

Серия 4. СЛУ: теория

4 июля

Упражнение 0. Рассмотрим СЛУ *ступенчатого вида*. Как ее решать? Сколько может быть решений (перечислите все возможности, и докажите, что других нет).

Определение 1. Две СЛУ (от одинакового набора переменных) называются *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Определение 2. Рассмотрим *элементарные преобразования* СЛУ трех типов:

ЭП1) к строке прибавляем другую строку, умноженную на число;

ЭП2) строку умножаем на ненулевое число;

ЭП3) меняем местами две строки.

Упражнение 1. Если одна СЛУ получается из другой путем применения ЭП1-ЭП3, то эти СЛУ эквивалентны.

Теорема 1(метод Гаусса). При помощи ЭП1-ЭП3 СЛУ можно привести к ступенчатому виду.

Упражнение 2. а) Сколько решений может быть у СЛУ?

а) Сколько решений может быть у СЛУ, где переменных больше, чем уравнений?

в) За сколько действий (линейное, квадратичное, экспоненциальное,...) заведомо можно решить СЛУ размера $n \times n$?

Следующие несложные теоремы *чрезвычайно* важны.

Теорема 2. ОСЛУ, в которой переменных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение.

Теорема 3. Если СЛУ с рациональными коэффициентами и свободными членами имеет единственное (вещественное) решение, то это — решение в рациональных числах.

Теорема 4. Если СЛУ с целыми коэффициентами и свободными членами имеет какое-то (вещественное) решение, то она имеет решение в рациональных числах.

Теорема 5 (альтернатива Фредгольма). Пусть в СЛУ число уравнений РАВНО числу неизвестных. Тогда имеет место один из двух случаев:

1) СЛУ имеет единственное решение при любом наборе свободных членов;

2) есть наборы свободных членов, при которых СЛУ не имеет решений, и есть наборы свободных членов, при которых СЛУ имеет бесконечно много решений.

Переформулировка. Если система из n уравнений с n неизвестными имеет единственное решение при *каком-то* наборе свободных членов, то она имеет единственное решение при *любом* наборе свободных членов.

1. Есть ОСЛУ 5×5 . Двое по очереди пишут коэффициенты этой ОСЛУ. Докажите, что первый может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

2. Пусть СЛУ разными способами приведена к ступенчатому виду. Докажите, что число свободных переменных совпадает.

Серия 4. СЛУ: задачи

4 июля

1. Много векторов линейно зависимы. Если есть $n + 1$ строка длины n , то они *линейно зависимы*, то есть существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевой строке.

2. Ортогональность. Может ли в \mathbb{R}^3 быть 4 попарно ортогональных ненулевых вектора?

3. Мальчики и девочки. В классе 11 девочек и 10 мальчиков, некоторые девочки нравятся некоторым мальчикам. Докажите, что существует непустой набор девочек, что каждому мальчику нравится четное число из этих девочек.

4. 10 бананов. Есть 10 бананов одинакового веса и двухчашечные весы без гирь. На обе чаши можно класть только поровну бананов. Докажите, что менее чем за 9 взвешиваний нельзя доказать, что все бананы действительно весят одинаково. Веса бананов: **(а)** вещественные; **(б)** положительные; **(с)** натуральные.

5. Дискретное уравнение теплопроводности. В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно расставить, причем единственным образом, числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому своих соседей (у клетки максимум 4 соседа).

6. 101 корова. Есть 101 корова. Если убрать любую буренку, то оставшихся можно разделить на два равных по весу и численности стада. Докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса **(а)** *целые; **(б)** рациональные; **(с)** действительные; **(d)** комплексные.

7. 10 яблок. У Пети было 10 яблок, вес каждого – вещественное положительное число. Он проделал с ними несколько взвешиваний на чашечных весах без гирь, и каждый раз получал равенство. Докажите, что Петя сможет приписать каждому яблоку цену в *натуральное* число копеек так, чтобы при каждом из проведенных взвешиваний цены чаш были одинаковы.

8. Зарубки на отрезке. На отрезке $[0, 1]$ отмечены концы, а также конечное число *различных* точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.