



Целая и дробная часть (пролог)

18 июля

Определение. Целой частью $[x]$ числа x называют наибольшее целое число, не превосходящее x . Дробной частью $\{x\}$ числа x называют разность $x - [x]$.

1. Чему равны целые и дробные части чисел: а) -0.3 ; б) $\sqrt{3} - 3$; в) $5 - \sqrt{41}$?

Задачи

2. Докажите следующие формулы:

а) $[x + n] = [x] + n$, где n – натурально

б) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$

в) $[2x] = [x] + [x + 0,5]$

3. Решите уравнения:

а) $[x - 1] = 3x + 1$

б) $x - 1 = \{3x + 1\}$

4. Докажите формулу:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

5. Решите уравнение:

$$x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \dots + \left[\frac{x}{2024}\right]$$

6. Докажите формулу:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \dots = n$$

7. Для натуральных взаимно простых чисел m и n докажите формулу:

$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[2 \cdot \frac{m}{n}\right] + \dots + \left[(n-1) \cdot \frac{m}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2}$$



Целая и дробная часть (пролог)

18 июля

Определение. Целой частью $[x]$ числа x называют наибольшее целое число, не превосходящее x . Дробной частью $\{x\}$ числа x называют разность $x - [x]$.

1. Чему равны целые и дробные части чисел: а) -0.3 ; б) $\sqrt{3} - 3$; в) $5 - \sqrt{41}$?

Задачи

2. Докажите следующие формулы:

а) $[x + n] = [x] + n$, где n – натурально

б) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$

в) $[2x] = [x] + [x + 0,5]$

3. Решите уравнения:

а) $[x - 1] = 3x + 1$

б) $x - 1 = \{3x + 1\}$

4. Докажите формулу:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

5. Решите уравнение:

$$x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \dots + \left[\frac{x}{2024}\right]$$

6. Докажите формулу:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \dots = n$$

7. Для натуральных взаимно простых чисел m и n докажите формулу:

$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[2 \cdot \frac{m}{n}\right] + \dots + \left[(n-1) \cdot \frac{m}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2}$$