

# Симметрические многочлены

9 июля

**Опр.** Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – многочлен от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Будем называть этот многочлен *симметрическим*, если для любой перестановки  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  чисел  $(1, 2, \dots, n)$  выполнено равенство  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ , то есть многочлен не меняется при перестановке его переменных.

**Опр.** Среди всех симметрических многочленов от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  выделяют *основные* или *элементарные симметрические* многочлены:

- $\sigma_1^n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$
- $\sigma_2^n = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n$ .

Говоря русским языком, элементарный симметрический многочлен  $\sigma_k^n$  представляет собой сумму всевозможных произведений  $k$  переменных из  $n$  имеющихся.

**I.** Является ли сумма/разность/произведение симметрических многочленов снова симметрическим многочленом?

**II.** Какие из нижеприведённых многочленов от переменных  $x, y, z$  являются симметрическими? **(а)**  $x + y - z$  **(б)**  $x^2 + y^2$  **(в)**  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$  **(г)**  $(x - y)(y - z)(z - x)$

**Основная теорема симметрических многочленов.** Любой симметрический многочлен  $f(x_1, \dots, x_n)$  выражается через основные симметрические многочлены посредством операций  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ . Иными словами, существует многочлен  $g$  от  $n$  переменных такой, что  $g(\sigma_1^n, \dots, \sigma_n^n) = f(x_1, \dots, x_n)$ .

**Напоминание.** Из теоремы Безу и возможности делить многочлены с остатком следует факт: если многочлен  $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  имеет  $n$  корней  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то имеет место разложение

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

**III.** Докажите теорему Виета для многочленов высших степеней. Если  $x_1, \dots, x_n$  – корни многочлена  $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ , то имеет место система равенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_{n-3}, \\ \vdots \\ x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n a_0. \end{cases}$$

Отметим, что в левых частях уравнений системы стоят основные симметрические многочлены от корней многочлена  $f$ .

1. Зная, что  $\sigma_1^1 = 2, \sigma_1^2 = 3, \sigma_1^3 = 4$ , найдите

(а)  $x^2 + y^2 + z^2$  (б)  $x^2y^2 + x^2y^2 + y^2z^2$  (в)  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

2. Решите системы уравнений:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases} \quad (б) \begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

3. Даны три вещественных числа  $x, y, z$ , для которых

$$x + y + z > 0, xy + xz + yz > 0, xyz > 0.$$

Покажите, что  $x, y, z > 0$ .

4. Пусть  $a > b > c$  – корни многочлена  $x^3 - 3x + 1$ . Докажите, что  $(a-b)(a-c)(b-c) = \sqrt{k}$  для некоторого натурального  $k$ .

# Симметрические многочлены

9 июля

**Опр.** Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – многочлен от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Будем называть этот многочлен *симметрическим*, если для любой перестановки  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  чисел  $(1, 2, \dots, n)$  выполнено равенство  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ , то есть многочлен не меняется при перестановке его переменных.

**Опр.** Среди всех симметрических многочленов от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  выделяют *основные* или *элементарные симметрические* многочлены:

- $\sigma_1^n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$
- $\sigma_2^n = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n$ .

Говоря русским языком, элементарный симметрический многочлен  $\sigma_k^n$  представляет собой сумму всевозможных произведений  $k$  переменных из  $n$  имеющихся.

**I.** Является ли сумма/разность/произведение симметрических многочленов снова симметрическим многочленом?

**II.** Какие из нижеприведённых многочленов от переменных  $x, y, z$  являются симметрическими? **(а)**  $x + y - z$  **(б)**  $x^2 + y^2$  **(в)**  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$  **(г)**  $(x - y)(y - z)(z - x)$

**Основная теорема симметрических многочленов.** Любой симметрический многочлен  $f(x_1, \dots, x_n)$  выражается через основные симметрические многочлены посредством операций  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ . Иными словами, существует многочлен  $g$  от  $n$  переменных такой, что  $g(\sigma_1^n, \dots, \sigma_n^n) = f(x_1, \dots, x_n)$ .

**Напоминание.** Из теоремы Безу и возможности делить многочлены с остатком следует факт: если многочлен  $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  имеет  $n$  корней  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то имеет место разложение

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

**III.** Докажите теорему Виета для многочленов высших степеней. Если  $x_1, \dots, x_n$  – корни многочлена  $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ , то имеет место система равенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_{n-3}, \\ \vdots \\ x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n a_0. \end{cases}$$

Отметим, что в левых частях уравнений системы стоят основные симметрические многочлены от корней многочлена  $f$ .

1. Зная, что  $\sigma_1^1 = 2, \sigma_1^2 = 3, \sigma_1^3 = 4$ , найдите

(а)  $x^2 + y^2 + z^2$  (б)  $x^2y^2 + x^2y^2 + y^2z^2$  (в)  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

2. Решите системы уравнений:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases} \quad (б) \begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

3. Даны три вещественных числа  $x, y, z$ , для которых

$$x + y + z > 0, xy + xz + yz > 0, xyz > 0.$$

Покажите, что  $x, y, z > 0$ .

4. Пусть  $a > b > c$  – корни многочлена  $x^3 - 3x + 1$ . Докажите, что  $(a-b)(a-c)(b-c) = \sqrt{k}$  для некоторого натурального  $k$ .