

Матбой Pro 6 – Обычная группа 7

1. В государстве десять городов, соединённых десятью дорогами по кругу, и ещё один город (столица), связанный дорогами со всеми. По каждой дороге надо проложить либо троллейбусный, либо трамвайный маршрут так, чтобы, выбрав любой вид транспорта, можно было, пользуясь только им, из любого города добраться до любого другого. Сколькими способами это можно сделать?

2. Найдите наименьшее натуральное число n , такое, что сумма цифр числа n равняется сумме цифр числа $11n$.

3. Петя составил из карточек с числами $1, 2, \dots, 12$ шесть правильных дробей. Могла ли сумма всех дробей Пети оказаться целой?

4. Школьник последовательно выписывает цифры, каждый раз по своему усмотрению выбирая от 1 до 7. Докажите, что рано или поздно он получит составное число.

5. На столе стоят n^2 банок, образуя квадрат $n \times n$ ($n > 1$). Известно, что в каждом вертикальном ряду, в каждом горизонтальном ряду и двух диагональных рядах общий объем воды в банках равен 1 литру. При каких n можно однозначно определить суммарный объем воды в четырех угловых банках?

6. Два очень хитрых ЛМШонка решили удивить своего преподавателя. Преподаватель выбирает 16 пронумерованных листочков из 30, пройденных на смене, и отдает их первому хитрому ЛМШонку. Тот, в свою очередь, выбирает два листочка. Преподаватель добавляет к этой паре еще один листочек из тех, которые у него остались. Задача второго хитрого ЛМШонка отгадать, какой листочек добавил преподаватель. Смогут ли хитрые ЛМШата договориться заранее, чтобы при любых действиях преподавателя у них все получилось?

7. Всего в ЛМШ приехало 198 ЛМШат-математиков. Все имеют разный рост и размер ноги (они не обязательно пропорциональны). Но экспериментальным путем выяснили, что для любых 100 детей самый высокий ЛМШонок имеет самый большой размер ноги. Докажите, что можно выбирать 100 ЛМШат, чтобы самый низкий из них имел самый маленький размер ноги.

8. За столом собрались 4 жителя острова рыцарей и лжецов. 1-й: «Лжецов за этим столом больше, чем рыцарей.» 2-й: «Лжецов за этим столом меньше, чем рыцарей.» 3-й: «Рыцарей и лжецов за этим столом поровну.» 4-й: «По первым трем высказываниям невозможно определить, рыцарь я или лжец.» Кто есть кто?