

Неравенство Йенсена

14 июля

Определение: функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* на $[a, b]$, если для любых $x, y \in [a, b]$ и для любых $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ выполнено $\alpha f(x) + \beta f(y) \geq f(\alpha x + \beta y)$. Если неравенство выполнено в другую сторону, то функция называется *выпуклой вверх*.

Теорема. Если для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие $f''(x) \geq 0$, то функция выпукла вниз на отрезке $[a, b]$. А если для всех $x \in (a, b)$ $f''(x) \leq 0$, то функция выпукла вверх на отрезке $[a, b]$.

1. Неравенство Йенсена Если функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b) , $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1, \alpha_i \geq 0$, тогда выполнено

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n) \geq f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)$$

2. Пусть $a, b, c \geq 0, a^3 + b^3 + c^3 = 81$. Докажите, что $a + b + c \leq 9$.

3. Пусть $x, y, z > 0, x + y + z = 1$. Докажите, что $(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{z}) \geq 64$.

4. Неравенство о средних с весами. Для $x_i > 0, \alpha_i \geq 0$ докажите

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \geq (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}$$

5. Пусть $x, y, z, t > 0, x + y + z + t = 1$. Докажите, что $\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{y}} + \frac{1}{1-\sqrt{z}} + \frac{1}{1-\sqrt{t}} \geq 8$.

6. Неравенство КБШ

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{1}{2}} \geq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

7. Для $p, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n > 0$ докажите, что выполняется
а) **Неравенство Гёльдера:**

$$(x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} (y_1^q + y_2^q + \dots + y_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

б) **Неравенство Минковского:**

$$(x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} + (y_1^p + y_2^p + \dots + y_n^p)^{\frac{1}{p}} \geq ((x_1 + y_1)^p + (x_2 + y_2)^p + \dots + (x_n + y_n)^p)^{\frac{1}{p}}$$