

Циклы и цепочки

Пример. Есть 8 школьников. Каждый из них познакомился ровно с двумя другими. Докажите, что каких-то 4 или 5 или всех школьников можно усадить за круглый стол так, чтобы они были знакомы со своими соседями.

1. В классе несколько человек, некоторые из которых дружат. Известно, что если Петя с Васей поругаются, то у каждого школьника останется не более двух друзей. Если поругаются Толя с Пашей, то опять же у каждого школьника останется не более одного друга. Докажите, что тогда это верно для любой ссоры.
2. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку. (а) Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета. (б) Докажите, что количество способов это сделать – степень двойки.
3. В парламенте у каждого члена имеется один друг и один враг. Докажите, что парламент можно разделить на две нейтральных палаты.

Теорема. Граф, все вершины которого имеют степень не более двух, распадается на непересекающиеся циклы, пути и изолированные вершины.

4. В зоопарке 38 обезьянок, и каждая знает хотя бы 35 других. Докажите, что можно выбрать 13 обезьянок так, что любые две из них знакомы.
5. Дан клетчатый квадрат $n \times n$. Стороны клеток покрасили так, что у каждой клетки ровно две покрашенные стороны и ни одна покрашенная сторона не лежит на периметре данного квадрата $n \times n$. При каких n это возможно?
6. После нескольких игровых дней однокругового футбольного чемпионата выяснилось, что любые пять команд можно так расположить по кругу, чтобы каждая команда сыграла со стоящими справа и слева. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня (в один день команда может сыграть не более одной игры).
7. В стране 100 дорог (каждая дорога соединяет ровно два города, на всех дорогах двустороннее движение), и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

