

# Изогональное сопряжение

4 июля

**Определение.** Прямые  $l$  и  $g$  *изогональны* относительно угла  $C$ , если они симметричны относительно биссектрисы угла  $C$ .

**Определение.** Точки  $A$  и  $B$  *изогональны* относительно угла  $C$ , если находятся на изогональных, относительно  $C$ , прямых.

**Полезный факт 1:** Лучи  $a$  и  $b$  образуют угол с вершиной  $O$ . Луч  $c$  с началом в  $O$  однозначно восстанавливается, если мы знаем отношение синусов ориентированных углов  $(a, c)$  и  $(c, b)$ .

**Полезный факт 2:** Углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  треугольника  $ABC$  разделены тремя лучами на  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ;  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ;  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Тогда эти три луча пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1.$$

**Примечание:** В предыдущей теореме мы имеем дело с отношением синусов ориентированных углов.

1. Дан треугольник  $ABC$ . Докажите, что если точки  $F$  и  $K$  изогональны относительно углов  $B$  и  $C$ , то они изогональны относительно угла  $A$ .

**Определение.** *Изогональным сопряжением* относительно треугольника  $ABC$  называют преобразование плоскости, которое каждую точку  $F$  переводит в  $F'$  так, что пары  $AF-AF'$ ,  $BF-BF'$ ,  $CF-CF'$  являются изогоналями относительно углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

*Контрольный вопрос 1:* Какие точки изогонально сопряжены самим себе?

*Контрольный вопрос 2:* Какая точка изогонально сопряжена центру описанной окружности треугольника?

2. Касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$  в точках  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $Q$  симметрична точке  $A$  относительно середины стороны  $BC$ . Докажите, что точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены относительно треугольника  $ABC$ .

3. Из точки  $A$  параллелограмма  $ABCD$  с  $\angle DAC = 90^\circ$  опустили перпендикуляр  $AN$  на  $DC$ . Также, пусть  $P$  — точка на  $AC$  такая, что  $PD$  является касательной к описанной окружности  $ABD$ . Докажите, что  $\angle PBA = \angle DBN$ .

4. Докажите, что точка не имеет изогонально сопряжённой относительно некоторого треугольника тогда и только тогда, когда она на описанной окружности этого треугольника.

**Определение.** Треугольник составленный из основания высот, опущенных на стороны треугольника  $ABC$  из точки  $X$ , называется *педальным*.

*Контрольный вопрос:* Когда педальный треугольник вырождается?

5. Пусть  $A_1B_1C_1$  — педальный треугольник точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . Прямые  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  пересекают описанную окружность  $ABC$  в точках  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$ . Докажите подобие треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ .

6. Точка  $P$  лежит внутри треугольника  $ABC$ . Точки  $P_a$ ,  $P_b$  и  $P_c$  симметричны точке  $P$  относительно понятию каких сторон треугольника. Точка  $Q$  — центр описанной окружности треугольника  $P_aP_bP_c$ . Докажите, что точки  $P$  и  $Q$  — изогонально сопряжены в этом треугольнике.

7. Касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$  в точках  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $P_c$ . Окружность, проходящая через проекции  $P_c$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , повторно пересекает прямую  $AB$  в точке  $C'$ . Аналогично определяются точки  $A'$  и  $B'$ . Докажите, что прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке.

8. (**Лемма об изогоналях**) Внутри угла  $CDA$  проведены лучи  $DN$  и  $DM$ , симметричные относительно биссектрисы этого угла. Если  $P$  — точка пересечения прямых  $AN$  и  $CM$ , а  $Q$  — точка пересечения прямых  $CN$  и  $AM$ , то лучи  $DP$  и  $DQ$  также симметричны относительно биссектрисы угла  $CDA$ .