Числа Каталана

Одно из возможных определений **чисел Каталана:** n-ым числом Каталана C_n будем называть число способов триангулировать выпуклый $(n+2)$-угольник.

1. Докажите рекуррентную формулу: $C_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.

2. Докажите, что все следующие величины так же равны C_n:
а) количество корректных скобочных последовательностей, состоящих из n открывающих и n закрывающих скобок.
б) количество монотонных путей из левого нижнего в правый верхний угол клетчатого квадрата размером $n \times n$, не пересекающих диагональ.

3. а) Рассмотрим все триангуляции $(n+1)$-угольника и всеми возможными способами стянем по его стороне $A_k A_{k+1}$ треугольник, её содержащий. Так мы получим триангулированный n-угольник. Сколько раз была посчитана каждая триангуляция n-угольника?
б) Получите из предыдущего пункта соотношение, напрямую связывающее C_k и C_{k+1}, а также выведите явную формулу для чисел Каталана.

4. Продолжение задачи 2. Докажите, что для любого натурального n C_n равно ...
а) Количеству упорядоченных корневых деревьев (то есть деревьев, у которых задан корень и для каждой вершины задан порядок ее потомков) с $n+1$ вершинами.
б) количеству корневых (корень фиксирован) упорядоченных (важен порядок потомков) бинарных (у каждой вершины 2 потомка или 0 потомков) деревьев с $n+1$ листьями.
в) количеству таблиц $2 \times n$, заполненных натуральными числами от 1 до $2n$, причем числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.
г) Докажите, что количество последовательностей натуральных чисел

$$1, a_1, \ldots, a_n, 1,$$

в которых $a_i > 1$ и любое a_i является делителем суммы двух соседей.