

## Алгоритм Евклида

**Алгоритм Евклида.** Для того, чтобы найти НОД двух целых чисел  $a \geq b$ , можно выполнить несколько делений с остатком:

$$a = b \cdot q_1 + r_1$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$$

...

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n + 0$$

На каждом шаге большее число заменяется на остаток от деления на меньшее. Так продолжается, пока очередной остаток не окажется нулевым ( $r_{n+1} = 0$ ). Тогда  $r_n = \text{НОД}(a, b)$ .

**Линейное представление НОД.** Для любых целых  $a$  и  $b$  существуют целые  $x$  и  $y$  такие, что  $ax + by = \text{НОД}(a, b)$ .

1. Найдите  $\text{НОД}(\underbrace{77 \dots 77}_{100}, \underbrace{77 \dots 77}_{14})$ .
2. Найдите какие-нибудь целые  $x$  и  $y$  такие, что  $2022x + 52y = 2$ .
3. Докажите, что при различных натуральных  $k$  и  $n$  числа  $2^{2^n} + 1$  и  $2^{2^k} + 1$  взаимно просты.
4. Докажите, что для всех натуральных  $n$  и  $m$

$$\text{НОД}(2024^n - 1, 2024^m - 1) = 2024^{\text{НОД}(n, m)} - 1$$

5. Дан клетчатый прямоугольник  $m \times n$ . Каждую секунду от него по клеточкам отрезают квадрат с максимально возможной стороной. Какую сторону будет иметь квадрат, который останется последним?

6. Глеб Игоревич организовал раздачу печенья в параллели М6. На раздачу пришли 28 кировчан и 37 не кировчан, причём Глеб Игоревич раздавал печенье поровну всем кировчанам и поровну – не кировчанам. Оказалось, что существует ровно один способ такой раздачи. Какое наибольшее количество печенья могло быть у Глеба Игоревича?

7. (a) Докажите, что при всех натуральных  $n$  числа  $F_n$  и  $F_{n+1}$  взаимно просты.

(b) Докажите, что при всех натуральных  $n$  и  $m$  верно равенство

$$F_{n+m+1} = F_n \cdot F_m + F_{n+1} \cdot F_{m+1}$$

(c) Докажите, что при всех натуральных  $n$  и  $m$  верно равенство

$$\text{НОД}(F_n, F_m) = F_{\text{НОД}(m, n)}$$