

Определение. Граф называется **двудольным**, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы ребра соединяли только пары вершин разного цвета.

1. Докажите, что дерево является двудольным графом.
2. Докажите, что граф – двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.
3. Каково наибольшее число ребер в двудольном графе (a) с x белыми и y черными вершинами; (b) с $2n$ вершинами; (c) с $2n + 1$ вершиной?
4. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. При этом 17 детей из этого класса любят участвовать в математических боях, а в их классной комнате 15 двухместных парт. Сколько всего ребят в классе?
5. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый лоскут черного цвета граничит только с лоскутами белого цвета, а каждый белый - с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?
6. Можно ли расставить 777 коней на доске 2025×2025 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
7. В графстве из каждого города выходит ровно одна авиалиния и ровно один тоннель метро, причём, покинув город на одном транспорте, можно будет вернуться в него на другом (возможно, после нескольких пересадок в других городах). Докажите, что при путешествии из любого города в какой-то другой город и обратно домой, необходимо будет совершить нечётное число пересадок.
8. (a) На шахматной доске стоит король, который умеет ходить только по белым клеткам. Этот король вышел из какой-то клетки, прогулялся по полю и вернулся на исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

(b) На некоторых белых клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы короли одинакового цвета друг друга не били.

9. На прямоугольной доске нарисованы несколько неперекрывающихся равносторонних треугольников. У каждого есть сторона, параллельная нижнему краю доски. Докажите, что треугольники можно покрасить в два цвета так, чтобы треугольники одинакового цвета не соприкасались по отрезку.