

В бесконечность!

3 июля

1. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

2. На плоскости отмечено 2024 точки. Докажите, что можно ввести на этой плоскости координатные оси так, чтобы а) все точки имели разную абсциссу; б) все точки имели как разные абсциссы, так и разные ординаты.

3. Можно ли покрыть плоскость внутренностями 2024 парабол?

4. Круг разделен на 2024 сектора и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе, где фишка, фишка сдвигается на это число секторов по часовой стрелке, и там, где она остановилась, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое число ходов все числа станут больше миллиона.

5. Дана бесконечная строго возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1 < a_2 < \dots$, где для всех k верно $a_{k+1} - a_k < 10^6$. Докажите, что найдутся различные i и j такие, что a_i делится на a_j .

6. Кузнечик стартует в точке 0 на целочисленной прямой. Он может делать прыжки влево и вправо длиной не более 2024. а) Может ли он пропрыгать все точки от -100500 до 100500 по одному разу? б) Может ли он пропрыгать всю прямую, побывав каждой точке по одному разу?

7. Каждая точка плоскости покрашена в один из 2024 цветов. Докажите, что найдётся а) прямоугольный треугольник, с вершинами одного цвета; б) прямоугольник с вершинами одного цвета.

8. **Лемма Кёнига** Пусть в дереве бесконечное число вершин, но у каждой вершины конечная степень. Докажите, что в этом дереве есть бесконечный простой путь.