

Внутренний матбой М7 Полупрофи

1. Найдите все целые числа n , для которых число $2^{n+1} - n^2$ является простым.
2. Найдите все составные n такие, что делители n , отличные от единицы, можно расставить по кругу так, чтобы рядом стоящие числа не были взаимно простыми.
3. Куб со стороной 9 выложен из единичных кубиков. Маша хочет, чтобы каждая грань большого куба была одноцветной. Может ли Катя раскрасить единичные кубики в два цвета так, чтобы ей помешать?
4. Существует ли четырехугольник, у которого можно изменить положение любой вершины, оставив три другие на месте, так, чтобы получившиеся четыре точки служили бы вершинами четырехугольника, равного исходному?
5. Можно ли доску 66×66 разрезать на шестиклеточные лесенки?
6. Дима решил провести турнир М7 по настольному теннису (каждый играет с каждым ровно один раз, ничьих в теннисе не бывает). Назовем четверку детей понятной, если среди них есть ребенок, который выиграл у остальных трех, и ребенок, который проиграл остальным трем. Дима хочет, чтобы была хотя бы одна понятная четверка. Какое минимальное количество детей Дима должен сагитировать участвовать в турнире, чтобы точно добиться желаемого?
7. Дан треугольник ABC . Известно, что $\angle B = 3\angle C$. На стороне AC отмечены такие точки M и N , что $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$. Перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую BN , пересекает отрезок BM в точке K . Докажите, что NK – биссектриса угла ANB .
8. Егор взял обыкновенную дробь. Когда он прибавил к числителю и знаменателю по единице, дробь увеличилась. Радостный Егор снова добавил к числителю и знаменателю по единице, но дробь почему-то уменьшилась. Егор почесал в затылке и еще раз добавил к числителю и знаменателю по единице, и дробь увеличилась. Увеличится или уменьшится дробь, когда ничего не понимающий Егор в четвертый раз добавит к числителю и знаменателю по единице?