

Графы

Пример. (а) Граф — это множество точек (вершин), некоторые из которых соединены линиями — рёбрами.

(б) Смежные вершины — две вершины, которые соединены ребром.

(с) Степень вершины — количество рёбер, выходящих из этой вершины.

(д) Полный граф — это граф, в котором любые две вершины соединены ребром.

(е) Путь — это последовательность вершин в графе, которые последовательно соединены рёбрами.

(ф) Цикл — это путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают.

(г) Простой путь — это путь, который начинается и заканчивается в разных вершинах и в котором все вершины попарно различны.

(х) Простой цикл — это цикл, в котором все вершины попарно различны.

(и) Связный граф — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть путь.

(й) Подграф графа G — это граф, который получен из графа G удалением некоторых вершин или рёбер.

(к) Компонента связности графа G — это связный подграф графа G , в который уже нельзя добавить ни рёбра, ни вершины графа G так, чтобы не нарушить связность.

(л) Мост — ребро, при удалении которого увеличивается количество компонент связности.

1. Можно ли изобразить на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекал ровно 3 других?

2. Существует ли граф с 100 вершинами, в котором есть 100 мостов?

3. Можно ли все рёбра полного графа с 45 вершинами раскрасить в 44 цвета таким образом, чтобы все рёбра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

4. В любом графе на 6 вершинах найдётся либо три точки попарно соединённые рёбрами, либо три точки попарно не соединённые.

5. Из полного графа на 40 вершинах выкинули 38 рёбер. Мог ли граф перестать быть связным?

6. На костюмированном балу присутствовало 20 человек. В каждом танце участвовало двое — мальчик и девочка. Оказалось, что десятеро из них танцевали с тремя партнёрами, двое (Саша и Женя) — с пятью и остальные восемь — с шестью. Докажите, что Саша и Женя разного пола.

7. Двадцать школьников решали двадцать задач. Каждый решил две задачи, и каждую задачу решили двое. Докажите, что можно устроить разбор задач так, чтобы каждый рассказал решённую им задачу.

8. Существует ли граф со 100 вершинами, степени которых будут $1, 1, 2, 2, \dots, 50, 50$?

9. Какие-то две команды набрали в круговом волейбольном турнире одинаковое число очков. Докажите, что найдутся такие команды A , B и C , что A выиграла у B , B выиграла у C , а C выиграла у A . (В турнире каждая команда сыграла с каждой, ничей в волейболе быть не может.)