

1. В стране 100 городов, разделённых на три республики. Некоторые города соединены авиалиниями. Министр связи нашёл не менее 70 таких городов, что из каждого выходит не менее 70 авиалиний. Докажите, что какая-то авиалиния соединяет два города одной республики.

2. Десять мальчиков и десять девочек участвовали в однокруговом турнире по теннису (т. е. каждые двое играют ровно одну партию; ничьих в теннисе не бывает). За каждую победу давалось одно очко. После турнира организаторы подарили каждой девочке цветок за каждую победу над мальчиком. Могло ли оказаться так, что у всех мальчиков поровну очков, а у всех девочек букеты одинакового размера?

3. В компании пять эльфов, пять гномов и один хоббит. У каждого эльфа по семь знакомых в этой компании, а у каждого гнома по два. Сколько знакомых в этой компании у хоббита?

4. На острове Невезения мужчины по средам всегда говорят правду, а по четвергам всегда лгут, а женщины наоборот. В среду каждый из них сказал: «У меня знакомых мужчин на 1 больше, чем знакомых женщин», а в четверг «У меня знакомых женщин на 1 больше, чем мужчин». Могло ли на острове быть ровно 2025 жителей?

5. В М6 собрались 70 папуасов, каждый из которых принадлежит племени мальчиков или девочек. Мальчики всегда говорят правду знакомым и лгут незнакомым, а девочки говорят правду незнакомым и лгут знакомым. Каждый из собравшихся сказал каждому из остальных фразу: «У меня чётное число знакомых в этой компании» или «У меня нечётное число знакомых в этой компании». Оказалось, что первая фраза была произнесена ровно тысячу раз. Могло ли оказаться поровну мальчиков и девочек?

6. В конце июля М6 разъехался из ЛМШ. Потом им всем стало скучно друг без друга. Тогда те, у кого было чётное число друзей внутри отряда, написали письмо тем, с которыми дружат, а те, у кого было таких друзей нечётное число, написали по письму тем, с кем не дружили. Мог ли Мирон получить ровно 15 писем?

7. На костюмированном балу присутствовало 20 человек. В каждом танце участвовало двое — мальчик и девочка. Оказалось, что десятеро из них танцевали с тремя партнёрами, двое (Саша и Женя) — с пятью и остальные восемь — с шестью. Докажите, что Саша и Женя разного пола.

8. В школе учится 100 мальчиков и 100 девочек. Каждый мальчик знаком хотя бы с одной девочкой, а каждая девочка — хотя бы с одним мальчиком. Один раз каждая девочка сказала: «Среди знакомых мне мальчиков не менее двух третей — рыжие!» А каждый мальчик ответил: «Среди знакомых мне девочек не менее половины — блондинки!» Все они сказали правду, но среди мальчиков только десять являются рыжими. А какое наименьшее количество блондинок может быть среди девочек?

9. В ЛМШ находится 234 ребёнка. В течение смены каждый из них пожал руки другим участникам 678 раз. Могло ли оказаться, что рукопожатий между мальчиками и девочками было ровно половина от общего числа рукопожатий?