

Проиграл — пойми, почему!

Братья Андрей и Миша Ивановы играют в игру. Андрей загадывает число N , имеющее ровно 7 простых делителей. Миша придумывает гладкое пятимерное многообразие, описываемое формулой степени не больше чем N^2 . Андрей указывает 5 точек на этом многообразии и объявляет длины не более чем 7 отрезков, соединяющих эти точки в пространстве \mathbb{R}^{25+1} . Если выбранные точки вместе с указанными Андреем отрезками образуют второпорядково жесткую структуру, то побеждает Миша. В противном случае мальчики меняются местами: Андрей придумывает другое гладкое многообразие, проходящее через эти пять точек, и Миша указывает пять точек на нем. Игра продолжается пока, либо у кого-то из мальчиков не получилась жесткая структура, либо не прошло 1003 ходов — тогда побеждает Миша. В зависимости от N назовите фамилию победителя при правильной игре. Ответ объясните.

(Олимпиада «Математика НОН-СТОП», 4 класс, 2019 год)

Основная идея. Выясните, при каких позициях вы проигрываете. Это может быть полный анализ ситуации (выигрышные и проигрышные позиции), а может и частичный — иногда достаточно понять, в какую ситуацию точно не нужно попадать, чтобы не проиграть.

1. На пляже есть куча из 100 камней. За ход можно взять один или несколько камней, но не более трети кучи. Проигрывает тот, кто не может походить (т. е. перед его ходом осталось два камня). Кто выиграет при правильной игре?

2. Дано число $n > 10$ такое, что $n - 1$ не делится на 4. За ход из числа можно вычесть любой его делитель, отличный от самого числа, но с одним ограничением: игрок не может вычесть нечётный

делитель, если по правилам возможно вычесть чётный (тем самым из 2 можно вычесть 1, а из 4 — нельзя). Проигрывает тот, у кого нет хода (т. е. получивший 1 выигрывает). При каких n выиграет первый, а при каких — второй?

3. Дано n спичек. За ход разрешается брать любое количество спичек, которое является степенью простого числа (в т.ч. 1 или простое число). Проигрывает тот, у кого нет хода. При каких n выиграет первый, а при каких — второй?

4. На очень большой доске записано натуральное число $100 \dots 000$ (2024 нуля). Перс и Викинг по очереди делают ходы, начинает Перс. Каждый игрок может стереть написанное на доске число и заменить его на меньшее число, не являющееся его делителем. Игрок, который не может этого сделать, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, как бы ни ходил другой?

5. На поле стоят 2024 столба. Перс и Викинг по очереди соединяют столбы проводами (за ход соединяются какие-то два столба; нельзя соединять уже соединённые столбы). Начинает Перс. Выигрывает тот, кто первым получит какой-то цикл. Кто выиграет при правильной игре?

6. На листе бумаги отмечены 1001 точка. Перс и Викинг по очереди проводят между этими точками рёбра. Начинает Перс. Проигрывает тот, кто получит связный граф. Кто выиграет при правильной игре?

7. На листе бумаги нарисован выпуклый 1001-угольник. Перс и Викинг по очереди проводят в нём диагонали. Начинает Перс. Разрешается провести только диагонали, которые пересекают чётное число уже проведённых диагоналей. Проводить дважды одну и ту же диагональ нельзя. Кто выиграет при правильной игре?

8. В вазе лежит $1000!$ конфет. За один ход можно съесть n конфет, если число n имеет не более 100 делителей (включая 1 и само себя). Проигрывает тот, кому становится нечего есть. Кто выиграет при правильной игре?