Заключительная олимпиада

Довывод

1. Натуральные числа k и n взаимно просты, $k > n > 1$. Нашлось такое натуральное m, что $k^m - n^{m-1}$ разделилось нацело на $k - n$. Докажите, что $k \leqslant 2n - 1$.

2. Выпуклый N-угольник назовем красивым, если при любом его разбиении непересекающимися диагоналями на треугольники среди этих треугольников найдется пара равных. Докажите, что при четном N есть бесконечно много попарно не подобных красивых N-угольников.

3. Все вершины графа имеют степень 100. Вершины графа окрашены правильным образом в 5 цветов. Может ли так оказаться, что в каждом цикле встречаются вершины не менее, чем трёх различных цветов?

4. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC K — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Обозначим через M и L центры вписанных окружностей в треугольники ABK и ACK. Прямая AK пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D, а прямая ML пересекает ее же в точках U и V. Пусть N — середина UV, а P — точка пересечения ML с AK. Докажите, что $DC = 2PN$.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условию $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots$. Докажите, что

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geqslant a_n$$

Вывод

6. Множество S натуральных чисел таково, что для любых его элементов a и b (возможно равных), число $ab + 1$ тоже лежит в S. Докажите, что лишь конечное количество простых чисел не является делителем ни одного из чисел множества S.

7. Обозначим через O центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точки P и Q на сторонах AB и AC соответственно таковы, что $\angle BOP = \angle ABC$ и $\angle COQ = \angle ACB$. Докажите, что образ прямой BC при симметрии относительно прямой PQ касается описанной окружности треугольника APQ.

8. Пусть X — множество из 100 элементов. Найдите наименьшее возможное n такое, что в любой последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n$ подмножеств X найдутся такие $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$, что либо $A_i \subseteq A_j \subseteq A_k$, либо $A_i \supseteq A_j \supseteq A_k$.