

Формула Пика

В этом листочке рассматриваются многоугольники, у которых все вершины находятся в узлах клетчатой решётки.

Лемма о диагонали. В любом многоугольнике (кроме треугольника) можно провести диагональ, которая целиком лежит внутри многоугольника (не пересекает его сторон).

Формула Пика. Площадь многоугольника, все вершины которого находятся в узлах решётки, выражается формулой

$$S = n + \frac{k}{2} - 1$$

где n — количество вершин внутри многоугольника, k — количество вершин на границе многоугольника.

1. (a) Докажите формулу Пика для прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки.
- (b) Докажите формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, параллельными линиям сетки.
- (c) Пусть многоугольники A и B имеют общую сторону, а других общих точек не имеют. Пусть для этих многоугольников выполнена формула Пика. Докажите, что она выполнена и для их объединения.
- (d) Пусть многоугольники A и B имеют общую сторону, а других общих точек не имеют. Пусть для многоугольников A и $A \cup B$ выполнена формула Пика. Докажите, что она выполнена и для B .
- (e) Докажите, что формула Пика выполнена для любого треугольника.
- (f) Докажите формулу Пика в общем случае.

2. Можно ли клетчатый квадрат 50×50 разбить на 15 равных многоугольников с вершинами в узлах сетки?

3. Дан клетчатый прямоугольник 11×9 и замкнутая несамопересекающаяся ломаная, вершинами которой являются центры клеток, и все центры клеток лежат на этой ломаной. Чему равна площадь фигуры, которую эта ломаная ограничивает?

4. Дан выпуклый пятиугольник с вершинами в целых точках. Докажите, что его площадь хотя бы $5/2$.

5. В треугольнике ABC вершины имеют целые координаты. Внутри этого треугольника есть ровно два узла X и Y (но могут быть ещё узлы на границе). Прямая XY пересекает стороны AB и BC . Докажите, что $S_{AXC} = S_{AYC}$.

6. На клетчатой доске нарисован отрезок AB с вершинами в узлах, внутри которого нет других узлов. Докажите, что найдётся узел C , такой что площадь треугольника ABC равна $1/2$.

7. Все узлы клетчатой решётки покрасили в шахматном порядке. Из них выбрали три одноцветных узла, не лежащих на одной прямой. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в этих узлах является целым числом.

8. В узлах клетчатой решётки даны пять точек A , B , C , D и E , никакие три из которых не лежат на одной прямой.

(a) Докажите, что существует по меньшей мере один треугольник с вершинами в этих точках с целочисленной площадью.

(b) Докажите, что существует по меньшей мере три треугольника с вершинами в этих точках с целочисленной площадью.