

Серия 3. Разнобой

3 июля

1. Сколько раз встречается цифра 1 в десятичной записи числа

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 99}_{2020} ?$$

2. На окружности длины 1 сидит кузнечик. Каждую секунду он делает прыжок, перемещаясь на дугу данной иррациональной длины α против часовой стрелки. Для каждого натурального k кузнечик помечает точку, в которую он попадает на k -м прыжке, числом k . Кузнечик сделал n прыжков и остановился. Оказалось, что ближайшие к нему с двух сторон отмеченные точки помечены числами a и b . Докажите, что $a + b \leq n$.

3. Найдите все натуральные m и n такие, что выполнено равенство $m^n = n^3 m$.

4. Император пригласил на праздник тысячу волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император — нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдаёт каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа "да" или "нет"), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнаёт, добрый он был или злой. После этого император вновь выдаёт каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив не более одного доброго.

5. Серёжа задумал натуральное число x , сумма цифр которого равна 2024, а Саша угадывает его. При своём ходе Саша называет выбранное им число a , а Серёжа сообщает ему сумму цифр числа $|x - a|$. За какое наименьшее число ходов Саша гарантированно сумеет отгадать число?

6. На квадратном лугу есть круглая лунка. По лугу прыгает кузнечик. Перед каждым прыжком он выбирает вершину и прыгает по направлению к ней. Длина прыжка равна половине расстояния до этой вершины. Сможет ли кузнечик попасть в лунку?

7. На плоскости окрашено красным $8n^3$ узлов решётки. В каждой красной точке P написано общее количество красных точек на вертикальной и горизонтальной прямых, проходящих через P . Докажите, что существует число, которое записано не менее $n + 1$ раз.

8. Последовательность $\{a_n\}$ называется простой, если a_n является некоторым простым делителем n . Существует ли простая последовательность, обладающая следующим свойством: для любого натурального k найдётся лишь конечное количество таких пар $(i \neq j)$, что $a_i = a_j$ и $|i - j| < k$?

Серия 3. Разнобой

3 июля

1. Сколько раз встречается цифра 1 в десятичной записи числа

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 99}_{2020} ?$$

2. На окружности длины 1 сидит кузнечик. Каждую секунду он делает прыжок, перемещаясь на дугу данной иррациональной длины α против часовой стрелки. Для каждого натурального k кузнечик помечает точку, в которую он попадает на k -м прыжке, числом k . Кузнечик сделал n прыжков и остановился. Оказалось, что ближайшие к нему с двух сторон отмеченные точки помечены числами a и b . Докажите, что $a + b \leq n$.

3. Найдите все натуральные m и n такие, что выполнено равенство $m^n = n^3 m$.

4. Император пригласил на праздник тысячу волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император — нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдаёт каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа "да" или "нет"), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнаёт, добрый он был или злой. После этого император вновь выдаёт каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив не более одного доброго.

5. Серёжа задумал натуральное число x , сумма цифр которого равна 2024, а Саша угадывает его. При своём ходе Саша называет выбранное им число a , а Серёжа сообщает ему сумму цифр числа $|x - a|$. За какое наименьшее число ходов Саша гарантированно сумеет отгадать число?

6. На квадратном лугу есть круглая лунка. По лугу прыгает кузнечик. Перед каждым прыжком он выбирает вершину и прыгает по направлению к ней. Длина прыжка равна половине расстояния до этой вершины. Сможет ли кузнечик попасть в лунку?

7. На плоскости окрашено красным $8n^3$ узлов решётки. В каждой красной точке P написано общее количество красных точек на вертикальной и горизонтальной прямых, проходящих через P . Докажите, что существует число, которое записано не менее $n + 1$ раз.

8. Последовательность $\{a_n\}$ называется простой, если a_n является некоторым простым делителем n . Существует ли простая последовательность, обладающая следующим свойством: для любого натурального k найдётся лишь конечное количество таких пар $(i \neq j)$, что $a_i = a_j$ и $|i - j| < k$?