



## Формула включений-исключений

8 июля

1. Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

**Формула включений-исключений.** Пусть даны  $k$  множеств. Обозначим за  $N_{i_1 i_2 \dots i_r}$  количество элементов, принадлежащих пересечению множеств  $i_1, i_2, \dots, i_r$ . Тогда выполняется формула:

$$N_{(i_1 \cup i_2 \cup \dots \cup i_k)} = N_1 + N_2 + \dots - N_{12} - N_{13} - \dots + N_{123} + N_{124} + \dots + (-1)^{k-1} N_{12 \dots k}$$

2. Докажите формулу включений-исключений:  
а) Выведите формулу, показывающую, сколько раз в правой части будет учтён элемент, который принадлежит ровно  $m$  множествам (с учётом плюсов и минусов).  
б) Докажите, что значение полученного в пункте а) выражения равно 1.
3. Найдите количество натуральных делителей числа  $N = 10^{40}$ , не являющихся ни точными квадратами, ни точными кубами, ни точными пятыми степенями натуральных чисел.
4. Сколькими способами можно переставить буквы слова «МАТЕМАТИК» так, чтобы одинаковые буквы рядом не стояли?
5. **Функция Эйлера.** Пусть  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ . Докажите, что количество чисел, меньших  $n$  и взаимно простых с ним, можно вычислить по формуле:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

6. Найдите количество натуральных чисел  $k \leq 2024$  таких, что  $\text{НОД}(k, 2024)$  – простое число.
7. Войдя в ресторан,  $n$  гостей оставили швейцару свои шляпы, а на выходе получили их обратно. Швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получит чужую шляпу?



## Формула включений-исключений

8 июля

1. Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

**Формула включений-исключений.** Пусть даны  $k$  множеств. Обозначим за  $N_{i_1 i_2 \dots i_r}$  количество элементов, принадлежащих пересечению множеств  $i_1, i_2, \dots, i_r$ . Тогда выполняется формула:

$$N_{(i_1 \cup i_2 \cup \dots \cup i_k)} = N_1 + N_2 + \dots - N_{12} - N_{13} - \dots + N_{123} + N_{124} + \dots + (-1)^{k-1} N_{12 \dots k}$$

2. Докажите формулу включений-исключений:  
а) Выведите формулу, показывающую, сколько раз в правой части будет учтён элемент, который принадлежит ровно  $m$  множествам (с учётом плюсов и минусов).  
б) Докажите, что значение полученного в пункте а) выражения равно 1.
3. Найдите количество натуральных делителей числа  $N = 10^{40}$ , не являющихся ни точными квадратами, ни точными кубами, ни точными пятыми степенями натуральных чисел.
4. Сколькими способами можно переставить буквы слова «МАТЕМАТИК» так, чтобы одинаковые буквы рядом не стояли?
5. **Функция Эйлера.** Пусть  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ . Докажите, что количество чисел, меньших  $n$  и взаимно простых с ним, можно вычислить по формуле:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

6. Найдите количество натуральных чисел  $k \leq 2024$  таких, что  $\text{НОД}(k, 2024)$  – простое число.
7. Войдя в ресторан,  $n$  гостей оставили швейцару свои шляпы, а на выходе получили их обратно. Швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получит чужую шляпу?