

Серия 12. Скалярное произведение

9 июля

Определение. Пусть K — поле, $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $v = (v_1, \dots, v_n)$ — векторы из K^n . Положим $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ (скалярное произведение векторов u и v).

Свойства скалярного произведения:

(a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;

(b) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$;

(c) Если $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s = 0$, то $\alpha_1 \langle v_1, v \rangle + \dots + \alpha_s \langle v_s, v \rangle = 0$.

Определение. Векторы $u, v \in K^n$ называются *ортгоналъными*, если $\langle u, v \rangle = 0$.

Определение. Пусть M — подмножество K^n . Положим $M^\perp = \{v | (v, M) = 0\}$ — *ортгоналъное дополнение* к множеству M .

1. (a) Докажите, что M^\perp является подпространством.

(b) Как связаны $(M^\perp)^\perp$ и M ?

(c) Пусть M — подпространство. Докажите, что $\dim M + \dim M^\perp = n$.

(d) Пусть M — подпространство. Докажите, что $(M^\perp)^\perp = M$.

2. Множество содержит n элементов. В нём выбраны $n + 1$ различных трёхэлементных подмножеств. Докажите, что среди выбранных подмножеств найдутся два, имеющие ровно один общий элемент.

3. В Оддтауне n жителей и несколько различных по составу клубов. В каждом нечетное число членов, а любые два пересекаются по четному числу членов. Докажите, что число клубов $\leq n$. Приведите пример, что оценка точна.

4. В городе k супружеских пар и n клубов. Известно, что для мужчины и женщины количество клубов, в которых они оба бывали, нечетно тогда и только тогда, когда они — муж и жена. Докажите, что $k \leq n$.

5. (**Неравенство Фишера**). Пусть A_1, \dots, A_m — различные непустые подмножества n -элементного множества. Если пересечение любых двух различных из них состоит из ℓ элементов, то $m \leq n$.

Указание: ЛЗ над \mathbb{R} ! Отдельно случай $\exists i : |A_i| = \ell$.

6. В Эвентауне n жителей и несколько различных по составу клубов. В каждом четное число членов, а любые два пересекаются по нечетному числу членов. Докажите, что число клубов $\leq n$. Более того, при четном n их $\leq n - 1$. Приведите пример, что оценка точна.

7. n — четное, в множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ дано n подмножеств из четного числа элементов. Докажите, что пересечение каких-то двух различных подмножеств четно.

Замечание. У задачи есть аналог. У каждого в компании из четного числа человек четное число друзей. Докажите, что у каких-то двух четное число общих друзей.

8. В КИМах Единой Государственной Олимпиады (ЕГО) n вопросов с ответами «да» и «нет», за каждый правильный ответ начисляется 1 первичный балл. ЕГО сдавали k участников, и при этом они дали такой набор ответов на вопросы, что экспертная комиссия может так приписать положительные веса вопросам, чтобы участники расположились по итоговым баллам в любом нужном порядке. Докажите, что $k \leq n$.

Серия 12. Скалярное произведение

9 июля

Определение. Пусть K — поле, $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $v = (v_1, \dots, v_n)$ — векторы из K^n . Положим $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ (скалярное произведение векторов u и v).

Свойства скалярного произведения:

(a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;

(b) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$;

(c) Если $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s = 0$, то $\alpha_1 \langle v_1, v \rangle + \dots + \alpha_s \langle v_s, v \rangle = 0$.

Определение. Векторы $u, v \in K^n$ называются *ортгоналъными*, если $\langle u, v \rangle = 0$.

Определение. Пусть M — подмножество K^n . Положим $M^\perp = \{v | \langle v, M \rangle = 0\}$ — *ортгоналъное дополнение* к множеству M .

1. (a) Докажите, что M^\perp является подпространством.

(b) Как связаны $(M^\perp)^\perp$ и M ?

(c) Пусть M — подпространство. Докажите, что $\dim M + \dim M^\perp = n$.

(d) Пусть M — подпространство. Докажите, что $(M^\perp)^\perp = M$.

2. Множество содержит n элементов. В нём выбраны $n + 1$ различных трёхэлементных подмножеств. Докажите, что среди выбранных подмножеств найдутся два, имеющие ровно один общий элемент.

3. В Оддтауне n жителей и несколько различных по составу клубов. В каждом нечетное число членов, а любые два пересекаются по четному числу членов. Докажите, что число клубов $\leq n$. Приведите пример, что оценка точна.

4. В городе k супружеских пар и n клубов. Известно, что для мужчины и женщины количество клубов, в которых они оба бывали, нечетно тогда и только тогда, когда они — муж и жена. Докажите, что $k \leq n$.

5. (Неравенство Фишера). Пусть A_1, \dots, A_m — различные непустые подмножества n -элементного множества. Если пересечение любых двух различных из них состоит из ℓ элементов, то $m \leq n$.

Указание: ЛЗ над \mathbb{R} ! Отдельно случай $\exists i : |A_i| = \ell$.

6. В Эвентауне n жителей и несколько различных по составу клубов. В каждом четное число членов, а любые два пересекаются по нечетному числу членов. Докажите, что число клубов $\leq n$. Более того, при четном n их $\leq n - 1$. Приведите пример, что оценка точна.

7. n — четное, в множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ дано n подмножеств из четного числа элементов. Докажите, что пересечение каких-то двух различных подмножеств четно.

Замечание. У задачи есть аналог. У каждого в компании из четного числа человек четное число друзей. Докажите, что у каких-то двух четное число общих друзей.

8. В КИМах Единой Государственной Олимпиады (ЕГО) n вопросов с ответами «да» и «нет», за каждый правильный ответ начисляется 1 первичный балл. ЕГО сдавали k участников, и при этом они дали такой набор ответов на вопросы, что экспертная комиссия может так приписать положительные веса вопросам, чтобы участники расположились по итоговым баллам в любом нужном порядке. Докажите, что $k \leq n$.