

## Заключительная олимпиада

### Довывод

1. Катя покрасила в синий или красный цвет каждое из чисел  $1, 2, 3, \dots, 100, 101$ . Оказалось, что наибольшее синее число равно количеству синих чисел, а наименьшее красное число равно половине количества красных чисел. Сколько чисел покрашено в синий цвет?
2. Петя перемножил все натуральные числа от 1 до 2024, вычел 1 из произведения и результат записал на длинной полоске бумаги. Какое наименьшее количество цифр в этом числе надо заменить нулями, чтобы оно стало делиться на 13?
3. Выпуклый  $n$ -угольник ( $n > 5$ ) разрезан по всем диагоналям. Докажите, что среди получившихся при этом частей найдутся части разной площади.
4. Пусть  $n$  — нечетное натуральное число. Все единичные отрезки клетчатого квадрата  $n \times n$  покрашены в красный или синий цвета. При каком наибольшем количестве красных отрезков можно утверждать, что гарантированно найдется клетка, у которой хотя бы три стороны синие?
5. По кругу расположены 43 неотрицательных числа. Юра по этим числам на синих карточках написал всевозможные суммы квадратов соседних чисел, а на красных карточках — удвоенные произведения соседних чисел. Докажите, что есть красная и синяя карточки, для которых число на красной карточке не меньше, чем на синей.

### Вывод

6. На диагонали  $AC$  прямоугольника  $ABCD$  выбраны точки  $E$  и  $F$  такие, что  $AE = AB$  и  $AF = AD$ . Пусть  $G$  и  $H$  — основания перпендикуляров, опущенных на сторону  $AB$  из точек  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что  $AG + FH = AC$ .
7. В кружке 49 учеников. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых.
8. Паша записал на доске два натуральных числа, меньших миллиарда. Затем он стал выполнять следующие действия: в уме складывает два последних записанных на доске числа, к результату прибавляет 2024, затем полученную сумму раскладывает на простые множители и, наконец, записывает на доску наибольший из этих множителей. Появится ли когда-нибудь на доске число, большее  $2024^{2024}$ ?

### Послевывод

9. Есть 288 монет, 144 одного вида и 144 другого вида, внешне неразличимых. Можно ли за три взвешивания узнать, весят ли они одинаково?

## Заключительная олимпиада

### Довывод

1. Катя покрасила в синий или красный цвет каждое из чисел  $1, 2, 3, \dots, 100, 101$ . Оказалось, что наибольшее синее число равно количеству синих чисел, а наименьшее красное число равно половине количества красных чисел. Сколько чисел покрашено в синий цвет?
2. Петя перемножил все натуральные числа от 1 до 2024, вычел 1 из произведения и результат записал на длинной полоске бумаги. Какое наименьшее количество цифр в этом числе надо заменить нулями, чтобы оно стало делиться на 13?
3. Выпуклый  $n$ -угольник ( $n > 5$ ) разрезан по всем диагоналям. Докажите, что среди получившихся при этом частей найдутся части разной площади.
4. Пусть  $n$  — нечетное натуральное число. Все единичные отрезки клетчатого квадрата  $n \times n$  покрашены в красный или синий цвета. При каком наибольшем количестве красных отрезков можно утверждать, что гарантированно найдется клетка, у которой хотя бы три стороны синие?
5. По кругу расположены 43 неотрицательных числа. Юра по этим числам на синих карточках написал всевозможные суммы квадратов соседних чисел, а на красных карточках — удвоенные произведения соседних чисел. Докажите, что есть красная и синяя карточки, для которых число на красной карточке не меньше, чем на синей.

### Вывод

6. На диагонали  $AC$  прямоугольника  $ABCD$  выбраны точки  $E$  и  $F$  такие, что  $AE = AB$  и  $AF = AD$ . Пусть  $G$  и  $H$  — основания перпендикуляров, опущенных на сторону  $AB$  из точек  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что  $AG + FH = AC$ .
7. В кружке 49 учеников. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых.
8. Паша записал на доске два натуральных числа, меньших миллиарда. Затем он стал выполнять следующие действия: в уме складывает два последних записанных на доске числа, к результату прибавляет 2024, затем полученную сумму раскладывает на простые множители и, наконец, записывает на доску наибольший из этих множителей. Появится ли когда-нибудь на доске число, большее  $2024^{2024}$ ?

### Послевывод

9. Есть 288 монет, 144 одного вида и 144 другого вида, внешне неразличимых. Можно ли за три взвешивания узнать, весят ли они одинаково?