

Серия 8. Следствия из леммы Шпернера

5 июля

1. Теорема Брауэра. Дан треугольник Δ (с границей и со внутренностью) и непрерывное отображение $f : \Delta \rightarrow \Delta$. Докажите, что существует точка $x \in \Delta$ такая, что $f(x) = x$.

Подсказка: лемма Шпернера.

2. Теорема Борсука-Улама. Докажите, что для любого антиподального непрерывного отображения $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ существует такая точка $x_0 \in S^2$, что $f(x_0) = (0, 0)$. Сфера S^2 — обычная двумерная сфера в трёхмерном пространстве. Отображение $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется антиподальным, если значения f в диаметрально противоположных точках сферы в сумме дают $(0, 0)$.

Подсказка: задача 2.4.

Следующий набор задач нужен для «расширения» множества фигур, для которых верна теорема Брауэра о неподвижной точке. Все множества лежат в \mathbb{R}^2 .

3. Пусть $g : X \rightarrow Y$ — непрерывное взаимно однозначное соответствие; X — секвенциальный компакт.

(a) Осознайте, что Y — секвенциальный компакт.

(b) Докажите, что $g^{-1} : Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение.

4. Пусть $g : \Delta \rightarrow Y$ — непрерывное взаимно однозначное соответствие; Δ — треугольник с границей. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f : Y \rightarrow Y$ существует такая точка $x \in Y$, что $f(x) = x$.

Серия 8. Следствия из леммы Шпернера

5 июля

1. Теорема Брауэра. Дан треугольник Δ (с границей и со внутренностью) и непрерывное отображение $f : \Delta \rightarrow \Delta$. Докажите, что существует точка $x \in \Delta$ такая, что $f(x) = x$.

Подсказка: лемма Шпернера.

2. Теорема Борсука-Улама. Докажите, что для любого антиподального непрерывного отображения $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ существует такая точка $x_0 \in S^2$, что $f(x_0) = (0, 0)$. Сфера S^2 — обычная двумерная сфера в трёхмерном пространстве. Отображение $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется антиподальным, если значения f в диаметрально противоположных точках сферы в сумме дают $(0, 0)$.

Подсказка: задача 2.4.

Следующий набор задач нужен для «расширения» множества фигур, для которых верна теорема Брауэра о неподвижной точке. Все множества лежат в \mathbb{R}^2 .

3. Пусть $g : X \rightarrow Y$ — непрерывное взаимно однозначное соответствие; X — секвенциальный компакт.

(a) Осознайте, что Y — секвенциальный компакт.

(b) Докажите, что $g^{-1} : Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение.

4. Пусть $g : \Delta \rightarrow Y$ — непрерывное взаимно однозначное соответствие; Δ — треугольник с границей. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f : Y \rightarrow Y$ существует такая точка $x \in Y$, что $f(x) = x$.