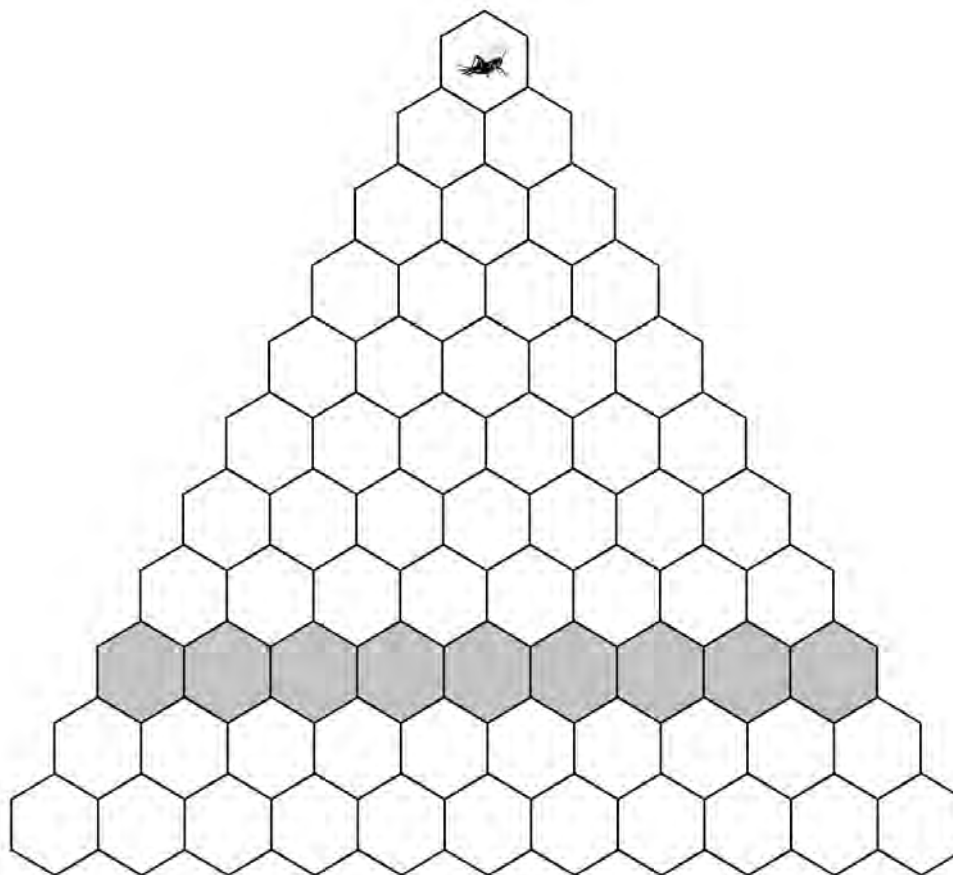


Треугольник Паскаля

Определение. Числом сочетаний из n объектов по k (или C_n^k) называется количество k -элементных подмножеств n -элементного множества.

Формула:
$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1. Усталая ладья, стоящая в одном из углов шахматной доски, хочет попасть домой — в противоположный угол. Она медленно плетётся к дому, сдвигаясь лишь на одну клетку за один ход. Докажите, что ладья может добраться до дома ровно C_{14}^7 способами.
2. В верхней клетке треугольника находится кузнечик, который может прыгать на одну клетку вниз (либо вниз-влево, либо вниз-вправо). Сколькими способами он может допрыгать до каждой из клеток выделенного ряда? (Требуется дать числовые ответы)



Такая же табличка (где в каждой ячейке указано, сколько способов до неё добраться), только бесконечная, называется *треугольником Паскаля*.

3. Докажите, что треугольник Паскаля состоит из чисел C_n^k .
4. С помощью треугольника Паскаля докажите, что:
 (a) $C_n^k = C_n^{n-k}$; (b) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Упражнение. Вспомните ещё два доказательства каждого из этих фактов: (1) из определения C_n^k и (2) из формулы C_n^k .

5. Чему равна сумма чисел в n -й строке треугольника Паскаля? (Верхняя строка, состоящая из одного числа, считается нулевой, а выделенная на картинке — восьмой.)
6. Докажите, что во всякой строке треугольника Паскаля, если идти по ней слева направо, числа увеличиваются до середины строки, а потом уменьшаются.
7. Сколько раз в треугольнике Паскаля встречается... (a) число 20; (b) число 120?
8. Симметричную монету бросили 10 раз. Докажите, что с вероятностью более 88% на ней выпало от 3 до 7 орлов.
9. Докажите, что знакочередующаяся сумма чисел в каждой строке (например, $1 - 4 + 6 - 4 + 1$) равна нулю.
10. На картинке нарисованы несколько параллельных прямых. Чему равна сумма чисел на двадцатой такой прямой?
11. Заметим (см. картинку), что $1 + 5 + 15 + 35 = 56$. Обобщите это наблюдение и докажите его (получится «тождество хоккейной клюшки»).

