

Матбой профи

10 июля

1. Найдите первые четыре цифры числа $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 999^{999} + 1000^{1000}$.
2. Рассматриваются всевозможные n -значные числа, составленные из цифр 1, 2 и 3. В конце каждого из этих чисел приписывается цифра 1, 2 или 3 так, что к двум числам, у которых во всех разрядах стоят разные цифры, приписываются разные цифры. Доказать, что найдётся n -значное число, в записи которого участвует лишь одна единица и к которому приписывается единица.
3. Пусть m и n - натуральные числа, не меньшие 2. Доказать, что найдётся такое натуральное число k , что $\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$.
4. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > AC$. Точка E симметрична C относительно высоты AH . F — точка пересечения прямых EH и AC . Докажите, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на прямой AB .
5. За квадратным фанерным листом 19×19 спрятана круглая мишень диаметром 7. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может гарантированно попасть в мишень, сделав не более пяти выстрелов. Не хвастает ли барон?
6. Найдите все натуральные n , при которых $n - 1$ и $n^2 + 3n + 17$ являются кубами.
7. В параллели М8 $2n$ учеников ($n > 1$). На каждый приём пищи приходят дежурить n из них. После нескольких таких дежурств каждые два ученика подежурили вместе хотя бы один раз. При каком минимальном количестве дежурств такое могло произойти?
8. Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости так, чтобы среди любых 2024 из них нашлись две, образующие угол 12 градусов?

Матбой профи

10 июля

1. Найдите первые четыре цифры числа $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 999^{999} + 1000^{1000}$.
2. Рассматриваются всевозможные n -значные числа, составленные из цифр 1, 2 и 3. В конце каждого из этих чисел приписывается цифра 1, 2 или 3 так, что к двум числам, у которых во всех разрядах стоят разные цифры, приписываются разные цифры. Доказать, что найдётся n -значное число, в записи которого участвует лишь одна единица и к которому приписывается единица.
3. Пусть m и n - натуральные числа, не меньшие 2. Доказать, что найдётся такое натуральное число k , что $\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$.
4. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > AC$. Точка E симметрична C относительно высоты AH . F — точка пересечения прямых EH и AC . Докажите, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на прямой AB .
5. За квадратным фанерным листом 19×19 спрятана круглая мишень диаметром 7. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может гарантированно попасть в мишень, сделав не более пяти выстрелов. Не хвастает ли барон?
6. Найдите все натуральные n , при которых $n - 1$ и $n^2 + 3n + 17$ являются кубами.
7. В параллели М8 $2n$ учеников ($n > 1$). На каждый приём пищи приходят дежурить n из них. После нескольких таких дежурств каждые два ученика подежурили вместе хотя бы один раз. При каком минимальном количестве дежурств такое могло произойти?
8. Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости так, чтобы среди любых 2024 из них нашлись две, образующие угол 12 градусов?