

# СЛУ

5 июля

**Метод Гаусса:** Элементарные преобразования (сложение уравнений, умножение одного из уравнений на коэффициент) не меняют решений СЛУ.

**Альтернатива Фредгольма:** система линейных уравнений имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда соответствующая ему однородная система линейных уравнений имеет только тривиальные решения. В противном случае, если мы находим хотя бы одно решение, мы находим бесконечно много решений.

1. а) Если СЛУ с рациональными коэффициентами и рациональной правой частью имеет ненулевое решение в действительных числах, то она имеет ненулевое решение и в рациональных числах. б) Докажите, что если у СЛУ есть только рациональные решения, то решение единственно.

2. Решите системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y + 3z = 11 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} ; \text{ б) } \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 4x - 3y - z = -1 \end{cases} ; \text{ в) } \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 4x - 3y - z = -4 \end{cases} .$$

3. 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица размером  $24 \times 25$ , в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент. Докажите, что:

а) можно отметить некоторые задачи "галочкой" так, что каждый из студентов решил чётное число (в частности, может быть, нуль) отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком "+", а некоторые из остальных — знаком "-" и приписать каждой задаче некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками "+" и "-".

4. На отрезке  $[0, 1]$  отмечено несколько различных точек. При этом, каждая отмеченная точка расположена либо ровно посередине между двумя другими отмеченными точками (не обязательно соседними с ней), либо ровно посередине между отмеченной точкой и концом отрезка. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

5. Натуральное число  $n$  не делится на 3. По кругу сидят  $n$  хамелеонов красного и синего цвета. Каждую минуту все хамелеоны, у которых соседи разного цвета, одновременно от испуга перекрашиваются в другой цвет: синие — в красный, красные — в синий. Остальные хамелеоны цвета не меняют. Докажите, что рано или поздно все хамелеоны одновременно вернут себе первоначальный цвет.

6. **101 корова.** Есть 101 корова. Если убрать любую буренку, то оставшихся можно разделить на два равных по весу и численности стада. Докажите, что все коровы весят одинаково, если их веса а) целые; б) рациональные; в) действительные; г) комплексные.