

Серия 7. Как (не) двигать точки

5 июля

1. В треугольник ABC внешние биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке I_A . Прямая ℓ , проходящая через I_A пересекает прямые AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые, симметричные CX и BY относительно CC_1 и BB_1 соответственно, пересекаются на B_1C_1 .

2. Дан ромб $ABCD$ с острым углом B . O – центр описанной окружности треугольника ABC . На продолжении OC за точку C отметили точку P . Прямая PD пересекает параллельную AB прямую, проходящую через O в точке Q . Докажите, что $\angle AQO = \angle PBC$.

3. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки P и Q . Докажите, что линия центров вписанных в треугольники BAQ и CAQ окружностей, линия центров вписанных в треугольники BAQ и CAP окружностей и линии центров внеписанных окружностей этих пар треугольников пересекаются на BC .

4. Зафиксирована окружность ω и точка P . На прямой ω выбирается точка X . $Y \neq X$ – вторая точка пересечения прямой XY с ω . Докажите, что отображение $F(X) = Y$ ($F : \omega \rightarrow \omega$) проективно.

5. Зафиксирована окружность ω и прямая ℓ . На прямой ω выбирается точка X . P – точка пересечения касательной к ω в точке X с ℓ . $Y \neq X$ – основание второй касательной из X к ω . Докажите, что отображение $F(X) = Y$ ($F : \omega \rightarrow \omega$) проективно.

6. Зафиксирована окружность ω и её касательная ℓ . На прямой ℓ выбирается точка X . Y – основание второй касательной ($XY \neq \ell$) из X к ω . Докажите, что отображение $F(X) = Y$ ($F : \ell \rightarrow \omega$) проективно.

7. S – проекция центра I окружности на диагональ AD описанного около неё четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle BSA = \angle DSA$.

8. Прямая ℓ , проходящая через центр описанной окружности треугольника ABC , пересекает AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что одна из точек пересечения окружностей, построенных на BQ и CP как на диаметрах лежит на окружности девяти точек треугольника ABC , а вторая на описанной около него окружности.

9. Зафиксирован угол ABC и окружность ω вписанная в него. На большей дуге AC окружности ω выбирается точка X . Докажите, что точка Фейербаха треугольника, образованного сторонами угла и касательной к ω в точке X проективно зависит от X .

Серия 7. Как (не) двигать точки

5 июля

1. В треугольник ABC внешние биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке I_A . Прямая ℓ , проходящая через I_A пересекает прямые AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые, симметричные CX и BY относительно CC_1 и BB_1 соответственно, пересекаются на B_1C_1 .

2. Дан ромб $ABCD$ с острым углом B . O – центр описанной окружности треугольника ABC . На продолжении OC за точку C отметили точку P . Прямая PD пересекает параллельную AB прямую, проходящую через O в точке Q . Докажите, что $\angle AQO = \angle PBC$.

3. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки P и Q . Докажите, что линия центров вписанных в треугольники BAQ и CAQ окружностей, линия центров вписанных в треугольники BAQ и CAP окружностей и линии центров внеписанных окружностей этих пар треугольников пересекаются на BC .

4. Зафиксирована окружность ω и точка P . На прямой ω выбирается точка X . $Y \neq X$ – вторая точка пересечения прямой XY с ω . Докажите, что отображение $F(X) = Y$ ($F : \omega \rightarrow \omega$) проективно.

5. Зафиксирована окружность ω и прямая ℓ . На прямой ω выбирается точка X . P – точка пересечения касательной к ω в точке X с ℓ . $Y \neq X$ – основание второй касательной из X к ω . Докажите, что отображение $F(X) = Y$ ($F : \omega \rightarrow \omega$) проективно.

6. Зафиксирована окружность ω и её касательная ℓ . На прямой ℓ выбирается точка X . Y – основание второй касательной ($XY \neq \ell$) из X к ω . Докажите, что отображение $F(X) = Y$ ($F : \ell \rightarrow \omega$) проективно.

7. S – проекция центра I окружности на диагональ AD описанного около неё четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle BSA = \angle DSA$.

8. Прямая ℓ , проходящая через центр описанной окружности треугольника ABC , пересекает AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что одна из точек пересечения окружностей, построенных на BQ и CP как на диаметрах лежит на окружности девяти точек треугольника ABC , а вторая на описанной около него окружности.

9. Зафиксирован угол ABC и окружность ω вписанная в него. На большей дуге AC окружности ω выбирается точка X . Докажите, что точка Фейербаха треугольника, образованного сторонами угла и касательной к ω в точке X проективно зависит от X .