

Формула Пика

В этом листочке рассматриваются многоугольники, у которых все вершины находятся в узлах клетчатой решётки.

Формула Пика. Площадь многоугольника, все вершины которого находятся в узлах решётки, выражается формулой $S = n + k/2 - 1$, где n — количество вершин внутри многоугольника, k — количество вершин на границе многоугольника.

1. (a) Докажите формулу Пика для прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки.

(b) Докажите формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, параллельными линиям сетки.

(c) Пусть многоугольники A и B имеют общую сторону, а других общих точек не имеют. Пусть для этих многоугольников выполнена формула Пика. Докажите, что она выполнена и для их объединения.

(d) Пусть многоугольники A и B имеют общую сторону, а других общих точек не имеют. Пусть для многоугольников A и $A \cup B$ выполнена формула Пика. Докажите, что она выполнена и для B .

(e) Докажите, что формула Пика выполнена для любого треугольника.

(f) Докажите формулу Пика в общем случае.

2. В треугольнике ABC вершины имеют целые координаты. На сторонах треугольника нет больше ни одного узла, а внутри есть единственный узел O . Докажите, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC .

3. В треугольнике ABC вершины имеют целые координаты. Внутри этого треугольника есть ровно два узла X и Y (но могут быть ещё узлы на границе). Прямая XY пересекает стороны AB и BC . Докажите, что $S_{AXC} = S_{AYC}$.

4. На клетчатой доске нарисован отрезок AB с вершинами в узлах, внутри которого нет других узлов. Докажите, что найдётся узел C , такой что площадь треугольника ABC равна $1/2$.

5. Все узлы клетчатой решётки покрасили в шахматном порядке. Из них выбрали три одноцветных узла, не лежащих на одной прямой. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в этих узлах является целым числом.

6. В узлах клетчатой решётки даны пять точек A , B , C , D и E , никакие три из которых не лежат на одной прямой.

(a) Докажите, что существует по меньшей мере один треугольник с вершинами в этих точках с целочисленной площадью.

(b) Докажите, что существует по меньшей мере три треугольника с вершинами в этих точках с целочисленной площадью.

7. На клетчатую доску положили квадрат со стороной n (не обязательно по линиям сетки). Докажите, что он покрывает не более $(n + 1)^2$ узлов.