

Деревья

Определение. (а) **Лесом** называется граф без циклов.
(б) **Деревом** называется связный граф без циклов.

Определение. Пусть G — связный граф. Подграф T графа G называется **остовным деревом** графа G , если подграф T является деревом и содержит все вершины графа G .

Определение. Вершина степени 1 называется **висячей** или **листом**.

Лемма. В любом дереве, в котором более одной вершины, найдётся хотя бы две висячие вершины.

Теорема. (Главный критерий дерева)

- (с) В дереве на n вершинах ровно $n - 1$ ребро.
- (d) Если в связном графе на n вершинах ровно $n - 1$ ребро, то это дерево.

Теорема. (Не главный критерий дерева)

Пусть G — это граф на n вершинах. Граф G является деревом тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

- (e) G — связный граф, в котором каждое ребро — мост;
- (f) в графе G любые две вершины связаны ровно одним путем;
- (g) в G ровно $n - 1$ ребро и нет циклов;
- (h) в G нет циклов и при добавлении любого ребра образуется цикл;
- (i) в G ровно $n - 1$ мост.

1. Можно ли покрасить рёбра куба в красный и синий цвета так, чтобы из любой вершины можно было добраться до любой другой по рёбрам любого из цветов?

2. Схема метро состоит из нескольких линий, на каждой линии — несколько станций, некоторые станции являются пересадочными на другие линии. С любой станции можно добраться до любой другой. Докажите, что можно закрыть на ремонт целую линию так, чтобы связность оставшейся схемы метро сохранилась.

3. У Царя Гвидона было 5 сыновей. Среди его потомков 100 имели каждый ровно по 3 сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

4. Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

5. В стране каждый город соединён с тремя другими автобусным маршрутом. Изначально все маршруты были государственными. Часть маршрутов передали двум частным компаниям. Теперь, чтобы проехать по любому замкнутому маршруту, требуются услуги обеих частных компаний. Докажите, что найдётся город, из которого не выехать на государственных автобусах.

6. В каждой клетке доски 10×10 сидит по одному кролику. Между кроликами, находящимися в соседних по сторонам клетках, находятся перегородки, которые можно убирать. Какое наименьшее количество перегородок необходимо убрать, чтобы (а) любой кролик смог сходить в гости к любому другому кролику, (б) проходя по пути не более через 17 клеток (не считая начальной и конечной)?

7. В племени Мамуа используется 14 языков, причём каждый мамуас знает пять из них. Мамуасы уважают друг друга, если могут поговорить между собой хотя бы на двух языках. В понедельник вождь племени узнал Очень Важную Новость. Каждый мамуас, узнав новость, на следующий день делится ей со всеми, кого уважает. В понедельник следующей недели воин Мумбо все еще не знал Очень Важную Новость. Докажите, что и в следующий вторник он не узнает этого.