

## Внутренний матбой М7

1. Дима решил провести турнир М7 по настольному теннису (каждый играет с каждым ровно один раз, ничьих в теннисе не бывает). Назовем четверку детей понятной, если среди них есть ребенок, который выиграл у остальных трех, и ребенок, который проиграл остальным трем. Дима хочет, чтобы была хотя бы одна понятная четверка. Какое минимальное количество детей Дима должен сагитировать участвовать в турнире, чтобы точно добиться желаемого?
2. Дан треугольник  $ABC$ . Известно, что  $\angle B = 3\angle C$ . На стороне  $AC$  отмечены такие точки  $M$  и  $N$ , что  $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$ . Перпендикуляр, опущенный из точки  $A$  на прямую  $BN$ , пересекает отрезок  $BM$  в точке  $K$ . Докажите, что  $NK$  – биссектриса угла  $ANB$ .
3. Найдите все натуральные числа  $n$ , для которых число  $2^{n+1} - n^2$  является простым.
4. На кухне стояли банки со сгущенкой весом 100, 101, ..., 200 грамм, причем на каждой банке был написан ее вес. В открытое окно залетели несколько мух и утонули в банках (в одной банке могло утонуть несколько мух). Известно, что каждая муха весит ровно 1 г. У дежурного есть двухчашечные весы без гирь — они показывают, на какой из чашек лежит больший вес (а если поровну — то показывают равновесие). Может ли он найти какую-нибудь банку, в которой утонула хотя бы одна муха?
5. На доске записаны 10 различных двухзначных чисел. Докажите, что можно некоторые числа покрасить в красный цвет, а некоторые в синий так, что оба цвета представлены и сумма красных чисел будет равна сумме синих. Нельзя красить число сразу в оба цвета, но можно вообще не красить.
6. Неотрицательные числа  $a, b, c$  таковы, что  $a^2 - b^2 = bc$  и  $b^2 - c^2 = ab$ . Докажите, что  $abc = 0$ .
7. В стоэтажном доме каждый этаж представляет собой квадрат  $8 \times 8$ , как-то разбитый на прямоугольные квартиры по клеточкам. Обязательно ли найдутся две квартиры такие, что одна расположена над другой (не обязательно на соседних этажах) и полностью совпадает по границам?
8. Куб со стороной 9 выложен из единичных кубиков. Маша хочет, чтобы каждая грань большого куба была одноцветной. Может ли Катя раскрасить единичные кубики в два цвета так, чтобы ей помешать?