



Добавить веса 8 июля

1. Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается любую группу 01 заменить на 100. Докажите, что процесс рано или поздно закончится.

Задачи

2. а) В ряд стоят числа $1, 2, \dots, 100$ в некотором порядке. За один ход можно поменять местами два числа, если большее из них стоит левее меньшего, другие числа при этом не сдвигаются. Присвойте числам в ряду веса так, чтобы вес перестановки чисел всегда увеличивался. Докажите с помощью этого, что числа когда-нибудь будут упорядочены по возрастанию.
- б) Пусть есть два набора чисел: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ и $y_1 \leq y_2 \leq \dots < y_n$. Числа второго набора как-то переставлены: пусть это перестановка c_1, c_2, \dots, c_n . Докажите, что значение выражения $x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n$ максимально тогда, когда для любого i число c_i равно y_i .
3. В большом гараже олигарха Вовки стоят 111 «Волг» и 66 «Жигулей». Его товарищ Петя побогаче, и кроме этих машин обладает ещё и неограниченным запасом «Мерседесов». Вовка может выменять у Петки: «Волгу» и «Жигули» на «Мерседес»; «Мерседес» и 2 «Жигули» на 2 «Волги»; 3 «Волги» на 2 «Мерседеса» и «Жигули».
- а) Сможет ли Вовка заполучить в свой гараж сотню «Мерседесов»?
- б) Докажите, что обмены рано или поздно закончатся.
4. В ряд стоят n человек, но только у первого из них есть печенье. Раз в секунду кто-то из них, у кого есть хотя бы две печеньки, одну из них ест, а другую отдаёт какому-то соседу. Известно, что последний в ряду съел одну печеньку. Какое наименьшее количество печенек могло быть вначале у первого?
5. В начале координат стоит фишка. За ход можно снять фишку, но вместо неё положить две: на 1 выше и на 1 правее. Ход можно совершить только в случае, если места под новые фишки были свободны. Докажите, что в любой момент времени хотя бы одна фишка будет на расстоянии не больше 3 от начала координат. (Расстояние – сумма координат.)
6. Первоначально даны четыре одинаковых прямоугольных треугольника. Каждым ходом один из имеющихся треугольников разрезается по высоте, выходящей из прямого угла, на два других. Докажите, что после любого количества ходов среди треугольников найдутся два одинаковых.
7. Игровое поле представляет собой полосу из $n + 1$ ячейки, пронумерованных от 0 до n слева направо. В нулевой ячейке стоят n фишек, остальные – пустые. За один ход можно выбрать непустую ячейку (пусть в ней стоит k фишек) и передвинуть одну из фишек вправо не более, чем на k позиций. Докажите, что все фишки соберутся в самой правой ячейке не раньше, чем через $\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$ ходов. (Такая скобка – округление вверх.)



Добавить веса 8 июля

1. Имеется конечная последовательность нулей и единиц. За один шаг разрешается любую группу 01 заменить на 100. Докажите, что процесс рано или поздно закончится.

Задачи

2. а) В ряд стоят числа $1, 2, \dots, 100$ в некотором порядке. За один ход можно поменять местами два числа, если большее из них стоит левее меньшего, другие числа при этом не сдвигаются. Присвойте числам в ряду веса так, чтобы вес перестановки чисел всегда увеличивался. Докажите с помощью этого, что числа когда-нибудь будут упорядочены по возрастанию.
- б) Пусть есть два набора чисел: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ и $y_1 \leq y_2 \leq \dots < y_n$. Числа второго набора как-то переставлены: пусть это перестановка c_1, c_2, \dots, c_n . Докажите, что значение выражения $x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n$ максимально тогда, когда для любого i число c_i равно y_i .
3. В большом гараже олигарха Вовки стоят 111 «Волг» и 66 «Жигулей». Его товарищ Петя побогаче, и кроме этих машин обладает ещё и неограниченным запасом «Мерседесов». Вовка может выменять у Петки: «Волгу» и «Жигули» на «Мерседес»; «Мерседес» и 2 «Жигули» на 2 «Волги»; 3 «Волги» на 2 «Мерседеса» и «Жигули».
- а) Сможет ли Вовка заполучить в свой гараж сотню «Мерседесов»?
- б) Докажите, что обмены рано или поздно закончатся.
4. В ряд стоят n человек, но только у первого из них есть печенье. Раз в секунду кто-то из них, у кого есть хотя бы две печеньки, одну из них ест, а другую отдаёт какому-то соседу. Известно, что последний в ряду съел одну печеньку. Какое наименьшее количество печенек могло быть вначале у первого?
5. В начале координат стоит фишка. За ход можно снять фишку, но вместо неё положить две: на 1 выше и на 1 правее. Ход можно совершить только в случае, если места под новые фишки были свободны. Докажите, что в любой момент времени хотя бы одна фишка будет на расстоянии не больше 3 от начала координат. (Расстояние – сумма координат.)
6. Первоначально даны четыре одинаковых прямоугольных треугольника. Каждым ходом один из имеющихся треугольников разрезается по высоте, выходящей из прямого угла, на два других. Докажите, что после любого количества ходов среди треугольников найдутся два одинаковых.
7. Игровое поле представляет собой полосу из $n + 1$ ячейки, пронумерованных от 0 до n слева направо. В нулевой ячейке стоят n фишек, остальные – пустые. За один ход можно выбрать непустую ячейку (пусть в ней стоит k фишек) и передвинуть одну из фишек вправо не более, чем на k позиций. Докажите, что все фишки соберутся в самой правой ячейке не раньше, чем через $\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$ ходов. (Такая скобка – округление вверх.)