

Признаки делимости и равноостаточности

Признаки равноостаточности.

- Любое натуральное число при делении на 4 даёт такой же остаток, как и число, образованное двумя его последними цифрами.
- Любое натуральное число при делении на 8 даёт такой же остаток, как и число, образованное тремя его последними цифрами.
- Любое натуральное число при делении на 3 даёт такой же остаток, как и его сумма цифр.
- Любое натуральное число при делении на 9 даёт такой же остаток, как и его сумма цифр.
- Любое натуральное число при делении на 11 даёт такой же остаток, как и его знакопеременная сумма цифр, посчитанная справа налево, начиная с плюса.

1. Ваня 2023 раза подряд выписал число 2023. Получилось 20232023...20232023. Найдите остаток полученного числа при делении

2023 раза

(a) на 9;

(b) на 11.

2. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр натурального числа n . Существует ли натуральное n такое, что $n^2 - 20242024 = n \cdot S(n)$?

3. Докажите, что если сумма цифр четного числа не изменяется при делении на 2, то число делится на 9.

4. Пусть n – натуральное шестизначное число, в записи которого по разу используются цифры от 1 до 6. Может ли n делиться на 11?

5. Докажите, что число \overline{abcd} делится на 99 тогда и только тогда, когда число $\overline{ab} + \overline{cd}$ делится на 99.

6. На доске записаны два семизначных числа, делящихся на 11: РОТОНДА и ТОРНАДО. Разные буквы шифруют разные цифры, кроме одного исключения: одной и той же цифре соответствуют буква О и какая-то ещё. Какая?

7. Петя и Вася выписывают на доску в ряд слева направо произвольные цифры. Начинает Петя. Проигрывает игрок, после хода которого одна или несколько цифр, записанных подряд, образуют число, кратное 11. Кто из игроков победит при правильной игре?

8. На 2024 карточках написана цифра 1, на других 2024 карточках написана цифра 2. Андрей складывает из этих карточек 4048-значное число. За один ход Ваня может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Андрею 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Вани получается число, кратное 11. Какую наибольшую сумму может заработать Андрей, если Ваня стремится заплатить как можно меньше?

9. Докажите следующие признаки делимости и равноостаточности:

(a) Число делится на 19 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с удвоенной цифрой в разряде единиц, делится на 19. (Например, 646 делится на 19, так как $64 + 2 \cdot 6 = 76$ делится на 19.)

(b) Число делится на 23 тогда и только тогда, когда число десятков, сложенное с умноженной на 7 цифрой в разряде единиц, делится на 23. (Например, 391 делится на 23, так как $39 + 7 \cdot 1 = 46$ делится на 23.)

(c) Число n разбили на группы по три цифры (начиная с единиц). Тогда сумма этих групп даёт при делении на 37 такой же остаток, что и число n .

10. В четырёх числах заменили буквы цифрами (одинаковые буквы одинаковыми цифрами, разные — разными). Получилось ИКС, МИКС, ПЯТИКЛАССНИК и ПЛЯСКИТИМАТИНАТАТАМИ. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел составное.

11. Петя возвел число 4 в некоторую натуральную степень и получил число, состоящее из четного количества цифр. Вася записал цифры этого числа в обратном порядке и обнаружил, что получилась степень числа 5. Докажите, что кто-то из мальчиков ошибся.