

# Заключительная олимпиада

21 июля

## Довывод

1. В вершинах тетраэдра записали 4 разных натуральных числа. На каждом ребре написали произведение этих чисел. В каждой грани записали произведение трех чисел в ее вершинах. Внутри тетраэдра записали число, равное произведению чисел во всех его вершинах. Эти числа сложили и получили 2024. Какие числа были написаны в вершинах?
2. В состоящем из  $n$  элементов множестве  $M$  выбрано несколько подмножеств. При этом каждое невыбранное подмножество множества  $M$  представимо в виде пересечения некоторых выбранных подмножеств. Какое наименьшее число подмножеств могло быть выбрано?
3. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  и на продолжении стороны  $BC$  за точку  $C$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно так, что  $AE = CF = AC$ . Прямые  $EC$  и  $AF$  пересекаются в точке  $D$ ,  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $D$  на прямую  $AC$ . Докажите, что длина  $AH$  равна полупериметру треугольника  $ABC$ .
4. Для положительных  $x_i$  таких, что  $x_1 + \dots + x_{10} = 1$ , найдите наибольшее значение выражения

$$(1 + 2x_1) \cdot (3 + 4x_2) \cdot (7 + 8x_3) \cdot \dots \cdot (1023 + 1024x_{10}).$$

5. Возьмём всевозможные квадратные трёхчлены с натуральными коэффициентами, не превосходящими 100. Каких трёхчленов больше: имеющих хотя бы один действительный корень, или не имеющих ни одного?

## Вывод

6. Докажите, что для любого натурального  $n$  выполняется неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

7. В клубе джентльменов каждые два джентльмена — либо друзья, либо враги. Известно, что у каждого ровно 75 врагов. Кроме того, в клубе выполняется правило: «Враг моего друга — мой враг». Сколько джентльменов могло быть в клубе?
8. Биссектрисы  $AA_1$  и  $CC_1$  прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) пересекаются в точке  $I$ . Перпендикуляр, опущенный из вершины  $B$  на прямую  $AI$ , пересекает прямую  $CI$  в точке  $C_0$ ; перпендикуляр, опущенный из вершины  $B$  на прямую  $CI$ , пересекает прямую  $AI$  в точке  $A_0$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $A_0BC_0$  лежит на прямой  $A_1C_1$ .
9. Решить в целых числах уравнение  $n^2 + 5 = m^3$ .

# Заключительная олимпиада

21 июля

## Довывод

1. В вершинах тетраэдра записали 4 разных натуральных числа. На каждом ребре написали произведение этих чисел. В каждой грани записали произведение трех чисел в ее вершинах. Внутри тетраэдра записали число, равное произведению чисел во всех его вершинах. Эти числа сложили и получили 2024. Какие числа были написаны в вершинах?
2. В состоящем из  $n$  элементов множестве  $M$  выбрано несколько подмножеств. При этом каждое невыбранное подмножество множества  $M$  представимо в виде пересечения некоторых выбранных подмножеств. Какое наименьшее число подмножеств могло быть выбрано?
3. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  и на продолжении стороны  $BC$  за точку  $C$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно так, что  $AE = CF = AC$ . Прямые  $EC$  и  $AF$  пересекаются в точке  $D$ ,  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $D$  на прямую  $AC$ . Докажите, что длина  $AH$  равна полупериметру треугольника  $ABC$ .
4. Для положительных  $x_i$  таких, что  $x_1 + \dots + x_{10} = 1$ , найдите наибольшее значение выражения

$$(1 + 2x_1) \cdot (3 + 4x_2) \cdot (7 + 8x_3) \cdot \dots \cdot (1023 + 1024x_{10}).$$

5. Возьмём всевозможные квадратные трёхчлены с натуральными коэффициентами, не превосходящими 100. Каких трёхчленов больше: имеющих хотя бы один действительный корень, или не имеющих ни одного?

## Вывод

6. Докажите, что для любого натурального  $n$  выполняется неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

7. В клубе джентльменов каждые два джентльмена — либо друзья, либо враги. Известно, что у каждого ровно 75 врагов. Кроме того, в клубе выполняется правило: «Враг моего друга — мой враг». Сколько джентльменов могло быть в клубе?
8. Биссектрисы  $AA_1$  и  $CC_1$  прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) пересекаются в точке  $I$ . Перпендикуляр, опущенный из вершины  $B$  на прямую  $AI$ , пересекает прямую  $CI$  в точке  $C_0$ ; перпендикуляр, опущенный из вершины  $B$  на прямую  $CI$ , пересекает прямую  $AI$  в точке  $A_0$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $A_0BC_0$  лежит на прямой  $A_1C_1$ .
9. Решить в целых числах уравнение  $n^2 + 5 = m^3$ .