



Промежуточное неравенство 7 июля

Идея. Допустим, что необходимо доказать «сложное» неравенство $A \geq B$. Можно придумать некоторое выражение C и доказать два «простых» неравенства $A \geq C$ и $C \geq B$. Может оказаться так, что какое-то из «простых» неравенств на самом деле – равенство.

1. Известно, что $0 \leq x, y \leq 1$. Докажите, что $x + y \geq 2xy$.
2. Докажите, что $31^{11} < 17^{14}$.

Задачи

3. Что больше:
 - а) 7^{50} или 50^{25} ?
 - б) 15^{15} или 3^{40} ?
 - в) 2^{100} или 1000^{11} ?
 - г) $2^{100} + 3^{100}$ или 4^{100} ?
 - д) $1,1^{100}$ или 1000 ?

4. Докажите неравенства:

$$\text{а) } 6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3$$

$$\text{б) } 40 \sqrt{38 \sqrt{36 \dots \sqrt{4 \sqrt{2}}}} < 40$$

5. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2$$

6. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$$

7. Докажите, что найдётся такое n , что будет выполнено неравенство:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 2024$$

8. Докажите неравенство:

$$\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < 2$$

9. Докажите неравенство:

$$\frac{2^3}{2^3 - 1} \cdot \frac{3^3}{3^3 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3}{n^3 - 1} < \frac{3}{2}$$



Промежуточное неравенство 7 июля

Идея. Допустим, что необходимо доказать «сложное» неравенство $A \geq B$. Можно придумать некоторое выражение C и доказать два «простых» неравенства $A \geq C$ и $C \geq B$. Может оказаться так, что какое-то из «простых» неравенств на самом деле – равенство.

1. Известно, что $0 \leq x, y \leq 1$. Докажите, что $x + y \geq 2xy$.
2. Докажите, что $31^{11} < 17^{14}$.

Задачи

3. Что больше:
 - а) 7^{50} или 50^{25} ?
 - б) 15^{15} или 3^{40} ?
 - в) 2^{100} или 1000^{11} ?
 - г) $2^{100} + 3^{100}$ или 4^{100} ?
 - д) $1,1^{100}$ или 1000 ?

4. Докажите неравенства:

$$\text{а) } 6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3$$

$$\text{б) } 40 \sqrt{38 \sqrt{36 \dots \sqrt{4 \sqrt{2}}}} < 40$$

5. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2$$

6. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$$

7. Докажите, что найдётся такое n , что будет выполнено неравенство:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 2024$$

8. Докажите неравенство:

$$\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < 2$$

9. Докажите неравенство:

$$\frac{2^3}{2^3 - 1} \cdot \frac{3^3}{3^3 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3}{n^3 - 1} < \frac{3}{2}$$