

Серия 21. Стягивание в графах

14 июля

1. Граф при удалении любого ребра не теряет связность. Докажите, что можно так ввести ориентацию на ребрах, чтобы он был сильно связным.

2. В королевстве Нечетномонголия n городов и полностью отсутствуют дороги. Король решил соединить дорогами хотя бы какие-нибудь города, однако его ограничивает древнее предание, согласно которому юная дева, выехавшая из родного города и вернувшаяся в него, проехав по одному разу через нечётное число других городов, погубит монархию. Какое наибольшее количество дорог сможет провести король так, чтобы не дать шанса юной деवे?

3. Дан сильносвязный ориентированный граф на n вершинах без кратных и обратных рёбер. Докажите, что можно оставить в графе не более $2n - 3$ ребра так, чтобы граф остался сильносвязным.

4. В компании $3n + 1$ детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся $3n$ детей можно разбить на n групп по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

5. В ориентированном графе исходящая степень каждой вершины равна 3 (петли и встречные ребра разрешены и являются циклами; между любыми двумя вершинами может быть не более одного ребра данного направления). Докажите, что в этом графе есть два непересекающихся (по вершинам) ориентированных цикла.

6. В стране N городов. Некоторые пары городов связаны двусторонними авиалиниями, каждая пара не более, чем одной. Каждая авиалиния принадлежит одной из k компаний. Оказалось, что из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками), но при закрытии всех авиалиний любой из компаний это свойство нарушается. Какое наибольшее количество авиалиний (при произвольных данных N и k) могло быть в этой стране?

Серия 21. Стягивание в графах

14 июля

1. Граф при удалении любого ребра не теряет связность. Докажите, что можно так ввести ориентацию на ребрах, чтобы он был сильно связным.

2. В королевстве Нечетномонголия n городов и полностью отсутствуют дороги. Король решил соединить дорогами хотя бы какие-нибудь города, однако его ограничивает древнее предание, согласно которому юная дева, выехавшая из родного города и вернувшаяся в него, проехав по одному разу через нечётное число других городов, погубит монархию. Какое наибольшее количество дорог сможет провести король так, чтобы не дать шанса юной деवे?

3. Дан сильносвязный ориентированный граф на n вершинах без кратных и обратных рёбер. Докажите, что можно оставить в графе не более $2n - 3$ ребра так, чтобы граф остался сильносвязным.

4. В компании $3n + 1$ детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся $3n$ детей можно разбить на n групп по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

5. В ориентированном графе исходящая степень каждой вершины равна 3 (петли и встречные ребра разрешены и являются циклами; между любыми двумя вершинами может быть не более одного ребра данного направления). Докажите, что в этом графе есть два непересекающихся (по вершинам) ориентированных цикла.

6. В стране N городов. Некоторые пары городов связаны двусторонними авиалиниями, каждая пара не более, чем одной. Каждая авиалиния принадлежит одной из k компаний. Оказалось, что из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками), но при закрытии всех авиалиний любой из компаний это свойство нарушается. Какое наибольшее количество авиалиний (при произвольных данных N и k) могло быть в этой стране?