

# Вероятностный метод

13 июля

**Определение 1:** Дискретным вероятностным пространством назовём конечное множество

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , каждому элементу  $\omega_i$  которого задана величина  $p_i$ , удовлетворяющая условиям  $p_i > 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Подмножества вероятностного пространства  $\Omega$  назовём *событиями*, а элементы  $\omega_i$  — *элементарными исходами*. Для каждого события  $A \subset \Omega$  определена его *вероятность* по формуле

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

**Определение 2:** События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ . Событие  $A$  называется *независимым относительно совокупности событий*  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , если для любого подмножества событий  $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$  выполнено равенство

$$P(A \cap B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) = P(A) \cdot P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k})$$

**Определение 3:** Функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется *случайной величиной*. Для каждой случайной величины можно посчитать *математическое ожидание*:  $E\xi = \sum_{i=1}^n p_i \xi(\omega_i)$ . Математическое ожидание линейно, то есть  $E(\lambda\xi + \mu\zeta) = \lambda E\xi + \mu E\zeta$ .

1. В единичном квадрате выбрано 100 множеств, площадь каждого из которых больше чем 0,99. Докажите, что найдется точка, которая принадлежит всем этим множествам.

2. На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у русских, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?

3. Докажите, что вершины любого графа можно покрасить в  $d$  цветов так, чтобы доля рёбер с одноцветными концами была не более  $\frac{1}{d}$ .

4. Докажите, что в графе  $G$ , содержащем  $e$  рёбер, можно выбрать двудольный подграф, содержащий не менее  $e/2$  рёбер.

5. Барон Мюнхгаузен, вернувшись из Кытая, рассказал, что там проводится круговой чемпионат по пинг-понгу (каждые два участника встречаются ровно один раз) с очень ровным составом: каких бы 1000 участников ни взять, найдётся участник, который обыграл их всех! Не преувеличивает ли барон?