

## Метод математической индукции

Упр. 1. Имеется пирамида с  $n$  кольцами возрастающих размеров на стержне (внизу самое большое) и ещё два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее.

(а) Докажите, что можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней;

(б) Докажите, что это можно сделать за  $2^n - 1$  перекладывание.

Упр. 2. Докажите, что  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. На плоскости провели несколько прямых и окружностей. Они разбили плоскость на части, получилась карта. Докажите, что эту карту можно правильным образом раскрасить в 2 цвета.
2. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может оказаться сколь угодно далеко от края пустыни. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)
3. В правильном  $n$ -угольнике все стороны и диагонали раскрасили в  $n$  цветов (каждый был использован). Докажите, что существует треугольник с разноцветными сторонами.

### Индукция в алгебре

Упр. 3. По индукции докажите неравенство:  $2^n > n$ .

4. По индукции докажите неравенство:  $2^n > n^2$ .

5. Докажите тождество:  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

6. Числа Фибоначчи задаются правилами  $F_0 = 1$ ;  $F_1 = 1$ ;  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  для всех  $n \geq 2$ . Докажите, что для любого  $k \geq 1$  выполняется равенство  $F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_{k-1} = F_{k+1} - 1$ .

7. Докажите по индукции, что  $\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \dots + \frac{(m+n)!}{n!} = \frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)}$

8. Докажите по индукции, что  $2^{3^n} + 1$  делится на  $3^{n+1}$

9. Даны натуральные числа  $x_1, \dots, x_n$ . Докажите, что число  $(1 + x_1^2) \dots (1 + x_n^2)$  можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.