

Математическая регата

1 тур

1. Про числа a , b и c известно, что $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2 = (a + b + c)^2$. Какие значения могут принимать a , b и c ?
2. Можно ли расположить 9 точек на плоскости так, чтобы можно было найти 6 квадратов с вершинами в отмеченных точках?
3. Даны 15 различных ненулевых целых чисел. Иван записал на доску все возможные суммы по семь из этих чисел, а Артём – все возможные суммы по восемь из этих чисел. Могло ли так случиться, что они выписали на доску одни и те же наборы чисел?

2 тур

4. Арсений и Вадим разделили с остатком одно и то же натуральное число на 36 и 37 соответственно. Сумма неполного частного, полученного Арсением, и остатка, полученного Вадимом, равна 38. Найдите остаток, полученный Арсением.
5. В выпуклом четырёхугольнике $KLMN$ диагонали KM и LN равны, а серединный перпендикуляр к стороне LM проходит через середину стороны KN . Могут ли длины всех сторон четырёхугольника быть различными?
6. В игре «Морской бой» на доске размером 10×10 клеток надо расставить один «корабль» из четырех клеток, два — из трех клеток, три — из двух, и четыре одноклеточных. По правилам «корабли» не должны касаться, даже углами. До какого наименьшего размера можно уменьшить поле для игры, оставив его квадратным и сохранив это правило?

3 тур

7. Верно ли, что, изменив одну цифру в десятичной записи любого натурального числа, можно получить простое число?
8. Дан треугольник KLM , в котором $KM = 16$, $LM = 5$. Прямая, параллельная биссектрисе внешнего угла при вершине M , проходит через середину стороны KL и точку F на стороне KM . Найдите KF .
9. ЛМШонок может решать не более 10 задач за день, но если в какой-то день он решает более 7 задач, то в следующие 2 дня он от перенапряжения не может решать более 5 задач в день. Какое максимальное количество задач он может решить за смену (25 дней)?

4 тур

10. В однокруговом футбольном турнире играют восемь команд, четыре из которых выходят в финал. Какое наименьшее количество очков гарантирует выход в финал? (Победа – 3 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0.)

11. Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Точка P внутри квадрата такова, что треугольник APD — равносторонний. M и N — середины отрезков BP и CP . Докажите, что треугольник MON — также равносторонний.
12. Найдите все пары натуральных чисел a и b , для которых $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$.