

## Серия 26. Стереометрические неравенства

19 июля

1. Вписанная и невписанная сферы треугольной пирамиды  $ABCD$  касаются её грани  $BCD$  в различных точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что треугольник  $AXY$  тупоугольный.

2. Докажите, что для любого тетраэдра его самый маленький двугранный угол (из шести) не больше, чем двугранный угол правильного тетраэдра.

3. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а также касаются плоскости  $\alpha$  в точках  $D$ ,  $E$  и  $F$ . Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника  $DEF$ .

4. Дан тетраэдр  $ABCD$ . Точка  $X$  выбрана вне тетраэдра так, что отрезок  $XD$  пересекает грань  $ABC$  во внутренней точке. Обозначим за  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  проекции точки  $D$  на плоскости  $XBC$ ,  $XCA$  и  $XAB$  соответственно. Докажите, что  $A'B' + B'C' + C'A' \leq DA + DB + DC$ .

5. На поверхности тетраэдра  $ABCD$  нашлись такие точки  $E$  и  $F$ , что  $AE = CE$ ,  $AF = CF$ ,  $BE = DE$  и  $BF = DF$ . Докажите, что  $BC \geq EF$ .

6. Пусть  $I$  — центр сферы, вписанной в тетраэдр  $ABCD$ , а  $J$  — центр сферы, касающейся грани  $BCD$  и плоскостей остальных граней (вне самих граней). Отрезок  $IJ$  пересекает сферу, описанную около тетраэдра, в точке  $K$ . Что больше:  $IK$  или  $JK$ ?

7. Пусть  $O$  — точка внутри тетраэдра  $ABCD$ . Докажите, что

$$S_{AOB}S_{COD} \leq S_{AOC}S_{BOD} + S_{AOD}S_{BOC}.$$

## Серия 26. Стереометрические неравенства

19 июля

1. Вписанная и невписанная сферы треугольной пирамиды  $ABCD$  касаются её грани  $BCD$  в различных точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что треугольник  $AXY$  тупоугольный.

2. Докажите, что для любого тетраэдра его самый маленький двугранный угол (из шести) не больше, чем двугранный угол правильного тетраэдра.

3. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а также касаются плоскости  $\alpha$  в точках  $D$ ,  $E$  и  $F$ . Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника  $DEF$ .

4. Дан тетраэдр  $ABCD$ . Точка  $X$  выбрана вне тетраэдра так, что отрезок  $XD$  пересекает грань  $ABC$  во внутренней точке. Обозначим за  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  проекции точки  $D$  на плоскости  $XBC$ ,  $XCA$  и  $XAB$  соответственно. Докажите, что  $A'B' + B'C' + C'A' \leq DA + DB + DC$ .

5. На поверхности тетраэдра  $ABCD$  нашлись такие точки  $E$  и  $F$ , что  $AE = CE$ ,  $AF = CF$ ,  $BE = DE$  и  $BF = DF$ . Докажите, что  $BC \geq EF$ .

6. Пусть  $I$  — центр сферы, вписанной в тетраэдр  $ABCD$ , а  $J$  — центр сферы, касающейся грани  $BCD$  и плоскостей остальных граней (вне самих граней). Отрезок  $IJ$  пересекает сферу, описанную около тетраэдра, в точке  $K$ . Что больше:  $IK$  или  $JK$ ?

7. Пусть  $O$  — точка внутри тетраэдра  $ABCD$ . Докажите, что

$$S_{AOB}S_{COD} \leq S_{AOC}S_{BOD} + S_{AOD}S_{BOC}.$$