

Производящие функции

19 июля

Определение: Формальный ряд — запись вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, где x — формальный символ

Производящей функцией для последовательности: для последовательности $\{a_n\}$ назовём формальный ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где x — некий формальный символ.

1. Найдите формальный ряд, который был бы произведением формальных рядов: $(1 + x + x^2 + \dots)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots)$.

Интересный факт: Сумма, разность и произведение двух формальных рядов также будет формальным рядом.

Контрольный вопрос: Будет ли частное двух формальных рядов также формальным рядом?

2. Вычислите коэффициенты ряда: а) $\frac{1}{1-x}$; б) $\frac{1}{1-\alpha x}$; в) $\frac{1}{(x-1)^2}$.

3. а) Пусть f — производящая функция последовательности Фибоначчи. Чему равно $f - fx - fx^2$? б) Найдите производящую функцию для чисел Фибоначчи.

4. Вычислите коэффициенты формального ряда $\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$.

5. Докажите, что любую дробь вида $\frac{P(x)}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$ (P — многочлен, $\alpha \neq \beta$) можно представить в виде линейной комбинации многочлена и дробей $\frac{1}{1-\alpha x}$, $\frac{1}{1-\beta x}$.

6. Придумайте обобщение прошлой задачи на случай дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P и Q многочлены)
а) Если Q не имеет кратных корней. б) Для произвольного $Q(x)$.

7. Пусть $p(n)$ — количество диаграмм Юнга из n клеток ($p(0) = 1$). Докажите равенство

$$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots = (1 + x + x^2 + \dots) \dots (1 + x^k + x^{2k} + \dots).$$

8. Обозначим через $d(n)$ количество разбиений числа n на различные слагаемые, а через $l(n)$ — на нечетные. Докажите равенства:

а) $d(0) + d(1)x + d(2)x^2 + \dots = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \dots;$

б) $l(0) + l(1)x + l(2)x^2 + \dots = (1 - x)^{-1}(1 - x^3)^{-1}(1 - x^5)^{-1} \dots;$

в) $d(n) = l(n)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).