

Определение. Чтобы доказать утверждение, зависящее от натурального параметра n , можно сначала проверить его для $n = 1$, а потом доказать, что при каждом натуральном k из утверждения для $n = k$ следует утверждение для $n = k + 1$. Такая схема называется *индукцией по параметру n* .

Проверка утверждения для $n = 1$ называется *базой индукции*. Постулирование утверждения для $n = k$ называется *предположением индукции*.

Вывод утверждения для $n = k + 1$ из этого предположения называется *переходом индукции*.

Пример. Филечка рвет каждый попадающий ему в руки кусок бумаги на 4 части, а Степочка — на 6. Докажите, что объединенными усилиями они могут разорвать газету на любое количество частей, начиная с девяти.

Пример. В некоторой стране $n > 1$ городов. Любые два города соединены авиалинией одной из двух компаний. Докажите, что можно выбрать одну из этих двух авиакомпаний так, что из любого города можно добраться до любого другого, пользуясь авиалиниями только этой компании.

1. Плоскость разрезана n прямыми на несколько частей. Докажите, что эти части можно раскрасить в чёрный и белый цвета таким образом, чтобы любые две части, имеющие общий кусок границы, были раскрашены в разные цвета.

2. Любую ли сумму из целого числа рублей больше семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 рублей?

3. На полке расставили 100 томов энциклопедии. Разрешается взять несколько подряд идущих томов и переставить их в обрат-

ном порядке. Докажите, что такими операциями можно расставить тома по порядку, независимо от того, как их расставили.

4. Из квадрата клетчатой бумаги размером $2^n \times 2^n$ вырезали клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на уголки из трех клеток.

5. Ваня нарисовал на плоскости треугольник. Сережа провел n прямых, которые разделили треугольник на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей снова треугольник.

6. Торт произвольной формы разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдется хотя бы один чистый кусок.

7. («Ханойская башня») Имеется пирамида с 20 кольцами возрастающих размеров и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней.

8. Докажите, что квадрат можно разрезать на n квадратов для любого n , начиная с шести.

9. На прямой выбрано несколько отрезков так, что всех их концы различны. Докажите, что на этой прямой можно отметить несколько точек так, чтобы на каждом отрезке было отмечено нечётное количество отмеченных точек.

10. Прямоугольник $2 \times n$ разбит на доминошки. Докажите, что его клетки можно покрасить в два цвета так, чтобы любая доминошка в данном разбиении содержала клетки разных цветов, но в любом другом разбиении этого прямоугольника на доминошки нашлась бы доминошка, содержащая две клетки одного цвета.