

# Направленные углы-2

17 июля

1. На сторонах треугольника  $ABC$  внешним образом построены треугольники  $ABC_1$ ,  $AB_1C$  и  $A_1BC$ , причём сумма углов при вершинах  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  кратна  $180^\circ$ . Докажите, что описанные окружности построенных треугольников пересекаются в одной точке.

2. **Задача 255.** Пусть  $M$  и  $N$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $BC$  и  $BA$  треугольника  $ABC$ ,  $K$  — точка пересечения биссектрисы угла  $A$  с прямой  $MN$ . Докажите, что  $\angle AKC = 90^\circ$ .

3. Треугольник  $ABC$  ( $\angle C \neq 90^\circ$ ) вписан в окружность с центром  $O$ , на окружности отмечена точка  $D$ . Перпендикуляр, опущенный из  $D$  на  $BC$ , пересекает прямую  $AC$  в точке  $E$ . Докажите, что центр окружности  $(AED)$  лежит на окружности  $(AOB)$ .

4. В треугольнике  $ABC$  медианы  $AM_A$ ,  $BM_B$  и  $CM_C$  пересекаются в точке  $M$ . Построим окружность  $\Omega_A$ , проходящую через середину отрезка  $AM$  и касающуюся отрезка  $BC$  в точке  $M_A$ . Аналогично строятся окружности  $\Omega_B$  и  $\Omega_C$ . Докажите, что окружности  $\Omega_A$ ,  $\Omega_B$  и  $\Omega_C$  имеют общую точку.

5. Пусть  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$  — прямые, содержащие последовательные стороны шестиугольника, вписанного в окружность. Обозначим  $l_1 \cap l_4 = A, l_2 \cap l_5 = B, l_3 \cap l_6 = C$ . Прямая  $l'_1$ , параллельная  $l_3$  и проходящая через  $A$  пересекает  $l_2$  и  $l_6$  в точках  $P_{12}$  и  $P_{16}$  соответственно. Прямая  $l'_3$ , параллельная  $l_5$  и проходящая через  $C$  пересекает  $l_2$  и  $l_4$  в точках  $P_{32}$  и  $P_{34}$  соответственно. Прямая  $l'_5$ , параллельная  $l_1$  и проходящая через  $B$  пересекает  $l_4$  и  $l_6$  в точках  $P_{54}$  и  $P_{56}$  соответственно. Докажите, что точки  $P_{12}, P_{16}, P_{32}, P_{34}, P_{54}, P_{56}$  лежат на одной окружности.