

Направленные углы

12 июля

Определение: направленным углом между прямыми a и b называют угол $\angle(a, b)$ на который нужно повернуть прямую a , чтобы она стала параллельна прямой b .

Свойства направленных углов:

- 1) $\angle(b, a) = -\angle(a, b)$;
- 2) $\angle(a, b) + \angle(b, c) = \angle(a, c)$;
- 3) A, B, C, D — точки, не лежащие на одной прямой. $\angle(AC, CB) = \angle(AD, DB) \Leftrightarrow A, B, C, D$ лежат на одной окружности;
- 4) A, B и C лежат на одной окружности, l — касательная к этой окружности, тогда $\angle(AC, CB) = \angle(l, AB)$.

1. Дан треугольник ABC , точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, AC, AB соответственно. а) Докажите, что описанные окружности треугольников $A_1BC_1, A_1B_1C, AB_1C_1$ пересекаются в одной точке. б) Докажите, что A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда эти окружности пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .

2. Лемма Фусса Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках K и M . Через точку K проведена касательная к окружности ω_1 , пересекающая ω_2 в точке A . Прямая, проходящая через точку M параллельно KA , пересекает ω_1 и ω_2 в точках L и B соответственно. Докажите, что $KL \parallel AB$.

3. На окружности расположены точки A, B, C и D . Проведены хорды DX и DY , перпендикулярные прямым CB и CA соответственно. Докажите, что $AX \parallel BY$.

4. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A_1 и B_1 , окружности ω_2 и ω_3 — в точках A_2 и B_2 , окружности ω_3 и ω_4 — в точках A_3 и B_3 , окружности ω_4 и ω_1 — в точках A_4 и B_4 . Докажите, что если точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности или прямой, то точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат на одной окружности или прямой.

5. Точки P_a, P_b и P_c симметричны точке P относительно понятию каких сторон треугольника ABC . Точка Q — центр описанной окружности треугольника $P_aP_bP_c$. Докажите, что точки P и Q — изогонально сопряжены в этом треугольнике.

6. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B . Прямая O_1B вторично пересекает окружность ω_2 в точке C , прямая O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке D . Пусть X — вторая точка пересечения AC и ω_1 , а Y — вторая точка пересечения BD и ω_2 . Докажите, что $CX = DY$.