Треугольники и разбиения

1. Треугольник несколькими прямыми разрезали на части. Доказать, что хотя бы одна из частей является треугольником.

2. Многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. а) Докажите, что найдётся треугольник, две стороны которого являются сторонами исходного многоугольника; б) Докажите, что таких треугольников найдётся хотя бы два

3. Назовём *триангуляцией* многоугольника его разбиение непересекающимимся диагоналями на треугольники. Назовём треугольник в триангуляции *внутренним*, если все его стороны — диагонали. Сколько существует триангуляций без внутренних треугольников?

4. Многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что вершины многоугольника можно раскрасить в три цвета так, что все вершины каждого из полученных треугольников будут разного цвета.

5. Выпуклый многоугольник разрезали на треугольники непересекающимися диагоналями. Докажите, что треугольники триангуляции можно раскрасить в два цвета так, что имеющие общую сторону треугольники будут разного цвета.

6. Выпуклый N-угольник разбит диагоналями на треугольники (при этом диагонали не пересекаются внутри многоугольника). Треугольники раскрашены в чёрный и белый цвета так, что каждые два треугольника с общей стороной раскрашены в разные цвета. Найдите максимум разности количества белых и количества чёрных треугольников при а) $N = 99$; б) $N = 100$.

7. Выпуклый n-угольник разбит на треугольники непересекающимися диагоналями, причем в каждой его вершине сходится нечетное число треугольников. Докажите, что n делится на 3.