

## Сравнения

**Определение.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . Два целых числа  $a$  и  $b$  сравнимы по модулю  $m$ :

$$a \equiv b \Leftrightarrow (a - b) : m \Leftrightarrow a \text{ и } b \text{ имеют одинаковые остатки от деления на } m.$$

**Свойства.** Пусть  $a \equiv b, c \equiv d, k \in \mathbb{N}$ . Тогда:

$$1) a \pm c \equiv b \pm d; \quad 1') a \pm nm \equiv b; \quad 2) ac \equiv bd; \quad 3) a^k \equiv b^k.$$

**Упр.** Найдите остаток от деления:

$$(a) 2223 \cdot 2224 \cdot 2225 \cdot 2226 \text{ на } 22; \quad (b) 2022 \cdot 2023 \cdot 2024 \text{ на } 2025.$$

1. Приведите пример, когда  $a \equiv b$  и  $ac \equiv bd$ , но при этом  $c \not\equiv d$ .
2. (a) Какие остатки при делении на 3 может иметь квадрат целого числа?  
(b) Докажите, что  $n^3 + 2$  не делится на 9 ни при каком натуральном  $n$ .
3. Найдите остаток от деления:  
(a)  $2^{2024}$  на 3; (b)  $6^{2024}$  на 5; (c)  $37^{2024}$  на 7; (d)  $2^{2024}$  на 17;  
(e)  $3^{202} + 3^{203} + 3^{204} + 3^{205}$  на 5; (f)  $3^7 + 26^7$  на 29;  
(g)  $1^{987} + 2^{987} + 3^{987} + \dots + 2023^{987} + 2024^{987}$  на 2025.
4. Известно, что  $6x + 7y \equiv 2 \pmod{17}$ . Найдите остатки от деления на 17 у выражений:  
(a)  $6x + 58y$ ; (b)  $23x - 27y$ ; (c)  $x + 4y$ ; (d)  $y - 5x$ .
5. На очень большой доске выписано число  $44^{4444}$ . Разрешается сколько угодно раз делать такую операцию: стереть число и записать сумму его цифр. Можно ли таким образом получить число 4?
6. (a) Найдите остатки от деления  $10^n$  на 7, 11, 13.  
(b) Сформулируйте и докажите признаки делимости на 7, 11, 13.
7. Докажите, что при любом  $n \in \mathbb{N}$  число  $29^{n+2} + 42^{n+1} + 16^n$  делится на 13.
8. Пусть  $a^3 \equiv 0 \pmod{a+b}$ . Докажите, что  $b^3 \equiv 0 \pmod{a+b}$ .
9. Докажите, что нет таких натуральных чисел  $a$  и  $b$ , что  $20a^2 + 2024 = 24b^2$ .
10. Назовем дробь хорошей, если сумма ее натурального числителя и знаменателя равна 43. Может ли произведение 7 хороших дробей давать 1?