

Матбой Max Pro 6 – Профи 7

1. Треугольные числа — это числа вида $1 + 2 + \dots + n$ с натуральным n , то есть $1, 3, 6, 10, \dots$. Найдите наибольшее нетреугольное натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы различных треугольных чисел.
2. На окружности отмечена 31 точка. Отмеченные точки покрашены в 6 цветов. Докажите, что найдется четырехугольник с одноцветными вершинами, внутри которого не содержится центр окружности. (Точка на стороне четырехугольника не лежит внутри него.)
3. Нужно поставить на три клетки шахматной доски 11×11 по хромой ладье (которая может ходить только на соседнюю по стороне клетку) так, чтобы до любой клетки доски хотя бы одна из ладей могла дойти не более, чем за k ходов. При каком наименьшем k такое возможно?
4. По кругу расставлены положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$ в указанном порядке по часовой стрелке. Пусть A_i — среднее арифметическое числа a_i и нескольких (возможно, одного) следующих за ним по часовой стрелке. Докажите, что наибольшее из чисел $A_1, A_2, \dots, A_{2024}$ не меньше среднего арифметического всех чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$.
5. Всего в ЛМШ приехало 198 лмшат-математиков. Все имеют разный рост и размер ноги (они не обязательно пропорциональны). Но экспериментальным путем выяснили, что для любых 100 детей самый высокий лмшонок имеет самый большой размер ноги. Докажите, что можно выбрать 100 лмшат так, чтобы самый низкий из них имел самый маленький размер ноги.
6. Саша выписал на доску все числа от 1 до 130. Он хочет половину из них покрасить в красный цвет, а остальную половину — в синий, чтобы сумма красных чисел делилась на сумму синих. Удастся ли это ему?
7. Стёпа написал на доске четыре 2024-значных числа. Оказалось, что каждое из них записано только цифрами 1, 3, 5 или 7, причём в каждом числе поровну единиц, троек, пятёрок и семёрок. Стёпа сложил эти числа и получил результат X . Оказалось, что в записи X одна цифра чётная, а остальные нечётные. Найдите сумму цифр числа X .
8. 32 ученика решали 32 задачи. Оказалось, что каждую задачу решило хотя бы 26 учеников. Докажите, что есть два ученика, вместе решившие все задачи.