

Спуск

Упр. Докажите, что если каждая цифра числа меньше предыдущей, то оно не делится на 111.

Упр. Докажите, что все три стороны треугольника с углами 36° , 72° , 72° не могут одновременно выражаться целыми числами.

1. Дана пифагорова тройка чётных чисел a , b , c . Докажите, что есть другая пифагорова тройка, числа которой соответственно меньше исходных и хотя бы одно из них нечётно.
2. Вася считает каждое натуральное число либо прекрасным, либо ужасным. Любое ужасное число можно представить в виде суммы ужасного и прекрасного. Докажите, что Вася считает все числа прекрасными.
3. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 + y^2 = 3^n$
4. Даны $2n + 1$ гирь, вес каждой — натуральное количество граммов. Известно, что какая бы гиря ни потерялась, остальные можно разбить на две кучки равного веса по n гирь. Докажите, что все гири имеют равный вес.
5. Найдите (а) все тройки натуральных чисел, сумма квадратов которых кратна их удвоенному произведению; (б) все четвёрки натуральных чисел, сумма квадратов которых равна их удвоенному произведению.
6. Натуральное число N делится на число 10101010101. Докажите, что в десятичной записи N по крайней мере 6 цифр отличны от 0.
7. (а) Докажите, что ни одно число вида $8k + 7$ нельзя представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел.
(б) Докажите, что ни одно число вида $4^n(8k + 7)$ (где $n \in \mathbb{N}$) нельзя представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел.
8. Докажите, что куб нельзя разрезать на конечное число кубиков попарно различного размера.