

## Китайская теорема об остатках

1. Дана таблица из 4 строк и 7 столбцов. Строки соответствуют остаткам по модулю 4 (от 0 до 3), а столбцы — остаткам по модулю 7 (от 0 до 6). Впишите в клетки этой таблицы числа от 0 до 27.
2. Рассмотрим таблицу, подобную описанной в предыдущей задаче, для остатков по двум взаимно простым модулям  $m$  и  $n$ . Впишем в неё числа от 0 до  $mn - 1$ . Докажите, что в каждой клетке окажется... (a) не более одного числа; (b) ровно одно число.
3. Сколько пятизначных чисел... (a) кончаются на 7 и кратны 9; (b) имеют остаток 17 по модулю 24 и остаток 29 по модулю 125?
4. В армии китайского императора менее миллиона солдат. Он приказал солдатам встать в шеренги по 101 и посчитал, сколько солдат остались лишними. Потом приказал им встать в шеренги по 103 и посчитал, сколько лишних. Наконец, приказал встать по 107 и вновь посчитал лишних. Докажите, что теперь он может однозначно определить численность армии.

*Китайская теорема об остатках.* Пусть  $m_1, m_2, \dots, m_N$  — взаимно простые числа,  $a_1, a_2, \dots, a_N$  — произвольные целые числа. Тогда среди любых  $m_1 m_2 \dots m_N$  последовательных целых чисел найдётся ровно одно число  $x$ , для которого  $x \equiv a_1 \pmod{m_1}, x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \dots, x \equiv a_N \pmod{m_N}$ .

5. Докажите китайскую теорему об остатках: (a) для  $N = 3$ ; (b) для произвольного  $N$ .
6. *Как разделить секрет?* Пароль от ядерного чемоданчика — десятизначное число. Семерым министрам выданы остатки от деления этого пароля на семь простых чисел: 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127. Докажите, что если любые 5 министров захотят открыть чемоданчик, то сумеют сделать это с первого раза, а если всего четверо, то не смогут.

*Это прекрасно, что такие числа существуют, но как их найти?*

7. Найдите какое-нибудь число, которое...
  - (a) кратно 5, 7 и имеет остаток 1 по модулю 3;
  - (b) кратно 3, 7 и имеет остаток 1 по модулю 5;
  - (c) кратно 3, 5 и имеет остаток 1 по модулю 7;
  - (d) имеет остаток  $a$  по модулю 3,  $b$  по модулю 5 и  $c$  по модулю 7.
8. Докажите, что для всякого  $n$  найдутся  $n$  последовательных чисел, ни одно из которых не является степенью простого.