



Неравенства и делимость 15 июля

1. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Может ли число $a + b + c + d$ оказаться простым?
2. У натурального числа n есть такие два различных делителя a и b , что выполнено равенство $(a - 1)(b + 2) = n - 2$. Докажите, что число $2n$ является квадратом натурального числа.
3. Докажите, что если k – число делителей натурального числа n , то $k^2 < 4n$.
4. Найдите все натуральные n такие, что $2n$ делится на $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 1$. Квадратные скобки означают целую часть.
5. Натуральные числа a, b, c, d, e, f таковы, что $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, при этом $af - be = -1$. Докажите, что $d \geq b + f$.
6. Даны различные натуральные числа a, b, c . Докажите неравенство:

$$\text{НОД}(ab + 1, bc + 1, ac + 1) \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

7. Про натуральные числа a, b, c известно, что $(9a + 10b)(10a + 11b) = c^2$. Докажите, что $c > 379$.



Неравенства и делимость 15 июля

1. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Может ли число $a + b + c + d$ оказаться простым?
2. У натурального числа n есть такие два различных делителя a и b , что выполнено равенство $(a - 1)(b + 2) = n - 2$. Докажите, что число $2n$ является квадратом натурального числа.
3. Докажите, что если k – число делителей натурального числа n , то $k^2 < 4n$.
4. Найдите все натуральные n такие, что $2n$ делится на $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 1$. Квадратные скобки означают целую часть.
5. Натуральные числа a, b, c, d, e, f таковы, что $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, при этом $af - be = -1$. Докажите, что $d \geq b + f$.
6. Даны различные натуральные числа a, b, c . Докажите неравенство:

$$\text{НОД}(ab + 1, bc + 1, ac + 1) \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

7. Про натуральные числа a, b, c известно, что $(9a + 10b)(10a + 11b) = c^2$. Докажите, что $c > 379$.