

Полуинвариант

Пример 1. Шоколадка имеет размер 4×8 плиток. За один ход разрешается разломать один из уже имеющихся кусочков на два вдоль прямолинейного разлома. Назовите все варианты количества таких ходов, после которого останутся только единичные плитки.

Пример 2. У Пети есть прямоугольный лист бумаги. Каждую минуту Петя разрезает один из имеющихся кусочков бумаги на два прямолинейным разрезом. Докажите, что в какой-то момент у него найдутся 100 кусков, одинаковых по количеству вершин.

Пример 3. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x , то можно дописать на нее число $2x + 1$ или $\frac{x}{x+2}$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2024. Докажите, что оно там было с самого начала.

Алгебраические конструкции

Идея 1: заметить полуинвариант в каком-нибудь алгебраическом выражении (например, произведение чисел на доске).

1. На доске написаны три числа. Каждую минуту они изменяются по следующему правилу: если на данный момент на доске находятся числа x, y, z , то они меняются на $2x - 2y + z - 10$, $2y - 2z + x + 21$, $2z - 2x + y - 12$ соответственно. Докажите, что когда-нибудь на доске появится отрицательное число.
2. В каждую клетку доски m на n записали по ненулевому целому числу. Разрешается поменять знак у всех чисел какой-то строки или какого-то столбца. Докажите, что можно такими действиями добиться неотрицательной суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце.
3. (a) На доске 100×100 королю разрешено ходить вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Какое наибольшее число ходов он может сделать? (b) Королю разрешили еще ходить вправо-вниз по диагонали. Докажите, что он может сделать лишь конечное число ходов.
4. (a) На доске написаны числа $1, \dots, 10$. За ход разрешается разбить числа на пары и заменить числа в паре на их сумму и разность. Можно ли через несколько таких операций получить на доске числа $11, \dots, 20$? (b) А если на доске написаны числа $1, \dots, 100$ и надо получить числа $101, \dots, 200$?

Конечные(???) процессы

5. Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наибольшие группы стоящих подряд по возрастанию ребят (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. (a) Докажите, что рано или поздно все ребята будут стоять по убыванию роста слева направо (b) Докажите, что для этого хватит $N - 1$ действий.

Идея 2: Полуинвариант может доказать конечность какого-либо процесса. Если что-то постоянно убывает или возрастает, притом может принимать лишь конечное количество значений, то процесс конечен.

6. Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: налево! По неопытности часть солдат поворачивается неправильно (направо). После этого каждую секунду происходит следующее: солдаты, оказавшиеся лицом друг к другу, понимают, что произошла ошибка, и оба поворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно повороты прекратятся.
7. Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается любую группу 01 заменить на 10...0 (произвольное количество нулей). Докажите, что процесс рано или поздно закончится.

Полуинварианты и геометрия

8. 100 семиклассников пришли на урок и сели по одному в клетки квадрата 10×10 . 9 из них пришли на урок сопливыми и чихающими. Каждую минуту ученик, хотя бы два соседа (по сторонам) которого чихают, тоже начинает чихать. Могло ли в конце урока оказаться, что все дети чихают?

Идея 3: Даже если в задаче нет какого-то явно заданного процесса, она всё равно может решиться с помощью полуинвариантов. Для этого нужно лишь придумать свой процесс.

9. Дано n фишек нескольких цветов, причём фишек каждого цвета не более $\frac{n}{2}$. Докажите, что их можно расставить на окружности так, чтобы никакие две фишки одинакового цвета не стояли рядом.
10. На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и n прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что из этих точек можно опустить попарно непересекающиеся перпендикуляры на эти прямые так, чтобы на каждую прямую был опущен ровно один перпендикуляр.