

## Двойное отношение-2

8 июля

**Определение:** Двойным отношением четвёрки точек на окружности  $(A, B, C, D)$  называется двойное отношение четвёрки прямых  $(AX, BX, CX, DX)$ , где  $X$  – произвольная точка окружности.

**Замечание 1:** Двойное отношение четвёрки точек на окружности не зависит от выбора точки  $X$ .

**Замечание 2:** Поймите, что если точка  $X$  совпадает с одной из точек, участвующих в двойном отношении, то в качестве прямой  $XX$  можно взять касательную к окружности в точке  $X$ .

**1. Теорема о полном четырёхстороннике:** В треугольнике  $ABC$  провели чевианы  $AL$ ,  $BL$  и  $CL$ , пересекающие противоположные стороны в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Прямая  $B_1C_1$  пересеклась с прямой  $BC$  в точке  $A_2$ . Докажите, что  $(B, C, A_1, A_2) = -1$ .

**2.** а) В треугольнике  $ABC$  провели медиану  $BM$ , а также прямую  $m$ , параллельную  $AC$  и проходящую через  $B$ . Докажите, что  $(BA, BC, BM, m) = -1$ . б) В треугольнике  $ABC$  провели симедиану  $BL$  и прямую  $m'$ , касающуюся в точке  $B$  описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $(BA, BC, BL, m') = -1$ . в) Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  на окружности таковы, что  $(A, C, B, D) = -1$ . Докажите, что касательные к точкам  $B$  и  $D$  к этой окружности пересекаются на прямой  $AC$  или параллельны ей. г) Докажите, что в условиях предыдущего пункта диагонали четырёхугольника  $ABCD$  являются симедианами его углов.

**3.** Через точку  $X$  провели четыре прямые. Пусть  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  – точки пересечения этих прямых с некоторой окружностью, а  $A_2, B_2, C_2$  и  $D_2$  – вторые точки пересечения этих же прямых с окружностью. Докажите, что  $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ .

**4.** Окружность  $\omega$  касается сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Прямая  $A_1B_1$  пересекается с прямой  $AB$  в точке  $X$ . Докажите, что точки  $C$ ,  $C_1$  и основание второй касательной из  $X$  к окружности  $\omega$  лежат на одной прямой.

**5.** Через середину  $P$  хорды  $AB$  окружности проведены хорды  $CD$  и  $EF$ . Прямые  $CE$  и  $DF$  пересекают прямую  $AB$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что  $XP = YP$ .

**6.** Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\omega$ . Касательные к  $\omega$  в точках  $A$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ , лежащей на прямой  $BD$ . Касательная к  $\omega$  в точке  $D$  пересекает продолжение стороны  $BA$  в точке  $Q$ , а прямую  $AP$  в точке  $R$ . Прямая  $BR$  пересекает  $\omega$  в точках  $B$  и  $T$ . Докажите, что  $C$ ,  $T$  и  $Q$  лежат на одной прямой.

**7.** Окружность  $\omega$  вписана в треугольник  $ABC$  и касается стороны  $AB$  в точке  $D$ . Отрезок  $CD$  пересекает  $\omega$  в точке  $P$ , прямые  $AP$  и  $BP$  пересекают  $\omega$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $AB_1$  и  $BA_1$  пересекаются на прямой  $CD$ .