

## Матбой Профи М7 – Полупрофи М8

1. Все натуральные числа от 1 до  $N$  поставлены в ряд. К каждому числу прибавили номер места в ряду, на котором оно стоит. При каких  $N$  могло оказаться, что каждая из полученных сумм является степенью двойки?
2. В бригаде 2024 солдата. Каждый день несколько из них (но не все) идут в дозор. За несколько дней произошло так, что каждый с каждым побывал в дозоре ровно 1 раз. Солдат за участие в дозоре получает 1 рубль. Докажите, что кто-то из солдат заработал не менее 46 рублей.
3. В каждой клетке квадратной таблицы  $4 \times 4$  записан 0 или 1. Каждую секунду происходит следующее: число в данной клетке становится единицей, если в клетках, соседних по стороне, сумма нечётна, и нулём — в противном случае. Докажите, что в течение первых семи секунд какое-то расположение нулей и единиц обязательно повторится.
4. В трапеции  $ABCD$  диагональ  $BD$  равна основанию  $AD$ , а диагональ  $AC$  — боковой стороне  $CD$ . Отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $E$ . Точка  $F$  на отрезке  $AD$  выбрана так, что  $EF \parallel CD$ . Докажите, что  $BE = DF$ .
5. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$  — перестановка натуральных чисел от 1 до 2024. Найдите наибольшее возможное значение выражения:

$$|| \dots || x_1 - x_2 | - x_3 | - \dots - x_{2023} | - x_{2024} |.$$

6. В строчку в произвольном порядке выписано 999 единиц и несколько нулей. Докажите, что можно вставить плюсы между некоторыми цифрами так, чтобы сумма полученных чисел оказалась степенью тройки.
7. Решите уравнение в натуральных числах:

$$(a + b^2)(b + a^2) = 2^n$$

8. В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  — острый. Биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $D$ . На стороне  $AC$  взята точка  $P$ . Докажите, что  $\angle BPD < \angle DPC$ .