

Теория чисел с неравенствами

1. Существуют ли натуральные числа x и y , для которых

$$x^2 + xy : x + y + 1 ?$$

2. Докажите, что если k – число делителей натурального числа n , то $k^2 < 4n$.

3. (a) Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел оказаться квадратом?

(b) А последовательных четных чисел?

4. Делится ли $n!$ на 2^n при каком-нибудь натуральном n ?

5. Куб натурального числа записывается более чем тремя цифрами и не оканчивается нулем. Когда у него зачеркнули три последние цифры, получился также куб натурального числа. Чему мог быть равен исходный куб?

6. Натуральные a и b таковы, что ab делится на $a + b$. Докажите, что

$$\text{НОД}(a, b) \geq \sqrt{a + b}.$$

7. На доске написаны два натуральных числа: одно синее и одно красное. У Пети есть своё любимое натуральное число. Он нашёл его НОД с синим числом и его НОК с красным. Оказалось, что если к первому результату добавить красное число, а ко второму – синее, то суммы будут равны. Докажите, что красное число делится на синее.