



Алгебраический разнбой 13 июля

1. Известно, что

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 3} + \frac{1}{y^2 + 4y + 7} + \frac{1}{z^2 - 6z + 15} = 1$$

Вычислите значение суммы $x + y + z$.

2. Целые числа x, y, z таковы, что $xy + yz + xz = 1$. Докажите, что число $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$

является точным квадратом целого числа.

3. Даны положительные числа x, y, z такие, что $xyz = 1$. Упростите выражение:

$$\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx}$$

4. Про числа a, b, c известно, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$. Докажите, что по крайней мере два числа из a, b, c равны между собой.

5. Даны неотрицательные вещественные a, b, c . Докажите, что:

$$\max(a^2 - b, b^2 - c, c^2 - a) \geq \max(a^2 - a, b^2 - b, c^2 - c)$$

6. Вдоль кольцевой железной дороги длиной 1080 км три частные компании хотят построить несколько станций. Первая компания хочет построить 3 станции, между которыми будет ровно по 360 км, вторая – 4 станции, между которыми ровно по 270 км, и третья – 5 станций, между которыми ровно по 216 км. Государство требует, чтобы длина наибольшего участка между двумя соседними станциями была как можно меньше. Найдите, какой будет длина этого участка при выполнении требования.

7. Убывающая последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ такова, что при любом n :

$$a_1 + \frac{a_4}{2} + \frac{a_9}{3} + \dots + \frac{a_{n^2}}{n} \leq 1$$

Докажите, что при любом n :

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} \leq 3$$



Алгебраический разнбой 13 июля

1. Известно, что

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 3} + \frac{1}{y^2 + 4y + 7} + \frac{1}{z^2 - 6z + 15} = 1$$

Вычислите значение суммы $x + y + z$.

2. Целые числа x, y, z таковы, что $xy + yz + xz = 1$. Докажите, что число $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$

является точным квадратом целого числа.

3. Даны положительные числа x, y, z такие, что $xyz = 1$. Упростите выражение:

$$\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx}$$

4. Про числа a, b, c известно, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$. Докажите, что по крайней мере два числа из a, b, c равны между собой.

5. Даны неотрицательные вещественные a, b, c . Докажите, что:

$$\max(a^2 - b, b^2 - c, c^2 - a) \geq \max(a^2 - a, b^2 - b, c^2 - c)$$

6. Вдоль кольцевой железной дороги длиной 1080 км три частные компании хотят построить несколько станций. Первая компания хочет построить 3 станции, между которыми будет ровно по 360 км, вторая – 4 станции, между которыми ровно по 270 км, и третья – 5 станций, между которыми ровно по 216 км. Государство требует, чтобы длина наибольшего участка между двумя соседними станциями была как можно меньше. Найдите, какой будет длина этого участка при выполнении требования.

7. Убывающая последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ такова, что при любом n :

$$a_1 + \frac{a_4}{2} + \frac{a_9}{3} + \dots + \frac{a_{n^2}}{n} \leq 1$$

Докажите, что при любом n :

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \dots + \frac{a_n}{n} \leq 3$$