

Пример. Демон Руи сказал Тандзиро, что если тот сможет провести следующий обряд, то Нэдзуко вновь станет человеком. Вначале в трёх соседних вершинах пятиугольника надо поставить демонический эликсир, свечу и человеческий эликсир и затем двигать предметы по диагоналям в свободные вершины пятиугольника. Обряд успешно завершится только тогда, когда свеча окажется на своём исходном месте, а эликсиры поменяются местами. а) Возможно ли провести этот обряд? б) Правду ли сказал демон Руи?

1. Четыре шахматных коня расположены в угловых клетках доски 3 на 3 — два белых коня стоят сверху слева и снизу справа, два чёрных — сверху справа и снизу слева. Кони могут передвигаться по обычным правилам. Можно ли сделать так, чтобы в верхних углах стояли белые кони, а в нижних — чёрные?

Определение. *Степенью* вершины называется количество рёбер, исходящих из этой вершины.

Пример. В графе 2024 вершины, каждая степени 5. Сколько рёбер в графе?

2. На одном из конкурсов ДэнсШоу на каждый танец выходила пара учеников и никакая пара не выступала вместе более одного раза. Всего в конкурсе было задействовано 24 ученика и каждый потанцевал 3 раза. Сколько всего танцев было в этом конкурсе?

3. В стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться в любой другой город.

4. Можно ли изобразить на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекал ровно 3 других?

Лемма о рукопожатиях. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству рёбер.

Следствие. Число нечётных вершин графа всегда чётно

5. Во дворе прачечной стоят 10 берёз и 6 сосен. Между ними натянуты бельевые верёвки так, что к каждой сосне привязано 7 верёвок, а к каждой берёзе — 5. Сколько во дворе бельевых верёвок?

6. Архипелаг Невезения состоит из 13 островов, а соседний архипелаг Удачи состоит из 7 островов. С каждого острова выходит один, три или пять мостов. Можно ли хоть с какого-то «невезучего» острова попасть на какой-либо «удачливый»?

7. В стране Кильвиш из каждого города выходит ровно 2024 дороги и из любого города можно по дорогам добраться в любой другой город. Ураган и дожди разрушили одну из дорог. Докажите, что и после этого можно добраться из любого города в любой.

8. Можно ли все рёбра полного графа с 45 вершинами раскрасить в 44 цвета таким образом, чтобы все рёбра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

9. а) Нарисуйте все возможные графы с восемью вершинами каждая из которых имеет степень 2. б) В графе у каждой вершины степень 2. Докажите, что он разбивается на циклы. в) В графе у каждой вершины степень не больше 2. Докажите, что он разбивается на циклы и цепочки.

10. Какие-то две команды набрали в круговом волейбольном турнире одинаковое число очков. Докажите, что найдутся такие команды А, В и С, что А выиграла у В, В выиграла у С, а С выиграла у А. (В турнире каждая команда сыграла с каждой, ничей в волейболе быть не может.)