

## Серия 22. Аддитивная комбинаторика – 2

17 июля

**Теорема Коши-Дэвенпорта.** Пусть  $A$  и  $B$  — два множества вычетов по простому модулю  $p$ . Определим сумму  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ . Тогда выполнено  $|A + B| \geq \min(p, |A| + |B| - 1)$ .

1. Докажите теорему Коши-Дэвенпорта в случае  $|A| + |B| > p$ .

2. Докажем теорему в случае  $|A| + |B| \leq p$ .

(a) Зафиксируем вычет  $c$ . Пусть  $A_c = \{a + c : a \in A\}$ . Докажите, что  $|A + B| = |A_c + B|$ ;

(b) Предположим, что  $A \cap B \neq \emptyset$ . Докажите, что  $A \cap B + A \cup B \subseteq A + B$ ;

(c) Пусть  $|A| \geq 2$ . Докажите, что существует вычет  $c$  такой, что  $A_c \cap B \neq \emptyset$  и  $A_c \cap B \neq A_c$ ;

(d) Завершите доказательство теоремы, рассмотрев пару множеств  $A, B$ , не удовлетворяющую условию теоремы, с минимальной  $|A|$ .

3. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_k$  — множества вычетов по простому модулю  $p$ . Определим  $S = A_1 + A_2 + \dots + A_k = \{a_1 + a_2 + \dots + a_k : a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k\}$ . Докажите, что  $|S| \geq \min(p, |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| - k + 1)$ .

4. (a) Выбрано натуральное число  $n$ . Пусть  $A = \{a_1 = 0, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  — два множества вычетов по модулю  $n$ , где  $(a_i, n) = 1$ , для всех  $1 < i \leq k$ . Докажите, что  $|A + B| \geq \min(n, k + m - 1)$ .

(b) Пусть  $S$  — множество из  $n$  чисел, взаимно простых с  $n$ . Докажите, что любой остаток по модулю  $n$  равен сумме некоторых элементов  $S$ .

**Теорема Эрдёша-Гинзбурга-Зива.** Для любого натурального  $n$  среди  $2n - 1$  целого числа можно выбрать ровно  $n$  с суммой, делящейся на  $n$ .

5. (a) Докажите теорему Эрдёша-Гинзбурга-Зива в случае, когда  $n$  является простым числом;

(b) Пусть условие теоремы выполнено для  $n = a$  и  $n = b$ . Докажите, что тогда теорема верна и для  $n = ab$ .

6. Пусть  $m \geq k \geq 2$ , причем  $m$  делится на  $k$ . Докажите, что всякая последовательность целых чисел длины  $m + k - 1$  содержит подпоследовательность длины  $m$  с суммой, делящейся на  $k$ .

7. Пусть  $p$  — простое число и  $2 \leq k \leq p - 1$ . Рассмотрим множество из  $2p - k$  целых чисел. Докажите, что если сумма никаких  $p$  чисел из этого множества не делится на  $p$ , то какой-то остаток по модулю  $p$  встречается в этом множестве не менее чем  $p - k + 1$  раз.

## Серия 22. Аддитивная комбинаторика – 2

17 июля

**Теорема Коши-Дэвенпорта.** Пусть  $A$  и  $B$  — два множества вычетов по простому модулю  $p$ . Определим сумму  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ . Тогда выполнено  $|A + B| \geq \min(p, |A| + |B| - 1)$ .

1. Докажите теорему Коши-Дэвенпорта в случае  $|A| + |B| > p$ .

2. Докажем теорему в случае  $|A| + |B| \leq p$ .

(a) Зафиксируем вычет  $c$ . Пусть  $A_c = \{a + c : a \in A\}$ . Докажите, что  $|A + B| = |A_c + B|$ ;

(b) Предположим, что  $A \cap B \neq \emptyset$ . Докажите, что  $A \cap B + A \cup B \subseteq A + B$ ;

(c) Пусть  $|A| \geq 2$ . Докажите, что существует вычет  $c$  такой, что  $A_c \cap B \neq \emptyset$  и  $A_c \cap B \neq A_c$ ;

(d) Завершите доказательство теоремы, рассмотрев пару множеств  $A, B$ , не удовлетворяющую условию теоремы, с минимальной  $|A|$ .

3. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_k$  — множества вычетов по простому модулю  $p$ . Определим  $S = A_1 + A_2 + \dots + A_k = \{a_1 + a_2 + \dots + a_k : a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k\}$ . Докажите, что  $|S| \geq \min(p, |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k| - k + 1)$ .

4. (a) Выбрано натуральное число  $n$ . Пусть  $A = \{a_1 = 0, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  — два множества вычетов по модулю  $n$ , где  $(a_i, n) = 1$ , для всех  $1 < i \leq k$ . Докажите, что  $|A + B| \geq \min(n, k + m - 1)$ .

(b) Пусть  $S$  — множество из  $n$  чисел, взаимно простых с  $n$ . Докажите, что любой остаток по модулю  $n$  равен сумме некоторых элементов  $S$ .

**Теорема Эрдёша-Гинзбурга-Зива.** Для любого натурального  $n$  среди  $2n - 1$  целого числа можно выбрать ровно  $n$  с суммой, делящейся на  $n$ .

5. (a) Докажите теорему Эрдёша-Гинзбурга-Зива в случае, когда  $n$  является простым числом;

(b) Пусть условие теоремы выполнено для  $n = a$  и  $n = b$ . Докажите, что тогда теорема верна и для  $n = ab$ .

6. Пусть  $m \geq k \geq 2$ , причем  $m$  делится на  $k$ . Докажите, что всякая последовательность целых чисел длины  $m + k - 1$  содержит подпоследовательность длины  $m$  с суммой, делящейся на  $k$ .

7. Пусть  $p$  — простое число и  $2 \leq k \leq p - 1$ . Рассмотрим множество из  $2p - k$  целых чисел. Докажите, что если сумма никаких  $p$  чисел из этого множества не делится на  $p$ , то какой-то остаток по модулю  $p$  встречается в этом множестве не менее чем  $p - k + 1$  раз.