

# Поворот

19 июля

I. Докажите, что композиция двух поворотов на углы в сумме не кратные  $360^\circ$  является поворотом. В какой точке находится центр и чему равен угол этого поворота? Рассмотрите случай, когда сумма углов кратна  $360^\circ$ .

II. Дан равносторонний треугольник  $ABC$ ,  $O$  — центр треугольника. Найдите композицию поворотов: **(а)**  $R_B^{-60^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$ ; **(б)**  $R_O^{-120^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$ ; **(в)**  $R_O^{120^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$ .

III. На сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  вне его построены правильные треугольники  $BCA_1$ ,  $CAB_1$ ,  $ABC_1$ . Докажите, что композиция поворотов с центрами  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  на углы  $60^\circ$  есть центральная симметрия. Найдите ее центр.

1. Археологи нашли старинный свиток, в котором было написано: «Встань около березы, и дойди от нее, не сворачивая, до колодца, а у колодца поверни под прямым углом налево и пройди такое же расстояние. В том месте, где ты оказался, вбей колышек в землю. Теперь опять встань у березы, и дойди от нее, не сворачивая, до дуба, поверни под прямым углом направо и пройди такое же расстояние. Вбей второй колышек в землю. Посередине между колышками зарыт клад». Оказалось, что колодец и дуб по-прежнему на месте, но березы уже нет. Смогут ли археологи найти клад?

2. На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  вне его построены правильные треугольники  $ACP$  и  $BCQ$ . Найти углы треугольника, у которого вершины совпадают с серединой  $M$  стороны  $AB$ , точкой  $P$  и центром  $O$  треугольника  $BCQ$ .

3. (**Теорема Наполеона**) На сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники. Докажите, что их центры — вершины правильного треугольника.

4. Постройте треугольник, если известны три точки, являющиеся вершинами правильных треугольников, построенных вне треугольника на его сторонах.

5. Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведена прямая, пересекающая  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $C$  и  $D$  ( $A$  на отрезке  $CD$ ). Пусть  $M$  и  $N$  — середины дуг  $BC$  и  $BD$  соответственно, не содержащих точку  $A$ ,  $K$  — середина  $CD$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $K$ ,  $M$ ,  $N$  лежат на одной окружности.

6. На сторонах четырехугольника, вне его построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами четырехугольника, у которого диагонали равны и перпендикулярны.

7. На сторонах выпуклого четырехугольника  $ABCD$  как на диаметрах построили полуокружности. На  $AB$  и  $CD$  — внешним образом, а на  $BC$  и  $DA$  — внутренним. После чего отметили точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  — середины дуг  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно. Они образуют четырехугольник. Докажите, что  $KLMN$  — параллелограмм.

8. На сторонах  $AB$  и  $BC$  вписанного четырехугольника  $ABCD$  выбраны такие точки  $K$  и  $L$  соответственно, что  $AK = CD$  и  $CL = AD$ . Пусть  $M$  — середина  $KL$ . Докажите, что  $\angle AMC = 90^\circ$ .

# Поворот

19 июля

I. Докажите, что композиция двух поворотов на углы в сумме не кратные  $360^\circ$  является поворотом. В какой точке находится центр и чему равен угол этого поворота? Рассмотрите случай, когда сумма углов кратна  $360^\circ$ .

II. Дан равносторонний треугольник  $ABC$ ,  $O$  — центр треугольника. Найдите композицию поворотов: **(а)**  $R_B^{-60^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$ ; **(б)**  $R_O^{-120^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$ ; **(в)**  $R_O^{120^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$ .

III. На сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  вне его построены правильные треугольники  $BCA_1$ ,  $CAB_1$ ,  $ABC_1$ . Докажите, что композиция поворотов с центрами  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  на углы  $60^\circ$  есть центральная симметрия. Найдите ее центр.

1. Археологи нашли старинный свиток, в котором было написано: «Встань около березы, и дойди от нее, не сворачивая, до колодца, а у колодца поверни под прямым углом налево и пройди такое же расстояние. В том месте, где ты оказался, вбей колышек в землю. Теперь опять встань у березы, и дойди от нее, не сворачивая, до дуба, поверни под прямым углом направо и пройди такое же расстояние. Вбей второй колышек в землю. Посередине между колышками зарыт клад». Оказалось, что колодец и дуб по-прежнему на месте, но березы уже нет. Смогут ли археологи найти клад?

2. На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  вне его построены правильные треугольники  $ACP$  и  $BCQ$ . Найти углы треугольника, у которого вершины совпадают с серединой  $M$  стороны  $AB$ , точкой  $P$  и центром  $O$  треугольника  $BCQ$ .

3. (**Теорема Наполеона**) На сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники. Докажите, что их центры — вершины правильного треугольника.

4. Постройте треугольник, если известны три точки, являющиеся вершинами правильных треугольников, построенных вне треугольника на его сторонах.

5. Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Через точку  $A$  проведена прямая, пересекающая  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $C$  и  $D$  ( $A$  на отрезке  $CD$ ). Пусть  $M$  и  $N$  — середины дуг  $BC$  и  $BD$  соответственно, не содержащих точку  $A$ ,  $K$  — середина  $CD$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $K$ ,  $M$ ,  $N$  лежат на одной окружности.

6. На сторонах четырехугольника, вне его построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами четырехугольника, у которого диагонали равны и перпендикулярны.

7. На сторонах выпуклого четырехугольника  $ABCD$  как на диаметрах построили полуокружности. На  $AB$  и  $CD$  — внешним образом, а на  $BC$  и  $DA$  — внутренним. После чего отметили точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  — середины дуг  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно. Они образуют четырехугольник. Докажите, что  $KLMN$  — параллелограмм.

8. На сторонах  $AB$  и  $BC$  вписанного четырехугольника  $ABCD$  выбраны такие точки  $K$  и  $L$  соответственно, что  $AK = CD$  и  $CL = AD$ . Пусть  $M$  — середина  $KL$ . Докажите, что  $\angle AMC = 90^\circ$ .