

Индукция 2

**Разминка.** Докажите по индукции, что  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

**Разминка.**  $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$

1. Докажите, что  $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$
2. На полке расставили 100 томов энциклопедии. Разрешается взять несколько подряд идущих томов и переставить их в обратном порядке. Докажите, что такими операциями можно расставить тома по порядку, независимо от того, как их расставили.
3. Последовательность  $a_n$  задана правилом  $a_1 = 1$ , а  $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1$ . Докажите, что  $a_n = 2^n - 1$
4. На столе стоят  $2^n$  стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнивать в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.
5. Докажите, что  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} < 1$ .
6.  $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$
7.  $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
8. Среди  $3^n$  монет 1 фальшивая, она легче остальных. Докажите, что её можно определить за  $n$  взвешиваний.
9. Пусть  $x + \frac{1}{x}$  — целое число. Докажите, что  $x^n + \frac{1}{x^n}$  — тоже целое число для любого натурального  $n$ .