

Матбой Max Pro 6 – Полупрофи 7

1. Петя составил из карточек с числами $1, 2, \dots, 12$ шесть правильных дробей. Могла ли сумма всех дробей Пети оказаться целой?
2. За столом собрались 4 жителя острова рыцарей и лжецов. 1-й: «Лжецов за этим столом больше, чем рыцарей». 2-й: «Лжецов за этим столом меньше, чем рыцарей». 3-й: «Рыцарей и лжецов за этим столом поровну». 4-й: «По первым трем высказываниям невозможно определить, рыцарь я или лжец». Кто есть кто?
3. В государстве десять городов, соединённых десятью дорогами по кругу, и ещё один город (столица), связанный дорогами со всеми. По каждой дороге надо проложить либо троллейбусный, либо трамвайный маршрут так, чтобы, выбрав любой вид транспорта, можно было, пользуясь только им, из любого города добраться до любого другого. Сколькими способами это можно сделать?
4. На окружности отмечена 31 точка. Отмеченные точки покрашены в 6 цветов. Докажите, что найдется четырехугольник с одноцветными вершинами, внутри которого не содержится центр окружности. (Точка на стороне четырехугольника не лежит внутри него.)
5. На столе лежит 1234 камня. Два игрока играют в следующую игру: первый игрок может взять некоторое нечетное число камней от 1 до 99, а второй игрок может взять некоторое четное число камней от 2 до 100. Ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
6. Клетки таблицы 10×10 заполнили числами от 1 до 100. Докажите, что найдется трехклеточный уголок, сумма чисел в котором делится на три.
7. Школьник последовательно выписывает цифры, каждый раз по своему усмотрению выбирая от 1 до 7. Докажите, что рано или поздно он получит составное число.
8. На какое наименьшее число частей можно разломать палку длиной 200 см, чтобы из всех полученных частей можно было сложить как 10 одинаковых квадратов, так и 25 одинаковых квадратов?