

Определение. Ориентированный или неориентированный граф называется *эйлеровым*, если существует путь по всем рёбрам.

Признак. Если в графе две нечетные вершины, то он является эйлеровым.

Пример:. Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист:

- (а) не с него начал и не на нём закончил?
- (b) с него начал, но не на нём закончил?
- (с) с него начал и на нём закончил?

1. Любой ли связный граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, если по каждому ребру разрешается проводить ровно два раза?

2. При каких n правильный n -угольник со всеми его диагоналями можно нарисовать не отрывая карандаша?

3. На плоскости нарисованы несколько окружностей, образующих связную фигуру. Докажите, что её можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги.

4. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n - 1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.

5. Найдите в графе Петерсена циклы длины 5, 6, 8, 9.

6. Можно ли нарисовать изображенные фигуры одним росчерком? (а) Определите наименьшее число росчерков, которыми можно изобразить каждую фигуру. (б) Докажите, что фигуру можно изобразить одним росчерком, проводя некоторые отрезки больше одного раза. Нарисуйте эти фигуры, проведя как можно меньше отрезков дважды.

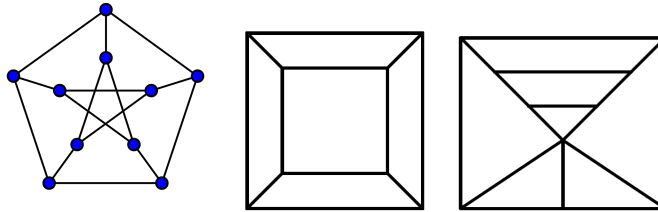


Рис. 1: К задачам 5,6.

7. Дан кусок проволоки длиной 120 см. (а) Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см? (б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?

8. Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратов клетчатого квадрата 4×4 , представить в виде объединения (а) восьми ломаных длины 5; (б) пяти ломаных длины 8?

9. Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы — квадраты со стороной 1, всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и заканчивает свой путь в угловой точке?

10. На занятии 20 школьников решили каждый по 6 задач, причем каждая задача была решена ровно двумя школьниками. Докажите, что можно организовать разбор всех задач так, чтобы каждый школьник рассказал ровно по 3 задачи.

11. Дан правильный 45-угольник. Можно ли так расставить в его вершинах цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?