

Серия 9. Вероятностный метод

7 июля

1. Игра в «супершахматы» ведётся на доске размером 100×100 , в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру A передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей мы ничего не знаем). Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

2. В клетках доски 8×40000 (8 строчек, 40 000 столбцов) расставлены целые числа от 1 до 320 000, каждое по одному разу. Докажите, что можно переставить строчки таблицы так, чтобы в каждом столбце числа не стояли в порядке возрастания, если смотреть сверху вниз

3. Докажите, что числа $1, 2, \dots, 2016$ можно покрасить в четыре цвета так, чтобы не было одноцветных арифметических прогрессий из 10 членов.

4. Дано семейство \mathbb{F} , состоящее из d -элементных подмножеств конечного множества X , причем $|\mathbb{F}| \leq 2^{d-1}$. Докажите, что существует такая раскраска X в два цвета, что в каждом множестве $A \in \mathbb{F}$ есть элементы обоих цветов.

5. Рассмотрим двудольный граф $G = (V, E)$ с n вершинами. Пусть для каждой вершины $v \in V$ задан список $S(v)$ из более чем $\log_2 n$ цветов. Докажите, что существует правильная раскраска графа G , приписывающая каждой вершине v цвет из её списка $S(v)$.

6. На листке из тетрадки в клеточку нарисован лабиринт и в нем робот, который по командам «вверх», «вниз», «влево» и «вправо» ходит из клетки в клетку. Стены лабиринта идут по сторонам клеток, выхода из лабиринта нет. Если, начав двигаться по команде, робот упирается в стену, то он остается на месте. Мы не знаем, какой лабиринт нарисован, но знаем размер листка, измеренный в клеточках. Докажите, что можно составить последовательность команд, которая гарантирует, что робот побывает во всех клетках доступной ему части лабиринта.

7. Нижняя оценка диагонального числа Рамсея.

а) Докажите, что если $C_n^k \cdot 2^{1-C_k^2} < 1$, то $R(k, k) > n$.

б) Докажите, что $R(k, k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ для всех $k \geq 3$.

Серия 9. Вероятностный метод

7 июля

1. Игра в «супершахматы» ведётся на доске размером 100×100 , в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру A передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей мы ничего не знаем). Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

2. В клетках доски 8×40000 (8 строчек, 40 000 столбцов) расставлены целые числа от 1 до 320 000, каждое по одному разу. Докажите, что можно переставить строчки таблицы так, чтобы в каждом столбце числа не стояли в порядке возрастания, если смотреть сверху вниз

3. Докажите, что числа $1, 2, \dots, 2016$ можно покрасить в четыре цвета так, чтобы не было одноцветных арифметических прогрессий из 10 членов.

4. Дано семейство \mathbb{F} , состоящее из d -элементных подмножеств конечного множества X , причем $|\mathbb{F}| \leq 2^{d-1}$. Докажите, что существует такая раскраска X в два цвета, что в каждом множестве $A \in \mathbb{F}$ есть элементы обоих цветов.

5. Рассмотрим двудольный граф $G = (V, E)$ с n вершинами. Пусть для каждой вершины $v \in V$ задан список $S(v)$ из более чем $\log_2 n$ цветов. Докажите, что существует правильная раскраска графа G , приписывающая каждой вершине v цвет из её списка $S(v)$.

6. На листке из тетрадки в клеточку нарисован лабиринт и в нем робот, который по командам «вверх», «вниз», «влево» и «вправо» ходит из клетки в клетку. Стены лабиринта идут по сторонам клеток, выхода из лабиринта нет. Если, начав двигаться по команде, робот упирается в стену, то он остается на месте. Мы не знаем, какой лабиринт нарисован, но знаем размер листка, измеренный в клеточках. Докажите, что можно составить последовательность команд, которая гарантирует, что робот побывает во всех клетках доступной ему части лабиринта.

7. Нижняя оценка диагонального числа Рамсея.

а) Докажите, что если $C_n^k \cdot 2^{1-C_k^2} < 1$, то $R(k, k) > n$.

б) Докажите, что $R(k, k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ для всех $k \geq 3$.