

## Игра Крестики-Нолики

Во всех задач нужно указать все возможные ответы. Неполные ответы считаются неправильными. Успехов:)

### Первая строка

1. Шестизначное число  $\overline{20022q}$  является простым только для одной цифры  $q$ . Чему она равна?
2. В М7 учатся дружелюбные и необщительные лмшата, но абсолютно все любят играть в волейбол. Катя позвала трех лмшат играть в волейбол. Потом лмшата звали своих друзей. Известно, что каждый дружелюбный лмшонок, которого позвали, приводит с собой еще трех новых лмшат. Необщительные лмшата не приводят никого. Сколько всего лмшат в М7 в итоге играют в волейбол, если известно, что дружелюбных лмшат 20? Катю тоже считаем за лмшонка.
3. Из спичек сложили квадрат, разбитый линиями из спичек на 64 квадратных поля со стороной в одну спичку. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы с любого поля на любое другое можно было пройти, не перепрыгивая через спички?
4. На плоскости расположены точки  $A, B, C, D, X$ . Известны некоторые длины отрезков:  $AC = 2, AX = 5, AD = 11, CD = 9, CB = 10, DB = 1, XB = 7$ . Найдите длину отрезка  $XD$ .
5. Двухзначное число назовем веселым, если оно равно сумме цифры своих десятков и квадрата цифры своих единиц. Найдите все веселые числа.

### Вторая строка

6. Каждый день семиклассник учит одинаковое количество слов. К вечеру своего дня рождения он знал 1000 слов. В первый день того же месяца вечером он знал 820 слов, а в последний день этого месяца вечером – 1100. Когда день рождения у семиклассника?
7. Какой максимальный остаток может давать трёхзначное число при делении на свою сумму цифр?
8. За круглым столом сидят  $N$  человек. При каких  $N$  они могут пересесть так, что любые два прежних соседа теперь будут сидеть через два человека?
9. Какое наибольшее количество целых чисел можно записать в ряд так, чтобы сумма любых пяти подряд идущих из них была больше нуля, а сумма любых семи подряд идущих из них была меньше нуля?
10. Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника  $2 \times 5$  в 5 цветов так, чтобы в каждой строчке и в каждом столбце все клетки были разного цвета?

### Третья строка

11. Малыш и Карлсон по очереди берут конфеты из мешка. Малыш берет 1 конфету, потом Карлсон берет две, затем Малыш – 3, Карлсон – 4 и т.д. Если конфет осталось меньше необходимого, то забираются все конфеты. Сколько конфет было в мешке, если всего Малыш взял 101 конфету?
12. Найдите величины углов треугольника, в котором  $\angle A = 60^\circ$ , а высота вдвое короче биссектрисы  $AD$ .
13. Какую цифру можно подставить вместо звездочки, чтобы число  $\underbrace{11\dots1}_{2023} \underbrace{22\dots2}_{2024} *$  стало точным квадратом?
14. В числе  $a$  цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа  $9a$ ?
15. Дано число 1836549, можно брать две соседние ненулевые цифры и менять их местами, после чего вычесть из каждой из них по 1. Какое наименьшее число может получиться после этих операций?

#### Четвертая строка

16. Каждый лмшонок ходит хотя бы в один из 30 клубов, но не более чем в два из них. Оказалось, что в каждом клубе занимается ровно 30 человек, а для каждых двух клубов есть лмшонок, который посещает оба эти клуба. Какое наибольшее количество учеников может быть в ЛМШ?
17. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от единицы и самого числа. Найти все натуральные числа, имеющие не меньше двух различных собственных делителей и делящиеся на разность любых двух из них.
18. Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ , а биссектрисы углов  $C$  и  $D$  пересекаются в точке  $Q$  (точки  $Q$  и  $P$  различны). Прямая  $PQ$  проходит через середину стороны  $AB$ . Найдите  $\angle DAB$ , если  $\angle ABC = x$ .
19. Кирилл выписал сто первых чисел, представимых в виде суммы одной или нескольких степеней тройки  $(1, 3, 9, \dots)$ . Каждую использовал не более, чем 1 раз. Какое число он выписал последним?
20. Маша склеила из одинаковых кубиков параллелепипед и окрасила его снаружи. Оказалось, что ровно половина всех граней кубиков окрашена. Сколько кубиков могла использовать Маша?

#### Пятая строка

21. При скольких натуральных  $n \geq 2$  верно сравнение  $20 \equiv -16 \pmod n$ ?
22. Если перевернуть лист, на котором написаны цифры, то цифры 0, 1, 8 не изменятся, 6 и 9 поменяются местами, остальные цифры потеряют смысл. Сколько существует девятизначных чисел, которые при переворачивании листа не изменяются?
23. Дан треугольник  $ABC$ , сторона  $AB$  разбита на 4 равных отрезка  $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$ , а сторона  $AC$  на 5 равных отрезков  $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ .

$C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ . Во сколько раз площадь треугольника ABC больше суммы площадей треугольников  $C_1B_1C_2, C_2B_2C_3, C_3B_3C_4, C_4BC$ ?

24. Решите ребус:  $\overline{aa} \cdot \overline{abc} \cdot \overline{bc} = \overline{abca\overline{bc}}$  (одинаковые буквы - одинаковые цифры, разные буквы - разные цифры).
25. Несколько лмшат из М7 несли конфеты преподавателям, чтобы они согласились принять у них задачи. По дороге каждый лмшонок украл и съел по одной конфете у каждого другого. В результате преподавателям принесли только 53 конфеты. Сколько конфет было у каждого лмшонка изначально, если известно, что у всех было поровну?