

Касательная

Определение. Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку.

Факт 1. Радиус окружности, проведенный в какую-то ее точку, перпендикулярен проходящей через точку прямой тогда и только тогда, когда прямая – касательная.

Факт 2. Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

Факт 3. Суммы противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны.

Упражнение. В треугольник со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ вписана / внеписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K . Найдите длину отрезка AK .

1. Прямые AB и AC – касательные в точках B и C к окружности с центром в точке O . Через произвольную точку X дуги BC проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что периметр треугольника AMP и величина угла MOP не зависят от выбора точки X .
2. К окружности, вписанной в треугольник ABC , проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 10, 12, 14. Найдите периметр треугольника ABC .
3. Стороны пятиугольника в порядке обхода равны 5, 6, 10, 7, 8. Докажите, что в этот пятиугольник нельзя вписать окружность.
4. В четырехугольнике $ABCD$: $AD = DC$, $AB = 5$, $BC = 9$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD , касаются отрезка BD в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN .
5. Биссектрисы углов A , B и C выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в одной точке. Лучи AB и DC пересекаются в точке E , а лучи BC и AD – в точке F . Докажите, что у невыпуклого четырехугольника $AECF$ суммы длин противоположных сторон равны.
6. В четырехугольнике $ABCD$ можно вписать окружность. Окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD , имеют радиусы R и r соответственно. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.
7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC , касаются друг друга. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC , также касаются друг друга.
8. В треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$ на стороне BC отмечена точка D так, что окружности, вписанные в треугольники ABD и ACD , касаются отрезка AD в одной точке. Найти длину отрезка BD .