Локальная лемма

Определение. События A_1, A_2, ..., A_n называются *независимыми*, если вероятность того, что происходят несколько из них равна вероятности вероятностей этих событий, т.е. для любых различных A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{in}

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{in}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \ldots P(A_{in})$$

Определение. Условной вероятностью события A при наступлении события B (обозначается как $P(A|B)$) называется отношение вероятности одновременного наступления событий A и B к вероятности события B, т.е. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

1. Пусть A_1, A_2, ..., A_n — какие-то события. За $\overline{A_i}$ будем обозначать дополнения событий A_i. Докажите, что

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}) = (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2|\overline{A_1})) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i}))$$

Локальная лемма Ловаса: $A_1, \ldots, A_n$ — события, D — ориентированный граф на вершинах $1, \ldots, n$, так что любое A_i независимо от событий A_j при $\{j \mid j \neq i$ и в j не ведет ребро из $i\}$. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1)$, так что для любого i

$$P(A_i) \leqslant x_i \prod_{\overrightarrow{ij} \in D} (1 - x_j).$$

Тогда

$$P(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \overline{A_i}) \geqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 - x_i) > 0.$$

2. Рассмотрим какую-то событие A_i и соответствующую ему вершину, а также произвольное подмножество S множества чисел от 1 до n (не включая i). Давайте индукцией по мощности S доказывать, что $P(A_i|\bigcap_{j \in S} \overline{A_j}) \leqslant x_i$

a) Пусть S_1 — множество вершин из S, в которые входит стрелка из A_i, а S_2 — множество остальных вершин из S. Докажите, что

$$P(A_i|\bigcap_{j \in S} \overline{A_j}) = \frac{P(A_i \cap (\bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j})|\bigcap_{l \in S_2} \overline{A_l})}{P(\bigcap_{j \in S_1} \overline{A_j}|\bigcap_{l \in S_2} \overline{A_l})}$$

b) Докажите, что числитель дроби не превосходит

$$x_i \prod_{\overrightarrow{ij} \in D} (1 - x_j)$$

c) Докажите, используя предположение индукции, что знаменатель не меньше

$$\prod_{\overrightarrow{ij} \in D} (1 - x_j)$$

d) Выведите из предположения индукции утверждение локальной леммы.

3. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ - события, каждое из которых независимо от всех остальных кроме не больше чем d событий, и $P(A_i) \leqslant \frac{1}{e(d+1)}$. Докажите, что $P(\bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \overline{A_i}) > 0$.

4. В конечном множестве S выбрано несколько k-элементных подмножеств, так что любой элемент из S принадлежит ровно k выбранным подмножествам, $k \geqslant 9$. Докажите, что можно покрасить элементы S в два цвета, так чтобы каждое из выделенных подмножеств содержало элементы обоих цветов.

5. а) По окружности расставлены $11n$ разноцветных бусин - по 11 бусин каждого из n цветов. Докажите, что можно выбрать n бусин разных цветов, никакие две из которых не находятся рядом друг с другом на окружности.

б) В графе степень каждой вершины не превосходит Δ. Все вершины раскрасили в r цветов, так что вершин каждого цвета оказалось не меньше чем $2e\Delta + 1$. Докажите, что можно выбрать r вершин разных цветов, попарно не соединенных ребрами.

6. Докажите, что для любого натурального k найдется такое натуральное m, что для любого $S \subset \mathbb{Z}$, $|S| = m$ можно так раскрасить $\mathbb{Z}$ в k цветов, что любой сдвиг $a + S$, $a \in \mathbb{Z}$ содержит числа всех цветов.