

КБШ

13 июля

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца: Для любых действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n выполняется неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n пропорциональны, т.е. $b_1 = ta_1, b_2 = ta_2, \dots, b_n = ta_n$.

I. Докажите неравенство КБШ **(а)** для двух переменных; **(б)** для n переменных.

II. При каких значениях переменных (x, y, z) достигается минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$ если известно, что $3x - 4y + 5z = 5$?

III. Используя КБШ докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, а также между средним арифметическим и средним гармоническим.

Задачи

1. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$, если известно, что $a + 2b + 3c \geq 14$. Когда достигается равенство?

2. Докажите неравенство $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1$ если $|a| \leq 1, |b| \leq 1$.

3. Докажите следующие неравенства, используя неравенство КБШ:

а) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2, a_i > 0$;

б) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

4. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$\sqrt{3a^2 + ab} + \sqrt{3b^2 + bc} + \sqrt{3c^2 + ca} \leq 2(a + b + c).$$

5. $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^7 + a_2^7 + \dots + a_n^7) \geq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5)$

6. Следствие КБШ (лемма Титу, неравенство Седракияна). Докажите, что для любых a_1, a_2, \dots, a_n и любых $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Установите, при каких a_i, b_i достигается равенство.

7. Докажите неравенства для положительных a, b, c :

а) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$;

б) $\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$;

в) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (Неравенство Несбитта).

8. Для $x, y, z \geq 1$ докажите, что $\sqrt{x+xyz} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$

КБШ

13 июля

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца: Для любых действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n выполняется неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n пропорциональны, т.е. $b_1 = ta_1, b_2 = ta_2, \dots, b_n = ta_n$.

I. Докажите неравенство КБШ **(а)** для двух переменных; **(б)** для n переменных.

II. При каких значениях переменных (x, y, z) достигается минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$ если известно, что $3x - 4y + 5z = 5$?

III. Используя КБШ докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, а также между средним арифметическим и средним гармоническим.

Задачи

1. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$, если известно, что $a + 2b + 3c \geq 14$. Когда достигается равенство?

2. Докажите неравенство $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1$ если $|a| \leq 1, |b| \leq 1$.

3. Докажите следующие неравенства, используя неравенство КБШ:

а) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2, a_i > 0$;

б) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

4. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$\sqrt{3a^2 + ab} + \sqrt{3b^2 + bc} + \sqrt{3c^2 + ca} \leq 2(a + b + c).$$

5. $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^7 + a_2^7 + \dots + a_n^7) \geq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5)$

6. Следствие КБШ (лемма Титу, неравенство Седракияна). Докажите, что для любых a_1, a_2, \dots, a_n и любых $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Установите, при каких a_i, b_i достигается равенство.

7. Докажите неравенства для положительных a, b, c :

а) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$;

б) $\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$;

в) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (Неравенство Несбитта).

8. Для $x, y, z \geq 1$ докажите, что $\sqrt{x+xyz} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$