

## Геометрические неравенства

**Соотношение между сторонами и углами треугольника.** Против большей стороны треугольника лежит больший угол. И наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

**Неравенство треугольника:** для любых трех точек  $A, B$  и  $C$  на плоскости выполнено неравенство:  $AB + BC \geq AC$ , причем  $AB + BC = AC$  тогда и только тогда, когда точка  $B$  лежит на отрезке  $AC$ .

1. Серединный перпендикуляр к стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $K$ , причём точка  $K$  делит ломаную  $ACB$  на две части равной длины. Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
2. Дан равнобедренный  $\triangle ABC$ . На продолжении основания  $BC$  за точку  $C$  взята точка  $K$ , через которую проведена прямая, пересекающая сторону  $AB$  в точке  $M$ . Сравните длины отрезков  $MK$  и  $MB$ .
3. Пусть  $CK$  – биссектриса в  $\triangle ABC$ , и  $AC > BC$ . Докажите, что  $\angle AKC$  тупой.
4. В  $\triangle ABC$  проведена биссектриса  $BD$ . Докажите, что  $AD < AB$ .
5. Пусть  $AM$  – медиана треугольника  $ABC$ . Докажите, что:  
(a)  $AM < (AB + AC)/2$ ; (b)  $AM > (AB + AC - BC)/2$ .
6. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника:  
(a) больше суммы длин противоположных сторон;  
(b) больше его полупериметра; (c) меньше его периметра.
7. Найдите в выпуклом четырехугольнике точку с минимальной суммой расстояний до вершин.
8. На основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ , а на продолжении  $AC$  за вершину  $C$  – точка  $E$ , причем  $AD = CE$ . Докажите, что  $BD + BE > AB + BC$ .
9. Все биссектрисы в  $\triangle ABC$  меньше 1. Докажите, что  $S_{ABC} < 1$ .