

Матбой междусобой

10 июля

1. Донателло и Микеланджело купили себе пиццу, разрезанную на 36 кусков. На счёт «три» каждый из них совершенно случайно показывает несколько пальцев одной руки (если что, у них на руке по 3 пальца). Сумма этих чисел определяет максимальное число кусков, которые каждый из черепашек может забрать со стола за один ход (каждый из них обязательно забирает за ход хотя бы один кусок, пальцы они показывают один раз, ограничение сохраняется и дальше всё время). Крайне радуется (выигрывает) тот, кто забирает последний кусок. Донателло всегда начинает, сколько пальцев должен показать Микеланджело, чтобы порадоваться с наибольшей вероятностью?

2. Компьютер сортирует массив из вещественных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два соседних элемента, где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус оба элемента умножает на 10. Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.

3. На олимпийские игры приехали спортсмены из нескольких стран. Каждый участник пожал руку всем участникам из других стран (участники из одной страны друг другу руки не жали). При этом оказалось, что количество рукопожатий между спортсменами одного пола отличается от количества рукопожатий между спортсменами разного пола не более чем на 1. Как ни странно, число мужчин и женщин среди участников различается тоже не больше чем на 1. Какое наибольшее количество стран могло отправить на игры нечётное число спортсменов?

4. Пятиугольник $AXYZB$ вписан в окружность с диаметром AB . Точки P, Q, R, S — проекции Y на прямые AX, BX, AZ, BZ соответственно. O — середина AB . Докажите, что угол между прямыми PQ и RS равен $\frac{\angle XOZ}{2}$.

5. Известно, что центр описанной окружности треугольника, образованного точками касания вневписанных окружностей треугольника ABC с сторонами, лежит на (ABC) . Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

6. Триангуляция многоугольника называется равной, если все треугольники в ней имеют одинаковую площадь. Докажите, что любые две равные триангуляции одного многоугольника отличаются максимум в двух треугольниках (все треугольники, кроме двух совпадают).

7. Найдите все такие n для которых существует биекция $g(x)$ остатков по модулю n такая, что $g(x) + x, \dots, g(x) + 100x$ тоже биекции остатков по модулю n .

8. Решите в натуральных числах уравнение $(n - 1)! + 1 = n^k$.

9. Даны два многочлена $P(x), Q(x)$ степени 2024 с ненулевыми коэффициентами. Какое максимальное значение может принимать сумма числа одинаковых коэффициентов и числа общих вещественных корней у этих многочленов.

10. В ресторан пришли 2017 человек, каждый из которых заказал два разных блюда. Никакие два человека не заказали одинаковые блюда. Стоимость каждого блюда равна количеству людей, которые его заказало. Заведение платит за самое дешёвое блюдо каждого человека. Какое наибольшее число денег могло заплатить заведение?

Матбой междусобой

10 июля

1. Донателло и Микеланджело купили себе пиццу, разрезанную на 36 кусков. На счёт «три» каждый из них совершенно случайно показывает несколько пальцев одной руки (если что, у них на руке по 3 пальца). Сумма этих чисел определяет максимальное число кусков, которые каждый из черепашек может забрать со стола за один ход (каждый из них обязательно забирает за ход хотя бы один кусок, пальцы они показывают один раз, ограничение сохраняется и дальше всё время). Крайне радуется (выигрывает) тот, кто забирает последний кусок. Донателло всегда начинает, сколько пальцев должен показать Микеланджело, чтобы порадоваться с наибольшей вероятностью?

2. Компьютер сортирует массив из вещественных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два соседних элемента, где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус оба элемента умножает на 10. Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.

3. На олимпийские игры приехали спортсмены из нескольких стран. Каждый участник пожал руку всем участникам из других стран (участники из одной страны друг другу руки не жали). При этом оказалось, что количество рукопожатий между спортсменами одного пола отличается от количества рукопожатий между спортсменами разного пола не более чем на 1. Как ни странно, число мужчин и женщин среди участников различается тоже не больше чем на 1. Какое наибольшее количество стран могло отправить на игры нечётное число спортсменов?

4. Пятиугольник $AXYZB$ вписан в окружность с диаметром AB . Точки P, Q, R, S — проекции Y на прямые AX, BX, AZ, BZ соответственно. O — середина AB . Докажите, что угол между прямыми PQ и RS равен $\frac{\angle XOZ}{2}$.

5. Известно, что центр описанной окружности треугольника, образованного точками касания вневписанных окружностей треугольника ABC с сторонами, лежит на (ABC) . Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

6. Триангуляция многоугольника называется равной, если все треугольники в ней имеют одинаковую площадь. Докажите, что любые две равные триангуляции одного многоугольника отличаются максимум в двух треугольниках (все треугольники, кроме двух совпадают).

7. Найдите все такие n для которых существует биекция $g(x)$ остатков по модулю n такая, что $g(x) + x, \dots, g(x) + 100x$ тоже биекции остатков по модулю n .

8. Решите в натуральных числах уравнение $(n - 1)! + 1 = n^k$.

9. Даны два многочлена $P(x), Q(x)$ степени 2024 с ненулевыми коэффициентами. Какое максимальное значение может принимать сумма числа одинаковых коэффициентов и числа общих вещественных корней у этих многочленов.

10. В ресторан пришли 2017 человек, каждый из которых заказал два разных блюда. Никакие два человека не заказали одинаковые блюда. Стоимость каждого блюда равна количеству людей, которые его заказало. Заведение платит за самое дешёвое блюдо каждого человека. Какое наибольшее число денег могло заплатить заведение?