

Определение. *Деревом* называется связный граф без циклов. Произвольный (не обязательно связный) граф без циклов называется *лесом*. Вершина графа называется *висячей*, если ее степень равна 1.

Теоремы на разбор. (а) Из любого связного графа можно выделить дерево, содержащее все его вершины (остовное дерево); (b) В связном графе с n вершинами содержится как минимум $n - 1$ ребро.

1. Найдите все деревья с пятью вершинами.
2. Докажите, что граф, в котором n вершин, является деревом тогда и только тогда: (а) когда любые две его вершины соединены единственным путем (в пути не повторяются вершины); (b) когда он связный и имеет $n - 1$ ребро; (с) когда он не имеет циклов и имеет $n - 1$ ребро.
3. В графе все вершины имеют степень равную трём. Докажите, что в графе есть цикл.
4. В дереве степени всех вершин нечетные. Докажите, что более половины его вершин висячие.
5. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы по оставшимся дорогам из каждого города можно было проехать в каждый?
6. Докажите, что в любом связном графе есть вершина, при удалении которой граф остается связным.
7. Ярый противник волейбола Миша по одной перерезает веревочки сетки, имеющей вид прямоугольника $m \times n$. Какое наибольшее количество веревочек он может разрезать до того, как сетка распадется на куски.

8. В стране $n > 2$ городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что между любыми двумя городами есть воздушный путь. Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более $2n - 4$ перелетов.

9. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

10. Выбежав после уроков во двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что школьники из одной команды друг в друга снежками не кидали.

11. У Царя Гвидона было 5 сыновей. Среди его потомков 100 имели каждый ровно по 3 сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?