



КТО
9 июля

Китайская теорема об остатках. Пусть есть n попарно взаимно простых чисел a_1, a_2, \dots, a_n и еще n чисел r_1, r_2, \dots, r_n таких, что для всех $1 \leq i \leq n$ выполняется $0 \leq r_i \leq (a_i - 1)$. Пусть $A = a_1 a_2 \dots a_n$. Тогда существует единственное число k такое, что $1 \leq k \leq A$ и для всех $1 \leq i \leq n$ верно, что $k \equiv r_i \pmod{a_i}$.

- а) **Конструктивное доказательство по индукции.** Докажите, что среди первых a_{j+1} чисел, удовлетворяющих условию для модулей a_1, a_2, \dots, a_j ровно одно удовлетворяет условию для модуля a_{j+1} . Не забудьте проверить неравенство!
б) **Комбинаторное доказательство.** Докажите, что для любого k , где $1 \leq k \leq A$, набор его остатков r_1, r_2, \dots, r_n уникален и посчитайте количество наборов.
- а) Докажите, что $7^{3000} \equiv 1 \pmod{6!}$.
б) Найдите остаток от деления числа 7^{3000} на $7!$.
- Рекламный проспект набора кубиков, выпускаемого фабрикой «Математические игрушки» утверждает: «Из нашего набора Ваш малыш всегда сможет сложить несколько одинаковых кубов, даже если несколько (но не больше 20) кубиков будут потеряны». Можно ли верить этой рекламе?
- Докажите, что для любого натурального n можно найти n последовательных натуральных чисел, каждое из которых не является степенью (выше первой) никакого натурального числа.
- Дано конечное множество A натуральных чисел. Докажите, что существует натуральное число b такое, что для каждого $a \in A$ число ab будет степенью (выше первой) натурального числа.
- Пусть n – натуральное число, а $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ – простые числа. Обозначим через S_m произведение первых m из них. Докажите, что существует натуральное число k такое, что для каждого $1 \leq i \leq n$ числа S_n и $k + S_i$ взаимно просты.
- Пусть p и q – два простых числа, отличающихся не более чем в два раза. Докажите, что существуют два последовательных натуральных числа, у одного из которых наибольший простой делитель равен p , а у другого – q .
- Юра перемножил пять последовательных натуральных чисел. Затем он сообщил Павлу Сергеевичу такое натуральное n , которое является делителем произведения, но не является делителем ни одного из пяти чисел. Докажите, что тогда Павел Сергеевич сможет найти четыре последовательных натуральных числа, произведение которых делится на n , а каждое по отдельности – нет.



КТО
9 июля

Китайская теорема об остатках. Пусть есть n попарно взаимно простых чисел a_1, a_2, \dots, a_n и еще n чисел r_1, r_2, \dots, r_n таких, что для всех $1 \leq i \leq n$ выполняется $0 \leq r_i \leq (a_i - 1)$. Пусть $A = a_1 a_2 \dots a_n$. Тогда существует единственное число k такое, что $1 \leq k \leq A$ и для всех $1 \leq i \leq n$ верно, что $k \equiv r_i \pmod{a_i}$.

- а) **Конструктивное доказательство по индукции.** Докажите, что среди первых a_{j+1} чисел, удовлетворяющих условию для модулей a_1, a_2, \dots, a_j ровно одно удовлетворяет условию для модуля a_{j+1} . Не забудьте проверить неравенство!
б) **Комбинаторное доказательство.** Докажите, что для любого k , где $1 \leq k \leq A$, набор его остатков r_1, r_2, \dots, r_n уникален и посчитайте количество наборов.
- а) Докажите, что $7^{3000} \equiv 1 \pmod{6!}$.
б) Найдите остаток от деления числа 7^{3000} на $7!$.
- Рекламный проспект набора кубиков, выпускаемого фабрикой «Математические игрушки» утверждает: «Из нашего набора Ваш малыш всегда сможет сложить несколько одинаковых кубов, даже если несколько (но не больше 20) кубиков будут потеряны». Можно ли верить этой рекламе?
- Докажите, что для любого натурального n можно найти n последовательных натуральных чисел, каждое из которых не является степенью (выше первой) никакого натурального числа.
- Дано конечное множество A натуральных чисел. Докажите, что существует натуральное число b такое, что для каждого $a \in A$ число ab будет степенью (выше первой) натурального числа.
- Пусть n – натуральное число, а $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ – простые числа. Обозначим через S_m произведение первых m из них. Докажите, что существует натуральное число k такое, что для каждого $1 \leq i \leq n$ числа S_n и $k + S_i$ взаимно просты.
- Пусть p и q – два простых числа, отличающихся не более чем в два раза. Докажите, что существуют два последовательных натуральных числа, у одного из которых наибольший простой делитель равен p , а у другого – q .
- Юра перемножил пять последовательных натуральных чисел. Затем он сообщил Павлу Сергеевичу такое натуральное n , которое является делителем произведения, но не является делителем ни одного из пяти чисел. Докажите, что тогда Павел Сергеевич сможет найти четыре последовательных натуральных числа, произведение которых делится на n , а каждое по отдельности – нет.