



Перекидывание отношений

17 июля

1. а) **Теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике.** На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки K и M так, что $\frac{BM}{MC} = \frac{p}{q}$ и $\frac{AK}{KC} = \frac{m}{n}$. AM и BK пересекаются в точке O . Найдите отношение $\frac{BO}{OK}$.
- б) **Теорема Менелая.** В треугольнике ABC на сторонах AB , BC и продолжении AC за точку C отмечены точки A_1 , C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если отмеченные точки лежат на одной прямой, тогда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.
- в) Докажите, что если $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, то точки A_1 , C_1 и B_1 лежат на одной прямой.

Задачи

2. **Теорема Чевы.** На сторонах BC , AC , AB треугольника ABC отмечены точки K , L , M соответственно. Докажите, что отрезки AK , BL , CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$.
3. На продолжении стороны AB квадрата $ABCD$ за вершину B отложен отрезок $BP = 2AB$. Точка M – середина стороны CD , а отрезки BM и AC пересекаются в точке Q . В каком отношении прямая PQ делит сторону BC ?
4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F – середины сторон AD и BC соответственно. Отрезки CE и DF пересекаются в точке O . Докажите, что если прямые AO и BO делят сторону CD на три равные части, то $ABCD$ – параллелограмм.
5. На сторонах AB , BC , CD , DA параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K , L , M , N соответственно, $BL : LC = AN : ND$, $AK : KB = DM : MC$. Отрезки KM и NL пересекаются в точке O . Докажите, что прямые BN , KD , CO пересекаются в одной точке.
6. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно стороне BC , в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.
7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отмечены точка O – точка пересечения диагоналей, а M – середина стороны BC . Пусть прямые MO и AD пересекаются в точке E . Докажите, что $AE : ED = S_{ABO} : S_{CDO}$.
8. Точки A_0 , B_0 и C_0 лежат на сторонах соответственно BC , AC и AB треугольника ABC , причём отрезки AA_0 , BB_0 и CC_0 пересекаются в одной точке. Докажите, что площадь треугольника $A_0B_0C_0$ не превосходит четверти площади треугольника ABC .



Перекидывание отношений

17 июля

1. а) **Теорема о пропорциональных отрезках в треугольнике.** На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены соответственно точки K и M так, что $\frac{BM}{MC} = \frac{p}{q}$ и $\frac{AK}{KC} = \frac{m}{n}$. AM и BK пересекаются в точке O . Найдите отношение $\frac{BO}{OK}$.
- б) **Теорема Менелая.** В треугольнике ABC на сторонах AB , BC и продолжении AC за точку C отмечены точки A_1 , C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если отмеченные точки лежат на одной прямой, тогда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.
- в) Докажите, что если $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, то точки A_1 , C_1 и B_1 лежат на одной прямой.

Задачи

2. **Теорема Чевы.** На сторонах BC , AC , AB треугольника ABC отмечены точки K , L , M соответственно. Докажите, что отрезки AK , BL , CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$.
3. На продолжении стороны AB квадрата $ABCD$ за вершину B отложен отрезок $BP = 2AB$. Точка M – середина стороны CD , а отрезки BM и AC пересекаются в точке Q . В каком отношении прямая PQ делит сторону BC ?
4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F – середины сторон AD и BC соответственно. Отрезки CE и DF пересекаются в точке O . Докажите, что если прямые AO и BO делят сторону CD на три равные части, то $ABCD$ – параллелограмм.
5. На сторонах AB , BC , CD , DA параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K , L , M , N соответственно, $BL : LC = AN : ND$, $AK : KB = DM : MC$. Отрезки KM и NL пересекаются в точке O . Докажите, что прямые BN , KD , CO пересекаются в одной точке.
6. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно стороне BC , в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.
7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отмечены точка O – точка пересечения диагоналей, а M – середина стороны BC . Пусть прямые MO и AD пересекаются в точке E . Докажите, что $AE : ED = S_{ABO} : S_{CDO}$.
8. Точки A_0 , B_0 и C_0 лежат на сторонах соответственно BC , AC и AB треугольника ABC , причём отрезки AA_0 , BB_0 и CC_0 пересекаются в одной точке. Докажите, что площадь треугольника $A_0B_0C_0$ не превосходит четверти площади треугольника ABC .