

Двудольные графы

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы ребра соединяли только пары вершин разного цвета.

Теорема о числе ребер двудольного графа. (а) Если в двудольном графе n белых вершин, и все они имеют степень s , то всего в графе $n \cdot s$ ребер.

(b) Число ребер равно сумме степеней всех белых вершин (а также равно сумме степеней всех черных).

Критерий. Граф – двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных циклов (циклов нечетной длины)

1. Каждый граф можно превратить в двудольный, покрасив все его вершины в белый цвет и добавив черную вершину в середину каждого ребра. Сколько вершин каждого цвета и сколько ребер у полученного графа, если исходно у него было v вершин и r ребер?

2. Каково наибольшее число ребер в двудольном графе (а) с x белыми и y черными вершинами; (b) с $2n$ вершинами; (c) с $2n + 1$ вершиной?

3. На кружке каждая девочка дружит с семью мальчиками, а каждый мальчик – с пятью девочками. Докажите, что количество детей на кружке делится на 12.

4. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. При этом 17 детей из этого класса любят участвовать в математических боях, а в их классной комнате 15 двухместных парт. Сколько всего ребят в классе?

5. Каждый мальчик дружит с 5 девочками, а все девочки с разным числом мальчиков. Какое наименьшее количество детей может быть в этой компании?

6. Докажите, что дерево является двудольным графом.

7. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый - с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

8. Можно ли расставить 777 коней на доске 2025×2025 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?

9. В группе из 79 школьников у каждого не более 39 знакомых, причем у любого мальчика есть знакомая девочка, а у любой девочки – знакомый мальчик. Может ли оказаться, что все девочки из этой группы имеют в ней поровну знакомых мальчиков, а все мальчики – поровну знакомых девочек? Все знакомства – взаимные.

10. В отряде из 100 человек каждый ученик подружился с более чем 40 учениками. При этом оказалось, что нет троих таких детей, что каждый дружит с каждым. Докажите, что не получится выбрать 5 учеников и посадить их за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом со своим другом.