

Соображения ЛЗ и ЛНЗ.

7 июля

1. Есть набор переключателей, каждый из которых переключает набор лампочек. Докажите, что число узоров, которые можно получить из начального узора, является степенью двойки. Причем это число не зависит от начального узора.

Мы рассматриваем множество F^n строк длины n с элементами из поля F . Называем строки векторами. Строки можно складывать между собой и умножать на элементы из F .

Предложение. Пусть $S = \{v_i, i \in I\}$ – семейство векторов-строк. Тогда следующие условия равносильны:

- (a) если вектор из F^n выражается через векторы из S , то единственным образом;
- (b) никакой вектор из S нельзя выразить через остальные;
- (c) если линейная комбинация векторов из S равна нулевому вектору, то все ее коэффициенты равны 0.

Определение. Семейство векторов-строк, обладающее свойствами, описанными в предыдущем предложении, называется *линейно независимым*, а не обладающее — *линейно зависимым*.

Упражнение 1. Дайте три определения линейной зависимости.

Упражнение 2 (на понимание определения). Докажите, что:

- (a) система, содержащая нулевой вектор, является ЛЗ;
- (b) если семейство векторов ЛНЗ, то и любая его часть ЛНЗ;
- (c) если семейство ЛЗ, то и любое содержащее его семейство ЛЗ;
- (d) если через ЛНЗ семейство векторов нельзя выразить все строки из F^n , то к этому семейству можно добавить вектор так, чтобы оно осталось ЛНЗ.

Упражнение 3. (a) Допустим, что три вектора u_1, u_2, u_3 выражены через какие-то два вектора v_1, v_2 . Докажите, что они ЛЗ.

(b) В F^2 любые три вектора ЛЗ.

Определение. Подмножество S множества F^n называется *системой образующих*, если всякий вектор $v \in F^n$ можно представить в виде $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$, где $v_1, \dots, v_m \in S$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$. Выражение $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение) называется *линейной комбинацией* векторов v_1, \dots, v_m .

Теорема. (a) Во всех системах образующих в F^n не менее n векторов.

(b) Если есть система образующих из любого (упрощение: конечного) числа векторов, то из нее можно выкинуть часть векторов так, чтобы осталась система образующих ровно из n векторов.

Переверни листочек!

Соображения ЛЗ и ЛНЗ.

7 июля

1. Есть набор переключателей, каждый из которых переключает набор лампочек. Докажите, что число узоров, которые можно получить из начального узора, является степенью двойки. Причем это число не зависит от начального узора.

Мы рассматриваем множество F^n строк длины n с элементами из поля F . Называем строки векторами. Строки можно складывать между собой и умножать на элементы из F .

Предложение. Пусть $S = \{v_i, i \in I\}$ – семейство векторов-строк. Тогда следующие условия равносильны:

- (a) если вектор из F^n выражается через векторы из S , то единственным образом;
- (b) никакой вектор из S нельзя выразить через остальные;
- (c) если линейная комбинация векторов из S равна нулевому вектору, то все ее коэффициенты равны 0.

Определение. Семейство векторов-строк, обладающее свойствами, описанными в предыдущем предложении, называется *линейно независимым*, а не обладающее — *линейно зависимым*.

Упражнение 1. Дайте три определения линейной зависимости.

Упражнение 2 (на понимание определения). Докажите, что:

- (a) система, содержащая нулевой вектор, является ЛЗ;
- (b) если семейство векторов ЛНЗ, то и любая его часть ЛНЗ;
- (c) если семейство ЛЗ, то и любое содержащее его семейство ЛЗ;
- (d) если через ЛНЗ семейство векторов нельзя выразить все строки из F^n , то к этому семейству можно добавить вектор так, чтобы оно осталось ЛНЗ.

Упражнение 3. (a) Допустим, что три вектора u_1, u_2, u_3 выражены через какие-то два вектора v_1, v_2 . Докажите, что они ЛЗ.

(b) В F^2 любые три вектора ЛЗ.

