



Теория чисел и метод спуска

17 июля

Иллюстрация метода

1. Натуральное число образовано цифрами, записанными в порядке убывания. Докажите, что оно не делится на 11.
2. **Основная теорема арифметики.** Разложение натурального числа на простые множители единственно с точностью до порядка множителей.

Задачи

3. Число называется рациональным, если представимо в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$. Докажите, что число $\sqrt{15}$ рациональным не является.
4. Докажите, что не существует натуральных чисел x, y, n таких, что $x^2 + y^2 = 3^n$.
5. Решите в целых числах уравнение: $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$.
6. Дан набор из $2n + 1$ натуральных чисел. Известно, что любые $2n$ чисел из набора можно разбить на две группы по n чисел так, что суммы в них будут равны. Докажите, что все числа в наборе равны.
7. Докажите, что если a и b натуральные числа, $a > b > 2$, то $\frac{2^a+1}{2^b-1}$ – нецелое число.
8. Число вида $a^2 + a + 1$, где a – натурально, назовём странным. Докажите, что бесконечно много странных чисел являются произведением странных, и бесконечно много странных чисел таковыми не являются.
9. Дана пифагорова тройка натуральных чисел a, b, c , то есть $a^2 + b^2 = c^2$. Обозначим $\frac{m}{n} = \frac{c-a}{b}$.
 - а) Выразите через m и n дробь $\frac{c+a}{b}$.
 - б) Выразите отношение $a:b:c$ через m и n .
 - в) Запишите общую формулу для a, b, c . Установите, какие условия необходимы и достаточны для того, чтобы формулы задавали тройку взаимно простых a, b, c , в которой b – чётно.
 - г) Рассмотрим теперь уравнение $x^4 + y^4 = z^2$, в котором числа x, y, z – взаимно просты, и, для определённости, x – чётно. Используя формулы из предыдущего пункта запишите решение $(x^2; y^2; z)$ через m, n , а затем ещё раз выразите через эти формулы тройку (y, m, n) через взаимно простые p, q .
 - д) Докажите, что p, q и $p^2 + q^2$ – точные квадраты.
 - е) Докажите, что уравнение $x^4 + y^4 = z^2$ не имеет натуральных решений.
 - ё) Докажите, что уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ не имеет натуральных решений.

Е ≠ Е



Теория чисел и метод спуска

17 июля

Иллюстрация метода

1. Натуральное число образовано цифрами, записанными в порядке убывания. Докажите, что оно не делится на 11.
2. **Основная теорема арифметики.** Разложение натурального числа на простые множители единственно с точностью до порядка множителей.

Задачи

3. Число называется рациональным, если представимо в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$. Докажите, что число $\sqrt{15}$ рациональным не является.
4. Докажите, что не существует натуральных чисел x, y, n таких, что $x^2 + y^2 = 3^n$.
5. Решите в целых числах уравнение: $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$.
6. Дан набор из $2n + 1$ натуральных чисел. Известно, что любые $2n$ чисел из набора можно разбить на две группы по n чисел так, что суммы в них будут равны. Докажите, что все числа в наборе равны.
7. Докажите, что если a и b натуральные числа, $a > b > 2$, то $\frac{2^a+1}{2^b-1}$ – нецелое число.
8. Число вида $a^2 + a + 1$, где a – натурально, назовём странным. Докажите, что бесконечно много странных чисел являются произведением странных, и бесконечно много странных чисел таковыми не являются.
9. Дана пифагорова тройка натуральных чисел a, b, c , то есть $a^2 + b^2 = c^2$. Обозначим $\frac{m}{n} = \frac{c-a}{b}$.
 - а) Выразите через m и n дробь $\frac{c+a}{b}$.
 - б) Выразите отношение $a:b:c$ через m и n .
 - в) Запишите общую формулу для a, b, c . Установите, какие условия необходимы и достаточны для того, чтобы формулы задавали тройку взаимно простых a, b, c , в которой b – чётно.
 - г) Рассмотрим теперь уравнение $x^4 + y^4 = z^2$, в котором числа x, y, z – взаимно просты, и, для определённости, x – чётно. Используя формулы из предыдущего пункта запишите решение $(x^2; y^2; z)$ через m, n , а затем ещё раз выразите через эти формулы тройку (y, m, n) через взаимно простые p, q .
 - д) Докажите, что p, q и $p^2 + q^2$ – точные квадраты.
 - е) Докажите, что уравнение $x^4 + y^4 = z^2$ не имеет натуральных решений.
 - ё) Докажите, что уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ не имеет натуральных решений.

Е ≠ Е