

Матбой М7 – М7

1. В государстве десять городов, соединённых десятью дорогами по кругу, и ещё один город (столица), связанный дорогами со всеми. По каждой дороге надо проложить либо троллейбусный, либо трамвайный маршрут так, чтобы, выбрав любой вид транспорта, можно было, пользуясь только им, из любого города добраться до любого другого. Сколькими способами это можно сделать?
2. Маша записала на доске четырехзначное число. Дима записал его в обратном порядке. Пришла Катя и записала произведение чисел Маши и Димы. После полдника пришел Егор и заметил, что число Кати делится на 1000. Какие числа могла записать Маша?
3. Учитель решил, что будет забавно дать классу, в котором 32 ученика, контрольную, в которой 32 задачи. В итоге каждую задачу решило не меньше 26 детей. Докажите, что есть два ребенка, которые вместе умеют решать все задачи.
4. Найдите наименьшее натуральное число n , такое что сумма цифр числа n равняется сумме цифр числа $11n$.
5. Петя составил из карточек с числами $1, 2, \dots, 12$ шесть правильных дробей. Могла ли сумма всех дробей Пети оказаться целой?
6. Два очень хитрых ЛМШонка решили удивить своего преподавателя. Преподаватель выбирает 16 пронумерованных листочков из 30, пройденных на смене, и отдает их первому хитрому ЛМШонку. Тот, в свою очередь, выбирает два листочка. Преподаватель добавляет к этой паре еще один листочек из тех, которые у него остались. Задача второго хитрого ЛМШонка отгадать, какой листочек добавил преподаватель. Смогут ли хитрые ЛМШата договориться заранее, чтобы при любых действиях преподавателя у них все получилось?
7. Всего в ЛМШ приехало 198 ЛМШат-математиков. Все имеют разный рост и размер ноги (они не обязательно пропорциональны). Но экспериментальным путем выяснили, что для любых 100 детей самый высокий ЛМШонок имеет самый большой размер ноги. Докажите, что можно выбирать 100 ЛМШат так, чтобы самый низкий из них имел самый маленький размер ноги.
8. За столом собрались 4 жителя острова рыцарей и лжецов. 1-й: «Лжецов за этим столом больше, чем рыцарей.» 2-й: «Лжецов за этим столом меньше, чем рыцарей.» 3-й: «Рыцарей и лжецов за этим столом поровну.» 4-й: «По первым трем высказываниям невозможно определить, рыцарь я или лжец.» Кто есть кто?