



## Остатки 7 июля

1. Пусть  $\text{НОД}(a, b) = 1$ .
  - а) Докажите, что среди чисел вида  $ka$ , где  $k$  – целое число, встретятся все остатки при делении на  $b$ .
  - б) Докажите, что среди чисел вида  $ka - r$ , где  $r$  фиксировано, встретятся все остатки при делении на  $b$ .
  - в) Докажите, что для любого целого  $r$  найдутся такие целые  $x$  и  $y$ , что  $ax + by = r$ .
2. Катя отметила все натуральные числа, дающие остаток 7 при делении на 505. Юра перемножил  $n$  подряд идущих отмеченных чисел. Докажите, что если  $n$  взаимно просто с числом 505, то получившееся произведение делится на  $n$ .
3. Павел Сергеевич где-то раздобыл бесконечную доску и выписал на неё натуральный ряд. Каждый из учащихся группы М7 «Профи» выбрал некоторое натуральное число  $N$  и зачеркнул на доске каждое  $N$ -ое число, не обязательно с единицы. Например, выбравший число 5, мог зачеркнуть числа 3, 8, 13, 18 и т.д. В итоге все натуральные числа оказались зачёркнуты ровно 1 раз. Докажите, что числа, выбранные любыми двумя семиклассниками, имеют общий делитель, больший 1.
4. Все натуральные числа от 1 до  $2n$  выписаны в строчку в некотором порядке. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. Докажите, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на  $2n$  одинаковый остаток.
5. Числа от 1 до  $2n$  разбиты на две группы по  $n$  чисел в каждой. Докажите, что наборы остатков попарных сумм чисел каждой группы при делении на  $2n$  совпадают (считаются в том числе попарные суммы вида  $a + a$ ).
6. Пусть  $p$  – простое число. Для каждого  $k$  в промежутке от 1 до  $p - 1$  включительно обозначим за  $a_k$  количество натуральных делителей числа  $kp + 1$ , не меньших  $k$ , но не больших  $p - 1$ . Найдите сумму  $a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}$ .
7. В клетках квадратной таблицы  $n \times n$ , где  $n > 1$ , требуется расставить различные целые числа от 1 до  $n^2$  так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на  $n$  – в разных строках и в разных столбцах. При каких  $n$  это возможно?
8. Пусть  $p$  и  $q$  – взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0, каждый раз либо на  $p$  вправо, либо на  $q$  влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального  $d < p + q$  найдутся два числа, посещенные лягушкой и отличающиеся на  $d$ .



## Остатки 7 июля

1. Пусть  $\text{НОД}(a, b) = 1$ .
  - а) Докажите, что среди чисел вида  $ka$ , где  $k$  – целое число, встретятся все остатки при делении на  $b$ .
  - б) Докажите, что среди чисел вида  $ka - r$ , где  $r$  фиксировано, встретятся все остатки при делении на  $b$ .
  - в) Докажите, что для любого целого  $r$  найдутся такие целые  $x$  и  $y$ , что  $ax + by = r$ .
2. Катя отметила все натуральные числа, дающие остаток 7 при делении на 505. Юра перемножил  $n$  подряд идущих отмеченных чисел. Докажите, что если  $n$  взаимно просто с числом 505, то получившееся произведение делится на  $n$ .
3. Павел Сергеевич где-то раздобыл бесконечную доску и выписал на неё натуральный ряд. Каждый из учащихся группы М7 «Профи» выбрал некоторое натуральное число  $N$  и зачеркнул на доске каждое  $N$ -ое число, не обязательно с единицы. Например, выбравший число 5, мог зачеркнуть числа 3, 8, 13, 18 и т.д. В итоге все натуральные числа оказались зачёркнуты ровно 1 раз. Докажите, что числа, выбранные любыми двумя семиклассниками, имеют общий делитель, больший 1.
4. Все натуральные числа от 1 до  $2n$  выписаны в строчку в некотором порядке. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. Докажите, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на  $2n$  одинаковый остаток.
5. Числа от 1 до  $2n$  разбиты на две группы по  $n$  чисел в каждой. Докажите, что наборы остатков попарных сумм чисел каждой группы при делении на  $2n$  совпадают (считаются в том числе попарные суммы вида  $a + a$ ).
6. Пусть  $p$  – простое число. Для каждого  $k$  в промежутке от 1 до  $p - 1$  включительно обозначим за  $a_k$  количество натуральных делителей числа  $kp + 1$ , не меньших  $k$ , но не больших  $p - 1$ . Найдите сумму  $a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}$ .
7. В клетках квадратной таблицы  $n \times n$ , где  $n > 1$ , требуется расставить различные целые числа от 1 до  $n^2$  так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на  $n$  – в разных строках и в разных столбцах. При каких  $n$  это возможно?
8. Пусть  $p$  и  $q$  – взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0, каждый раз либо на  $p$  вправо, либо на  $q$  влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального  $d < p + q$  найдутся два числа, посещенные лягушкой и отличающиеся на  $d$ .