

Двойное отношение и проекции

5 июля

Определение 1: Двойным отношением упорядоченной четверки точек A, B, C, D , лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$.

Определение 2: Двойным отношением упорядоченной четверки прямых a, b, c, d , называется величина $(a, b, c, d) = \frac{\sin \angle(\bar{a}, \bar{c})}{\sin \angle(\bar{b}, \bar{c})} : \frac{\sin \angle(\bar{a}, \bar{d})}{\sin \angle(\bar{b}, \bar{d})}$, где $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d .

Замечание: Эта величина не зависит от выбора направлений векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$.

Определение: четвёрка точек (прямых) A, B, C и D называется гармонической, если $(A, B, C, D) = -1$.

Теорема: Через точку X проходят четыре прямые: a, b, c и d . Прямая ℓ пересекает их в точках A, B, C и D соответственно. Тогда $(A, B, C, D) = (a, b, c, d)$.

1. Докажите, что если двойное отношение $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

2. Докажите, что по трём точкам A, B и C , а также по двойному отношению четвёрки (A, B, C, D) однозначно восстанавливается четвёртая точка D .

3. Известно, что $(A, B, C, D) = k$. Какие значения может принимать двойное отношение этой же четвёрки точек, взятой в другом порядке?

4. Прямые m и n пересекаются в точке A . Точки B_m, C_m и D_m на прямой m и B_n, C_n и D_n на прямой n таковы, что $(A, B_m, C_m, D_m) = (A, B_n, C_n, D_n)$, а $B_m B_n$ и $D_m D_n$ пересекаются в точке K . Докажите, что $C_m C_n$ проходит через K .

5. а) Через точку проходят прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и ℓ_4 , причём $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4) = -1$. Докажите, что если прямые ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны, то они являются биссектрисами угла, образованного прямыми ℓ_3 и ℓ_4 . б) Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом. Прямые AB и CD пересекаются в точке P , прямые AD и BC пересекаются в точке Q . Докажите, что AC — биссектриса (какая-то) угла QOP .

6. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках D и E соответственно. Сторона BC пересекается с ω в точках K и L . Отрезки AL и DE пересекаются в точке P , а отрезки BE и CD — в точке Q . Докажите, что точки K, P и Q лежат на одной прямой.

7. Понятно каким способом докажите лемму об изогоналях.