

# Счёт в точках

12 июля

**Напоминание.** *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются *эквивалентными*, если  $ABDC$  — параллелограмм. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами*. Вектора называются *коллинеарными*, если при откладывании от одной точки их общее начало и их концы лежат на одной прямой.

**I.** Упростите выражение **(а)**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA}$ ; **(б)**  $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DB}$ .

**II.** (*Лемма о перестановке*) Докажите, что  $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{BX}$ .

**Идея.** Направленный отрезок можно мыслить как разность точек  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ . А также можно говорить, что точка  $Q$  получается из точки  $P$  смещением на вектор  $\overrightarrow{PQ}$  или  $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ . Тогда любое выражение из векторов и точек, дающее в результате одну или ноль точек имеет геометрический смысл, определённый однозначно. Доказать это поможет лемма о перестановке: неважно, как разбиты на вектора точки, важно только то, что одни точки — начала, другие — концы.

(Можно считать, что точки — это краткая запись для векторных выражений. Например, :  $Q = P + \overrightarrow{PQ} \iff \forall O \in \mathbb{E}_2 \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ .)

**Опр.** По определению, для коллинеарных векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  существует число  $\lambda$  такое, что  $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ . Тогда *отношением (со)направленных отрезков*  $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$  и  $\overrightarrow{CD} = \vec{y}$  будем называть то самое  $\lambda$ , т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} = \lambda\vec{y} = \lambda\overrightarrow{CD} \iff \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\vec{x}}{\vec{y}} = \lambda.$$

**Опр.** *Отношением трёх точек (простым отношением точек)*, лежащих на одной прямой,  $(AB, X)$  будем называть величину

$$(AB, X) = \frac{\dot{X} - \dot{A}}{\dot{B} - \dot{X}} = \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}}.$$

Говорят, что  $X$  *делит*  $\overrightarrow{AB}$  в отношении  $(AB, X)$ .

**1.** Найдите точку для отрезка  $AB$ , где  $A(-1; 5)$ ,  $B(7; 14)$ , делящую его в отношении **(а)**  $2:1$ ; **(б)**  $4:-1$ .

**2.** (*Правило рычага*) Если  $\dot{X}$  делит  $\overrightarrow{AB}$  в отношении  $\frac{k}{m}$ , то  $\dot{X} = \frac{m\dot{A} + k\dot{B}}{k+m}$ .

**3.** **(а)** Пусть  $M$  — середина отрезка  $AB$ . Докажите, что  $\dot{M} = \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{B})$ . **(б)** Пусть  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ . **(в)** Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\dot{M} = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C})$ .

**(г)** Если  $ABCD$  — параллелограмм, то  $\dot{A} + \dot{C} = \dot{B} + \dot{D}$ .

**4.** Найдите точку пересечения **(а)** медиан; **(б)** биссектрис; **(в)** высот треугольника  $ABC$ , где  $A(-12; -30)$ ,  $B(44; 12)$ ,  $C(-28; 33)$ .

5. Точки  $M$ ,  $K$ ,  $N$  и  $L$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$  пятиугольника  $ABCDE$  (не обязательно выпуклого),  $P$  и  $Q$  — середины отрезков  $MN$  и  $KL$ . Докажите, что отрезок  $PQ = \frac{1}{4}AE$  и  $PQ \parallel AE$ .
6. Дано несколько точек и для некоторых пар  $(A, B)$  этих точек взяты векторы  $\overrightarrow{AB}$ , причем в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна  $\vec{0}$ .
7. Пусть  $E$  и  $F$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ , точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AF$ ,  $CE$ ,  $BF$  и  $DE$ . Докажите, что  $KLMN$  — параллелограмм.
8. (Параметрическое уравнение прямой) Докажите, что точка  $Z$  лежит на прямой  $AB$  тогда и только тогда, когда  $\vec{Z} = t\vec{A} + (1 - t)\vec{B}$  для некоторого  $t$ .

