



## Процесс закончится

4 июля

1. На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с доски два числа и записать вместо них их НОД и НОК. Докажите, что когда-нибудь набор чисел на доске перестанет меняться.

### Задачи

2. Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: «Нале-ВО!» По неопытности часть солдат поворачивается неправильно (направо). После этого каждую секунду происходит следующее: солдаты, оказавшиеся лицом друг к другу, понимают, что произошла ошибка, и оба поворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно повороты прекратятся.
3. Шеренга состоит из  $N$  солдат попарно различного роста. Её разбили на наибольшие группы стоящих подряд солдат по возрастанию роста (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили солдат по убыванию роста. Такие операции старшина проделывает много раз.
  - а) Докажите, что рано или поздно все солдаты будут стоять по убыванию роста.
  - б) Докажите, что для этого хватит  $N^2$  действий.
  - в)\* Докажите, что для этого хватит  $N-1$  действий.
4. Андрей Аркадьевич на зарядке поставил весь отряд М7 в одну шеренгу. Он выбирает несколько подряд стоящих детей, где слева стоит мальчик, а справа – девочка, и переставляет их всех в обратном порядке. Докажите, что это упражнение когда-нибудь закончится.
5. Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается:
  - а) любую группу 01 заменить на 100;
  - б) любую группу 01 заменить на  $10\dots 0$  (произвольное количество нулей).Докажите, что процесс рано или поздно закончится.
6. На плоскости стоят 100 красных, 100 синих и 100 зелёных точек. Никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в данных точках так, чтобы отрезки не имели общих концов, не пересекались, а концы каждого отрезка были разноцветны.
7. Павел Сергеевич взял положительное рациональное число  $\alpha$ . На доску он пишет попарно различные дроби вида  $\frac{1}{n}$ , где  $n$  – натуральное число. На каждом шаге число  $n$  выбирается так, чтобы сумма всех дробей на доске (вместе с дробью  $\frac{1}{n}$ ) не превосходила  $\alpha$ , а из подходящих для этого чисел  $n$  – выбирается наименьшее. Докажите, что рано или поздно сумма чисел на доске станет в точности равна  $\alpha$ .



## Процесс закончится

4 июля

1. На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с доски два числа и записать вместо них их НОД и НОК. Докажите, что когда-нибудь набор чисел на доске перестанет меняться.

### Задачи

2. Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: «Нале-ВО!» По неопытности часть солдат поворачивается неправильно (направо). После этого каждую секунду происходит следующее: солдаты, оказавшиеся лицом друг к другу, понимают, что произошла ошибка, и оба поворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно повороты прекратятся.
3. Шеренга состоит из  $N$  солдат попарно различного роста. Её разбили на наибольшие группы стоящих подряд солдат по возрастанию роста (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили солдат по убыванию роста. Такие операции старшина проделывает много раз.
  - а) Докажите, что рано или поздно все солдаты будут стоять по убыванию роста.
  - б) Докажите, что для этого хватит  $N^2$  действий.
  - в)\* Докажите, что для этого хватит  $N-1$  действий.
4. Андрей Аркадьевич на зарядке поставил весь отряд М7 в одну шеренгу. Он выбирает несколько подряд стоящих детей, где слева стоит мальчик, а справа – девочка, и переставляет их всех в обратном порядке. Докажите, что это упражнение когда-нибудь закончится.
5. Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается:
  - а) любую группу 01 заменить на 100;
  - б) любую группу 01 заменить на  $10\dots 0$  (произвольное количество нулей).Докажите, что процесс рано или поздно закончится.
6. На плоскости стоят 100 красных, 100 синих и 100 зелёных точек. Никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 150 отрезков с концами в данных точках так, чтобы отрезки не имели общих концов, не пересекались, а концы каждого отрезка были разноцветны.
7. Павел Сергеевич взял положительное рациональное число  $\alpha$ . На доску он пишет попарно различные дроби вида  $\frac{1}{n}$ , где  $n$  – натуральное число. На каждом шаге число  $n$  выбирается так, чтобы сумма всех дробей на доске (вместе с дробью  $\frac{1}{n}$ ) не превосходила  $\alpha$ , а из подходящих для этого чисел  $n$  – выбирается наименьшее. Докажите, что рано или поздно сумма чисел на доске станет в точности равна  $\alpha$ .