

НОД и НОК

1. Найдите все такие пары натуральных чисел  $a$  и  $b$ , что

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, b) + 19$$

2. Докажите, что при всех натуральных  $n$  дробь  $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$  несократима.

3. Какое наибольшее количество двузначных составных чисел можно выписать так, чтобы любые два числа были взаимно просты?

4. Среди нескольких последовательных натуральных чисел некоторые – красные, а остальные – синие. Докажите, что сумма НОК всех красных чисел и НОК всех синих чисел не может являться степенью двойки.

5. Докажите, что

$$abc = \text{НОК}(a, b, c) \cdot \text{НОД}(ab, bc, ca) = \text{НОД}(a, b, c) \cdot \text{НОК}(ab, bc, ca)$$

6. Докажите, что если  $ab$  – точный квадрат, то  $a \cdot \text{НОД}(a, b)$  – точный квадрат.

7. Натуральные числа  $a$  и  $b$  выбраны так, что  $\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = a + b$ . Докажите, что  $a$  делится на  $b$  или  $b$  делится на  $a$ .

8. Натуральные числа  $a$  и  $b$  взаимно просты. Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\text{НОД}(2024a + b, 2024b + a)$ .

9. Клетчатый квадрат составили из  $n$  одинаковых  $k$ -клеточных фигурок. Докажите, что его можно разрезать на  $k$  одинаковых  $n$ -клеточных фигурок.

10. По кругу записаны 2023 натуральных числа так, что для любых соседних чисел  $a$  и  $b$  верно  $|a - b| = \text{НОД}(a, b)$ . Найдите наибольшее натуральное число, на которое гарантированно делится произведение этих 2023 чисел.