



## Принцип крайнего в графах

5 июля

1. В стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.
2. На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.
3. В ориентированном графе есть  $n$  вершин, причём из каждой вершины выходит только одна стрелка. Докажите, что можно выбрать не менее  $\frac{n}{3}$  вершин таких, что между ними нет ни одной стрелки.
4. В стране 4049 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями так, что из любого города можно добраться до любого другого, возможно, с пересадками. Докажите, что существует город, путь из которого до любого другого состоит не более чем из 2024 перелетов.
5. Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из двух или трёх человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.
6. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспересадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Всего в государстве более 180 авиалиний. Докажите, что найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общих концов
7. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Для каждых четырёх городов существуют хотя бы две дороги между ними. Известно, что не существует маршрута, проходящего по каждому городу ровно один раз. Докажите, что можно выбрать два города таким образом, чтобы каждый из оставшихся городов был соединен дорогой хотя бы с одним из двух выбранных городов.
8. В городе 10 перекрёстков, пары перекрёстков соединены не более, чем одной односторонней дорогой. Известно, что, выехав с любого перекрёстка по любой дороге, на него можно будет вернуться, проехав по трём дорогам (цикл длины 3). Вдоль некоторой дороги (не на перекрёстке) стоит администрация. С любого перекрёстка можно добраться до администрации. При каком наименьшем  $k$  обязательно верно, что с любого перекрёстка можно доехать до администрации и вернуться, проехав не более, чем по  $k$  дорогам?



## Принцип крайнего в графах

5 июля

1. В стране каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.
2. На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.
3. В ориентированном графе есть  $n$  вершин, причём из каждой вершины выходит только одна стрелка. Докажите, что можно выбрать не менее  $\frac{n}{3}$  вершин таких, что между ними нет ни одной стрелки.
4. В стране 4049 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями так, что из любого города можно добраться до любого другого, возможно, с пересадками. Докажите, что существует город, путь из которого до любого другого состоит не более чем из 2024 перелетов.
5. Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из двух или трёх человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.
6. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспересадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Всего в государстве более 180 авиалиний. Докажите, что найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общих концов
7. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Для каждых четырёх городов существуют хотя бы две дороги между ними. Известно, что не существует маршрута, проходящего по каждому городу ровно один раз. Докажите, что можно выбрать два города таким образом, чтобы каждый из оставшихся городов был соединен дорогой хотя бы с одним из двух выбранных городов.
8. В городе 10 перекрёстков, пары перекрёстков соединены не более, чем одной односторонней дорогой. Известно, что, выехав с любого перекрёстка по любой дороге, на него можно будет вернуться, проехав по трём дорогам (цикл длины 3). Вдоль некоторой дороги (не на перекрёстке) стоит администрация. С любого перекрёстка можно добраться до администрации. При каком наименьшем  $k$  обязательно верно, что с любого перекрёстка можно доехать до администрации и вернуться, проехав не более, чем по  $k$  дорогам?