



Теорема Фалеса

12 июля

Теорема Фалеса. Две прямые a и b пересекаются в точке O . На прямой a отмечены точки A и A_1 , на другой прямой – B и B_1 , отличные от O . Тогда $AB \parallel A_1B_1 \Leftrightarrow \frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB}$.

1. На прямой a отмечены точки A, B, C , на прямой b отмечены точки X, Y, Z . Известно, что $AX \parallel BY \parallel CZ$. Докажите, что $\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$. Верно ли обратное?
2. В окружности проведены диаметр AB и хорда CD . Точки A_1 и B_1 – основания перпендикуляров из точек A и B на CD . Докажите, что $A_1C = B_1D$.
3. Внутри треугольника ABC ($AB > BC$) на серединном перпендикуляре к AC отмечена точка P . Луч BP пересекает сторону AC в точке E . Оказалось, что $BC = BE$. Докажите, что $\frac{BP}{BE} = \frac{AE}{EC}$.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG . Докажите, что $EF = DG$.

5. **Теорема о биссектрисе.** В треугольнике ABC проведена
а) биссектриса AD внутреннего угла BAC ;
б) биссектриса AD внешнего угла BAC .

Докажите, используя теорему Фалеса, что $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.

6. На сторонах BC и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Отрезки AK и BL пересекаются в точке O . Зная, что $\frac{BK}{KC} = \frac{a}{b}$, $\frac{BO}{OL} = \frac{c}{d}$, выразите отношения $\frac{AL}{LC}$ и $\frac{AO}{OK}$.
7. В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1 , а на стороне BC отмечена точка X . На сторонах AB, AC отмечены точки M и N соответственно так, что $MX \parallel CC_1$ и $NX \parallel BB_1$. Докажите, что отрезок MN медианами BB_1 и CC_1 разбивается на три равные части.
8. В треугольнике ABC отмечена точка O . Прямые, проходящие через точку O параллельно AB, AC, BC пересекают AC, BC, AB в точках K, L, M соответственно. Оказалось, что площади треугольников AOK, BOM, COL равны. Найдите геометрическое место точек O , для которых это возможно.
9. На биссектрисе AD неравнобедренного треугольника ABC выбирается точка K . Прямые BK и CK пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что все прямые B_1C_1 проходят через фиксированную точку на прямой BC , не зависящую от выбора точки K .



Теорема Фалеса

12 июля

Теорема Фалеса. Две прямые a и b пересекаются в точке O . На прямой a отмечены точки A и A_1 , на другой прямой – B и B_1 , отличные от O . Тогда $AB \parallel A_1B_1 \Leftrightarrow \frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB}$.

1. На прямой a отмечены точки A, B, C , на прямой b отмечены точки X, Y, Z . Известно, что $AX \parallel BY \parallel CZ$. Докажите, что $\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$. Верно ли обратное?
2. В окружности проведены диаметр AB и хорда CD . Точки A_1 и B_1 – основания перпендикуляров из точек A и B на CD . Докажите, что $A_1C = B_1D$.
3. Внутри треугольника ABC ($AB > BC$) на серединном перпендикуляре к AC отмечена точка P . Луч BP пересекает сторону AC в точке E . Оказалось, что $BC = BE$. Докажите, что $\frac{BP}{BE} = \frac{AE}{EC}$.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG . Докажите, что $EF = DG$.

5. **Теорема о биссектрисе.** В треугольнике ABC проведена
а) биссектриса AD внутреннего угла BAC ;
б) биссектриса AD внешнего угла BAC .

Докажите, используя теорему Фалеса, что $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.

6. На сторонах BC и AC треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно. Отрезки AK и BL пересекаются в точке O . Зная, что $\frac{BK}{KC} = \frac{a}{b}$, $\frac{BO}{OL} = \frac{c}{d}$, выразите отношения $\frac{AL}{LC}$ и $\frac{AO}{OK}$.
7. В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1 , а на стороне BC отмечена точка X . На сторонах AB, AC отмечены точки M и N соответственно так, что $MX \parallel CC_1$ и $NX \parallel BB_1$. Докажите, что отрезок MN медианами BB_1 и CC_1 разбивается на три равные части.
8. В треугольнике ABC отмечена точка O . Прямые, проходящие через точку O параллельно AB, AC, BC пересекают AC, BC, AB в точках K, L, M соответственно. Оказалось, что площади треугольников AOK, BOM, COL равны. Найдите геометрическое место точек O , для которых это возможно.
9. На биссектрисе AD неравнобедренного треугольника ABC выбирается точка K . Прямые BK и CK пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что все прямые B_1C_1 проходят через фиксированную точку на прямой BC , не зависящую от выбора точки K .