

Определение. Рассмотрим клетчатую прямоугольную таблицу, из которой вырезаны угловые клетки (зачем?). В каждой клетке этой таблицы поставим по числу. Таковую таблицу назовём гармонической, если число в любой её клетке, не стоящей на краю, является средним арифметическим четырёх чисел в соседних по сторонам клеток. Каёмкой таблицы назовём её клетки первой и последней строки, а также первого и последнего столбца.

1. Докажите, что таблица умножения является гармонической.
2. Обязательно ли любое число во внутренней клетке гармонической таблицы является средним арифметическим четырёх соседей по углам?
3. Таблица умножения — это таблица, в каждой клетке которой записано произведение номера столбца и номера строки. Четыре слона стоят в углах некоторого клетчатого прямоугольника в таблице умножения. Каждый из них сделал ход внутрь прямоугольника — все на одинаковое расстояние. Докажите, что сумма чисел под ними не изменилась.
4. (a) (*Принцип максимума*) Пусть в каёмке гармонической таблицы стоят нули. Докажите, что вся таблица нулевая.
(b) (*Теорема единственности*) В каёмке таблицы стоят некоторые числа. Докажите, что существует не более одной гармонической таблицы с такой каёмкой.
5. (a) Существует ли гармоническая таблица, периодическая по каждой из двух осей, но не постоянная?
(b) Придумайте гармоническую таблицу, периодическую (но не постоянную) по строкам.
6. Доска представляет собой квадрат 100×100 с вырезанными четырьмя угловыми клетками. В каждой клетке доски стоит число, причем каждое число (кроме чисел на границе доски) равно среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. Докажите, что сумма чисел на границе доски равна удвоенной сумме чисел на двух ее диагоналях.