

Обозначение. Пусть $(a_1, \dots, a_n) = \text{НОД}(a_1, \dots, a_n)$ и $[a_1, \dots, a_n] = \text{НОК}(a_1, \dots, a_n)$.

Во всех задачах числа a, b, c – натуральные.

1. Докажите, что верны следующие равенства:

(a) $[a, (a, b)] = a$;

(b) $abc = [a, b, c](ab, ac, bc)$;

(c) $[(a, b), c] = ([a, c], [b, c])$;

(d) $([a, b], [a, c], [b, c]) = [(a, b), (a, c), (b, c)]$;

(e) $\frac{(a, b)(a, c)(b, c)}{(a, b, c)^2} = \frac{[a, b][a, c][b, c]}{[a, b, c]^2}$;

(f) $[a, b, c] = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(b, c)(c, a)}$;

(g) $(a, b) = (a + b, [a, b])$.

2. Докажите, что если $(a, b, c) = 1$, то

$$(a, bc) = (a, b) \cdot (a, c)$$

3. Докажите, что справедливо неравенство

$$[a, b] \cdot [b, c] \cdot [c, a] \geq [a, b, c]^2$$

4. (a) Известно, что $(a, a + 1) < (a, a + 2) < \dots < (a, a + 35)$. Докажите, что $(a, a + 35) < (a, a + 36)$.

(b) Известно, что $[a, a + 1] > [a, a + 2] > \dots > [a, a + 35]$. Докажите, что $[a, a + 35] > [a, a + 36]$.

5. Известно, что $a^2 - a \cdot (a, b) = [a, b]$. Докажите, что b делится на $(a, b)^2$.