

Пример. Докажите, что $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Докажите следующие тождества:

(a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

(b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n - 1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

2. Пусть F_i – i -е число Фибоначчи. Докажите тождества:

(a) $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$

(b) $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

3. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ – целое число при всех натуральных n .

4. Среди 3^{2024} монет ровно одна фальшивая – она легче настоящих. Докажите, что за 2024 взвешивания на чашечных весах можно определить фальшивую монету.

5. На плоскости проведены 2024 прямые, которые делят плоскость на несколько частей. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две части, имеющие общую сторону, были раскрашены в два цвета.

6. В лагерь приехали n человек, никакие два из которых не знакомы между собой. Докажите, что можно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых.

7. В группе каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой. При этом мальчик счастлив, если в аудитории находится нечётное число его друзей. Докажите, что преподаватель может пригласить в аудиторию не менее половины группы так, чтобы все мальчики были счастливы.

Определение. Триангуляцией многоугольника называется его разбиение на треугольники. Правильной триангуляцией мы будем называть такую триангуляцию, при которой вершины треугольников разбиения являются вершинами исходного многоугольника.

8. (a) Докажите, что в любом многоугольнике можно провести диагональ, полностью находящуюся внутри многоугольника.

(b) Докажите, что у любого многоугольника есть правильная триангуляция.