

Серия 23. Теорема о 9 точках на кубической кривой

18 июля

Теорема о 9 точках на кубической кривой. На плоскости даны 3 красных и 3 синих прямых. Любые две разноцветные прямые имеют одну общую точку, причём все девять точек пересечения различны. Известно, что восемь из девяти этих точек лежат на кубической кривой. Тогда и девятая точка лежит на этой кривой.

1. Ключевые моменты доказательства. Пусть p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 – наши прямые.

(a) Два многочлена (не выше) третьей степени $f(x)$ и $g(x)$ обращаются в нуль в трех точках. Докажите, что найдется такое число α , что $f(x) = \alpha g(x)$ (за некоторым исключением).

(b) Ясно, что любая кубика вида $\alpha p_1 p_2 p_3 + \beta q_1 q_2 q_3$ обращается в нуль на 8-ми заданных точках. Хотим доказать, что любая кубика с этим свойством имеет такой вид.

Теорема Паскаля. 6 точек лежат на конике. Тогда точки пересечения «противоположных сторон» полученного шестиугольника лежат на одной прямой.

Замечание. Так как коника может быть вырожденной, то частным случаем теоремы Паскаля является теорема Паппа.

2. Сформулируйте теоремы, двойственные следующим теоремам:

- (a) Паппа;
- (b) о полном четырехвершиннике;
- (c) Паскаля (она называется теоремой Брианшона);
- (d) о поляре точки относительно пары прямых.

3. На координатной плоскости имеется квадрат со сторонами, параллельными осям координат. Этот квадрат поделён на 64 равных квадратики прямыми, параллельными осям координат. Внутри квадрата движется точка, координаты которой в каждый момент времени t вычисляются по формулам $x = at^3 + bt^2 + ct + d$, $y = At^3 + Bt^2 + Ct + D$. Докажите, что среди этих 64 квадратики найдётся такой, внутри которого точка не находилась ни в какой момент времени.

Задачи на обратной стороне!

Для самостоятельного решения

4. Окружность ω касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E и его описанной окружности. Докажите, что прямая DE проходит через I – центр вписанной окружности треугольника ABC .

5. Из произвольной точки T плоскости опущены перпендикуляры TP и TQ на стороны AB и AC треугольника ABC . Из вершины A опущены перпендикуляры AR и AS на прямые TC и TB . Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC .

6. Точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC , P – произвольная точка. Прямые AP , BP и CP пересекают окружность в точках A' , B' и C' соответственно. Докажите, что точки пересечения прямых MA' и BC , MB' и CA , MC' и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку P .

7. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Через произвольную точку X проведены прямые AX и DX , пересекающие прямые CD и AB в точках E и F соответственно и вторично пересекающие окружность в точках M и N соответственно. Докажите, что прямые EF , MN и BC пересекаются в одной точке или параллельны.

8. (*) Вписанная окружность S касается стороны BC треугольника ABC в точке P . Точки Q и R получаются соответственно из точек B и C симметрией относительно P . Перпендикуляр к BC в точке Q пересекает прямую AC в точке M , а перпендикуляр к BC в точке R пересекает прямую AB в точке N . Докажите, что прямая MN касается S .

Серия 23. Теорема о 9 точках на кубической кривой

18 июля

Теорема о 9 точках на кубической кривой. На плоскости даны 3 красных и 3 синих прямых. Любые две разноцветные прямые имеют одну общую точку, причём все девять точек пересечения различны. Известно, что восемь из девяти этих точек лежат на кубической кривой. Тогда и девятая точка лежит на этой кривой.

1. Ключевые моменты доказательства. Пусть p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 – наши прямые.

(a) Два многочлена (не выше) третьей степени $f(x)$ и $g(x)$ обращаются в нуль в трех точках. Докажите, что найдется такое число α , что $f(x) = \alpha g(x)$ (за некоторым исключением).

(b) Ясно, что любая кубика вида $\alpha p_1 p_2 p_3 + \beta q_1 q_2 q_3$ обращается в нуль на 8-ми заданных точках. Хотим доказать, что любая кубика с этим свойством имеет такой вид.

Теорема Паскаля. 6 точек лежат на конике. Тогда точки пересечения «противоположных сторон» полученного шестиугольника лежат на одной прямой.

Замечание. Так как коника может быть вырожденной, то частным случаем теоремы Паскаля является теорема Паппа.

2. Сформулируйте теоремы, двойственные следующим теоремам:

- (a) Паппа;
- (b) о полном четырехвершиннике;
- (c) Паскаля (она называется теоремой Брианшона);
- (d) о поляре точки относительно пары прямых.

3. На координатной плоскости имеется квадрат со сторонами, параллельными осям координат. Этот квадрат поделён на 64 равных квадратики прямыми, параллельными осям координат. Внутри квадрата движется точка, координаты которой в каждый момент времени t вычисляются по формулам $x = at^3 + bt^2 + ct + d$, $y = At^3 + Bt^2 + Ct + D$. Докажите, что среди этих 64 квадратики найдётся такой, внутри которого точка не находилась ни в какой момент времени.

Задачи на обратной стороне!

Для самостоятельного решения

4. Окружность ω касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E и его описанной окружности. Докажите, что прямая DE проходит через I – центр вписанной окружности треугольника ABC .

5. Из произвольной точки T плоскости опущены перпендикуляры TP и TQ на стороны AB и AC треугольника ABC . Из вершины A опущены перпендикуляры AR и AS на прямые TC и TB . Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC .

6. Точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC , P – произвольная точка. Прямые AP , BP и CP пересекают окружность в точках A' , B' и C' соответственно. Докажите, что точки пересечения прямых MA' и BC , MB' и CA , MC' и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку P .

7. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Через произвольную точку X проведены прямые AX и DX , пересекающие прямые CD и AB в точках E и F соответственно и вторично пересекающие окружность в точках M и N соответственно. Докажите, что прямые EF , MN и BC пересекаются в одной точке или параллельны.

8. (*) Вписанная окружность S касается стороны BC треугольника ABC в точке P . Точки Q и R получаются соответственно из точек B и C симметрией относительно P . Перпендикуляр к BC в точке Q пересекает прямую AC в точке M , а перпендикуляр к BC в точке R пересекает прямую AB в точке N . Докажите, что прямая MN касается S .