

Заключительная олимпиада

21 июля

Довывод

1. Найдите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами такие, что для любого простого p найдутся натуральные m и n , что $f(p^n) = p^m$.

2. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, а точка P лежит на стороне AB . Диагональ AC пересекает отрезок DP в точке Q . Прямая, проходящая через P параллельно CD , пересекает продолжение стороны CB за точку B в точке K , а прямая, проходящая через Q параллельно BD , пересекает продолжение стороны CB за точку B в точке L . Докажите, что описанные окружности треугольников BKP и CLQ касаются.

3. Квадрат $ABCD$ разрезан на прямоугольники так, что ни в какой вершине не сходятся 4 прямоугольника. Все вершины раскрасили в два цвета так, что в любом прямоугольнике противоположные по диагонали вершины разного цвета. Известно, что вершины A и C одного цвета. Докажите, что вершины B и D тоже одного цвета.

4. Даны целое $k > 1$ и простое p такие, что число $n = kp + 1$ составное. Оказалось, что число $2^{n-1} - 1$ делится на n . Докажите, что $n < 2^k$.

Вывод

5. Дано натуральное $k > 1$. Найдите наибольшее натуральное t , обладающее следующим свойством: если выбраны t последовательных натуральных чисел, можно раскрасить все натуральные числа в k цветов так, чтобы никакое из выбранных чисел не было суммой двух разных чисел одного цвета.

6. Последовательность a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$) натуральных чисел назовём *крутой*, если

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \geq \dots \geq \frac{a_2}{a_1} > 1.$$

Докажите, что если последовательность a_1, a_2, \dots, a_n крута, то $a_n \geq \frac{3}{4}n^2 - n$.

7. Точки S и T лежат на окружности ω с центром O . Окружность Ω проходит через O и пересекает ω в точках B и C . На отрезке BC выбрана точка P . Прямая OP пересекает Ω в точке $Q \neq P$. R — точка, симметричная Q относительно ST . Докажите, что прямые PS и PT симметричны относительно биссектрисы угла QPR .