

Производная в неравенствах

12 июля

Упражнение: Докажите, что если $f(a) \geq g(a)$ и $f'(x) > g'(x)$ при всех $x > a$, то $f(x) > g(x)$ при всех $x > a$.

1. Пусть $x \neq 0$. Докажите, что $e^x > 1 + x$.

2. Пусть $x > 0$. Докажите, что $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ и $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

3. Для острых углов $\alpha < \beta$ докажите, что $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

4. Пусть $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^{2n}}{2n} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

5. Докажите понятно каким способом, что зная, что сумма каких-то двух углов фиксирована (и не превосходит π), а также фиксировано отношение синусов этих углов, то данные углы можно восстановить единственным образом.

6. Неравенство Бернулли: а) Докажите, что $(1+x)^\alpha \geq 1+x\alpha$, при $x > -1$, и $\alpha > 1$; б) Когда в неравенстве достигается равенство? в) Докажите, что если взять $\alpha < 1$, то в неравенстве поменяется знак.

7. Сравните числа а) $\log_2 3$ и $\log_3 4$; б) $\cos 1$ и $1 + \cos 2$; в) e^π и π^e .

8. α, β, γ – углы треугольника. Докажите, что $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

9. Неравенство Юнга: Пусть $a, b \geq 0$, $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$