

Производящие функции-2

20 июля

Определение 1: За C_x^k обозначим выражение $\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}$.

Определение 2: Формальный ряд $(1+x)^\alpha$ по определению будет означать $\sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k$

1. Докажите, что $\sum_{i=0}^k C_a^i C_b^{k-i} = C_{a+b}^k$ а) при любых $a, b \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$;
б) при $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$; в) при любых $a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$
г) Докажите, что $(1+x)^a \cdot (1+x)^b = (1+x)^{a+b}$.

2. Пусть $A(x)$ — производящая функция для последовательности a_n .
Найдите производящую функцию последовательности $b_n = \sum_{i=0}^n a_i$.

3. Вычислите суммы

а) $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$,

б) $C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 \dots + n^2 C_n^n$,

в) $C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1}$,

г) $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + \dots + \frac{C_n^n}{n+2}$.

4. Пусть F_n — числа Фибоначчи, $F_0 = F_1 = 1$. Докажите с помощью производящих функций, что $F_0 + F_1 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1$.

5. а) Пусть $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ производящая функция для чисел Каталана. Найдите уравнение на $C(x)$. б) Решите это уравнение. Найдите формулу для C_n .

6. Обозначим a_n — число способов разбить прямоугольник $3 \times 2n$ на доминошки, b_n — число способов разбить прямоугольник $3 \times (2n-1)$ без угловой клетки на доминошки. Найдите производящую функцию $A(x) = \sum a_n x^n$.

Указание: составьте и решите систему уравнений на $A(x)$ и $B(x)$.