

Лампочки

17 июля

Дано конечномерное векторное пространство V с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n$ и $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \dots + b_n\vec{e}_n$ назовём число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно 0.

Дано подпространство $W \subseteq V$. Множество векторов, ортогональных любому вектору из W назовём ортогональным подпространством W' .

1. Докажите, что ортогональное подпространство действительно является подпространством.

Дан граф G . В каждой вершине его стоит лампочка. Имеются выключатели. Каждый выключатель может быть соединён с несколькими лампочками одновременно. После нажатия на выключатель все лампочки, соединённые с этим выключателем, меняют своё состояние на противоположное.

Узором будем называть расположение горящих лампочек.

2. Докажите, что количество узоров, получаемых из данного, не зависит от начального узора (начальных зажжённых лампочек).

3. а) Докажите, что число узоров, которые мы можем получить, есть 2^k при некотором k .

б) Докажите, что в этом случае для получения всех узоров мы можем обойтись поднабором из k кнопок.

Инвариантом будем называть такое подмножество лампочек, что каждая кнопка соединена с четным числом лампочек из него.

4. Докажите, что вектор, полученный из инварианта установкой 1 на место, соответствующее лампочке из инварианта, и 0 на все остальные места, перпендикулярен всем кнопкам.

5. Докажите, что число инвариантов (учитывая пустое подмножество) есть 2^ℓ .

6. Докажите, что некоторый узор можно зажечь тогда и только тогда, когда в каждом инварианте надо зажечь четное число лампочек.