

Разминка. Некоторые целые числа покрасили в синий цвет. Известно, что числа 17 и 23 покрашены, и если числа a и b покрашены, то числа $a + b$ и $a - b$ тоже покрашены. Какие числа не покрашены?

1. Пусть a и b — натуральные числа и $a > b$. Докажите, что
 - (a) если a и b делятся на d , то число $a - b$ тоже делится на d ;
 - (b) если $a - b$ и b делятся на d , то число a тоже делится на d ;
 - (c) $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$.
2. Найдите $\text{НОД}(607, 477)$, $\text{НОД}(343, 246)$ с помощью алгоритма Евклида.
3. Вася вырезал из бумаги прямоугольник $m \times n$ клеток, а потом пришел Петя, который начал отрезать от этого прямоугольника квадраты наибольшего возможного размера. Что в итоге осталось у Пети?
4. Пусть n — натуральное число. Докажите, что дробь $\frac{12n + 1}{30n + 2}$ несократима.
5. Пусть n — натуральное число. Найдите $\text{НОД}(2n + 3, n + 7)$.
6. Найдите все целые n , при которых $\frac{5n + 13}{4n + 9}$ — целое число.
7. Найдите $\text{НОД}(\underbrace{77 \dots 77}_{100}, \underbrace{77 \dots 77}_{14})$
8. Мальчик и девочка измерили одно и то же расстояние в 143 метра шагами. Так как длины их шагов различны, то их следы совпали 20 раз. Шаг девочки 55 см. Шаг мальчика больше шага девочки, но меньше 75 см. Найдите длину шага мальчика.
9. Докажите, что $\text{НОД}(3^n - 1, 3^m - 1) = 3^{\text{НОД}(n, m)} - 1$
10. Докажите, что числа $2^{2^k} + 1$ и $2^{2^n} + 1$ взаимно просты.