

# Линейные рекурренты

18 июля

Соотношение, выражающее  $(n+1)$ -й член последовательности через  $n$ -й член,  $n-1$ -ый член и т.д. называется *рекуррентным* или *возвратным*, а последовательность называют заданной рекуррентно. Если же последовательность задается так, что её  $n$ -ый член выражается через само число  $n$  и функции от него, то говорят, что последовательность задана *явно*.

1. Докажите, что если нам дана линейная рекуррента, где каждый член выражается через  $n$  предыдущих, то последовательности, подходящие под неё, образуют  $n$ -мерное векторное пространство над полем элементов последовательности.

2. а) Знаменатель бесконечной геометрической прогрессии равен  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Докажите, что каждый член прогрессии, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих; б) Найдите все геометрические прогрессии, которые подходят под следующую рекурренту:  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ; в) Выведите из предыдущих пунктов явную формулу для чисел Фибоначчи.

3. Предположим, что под рекуррентное соотношение порядка  $n$  (то есть, выражающей элемент через  $n$  предыдущих членов) подошло  $n$  геометрических прогрессий с разными знаменателями. Докажите, что их линейные комбинации порождают пространство решений данной рекурренты.

4. Найдите все геометрические прогрессии, лежащие в пространстве решений рекурренты а)  $a_{n+3} = -2a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n$ ; б)  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 29a_n$ .

**Определение:** Для рекурренты  $x_{n+k} = b_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + b_1x_{n+1} + b_0x_n$  *характеристическим многочленом* назовём многочлен  $x^k - x^{k-1}b_{k-1} - x^{k-2}b_{k-2} - \dots - xb_1 - b_0$ .

5. а) Докажите, что последовательность  $x_k = \lambda^k$  удовлетворяет рекурренте тогда и только тогда, когда  $\lambda$  – корень её характеристического многочлена; б)  $m \geq 1$ . Докажите, что последовательность  $x_k = \lambda^k k^{m-1}$  удовлетворяет рекурренте тогда и только тогда, когда  $\lambda$  – корень характеристического многочлена кратности  $m$ .

6. Последовательность задана формулой:  $\frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ . Найдите, какие из членов последовательности делятся на 3.

7. Найдите степень вхождения двойки в число  $[(1 + \sqrt{3})^n]$ .

8. Найдите общее решение уравнения  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + n$ .