

Основная теорема арифметики. Любое натуральное число, отличное от единицы, единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) можно представить в виде произведения простых множителей.

Следствие. Любое натуральное число $n > 1$ единственным образом представимо в виде $n = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \dots \cdot p_k^{d_k}$, где $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ – простые числа, а d_1, \dots, d_k – некоторые натуральные числа.

1. Можно ли из кирпичей размером $5 \times 4 \times 10$ выложить без пустот стенку в форме параллелепипеда размерами $52 \times 20 \times 24$, если кирпичи нельзя ломать, но можно поворачивать?

2. На доске написаны натуральные числа от 1 до 12. Какое наименьшее количество чисел нужно стереть так, чтобы оставшиеся можно было разбить на две группы с равными произведениями чисел в группе?

3. Существуют ли такие 2024 натуральных числа, что ни одно из них не делится на другое, а произведение каждых двух из них делится на любое из оставшихся чисел?

4. У Ксюши и Полины есть 145 чисел. Ксюша пытается найти среди них 13 чисел, ни одно из которых не делится на другое. Полина же пытается найти среди них такую цепочку из 13 чисел, что каждое следующее число делится на предыдущее. Сможет ли хотя бы одна из девочек добиться своей цели?

5. Можно ли расставить по кругу 2023 различных натуральных числа так, в любой паре соседних чисел отношение большего числа к меньшему было простым числом?

6. Обозначим через $D(n)$ количество различных простых делителей числа n . Докажите, что существует бесконечно много пар

натуральных чисел (a, b) таких, что $a \neq b$ и $D(a+b) = D(a)+D(b)$.

7. Даны натуральные числа a и b , причём $a < 1000$. Известно, что a^{21} делится на b^{10} . Докажите, что a^2 делится на b .

8. На доске выписаны числа $1, 2, \dots, 100$. На каждом этапе одновременно стираются все числа, не имеющие среди нестертых чисел делителей, кроме себя самого. Например, на первом этапе стирается только число 1. Какие числа будут стёрты на последнем этапе?

9. Никита нашёл произведение десяти последовательных трёхзначных чисел. Может ли разложение этого произведения на простые множители содержать больше 23 различных простых чисел?

10. Володя хочет выписать несколько различных натуральных чисел, не превосходящих 2024, так, чтобы произведение любых двух выписанных чисел было бы точным квадратом. Какое наибольшее количество чисел может выписать Володя?