

Огрубление

Идея 1. Вместо неравенства $A \geq C$ порой удобнее доказать более сильное неравенство $B \geq C$. Для этого левую часть нужно закругить.

1. Докажите неравенство для натурального n :

$$\frac{n+1}{n+24} < \frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n+24} < \frac{n+1}{24}.$$

Идея 2. Для любых чисел x и y справедливо важнейшее неравенство

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

А значит, можно заменить выражение $x^2 + y^2$ на $2xy$, после чего значение не увеличится.

2. Даны положительные числа a, b . Докажите, что

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

3. Даны положительные числа a, b и c . Докажите, что

$$\left(\frac{1}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{1}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{1}{a+b} \right)^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right).$$

4. Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

5. Сумма пяти положительных чисел равна 1. Докажите, что одно из чисел больше суммы квадратов остальных.

6. Докажите, что при любых положительных a, b, c и d верно неравенство

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2.$$

7. Докажите, что для всех положительных чисел справедливо неравенство

$$\frac{a^2}{3a^2 + b^2 + 2ac} + \frac{b^2}{3b^2 + c^2 + 2ba} + \frac{c^2}{3c^2 + a^2 + 2cb} \leq \frac{1}{2}.$$

8. Докажите, что при любых неотрицательных a, b, c справедливо неравенство

$$\frac{a+1}{ab+a+1} + \frac{b+1}{bc+b+1} + \frac{c+1}{ca+c+1} \geq \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}.$$

9. Даны положительные числа $a \leq b \leq c \leq d$. Докажите неравенства

$$b+c+d \geq \frac{ab+b}{b+1} + \frac{bc+c}{c+1} + \frac{cd+d}{d+1} \geq a+b+c.$$

10. Длины сторон n -угольника равны a_1, a_2, \dots, a_n , а периметр равен p . Докажите, что $\frac{a_1}{p-a_1} + \frac{a_2}{p-a_2} + \dots + \frac{a_n}{p-a_n} < 2$.

11. Докажите, что $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.