

## Простые числа

1. Докажите, что если число  $n! + 1$  делится на  $n + 1$ , то  $n + 1$  – простое число.
2. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 2310 становится составным.
3. На доске записано 100 подряд идущих натуральных чисел. Дима перемножил 80 из них: 40 самых больших и 40 самых маленьких. Потом он перемножил 20 оставшихся чисел. Могла ли сумма двух полученных произведений равняться
  - (a)  $100!$ ;
  - (b)  $n!$  для некоторого натурального  $n$ ?
4. Дано натуральное число  $n$  ( $n > 2$ ). Докажите, что если число  $n! + n^3 + 1$  – простое, то число  $n^2 + 2$  представляется в виде суммы двух простых чисел.
5. Докажите, что для любого простого числа  $p > 2$  числитель дроби

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$$

делится на  $p$ .

6. Пусть каждое из натуральных чисел  $n$ ,  $n + 1$ ,  $n + 2$  делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число  $n$  делится на куб некоторого своего простого делителя.