

# Матбой Профи-10 — Профи-10

15 июля

1. Сумма положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{3a^2 - a - b^2} + \frac{b^2}{3b^2 - b - c^2} + \frac{c^2}{3c^2 - c - a^2} \geq 3,$$

если известно, что все знаменатели положительные.

2. Даны  $n$  векторов с суммой ноль и точка  $C$ . Докажите, что их можно упорядочить  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  таким образом, чтобы все точки  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , где для всякого  $k$  выполнено  $CB_k = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$ , лежали внутри или на границе какого-нибудь угла с вершиной  $C$  и величиной  $60^\circ$ .

3. Найдите все такие многочлены  $P(x)$  вещественными коэффициентами, что

$$P(x)^2 + 1 = 4P(x^2 + 4x + 1).$$

4. Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $\angle ACP = \angle BCQ$  и  $\angle CBP = \angle ABQ$ . Точка  $Z$  — проекция точки  $P$  на прямую  $BC$ . Точка  $Q'$  симметрична точке  $Q$  относительно точки  $Z$ . Точки  $K$  и  $L$  выбраны на лучах  $AB$  и  $AC$  соответственно так, что  $Q'K \parallel QC$  и  $Q'L \parallel QB$ . Докажите, что  $\angle KPL = \angle BPC$ .

5. Саша нарисовал граф, вершинами которого являются все возможные последовательности из 0 и 1 длины 2019, а ребро между вершинами проводится, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одном месте. Назовём расстановку ненулевых чисел в вершинах этого графа  $k$ -гармонической, если для любой вершины сумма чисел в соседних с ней вершинах в  $k$  раз больше числа в самой вершине. При каких вещественных  $k$  существует  $k$ -гармоническая расстановка чисел в вершинах этого графа?

6. Напомним, что *палиндромом* называется натуральное число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Например, 12321 — палиндром, а 1210 — нет. Существует ли натуральное число  $N > 1$  такое, что все его натуральные степени являются палиндромами?

7. На окружности  $S$  отмечены точки  $A$  и  $B$ . Касательные к окружности  $S$ , проведенные в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $C$ . Пусть  $M$  — середина отрезка  $AB$ . Окружность  $S_1$ , проходящая через точки  $M$  и  $C$ , вторично пересекает отрезок  $AB$  в точке  $D$  и окружность  $S$  — в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что касательные, проведенные к окружности  $S$  в точках  $K$  и  $L$ , пересекаются на отрезке  $CD$ .

8. Найдите все простые  $p$ , для которых существует ровно одно  $a \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  такое, что  $p$  делит  $a^3 - 3a + 1$ .

9. Вдоль окружности расположено  $n$  монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Если две соседние монеты лежат одинаково (обе орлом или обе решкой), разрешается обе перевернуть. Сколько имеется вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга, применяя такие операции?

10. В языке волков две буквы:  $\Phi$  и  $\Pi$ , любая конечная последовательность которых образует слово. Слово  $Y$  называется потомком слова  $X$ , если  $Y$  получается из  $X$  вычеркиванием некоторых букв (например, слово  $\Phi\Phi\Pi\Phi$  имеет 8 потомков:  $\Phi$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi\Phi$ ,  $\Phi\Pi$ ,  $\Pi\Phi$ ,  $\Phi\Phi\Pi$ ,  $\Phi\Pi\Phi$ ,  $\Phi\Phi\Phi$ ). При данном  $n$  определите, какое наибольшее число потомков может иметь  $n$ -буквенное слово языка волков.