Вероятностный метод

Идея: Чтобы доказать, что в определённом множестве присутствует элемент с заданными свойствами, можно посчитать вероятность появления данных свойств у предмета и понять, что она больше нуля.

1. Рассмотрим вероятностный эксперимент, в котором каждое из ребер полного графа G на n вершинах красится в один из двух цветов (красный и синий). Всевозможные раскраски считаем равновероятными. а) Какова вероятность того, что ребро e синее? б) Какова вероятность того, что все ребра полного подграфа на k вершинах синие?

2. Рассмотрим полный граф на n вершинах. Оказалось, что как бы мы ни покрасили его ребра в 2 цвета, всегда найдется полный подграф на k вершинах, в котором все ребра одного цвета. Докажите, что а) $C_n^k 2^{1-C_k^2} \geqslant 1$. б) левая часть неравенства как функция от n возрастает. в) $n > [2^{k/2}]$.

3. Пусть $p \in [0,1]$, m и n — натуральные числа. Докажите неравенство

$$\left(1-p^m\right)^n + \left(1-(1-p)^n\right)^m \geqslant 1.$$

4. Рассмотрим двудольный граф $G = (V, E)$ с n вершинами. Пусть для каждой вершины $v \in V$ задан список $S(v)$ из более чем $\log_2 n$ цветов. Докажите, что существует правильная раскраска графа G, приписывающая каждой вершине v цвет из ее списка $S(v)$.

5. Барон Мюнхгаузен, вернувшись из Кытая, рассказал, что там проводится круговой чемпионат по пинг-понгу (каждые два участника встречаются ровно один раз) с очень ровным составом: каких бы 1000 участников ни взять, найдётся участник, который обыграл их всех! Не преувеличивает ли барон?

6. В каждой клетке таблицы $(2n+1) \times (2n+1)$ находится лампочка, каждая из которых может быть либо включена, либо выключена. Для каждой строки и каждого столбца имеется переключатель, который меняет положение всех лампочек в соответствующей линии. Докажите, что можно так переключить несколько выключателей, что включенных лампочек будет хотя бы на $\dfrac{(2n+1)^2 \cdot C_{2n}^n}{2^{2n}}$ больше, чем выключенных.