Проективные преобразования

1. Чевианы AA', BB', CC' пересекаются в точке Q. Пусть $A'B'$ пересекается с AB в точке C_1 (далее аналогично). Докажите, что A_1, B_1, C_1 коллинеарны.

2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в P, AB и CD — в R, BC и DA — в Q. Через точку P проведена прямая, параллельная RQ, пересекающая противоположные стороны четырехугольника в точках X и Y. Докажите, что $PX = PY$.

3. Точки A, B, C и D лежат на окружности, SA и SD — касательные к этой окружности, P и Q — точки пересечения прямых AB и CD, AC и BD соответственно. Докажите, что точки P, Q и S лежат на одной прямой.

4. В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. K, L, M, N — точки пересечения пар прямых AB и CD, AC и BD, AF и DE, AE и DF. Докажите, что если три из этих точек лежат на одной прямой, то и четвёртая точка лежит на этой прямой.

5. В окружность S вписан шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.

6. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D, а продолжений сторон AB и AC — в точках E и F. Пусть T — точка пересечения прямых BF и CE. Докажите, что точки A, D и T лежат на одной прямой.