

Малая теорема Ферма

А где тема листка? (а) Пусть по кругу стоят 6 фишек (любые две соседние фишки находятся на одинаковом расстоянии друг от друга). Найдите количество способов раскрасить эти фишки в 3 цвета, если способы, получаемые друг из друга поворотом, считаются различными.

(b) Посчитайте количество раскрасок из предыдущего пункта, переходящих в себя при повороте на 180 градусов. На 120 градусов?

(c) Теперь пусть по кругу стоят 7 фишек. Найдите количество способов раскрасить эти фишки в 3 цвета, если способы, получаемые друг из друга поворотом, считаются различными. А если способы, получаемые друг из друга поворотом, считаются одинаковыми?

(d) Посчитайте количество способов раскрасить p фишек ($p > 3$ – простое число), стоящих по кругу, в три цвета, если способы, получаемые друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. В a цветов? ($a < p$ – натуральное число)

(e) Докажите *Малую теорему Ферма*: Пусть p – простое число, a – натуральное число, взаимно простое с p . Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Какая тема-то? (а) Составьте таблицы произведений ненулевых остатков по модулю 6 и 7. Как вы думаете, почему по модулю 6 есть нули, а по модулю 7 нет?

(b) Докажите, что если сделать такую таблицу по простому модулю, то строки в ней будут состоять из различных чисел.

(c) Возьмем произведение всех элементов строки с индексом a . Будет ли оно зависеть от a ?

(d) Докажите МТФ при помощи предыдущего пункта.

Кто понял, тот понял

Последнее доказательство теоремы:

(а) Вспомните, почему $(x + y)^{101} \equiv x^{101} + y^{101} \pmod{101}$.

(b) Для любого простого p докажите, что $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$

(c) Докажите, что $a^p \equiv a \pmod{p}$ с помощью предыдущего пункта.

Да-да, это именно она — малая теорема Ферма

1. Посчитайте остаток от деления числа 8^{900} на 29.
2. Докажите, что $17^{120} - 1$ делится на 143.
3. Докажите, что одно из чисел $n^{51} - 1$, $n^{51} + 1$ обязательно делится на 103, если n не делится на 103.

4. Известно, что сумма 64 степеней шести чисел делится на 17. Докажите, что произведение этих шести чисел делится на 17^6 .
5. Докажите, что при любом простом $p > 5$ число $\underbrace{1 \dots 1}_{p-1}$ кратно p .
6. Пусть p — простое число, большее пяти. Докажите, что число $\underbrace{11 \dots 1}_p \underbrace{22 \dots 2}_p \dots \underbrace{99 \dots 9}_p - 123456789$ делится на p .