

Планарные графы

Упр. Можно ли нарисовать полный граф на 4 вершинах так, чтобы ребра не пересекались? А если граф на 5 вершинах?

Планарный граф – граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер.

Плоский граф – изображение планарного графа без пересечений ребер.

Ребра плоского графа делят плоскость на части (включая внешнюю), которые называются **гранями**.

1. Дан плоский граф. Обозначим количество вершин за V , ребер – за E , граней – за F .

(a) Докажите, что если граф – дерево, то $V + F - E = 2$.

(b) Докажите, что при удалении ребра, не являющегося мостом, величина $V + F - E$ не изменяется.

(c) Для связного плоского графа докажите формулу $V + F - E = 2$.

(d) Чему равно $V + F - E$, если граф содержит K компонент связности?

Формула Эйлера. В связном плоском графе $V + F - E = 2$.

2. В стране Озёрная 7 озёр и 10 каналов (канал соединяет 2 озера), причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?
3. Докажите, что для любого связного плоского графа (без петель и кратных ребер) выполняется неравенство $2E \geq 3F$.
4. Докажите, что для графа из предыдущей задачи выполняется неравенство $E \leq 3V - 6$.
5. Докажите, что полный граф на пяти вершинах (K_5) не планарен.
6. Какое наименьшее число внутренних пересечений рёбер может получиться при изображении на плоскости графа K_5 ?
7. Каждое ребро графа K_{11} покрашено в красный или синий цвет. Докажите, что подграф на красных рёбрах или подграф на синих рёбрах не планарен.
Уточнение. Задачи 3 и 4 неверны для графов из одной и двух вершин (проверьте, что именно ломается в доказательствах).