

# Серия 16. Аддитивная комбинаторика-1

12 июля

1. Натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  дают при делении на некоторое число  $m$  попарно различные остатки, причём  $n > m/2$ . Докажите, что для любого целого  $k$  найдутся два не обязательно различных натуральных числа  $i, j \leq n$ , что  $a_i + a_j \equiv k \pmod{m}$ .

2. Среди натуральных чисел от 1 до 365 выбрали (a) 39 (b) 29. Докажите, что среди них найдутся 4 числа  $a, b, c, d$  таких, что  $a + b = c + d$ .

3. Пусть  $S$  — множество из  $n$  чисел, взаимно простых с  $n$ . Докажите, что любой остаток по модулю  $n$  равен сумме некоторых элементов  $S$ .

4. Пусть  $A$  — 101-элементное подмножество  $S = 1, 2, \dots, 10^6$ . Докажите, что существуют такие числа  $t_1, t_2, \dots, t_\ell$  из  $S$ , что множества  $A + t_i$  попарно не пересекаются. (a)  $\ell = 100$ ; (b)  $\ell = 198$ .

5. Дано 30 различных трехзначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать несколько и разбить на два равных и по количеству, и по сумме множества.

6. Пусть  $S$  — множество из  $2n - 1$  чисел. Предположим, что некоторый вычет  $a$  по модулю  $n$  встречается в множестве не менее  $\lceil n/2 \rceil$  раз. Докажите, что в  $S$  можно найти ровно  $n$  чисел с суммой, делящейся на  $n$ .

7. Дано натуральное число  $k$ . Из натуральных чисел, не превосходящих  $12k^3$ , выбраны  $6k + 20$  чисел. Докажите, что из них можно выбрать две непересекающиеся шестерки чисел с равными суммами.

# Серия 16. Аддитивная комбинаторика-1

12 июля

1. Натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  дают при делении на некоторое число  $m$  попарно различные остатки, причём  $n > m/2$ . Докажите, что для любого целого  $k$  найдутся два не обязательно различных натуральных числа  $i, j \leq n$ , что  $a_i + a_j \equiv k \pmod{m}$ .

2. Среди натуральных чисел от 1 до 365 выбрали (a) 39 (b) 29. Докажите, что среди них найдутся 4 числа  $a, b, c, d$  таких, что  $a + b = c + d$ .

3. Пусть  $S$  — множество из  $n$  чисел, взаимно простых с  $n$ . Докажите, что любой остаток по модулю  $n$  равен сумме некоторых элементов  $S$ .

4. Пусть  $A$  — 101-элементное подмножество  $S = 1, 2, \dots, 10^6$ . Докажите, что существуют такие числа  $t_1, t_2, \dots, t_\ell$  из  $S$ , что множества  $A + t_i$  попарно не пересекаются. (a)  $\ell = 100$ ; (b)  $\ell = 198$ .

5. Дано 30 различных трехзначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать несколько и разбить на два равных и по количеству, и по сумме множества.

6. Пусть  $S$  — множество из  $2n - 1$  чисел. Предположим, что некоторый вычет  $a$  по модулю  $n$  встречается в множестве не менее  $\lceil n/2 \rceil$  раз. Докажите, что в  $S$  можно найти ровно  $n$  чисел с суммой, делящейся на  $n$ .

7. Дано натуральное число  $k$ . Из натуральных чисел, не превосходящих  $12k^3$ , выбраны  $6k + 20$  чисел. Докажите, что из них можно выбрать две непересекающиеся шестерки чисел с равными суммами.