

Числа Рамсея

18 июля

1. Докажите, что в полном графе на а) 10; б) 9 вершинах, рёбра которого покрашены в красный и синий цвета найдутся либо три вершины, все рёбра между которыми покрашены в красный, либо 4 вершины, все рёбра между которыми покрашены в синий. в) Докажите, что число 9 из предыдущей задачи нельзя уменьшить до 8.

Определение: для чисел m и n обозначим за $R(m, n)$ минимальное количество вершин в полном графе, для которого при любой раскраске рёбер в красный и синий цвета найдутся либо m вершин, все рёбра между которыми покрашены в красный, либо n вершин, все рёбра между которыми покрашены в синий. Это число называется числом Рамсея для пары m и n .

2. Докажите, что для любой пары чисел m и n верно $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$.

3. а) В магическом мире 17 чистокровных семей, при этом любые две либо дружат, либо враждуют, либо нейтральны. Рита Скитер выяснила, что нет троек семей, в которых каждые две враждуют. Позже она выяснила, что нет троек семей, где каждые две нейтральны. Докажите, что обязательно найдётся тройка семей, где каждые две дружат. б) Докажите, что число 17 из предыдущей задачи нельзя уменьшить до 9.

Определение: для чисел m_1, m_2, \dots, m_k обозначим за $R(m_1, \dots, m_k)$ минимальное количество вершин в полном графе, для которого при любой раскраске рёбер в k цветов найдётся K_{m_i} , все рёбра которого окрашены в цвет i для некоторого i от 1 до k .

4. а) Докажите, что $R(m_1, m_2, \dots, m_k)$ – конечно для любого набора m_1, m_2, \dots, m_k ; б) Докажите, что $R(m_1, \dots, m_k)$ не превосходит $\frac{(m_1 + \dots + m_k)!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!}$.

5. Отбор в лагерь пишут достаточно много человек. Любая тройка либо крикливая, либо немотивированная. Докажите, что можно выбрать 100 человек так, чтобы все тройки, входящие в эту сотню были одного типа.

Определение: для чисел m_1, m_2, \dots, m_k обозначим за $R_n(m_1, \dots, m_k)$ минимальное количество вершин в полном графе, для которого при любой раскраске множеств из n элементов в k цветов найдётся K_{m_i} , все множества из n элементов которого окрашены в цвет i для некоторого i от 1 до k .

6. Докажите, что $R_3(m, k) \leq R_2(R_3(m-1, k), R_3(m, k-1)) + 1$; б) Докажите, что $R_n(m_1, \dots, m_k)$ конечно для любого аргумента.

7. Даны n вершин, занумерованных числами от 1 до n .

а) Докажите, что если $k > 3$ и $n \leq 2^{k/2}$, то менее половины всех возможных графов на n вершинах содержат полный k -вершинный подграф.

б) Докажите, что при $k \geq 3$ $R(k, k) > 2^{k/2}$.