

Остатки

1. Найдите остаток от деления
 - (a) $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2023 \cdot 2024$ на 9;
 - (b) $1008990 + 1008991 + 1008992 + \dots + 1008999$ на 1009;
 - (c) $7! + \frac{22!}{15!}$ на 23.
2. Найдите последнюю цифру числа 7^{7^7} .
3. Найдите все натуральные n такие, что $2^n - n^2$ делится на 7.
4. (a) Докажите, что число 20242023 нельзя представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.
 (b) Докажите, что число 20232022 нельзя представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.
 (c) Докажите, что число 20212026 нельзя представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.
5. Целые числа a, b, c таковы, что $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^k + b^k + c^k$ делится на 6 при всех натуральных нечётных k .
6. Длины всех сторон прямоугольного треугольника – натуральные числа, длины катетов равны a и b .
 - (a) Докажите, что ab делится на 6.
 - (b) Докажите, что ab делится на 12.
7. Десять студентов писали экзамен по курсу дифференциальных уравнений, состоящий из 10 задач. Никакие два студента не решили одинаковое число задач, но каждую задачу решило одинаковое количество студентов. Один из этих десяти студентов решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?
8. Жора и Стёпа делят натуральное число n на все делители числа $n + 1$. Жора записывает неполные частные, а Стёпа – остатки. Докажите, что наборы чисел, выписанные мальчиками, совпадают.