



Степени вхождения (эпилог)

18 июля

1. При каком наименьшем натуральном n число $2024!$ не делится на n^n ?

Обозначения. Степень вхождения простого числа p в разложение числа n на простые множители (или, иначе, максимальная степень числа p , на которую делится число n) обозначается как $v_p(n)$.

2. Докажите, что степень вхождения простого числа p в разложение на множители числа $n!$ можно найти по формуле:

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

3. Пользуясь формулой из предыдущей задачи докажите, что:

- а) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – целое число;
б) $P(n_1, \dots, n_k) = \frac{(n_1+n_2+\dots+n_k)!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ – целое число;
в) $\frac{(2n)!(2m)!}{(m+n)!m!n!}$ – целое число.

4. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n при натуральных n .

5. Докажите, что $(n+1)(n+2)\dots(n+n)$ делится на 2^n .

6. Докажите неравенство: $v_p(n!) < \frac{n}{p-1}$.

7. Пусть $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n . Докажите неравенство:

$$C_{2n}^n \leq \text{НОК}(1, 2, \dots, 2n) \leq (2n)^{\pi(2n)}$$

8. Пусть p – простое число, а $n!$ делится на p^k . Докажите, что $n!$ делится на $(p!)^k$.

9. Даны различные натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n . Для каждого $1 \leq i \leq n$ вычислим:

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n).$$

Докажите, что $\text{НОК}(b_1, b_2, \dots, b_n) : (n-1)!$.

10. Докажите, что количество делителей числа $n!$ является делителем числа $(2n)!$.



Степени вхождения (эпилог)

18 июля

1. При каком наименьшем натуральном n число $2024!$ не делится на n^n ?

Обозначения. Степень вхождения простого числа p в разложение числа n на простые множители (или, иначе, максимальная степень числа p , на которую делится число n) обозначается как $v_p(n)$.

2. Докажите, что степень вхождения простого числа p в разложение на множители числа $n!$ можно найти по формуле:

$$v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

3. Пользуясь формулой из предыдущей задачи докажите, что:

- а) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – целое число;
б) $P(n_1, \dots, n_k) = \frac{(n_1+n_2+\dots+n_k)!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ – целое число;
в) $\frac{(2n)!(2m)!}{(m+n)!m!n!}$ – целое число.

4. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n при натуральных n .

5. Докажите, что $(n+1)(n+2)\dots(n+n)$ делится на 2^n .

6. Докажите неравенство: $v_p(n!) < \frac{n}{p-1}$.

7. Пусть $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n . Докажите неравенство:

$$C_{2n}^n \leq \text{НОК}(1, 2, \dots, 2n) \leq (2n)^{\pi(2n)}$$

8. Пусть p – простое число, а $n!$ делится на p^k . Докажите, что $n!$ делится на $(p!)^k$.

9. Даны различные натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n . Для каждого $1 \leq i \leq n$ вычислим:

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n).$$

Докажите, что $\text{НОК}(b_1, b_2, \dots, b_n) : (n-1)!$.

10. Докажите, что количество делителей числа $n!$ является делителем числа $(2n)!$.