

# Заключительная олимпиада

21 июля

## Довывод

1. Найдите все многочлены  $f(x)$  с целыми коэффициентами такие, что для любого простого  $p$  найдутся натуральные  $m$  и  $n$ , что  $f(p^n) = p^m$ .

2. Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник, а точка  $P$  лежит на стороне  $AB$ . Диагональ  $AC$  пересекает отрезок  $DP$  в точке  $Q$ . Прямая, проходящая через  $P$  параллельно  $CD$ , пересекает продолжение стороны  $CB$  за точку  $B$  в точке  $K$ , а прямая, проходящая через  $Q$  параллельно  $BD$ , пересекает продолжение стороны  $CB$  за точку  $B$  в точке  $L$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $BKP$  и  $CLQ$  касаются.

3. Квадрат  $ABCD$  разрезан на прямоугольники так, что ни в какой вершине не сходятся 4 прямоугольника. Все вершины раскрасили в два цвета так, что в любом прямоугольнике противоположные по диагонали вершины разного цвета. Известно, что вершины  $A$  и  $C$  одного цвета. Докажите, что вершины  $B$  и  $D$  тоже одного цвета.

4. Даны целое  $k > 1$  и простое  $p$  такие, что число  $n = kp + 1$  составное. Оказалось, что число  $2^{n-1} - 1$  делится на  $n$ . Докажите, что  $n < 2^k$ .

## Вывод

5. Дано натуральное  $k > 1$ . Найдите наибольшее натуральное  $t$ , обладающее следующим свойством: если выбраны  $t$  последовательных натуральных чисел, можно раскрасить все натуральные числа в  $k$  цветов так, чтобы никакое из выбранных чисел не было суммой двух разных чисел одного цвета.

6. Последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ) натуральных чисел назовём *крутой*, если

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \geq \dots \geq \frac{a_2}{a_1} > 1.$$

Докажите, что если последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n$  крута, то  $a_n \geq \frac{3}{4}n^2 - n$ .

7. Точки  $S$  и  $T$  лежат на окружности  $\omega$  с центром  $O$ . Окружность  $\Omega$  проходит через  $O$  и пересекает  $\omega$  в точках  $B$  и  $C$ . На отрезке  $BC$  выбрана точка  $P$ . Прямая  $OP$  пересекает  $\Omega$  в точке  $Q \neq P$ .  $R$  — точка, симметричная  $Q$  относительно  $ST$ . Докажите, что прямые  $PS$  и  $PT$  симметричны относительно биссектрисы угла  $QPR$ .