

# Серия 11. Пучки

8 июля

**Определение.** Квадратичной формой будем называть функцию

$$Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fzx.$$

**Определение.** Коникой называется множество нулей некоторой квадратичной формы. Это множество замкнуто относительно умножения на число, поэтому можно считать, что это множество точек проективной плоскости. Таким образом коник является некоторым множеством точек проективной плоскости.

**Теорема.** Через пять точек на проективной плоскости, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, можно провести ровно одну конику. Квадратичная форма соответствующей коники определяется однозначно с точностью до умножения на константу.

**Определение.** Множество коник, соответствующих линейным комбинациям двух квадратичных форм, называется *пучком коник*. У многих коник квадратичная форма определена с точностью умножения на константу, поэтому почти всегда можно говорить о пучке как о множестве линейных комбинаций двух коник.

1. Докажите, что в пучке, порожденном двумя окружностями, почти все коники – окружности. Опишите оставшиеся коники в этом пучке. Докажите, что все окружности этого пучка имеют общую радикальную ось или имеют общий центр.

2. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Рассмотрим  $A_i \in \omega_i$  такие, что  $P$  лежит на прямой  $A_1A_2$ . Докажите, что середины отрезков  $A_1A_2$  лежат на окружности. Выразите её уравнение через уравнения  $f_i = x^2 + y^2 + a_ix + b_iy + c_i$  окружностей  $\omega_i$ .

3. Даны две окружности  $\omega_1, \omega_2$ . Первая секущая пересекает первую окружность в точках  $A_1, A_2$ , а вторую – в точках  $A_3, A_4$ . Вторая секущая пересекает первую окружность в точках  $B_1, B_2$ , а вторую – в точках  $B_3, B_4$ . Докажите, что точки  $A_iB_i \cap A_jB_j$ , где  $1 \leq i \leq 2, 3 \leq j \leq 4$ , лежат на одной окружности соосной  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

4. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\Omega$ . Прямая  $\ell$  пересекает отрезки  $AC, BD, AD, BC$  в точках  $K, L, M, N$  соответственно. Окружность  $\omega_1$  касается  $AD$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что существует окружность  $\omega_2$ , касающаяся  $AC$  и  $BD$  в точках  $K$  и  $L$  и соосная с  $\omega_1$ .

5. (Теорема Понселе) Даны окружности  $\omega$  и  $\Omega$ . Будем называть  $n$ -угольник  $A_1A_2 \dots A_n$  *хорошим*, если он вписан в окружность  $\Omega$  и описан около окружности  $\omega$ . Известно, что *хороший* многоугольник существует. Докажите, что для любой точки  $X \in \Omega$  существует такой *хороший* многоугольник  $B_1B_2 \dots B_n$ , что  $B_1 = X$ .

6. В треугольнике  $ABC$  проведены чевианы  $AE$  и  $CF$ , пересекающиеся в точке  $P$ . Окружности  $(AEF)$  и  $(BDE)$  пересекаются в точке  $T \neq E$ . Докажите, что окружности  $(ATD)$ ,  $(BTE)$  и  $(CTF)$  имеют общую радикальную ось.

7.  $ABC$  – равносторонний треугольника. Внутри треугольника отмечены точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  такие, что  $BA_1 = CA_1, CB_1 = AB_1, AC_1 = BC_1$  и  $\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$ .  $BC_1 \cap CB_1 = A_2, CA_1 \cap AC_1 = B_2, AB_1 \cap BA_1 = C_2$ . Оказалось, что треугольник  $A_1B_1C_1$  разносторонний. Докажите, что  $AA_1A_2, BB_1B_2$  и  $CC_1C_2$ .

# Серия 11. Пучки

8 июля

**Определение.** *Квадратичной формой* будем называть функцию  $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$ .

**Определение.** *Коникой* называется множество нулей некоторой квадратичной формы. Это множество замкнуто относительно умножения на число, поэтому можно считать, что это множество точек проективной плоскости. Таким образом коник является некоторым множеством точек проективной плоскости.

**Теорема.** Через пять точек на проективной плоскости, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, можно провести ровно одну конику. Квадратичная форма соответствующей коники определяется однозначно с точностью до умножения на константу.

**Определение.** Множество коник, соответствующих линейным комбинациям двух квадратичных форм, называется *пучком коник*. У многих коник квадратичная форма определена с точностью умножения на константу, поэтому почти всегда можно говорить о пучке как о множестве линейных комбинаций двух коник.

1. Докажите, что в пучке, порожденном двумя окружностями, почти все коники – окружности. Опишите оставшиеся коники в этом пучке. Докажите, что все окружности этого пучка имеют общую радикальную ось или имеют общий центр.

2. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Рассмотрим  $A_i \in \omega_i$  такие, что  $P$  лежит на прямой  $A_1A_2$ . Докажите, что середины отрезков  $A_1A_2$  лежат на окружности. Выразите её уравнение через уравнения  $f_i = x^2 + y^2 + a_ix + b_iy + c_i$  окружностей  $\omega_i$ .

3. Даны две окружности  $\omega_1, \omega_2$ . Первая секущая пересекает первую окружность в точках  $A_1, A_2$ , а вторую – в точках  $A_3, A_4$ . Вторая секущая пересекает первую окружность в точках  $B_1, B_2$ , а вторую – в точках  $B_3, B_4$ . Докажите, что точки  $A_iB_i \cap A_jB_j$ , где  $1 \leq i \leq 2, 3 \leq j \leq 4$ , лежат на одной окружности соосной  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

4. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\Omega$ . Прямая  $\ell$  пересекает отрезки  $AC, BD, AD, BC$  в точках  $K, L, M, N$  соответственно. Окружность  $\omega_1$  касается  $AD$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что существует окружность  $\omega_2$ , касающаяся  $AC$  и  $BD$  в точках  $K$  и  $L$  и соосная с  $\omega_1$ .

5. (Теорема Понселе) Даны окружности  $\omega$  и  $\Omega$ . Будем называть  $n$ -угольник  $A_1A_2 \dots A_n$  *хорошим*, если он вписан в окружность  $\Omega$  и описан около окружности  $\omega$ . Известно, что *хороший* многоугольник существует. Докажите, что для любой точки  $X \in \Omega$  существует такой *хороший* многоугольник  $B_1B_2 \dots B_n$ , что  $B_1 = X$ .

6. В треугольнике  $ABC$  проведены чевианы  $AE$  и  $CF$ , пересекающиеся в точке  $P$ . Окружности  $(AEF)$  и  $(BDE)$  пересекаются в точке  $T \neq E$ . Докажите, что окружности  $(ATD)$ ,  $(BTE)$  и  $(CTF)$  имеют общую радикальную ось.

7.  $ABC$  – равносторонний треугольника. Внутри треугольника отмечены точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  такие, что  $BA_1 = CA_1, CB_1 = AB_1, AC_1 = BC_1$  и  $\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ$ .  $BC_1 \cap CB_1 = A_2, CA_1 \cap AC_1 = B_2, AB_1 \cap BA_1 = C_2$ . Оказалось, что треугольник  $A_1B_1C_1$  разносторонний. Докажите, что  $AA_1A_2, BB_1B_2$  и  $CC_1C_2$ .