



## Планарные графы

20 июля

**Определение.** Планарный граф – граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. Плоский граф – изображение планарного графа без пересечений ребер. Ребра плоского графа делят плоскость на части, которые называются гранями.

**Утверждения (без доказательства).** Замкнутая кривая на плоскости делит её на две части – внутреннюю и внешнюю грани; если соединить две точки на границе грани кривой внутри неё, то эта грань будет разбита ровно на две меньших.

### Формула Эйлера

1. Дан плоский граф. Обозначим количество вершин за  $V$ , ребер – за  $P$ , граней – за  $G$ .

- Если граф – дерево, то  $V + G - P = 2$ .
- Если удалить ребро из цикла, то величина  $V + G - P$  не изменится.
- Для связного плоского графа  $V + G - P = 2$ .
- $V + G - P = 1 + K$ , если граф содержит  $K$  компонент связности.

### Задачи

**Определение.** Связный плоский граф с хотя бы двумя рёбрами, без петель и кратных рёбер назовём хорошим.

- Докажите, что для хорошего графа выполняются неравенства:
  - $2P \geq 3G$ .
  - $P \leq 3V - 6$ .
- Как изменятся неравенства из 2 задачи, если хороший граф двудольный?
- Докажите, что полный граф на пяти вершинах ( $K_5$ ) и полный двудольный граф, обе доли которого содержат 3 вершины ( $K_{3,3}$ ) – не планарны.
- Докажите, что в хорошем графе:
  - есть вершина степени не более 5;
  - существует правильная раскраска в 6 цветов.
- Семиугольник разбили на выпуклые 5 и 6-угольники. Известно, что в каждой вершине семиугольника сходится хотя бы 2 части разбиения, и никакая вершина любого многоугольника не является внутренней точкой стороны другого многоугольника. Докажите, что 5-угольников не менее 13.
- Пятиугольник разрезан на несколько многоугольников так, что все стороны пятиугольника остались неразрезанными, а каждая вершина внутри не является внутренней точкой стороны другого многоугольника. Докажите, что если число многоугольников не меньше пяти, то в одном из них найдется угол, который больше или равен  $72^\circ$ .



## Планарные графы

20 июля

**Определение.** Планарный граф – граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. Плоский граф – изображение планарного графа без пересечений ребер. Ребра плоского графа делят плоскость на части, которые называются гранями.

**Утверждения (без доказательства).** Замкнутая кривая на плоскости делит её на две части – внутреннюю и внешнюю грани; если соединить две точки на границе грани кривой внутри неё, то эта грань будет разбита ровно на две меньших.

### Формула Эйлера

1. Дан плоский граф. Обозначим количество вершин за  $V$ , ребер – за  $P$ , граней – за  $G$ .

- Если граф – дерево, то  $V + G - P = 2$ .
- Если удалить ребро из цикла, то величина  $V + G - P$  не изменится.
- Для связного плоского графа  $V + G - P = 2$ .
- $V + G - P = 1 + K$ , если граф содержит  $K$  компонент связности.

### Задачи

**Определение.** Связный плоский граф с хотя бы двумя рёбрами, без петель и кратных рёбер назовём хорошим.

- Докажите, что для хорошего графа выполняются неравенства:
  - $2P \geq 3G$ .
  - $P \leq 3V - 6$ .
- Как изменятся неравенства из 2 задачи, если хороший граф двудольный?
- Докажите, что полный граф на пяти вершинах ( $K_5$ ) и полный двудольный граф, обе доли которого содержат 3 вершины ( $K_{3,3}$ ) – не планарны.
- Докажите, что в хорошем графе:
  - есть вершина степени не более 5;
  - существует правильная раскраска в 6 цветов.
- Семиугольник разбили на выпуклые 5 и 6-угольники. Известно, что в каждой вершине семиугольника сходится хотя бы 2 части разбиения, и никакая вершина любого многоугольника не является внутренней точкой стороны другого многоугольника. Докажите, что 5-угольников не менее 13.
- Пятиугольник разрезан на несколько многоугольников так, что все стороны пятиугольника остались неразрезанными, а каждая вершина внутри не является внутренней точкой стороны другого многоугольника. Докажите, что если число многоугольников не меньше пяти, то в одном из них найдется угол, который больше или равен  $72^\circ$ .