

Биссектрисы и серединные перпендикуляры

Упр. 1. В треугольнике ABC биссектрисы углов B и C пересекаются в точке I , и известно, что $\angle A = \alpha$. Чему равен $\angle BIC$?

Упр. 2. В треугольнике с углами α , β и γ у всех шести внешних углов проведены биссектрисы. Докажите, что они образуют треугольник, и найдите его углы.

Упр. 3. (а) Дан угол и точка M внутри угла. Пусть l — биссектриса угла, a и b — длины перпендикуляров, опущенных из M на стороны угла. Докажите, что $M \in l$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

(б) Даны две пересекающиеся прямые l и m . Найдите все такие точки, для каждой из которых расстояние от нее до l равно расстоянию от нее до m .

Упр. 4. Даны точки A , B и M . Пусть l — серединный перпендикуляр к отрезку AB . Докажите, что $M \in l$ тогда и только тогда, когда $AM = BM$.

1. $KLMN$ — выпуклый четырехугольник, в котором равны углы K и L . Серединные перпендикуляры к сторонам KN и LM пересекаются на стороне KL . Докажите, что в этом четырехугольнике равны диагонали.

2. Точки M и N — середины равных сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P . Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P .

3. Дан равнобедренный $\triangle ABC$ с периметром 46 и основанием $AC = 14$.

(а) Точка D лежит на стороне AB , E — на стороне BC , причем $DB = 8$ и $ED \perp AB$. Найдите периметр $\triangle AEC$.

(б) Точка F такова, что $FB = 1$ и $FB \parallel AC$. Докажите, что $AF + FC > 32$.

Упр. 5. Докажите, что в $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке:

(с) биссектрисы углов треугольника;

(д) биссектриса угла A и биссектрисы внешних углов B и C ;

(е) серединные перпендикуляры к сторонам треугольника.

Упр. 6. Дан угол с вершиной O . На одной стороне угла отмечены точки A_1 , A_2 , A_3 , а на другой — точки B_1 , B_2 , B_3 . Пусть в $\triangle OA_iB_i$ биссектрисы углов A_i и B_i пересекаются в точке D_i ($i = 1, 2, 3$). Докажите, что точки D_1 , D_2 , D_3 лежат на одной прямой.

Идея. Одна и та же прямая может являться одновременно биссектрисой и серединным перпендикуляром для разных треугольников.

4. В треугольнике ABC : $\angle A = 45^\circ$, BH — высота, точка K лежит на стороне AC , причем $BC = CK$. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника ABK совпадает с точкой пересечения внешних биссектрис углов H и B треугольника BCH .

Идея. Поискать треугольник, у которого известны две биссектрисы. Тогда третья проходит через их точку пересечения.

5. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол $B < 60^\circ$, AK – биссектриса ($K \in BC$), $CD \perp AK$ ($D \in AB$), биссектриса $\angle KDB$ пересекает прямую AK в точке P . Докажите, что $BP \parallel AC$.
6. В четырехугольнике $ABCD$: AC – биссектриса угла A , $\angle ABD = 70^\circ$, $\angle ADB = 80^\circ$, $\angle CBD = 55^\circ$. Найдите $\angle C$.
7. В $\triangle ABC$ проведены биссектрисы AD и BE , причем DE – биссектриса угла ADC . Найдите $\angle A$.
8. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$: $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Докажите, что биссектрисы углов B , D и F пересекаются в одной точке.
9. В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы тупые, $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$ и $\angle E = \angle F$. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам AB , CD и EF пересекаются в одной точке.
10. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении стороны DC за точку C взята точка E так, что $\angle EAD = 55^\circ$. На продолжении стороны CB за точку B взята точка F так, что $\angle EFC = 20^\circ$. Найдите $\angle AFB$.