Скалярные произведения и линейная зависимость.

Определение. Рассмотрим пространство V над полем $\mathbb{F}$. *Скалярным произведением* на нём называется операция $< \cdot, \cdot >: V \times V \to F$ такая, что
• $< u, v >=< v, u >$ для любых $u, v \in V$ (симметричность).
• $< \alpha u_1 + \beta u_2, v >= \alpha < u_1, v > +\beta < u_2, v >$ для любых $u_1, u_2, v \in V$, $\alpha, \beta \in F$ (линейность по первому аргументу).
• Если F — упорядоченное поле (например $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$), то $< v, v > \geqslant 0$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $v = 0$.

Самый простой и естественный пример, это если есть два вектора $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ и $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$,

то $< u, v >= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$.

1. Приведите пример другого скалярного произведения в $\mathbb{R}^2$, не пропорционального описанному в примере.

2. Докажите, что попарно перпендикулярные ненулевые вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$ линейно независимы.

3. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2016-элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было нечётное число элементов, а пересечение любых двух подмножеств имело чётный размер?

4. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2016-элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было чётное число элементов, а пересечение любых двух подмножеств имело нечётный размер?

Определение. Дано подпространство $U \in V$. Определим множество

$U^{\perp} = \{v \in V | v \perp u \forall u \in U\}$.

5. а) Докажите, что U^{perp} тоже является подпространством.
б) Обозначим $dimV = n$, $dimU = k$. Чему равна размерность $U^{\perp}$?

6. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2018-элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было чётное число элементов, а пересечение любых двух подмножеств имело чётный размер?

7. Какое наибольшее количество подмножеств можно выбрать в 2019-элементном множестве так, чтобы в любом выбранном подмножестве было нечётное число элементов, а пересечение любых двух подмножеств имело нечётный размер?