

Под другим углом

Пример. $C_n^k = C_n^{n-k}$. Взять в команду одних это не взять в команду всех остальных.

Еще пример. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. Собрать команду можно с Петей, а можно и без Пети.

1. Докажите комбинаторно тождество $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$.
 2. Докажите комбинаторно тождество $C_n^0 \cdot C_n^k + C_n^1 \cdot C_n^{k-1} + \dots + C_n^k \cdot C_n^0 = C_{2n}^k$.
 3. Докажите комбинаторно тождество $C_r^m \cdot C_m^k = C_r^k \cdot C_{r-k}^{m-k}$, $0 \leq k \leq m \leq r$.
 4. Найти сумму: $\sum_{k=0}^n k C_n^k$.
-
5. На плоскости дано несколько равных прямоугольников с параллельными сторонами, которые разбивают плоскость на несколько частей. Докажите, что в каждую из частей можно поставить положительное число таким образом, чтобы сумма чисел внутри любого из исходных прямоугольников была одна и та же.
 6. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 2 радиоактивны. Есть прибор, в который можно положить не более 10 образцов, и прибор покажет, есть ли среди них радиоактивные. Как составить список из 20 проверок, проведя которые и проанализировав полученные результаты, можно указать не более четырёх образцов, среди которых будут оба радиоактивных? Менять список проверок в зависимости от получаемых результатов нельзя.
 7. На столе лежат 9 карточек, на которых написаны числа $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. Двое по очереди забирают по одной карточке со стола. Выигрывает тот, кто первый наберет три карточки, сумма чисел на которых равна нулю. Если ни один из игроков не набрал трех таких карточек, игра заканчивается вничью. Кто выигрывает при правильной игре?
 8. На доске написаны натуральные числа от 1 до 64. Одним действием можно стереть с доски ровно три числа: какое-нибудь число X ; одно из чисел, отличающихся от X на 1; одно из чисел, отличающихся от X на 8. Через несколько действий осталось ровно одно число. Найдите все варианты, каким оно могло быть.