

Внутренний матбой М7 Полупрофи - Профи

1. Дана треугольная доска, стороны которой равны 6, разбитая линиями на 36 треугольничков со сторонами 1. В каждом узле стоит преподаватель. В какой-то момент все преподаватели пошли вдоль линий сетки со скоростью 1 в минуту. Дойдя до узла, каждый преподаватель поворачивается так, чтобы продолжить движение не по прямой. Докажите, что какие-то два преподавателя встретятся в одном узле.
2. Числа a_1, a_2, \dots, a_{18} таковы, что $a_{k+1} \geq a_k^2 + \frac{4}{17}$ при всех $1 \leq k \leq 17$. Докажите, что $a_{18} \geq a_1^2$.
3. На окружности отмечено 30 точек. Любые две отмеченные точки соединены красным или синим отрезком. Можно проделывать следующую операцию: взять любой неодноразноцветный треугольник и перекрасить в нём два отрезка таким образом, чтобы он стал одноцветным. Верно ли, что для любой начальной раскраски отрезков можно их все сделать одноцветными с помощью указанных операций?
4. На стороне AB квадрата $ABCD$ вне его построен равнобедренный прямоугольный треугольник ABE , $\angle E = 90^\circ$. Пусть N — середина AD , M — точка пересечения прямых CE и AB , P — прямых CN и AB , F — прямых PE и MN . На прямой FP отмечена точка Q такая, что CE — биссектриса угла QCB . Докажите, что MQ перпендикулярно CF .
5. В группе из семи депутатов некоторые тройки депутатов образовали коалиции (депутат может быть членом нескольких коалиций). Всего образовано 6 коалиций. Докажите, что депутатов можно разбить на две подгруппы таким образом, чтобы ни одна коалиция не оказалась целиком внутри одной подгруппы.
6. Первоначально на доске написано натуральное число 200. Затем каждую минуту Петя проделывает следующую операцию. Он выбирает одно из чисел на доске, пусть n , и его делитель $d > 1$ и дописывает на доску число $n + d$. Какое наибольшее составное число Петя никогда не сможет написать на доске?
7. На медиане AM треугольника ABC выбрана такая точка P , что $PC = CM$ и $\angle PCM = \angle ABC$. Докажите, что $AC + PM > AB$.
8. Известно, что n — натурально, а $3n + 1$ — точный квадрат. Докажите, что найдутся целые числа a, b, c такие, что $n + 1 = a^2 + b^2 + c^2$.