

# Выпуклые многогранники

4 июля

**Определение.** Граф, нарисованный на плоскости так, что у его рёбер нет пересечений, называется *плоским*. Он разбивает плоскость на конечное число связных областей (включая внешнюю), которые называют *гранями*.

**I. (Формула Эйлера)** Пусть  $G$  – плоский граф с  $v$  вершинами,  $e$  рёбрами,  $f$  гранями и  $k$  компонентами связности. Тогда верно соотношение  $v - e + f = k + 1$ .

**II.** Для любого связного плоского графа с  $v > 2$ , без петель и кратных рёбер, выполнены неравенства **(а)**  $2e \geq 3f$ ; **(б)**  $e \leq 3v - 6$ . В случае, если все циклы в графе имеют длину хотя бы  $k$ , первое неравенство можно улучшить до  $2e \geq kf$ .

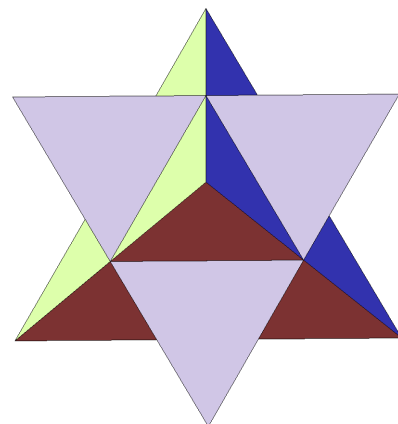
**III.** Как произвольному выпуклому многограннику сопоставить плоский граф с тем же числом вершин, рёбер и граней?

## Задачи

1. Многогранник справа образован наложением двух тетраэдров. Чему равно  $v - e + f$ ?

2. Степан Владимирович решил сшить футбольный мяч, для чего принес 40 пятиугольных и 40 шестиугольных лоскутков (стороны лоскутков равны). Какое наибольшее количество пятиугольных лоскутков он сможет использовать?

3. Докажите, что каждый выпуклый многогранник имеет либо трёхгранный угол, либо треугольную грань.



**Определение.** Для плоского графа  $G$  *двойственный граф* определяется следующим образом. Вершины соответствуют граням  $G$ , а ребро проводится, если эти грани в  $G$  имеют общее ребро.

4. **(а)** Верно ли, что двойственный граф всегда можно нарисовать на плоскости без самопересечений?

**(б)** Нарисуйте двойственный граф для полного графа на четырёх вершинах.

**(в)** Приведите пример плоского графа на 2024 вершинах, который изоморфен своему двойственному.

5. Докажите, что грани выпуклого многогранника можно правильным образом покрасить в два цвета тогда и только тогда, когда степени всех вершин четны.

6. **(а)** Докажите, что у выпуклого многогранника есть грань, содержащая не более пяти рёбер. **(б)** Докажите, что грани выпуклого многогранника можно покрасить правильным образом в пять цветов.

7. В выпуклом многограннике существует цикл, проходящий по всем вершинам. Докажите, что его грани можно правильно раскрасить в четыре цвета.
8. Дан выпуклый многогранник с треугольными гранями.
- (а) Грани покрашены в черный или белый цвет так, что число ребер между одноцветными гранями минимально. Докажите, что если белых граней меньше, чем чёрных, то хотя бы в полтора раза.
- (б) Какое наибольшее число вершин степени 3 может быть у такого многогранника, если число граней равно  $2n$ ?

# Выпуклые многогранники

4 июля

**Определение.** Граф, нарисованный на плоскости так, что у его рёбер нет пересечений, называется *плоским*. Он разбивает плоскость на конечное число связных областей (включая внешнюю), которые называют *гранями*.

**I. (Формула Эйлера)** Пусть  $G$  – плоский граф с  $v$  вершинами,  $e$  рёбрами,  $f$  гранями и  $k$  компонентами связности. Тогда верно соотношение  $v - e + f = k + 1$ .

**II.** Для любого связного плоского графа с  $v > 2$ , без петель и кратных рёбер, выполнены неравенства **(а)**  $2e \geq 3f$ ; **(б)**  $e \leq 3v - 6$ . В случае, если все циклы в графе имеют длину хотя бы  $k$ , первое неравенство можно улучшить до  $2e \geq kf$ .

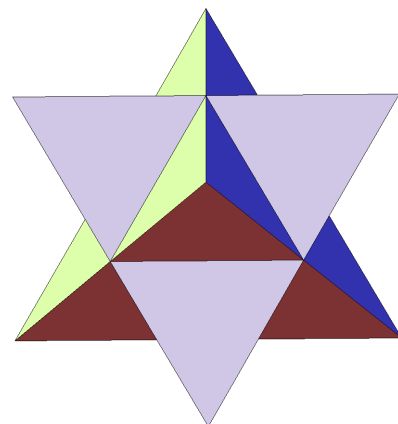
**III.** Как произвольному выпуклому многограннику сопоставить плоский граф с тем же числом вершин, рёбер и граней?

## Задачи

1. Многогранник справа образован наложением двух тетраэдров. Чему равно  $v - e + f$ ?

2. Степан Владимирович решил сшить футбольный мяч, для чего принес 40 пятиугольных и 40 шестиугольных лоскутков (стороны лоскутков равны). Какое наибольшее количество пятиугольных лоскутков он сможет использовать?

3. Докажите, что каждый выпуклый многогранник имеет либо трёхгранный угол, либо треугольную грань.



**Определение.** Для плоского графа  $G$  *двойственный граф* определяется следующим образом. Вершины соответствуют граням  $G$ , а ребро проводится, если эти грани в  $G$  имеют общее ребро.

4. **(а)** Верно ли, что двойственный граф всегда можно нарисовать на плоскости без самопересечений?

**(б)** Нарисуйте двойственный граф для полного графа на четырёх вершинах.

**(в)** Приведите пример плоского графа на 2024 вершинах, который изоморфен своему двойственному.

5. Докажите, что грани выпуклого многогранника можно правильным образом покрасить в два цвета тогда и только тогда, когда степени всех вершин четны.

6. **(а)** Докажите, что у выпуклого многогранника есть грань, содержащая не более пяти рёбер. **(б)** Докажите, что грани выпуклого многогранника можно покрасить правильным образом в пять цветов.

7. В выпуклом многограннике существует цикл, проходящий по всем вершинам. Докажите, что его грани можно правильно раскрасить в четыре цвета.
8. Дан выпуклый многогранник с треугольными гранями.
- (а) Грани покрашены в черный или белый цвет так, что число ребер между одноцветными гранями минимально. Докажите, что если белых граней меньше, чем чёрных, то хотя бы в полтора раза.
- (б) Какое наибольшее число вершин степени 3 может быть у такого многогранника, если число граней равно  $2n$ ?