

Инварианты

Вводная. Часто в задаче описывается процесс, который может протекать разными способами. Как доказать, что какую-либо конфигурацию нельзя получить этим процессом? Обычно используется *инвариант* — величина, которая не меняется в этом процессе.

1. (а) Набор чисел (a, b, c) каждую секунду заменяется на набор $(a + b - c, a + c - b, b + c - a)$. Изначально имеется набор $(2021, 2023, 2024)$. Может ли через несколько секунд получиться набор $(2022, 2024, 2025)$?

(б) Набор чисел (a, b, c) каждую секунду заменяется на набор $(\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a})$. Изначально имеется набор $(1703, 1812, 1862)$. Может ли через несколько секунд получиться набор $(1704, 1811, 1860)$?

2. На доске написано 10 знаков $+$ и 15 знаков $-$. За один ход разрешается стереть два знака и записать на их место $+$, если они были одинаковыми и $-$, если они были разными. Какой знак окажется на доске после 24 ходов?

3. В вольере оказалось несколько новорождённых ящеров массой 1 г каждая. Каждый день ящеры прибавляют в массе по 1 г. Иногда они встречаются. Если встречаются разнополые ящеры, то они откладывают яйцо, из которого через сутки вылупляется новорождённый ящер массой 1 г. Если встречаются однополые ящеры, то больший съедает меньшего, прибавляя его массу к своей. Если эти ящеры одинаковой массы, они просто расползаются восвояси. Может ли через некоторое время остаться один здоровенный ящер?

4. На каждой клетке шахматной доски 8×8 написано число. За ход можно выбрать замкнутый несамопересекающийся путь хромой ладьи (т.е. ладьи, которая может ходить только на 1 клетку за ход) и прибавить к числам на всех клетках этого пути 1. Можно ли сделать все числа равными, если изначально:

(а) в одной угловой клетке стоит 1, в остальных клетках — нули,

(б) на одной из главных диагоналей на всех клетках написано 1, на всех остальных клетках написан 0.

5. Семеро рыбаков стоят по кругу. У рыбаков есть профессиональная привычка преувеличивать числа. Каждый рыбак имеет *меру вранья* (каждый свою, целочисленную) — во сколько раз названное рыбаком число больше истинного значения. Например, если рыбак с мерой вранья 3 поймает две рыбины, то он скажет, что поймал шесть рыб. На вопрос: «Сколько рыб поймал твой левый сосед?», последовали ответы (не обязательно в том порядке, в котором сидят рыбаки) 12, 12, 20, 24, 32, 42 и 56. На вопрос: «Сколько рыб поймал твой правый сосед?» шестеро рыбаков ответили 12, 14, 18, 32, 48, 70. Что ответил седьмой?

6. По кругу стоят, чередуясь, зайки с котиками, по 222 штуки каждого вида. Зайка умеет превращать своих соседей (заек в котиков, котиков в заек), но может это делать лишь с обоими соседями одновременно. Котики превращать соседей не умеют. Можно ли добиться расстановки, в которой стоят подряд 222 зайки, а затем 222 котика?

7. На доске написана одна «1», две «2», три «3», ..., n чисел « n ». Разрешается стереть три числа x , y , z и написать число $x + y - z$. Может ли после некоторого количества таких операций на доске остаться только одно число 0?

8. 120 рыцарей устроили турнир на выбывание: в каждом поединке участвуют два рыцаря, проигравший выбывает из турнира. Согласно правилам, все поединки проходят по очереди, и в каждом поединке должны участвовать два рыцаря, которые к началу этого поединка участвовали суммарно в четном числе поединков. Может ли в результате турнира определиться единственный рыцарь-победитель?

9. В Тихом Омуте может водиться два вида рыб: мешкороты и живоглоты. Когда одна рыба съедает другую, у нее вырастает одна колючка. Рыба может съесть рыбу того же вида, если у этих двух рыб в сумме четное число колючек; рыба может съесть рыбу другого вида, если у них в сумме нечетное число колючек.

Ученые запустили в пустой Омут новорожденных рыб без единой колючки: 100 мешкоротов и 200 живоглотов. Через некоторое время в Тихом Омуте осталась всего одна рыба, у которой оказалось 55 колючек. Какого она вида?