

Запуск процессов

Идея. Иногда полезно запустить процесс, который приведет в итоге к нужному результату. Для этого нужно доказать от противного, что очередной шаг процесса возможен. Ну и также нужно доказать его конечность.

1. Квадрат 20×20 разбит на единичные квадратики. Несколько сторон единичных квадратиков стёрты, причем стёртые отрезки не имеют общих концов, а на верхней и правой сторонах квадрата стёртых отрезков нет. Докажите, что из левого нижнего угла квадрата можно добраться в правый верхний по нестёртым отрезкам.
2. В каждой клетке клетчатого квадрата 10×10 провели по диагонали. Докажите, что можно покрасить каждый из 200 получившихся треугольников в один из трёх цветов так, чтобы треугольники одинакового цвета по стороне не граничили.
3. Несколько кроликов построились в ряд. Оказалось, что у каждого кролика, кроме двух крайних, поровну друзей справа и слева от него. Докажите, что у двух крайних кроликов поровну друзей.
4. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить натуральные числа так, чтобы любые два числа, отличающиеся на два или в два раза, были покрашены в разные цвета?
5. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?
6. Есть гири массой 1 г, 2 г, 4 г, ..., причём среди них могут быть одинаковые. На две чашки весов положили гири так, чтобы наступило равновесие. Известно, что на правой чашке все гири различны. Докажите, что на левой чашке не меньше гирь, чем на правой.
7. В лагере собрались 200 детей, причём каждый из них имеет среди присутствующих не более 99 врагов. Докажите, что их можно так рассадить за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.
8. В компании из 2024 человек для любых 1012 есть человек, который знает их всех. Докажите, что есть человек, который знает всех.