

Проективная плоскость

14 июля

1. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка B_0 . Через A провели прямую параллельную BB_0 , которая пересекла прямую BC в точке A_1 . Аналогично определяется C_1 . Точка B_1 на прямой AC , но вне отрезка AC такова, что $\frac{B_0A}{B_0C} = \frac{B_1A}{B_1C}$. Докажите, что C_1, B_1, A_1 лежат на одной прямой.

2. В прямоугольном треугольнике ABC провели чевиану $АН$. Через прямой угол C провели прямую l параллельную касательной к окружности $АНС$ в точке H . Оказалось, что $\angle HAB + 2 \cdot \angle CAN = 90^\circ$. Докажите, что l делит AB пополам.

3. Пусть BA_1 и BC_1 – внешние биссектрисы угла B треугольника ABC , $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$. Докажите, что A_1C и C_1A пересекаются на биссектрисе угла ABC .

4. В окружности ω проведены хорда MN и диаметр AB . Прямые AM и BN пересекаются в точке X . Докажите, что перпендикуляр из точки X на диаметр AB проходит через некоторую точку, не зависящую от диаметра AB .

5. Дан треугольник ABC , его описанная окружность Ω и ортоцентр H . Окружность с центром в H и радиусом HA второй раз пересекает Ω в точке D . Прямая, проходящая через C и параллельная AD , пересекает Ω в точке D' . Точка Y на медиане треугольника из точки B такова, что Y — центр окружности проходящей через C, D' . Докажите, что Y — центр масс треугольника ABC .

6. Точка O не лежит на сторонах и их продолжениях треугольника ABC . A_1 — точка пересечения прямой BC с перпендикуляром к OA , проходящим через точку O . Аналогично определяются точки B_1, C_1 . Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.