

## Серия 25. Существование примеров

19 июля

**Теорема Рамсея.** Пусть  $n, m, k$  — натуральные числа, причём  $n, m \geq r$ . Тогда существует число  $R(n, m, k)$ , обладающее следующим свойством: если все  $k$ -элементные подмножества  $R(n, m, k)$ -элементного множества  $S$  произвольным образом разбиты на два непересекающихся семейства  $\alpha$  и  $\beta$ , то или существует  $n$ -элементное подмножество множества  $S$ , все  $k$ -элементные подмножества которого содержатся в  $\alpha$ , или существует  $m$ -элементное подмножество, все  $k$ -элементные подмножества которого содержатся в  $\beta$ .

**Пример. (Теорема Эрдёша-Секереша).** Докажите, что для любого  $k$  существует такое  $n$ , что среди любых  $n$  точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый  $k$ -угольник.

**Бесконечная теорема Рамсея.** Пусть  $X$  — произвольное бесконечное множество, а  $k$  — натуральное число. Покрасим как угодно все подмножества из  $k$  элементов  $X$  в  $n$  цветов. Тогда существует бесконечное множество  $Y \subset X$  такое, что все  $k$ -элементные подмножества в  $Y$  одного цвета.

1. Для любых натуральных чисел  $k$  и  $d$  найдётся граф  $G$ , не имеющий циклов длины не больше  $k$  и хроматическое число которого не менее  $d$ .

Пусть имеется семейство событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , и для каждого события  $A_i$  выделено множество индексов  $M(i) \subset \{1, 2, \dots, n\}$  такое, что  $A_i$  не зависит от всех событий  $A_j, j \notin M(i)$ . Это означает, что для любого события  $B$ , выражаемого через множество событий  $\{A_j, j \notin M(i)\}$ , события  $A_i$  и  $B$  независимы. Через  $\bar{A}$  будем обозначать дополнение события  $A$ .

**Теорема (Локальная лемма Ловаса).** Предположим, что нашлись такие числа  $x_i \in (0, 1)$ , что для всех  $i$  выполняется неравенство  $\text{Prob}(A_i) \leq x_i \prod_{j \in M(i)} (1 - x_j)$ . Тогда  $\text{Prob}(\bigcap \bar{A}_i) \geq \prod (1 - x_i)$  — в частности, с положительной вероятностью ни одно из событий  $A_i$  не происходит.

## Для самостоятельного решения

**2.** В некотором множестве выбрали бесконечное количество конечных подмножеств одинакового размера. Докажите, что можно выбрать 2022 из них так, чтобы любые два различных пересекались по одному и тому же количеству элементов.

**3.** Докажите, что для любого натурального  $n$  существует число  $N$  такое, что в любом волейбольном однокруговом турнире на  $N$  вершинах можно выделить  $n$  человек так, чтобы первый обыграл всех остальных, второй — всех, кроме первого, и т. д., последний проиграл всем.

**4.** Пусть за круглым столом сидит по 11 представителей каждой из  $n$  стран. Тогда можно выбрать в каждой стране по представителю так, чтобы никакие двое выбранных не сидели рядом.

*Указание: выберем случайно и независимо  $n$  представителей из разных стран. Далее воспользуемся локальной леммой Ловаса, где  $A_i$  это событие, при котором мы взяли двух человек на местах  $i$  и  $i + 1$ .*

**5.** \* Клетки доски  $n \times n$  раскрашены в несколько цветов, так что клеток каждого цвета не больше чем  $\frac{n-1}{4e}$ . Докажите, что можно поставить на доску  $n$  попарно не бьющих друг друга ладей, так чтобы они стояли на клетках разных цветов.

**6.** \* Дано бесконечное множество  $X$ . Некоторые его конечные подмножества объявлены хорошими. При этом любое конечное подмножество  $A \subset X$  можно представить в виде объединения двух непересекающихся хороших множеств. Докажите, что есть множество, которое можно представить в таком виде хотя бы миллионом способов.

