Производная и промежутки монотонности

Определение по Коши. Дано произвольное метрическое пространство X. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной* на X, если

$$\forall a \in X \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in X : (dist(a, x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

1. Докажите, что функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ является непрерывной на X тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$, т.е. множество $f^{-1}(U) = \{x \in X | f(x) \in U\}$ является открытым в X.

2. Докажите, что непрерывная функция на компакте:
а) ограничена;
б) достигает своего наибольшего и наименьшего значения.

3. Дано метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой компактное множество X в нём и непрерывная на X функция f. Докажите, что наибольшее значение f на X достигается либо на границе X, либо в точке, где производные по направлению всех осей равны нулю, либо в точке, где некоторые производные по направлению не существуют.

4. С помощью предыдущей задачи докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

5. **(Теорема Ролля)** Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема во всех внутренних точках отрезка и $f(a) = f(b)$, то f' имеет корень на интервале (a, b).

6. **(Формула Лагранжа)** Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема во всех внутренних точках отрезка, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

7. Докажите, что если на каком-то промежутке непрерывная и дифференцируемая функция имеет производную больше (меньше) нуля, то она возрастает (убывает).

Матбой обычных групп

1. Пусть дан остроугольный треугольник ABC. Обозначим через D основание перпендикуляра, опущенного из A на сторону BC, M — середина BC, а H — ортоцентр треугольника ABC. Пусть E — точка преесечения описанной окружности Γ треугольника ABC и луча MH, а прямая ED вторично пересекает Γ в точке F. Докажите, что $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$.

2. На столе $n \geqslant 10^{100}$ конфет. Два игрока по очереди берут со стола либо любое натуральное количество конфет, кратное 19, либо количество конфет, являющееся целой неотрицательной степенью числа 2. Докажите, что первый игрок может действовать так, чтобы взять последнюю конфету независимо от действий второго игрока.

3. Каждое натуральное число от 1 до n домножили на некоторую степень двойки с неотрицательным целым показателем, после чего все числа сложили. Полученная сумма также оказалась степенью двойки. При каких n такое возможно?

4. Найдите все функции f такие, что $(f(x+y))^2 = f(x^2) + f(y^2)$ для всех целых x и y.

5. Древний компьютер умеет выполнять только одно действие: к числу он может прибавить 1, а затем в полученном числе поменять все цифры, чтобы все нули стояли в конце, а все ненулевые цифры — в начале как угодно. В компьютер ввели число 12345 и после 400 операций загорелось число 100000. Сколько раз на экране компьютера загоралось число, оканчивающееся на 0?

6. Дана последовательность $\{a_n\}$, в которой $a_{n+1} = a_n^2 + 5a_n + 1$ при $n > 0$. Могут ли все члены такой последовательности, быть составными?

7. Для оклейки кубика $n \times n \times n$ имеется неограниченный набор полосок ширины 1, каждая из которых состоит из целого числа клеток. Какое наименьшее число полосок необходимо взять, чтобы оклеить кубик в один слой (оклеивать разрешается так, чтобы каждая клетка полоски покрывала на поверхности кубика какую-то клетку целиком)?

8. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а D — точка пересечения прямой AO с отрезком BC. Известно, что $OD = BD = \frac{1}{3}BC$. Найдите углы треугольника ABC.