

## Матбой Профи М7 – Профи М8

1. Все натуральные числа от 1 до  $N$  поставлены в ряд. К каждому числу прибавили номер места в ряду, на котором оно стоит. Найдите количество таких  $N < 3^{2024}$ , для которых могло оказаться, что каждая из полученных сумм является степенью тройки.
2. У Саши есть неограниченный запас одинаковых салфеток в форме выпуклого четырёхугольника, стороны которого не превосходят 1. Он хочет полностью накрыть ими Большой Квадратный Стол площади  $S^2 = 1000000$ . Салфетки можно класть друг на друга, поворачивать, переворачивать, части салфеток могут выходить за пределы стола, однако, нельзя менять форму салфеток (резать, сгибать и т.п.). Докажите, что с этой задачей он может справиться, истратив салфетки суммарной площадью не более  $1,01 \cdot S^2$ .
3. В каждой клетке квадратной таблицы  $4 \times 4$  записан 0 или 1. Каждую секунду происходит следующее: число в данной клетке становится единицей, если в клетках, соседних по стороне, сумма нечётна, и нулём — в противном случае. Докажите, что в течение первых семи секунд какое-то расположение нулей и единиц обязательно повторится.
4. Найдите все натуральные числа, которые не могут быть представлены в виде:

$$\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$$

где  $a, b$  — некоторые натуральные числа.

5. Натуральное число *замечательно*, если оно взаимно просто с суммой всех своих делителей (включая само число). Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могут быть *замечательными*?
6. В трапеции  $ABCD$  диагональ  $BD$  равна основанию  $AD$ , а диагональ  $AC$  — боковой стороне  $CD$ . Отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $E$ . Точка  $F$  на отрезке  $AD$  выбрана так, что  $EF \parallel CD$ . Докажите, что  $BE = DF$ .
7. На вечеринке у Паши все дарили друг другу подарки. Паша получил подарков в 6 раз больше, чем подарил, а каждый из остальных подарил подарков в 3 раза больше, чем получил. Докажите, что какие-то двое дарили подарки друг другу.
8. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$  — перестановка натуральных чисел от 1 до 2024. Найдите наибольшее возможное значение выражения:

$$|| \dots || x_1 - x_2 | - x_3 | - \dots - x_{2023} | - x_{2024} |.$$