

Идея линейности

3 июля

1. Целозначные многочлены: а) Докажите, что для любого k многочлен $P_k(x)$ при целом x принимает целые значения, если

$$P_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}.$$

б) Докажите, что при любых целых a_0, a_1, \dots, a_k многочлен

$$a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \dots + a_kP_k(x)$$

в целых точках принимает целые значения.

в) Докажите, что при некоторых целых a_0, a_1, \dots, a_k верно равенство:

$$x^k = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \dots + a_kP_k(x).$$

г) Докажите, что любой многочлен, который в целых точках принимает целые значения, можно представить в виде $a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \dots + a_kP_k(x)$ при некоторых целых a_0, a_1, \dots, a_k .

д) С помощью предыдущих пунктов научитесь находить явную формулу для суммы: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

2. По кругу стоят 128 целых чисел. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 128.

а) Сначала рассмотрите случай единицы и 127 нулей. Что получится через 7 ходов? Докажите, что через несколько ходов все числа станут четными.

б) Определим понятие *суммы* двух расстановок чисел по кругу. Пусть P – наша операция замены. Докажите, что $P(\text{от суммы}) = \text{сумме } P\text{-шек}$.

в) Завершите доказательство задачи.

3. По окружности расставлены p^n целых чисел (p – простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2024} , если за ход из каждого числа вычитается его:

а) сосед слева;

б) l -ый сосед слева, l фиксировано;

4. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор подписчиков среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг – целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью. Пусть m – некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m . Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.