

Количество цифр

Интересный факт. Рассмотрим все города России с населением не менее 500000. Их всего 37. В Москве живёт около 15 миллионов, В Петербурге — около 5 миллионов, ещё в 13 городах — больше одного, но меньше двух миллионов. То есть численность населения почти 38% среди этих городов начинается на цифру 1. Желающие могут рассмотреть другие статистические данные — площади крупнейших государств, например, или массы планет Солнечной системы — и убедиться, что больше четверти этих величин начинается с цифры 1. Этот эффект напрямую связан с задачей о первых цифрах степеней двоек.

1. Пусть в первом числе n цифр, а во втором — k цифр. Сколько цифр может быть в их произведении?

2. Андрей начал выписывать степени двойки, а затем от каждой оставил лишь первую цифру. Он заметил, что среди этих первых цифр единиц гораздо больше, чем остальных. Заинтересовавшись феноменом, он выписал первые цифры первых 5000 степеней двойки (т.е. первые цифры чисел $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{5000}$). Докажите, что среди них будет хотя бы тысяча единиц.

3. Андрей решил выписать степени двойки (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...). Этому ему показалось мало, и тогда он решил выписать также и степени пятёрки (5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125, ...). Он заметил одну любопытную закономерность: при переходе от n -й степени к $n+1$ -й увеличивается либо количество цифр у степени двойки, либо количество цифр у степени пятёрки — но не одновременно! Докажите или аргументированно опровергните наблюдение Андрея.

4. И ещё одно интересное свойство заметил Андрей: 2^n начинается с цифры 1 тогда и только тогда, когда 5^{n-1} начинается с цифры 1! Что делать с таким наблюдением — доказывать его или опровергать?

5. Петя написал 50 цифр. Сможет ли Вася написать ещё 50 цифр так, чтобы можно было, используя все эти цифры, составить два числа, одно из которых квадрат другого?

6. Андрей записал в тетрадку натуральные числа n , n^2 , n^3 и n^4 . Оказалось, что в их записи цифры 4, 5, 6, 7, 8, 9 использовались поровну раз, и цифры 0, 1, 2, 3 поровну раз, причем цифра 0 — на один раз больше, чем цифра 4. На какую цифру начинается число n ?