

Применение представления НОДа

1. Докажите, используя только определение делимости и линейное представление НОДа, что если  $p$  — простое число, и  $ab:p$ , то  $a:p$  или  $b:p$

2. Докажите, используя только определение делимости и линейное представление НОДа, что

(a) Что любое число представляется в виде произведения простых.

(b) Что разложение на простые определяется однозначно, с точностью до перестановки сомножителей.

3.  $a$  и  $b$  — взаимно просты натуральные числа. Докажите, что любое число (a)  $n > ab - a$  (b)  $n > ab - a - b$ , можно записать в виде  $n = xa + yb$ , где  $x, y$  целые неотрицательные коэффициенты.

4. Целые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенству  $15x - 41y = 1$ .

(a) Найдите одно решение. (b) Какое наименьшее положительное значение может принимать величина  $y - x$ ? (c) найдите все решения уравнения.

5. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде отношения седьмой степени натурального числа к пятой степени натурального числа.

6. Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдаёт новую карточку: прочитав карточку с парой  $\{m; n\}$ , первый автомат выдаёт карточку  $\{m - n; n\}$ , второй — карточку  $\{m + n; n\}$ , третий — карточку  $\{n; m\}$ . Пусть первоначально имеется карточка с парой чисел  $\{20; 11\}$ . Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить из неё карточку (a)  $\{12; 21\}$ ; б)  $\{31; 13\}$ ?

7. Китайский император выстроил своё войско в несколько рядов. Оказалось, что если они стоят в 7 рядов, то остаётся 5 человек, если в 11 рядов, то остаётся 4, если в 13 рядов, то остаётся 9 человек. Найдите сколько человек было в армии, если известно, что их не более 1000.