



Полный квадрат и неравенство Коши 19 июля

Неравенство Коши (между средним арифметическим и средним геометрическим)

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ при } x, y \geq 0$$

1. Для неотрицательных x, y, z докажите неравенство двумя способами: (1) сумма квадратов неотрицательна; (2) последовательно применяя неравенство Коши:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(y + z - x)$$

Задачи

2. Докажите неравенства:

а) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 14 \geq 2(2x + 3y + 2z)$

б) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

3. Докажите неравенства:

а) $a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16$, если $a > 0$

б) $4x^4 + 4y^3 + 5x^2 + y + 1 \geq 12xy$, если $x, y \geq 0$

4. Докажите неравенство для произвольных a, b :

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$$

5. Докажите неравенство для $a, b > 0$, $a^2 + ab + b^2 \leq 3$:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{2}{ab} \geq \frac{5}{2}$$

6. Докажите неравенство для $a + b = 1$:

$$a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}$$

7. Докажите неравенство для $a, b, c > 0$, $(a+b)(a+c) = 4$:

$$a + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 4$$



Полный квадрат и неравенство Коши 19 июля

Неравенство Коши (между средним арифметическим и средним геометрическим)

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ при } x, y \geq 0$$

1. Для неотрицательных x, y, z докажите неравенство двумя способами: (1) сумма квадратов неотрицательна; (2) последовательно применяя неравенство Коши:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(y + z - x)$$

Задачи

2. Докажите неравенства:

а) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 14 \geq 2(2x + 3y + 2z)$

б) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

3. Докажите неравенства:

а) $a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16$, если $a > 0$

б) $4x^4 + 4y^3 + 5x^2 + y + 1 \geq 12xy$, если $x, y \geq 0$

4. Докажите неравенство для произвольных a, b :

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$$

5. Докажите неравенство для $a, b > 0$, $a^2 + ab + b^2 \leq 3$:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{2}{ab} \geq \frac{5}{2}$$

6. Докажите неравенство для $a + b = 1$:

$$a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}$$

7. Докажите неравенство для $a, b, c > 0$, $(a+b)(a+c) = 4$:

$$a + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 4$$