

Производная

8 июля

Определение: Производной функции $f(x)$ называется функция $f'(x) = \lim_{x_0 \rightarrow x} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Теорема 1: Если $f'(x) > 0$ на интервале (a, b) , то $f(x)$ возрастает на интервале (a, b) .
Если $f'(x) < 0$ на интервале (a, b) , то $f(x)$ убывает на интервале (a, b) .

Теорема 2: Если x_0 — точка локального минимума или максимума, то $f'(x_0) = 0$.

Важные свойства производной:

- 1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;
- 2) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
- 3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, при $g(x) \neq 0$;
- 4) $(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$.

1. Верно ли утверждение, обратное теореме 2?

Напоминание: корень x_0 многочлена $P(x)$ называется кратным кратности k , если $P(x) = (x - x_0)^k Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен, который не делится на $x - x_0$.

2. x_0 является корнем многочлена $P(x)$; а) Докажите, что x_0 является корнем кратности $k > 1$ многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда он является корнем $P'(x)$.
б) докажите, что тогда x_0 является корнем многочлена $P'(x)$ кратности $k - 1$.

3. Докажите, что многочлен $1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ а) не имеет кратных корней;
б) имеет не более одного действительного корня.

4. Найдите количество решений уравнения $9x^{6x} = 1$.

5. Пусть многочлен степени n имеет n корней. Докажите, что среднее арифметическое его корней совпадает со средним арифметическим корней производной.

6. а) **Теорема Ролля.** Если функция непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a; b]$, причём $f(a) = f(b)$, то на интервале $(a; b)$ найдётся нуль производной.

б) **Теорема Лагранжа:** Докажите, что существует $c \in (a, b)$ такое, что

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$$

7. Функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на $[0; 1]$. Доказать, что если $f(0) = f(1) = 0$, то $f(x) = f'(x)$ в некоторой точке $x \in (0; 1)$.

8. Вещественные числа x_1, x_2, \dots, x_n таковы, что сумма их произведений по k и сумма их произведений по $k + 1$ обе равны нулю. Докажите, что $n - k + 1$ из чисел x_1, x_2, \dots, x_n равны нулю.