

## Применяем индукцию правильно

**Упр.** Докажите, что на рёбрах связного графа можно расставить стрелки так, чтобы от одной вершины можно было добраться до любой другой.

**Не забудьте:**

- (a) Сформулируйте доказываемое по индукции утверждение с явным упоминанием  $n$ .
- (b) Все свойства должны быть сформулированы в переходе.
- (c) При доказательстве перехода **запрещается** добавлять новые элементы в конструкцию.
- (d) При доказательстве перехода **рекомендуется** удалить какой-то элемент из конструкции и проверить, что в получившейся конструкции все свойства по-прежнему выполнены.

1. Из квадрата клетчатой бумаги размером  $2^n \times 2^n$  вырезали одну угловую клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трех клеток.
2. В ЛМШ 100 детей-биологов, некоторые из них дружат. Если в какой-то компании биологов граф дружб не связан, то в этой компании происходит ссора. Известно, что в любой компании из трех биологов ссоры не происходят. Докажите, что можно мирно расселить детей-биологов в двухместные комнаты.
3. В стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно проехать по всем городам, побывав в каждом городе ровно по одному разу.
4. В прямоугольнике  $3 \times 2024$  расставлены фишки трех цветов, по 2024 штуки каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.

**Замечание.** При доказательстве перехода можно «временно забывать» не про любой объект, а про вполне конкретный: например, про вершину наибольшей степени в графе, про самое большое из написанных чисел, про крайнего человека из шеренги и т.п. Главное, чтобы после этого можно было корректно применить предположение.

5. Про неориентированный граф известно, что в нем есть вершина степени не более 2023 и что после удаления любого множества вершин из графа в нем по-прежнему будет вершина степени не более 2023. Докажите, что граф можно покрасить не более чем в 2024 цвета правильным образом.
6. Докажите, что вершины планарного графа можно правильным образом покрасить не более чем в 6 цветов.
7. Даны два выпуклых многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$  и  $B_1B_2 \dots B_n$ ,  $n > 2$ . Известно, что  $A_1A_2 = B_1B_2$ ,  $A_2A_3 = B_2B_3$ ,  $\dots$ ,  $A_nA_1 = B_nB_1$  и  $n - 3$  угла одного многоугольника равны соответственно  $n - 3$  углам другого. Обязательно ли многоугольники равны?