

Серия 15. Теорема Дезарга об инволюции

12 июля

Определение. Инволюцией называется отображение обратное самому себе ($f(f(x)) = x$).

Утверждение. Проективное отображение $f : A \rightarrow A$ и $a \in A$ таковы, что $f(a) \neq a$ и $f(f(a)) = a$, тогда f – инволюция.

Теорема. Зафиксируем пучок коник \mathbf{P} и прямую l , не проходящую через общие точки пучка. Выберем на l произвольную точку X . Рассмотрим конику $C \in \mathbf{P}$, проходящую через X . Пусть Y – вторая точка пересечения C с l . Тогда отображение $f(X) = Y$ является проективной инволюцией.

Теорема. Зафиксируем пучок коник \mathbf{P} и точку P , не лежащую на общих касательных пучка. Выберем произвольную прямую ℓ через P . Рассмотрим конику $C \in \mathbf{P}$, касающуюся ℓ . Пусть ℓ' – вторая касательная из P к C . Тогда отображение $f(X) = Y$ (почти) является проективной инволюцией.

Замечание. Почти всегда достаточно понимать для окружности.

1. Докажите, что проективная инволюция прямой является симметрией или инверсией (возможно с мнимым радиусом).

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямые AB, CD, AC, BD, AD, BC пересекают прямую ℓ в точках X, X', Y, Y', Z, Z' соответственно. Известно, что на прямой ℓ лежат в порядке $XYZX'Y'Z'$. Докажите, что окружности, построенные на отрезках XX', YY', ZZ' имеют две общие точки.

3. I – центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Точка P вне $ABCD$ такова, что $\angle API = \angle CPI$. Никакие три точки из условия не лежат на одной прямой. Докажите, что $\angle BPI = \angle DPI$.

4. I – центр вписанной окружности ω треугольника ABC . D – основание проекции I на BC . На ω отмечена точка P . Прямая AR пересекает (IDP) в точке $Q \neq P$. Докажите, что $\angle BQI = \angle CQI$.

5. Средняя линия треугольника ABC пересекает (ABC) в точках P и Q . Касательная в точке A к (ABC) пересекает прямую BC в точке T . Докажите, что $\angle ATP = \angle BTQ$.

6. Общие касательные к описанной окружности ABC и внеписанной, касающейся стороны BC , пересекают стороны BC в точках P и Q . Докажите, что $\angle PAB = \angle CAQ$.

Серия 15. Теорема Дезарга об инволюции

12 июля

Определение. Инволюцией называется отображение обратное самому себе ($f(f(x)) = x$).

Утверждение. Проективное отображение $f : A \rightarrow A$ и $a \in A$ таковы, что $f(a) \neq a$ и $f(f(a)) = a$, тогда f – инволюция.

Теорема. Зафиксируем пучок коник \mathbf{P} и прямую l , не проходящую через общие точки пучка. Выберем на l произвольную точку X . Рассмотрим конику $C \in \mathbf{P}$, проходящую через X . Пусть Y – вторая точка пересечения C с l . Тогда отображение $f(X) = Y$ является проективной инволюцией.

Теорема. Зафиксируем пучок коник \mathbf{P} и точку P , не лежащую на общих касательных пучка. Выберем произвольную прямую ℓ через P . Рассмотрим конику $C \in \mathbf{P}$, касающуюся ℓ . Пусть ℓ' – вторая касательная из P к C . Тогда отображение $f(X) = Y$ (почти) является проективной инволюцией.

Замечание. Почти всегда достаточно понимать для окружности.

1. Докажите, что проективная инволюция прямой является симметрией или инверсией (возможно с мнимым радиусом).

2. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямые AB, CD, AC, BD, AD, BC пересекают прямую ℓ в точках X, X', Y, Y', Z, Z' соответственно. Известно, что на прямой ℓ лежат в порядке $XYZX'Y'Z'$. Докажите, что окружности, построенные на отрезках XX', YY', ZZ' имеют две общие точки.

3. I – центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Точка P вне $ABCD$ такова, что $\angle API = \angle CPI$. Никакие три точки из условия не лежат на одной прямой. Докажите, что $\angle BPI = \angle DPI$.

4. I – центр вписанной окружности ω треугольника ABC . D – основание проекции I на BC . На ω отмечена точка P . Прямая AR пересекает (IDP) в точке $Q \neq P$. Докажите, что $\angle BQI = \angle CQI$.

5. Средняя линия треугольника ABC пересекает (ABC) в точках P и Q . Касательная в точке A к (ABC) пересекает прямую BC в точке T . Докажите, что $\angle ATP = \angle BTQ$.

6. Общие касательные к описанной окружности ABC и внеписанной, касающейся стороны BC , пересекают стороны BC в точках P и Q . Докажите, что $\angle PAB = \angle CAQ$.