

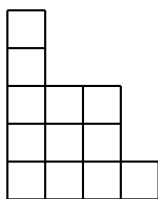
# Диаграммы Юнга

4 июля

**Определение.** Разбиением числа  $n$  называется конечная невозрастающая последовательность натуральных чисел  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , в сумме дающих  $n$ .

**Определение.** Для каждого разбиения  $\lambda$  определяется *диаграмма Юнга* — набор клеток, выровненный по нижней границе, в котором длина первого столбца  $\lambda_1$ , длина второго  $\lambda_2, \dots$ . То есть диаграмма Юнга — это несколько столбцов, идущих слева направо, причём каждый следующий не выше предыдущего.

Например диаграмма Юнга для разбиения  $\lambda = (5, 3, 3, 1)$  выглядит следующим образом:



1. У Феди есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Федя записал, сколько пирожных в каждой коробке. Егор взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос — и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Егор записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Федей равно количеству различных чисел среди записанных Егором.

2. а) Докажите, что количество разбиений числа  $N$  на не более чем  $m$  слагаемых равно числу разбиения числа  $N + m$  ровно на  $m$  слагаемых.

б) Докажите, что количество разбиений числа  $N$  на не более чем  $m$  слагаемых ровно столько же, сколько способов разбить число  $N + \frac{m(m+1)}{2}$  на  $m$  попарно различных слагаемых.

3. Рассматриваются всевозможные наборы из 100 неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке и не превосходящие 100, в которых сумма всех чисел делится на 10. Докажите, что ровно половина этих наборов заканчивается числом 100.

4. В строку выписаны  $n$  нулей. За один шаг разрешается прибавить к одному из чисел единицу, если после этого все числа будут образовывать неубывающую (слева направо) последовательность. Обозначим через  $Z(k, n)$  число способов получить за несколько таких ходов последовательность из числа  $k$ , повторённого  $n$  раз. Докажите, что  $Z(k, n) = Z(n, k)$  для любых натуральных  $n, k$ .

5. Диаграмма Юнга раскрашена в шахматном порядке, при этом чёрных и белых клеток поровну. Докажите, что её можно разбить на доминошки.

6. Пусть  $p(n)$  — количество диаграмм Юнга из  $n$  клеток. Докажите, что количество диаграмм Юнга из  $2n$  клеток, допускающих единственное разбиение на клетчатые прямоугольники  $1 \times 2$ , не меньше  $2p(n)$ .