Определение. Подмножество S множества F^n называется *системой образующих*, если всякий вектор $v \in F^n$ можно представить в виде $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$, где $v_1, \dots, v_m \in S$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$. Выражение $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение) называется *линейной комбинацией* векторов v_1, \dots, v_m .

Теорема. (a) Во всех системах образующих в F^n не менее n векторов.

(b) Если есть система образующих из любого (упрощение: конечного) числа векторов, то из нее можно выкинуть часть векторов так, чтобы осталась система образующих ровно из n векторов.

Переверни листочек!

Для самостоятельного решения

2. (a) В каждую клетку шахматной доски вписано по нулю. Разрешается за один ход инвертировать 0 на 1 и наоборот в любом квадрате 3×3 или 4×4 . Все ли расстановки 0 и 1 можно получить?

(b) В каждую клетку шахматной доски вписано по нулю. Разрешается за один ход прибавить по α к любому квадрату 3×3 или 4×4 (α меняется от хода к ходу). Все ли расстановки чисел можно получить?

3. Докажите, что если рациональные числа a_0, \dots, a_{19} таковы, что

$$a_0 + a_1 \sqrt[20]{2} + \dots + a_{19} (\sqrt[20]{2})^{19} = 0,$$

то все a_i равны 0.

4. (a) Докажите, что число $4/3 + 5\sqrt[3]{3} - 17(\sqrt[3]{3})^2$ является корнем многочлена с рациональными коэффициентами степени не выше 3.

(b) Пусть $a = \sqrt[n]{r}$, r — рациональное число. Докажите, что любое число вида $c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots + c_m a^m$ является корнем многочлена с рациональными коэффициентами степени не более n .

5. A_1, A_2, \dots, A_{n+1} — непустые подмножества n -элементного множества. Докажите, что можно выбрать такие непустые непересекающиеся множества индексов $\{i_1, \dots, i_k\}$ и $\{j_1, \dots, j_\ell\}$, что

$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k} = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \dots \cup A_{j_\ell}.$$

6. В таблице 100×100 за ход можно инвертировать 199 лампочек, находящихся в «кресте», образованном столбцом и строкой. Получите из узора со всеми не горящими лампочками узор со всеми горящими за наименьшее число нажатий.

Для самостоятельного решения

2. (a) В каждую клетку шахматной доски вписано по нулю. Разрешается за один ход инвертировать 0 на 1 и наоборот в любом квадрате 3×3 или 4×4 . Все ли расстановки 0 и 1 можно получить?

(b) В каждую клетку шахматной доски вписано по нулю. Разрешается за один ход прибавить по α к любому квадрату 3×3 или 4×4 (α меняется от хода к ходу). Все ли расстановки чисел можно получить?

3. Докажите, что если рациональные числа a_0, \dots, a_{19} таковы, что

$$a_0 + a_1 \sqrt[20]{2} + \dots + a_{19} (\sqrt[20]{2})^{19} = 0,$$

то все a_i равны 0.

4. (a) Докажите, что число $4/3 + 5\sqrt[3]{3} - 17(\sqrt[3]{3})^2$ является корнем многочлена с рациональными коэффициентами степени не выше 3.

(b) Пусть $a = \sqrt[n]{r}$, r – рациональное число. Докажите, что любое число вида $c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \dots + c_m a^m$ является корнем многочлена с рациональными коэффициентами степени не более n .

5. A_1, A_2, \dots, A_{n+1} — непустые подмножества n -элементного множества. Докажите, что можно выбрать такие непустые непересекающиеся множества индексов $\{i_1, \dots, i_k\}$ и $\{j_1, \dots, j_\ell\}$, что

$$A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k} = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \dots \cup A_{j_\ell}.$$

6. В таблице 100×100 за ход можно инвертировать 199 лампочек, находящихся в «кресте», образованном столбцом и строкой. Получите из узора со всеми не горящими лампочками узор со всеми горящими за наименьшее число нажатий.