

Матбой

10 июля

1. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите неравенство:

$$\frac{a^2 + 3a}{a^3 + 8} + \frac{b^2 + 3b}{b^3 + 8} + \frac{c^2 + 3c}{c^3 + 8} + \frac{d^2 + 3d}{d^3 + 8} \leq \frac{16}{9}.$$

2. Докажите, что для бесконечно многих n у числа $n^2 + 1$ есть два целых делителя с разностью n .

3. Пусть ω_1 и ω_2 — две непересекающиеся окружности. Пусть одна из общих внутренних касательных к ω_1 и ω_2 касается их в точках A_1 и A_2 соответственно, а одна из их общих внешних касательных к ω_1 и ω_2 касается их в точках B_1 и B_2 соответственно. Оказалось, что $A_1B_2 \perp A_2B_1$. Докажите, что $A_1B_2 = A_2B_1$.

4. Дан связный граф, который остается связным при удалении любого ребра, и в котором любые две вершины либо соединены ребром, либо имеют общего соседа. Верно ли, что рёбра этого графа можно покрасить в четыре цвета так, чтобы между любыми двумя вершинами нашёлся путь, все рёбра в котором разного цвета?

5. Два человека играют в следующую игру. На доске написано число 2024^{2024} . За один ход разрешается вычесть из числа любое натуральное число от 1 до 2023, либо поделить имеющееся число на 2024 (с округлением вниз) и результат записать на доску вместо исходного числа. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто выиграет при правильной игре?

6. На ребрах SA, SB, SC тетраэдра $SABC$ взяты точки A', B', C' соответственно. Точка C_1 — точка пересечения прямых AB и $A'B'$, а точка C_2 — общая точка окружностей, описанных около треугольников C_1AA' и C_1BB' , отличная от C_1 . Аналогично определяются точки A_1, B_1, A_2 и B_2 . Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 и S лежат в одной плоскости.

7. У бедного мальчика Саши всего 300 монет, и к тому же ровно одна из них фальшивая (легче настоящей). У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание он берет с Саши плату: два рубля, если перевесила левая чашка, и один рубль при любом другом исходе. Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить фальшивую монету с помощью Костиных весов?

8. 10 десятиклассников нашли 10 мухоморов и попробовали их на вкус. На следующий день все они жаловались доктору на живот, но при этом каждый сказал, что откусил не больше, чем от двух мухоморов. Однако каждый мухомор сказал, что его кусали не менее, чем пятеро десятиклассников. Какое наибольшее суммарное количество мухоморов и десятиклассников могли сказать правду?

9. Обозначим количество делителей числа n за $d(n)$. Докажите, что

$$n + d(1) + d(2) + \dots + d(n) \leq d(n+1) + d(n+2) + \dots + d(2n).$$

10. Существует ли конечное множество точек на плоскости, чтобы у каждой точки множества было ровно 4 ближайших точки?