

Сравнение по модулю

Определение. Целое число a делится на число b с остатком r ($r < b$), если существует целое число c такое, что $a = b \cdot c + r$.

Обозначение. Если a и b имеют одинаковые остатки при делении на n , то говорят, что они сравнимы по модулю

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Свойства. Докажите, что

- (a) $a \equiv b \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $a - b \div n$;
- (b) Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{n}$;
- (c) Если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$;
- (d) Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $a^k \equiv b^k \pmod{n}$;
- (e) Если $a \cdot m \equiv b \cdot m \pmod{n \cdot m}$, то $a \equiv b \pmod{n}$;
- (f) Пусть m и n взаимно просты ($\text{НОД}(m, n) = 1$). Если $a \cdot m \equiv b \cdot m \pmod{n}$, то $a \equiv b \pmod{n}$.

1. Найдите остаток
 - (a) 11^7 при делении на 8;
 - (b) 9^{512} при делении на 239;
 - (c) 13^{2024} при делении на 7.
2. Может ли сумма трёх последовательных натуральных чисел быть простым числом?
3. Докажите, что любое простое число, большее 3, можно записать в одном из двух видов: $6n + 1$ либо $6n - 1$.
4. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 — простое число или единица.
5. Докажите, что число, состоящее из трех единиц и нескольких девяток (в любом порядке), не является точным квадратом (т. е. квадратом целого числа).
6. Докажите, что каково бы ни было целое число n , среди чисел $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 9$ есть хотя бы одно, взаимно простое с остальными девятью.
7. Найдите всевозможные a и n при которых $a \equiv a + 1 \pmod{n}$.
8. Докажите, что среди чисел, записываемых одними единицами, есть число, которое делится на 533239, причём для записи этого числа понадобится не более 533240 единиц.
9. Докажите, что ни при каком натуральном n число $3^n + 5^n$ не является полным квадратом.
10. Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 — при делении на 3, 2 — при делении на 5, 3 — при делении на 7.