

Векторные пространства

9 июля

Определение: Векторным (или линейным) пространством над полем F называется множество V с двумя операциями: сложением (паре $v, u \in V$ ставится в соответствие элемент из V обозначаемый $v + u$) и умножением на число (паре чисел $\lambda \in F$ и $v \in V$ ставится в соответствие число $\lambda v \in V$) удовлетворяющими следующим аксиомам:

1. (Коммутативность сложения) $\forall u, v \in V, u + v = v + u$
2. (Ассоциативность сложения) $\forall u, v, w \in V, u + (v + w) = (u + v) + w$
3. (Существование нуля) $\exists 0 \in V : \forall v \in V, v + 0 = v$
4. (Противоположный элемент) $\forall u \exists v$ такой, что $u + v = 0$. (Такой элемент называется противоположным и обозначается $-u$)
5. (Ассоциативность умножения) $\forall \lambda, \mu \in F, v \in V, \lambda(\mu v) = (\lambda \cdot \mu)v$
6. (Дистрибутивность 1) $\forall \lambda, \mu \in F, v \in V, \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v$
7. (Дистрибутивность 2) $\forall \lambda \in F, u, v \in V, \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
8. $\forall v \in V, 1 \cdot v = v$

Определение: Вектор вида $x = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$, где $a_i \in F, u_i \in V$ называется *линейной комбинацией* векторов u_1, \dots, u_n .

Определение: Система векторов u_1, u_2, \dots называется *линейно независимой*, если никакая нетривиальная линейная комбинация не равна нулю. Система векторов u_1, u_2, \dots называется *порождающей*, если любой $x \in V$ является линейной комбинацией u_i .

1. Векторы множества u_1, u_2, \dots являются линейно зависимыми если, и только если, один из них есть линейная комбинация других.

Определение: *Базисом* линейного пространства V называется любая линейно независимая порождающая система векторов. Количество векторов в базисе называется *размерностью* векторного пространства. Обозначается $\dim_F V$ или просто $\dim V$.

2. Докажите, что множество векторов является базисом V если и только если любой вектор из V выражается в виде линейной комбинации векторов этого множества единственным (с точностью до перестановки слагаемых) образом.

3. а) Докажите, что из любой конечной системы порождающих можно выбрать подсистему, которая является базисом. б) Пусть в пространстве V есть конечный базис e_1, e_2, \dots, e_n . Докажите, что любую линейно независимую систему векторов u_1, u_2, \dots, u_k можно дополнить до базиса.

4. Докажите, что множество решений системы линейных однородных уравнений, т.е. последовательностей (x_1, x_2, \dots, x_n) решений уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots = 0 \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

образует векторное пространство (подпространство в F^n).

5. **Теорема о корректности размерности:** Докажите, что в любых двух базисах поровну элементов.

6. а) Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

б) Рассмотрим теперь те раскраски, для которых из каждой вершины выходит фиксированное по четности число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки, или же их нет вообще.

7. Дано множество из n элементов. а) Докажите, что из любого набора из $n + 1$ его подмножества можно выбрать две группы с одинаковым объединением; б) Докажите, что из любого набора из $n + 2$ подмножеств можно выбрать две группы с одинаковым пересечением.