

# Критерий Карно

3 июля

1. Дан отрезок  $AB$  и вещественное число  $c$ .

(а) Сколько на прямой  $AB$  точек  $X$ , таких что  $AX^2 - BX^2 = c$  ?

(б) Докажите, что ГМТ всех точек плоскости, удовлетворяющих этому равенству, представляет собой прямую, перпендикулярную  $AB$ .

(в) (Критерий Карно) Докажите, что  $AB$  перпендикулярно  $CD$  в том и только том случае, если  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ .

2. В шестиугольнике  $ABCDEF$  углы  $A$  и  $C$  прямые,  $AB = BC$ ,  $CD = DE$ ,  $EF = FA$ . Докажите, что прямые  $DF$  и  $BE$  перпендикулярны.

3. Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Точка  $P$  лежит на отрезке  $MN$ , причём  $MP = CN$  и  $NP = AM$ . Точка  $O$  — центр описанной окружности четырехугольника. Докажите, что если точки  $O$  и  $P$  не совпадают, то  $OP \perp MN$ .

4. Точка  $H$  — ортоцентр равнобедренного треугольника  $ABC$ . На боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно так, что угол  $KMH$  — прямой. Докажите, что из отрезков  $AK$ ,  $CM$  и  $MK$  можно составить прямоугольный треугольник.

5. В остроугольном треугольнике на высоте  $BH$  выбрана произвольная точка  $X$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно. Перпендикуляр, опущенный из точки  $M$  на  $AX$ , пересекается с перпендикуляром, опущенным из  $N$  на  $CX$ , в точке  $P$ . Докажите, что точка  $P$  равноудалена от точек  $A$  и  $C$ .

6. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ , такой что  $AB = BC$  и  $AD = DC$ . Точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  — середины отрезков  $AB$ ,  $CD$  и  $AC$  соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки  $A$  к прямой  $BC$ , пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки  $C$  к прямой  $AD$ , в точке  $H$ . Докажите, что прямые  $KL$  и  $HM$  перпендикулярны.

7. Дан треугольник  $ABC$ . Постройте отрезок, который разобьёт его на два треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

8. Пусть  $M$  — середина хорды  $AB$  окружности с центром  $O$ . Точка  $K$  симметрична точке  $M$  относительно  $O$ ,  $P$  — произвольная точка окружности. Перпендикуляр к прямой  $AB$  в точке  $A$  и перпендикуляр к прямой  $PK$  в точке  $P$  пересекаются в точке  $Q$ . Точка  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $P$  на  $AB$ . Докажите, что прямая  $QB$  делит отрезок  $PH$  пополам.

# Критерий Карно

3 июля

1. Дан отрезок  $AB$  и вещественное число  $c$ .

(а) Сколько на прямой  $AB$  точек  $X$ , таких что  $AX^2 - BX^2 = c$  ?

(б) Докажите, что ГМТ всех точек плоскости, удовлетворяющих этому равенству, представляет собой прямую, перпендикулярную  $AB$ .

(в) (Критерий Карно) Докажите, что  $AB$  перпендикулярно  $CD$  в том и только том случае, если  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ .

2. В шестиугольнике  $ABCDEF$  углы  $A$  и  $C$  прямые,  $AB = BC$ ,  $CD = DE$ ,  $EF = FA$ . Докажите, что прямые  $DF$  и  $BE$  перпендикулярны.

3. Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Точка  $P$  лежит на отрезке  $MN$ , причём  $MP = CN$  и  $NP = AM$ . Точка  $O$  — центр описанной окружности четырехугольника. Докажите, что если точки  $O$  и  $P$  не совпадают, то  $OP \perp MN$ .

4. Точка  $H$  — ортоцентр равнобедренного треугольника  $ABC$ . На боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно так, что угол  $KMH$  — прямой. Докажите, что из отрезков  $AK$ ,  $CM$  и  $MK$  можно составить прямоугольный треугольник.

5. В остроугольном треугольнике на высоте  $BH$  выбрана произвольная точка  $X$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно. Перпендикуляр, опущенный из точки  $M$  на  $AX$ , пересекается с перпендикуляром, опущенным из  $N$  на  $CX$ , в точке  $P$ . Докажите, что точка  $P$  равноудалена от точек  $A$  и  $C$ .

6. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ , такой что  $AB = BC$  и  $AD = DC$ . Точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  — середины отрезков  $AB$ ,  $CD$  и  $AC$  соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки  $A$  к прямой  $BC$ , пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки  $C$  к прямой  $AD$ , в точке  $H$ . Докажите, что прямые  $KL$  и  $HM$  перпендикулярны.

7. Дан треугольник  $ABC$ . Постройте отрезок, который разобьёт его на два треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

8. Пусть  $M$  — середина хорды  $AB$  окружности с центром  $O$ . Точка  $K$  симметрична точке  $M$  относительно  $O$ ,  $P$  — произвольная точка окружности. Перпендикуляр к прямой  $AB$  в точке  $A$  и перпендикуляр к прямой  $PK$  в точке  $P$  пересекаются в точке  $Q$ . Точка  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $P$  на  $AB$ . Докажите, что прямая  $QB$  делит отрезок  $PH$  пополам.