Неравенства. Продолжаем pqr-метод

1. Неотрицательные a, b, c таковы, что $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{2c + 2ab + 1} + \frac{1}{2b + 2ac + 1} + \frac{1}{2a + 2bc + 1} \geqslant 1$$

2. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $1 + a + b + c = 2abc$. Докажите, что

$$\frac{ab}{1 + a + b} + \frac{bc}{1 + b + c} + \frac{ca}{1 + c + a} \geqslant \frac{3}{2}$$

3. Сумма квадратов положительных a, b, c, d равна 1. Докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + abc + abd + acd + bcd \leqslant 1.$$

4. Неотрицательные числа a, b, c, d таковы, что $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$(1 - a^2)^2 + (1 - b^2)^2 + (1 - c^2)^2 + (1 - d^2)^2 \geqslant 3$$

5. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 3. Докажите, что

а) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2} \leqslant \dfrac{1}{a^2b^2c^2d^2}$;

б) $\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} + \dfrac{1}{d^3} \leqslant \dfrac{1}{a^3b^3c^3d^3}$.