

Список билетов к теоретическому зачёту

## Определения

- |                                |                          |
|--------------------------------|--------------------------|
| (a) Делимости                  | (n) Простой цикл         |
| (b) Делимости с остатком       | (o) Связный граф         |
| (c) Сравнения по модулю        | (p) Подграф              |
| (d) Полная система остатков    | (q) Компонента связности |
| (e) Алгоритм Евклида           | (r) Мост                 |
| (f) Линейное представление НОД | (s) Лес                  |
| (g) Граф                       | (t) Дерево               |
| (h) Смежные вершины            | (u) Остовное дерево      |
| (i) Степень вершины            | (v) Висячая вершина.     |
| (j) Полный граф                | (w) Эйлеров цикл         |
| (k) Путь                       | (x) Эйлеров путь         |
| (l) Цикл                       | (y) Двудольный граф      |
| (m) Простой путь               |                          |

## Теоремы

1. Свойства сравнения по модулю
2. Равносильность двух определений полной системы остатков
3. Теорема о полной системе остатков кратных  $a$
4. Корректность алгоритма Евклида.
5. Лемма Гаусса
6. Основная теорема арифметики
7. Теорема Сильвестра
8. решение системы сравнений
9. решения Диофантовых уравнения
10. Теорема о двух висячих вершинах
11. Главный критерий дерева
12. Не главные критерии дерева
13. Критерий Эйлера цикла и пути
14. Критерий двудольности
15. Лемма о диагонали
16. Формула Пика

## Важные задачи

1. Однажды Петя наловил на пруду 49 лягушек и посадил их в клетки квадрата  $7 \times 7$ . По его команде все лягушки перепрыгнули в соседнюю по стороне клетку. Какое наибольшее количество клеток могло оказаться свободными?

2. На шахматную доску по очереди выставляются короли так, что каждый новый поставленный король бьёт не более одного выставленного на тот момент на доску короля. Какое наибольшее количество королей можно выставить на доску по таким правилам?

3. Докажите, что среди чисел, записываемых одними единицами, есть число, которое делится на 533239, причём для записи этого числа понадобится не более 533240 единиц.

4. В ряд стоят мальчики и девочки. Каждого мальчика спросили, сколько справа от него девочек, а каждую девочку — сколько слева от неё мальчиков. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, совпадает с суммой чисел, названных девочками.

5. На доске написано несколько натуральных чисел. Петя посчитал, сколько на доске написано чисел, и записал результат. Затем Петя посчитал, сколько чисел больших 1 первоначально было выписано на доске, и записал результат. Потом он посчитал, сколько чисел больших 2 первоначально было выписано на доске, и записал результат. И так далее. Докажите, что сумма выписанных Петей чисел равна сумме первоначальных чисел.

6. (a) Докажите, что если  $a \equiv b \pmod{n}$ , то  $a \cdot m \equiv b \cdot m \pmod{n \cdot m}$ ,  
(b) Докажите, что если  $a \cdot m \equiv b \cdot m \pmod{n \cdot m}$ , то  $a \equiv b \pmod{n}$

7. Пусть  $m$  и  $n$  взаимно просты ( $\text{НОД}(m, n) = 1$ ).  
(a) Докажите, что если  $a \equiv b \pmod{n}$ , то  $a \cdot m \equiv b \cdot m \pmod{n}$   
(b) Докажите, что если  $a \cdot m \equiv b \cdot m \pmod{n}$ , то  $a \equiv b \pmod{n}$

8. Докажите, что  $\text{НОД}(3^n - 1, 3^m - 1) = 3^{\text{НОД}(n, m)} - 1$

9. За день в библиотеке побывало 100 читателей, каждый по разу. Оказалось, что из любых трех по крайней мере двое там встретились. Докажите, что библиотекарь мог сделать важное объявление в такие два момента времени, чтоб все 100 читателей его услышали.

10. Обозначим через  $F_n$   $n$ -ое число Фибоначчи (т.е.  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 1$  и  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ). Докажите, что  $\text{НОД}(F_n, F_{n-1}) = 1$ .

11. На витрине в порядке убывания масс лежат 10 фруктов. Известно, что самый вкусный ровно вдвое легче всех остальных вместе взятых. За какое наименьшее число взвешиваний можно его найти?

12. Какое минимальное число различных попарных сумм у 10 различных чисел?
13. В любом графе на 6 вершинах найдётся либо три точки попарно соединённые рёбрами, либо три точки попарно не соединённые.
14. Из полного графа на 40 вершинах выкинули 38 рёбер. Мог ли граф перестать быть связным?
15. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным.
16. В стране  $n > 2$  городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что между любыми двумя городами есть воздушный путь. Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более  $2n - 4$  перелетов.
17. На какую максимальную степень тройки делится число, десятичная запись которого состоит из  $3^n$  единиц?
18.  $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$
19. Докажите, что  $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$
20. Докажите, что  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ .  $F_i$  — это  $i$  число Фибоначчи.
21. Пусть  $x + \frac{1}{x}$  — целое число. Докажите, что  $x^n + \frac{1}{x^n}$  — тоже целое число для любого натурального  $n$ .
22. Каково наибольшее число ребер в двудольном графе (a) с  $x$  белыми и  $y$  черными вершинами; (b) с  $2n$  вершинами; (c) с  $2n + 1$  вершиной?
23. В орфографическом словарице 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Петя открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой страницы. (a) Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов, на которые можно отвечать только "да" или "нет"? (b) А за меньшее число?
24. Среди 10 монет есть ровно одна фальшивая (легче остальных). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь ее можно наверняка выявить?
25. Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 35-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть два кокосовых ореха. За какое наименьшее число бросков обезьяна может удовлетворить свое любопытство? (Неразбившийся орех можно бросать снова.)