

Интересная алгебра

1. Пусть p, q, r – различные простые числа. Известно, что pqr делится на $p + q + r$. Докажите, что $(p - 1)(q - 1)(r - 1) + 1$ является точным квадратом.
2. Каждое натуральное число покрашено в красный или синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух разноцветных чисел красное, а сумма – синяя. Какого цвета может быть произведение двух красных чисел?
3. Сумма чисел a, b, c и d равна 0. Пусть $N = ab + cd$, $K = ac + bd$, $P = ad + bc$. Докажите, что хотя бы одна из сумм $N + 2K$, $K + 2P$ и $P + 2N$ не положительна.
4. Пусть простое p и натуральные числа x, y, z удовлетворяют условию $0 < x < y < z < p$. Докажите, что если x^3, y^3, z^3 дают одинаковые остатки при делении на p , то $x^2 + y^2 + z^2$ делится на $x + y + z$.
5. В наборе 7 гирь. Школьника можно уравновесить 3, 4 или 5 гирями этого набора. Докажите, что одна из гирь равна сумме двух других.