

Метод математической индукции

Упр. 1. Треугольник разбит на несколько частей несколькими прямыми. Докажите, что хотя бы одна из частей является треугольником.

Упр. 2. Докажите по индукции, что $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Докажите, что все числа 1007, 10017, 100117, 1001117, ... делятся на 53.

2. Докажите, что $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Торт разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдётся хотя бы один чистый кусок.

4. На плоскости провели несколько прямых и окружностей. Они разбили плоскость на части, получилась карта. Докажите, что эту карту можно правильным образом раскрасить в 2 цвета.

5. Докажите, что при натуральных n и всех $x > -1$ выполняется неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

6. Числа Фибоначчи задаются правилами $F_0 = 1$; $F_1 = 1$; $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для всех $n \geq 2$. Докажите, что для любого $k \geq 1$ выполняется равенство $F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_{k-1} = F_{k+1} - 1$.

7. Докажите по индукции, что

$$\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \dots + \frac{(m+n)!}{n!} = \frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)}.$$

8. Докажите по индукции, что $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1} .

9. Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров на стержне (внизу самое большое) и ещё два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее.

(а) Докажите, что можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней;

(б) Докажите, что это можно сделать за $2^n - 1$ перекладывание.