

Серия 18. Геометрические неравенства

13 июля

1. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$. На стороне AC выбраны точки M и N так, что $AM = CN$. Докажите, что $KM + LN \geq BC$.

2. Внутри треугольнике ABC отмечена точка P так, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Прямые AP, BP, CP пересекают $(BPC), (CPA), (APB)$ в точках X, Y, Z отличных от P . Докажите, что $S_{XBC} + S_{YCA} + S_{ZAB} \geq 3S_{ABC}$.

3. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки $C_1 \neq A$ и A_1 так, что $A_1C_1 \parallel AC$ касается вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $A_1C_1 \leq \frac{AB+BC+CA}{8}$.

4. Дан треугольник ABC . Постройте точку X с минимальным значением $Ax^2 + Bx^2 + Cx^2$.

5. I – центр вписанной окружности треугольника ABC . M – середина стороны AC . A_1 и C_1 – точки, симметричные A и C относительно CI и AI соответственно. N – середина отрезка A_1C_1 . Докажите, что $NI > MI$.

6. Назовём треугольник маленьким, если две его высоты не больше 1. Даны четыре точки такие, что любой образованный ими треугольник маленький. Докажите, что существует такая прямая, что любая из четырёх данных точек находится от неё на расстоянии не более $\frac{1}{2}$.

7. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A, \angle C > 60^\circ$. H – ортоцентр ABC . Точки P, Q на сторонах AB и BC таковы, что точки B, P, H, Q лежат на одной окружности. M – середина PQ . Докажите, что $\angle AMC > 90^\circ$.

8. I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Точка P на дуге AC , не содержащей точку B , описанной окружности треугольника ABC такова, что $\angle API = \angle CPI$. Оказалось, что $PI > PO$. Докажите, что $\angle ABC > 60^\circ$.

Серия 18. Геометрические неравенства

13 июля

1. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$. На стороне AC выбраны точки M и N так, что $AM = CN$. Докажите, что $KM + LN \geq BC$.

2. Внутри треугольнике ABC отмечена точка P так, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Прямые AP, BP, CP пересекают $(BPC), (CPA), (APB)$ в точках X, Y, Z отличных от P . Докажите, что $S_{XBC} + S_{YCA} + S_{ZAB} \geq 3S_{ABC}$.

3. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки $C_1 \neq A$ и A_1 так, что $A_1C_1 \parallel AC$ касается вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $A_1C_1 \leq \frac{AB+BC+CA}{8}$.

4. Дан треугольник ABC . Постройте точку X с минимальным значением $Ax^2 + Bx^2 + Cx^2$.

5. I – центр вписанной окружности треугольника ABC . M – середина стороны AC . A_1 и C_1 – точки, симметричные A и C относительно CI и AI соответственно. N – середина отрезка A_1C_1 . Докажите, что $NI > MI$.

6. Назовём треугольник маленьким, если две его высоты не больше 1. Даны четыре точки такие, что любой образованный ими треугольник маленький. Докажите, что существует такая прямая, что любая из четырёх данных точек находится от неё на расстоянии не более $\frac{1}{2}$.

7. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A, \angle C > 60^\circ$. H – ортоцентр ABC . Точки P, Q на сторонах AB и BC таковы, что точки B, P, H, Q лежат на одной окружности. M – середина PQ . Докажите, что $\angle AMC > 90^\circ$.

8. I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Точка P на дуге AC , не содержащей точку B , описанной окружности треугольника ABC такова, что $\angle API = \angle CPI$. Оказалось, что $PI > PO$. Докажите, что $\angle ABC > 60^\circ$.