

Вступительная олимпиада

1. На однокруговой чемпионат по шахматам заявилось 6 игроков. В каждом туре игроков разбивают на пары. Расписание турнира считается сбалансированным, если у каждого игрока цвета фигур, которыми он играет, меняются в каждом туре. Можно ли составить сбалансированное расписание? (Однокруговой чемпионат — такой, в котором каждая команда играет с каждой из остальных команд ровно один раз.)
2. Взглянув на часы, Юра сказал, что через 7 часов точно будет «завтра». Найдите все натуральные k такие, что можно наверняка утверждать, что k часов назад было «вчера». (Полночь относится к дню, следующему за ней, а не к предыдущему.)
3. На доске написаны десять различных натуральных чисел. Для каждой двух чисел из большего вычли меньшее. Среди этих разностей оказалось ровно 44 различных. Докажите, что одно из исходных десяти чисел равно полусумме двух других.
4. Обозначим $K(n) = \text{НОК}(1, 2, \dots, n)$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $K(n) \cdot K(n+2) = (K(n+1))^2$.
5. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC наружу построили равносторонние треугольники ACP и BQC . Во сколько раз длина отрезка BP отличается от длины отрезка, соединяющего середины AB и PQ ?
6. Вершины правильного $2N$ -угольника пронумерованы числами от 1 до $2N$ в некотором порядке. На каждой стороне многоугольника записали сумму номеров на её концах. Оказалось, что на любых двух диаметрально противоположных сторонах многоугольника записаны равные суммы. При каких $N \geq 2$ это возможно?