

НОД и Алгоритм Евклида

Определение. *Наибольший общий делитель* нескольких целых чисел — это наибольшее натуральное число, которое делит каждое из них.

Наименьшее общее кратное нескольких целых чисел — это наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из них.

НОД чисел a_1, \dots, a_n обозначают с помощью круглых скобок (a_1, \dots, a_n) . Для НОК используют квадратные скобки $[a_1, \dots, a_n]$.

Теорема. Если простое число p входит в разложение числа a на простые множители в степени α , а в разложение числа b — в степени β , то в (a, b) оно входит в степени $\min(\alpha, \beta)$, а в $[a, b]$ — в степени $\max(\alpha, \beta)$.

Теорема. Для любых $a, b \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $ab = (a, b) \cdot [a, b]$.

Теорема. Для любых $a, b \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $(a, b) = (a - b, b)$.

Пример. Вычислите $(323, 437)$ при помощи алгоритма Евклида.

Пример. Какие значения может принимать $(23n + 5, 11n + 6)$ при целых n .

Пример. Некоторые целые числа покрасили в синий цвет. Известно, что числа 17 и 23 покрашены, и если числа a и b покрашены, то числа $a + b$ и $a - b$ тоже покрашены. Какие числа не покрашены?

1. Вычислите: (a) $[1350, 540, 600, 360]$, (b) $(1350, 540, 600, 360)$.
2. Вычислите: (a) $(607, 477)$; (b) $(4669, 1798)$ при помощи алгоритма Евклида.
3. Для натурального n найдите все значения, которые может принимать: (a) $(n, n + 15)$; (b) $(21n - 4, 14n + 3)$.
4. Вася вырезал из бумаги прямоугольник $m \times n$ клеток, а потом пришел Петя, который начал отрезать от этого прямоугольника квадраты наибольшего возможного размера. Что в итоге осталось у Пети?
5. Найдите $(\underbrace{77 \dots 77}_{100}, \underbrace{77 \dots 77}_{14})$.
6. Известно, что произведение двух натуральных чисел на 15 больше их наибольшего общего делителя. Чему может быть равно большее из чисел?
7. Для любых $a, b, c \in \mathbb{N}$ докажите равенство $(a, b, c) = (a, (b, c))$.
8. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Докажите, что $b \cdot [a, a + b] = (a + b) \cdot [a, b]$.
9. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $[1, 2, \dots, 2n] = [n + 1, \dots, 2n]$.