

# Принцип Карно

3 июля

**I.** Дан отрезок  $AB$  и вещественное число  $c$ . **(а)** Сколько на прямой  $AB$  точек  $X$ , таких что  $AX^2 - BX^2 = c$ ? **(б)** Докажите, что ГМТ всех точек плоскости, удовлетворяющих этому равенству, представляет собой прямую, перпендикулярную  $AB$ .

**II.** (Принцип Карно) На плоскости даны точки  $A, B, C$  и  $D$ . Докажите, что  $AB$  перпендикулярно  $CD$  тогда и только тогда, когда  $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$  или  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ .

**1.** Дан шестиугольник  $ABCDEF$ , в котором  $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ , а углы  $A$  и  $C$  — прямые. Докажите, что прямые  $FD$  и  $BE$  перпендикулярны.

**2.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  на высоте  $BH$  выбрана произвольная точка  $P$ . Точки  $A_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$  и  $AB$  соответственно. Перпендикуляр, опущенный из  $A_1$  на  $CP$ , пересекается с перпендикуляром, опущенным из  $C_1$  на  $AP$ , в точке  $K$ . Докажите, что точка  $K$  равноудалена от точек  $A$  и  $C$ .

**3.** Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  такой, что  $AB = CB$  и  $AD = DC$ . Точки  $K, L, M$  — середины отрезков  $AB, CD$  и  $AC$  соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки  $A$  к прямой  $BC$ , пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки  $C$  к прямой  $AD$ , в точке  $H$ . Докажите, что прямые  $KL$  и  $HM$  перпендикулярны.

**4.** Дан треугольник  $ABC$ . Постройте отрезок, который разобьёт его на два треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

**5.** (Критерий Карно) **(а)** Пусть из точки  $M$  опущены перпендикуляры  $MA_1, MB_1, MC_1$  на стороны  $BC, AC, AB$  соответственно, докажите, что  $A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$ .

**(б)** Докажите, что если  $A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$ , то перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1, B_1, C_1$  на стороны  $BC, AC, AB$  соответственно, пересекаются в одной точке.

**6.** Применение критерия Карно в известных ситуациях:

**(а)** Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

**(б)** Три окружности попарно пересекаются. Докажите, что общие хорды (или их продолжения) пар этих окружностей пересекаются в одной точке.

**(в)** Продолжения радиусов вневписанных окружностей, проведенных в точки касания с соответствующими сторонами треугольника, пересекаются в одной точке.

**7.** Если перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1, B_1, C_1$  на стороны  $BC, AC, AB$  соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек  $A, B, C$  на  $B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1$  соответственно, пересекаются в одной точке.

**8.** К каждой стороне треугольника провели перпендикуляр в точке касания данной стороны с вневписанной окружностью. Докажите, что три этих перпендикуляра пересекаются в одной точке.

# Принцип Карно

3 июля

**I.** Дан отрезок  $AB$  и вещественное число  $c$ . **(а)** Сколько на прямой  $AB$  точек  $X$ , таких что  $AX^2 - BX^2 = c$ ? **(б)** Докажите, что ГМТ всех точек плоскости, удовлетворяющих этому равенству, представляет собой прямую, перпендикулярную  $AB$ .

**II.** (Принцип Карно) На плоскости даны точки  $A, B, C$  и  $D$ . Докажите, что  $AB$  перпендикулярно  $CD$  тогда и только тогда, когда  $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$  или  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ .

**1.** Дан шестиугольник  $ABCDEF$ , в котором  $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ , а углы  $A$  и  $C$  — прямые. Докажите, что прямые  $FD$  и  $BE$  перпендикулярны.

**2.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  на высоте  $BH$  выбрана произвольная точка  $P$ . Точки  $A_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$  и  $AB$  соответственно. Перпендикуляр, опущенный из  $A_1$  на  $CP$ , пересекается с перпендикуляром, опущенным из  $C_1$  на  $AP$ , в точке  $K$ . Докажите, что точка  $K$  равноудалена от точек  $A$  и  $C$ .

**3.** Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  такой, что  $AB = CB$  и  $AD = DC$ . Точки  $K, L, M$  — середины отрезков  $AB, CD$  и  $AC$  соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки  $A$  к прямой  $BC$ , пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки  $C$  к прямой  $AD$ , в точке  $H$ . Докажите, что прямые  $KL$  и  $HM$  перпендикулярны.

**4.** Дан треугольник  $ABC$ . Постройте отрезок, который разобьёт его на два треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

**5.** (Критерий Карно) **(а)** Пусть из точки  $M$  опущены перпендикуляры  $MA_1, MB_1, MC_1$  на стороны  $BC, AC, AB$  соответственно, докажите, что  $A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$ .

**(б)** Докажите, что если  $A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$ , то перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1, B_1, C_1$  на стороны  $BC, AC, AB$  соответственно, пересекаются в одной точке.

**6.** Применение критерия Карно в известных ситуациях:

**(а)** Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

**(б)** Три окружности попарно пересекаются. Докажите, что общие хорды (или их продолжения) пар этих окружностей пересекаются в одной точке.

**(в)** Продолжения радиусов вневписанных окружностей, проведенных в точки касания с соответствующими сторонами треугольника, пересекаются в одной точке.

**7.** Если перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1, B_1, C_1$  на стороны  $BC, AC, AB$  соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек  $A, B, C$  на  $B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1$  соответственно, пересекаются в одной точке.

**8.** К каждой стороне треугольника провели перпендикуляр в точке касания данной стороны с вневписанной окружностью. Докажите, что три этих перпендикуляра пересекаются в одной точке.