

## Математическая регата

### 1 тур

1. Про числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  известно, что  $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2 = (a + b + c)^2$ . Какие значения могут принимать  $a$ ,  $b$  и  $c$ ?
2. Можно ли расположить 9 точек на плоскости так, чтобы можно было найти 6 квадратов с вершинами в отмеченных точках?
3. Даны 15 различных ненулевых целых чисел. Иван записал на доску все возможные суммы по семь из этих чисел, а Артём – все возможные суммы по восемь из этих чисел. Могло ли так случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел?

### 2 тур

4. Арсений и Вадим разделили с остатком одно и то же натуральное число на 36 и 37 соответственно. Сумма неполного частного, полученного Арсением, и остатка, полученного Вадимом, равна 38. Найдите остаток, полученный Арсением.
5. В выпуклом четырёхугольнике  $KLMN$  диагонали  $KM$  и  $LN$  равны, а серединный перпендикуляр к стороне  $LM$  проходит через середину стороны  $KN$ . Могут ли длины всех сторон четырёхугольника быть различными?
6. В игре «Морской бой» на доске размером  $10 \times 10$  клеток надо расставить один «корабль» из четырех клеток, два — из трех клеток, три — из двух, и четыре одноклеточных. По правилам «корабли» не должны касаться, даже углами. До какого наименьшего размера можно уменьшить поле для игры, оставив его квадратным и сохранив это правило?

### 3 тур

7. Верно ли, что, изменив одну цифру в десятичной записи любого натурального числа, можно получить простое число?
8. Дан треугольник  $KLM$ , в котором  $KM = 16$ ,  $LM = 5$ . Прямая, параллельная биссектрисе внешнего угла при вершине  $M$ , проходит через середину стороны  $KL$  и точку  $F$  на стороне  $KM$ . Найдите  $KF$ .
9. ЛМШонок может решать не более 10 задач за день, но если в какой-то день он решает более 7 задач, то в следующие 2 дня он от перенапряжения не может решать более 5 задач в день. Какое максимальное количество задач он может решить за смену (25 дней)?

### 4 тур

10. В однокруговом футбольном турнире играют восемь команд, четыре из которых выходят в финал. Какое наименьшее количество очков гарантирует выход в финал? (Победа – 3 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0.)

11. Пусть  $O$  — центр квадрата  $ABCD$ . Точка  $P$  внутри квадрата такова, что треугольник  $APD$  — равносторонний.  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $BP$  и  $CP$ . Докажите, что треугольник  $MON$  — также равносторонний.
12. Найдите все пары натуральных чисел  $a$  и  $b$ , для которых  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$ .