

1. После недавней грозы в Вишкиле решили создать новую электрическую сеть. В лагере установлены $2n$ столбов, некоторые пары столбов соединены проводами. Для того, чтобы поднять настроение школьникам, заказали провода n цветов. Для каждого цвета известно, что от каждого столба выходит не менее n проводов этого цвета, а любая пара столбов соединена не более чем одним проводом этого цвета (но может быть соединена несколькими проводами разных цветов). Докажите, что электрик может выбрать $n - 1$ проводов разных цветов так, чтобы никакие два выбранных провода не имели общего столба.

2. Паша написал по кругу 100 подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. За один шаг стираются три соседних числа a, b, c (стоящих именно в таком порядке), а затем на их место записывается одно число, равное $\frac{ac}{b}$. После 49 шагов остались 2 числа. Могут ли они оказаться равными?

3. В клетках доски 8×40000 (8 строчек, 40 000 столбцов) расставлены целые числа от 1 до 320 000, каждое по одному разу. Докажите, что можно переставить строчки таблицы так, чтобы в каждом столбце числа не стояли в порядке возрастания, если смотреть сверху вниз.

4. Даны 10 натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{10} . Известно, что $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 1000$. Оказалось, что произведение их факториалов $a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_{10}!$ является 10-й степенью натурального числа. Докажите, что все данные числа равны.

5. В ЛМШ 40 корпусов и нет дорог между ними. Игорь Соломонович хочет, чтобы из каждого корпуса выходило нечётное число дорог (каждая дорога соединяет два корпуса). Докажите, что среди способов исполнить желание И.С. тех, в которых общее количество дорог чётно, столько же, сколько и тех, в которых оно нечётно.

6. В классе поровну мальчиков и девочек, всего 24 человека. Каждый мальчик написал, сколько в классе девочек выше его, а каждая девочка написала, сколько в классе мальчиков ниже её. Оказалось, что все написанные числа не меньше четверти числа учеников в классе. Докажите, что суммарный рост девочек в классе больше суммарного роста мальчиков.

7. Натуральное число называется *сбалансированным*, если количество простых чисел в его разложении на простые множители равно количеству цифр в его десятичной записи. Например, 21 является сбалансированным, а 63 — нет. Верно ли, что существует бесконечно много сбалансированных чисел?

8. В треугольной таблице из 16 клеток (см. рисунок) в каждой клетке расположен либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжет. Люди называются соседями, если треугольники с ними имеют общую сторону. Каждый из 16 человек произнес фразу: «Среди моих соседей нечетное число рыцарей». Какое наибольшее число рыцарей может быть в таблице?

