельная BC и т. д. Докажите, что $X_7 = X_1$.

б) Докажите, что точки $X_1, \ldots, X_6$ лежат на одной окружности **(окружность Такера)**.

в) Докажите, что ее центр лежит на прямой, соединяющей центр описанной окружности и точку Лемуана.

Итерации преобразований отрезка. 20.07.2018

1. Пусть для функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $f(n+1) > f(f(n))$. Докажите, что $f(n) = n$ при всех n.

Определение 1. Обозначим через Id_X (или просто Id) *тождественное отображение* множества X в себя (т.е. $Id(x) = x$ для любого $x \in X$).

Отображение $h : X \to X$ назовем *инволюцией*, если $h(h(x)) = Id_X(x)$.

2. а) Пусть $f(x) = x+1$ и $g(x) = x-1$ — функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Подберите две инволюции h и k таким образом, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнялись соотношения $h(k(x)) = f(x)$ и $k(h(x)) = g(x)$. б) Докажите, что каждая биекция множества на себя есть композиция двух инволюций.

Определение 2. *Неподвижной точкой* отображения f называется такая точка x из его области определения, что $f(x) = x$.

3. Докажите, что непрерывное отображение $f : X \to \mathbb{R}$, где X — некоторый промежуток на вещественной оси, обладает неподвижной точкой в каждом из следующих случаев:

а) $X = [a, b]$, $f(X) \subset X$;

б) $X = [a, b]$, $f(X) \supset X$;

в) $X = (a, b)$, f — инволюция.

4. а) Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная, монотонно возрастающая функция, такая, что $f([a, b]) \subset [a, b]$. Докажите, что для каждого $x_0 \in [a, b]$ последовательность $x_n = f(x_{n-1})$ имеет предел, являющийся неподвижной точкой функции f. б) Верно ли это, если функция убывающая?

5. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $x_0 \in \mathbb{R}$. Положим $x_k = f(x_{k-1})$. Докажите, что если для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$ последовательность $\frac{1}{n} \sum_{0 \le k < n} f(x_k)$ ограничена, то f обладает неподвижной точкой.

6. Существует ли непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая при всех $x \in \mathbb{R}$ уравнению $f(f(x)) = F(x)$, в следующих случаях: а) $F(x) = -x$; б) $F(x) = e^x$; в) $F(x) = x^2 - 2$.

Выпуклость в неравенствах: неравенство Караматы и прочее. 21.07.2018

Определение 1. Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз* на отрезке $[a, b]$, если для любых $x, y \in [a, b]$ и любых $\alpha, \beta \geq 0$ таких, что $\alpha + \beta = 1$ выполняется неравенство $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$. Функция f называется *выпуклой вверх* на отрезке $[a, b]$, если при тех же условиях выполняется аналогичное неравенство со знаком $\geq$.

Аналогично, можно говорить о выпуклости вниз (вверх) на интервале, полуинтервале, луче или всей вещественной прямой.

1. Функция f выпукла вниз на интервале (a, b).

а) **(Лемма о трех хордах.)** Докажите, что для любых $x, y, z \in (a, b)$, таких, что $z < y < x$, выполнено неравенство

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

б) Пусть $x, y, z, t \in (a, b)$, $x \geq y \geq z \geq t$ и $x + t = y + z$. Докажите, что тогда $f(x) + f(t) \geq f(y) + f(z)$.

в) Докажите, что у выпуклой непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в любой точке существуют односторонние производные, которые совпадают всюду, за исключением не более чем счетного множества точек.

Теорема 1 (Критерий выпуклости). *Функция f дважды дифференцируема на (a, b). Тогда*

1) *функция f выпукла вниз на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие $f''(x) \geq 0$;*

2) *функция f выпукла вверх на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие $f''(x) \leq 0$.*

Теорема 2 (Неравенство Йенсена). *Пусть функция f выпукла вниз на отрезке $[a, b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Тогда* $\quad f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$.

Определение 2. Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — невозрастающие наборы вещественных чисел (т.е. $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots \geq x_n$ и $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \ldots \geq y_n$). Набор X *мажорирует* набор Y, если выполнены следующие условия:

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$;

2) для любого $1 \leq k \leq n$ выполняется неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geq \sum\limits_{i=1}^{k} y_i$.

Если X мажорирует Y, мы будем писать $X \succ Y$ или $Y \prec X$.

Теорема 3 (Неравенство Караматы). *Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ — выпуклая вниз функция, $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in (a,b)$ и $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда*

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n).$$

Замечание. Разумеется, если функция f выпукла вверх, то во всех перечисленных выше неравенствах знак заменяется на противоположный.

