

Принцип крайнего

Пример. Шахматная доска разбита на домино. Докажите, что какая-то пара домино образует квадратик 2×2 .

Пример. По кругу выписаны несколько чисел, каждое равно полусумме двух соседних. Докажите, что все числа равны.

1. По кругу записаны 132 неотрицательных числа: каждое равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 2024. Найдите эти числа.

2. Можно ли на клетчатой плоскости расставить конечное количество коней так, чтобы каждый бил (a) хотя бы пять других; (b) хотя бы четырёх?

3. Чеширский Кот ходит по клетчатой доске на одну клетку по вертикали или горизонтали. Попав в очередную клетку, он либо красит себя в цвет клетки, либо красит клетку в свой цвет. Белый Кот оказался на чёрной доске размера 2024×2024 . Сможет ли он раскрасить её в шахматном порядке?

4. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 20 в строку так, чтобы в каждой паре соседних одно из чисел делилось на другое?

5. Амелия выписала 10 различных натуральных чисел по кругу и поделила каждое число с остатком на следующее за ним по часовой стрелке. Могут ли все получившиеся остатки быть одинаковыми?

6. Кубик Рубика $3 \times 3 \times 3$ надо распилить на единичные кубики. После распила части можно перекладывать и прикладывать так, чтобы можно было пилить несколько частей одновременно. Докажите, что всё равно понадобится не менее 6 прямых распилов.

7. Каждый из учеников класса в течение дня один раз приходил в компьютерный класс, находился там некоторое время, а затем

уходил. Известно, что каждый ученик встретился со всеми другими учениками. Докажите, что в некоторый момент времени все ученики были в компьютерном классе.

8. За первую пятидневку некоторые ребята из М6 успели познакомиться. Оказалось, что каждые два из них, имеющие в отряде одинаковое количество друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдётся ученик М6, который имеет ровно одного друга из отряда.

9. В большом турнире матбоёв участвовало 10 команд. Каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. Оказалось, что ничьих в турнире не было. Докажите, что найдутся четыре команды А, В, С и D такие, что А выиграла у В и С, и D выиграла у В и С.

10. Дана таблица $n \times n$, в каждой её клетке записано число, причём все числа различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.