# Матрицы.

Даны два линейных пространства $U$ и $V$ над полем $F$. Отображение $f\colon U \longrightarrow V$ назовём *линейным*, если для любых $u_1, u_2 \in U$, $\alpha, \beta \in F$ выполнено равенство $f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2)$.

Линейное отображение из пространства $V$ в себя будем называть *оператором*.

**1.** Вася загадал линейное отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (аффинное преобразование, оставляющее начало координат на месте). Петя может задавать такой вопрос: "Чему равно $< f(v), u >$?" При этом он сам выбирает вектора $v$ и $u$. За какое наименьшее число вопросов Петя восстановит, что же загадал Вася?

**Определение:** *Матрицей* будем называть таблицу $m \times n$, заполненную элементами $F$. Если $A$ — матрица, то через $A_{ij}$ обозначается элемент на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца.

**Определение:** *Матрицу линейного отображения* $f\colon U \to V$ в базисах $u_1, u_2, \ldots, u_n \in U$, $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ зададим так: в столбце под номером $i$ записаны координаты $f(u_i)$ в базисе $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

**2.** Рассмотрим операторы $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, записываемые в базисе $e_1, e_2$ как $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ соответственно.
а) Какой матрицей задаётся оператор $f_1 \circ f_2$?
б) Какой матрицей будет записываться оператор $f_1$ в базисе $2e_1 + e_2, e_1 - e_2$?
в) Может ли в каком-то базисе матрица оператора $f_2$ записываться $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

**Операции с матрицами:**

*1) Сложение матриц:* Если $A = (A_{ij})$ и $B = (B_{ij})$ — матрицы одинаковой формы $m \times n$, то матрица $A + B$ также имеет форму $m \times n$ и определяется посредством $(A + B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij}$.

*2) Умножение матрицы на элемент поля:* Если $A = (A_{ij})$ — матрица формы $m \times n$ и $\lambda \in F$, то то матрица $\lambda A$ также имеет форму $m \times n$ и определяется посредством $(\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij}$.

*3) Произведение матриц:* Если $A = (A_{ij})$ и $B = (B_{ij})$ — матрицы формы $m \times n$ и $n \times k$ соответственно, то матрица $AB$ будет иметь форму $m \times k$, причем $(AB)_{ij}$ определяется как «скалярное» произведение вектора, образованного $i$-й строкой матрицы $A$ и $j$-м столбцом матрицы $B$.

**3.** Найдите

а) произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) произведение тех же матриц в обратном порядке

в) произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$;

г)произведение тех же матриц в обратном порядке;

д) произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

е) произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

ж)произведение матриц $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;

з) произведение тех же матриц в обратном порядке.

**4.** Найдите квадратную матрицу $E$ размера $n \times n$, такую что $EX = XE = X$ для любой другой матрицы $X$ размера $n \times n$ (над произвольным полем $F$). Такая матрица называется *единичной*. Существует ли еще одна матрица с подобным свойством?

**5.** Докажите ассоциативность умножения матриц: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ для матриц $A$, $B$ и $C$ формы $m \times n$, $n \times k$ и $k \times \ell$ соответственно.

**6.** Докажите, что в левом верхнем углу матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ стоит $n+1$-е число Фибоначчи (последовательность Фибоначчи $\{F_n\}$ задана начальным условием $F_1 = F_2 = 1$ и рекуррентным соотношением $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для $n \geqslant 3$).

**Определение:** *Матрицей смежности* графа $G$ (без петель и кратных ребер), вершины которого пронумерованы числами от 1 до $n$ называется матрица $A$ размера $n \times n$, такая что $A_{ij} = 1$, если $i$ и $j$ соединены ребром, и $A_{ij} = 0$ в противном случае.

**7.** Докажите, что $(A^k)_{ij}$ -количество маршрутов длины $k$ в графе $G$, начинающихся в вершине с номером $i$ и заканчивающихся в вершине с номером $j$.