

**Определение.** (а) Эйлеров цикл — это цикл, проходящий по всем рёбрам графа ровно один раз.

(b) Эйлеров путь — это путь, проходящий по всем рёбрам графа ровно один раз, и в котором начальная и конечная вершины различны.

**Пример.** Имеется группа островов, соединённых мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошёл все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист:

(с) не с него начал и не на нём закончил?

(d) с него начал, но не на нём закончил?

(е) с него начал и на нём закончил?

1. (а) В связном графе существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда нет нечётных вершин.

(b) В связном графе существует эйлеров путь тогда и только тогда, когда вершин нечётной степени ровно две.

*Этим фактом можно пользоваться в дальнейших задачах, даже если Вы не доказали его.*

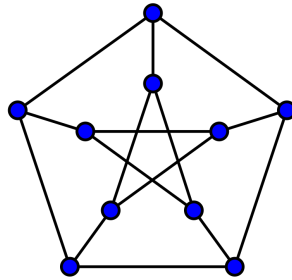
2. Любой ли связный граф можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, если по каждому ребру разрешается проводить ровно два раза?

3. При каких  $n$  правильный  $n$ -угольник со всеми его диагоналями можно нарисовать не отрывая карандаша?

4. На плоскости нарисованы несколько окружностей, образующих связную фигуру. Докажите, что её можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги.

5. Докажите, что связный граф с  $2n$  нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно  $n - 1$  раз и не проводя никакое ребро дважды.

6. Найдите в графе Петерсена циклы длины 5, 6, 8, 9.



7. Дан кусок проволоки длиной 120 см. Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы сложить изготовить каркас куба с ребром 10 см?

8. Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы — квадраты со стороной 1, всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и заканчивает свой путь в угловой точке?

9. Дан правильный 45-угольник. Можно ли так расставить в его вершинах цифры от 0 до 9 так, чтобы для любой пары различных цифр нашлась сторона, концы которой занумерованы этими цифрами?

10. Денис раскладывает колоду из 36 карт по кругу. Каждая карта должна совпадать с одной из своих соседей по масти, а с другой — по достоинству. (a) Докажите, что ему это не удастся. (b) Сможет ли он это сделать, если из колоды убрать всех тузов, королей и дам?

11. На кодовом замке 10 кнопок с цифрами от 0 до 9. Для открытия кодового замка нужно нажать 3 кнопки в определенном порядке (при этом предыдущие нажатия не важны). Докажите, что замок можно наверняка открыть, сделав не более 1002 нажатий.