

## Касательная

**Определение.** Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку.

1. Докажите, что суммы противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны.
2. Дан описанный четырехугольник  $ABCD$ . Лучи  $BA$  и  $CD$  пересекаются в точке  $M$ , а лучи  $AD$  и  $BC$  – в точке  $N$ . Докажите, что  $MA + AN = MC + CN$ .
3. Прямые  $AB$  и  $AC$  – касательные в точках  $B$  и  $C$  к окружности с центром в точке  $O$ . Через произвольную точку  $X$  дуги  $BC$  проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $P$  соответственно. Докажите, что периметр треугольника  $AMP$  и величина угла  $MOP$  не зависят от выбора точки  $X$ .
4. Стороны пятиугольника в порядке обхода равны 5, 6, 10, 7, 8. Докажите, что в этот пятиугольник нельзя вписать окружность.
5. В четырехугольнике  $ABCD$   $AD = DC$ ,  $AB = 5$ ,  $BC = 9$ . Окружности, вписанные в треугольники  $ABD$  и  $CBD$ , касаются отрезка  $BD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите длину отрезка  $MN$ .
6. Биссектрисы углов  $A$ ,  $B$  и  $C$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в одной точке. Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $E$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  – в точке  $F$ . Докажите, что у невыпуклого четырехугольника  $AECF$  суммы длин противоположных сторон равны.
7. В четырехугольнике  $ABCD$  можно вписать окружность. Окружности, вписанные в треугольники  $ABD$  и  $CBD$ , имеют радиусы  $R$  и  $r$  соответственно. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.
8. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ADC$ , касаются друг друга. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники  $ABD$  и  $BDC$ , также касаются друг друга.
9. В треугольнике  $ABC$  со сторонами  $BC = a$ ,  $AC = b$  и  $AB = c$  на стороне  $BC$  отмечена точка  $D$  так, что окружности, вписанные в треугольники  $ABD$  и  $ACD$ , касаются отрезка  $AD$  в одной точке. Найти длину отрезка  $BD$ .
10. (a) Внеписанная окружность треугольника  $ABC$ , касающаяся стороны  $BC$ , имеет центр  $I_A$ . Докажите, что  $AI_A > BC$ . (b) Докажите, что в остроугольном треугольнике расстояние от любой вершины до соответствующего центра внеписанной окружности меньше чем сумма двух наибольших сторон треугольника.