

Пример. На доске написано 2024 числа. Оказалось, что сумма любых двух написанных на доске чисел также написана на доске. Какое наибольшее количество ненулевых чисел может быть написано?

Пример. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

1. Есть несколько камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение: «Любые два камня вместе тяжелее любого одного другого?»

2. В гости пришло 100 человек в шляпах, причём у всех гостей размеры шляп разные. К концу вечера гости начали расходиться по одному, надевая любую шляпу, в которую они могли влезть. В какой-то момент обнаружилось, что ни один из оставшихся гостей не может найти себе шляпу, чтобы уйти. Какое максимальное число гостей могло остаться?

3. Для четырёх различных целых чисел подсчитали все их попарные суммы и попарные произведения. Полученные суммы и произведения выписали на доску. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться на доске?

4. Есть 20 различных натуральных чисел, не превосходящих 100. Докажите, что среди их попарных разностей есть три одинаковые.

5. Есть 2024 различных чисел. Докажите, что их можно расставить по кругу так, чтобы все суммы соседних чисел были различными.

6. В ряд лежит несколько яблок. Известно, что масса любых двух соседних отличается не больше, чем на 1 г. Докажите, что если упорядочить их по весу и выложить в ряд, то снова массы двух соседних будут отличаться не более, чем на 1 г.

7. В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причем в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

8. Девять чисел таковы, что сумма каждых четырёх из них меньше суммы пяти остальных. Докажите, что все числа положительные.

9. Солдаты построены в две шеренги по 1012 человек, так что каждый солдат из первой шеренги не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги. В шеренгах солдат выстроили по росту. Докажите, что после этого каждый солдат из первой шеренги также будет не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги.

10. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.