Геометрический разнобой.

1. В треугольнике ABC выполнено $AB < AC < BC$. Точка D — середина меньшей дуги AB описанной окружности треугольника. Прямая AD пересекает прямую BC в точке E. Описанная окружность треугольника BDE вторично пересекает AB в точке Z. Описанная окружность треугольника ADZ вторично пересекает AC в точке H. Докажите, что $AH = BE$.

2. Точка D – середина основания AB равнобедренного треугольника ABC. На отрезке AB выбрана произвольная точка E, точка O – центр описанной окружности треугольника ACE. Докажите, что перпендикуляр к DO в точке D, перпендикуляр из точки E к прямой BC и прямая, проходящая через B и параллельная AC пересекаются в одной точке.

3. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках C и D. Через точку C проведен отрезок AB так, что C — середина отрезка AB, точка A лежит на S_1, точка B лежит на S_2. Точка P — середина той дуги AD окружности S_1, которая не содержит точку C. Точка Q — середина той дуги BD окружности S_2, которая не содержит точку C. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна прямой CD.

4. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника POQ лежит на прямой AC.

5. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр O треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω.

6. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Касательные к этой окружности в точках B и C пересекаются в точке P, окружность радиуса PB с центром в точке P пересекает биссектрису угла A в точке Q, расположенной внутри ABC, а прямые OQ и BC пересекаются в точке D. Наконец, точки E и F — основания перпендикуляров, опущенных из Q на прямые AC и AB соответственно. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

7. В треугольнике ABC серединный перпендикуляр к BC пересекает прямые AB и AC в точках A_B и A_C соответственно. Обозначим через O_a центр окружности, описанной около треугольника AA_BA_C. Аналогично определим O_b и O_c. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $O_aO_bO_c$, касается описанной окружности исходного треугольника.