## Серия 25. Существование примеров

19 июля

**Теорема Рамсея.** Пусть  $n, m, k$  — натуральные числа, причём  $n, m \geq r$ . Тогда существует число  $R(n, m, k)$ , обладающее следующим свойством: если все  $k$ -элементные подмножества  $R(n, m, k)$ -элементного множества  $S$  произвольным образом разбиты на два непересекающихся семейства  $\alpha$  и  $\beta$ , то или существует  $n$ -элементное подмножество множества  $S$ , все  $k$ -элементные подмножества которого содержатся в  $\alpha$ , или существует  $m$ -элементное подмножество, все  $k$ -элементные подмножества которого содержатся в  $\beta$ .

**Пример. (Теорема Эрдёша-Секереша).** Докажите, что для любого  $k$  существует такое  $n$ , что среди любых  $n$  точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый  $k$ -угольник.

**Бесконечная теорема Рамсея.** Пусть  $X$  — произвольное бесконечное множество, а  $k$  — натуральное число. Покрасим как угодно все подмножества из  $k$  элементов  $X$  в  $n$  цветов. Тогда существует бесконечное множество  $Y \subset X$  такое, что все  $k$ -элементные подмножества в  $Y$  одного цвета.

1. Для любых натуральных чисел  $k$  и  $d$  найдётся граф  $G$ , не имеющий циклов длины не больше  $k$  и хроматическое число которого не менее  $d$ .

Пусть имеется семейство событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , и для каждого события  $A_i$  выделено множество индексов  $M(i) \subset \{1, 2, \dots, n\}$  такое, что  $A_i$  не зависит от всех событий  $A_j, j \notin M(i)$ . Это означает, что для любого события  $B$ , выражаемого через множество событий  $\{A_j, j \notin M(i)\}$ , события  $A_i$  и  $B$  независимы. Через  $\bar{A}$  будем обозначать дополнение события  $A$ .

**Теорема (Локальная лемма Ловаса).** Предположим, что нашлись такие числа  $x_i \in (0, 1)$ , что для всех  $i$  выполняется неравенство  $\text{Prob}(A_i) \leq x_i \prod_{j \in M(i)} (1 - x_j)$ . Тогда  $\text{Prob}(\bigcap \bar{A}_i) \geq \prod (1 - x_i)$  — в частности, с положительной вероятностью ни одно из событий  $A_i$  не происходит.

## Для самостоятельного решения

**2.** В некотором множестве выбрали бесконечное количество конечных подмножеств одинакового размера. Докажите, что можно выбрать 2022 из них так, чтобы любые два различных пересекались по одному и тому же количеству элементов.

**3.** Докажите, что для любого натурального  $n$  существует число  $N$  такое, что в любом волейбольном однокруговом турнире на  $N$  вершинах можно выделить  $n$  человек так, чтобы первый обыграл всех остальных, второй — всех, кроме первого, и т. д., последний проиграл всем.

**4.** Пусть за круглым столом сидит по 11 представителей каждой из  $n$  стран. Тогда можно выбрать в каждой стране по представителю так, чтобы никакие двое выбранных не сидели рядом.

*Указание: выберем случайно и независимо  $n$  представителей из разных стран. Далее воспользуемся локальной леммой Ловаса, где  $A_i$  это событие, при котором мы взяли двух человек на местах  $i$  и  $i + 1$ .*

**5. \*** Клетки доски  $n \times n$  раскрашены в несколько цветов, так что клеток каждого цвета не больше чем  $\frac{n-1}{4e}$ . Докажите, что можно поставить на доску  $n$  попарно не бьющих друг друга ладей, так чтобы они стояли на клетках разных цветов.

**6. \*** Дано бесконечное множество  $X$ . Некоторые его конечные подмножества объявлены хорошими. При этом любое конечное подмножество  $A \subset X$  можно представить в виде объединения двух непересекающихся хороших множеств. Докажите, что есть множество, которое можно представить в таком виде хотя бы миллионом способов.