

## Спуск

Упр. Докажите, что если каждая цифра числа меньше предыдущей, то оно не делится на 111.

Упр. Докажите, что все три стороны треугольника с углами  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  не могут одновременно выражаться целыми числами.

1. Дана пифагорова тройка чётных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Докажите, что есть другая пифагорова тройка, числа которой соответственно меньше исходных, и хотя бы одно из них нечётно.
2. Вася считает каждое натуральное число либо прекрасным, либо ужасным. Любое ужасное число можно представить в виде суммы ужасного и прекрасного. Докажите, что Вася считает все числа прекрасными.
3. Решите в натуральных числах уравнение  $x^2 + y^2 = 3^n$ .
4. Даны  $2n + 1$  гирь, вес каждой — натуральное количество граммов. Известно, что какая бы гиря ни потерялась, остальные можно разбить на две кучки равного веса по  $n$  гирь. Докажите, что все гири имеют равный вес.
5. Найдите (а) все тройки натуральных чисел, сумма квадратов которых кратна их удвоенному произведению; (б) все четвёрки натуральных чисел, сумма квадратов которых равна их удвоенному произведению.
6. Натуральное число  $N$  делится на число 10101010101. Докажите, что в десятичной записи  $N$  по крайней мере 6 цифр отличны от 0.
7. (а) Докажите, что ни одно число вида  $8k + 7$  нельзя представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел.  
(б) Докажите, что ни одно число вида  $4^n(8k + 7)$  (где  $n \in \mathbb{N}$ ) нельзя представить в виде суммы квадратов трёх натуральных чисел.
8. Докажите, что куб нельзя разрезать на конечное число кубиков попарно различного размера.