

Сравнения

Определение. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Два целых числа a и b сравнимы по модулю m :

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a - b) : m \Leftrightarrow a \text{ и } b \text{ имеют одинаковые остатки от деления на } m.$$

Свойства. Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$1) a \pm c \equiv b \pm d; \quad 1') a \pm nm \equiv b; \quad 2) ac \equiv bd; \quad 3) a^k \equiv b^k.$$

1. Пусть $a^3 \equiv_{a+b} 0$. Докажите, что $b^3 \equiv_{a+b} 0$.
2. Докажите, что нет таких натуральных чисел a и b , что $20a^2 + 2024 = 24b^2$.
3. Натуральные a и b таковы, что $a^{2024} + b^{2024}$ делится на 24. Докажите, что a и b – составные.
4. Пусть для целых чисел a и b число $(31a + 57b)(57a + 31b)$ делится на 11. Докажите, что оно делится и на 121.
5. Даны натуральные числа a , b и c . Докажите, что число

$$a^{43} + b^{43} + c^{43} + (a + b)^{43} + (b + c)^{43} + (c + a)^{43}$$

является составным. Придумайте два способа решения.

6. Назовем дробь хорошей, если сумма ее натурального числителя и знаменателя равна 43. Может ли произведение 7 хороших дробей давать 1?
7. Натуральные числа a и b таковы, что $ab + 1 : b + 2$. Докажите, что $2a > b$.
8. Пусть a — натуральное число. Докажите, что число

$$(a^2 + 1)^3 + 2(a^2 + 1)^6 + \dots + 2n(a^2 + 1)^{6n}$$

делится на $a^2 - a + 1$ тогда и только тогда, когда n делится на $a^2 - a + 1$.

9. Нечетное простое число p таково, что для натуральных чисел a , b и c суммы

$$a^{2023} + b^{2023}, \quad b^{2024} + c^{2024}, \quad a^{2025} + c^{2025}$$

делятся на p . Докажите, что и a , b , c тоже делятся на p .