

Планарные графы

Упр. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

Планарный граф – граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. **Плоский граф** – изображение планарного графа без пересечений ребер. Ребра плоского графа делят плоскость на части (включая внешнюю), которые называются **гранями**.

Упр. Каждое ребро графа K_{11} покрашено в красный или синий цвет. Докажите, что подграф на красных рёбрах или подграф на синих рёбрах не планарен.

1. Дан плоский граф. Обозначим количество вершин за V , ребер – за E , граней – за F .

(а) Докажите, что если граф – дерево, то $V + F - E = 2$.

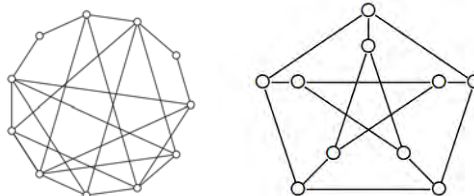
(б) Докажите, что при удалении ребра, не являющегося мостом, величина $V + F - E$ не изменяется.

(с) Для связного плоского графа докажите формулу $V + F - E = 2$.

(d) Чему равно $V + F - E$, если граф содержит K компонент связности?

Формула Эйлера. В связном плоском графе $V + F - E = 2$.

2. Докажите, что для любого связного плоского графа, без петель и кратных ребер, в котором есть хотя бы 3 вершины, выполняется неравенство $2E \geq 3F$.
3. Докажите, что для графа из предыдущей задачи выполняется неравенство $E \leq 3V - 6$.
4. Докажите, что в любом простом планарном графе существует вершина, степень которой не больше 5.
5. Докажите, что любой планарный граф можно правильным образом раскрасить в 6 цветов.
6. Как изменятся неравенства 3 и 4 задачи, если граф двудолен (все остальные свойства также выполняются)?
7. Докажите, что полный граф на пяти вершинах (K_5) и полный двудольный граф, обе доли которого содержат 3 вершины ($K_{3,3}$), – не планарны.
8. Сделайте упражнения:)



9. Планарны ли графы?