Производная-3: вокруг Йенсена

1. а) Пусть $a, b, c, d, a+b+c+d \in [-0.5, 0.5]$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \leqslant \frac{64}{(a+b+c+d)^2+16}$$

.

б) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \pi]$. Докажите, что

$$\sin x_1 + \ldots + \sin x_n \leqslant n \sin \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

.

в) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, \pi]$. Докажите, что

$$\sin x_1 \cdot \ldots \cdot \sin x_n \leqslant \sin^n \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \right)$$

г) При положительных $x_1, x_2, \ldots x_n$ и $p > q$ докажите неравенство о средних:

$$\left(\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. Пусть даны положительные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=4$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leqslant \frac{4}{9}.$$

3. Сумма положительных чисел a, b, c равна $\frac{\pi}{2}$. Докажите, что $\cos a + \cos b + \cos c > \sin a + \sin b + \sin c$.

4. Даны положительные числа, a, b и c, для которых верно, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2} + \frac{1}{3b^2+(b-1)^2} + \frac{1}{3c^2+(c-1)^2} \geqslant 1.$$