

Серия 24. Бесконечные серии

18 июля

1. а) Докажите, что при последовательных бросаниях монеты рано или поздно с вероятностью 1 выпадет орёл.

б) Как, с помощью одной монеты организовать честный жребий на трёх человек?

в) Найдите математическое ожидание числа бросков монеты, которые придётся совершить, чтобы жребий состоялся.

2. Пьяница стоит в шаге от обрыва. Каждую секунду он делает либо шаг в сторону обрыва, либо шаг от него, причём направление движения каждый раз выбирает случайно (с вероятностью $1/2$). Найдите вероятность того, что пьяница когда-нибудь упадёт в обрыв.

3. Ковбои Джо и Билл играют в русскую рулетку. Начинает Джо. Найдите вероятность того, что выстрел произойдёт, когда револьвер будет у Билла.

4. Вы подкидываете монету, вероятность выпадения орла на которой равна p . Сколько в среднем раз придётся совершить бросков до первого выпадения орла?

5. Правильная игральная кость бросается много раз. Найдите математическое ожидание числа бросков, сделанных до того момента, когда сумма всех выпавших очков достигнет 2024 (то есть стала не меньше 2024).

6. Вы собираете серию игрушек из киндер-сюрпризов, состоящую из n разных игрушек. При покупке очередного яйца каждая игрушка выпадает с вероятностью $1/n$ независимо от предыдущих. Сколько в среднем вам придётся купить киндер-сюрпризов, чтобы собрать всю серию?

7. В нулевой момент времени появилась частица. Все частицы существуют ровно одну секунду, в конце своей жизни порождая (равновероятно, независимо друг от друга) 0, 1, 2 или 3 новые частицы. С какой вероятностью все частицы когда-нибудь умрут?

На обратной стороне есть ещё задачка, но давайте её решать уже после основного листика.

8. На шкуре у Носорога складки — вертикальные и горизонтальные. Если у Носорога на левом боку a вертикальных, b горизонтальных складок, а на правом — c вертикальных и d горизонтальных, будем говорить, что это Носорог в состоянии $(abcd)$ или просто Носорог $(abcd)$. Если Носорог чешется каким-то боком о баобаб вверх-вниз, и у Носорога на этом боку есть две горизонтальные складки, то эти две горизонтальные складки разглаживаются. Если двух таких складок нет, то ничего не происходит. Аналогично если Носорог чешется боком вперед-назад, и на этом боку есть две вертикальные складки, то они разглаживаются, если же таких двух складок не найдётся, то ничего не происходит. Если на каком-то боку две какие-то складки разглаживаются, то на другом боку немедленно появляется две новые складки: одна вертикальная и одна горизонтальная. Носороги чешутся часто, случайным боком о случайные баобабы в случайных направлениях. Вначале в саванне было стадо Носорогов (0221) . Докажите, что через некоторое время в саванне появится Носорог (2021) .

Серия 24. Бесконечные серии

18 июля

1. а) Докажите, что при последовательных бросаниях монеты рано или поздно с вероятностью 1 выпадет орёл.

б) Как, с помощью одной монеты организовать честный жребий на трёх человек?

в) Найдите математическое ожидание числа бросков монеты, которые придётся совершить, чтобы жребий состоялся.

2. Пьяница стоит в шаге от обрыва. Каждую секунду он делает либо шаг в сторону обрыва, либо шаг от него, причём направление движения каждый раз выбирает случайно (с вероятностью $1/2$). Найдите вероятность того, что пьяница когда-нибудь упадёт в обрыв.

3. Ковбои Джо и Билл играют в русскую рулетку. Начинает Джо. Найдите вероятность того, что выстрел произойдёт, когда револьвер будет у Билла.

4. Вы подкидываете монету, вероятность выпадения орла на которой равна p . Сколько в среднем раз придётся совершить бросков до первого выпадения орла?

5. Правильная игральная кость бросается много раз. Найдите математическое ожидание числа бросков, сделанных до того момента, когда сумма всех выпавших очков достигнет 2024 (то есть стала не меньше 2024).

6. Вы собираете серию игрушек из киндер-сюрпризов, состоящую из n разных игрушек. При покупке очередного яйца каждая игрушка выпадает с вероятностью $1/n$ независимо от предыдущих. Сколько в среднем вам придётся купить киндер-сюрпризов, чтобы собрать всю серию?

7. В нулевой момент времени появилась частица. Все частицы существуют ровно одну секунду, в конце своей жизни порождая (равновероятно, независимо друг от друга) 0, 1, 2 или 3 новые частицы. С какой вероятностью все частицы когда-нибудь умрут?

На обратной стороне есть ещё задачка, но давайте её решать уже после основного листика.

8. На шкуре у Носорога складки — вертикальные и горизонтальные. Если у Носорога на левом боку a вертикальных, b горизонтальных складок, а на правом — c вертикальных и d горизонтальных, будем говорить, что это Носорог в состоянии $(abcd)$ или просто Носорог $(abcd)$. Если Носорог чешется каким-то боком о баобаб вверх-вниз, и у Носорога на этом боку есть две горизонтальные складки, то эти две горизонтальные складки разглаживаются. Если двух таких складок нет, то ничего не происходит. Аналогично если Носорог чешется боком вперед-назад, и на этом боку есть две вертикальные складки, то они разглаживаются, если же таких двух складок не найдётся, то ничего не происходит. Если на каком-то боку две какие-то складки разглаживаются, то на другом боку немедленно появляется две новые складки: одна вертикальная и одна горизонтальная. Носороги чешутся часто, случайным боком о случайные баобабы в случайных направлениях. Вначале в саванне было стадо Носорогов (0221) . Докажите, что через некоторое время в саванне появится Носорог (2021) .