

Серия 6. Разнобой

4 июля

1. Существует ли последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots такая, что сумма любых n последовательных чисел в ней делится на n^2 для любого натурального n .

2. В таблице 18×18 изначально все клетки белые. Разрешается перекрасить все клетки в противоположный цвет в любой строке или любом столбце. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы на доске было ровно 16 чёрных клеток?

3. Многочлен P степени n принимает целые значения в точках $0, 1, \dots, n$. Докажите, что он принимает целое значение в любой целой точке.

4. Найдите все натуральные $n \geq 3$ такие, что среди любых $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ и $\min(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot n \geq \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$ найдутся три, являющиеся сторонами остроугольного треугольника.

5. Треугольник ABC с ортоцентром H вписан в окружность ω с центром O . M, N – середины BC и CA соответственно. Лучи MH и NH пересекают ω в точках P и Q соответственно. MN и PQ пересекаются в точке R . Докажите, что $RC \perp OC$.

6. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD – остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 – центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD .

7. У пиратов есть бесконечное количество сундуков, пронумерованных натуральными числами. Изначально в первом сундуке лежит 2023 монеты. Каждую день капитан выбирает сундук с номер k , в котором монет хотя бы на 2 больше, чем в следующем, и перекладывает одну монету из него в следующий. В один из дней капитан не смогу найти такой сундук. Как могли быть распределены монеты в этот момент?

8. Докажите, что для любого n найдется множество $|S| = n$ такое, что $\forall a, b \in S : a - b$ делит a и b , но не делит ни один другой элемент S .

Серия 6. Разнобой

4 июля

1. Существует ли последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots такая, что сумма любых n последовательных чисел в ней делится на n^2 для любого натурального n .

2. В таблице 18×18 изначально все клетки белые. Разрешается перекрасить все клетки в противоположный цвет в любой строке или любом столбце. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы на доске было ровно 16 чёрных клеток?

3. Многочлен P степени n принимает целые значения в точках $0, 1, \dots, n$. Докажите, что он принимает целое значение в любой целой точке.

4. Найдите все натуральные $n \geq 3$ такие, что среди любых $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ и $\min(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot n \geq \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$ найдутся три, являющиеся сторонами остроугольного треугольника.

5. Треугольник ABC с ортоцентром H вписан в окружность ω с центром O . M, N – середины BC и CA соответственно. Лучи MH и NH пересекают ω в точках P и Q соответственно. MN и PQ пересекаются в точке R . Докажите, что $RC \perp OC$.

6. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD – остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 – центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD .

7. У пиратов есть бесконечное количество сундуков, пронумерованных натуральными числами. Изначально в первом сундуке лежит 2023 монеты. Каждую день капитан выбирает сундук с номер k , в котором монет хотя бы на 2 больше, чем в следующем, и перекладывает одну монету из него в следующий. В один из дней капитан не смогу найти такой сундук. Как могли быть распределены монеты в этот момент?

8. Докажите, что для любого n найдется множество $|S| = n$ такое, что $\forall a, b \in S : a - b$ делит a и b , но не делит ни один другой элемент S .