



## Остатки – 3. Дроби. 14 июля

**Определение.** Пусть  $(b, n) = 1$ . Остаток, обратный к  $b$  по модулю  $n$  – это такой остаток  $c$ , что  $bc \equiv 1 \pmod{n}$ . **Обозначение.**  $c \equiv \frac{1}{b} \pmod{n}$ . Дробным остатком  $\frac{a}{b}$  называется такой остаток  $c$ , что  $a \equiv bc \pmod{n}$ .

1. Докажите, что для обоих определений такой остаток  $c$  существует и единственен.

2. **Пример.** Если  $(b, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{a}{b} \equiv a \cdot \frac{1}{b}}$ .

3. Пользуясь определениями «... это такой остаток, что ...» докажите следующие свойства по модулю  $n$ :

а) Если  $(b, n) = 1$ , то  $\boxed{\left(\frac{1}{b}, n\right) = 1}$ .

б) Если  $(a, n) = (b, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{1}{a} \equiv \frac{1}{b} \Leftrightarrow a \equiv b}$ .

в) Если  $(a, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{1}{\frac{1}{a}} \equiv a}$ .

г) Если  $(b, n) = (k, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{ka}{kb} \equiv \frac{a}{b}}$ .

д) Если  $(b, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{a}{b} \equiv \frac{a+kn}{b}}$  и  $\boxed{\frac{a}{b} \equiv \frac{a}{b+kn}}$ .

е) Если  $(a, n) = (b, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{a}{b} \equiv \frac{\frac{a}{b}}{a}}$ .

ж) Если  $(b, n) = (d, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \equiv \frac{ac}{bd}}$ .

з) Если  $(b, n) = (d, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \equiv \frac{ad+bc}{bd}}$ .

4. Найдите: а)  $\frac{3}{7} \pmod{11}$ ; б)  $\frac{11}{8} \pmod{23}$ ; в)  $\frac{45}{73} \pmod{55}$ .

5. Пусть  $a, b$  не делятся на простое  $p$ , и при этом  $a^n + b^n : p$ . Докажите, что существует такой остаток  $c$ , что  $c^n + 1 : p$ .

6. Пусть  $p > 2$  – нечётное простое число.

а) Найдите все такие остатки  $c$ , что  $c \equiv \frac{1}{c} \pmod{p}$ .

б) **Теорема Вильсона.** Докажите, что  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

в) Докажите, что  $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$ .

7. Пусть  $p$  и  $p+2$  – это простые числа. Докажите, что  $4((p-1)! + 1) + p : p^2 + 2p$ .

8. Найдите наименьший делитель числа  $2024! + 1014$ , больший 2024.

9. Даны натуральные числа  $a, b$  и  $c$  такие, что  $ab + 9b + 81$  и  $bc + 9c + 81$  делятся на 101. Докажите, что тогда и  $ca + 9a + 81$  тоже делится на 101.

10. На доске написаны дроби  $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, \frac{98}{3}, \dots, \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$ . Можно ли выбрать 9 дробей из этого набора так, чтобы их произведение равнялось 1?



## Остатки – 3. Дроби. 14 июля

**Определение.** Пусть  $(b, n) = 1$ . Остаток, обратный к  $b$  по модулю  $n$  – это такой остаток  $c$ , что  $bc \equiv 1 \pmod{n}$ . **Обозначение.**  $c \equiv \frac{1}{b} \pmod{n}$ . Дробным остатком  $\frac{a}{b}$  называется такой остаток  $c$ , что  $a \equiv bc \pmod{n}$ .

1. Докажите, что для обоих определений такой остаток  $c$  существует и единственен.

2. **Пример.** Если  $(b, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{a}{b} \equiv a \cdot \frac{1}{b}}$ .

3. Пользуясь определениями «... это такой остаток, что ...» докажите следующие свойства по модулю  $n$ :

а) Если  $(b, n) = 1$ , то  $\boxed{\left(\frac{1}{b}, n\right) = 1}$ .

б) Если  $(a, n) = (b, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{1}{a} \equiv \frac{1}{b} \Leftrightarrow a \equiv b}$ .

в) Если  $(a, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{1}{\frac{1}{a}} \equiv a}$ .

г) Если  $(b, n) = (k, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{ka}{kb} \equiv \frac{a}{b}}$ .

д) Если  $(b, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{a}{b} \equiv \frac{a+kn}{b}}$  и  $\boxed{\frac{a}{b} \equiv \frac{a}{b+kn}}$ .

е) Если  $(a, n) = (b, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{a}{b} \equiv \frac{\frac{a}{b}}{a}}$ .

ж) Если  $(b, n) = (d, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \equiv \frac{ac}{bd}}$ .

з) Если  $(b, n) = (d, n) = 1$ , то  $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \equiv \frac{ad+bc}{bd}}$ .

4. Найдите: а)  $\frac{3}{7} \pmod{11}$ ; б)  $\frac{11}{8} \pmod{23}$ ; в)  $\frac{45}{73} \pmod{55}$ .

5. Пусть  $a, b$  не делятся на простое  $p$ , и при этом  $a^n + b^n : p$ . Докажите, что существует такой остаток  $c$ , что  $c^n + 1 : p$ .

6. Пусть  $p > 2$  – нечётное простое число.

а) Найдите все такие остатки  $c$ , что  $c \equiv \frac{1}{c} \pmod{p}$ .

б) **Теорема Вильсона.** Докажите, что  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

в) Докажите, что  $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$ .

7. Пусть  $p$  и  $p+2$  – это простые числа. Докажите, что  $4((p-1)! + 1) + p : p^2 + 2p$ .

8. Найдите наименьший делитель числа  $2024! + 1014$ , больший 2024.

9. Даны натуральные числа  $a, b$  и  $c$  такие, что  $ab + 9b + 81$  и  $bc + 9c + 81$  делятся на 101. Докажите, что тогда и  $ca + 9a + 81$  тоже делится на 101.

10. На доске написаны дроби  $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, \frac{98}{3}, \dots, \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$ . Можно ли выбрать 9 дробей из этого набора так, чтобы их произведение равнялось 1?