

Неравенство Караматы

20 июля

Определение. Будем говорить, что набор $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ вещественных чисел *мажорирует* набор $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ (запись $x_i \succ y_i$), если выполнена система из неравенств и одного равенства:

$$x_1 \geq y_1;$$

$$x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq y_1 + y_2 + y_3;$$

.....

$$x_1 + \dots + x_{n-1} \geq y_1 + \dots + y_{n-1};$$

$$x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n.$$

Неравенство Караматы. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая вниз функция, определённая на отрезке $[a, b]$ числовой прямой, и два невозрастающих набора x_i и y_i по n чисел из этого отрезка таковы, что $x_i \succ y_i$. Тогда выполнено

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n)$$

Для выпуклой вверх функции неравенство меняет знак.

1. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$$

2. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-\pi/6, \pi/6]$. Докажите, что

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \dots + \cos(2x_n - x_1) \leq \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n$$

3. Для чисел $a, b, c > 0$ докажите неравенство:

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} \geq \sqrt{\frac{ab}{c^2}} + \sqrt{\frac{bc}{a^2}} + \sqrt{\frac{ac}{b^2}}$$

4. Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите, что:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2$$

5. Числа $a, b, c \in [1, 5]$ таковы, что $a + b + c = 9$. Докажите, что для любого $k \geq 1$ справедливо:

$$a^k + b^k + c^k \leq 5^k + 3^k + 1$$

6. Неотрицательные a, b, c таковы, что $a + b + c = 6$. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\sqrt{a^2 + 16} + \sqrt{b^2 + 16} + \sqrt{c^2 + 16}$$