

Неравенства

9 июля

1. Известно, что $0 \leq a, b, c \leq 1$. Докажите, что:

(а) $\frac{a}{1+b+ca} + \frac{b}{1+c+ab} + \frac{c}{1+a+bc} \leq \frac{3}{a+b+c}.$

(б) $\frac{a^2}{1+a+abc} + \frac{b^2}{1+b+abc} + \frac{c^2}{1+c+abc} \leq 1.$

(в) $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$

(г) $\frac{a}{7+b^3+c^3} + \frac{b}{7+a^3+c^3} + \frac{c}{7+a^3+b^3} \leq \frac{1}{3}.$

2. (а) Известно, что $a, b, c \geq 0$ и $a + b + c = 2\sqrt{abc}$, докажите, что $bc > b + c$.

(б) Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите, что $(ab + cd) \cdot (ac + bd) \cdot (ad + bc) \leq 8$.

(в) Докажите, что если $a + b + c \geq abc$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$.

(г) Известно, что $a, b > 0$ и $a + b = ab$. Докажите, что $\frac{a}{b^2+4} + \frac{b}{a^2+4} \geq \frac{1}{2}.$

3. (а) Решите уравнение $x^4 - 8x + 63 = 0$.

(б) Для чисел x, y, z выполняется условие $x + y + z = 5$ и $xy + yz + zx = 8$. Докажите, что $1 \leq x \leq \frac{7}{3}.$

4. (а) По кругу написаны 2024 положительных числа. Сумма любых двух рядом стоящих больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1.

(б) Докажите неравенство для положительных чисел x_1, \dots, x_n

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n^2}{n+x_1+\dots+x_n}.$$

(в) Известно, что $x_1^{100} + \dots + x_n^{100} = 1$, $x_1^{101} + \dots + x_n^{101} = -1$. Какие значения может принимать $x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n$?

Неравенства

9 июля

1. Известно, что $0 \leq a, b, c \leq 1$. Докажите, что:

(а) $\frac{a}{1+b+ca} + \frac{b}{1+c+ab} + \frac{c}{1+a+bc} \leq \frac{3}{a+b+c}.$

(б) $\frac{a^2}{1+a+abc} + \frac{b^2}{1+b+abc} + \frac{c^2}{1+c+abc} \leq 1.$

(в) $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$

(г) $\frac{a}{7+b^3+c^3} + \frac{b}{7+a^3+c^3} + \frac{c}{7+a^3+b^3} \leq \frac{1}{3}.$

2. (а) Известно, что $a, b, c \geq 0$ и $a + b + c = 2\sqrt{abc}$, докажите, что $bc > b + c$.

(б) Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите, что $(ab + cd) \cdot (ac + bd) \cdot (ad + bc) \leq 8$.

(в) Докажите, что если $a + b + c \geq abc$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$.

(г) Известно, что $a, b > 0$ и $a + b = ab$. Докажите, что $\frac{a}{b^2+4} + \frac{b}{a^2+4} \geq \frac{1}{2}.$

3. (а) Решите уравнение $x^4 - 8x + 63 = 0$.

(б) Для чисел x, y, z выполняется условие $x + y + z = 5$ и $xy + yz + zx = 8$. Докажите, что $1 \leq x \leq \frac{7}{3}.$

4. (а) По кругу написаны 2024 положительных числа. Сумма любых двух рядом стоящих больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1.

(б) Докажите неравенство для положительных чисел x_1, \dots, x_n

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n^2}{n+x_1+\dots+x_n}.$$

(в) Известно, что $x_1^{100} + \dots + x_n^{100} = 1$, $x_1^{101} + \dots + x_n^{101} = -1$. Какие значения может принимать $x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n$?