

Серия 14. Производящие функции

9 июля

Определение. Производящей функцией последовательности чисел a_0, a_1, a_2, \dots называется формальный степенной ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$.

Иногда для множества **целых** чисел a_0, a_1, a_2, \dots полезно рассмотреть формальный степенной ряд $x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \dots$.

1. Найдите последовательность соответствующую производящей функции

(a) $\frac{1}{a+bx}$

(b) $\frac{1}{(1-\alpha x)^n}$

2. Найдите производящую функцию последовательности

(a) $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$

(b) $1, 1, \dots$

(c) $1, 2, 3, \dots$

(d) $x_{n+k} = \alpha_k x_n + \alpha_{k-1} x_{n+1} + \dots + \alpha_1 x_{n+k-1}$ (выразите через α_i и x_0, x_1, \dots, x_{k-1})

3. a_n — число способов набрать n рублей купюрами по 3, 8, 19, 23 купюр. Найдите производящую функцию a_n .

4. Дан многочлен $P(x) = \prod (x - x_i)^{\alpha_i}$, где $x_i \in \mathbb{C}, \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Докажите, что существуют $Q_i(x) \in \mathbb{C}[x]$ такие, что $1 = \sum Q_i(x) \cdot \frac{P(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}$ и $\deg(Q_i) < \alpha_i$.

5. Опишите нахождения общего решения линейной рекуррентности $x_{n+k} = \alpha_k x_n + \alpha_{k-1} x_{n+1} + \dots + \alpha_1 x_{n+k-1}$ через преобразования производящих функций.

6. Дано натуральное число n . Сколько существует многочленов $P(x)$ с коэффициентами 0, 1, 2, 3 таких, что $P(2) = n$.

7. Натуральный ряд разбит на k бесконечных арифметических прогрессий $a_i + nd_i$, где $n \geq 0$. Докажите, что

(a) $\sum \frac{1}{d_i} = 1$

(b) среди чисел d_i есть два равных

(c) $\sum \frac{a_i}{d_i} = \frac{k-1}{2}$

Серия 14. Производящие функции

9 июля

Определение. Производящей функцией последовательности чисел a_0, a_1, a_2, \dots называется формальный степенной ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$.

Иногда для множества **целых** чисел a_0, a_1, a_2, \dots полезно рассмотреть формальный степенной ряд $x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \dots$.

1. Найдите последовательность соответствующую производящей функции

(a) $\frac{1}{a+bx}$

(b) $\frac{1}{(1-\alpha x)^n}$

2. Найдите производящую функцию последовательности

(a) $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$

(b) $1, 1, \dots$

(c) $1, 2, 3, \dots$

(d) $x_{n+k} = \alpha_k x_n + \alpha_{k-1} x_{n+1} + \dots + \alpha_1 x_{n+k-1}$ (выразите через α_i и x_0, x_1, \dots, x_{k-1})

3. a_n — число способов набрать n рублей купюрами по 3, 8, 19, 23 купюр. Найдите производящую функцию a_n .

4. Дан многочлен $P(x) = \prod (x - x_i)^{\alpha_i}$, где $x_i \in \mathbb{C}, \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Докажите, что существуют $Q_i(x) \in \mathbb{C}[x]$ такие, что $1 = \sum Q_i(x) \cdot \frac{P(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}$ и $\deg(Q_i) < \alpha_i$.

5. Опишите нахождение общего решения линейной рекуррентности $x_{n+k} = \alpha_k x_n + \alpha_{k-1} x_{n+1} + \dots + \alpha_1 x_{n+k-1}$ через преобразования производящих функций.

6. Дано натуральное число n . Сколько существует многочленов $P(x)$ с коэффициентами 0, 1, 2, 3 таких, что $P(2) = n$.

7. Натуральный ряд разбит на k бесконечных арифметических прогрессий $a_i + nd_i$, где $n \geq 0$. Докажите, что

(a) $\sum \frac{1}{d_i} = 1$

(b) среди чисел d_i есть два равных

(c) $\sum \frac{a_i}{d_i} = \frac{k-1}{2}$