

Представление НОД. Линейные уравнения

Пример. Найдите целые числа, которые при делении на 7 дают остаток 5, а при делении на 13 дают остаток 8.

(а) Задачу можно свести к решению уравнения $7n - 13m = 3$ в целых числах.

(б) Найдите решение уравнения $7n - 13m = 1$ при помощи алгоритма Евклида.

(с) Найдите какое-нибудь решение уравнения $7n - 13m = 3$.

(d) Решением уравнения $7n - 13m = 3$ являются пары $(6 + 13k; 3 + 7k)$, где k — любое целое число.

(е) Числа вида $47 + 7 \cdot 13k$ и только они являются решениями задачи.

Пример. Найдите целые числа, которые при делении на 7 дают остаток 5, а при делении на 13 дают остаток 8.

(f) Докажите, что среди чисел $8 + 13 \cdot 0, 8 + 13 \cdot 1, 8 + 13 \cdot 2, \dots, 8 + 13 \cdot 6$ найдется ровно одно число, которое при делении на 7 дает остаток 5.

(g) Докажите, что среди чисел $0, 1, 2, \dots, 7 \cdot 13 - 1$ ровно одно число x удовлетворяет условию задачи.

(h) Числа вида $x + 7 \cdot 13k$, k — целое и только они являются решениями задачи.

Теорема. Для любых целых чисел a и b найдутся такие два числа x и y , что $ax + by = (a, b)$.

Теорема о простом делителе. Если произведение ab делится на простое число p , то a или b делится на p .

1. Найдите целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 11 дают остаток 6, решив линейное уравнение.

2. Автомат умеет отрезать от любого прямоугольника квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Петя разрезал прямоугольник на два больших квадрата, три поменьше и пять маленьких со стороной 10 см. Найдите размеры исходного прямоугольника.

3. Решите, составив линейное уравнение:

Шли сорок мышей, несли сорок грошей,
Две мыши поплоше несли по два гроша,
Немало мышей — вообще без грошей.
Большие совсем тащили по семь.
А остальные несли по четыре.
Сколько мышей шли без грошей?

4. Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдаёт новую карточку: прочитав карточку с парой $\{m; n\}$, первый автомат выдаёт карточку $\{m - n; n\}$, второй — карточку $\{m + n; n\}$, третий — карточку $\{n; m\}$. Пусть первоначально имеется карточка с парой чисел $\{20; 11\}$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить из неё карточку (а) $\{12; 21\}$; б) $\{31; 13\}$?

5. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно ровно двумя способами представить в виде $3x + 4y$, где x и y — натуральные числа.

Пример. Найдите наибольшую сумму, которую нельзя выплатить монетами достоинством 5 и 9 тугриков.

(а) Докажите, что среди чисел $n - 9 \cdot 0$, $n - 9 \cdot 1$, $n - 9 \cdot 2$, $n - 9 \cdot 3$, $n - 9 \cdot 4$, ровно одно делится на 5. Докажите, что сумму в 31 тугрик нельзя выплатить.

(б) Докажите, что любую сумму, большую 31 выплатить можно.

6. Найдите наибольшую сумму, которую нельзя выплатить монетами достоинством 3 и 11 тугриков.

7. Теорема Сильвестра. Пусть a и b — натуральные взаимно простые числа. Докажите, что наибольшее c , для которого уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, имеет вид $c = ab - a - b$.