2. а) Пусть $X \succ Y$. Докажите, что набор Y может быть получен из набора X при помощи конечной последовательности следующих операций: числа x_i и x_j ($x_i > x_j$) заменяются соответственно на числа $x_i - d$ и $x_j + d$, где d — такое положительное число, что при указанной замене не нарушается неубывающий порядок (т.е. $x_i > x_i - d \geq x_{i+1}$, $x_{j-1} \geq x_j + d > x_j$ и $x_i - d \geq x_j + d$). б) Докажите неравенство Караматы.

3. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\,.$$

4. (Неравенство Сегё.) Пусть $\phi(x)$ — выпуклая вниз функция и $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2n-1} \geq 0$. Докажите, что

$$\phi(a_1) - \phi(a_2) + \phi(a_3) - \ldots + \phi(a_{2n-1}) \geq \phi(a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1}).$$

5. (Неравенство Швейцера.) Пусть $M \geq a_k \geq m > 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM} \cdot n^2.$$

6. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$a\sqrt{\frac{a+c}{b}} + b\sqrt{\frac{b+a}{c}} + c\sqrt{\frac{c+b}{a}} \geq \sqrt{2}(a+b+c).$$

Разнобой-3. 21.07.2018

1. а) В клетках доски $2 \times n$ лежит 2^n конфет. Каждую минуту Вася находит две конфеты, лежащие в одной клетке, и перекладывает одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую конфету съедает. Докажите, что Василий может действовать так, чтобы в некоторый момент хотя бы одна конфета оказалась в правом верхнем углу.

б) В клетках доски $2 \times n$ лежит $2^{n+1} - 2$ конфет. Каждую минуту Вася находит две конфеты, лежащие в одной клетке, и перекладывает одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую конфету съедает. Докажите, что вне зависимости от порядка действий Василия рано или поздно хотя бы одна конфета окажется в правом верхнем углу.

2. (Прямая Обера.) На плоскости даны 4 прямые. Каждые три из них образуют треугольник. Докажите, что ортоцентры этих четырех треугольников лежат на одной прямой.

3. Петя задумал слово длины 1000, состоящее только из букв a и b. Вася может спросить у Пети, является ли некоторое слово s подсловом задуманного слова, и получить честный ответ. Докажите, что Вася может гарантированно отгадать слово, придуманное Петей, за 1012 вопросов.

4. В городе 57 автобусных маршрутов, расположенных так, что выполняются следующие условия: 1) с любой остановки можно попасть на любую другую без пересадки; 2) любые два маршрута имеют ровно одну общую остановку; 3) в любом маршруте как минимум 3 остановки. Сколько остановок может быть в маршруте?

5. Докажите, что в выпуклом шестиугольнике площади S всегда можно провести диагональ, отсекающую от него треугольник площади не более $\frac{S}{6}$.

6. Дано множество из 102 элементов. Можно ли в нем выбрать 102 17-элементных подмножества так, чтобы пересечение любых двух подмножеств содержало не более 3 элементов?

Заключительная олимпиада. 23.07.2018

1. Даны вещественные числа a, b и c. Известно, что $\{ab\} = \{bc\} = \{ac\} = \frac{1}{2}$. Докажите, что a, b и c иррациональны.

2. В вершинах выпуклого 2018-угольника стоят нули и единицы. Докажите, что этот многоугольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы суммы чисел в вершинах любых двух треугольников отличались не более, чем на 1.

3. На доске 100×100 стоят 2550 ладей и k фишек. Ладьи не бьют сквозь фишки. При каком наименьшем k ладьи могут не бить друг друга?

4. Точки M и N — основания высот из вершин A и C остроугольного треугольника ABC. Пусть $AB \neq BC$, а точка O — середина AC. Пусть R — точка пересечения биссектрис углов ABC и MON. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ANR и CMR лежит на прямой AC.

5. Существует ли такое $k > 2$, что последовательность

$$a_n = \text{НОК}(n+1, n+2, \ldots, n+k)$$

возрастает начиная с некоторого номера n?

. . . .

Заключительная олимпиада. Вывод

6. Докажите, что вершины связного графа на n вершинах можно пронумеровать натуральными числами от 1 до n так, чтобы для любых k и l между вершинами с такими номерами существовал путь длины не более, чем $3|k-l|$.

7. В остроугольном треугольнике ABC отмечена точка Фейербаха F (т. е. точка касания вписанной окружности треугольника ABC с окружностью девяти точек), A_1 — основание высоты на стороне BC. Докажите, что прямая, симметричная FA_1 относительно BC, перпендикулярна IO, где O — центр описанной окружности треугольника ABC, I — центр его вписанной окружности.

8. Даны натуральные числа $k < n$ и положительные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_{k+1}} + \frac{x_2}{x_3+x_4+\ldots+x_{k+2}} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_k} \geq \frac{n}{k^2}.$$