



Индукция в графах 17 июля

1. В полном графе на n вершинах все рёбра покрашены в некоторый цвет. Известно, что в любом треугольнике есть рёбра одинакового цвета. Докажите, что количество различных цветов рёбер не больше $n - 1$.
2. Некоторые из 62 учеников М7 уже познакомились между собой. Известно, что в любой компании из трёх семиклассников найдётся тот, кто уже знаком с двумя другими. Докажите, что на зарядке можно поделить всех на пары знакомых, ведь на неё приходят все без исключения.
3. В графе $2n$ вершин и не менее $n^2 + 1$ рёбёр. Докажите, что в нём найдутся три попарно соединённых вершины.
4. В связном графе 5555 вершин, а степень каждой вершины не больше 55. Докажите, что можно его вершины покрасить не более чем в 55 цветов так, чтобы любые две соединённые ребром вершины были разного цвета.
5. В стране n городов, а между любыми двумя городами есть одна односторонняя дорога. Докажите, что можно поменять направление движения не более чем на одной дороге в стране так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.
6. В социальной сети у каждого пользователя не более десяти друзей (дружба взаимна). Сеть связна: если, узнав интересную новость, пользователь начинает рассылать её своим друзьям, те своим и так далее, то в итоге новость узнают все пользователи. Докажите, что администрация сети может разбить пользователей на группы так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) каждый состоит ровно в одной группе; 2) каждая группа связна; 3) одна из групп содержит от 1 до 100 членов, а каждая из остальных – от 100 до 900 членов.
7. Назовем p^n -деревом следующую конструкцию: из корня дерева выходят p ребер, ведущих к вершинам первого уровня; из каждой вершины первого уровня выходит еще по p ребер, ведущих к вершинам второго уровня и т.д., наконец, из каждой вершины $(n - 1)$ -го уровня ведут p ребер к вершинам n -го уровня, которые являются висячими. Висячие вершины некоторого 4^n -дерева покрашены в 3000 цветов. Докажите, что из него можно выбрать 2^n -поддерево с тем же корнем так, чтобы висячие вершины поддерева были покрашены не более, чем в 1000 цветов.



Индукция в графах 17 июля

1. В полном графе на n вершинах все рёбра покрашены в некоторый цвет. Известно, что в любом треугольнике есть рёбра одинакового цвета. Докажите, что количество различных цветов рёбер не больше $n - 1$.
2. Некоторые из 62 учеников М7 уже познакомились между собой. Известно, что в любой компании из трёх семиклассников найдётся тот, кто уже знаком с двумя другими. Докажите, что на зарядке можно поделить всех на пары знакомых, ведь на неё приходят все без исключения.
3. В графе $2n$ вершин и не менее $n^2 + 1$ рёбёр. Докажите, что в нём найдутся три попарно соединённых вершины.
4. В связном графе 5555 вершин, а степень каждой вершины не больше 55. Докажите, что можно его вершины покрасить не более чем в 55 цветов так, чтобы любые две соединённые ребром вершины были разного цвета.
5. В стране n городов, а между любыми двумя городами есть одна односторонняя дорога. Докажите, что можно поменять направление движения не более чем на одной дороге в стране так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.
6. В социальной сети у каждого пользователя не более десяти друзей (дружба взаимна). Сеть связна: если, узнав интересную новость, пользователь начинает рассылать её своим друзьям, те своим и так далее, то в итоге новость узнают все пользователи. Докажите, что администрация сети может разбить пользователей на группы так, чтобы выполнялись следующие условия: 1) каждый состоит ровно в одной группе; 2) каждая группа связна; 3) одна из групп содержит от 1 до 100 членов, а каждая из остальных – от 100 до 900 членов.
7. Назовем p^n -деревом следующую конструкцию: из корня дерева выходят p ребер, ведущих к вершинам первого уровня; из каждой вершины первого уровня выходит еще по p ребер, ведущих к вершинам второго уровня и т.д., наконец, из каждой вершины $(n - 1)$ -го уровня ведут p ребер к вершинам n -го уровня, которые являются висячими. Висячие вершины некоторого 4^n -дерева покрашены в 3000 цветов. Докажите, что из него можно выбрать 2^n -поддерево с тем же корнем так, чтобы висячие вершины поддерева были покрашены не более, чем в 1000 цветов.