

Серия 20. Производящие функции – 2

14 июля

Пример. Докажите, что число разбиений на различные слагаемые равно числу разбиений на нечётные слагаемые.

1. Напишите производящие функции для последовательности количеств разбиений числа n

(a) на любые части

(b) на части ≤ 4

(c) на части, где каждая встречается не более четырёх раз

2. Докажите, что число разбиений n , где каждая нечётная часть встречается не более одного раза, равно числу разбиений n , где все части не дают остаток 2 при делении на 4.

3. Докажите, что число разбиений n , где каждая часть встречается хотя бы два раза, равно числу разбиений n , где каждая часть делится на 2 или на 3.

4. Докажите, что число разбиений n , где каждая чётная часть встречается не более одного раза, равно числу разбиений n , где каждая часть встречается не более трёх раз.

5. Докажите, что число разбиений n , где каждая часть встречается 2, 3 или 5 раз, равно числу разбиений n , где каждая часть даёт остаток 2, 3, 6, 9 или 10 по модулю 12.

6. Докажите, что существует единственный способ разбить целые неотрицательные числа на два множества A и B так, что количество способов представить число в виде $a_1 + a_2$, где $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ равно аналогичному количеству представлений для множества B .

7. Пусть $0 \leq a_0 < a_1 < \dots$ – последовательность целых чисел. Оказалось, что каждое натуральное число однозначно представляется в виде $a_i + 2a_j + 4a_k$. Найдите a_{2024} .

Серия 20. Производящие функции – 2

14 июля

Пример. Докажите, что число разбиений на различные слагаемые равно числу разбиений на нечётные слагаемые.

1. Напишите производящие функции для последовательности количеств разбиений числа n

(a) на любые части

(b) на части ≤ 4

(c) на части, где каждая встречается не более четырёх раз

2. Докажите, что число разбиений n , где каждая нечётная часть встречается не более одного раза, равно числу разбиений n , где все части не дают остаток 2 при делении на 4.

3. Докажите, что число разбиений n , где каждая часть встречается хотя бы два раза, равно числу разбиений n , где каждая часть делится на 2 или на 3.

4. Докажите, что число разбиений n , где каждая чётная часть встречается не более одного раза, равно числу разбиений n , где каждая часть встречается не более трёх раз.

5. Докажите, что число разбиений n , где каждая часть встречается 2, 3 или 5 раз, равно числу разбиений n , где каждая часть даёт остаток 2, 3, 6, 9 или 10 по модулю 12.

6. Докажите, что существует единственный способ разбить целые неотрицательные числа на два множества A и B так, что количество способов представить число в виде $a_1 + a_2$, где $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ равно аналогичному количеству представлений для множества B .

7. Пусть $0 \leq a_0 < a_1 < \dots$ – последовательность целых чисел. Оказалось, что каждое натуральное число однозначно представляется в виде $a_i + 2a_j + 4a_k$. Найдите a_{2024} .