

Деревья

Определение. (а) **Лесом** называется граф без циклов.
(б) **Деревом** называется связный граф без циклов.

Определение. Пусть G — связный граф. Подграф T графа G называется **остовным деревом** графа G , если подграф T является деревом и содержит все вершины графа G .

Определение. Вершина степени 1 называется **висячей** или **листом**.

Лемма. В любом дереве, в котором более одной вершины, найдётся хотя бы две висячие вершины.

Теорема. (Главный критерий дерева)

- (с) В дереве на n вершинах ровно $n - 1$ ребро.
- (d) Если в связном графе на n вершинах ровно $n - 1$ ребро, то это дерево.

Теорема. (Не главный критерий дерева)

Пусть G — это граф на n вершинах. Граф G является деревом тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

- (e) G — связный граф, в котором каждое ребро — мост;
- (f) в графе G любые две вершины связаны ровно одним путем;
- (g) в G ровно $n - 1$ ребро и нет циклов;
- (h) в G нет циклов и при добавлении любого ребра образуется цикл;
- (i) в G ровно $n - 1$ мост.

1. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным.

2. В дереве степени всех вершин нечетные. Докажите, что более половины его вершин висячие.

3. В стране $n > 2$ городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что между любыми двумя городами есть воздушный путь. Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более $2n - 4$ перелетов.

4. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

5. У Царя Гвидона было 5 сыновей. Среди его потомков 100 имели каждый ровно по 3 сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

6. В некотором государстве нечётное количество городов. Некоторые пары городов соединены дорогами. Причём от каждого города до каждого по этим дорогам можно добраться ровно одним способом. Из каждого города в каждый другой отправились гонцы с важным донесением. Делится ли суммарное расстояние, пройденное гонцами, на 4?

7. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.