

### Формула Пика

**Теория.** (а) В многоугольнике (кроме треугольника) можно провести диагональ, которая проходит внутри многоугольника и не пересекает его сторон (не считая концов диагонали).

(b) Многоугольник можно разрезать на треугольники диагоналями, которые не пересекаются со сторонами и друг с другом (не считая своих концов). При таком разрезании  $n$ -угольника на треугольники получается  $n - 2$  треугольника.

(с) сумма углов  $n$ -угольника равна  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

Далее рассматриваются многоугольники, у которых все вершины находятся в узлах клетчатой решётки.

**Формула Пика.** Площадь многоугольника, все вершины которого находятся в узлах решётки, выражается формулой  $S = n + k/2 - 1$ , где  $n$  — количество вершин внутри многоугольника,  $k$  — количество вершин на границе многоугольника.

1. (а) Докажите формулу Пика для прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки.

(b) Докажите формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, параллельными линиям сетки.

(с) Пусть многоугольники  $A$  и  $B$  имеют общую сторону, а других общих точек не имеют. Пусть для этих многоугольников выполнена формула Пика. Докажите, что она выполнена и для их объединения.

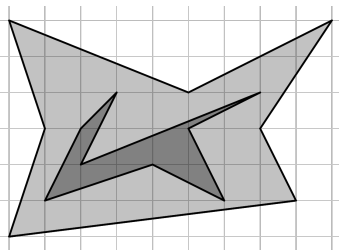
(d) Пусть многоугольники  $A$  и  $B$  имеют общую сторону, а других общих точек не имеют. Пусть для многоугольников  $A$  и  $A \cup B$  выполнена формула Пика. Докажите, что она выполнена и для  $B$ .

(е) Докажите, что формула Пика выполнена для любого треугольника.

(f) Докажите формулу Пика в общем случае.

2. 2024-угольник разрезали на треугольники непересекающимися диагоналями. Сколько получилось треугольников разбиения?

3. Найдите по формуле Пика площадь светло-серой части многоугольника с вершинами в узлах сетки.



4. Можно ли клетчатый квадрат  $50 \times 50$  разбить на 15 равных многоугольников с вершинами в узлах сетки?

5. Дан клетчатый прямоугольник  $11 \times 9$  и замкнутая несамопересекающаяся ломаная, вершинами которой являются центры клеток, и все центры клеток лежат на этой ломаной. Чему равна площадь фигуры, которую эта ломаная ограничивает?

6. Целочисленные точки на плоскости раскрашены в шахматном порядке. Рассмотрим многоугольник с вершинами в точках одного цвета. Докажите, что его площадь является целым числом.

7. Известно, что середина отрезка, соединяющего точки  $A$  и  $B$  с координатами  $(x_A, y_A)$  и  $(x_B, y_B)$ , имеет координаты  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$  (a) Докажите, что среди любых пяти узлов сетки можно выбрать два таких, что середина отрезка, соединяющего эти узлы, тоже лежит в узле сетки. (b) Раскрасим узлы квадратной сетки в четыре цвета так, чтобы узлы каждого цвета были узлами сетки с в два раза большей стороной (четырёхцветный горох). Докажите, что вершины (на исходной сетке) треугольника площади  $1/2$  раскрашены в разные цвета. (c) Дан выпуклый пятиугольник с вершинами в целых точках. Докажите, что его площадь хотя бы  $5/2$ .

8. На юбилей ЛМШ испекли математический пирог — многоугольник с вершинами в узлах квадратной сетки со стороной 1. Голодный шестиклассник выел несколько многоугольников с вершинами в узлах. У оставшегося объедка на границах (в сумме на внутренних и внешних) 72 узла, внутри 49 узлов, площадь равна 88. Найдите количество дыр в пироге.