



Сравнения и алгебра

4 июля

1. Натуральные числа a, b, c, d, n таковы, что $a + 3b : n$ и $6c + d : n$. Докажите, что $2ac - bd : n$.
2. Не пользуясь формулами сокращённого умножения, докажите, что
$$5^{2024} - 3^{2024} : 5^4 + 3^4$$
3. Даны натуральные числа m, n и $a > 1$. Докажите, что если m не делится на n , то и $a^m - 1$ не делится на $a^n - 1$.
4. Натуральные числа a и b таковы, что $ab + 1 : b + 2$. Докажите, что $2a > b$.
5. Натуральные числа a и b взаимно просты, $a > b > 1$. Есть такое натуральное m , что
$$a^m - b^{m-1} : a - b.$$

Докажите, что тогда $a \leq 2b - 1$.

6. Про натуральные числа a и b известно, что $(4a^2 - 1)^2 : 4ab - 1$. Докажите, что тогда и $(a - b)^2 : 4ab - 1$.
7. Про натуральные a и b известно, что $a^3 + 1 : ab - 1$. Докажите, что $b^3 + 1 : ab - 1$.
8. Про натуральные a, b, c известно, что $a^3 + b^3 + c^3 : a + b + c$. Докажите, что тогда $3abc : a + b + c$.
9. Про натуральные a, b, c известно, что $abc + 1$ делится на $N = ab - b + 1$. Докажите, что на N делятся числа $bc - c + 1$ и $ac - a + 1$.
10. Докажите, что при натуральном a верно, что $a^{10} + a^5 + 1 : a^2 + a + 1$.
11. Докажите, что если k, n – натуральны, и n не делится ни на 2, ни на 3, то тогда
$$(k + 1)^n - k^n - 1 : k^2 + k + 1$$



Сравнения и алгебра

4 июля

1. Натуральные числа a, b, c, d, n таковы, что $a + 3b : n$ и $6c + d : n$. Докажите, что $2ac - bd : n$.
2. Не пользуясь формулами сокращённого умножения, докажите, что
$$5^{2024} - 3^{2024} : 5^4 + 3^4$$
3. Даны натуральные числа m, n и $a > 1$. Докажите, что если m не делится на n , то и $a^m - 1$ не делится на $a^n - 1$.
4. Натуральные числа a и b таковы, что $ab + 1 : b + 2$. Докажите, что $2a > b$.
5. Натуральные числа a и b взаимно просты, $a > b > 1$. Есть такое натуральное m , что
$$a^m - b^{m-1} : a - b.$$

Докажите, что тогда $a \leq 2b - 1$.

6. Про натуральные числа a и b известно, что $(4a^2 - 1)^2 : 4ab - 1$. Докажите, что тогда и $(a - b)^2 : 4ab - 1$.
7. Про натуральные a и b известно, что $a^3 + 1 : ab - 1$. Докажите, что $b^3 + 1 : ab - 1$.
8. Про натуральные a, b, c известно, что $a^3 + b^3 + c^3 : a + b + c$. Докажите, что тогда $3abc : a + b + c$.
9. Про натуральные a, b, c известно, что $abc + 1$ делится на $N = ab - b + 1$. Докажите, что на N делятся числа $bc - c + 1$ и $ac - a + 1$.
10. Докажите, что при натуральном a верно, что $a^{10} + a^5 + 1 : a^2 + a + 1$.
11. Докажите, что если k, n – натуральны, и n не делится ни на 2, ни на 3, то тогда
$$(k + 1)^n - k^n - 1 : k^2 + k + 1$$