

Усреднение

9 июля

1. По кругу расставлено 100 чисел. Сумма всех чисел равна 1. Может ли сумма любых семи подряд идущих чисел быть отрицательна?

2. В парке по кругу стоят 52 дерева. На эти деревья как-то сели 15 птиц. Докажите, что найдутся 7 подряд идущих деревьев, на которых в сумме сидят, по крайней мере, 3 птицы.

3. По краю круглого стола равномерно расставлены 20 табличек «технар» и 20 табличек «гуманитарий». 20 технарей и 20 гуманитариев в случайном порядке сели за стол. Если у кого-то табличка не соответствует складу ума, то он обижается. Какого наименьшего количества обиженных можно гарантированно добиться поворотом стола?

4. Пусть в графе на n вершинах ровно m треугольников. Докажите, что в этом графе существует вершина, степени не меньше чем $\sqrt{\frac{6m}{n}}$.

5. На столе лежит несколько часов с одной стрелкой. Все они идут с разной скоростью. Докажите, что существует момент, когда сумма расстояний от центра стола до центров часов меньше чем сумма расстояний от центра стола до концов стрелок.

6. У Пети есть n чисел, не все из которых нули, а сумма всех чисел равна нулю. Докажите, что можно так обозначить эти числа через a_1, a_2, \dots, a_n , что

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 < 0.$$

7. Пусть A множество из n различных остатков по модулю n^2 . Докажите, что существует множество B , состоящее из n различных остатков по модулю n^2 , такое, что не менее половины остатков по модулю n^2 можно записать в виде $a + b$, где $a \in A, b \in B$.