

## Асимптотика

7 июля

1. Петя ставит на плоскость одну чёрную точку, а Вася – 100 белых. В уже покрашенную точку ходить нельзя. Сможет ли Петя поставить чёрные точки в вершины правильного треугольника?

2. Докажите, что существуют бесконечно много  $n$ , для которых уравнение  $a^2 + b^3 + c^7 = n$  не имеет решений в натуральных числах.

3. Докажите, что среди значений многочлена  $x^2 + 123456789x + 12345^{6789}$  найдутся 1000 с одинаковой суммой цифр.

4. Есть большой запас салфеток – квадратов со стороной 10 см. Докажите, что для достаточно большого диаметра  $d$  можно покрыть 99% круглого стола диаметра  $d$  так, чтобы ни одна салфетка за край стола не вылезла, и никакие две салфетки друг на друга не накладывались.

5. Существует ли многочлен с вещественными коэффициентами, значения которого во всех натуральных точках – степени двойки?

6. Из бесконечной клетчатой плоскости вырезаны клетки, у которых обе координаты делятся на 1000. а) Можно ли остаток разрезать на доминошки? б) Можно ли остаток доски обойти шахматным конём?

7. Верно ли, что из любого числа можно получить квадрат, вставляя в его десятичную запись не более 10 цифр (цифры можно вставлять в любые места)?

8. Дана квадратная таблица, клетки которой покрашены в белый и чёрный цвета. Две клетки называются соседними, если расстояние между их центрами не превосходит утроенной длины стороны клетки. С таблицей разрешается делать произвольные перестановки строк и столбцов. Верно ли, что из любой таблицы можно получить такую, в которой чёрные клетки образуют связное множество? (Множество связно, если от любой его клетки можно добраться до любой другой, переходя каждый раз к соседней и не выходя за пределы этого множества.)