# Счёт в точках

12 июля

**Напоминание.** *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются *эквивалентными*, если  $ABDC$  — параллелограмм. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами*. Вектора называются *коллинеарными*, если при откладывании от одной точки их общее начало и их концы лежат на одной прямой.

**I.** Упростите выражение **(а)**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA}$ ; **(б)**  $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DB}$ .

**II.** (*Лемма о перестановке*) Докажите, что  $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{BX}$ .

**Идея.** Направленный отрезок можно мыслить как разность точек  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ . А также можно говорить, что точка  $Q$  получается из точки  $P$  смещением на вектор  $\overrightarrow{PQ}$  или  $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ . Тогда любое выражение из векторов и точек, дающее в результате одну или ноль точек имеет геометрический смысл, определённый однозначно. Доказать это поможет лемма о перестановке: неважно, как разбиты на вектора точки, важно только то, что одни точки — начала, другие — концы.

(Можно считать, что точки — это краткая запись для векторных выражений. Например, :  $Q = P + \overrightarrow{PQ} \iff \forall O \in \mathbb{E}_2 \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ .)

**Опр.** По определению, для коллинеарных векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  существует число  $\lambda$  такое, что  $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ . Тогда *отношением (со)направленных отрезков*  $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$  и  $\overrightarrow{CD} = \vec{y}$  будем называть то самое  $\lambda$ , т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} = \lambda\vec{y} = \lambda\overrightarrow{CD} \iff \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\vec{x}}{\vec{y}} = \lambda.$$

**Опр.** *Отношением трёх точек (простым отношением точек)*, лежащих на одной прямой,  $(AB, X)$  будем называть величину

$$(AB, X) = \frac{\dot{X} - \dot{A}}{\dot{B} - \dot{X}} = \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}}.$$

Говорят, что  $X$  *делит*  $\overrightarrow{AB}$  в отношении  $(AB, X)$ .

**1.** Найдите точку для отрезка  $AB$ , где  $A(-1; 5)$ ,  $B(7; 14)$ , делящую его в отношении **(а)**  $2:1$ ; **(б)**  $4:-1$ .

**2.** (*Правило рычага*) Если  $\dot{X}$  делит  $\overrightarrow{AB}$  в отношении  $\frac{k}{m}$ , то  $\dot{X} = \frac{m\dot{A} + k\dot{B}}{k+m}$ .

**3.** **(а)** Пусть  $M$  — середина отрезка  $AB$ . Докажите, что  $\dot{M} = \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{B})$ . **(б)** Пусть  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ . **(в)** Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\dot{M} = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C})$ .

**(г)** Если  $ABCD$  — параллелограмм, то  $\dot{A} + \dot{C} = \dot{B} + \dot{D}$ .

**4.** Найдите точку пересечения **(а)** медиан; **(б)** биссектрис; **(в)** высот треугольника  $ABC$ , где  $A(-12; -30)$ ,  $B(44; 12)$ ,  $C(-28; 33)$ .

5. Точки  $M$ ,  $K$ ,  $N$  и  $L$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$  пятиугольника  $ABCDE$  (не обязательно выпуклого),  $P$  и  $Q$  — середины отрезков  $MN$  и  $KL$ . Докажите, что отрезок  $PQ = \frac{1}{4}AE$  и  $PQ \parallel AE$ .
6. Дано несколько точек и для некоторых пар  $(A, B)$  этих точек взяты векторы  $\overrightarrow{AB}$ , причем в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна  $\vec{0}$ .
7. Пусть  $E$  и  $F$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ , точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AF$ ,  $CE$ ,  $BF$  и  $DE$ . Докажите, что  $KLMN$  — параллелограмм.
8. (Параметрическое уравнение прямой) Докажите, что точка  $Z$  лежит на прямой  $AB$  тогда и только тогда, когда  $\vec{Z} = t\vec{A} + (1 - t)\vec{B}$  для некоторого  $t$ .