Гармонический четырёхугольник

Определение 1: Вписанный четырёхугольник $ABCD$ называется гармоническим, если произведения его противоположных сторон равны.
Определение 2: Вписанный четырёхугольник $ABCD$ называется гармоническим, если касательные к его описанной окружности в двух противоположных вершинах пересекаются в точке, лежащей на прямой, содержащей две другие вершины этого четырёхугольника (или параллельны ей).
Определение 3: Вписанный четырёхугольник $ABCD$ называется гармоническим, если его диагонали являются симедианами углов, четырёхугольника.

1. а) Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ касательные в точках A и C пересекаются в точке, лежащей на диагонали BD (либо параллельны ей). Докажите, что этот четырёхугольник гармонический в смысле определения 1; б) Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является симедианой угла DAB. Докажите, что этот четырёхугольник является гармоническим смысле определения 1.

2. Докажите, что все три определения гармонического четрыёхугольника равносильны между собой.

3. CI биссектриса угла BCA треугольника ABC. CD — симедиана треугольника ABC. Точка D — пересечение симедианы с описанной окружностью. Докажите, что DI — биссектриса угла BDA.

4. а) Пусть N — середина диагонали AC гармонического четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle BNC = \angle DNC$.
б) Теперь N — середина диагонали AC вписанного четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если $\angle BNC = \angle DNC$, то четырёхугольник $ABCD$ — гармонический.

5. В окружности S проведены две параллельные хорды, AB и CD. Прямая, проведённая через C и середину AB, вторично пересекает S в точке E. Докажите, что DE — симедиана треугольника ABD.

6. Две неравные окружности ω_1 и ω_2 касаются внутренним образом окружности ω в точках A и B. Пусть C и D — точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Прямая CD пересекает ω в точках E и F. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках E и F, пересекаются на прямой AB.

7. Биссектрисы внешнего и внутреннего углов A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках E и F соответственно. Окружность, построенная на отрезке EF как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках A и X. Докажите, что AX — симедиана треугольника ABC