

Знакомство с полярной

10 июля

Определение: Точки A и B называются двойственными (или сопряжёнными) относительно окружности ω с центром O и радиусом R , если $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = R^2$.

Определение: Полярная точки A относительно окружности ω – ГМТ B таких, что A и B – двойственные.

Контрольный вопрос: Поймите, почему двойственными являются а) точка на окружности и она сама; б) точка и её инверсный образ относительно этой окружности.

Важное свойство 1: Полярной точки A является прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему A и центр окружности.

Важное свойство 2: Если полярная точки A проходит через точку B , то полярная точки B проходит через точку A .

1. Точка A лежит вне окружности ω . Докажите, что её полярная относительно этой окружности проходит через основания касательных из A к ω .

2. Через точку X внутри ω проводится секущая, которая пересекает окружность в точках A и B . Докажите, что точка пересечения касательных к ω в точках A и B лежит на полярной X .

Важное свойство 3: Дана прямая a , не проходящая через центр окружности ω . Тогда полярные всех точек данной окружности пересекаются в одной точке, называемой *полюсом* данной прямой.

3. а) Точка A на прямой ℓ лежит вне окружности ω , а сама окружность пересекает прямую ℓ в точках M и N . Докажите, что полярная точки A относительно ω пересекает прямую ℓ в точке B , для которой $(M, N, A, B) = -1$. б) Та же самая задача, но точка A – внутри окружности ω .

4. Построение полярных: Дан вписанный в окружность ω четырёхугольник $ABCD$. Прямые AC и BD пересекаются в точке X . Прямые AD и BC пересекаются в точке Y , а прямые AB и CD пересекаются в точке Z . Докажите, что а) какие-то две вершины треугольника XYZ двойственны относительно ω ; б) любые две вершины треугольника XYZ двойственны относительно ω .

5. Вписанная в описанный четырёхугольник $ABCD$ окружность касается сторон AB, BC, CD и DA в точках K, L, M и N соответственно. Докажите, что AC, BD, KM и LN пересекаются в одной точке.

6. Четырёхугольник $ABCD$ – вписанный. Прямая AB пересекается с CD в точке E , F – точка пересечения диагоналей. Описанные окружности треугольников AFD и BFC пересекаются в точке H . Докажите, что $\angle EHF = 90^\circ$.

7. В неравобедленном треугольнике ABC отмечена точка H . При этом AH перпендикулярно BC . BH и CH пересекают противоположные стороны треугольника в точках B_1 и C_1 , и четырёхугольник BCB_1C_1 – вписанный. Докажите, что H – ортоцентр треугольника ABC .

8. I – инцентр треугольника ABC . H_A, H_B, H_C – ортоцентры треугольников BIC, CIA, AIB соответственно. H_AH_B и H_AH_C пересекают AB и AC в точках X и Y . T – середина медианы AM . Докажите, что если T, X, Y лежат на одной прямой, то $H_AT \perp BC$.