

# Матбой 9-10

15 июля

1. Даны положительные числа  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Докажите, что

$$\left( \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \right)^2 \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + \dots + \frac{1}{a_n - a_{n-1}}.$$

2. Пусть  $\Gamma$  — описанная окружность треугольника  $ABC$ . Окружность  $\Omega$  касается стороны  $AB$  и касается окружности  $\Gamma$  в точке, лежащей с точкой  $C$  по одну сторону от  $AB$ . Биссектриса угла  $BCA$  пересекает  $\Omega$  в двух различных точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $\angle ABP = \angle QBC$ .

3. С клетчатым прямоугольником разрешается проделывать такую операцию. Разрезать на три клетчатых многоугольника, два из них сложить в прямоугольник, а третий — выкинуть. Докажите, что, начиная с квадрата  $2n \times 2n$ , можно проделать  $n^2$  таких операций подряд.

4. Граф  $G$  можно нарисовать на плоскости так, что каждое ребро — отрезок единичной длины (рёбра могут пересекаться и накладываться друг на друга, разные вершины должны соответствовать различным точкам). Может ли оказаться, что в любом таком рисунке найдутся две вершины на расстоянии  $\frac{1}{2024}$ ?

5. Докажите, что существует составное число, которое после прибавления  $100!$  становится простым.

6. Окружность  $\omega$  касается большей окружности  $\Omega$  внутренним образом. Хорды  $AM$  и  $AN$  окружности  $\Omega$  касаются  $\omega$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что  $PM + NQ \geq PQ$ .

7. Обозначим через  $F(n)$  количество таких непустых подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , что НОД всех элементов такого подмножества взаимно прост с числом  $n$ . Докажите, что  $\sum_{d|n} F(d) = 2^n - 1$ .

8. Многочлен с целыми коэффициентами  $f(x)$  таков, что  $f(10) = 10$ . Найдите наибольшее возможное количество целых решений уравнения  $f(x) = x^2$ .

9. На плоскости есть 46 точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что из них можно выбрать 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

10. Аня и Бенья по очереди выбирают числа из набора  $\{0, 1, 2, \dots, 81\}$ , каждый своим ходом выбирает одно ещё не выбранное число. Начинает Аня. Когда все числа выбраны, Аня считает сумму выбранных ей чисел — число  $A$ , а Бенья считает сумму выбранных им чисел — число  $B$ . Аня хочет добиться того, чтобы  $\text{НОД}(A, B)$  был как можно больше, а Бенья — чтобы как можно меньше. Какой результат могут гарантировать себе ребята независимо от действий соперника?