

Облики чисел Каталана

14 июля

Количество каждого из следующих объектов равно числу Каталана c_n .

- (а) Способы съесть все n блинов, которые печёт мама, если сын время от времени забегает на кухню и берет самый верхний блин.
- (б) Последовательности a_1, \dots, a_{2n} длины $2n$, в которых n единиц и n минус единиц и все частичные суммы (суммы первых нескольких членов) неотрицательны.
- (в) (Триангуляция) Способы разбить на пары $2n$ точек, стоящих по окружности, и соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались.
- (г) Способы разбить выпуклый $(n+2)$ -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (способы, отличающиеся поворотом, различны).
- (д) (Пути Дика) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси OX .
- (е) Последовательности целых чисел $s = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ такие, что $s_0 = 0$, $|s_i - s_{i-1}| = 1$, $1 \leq i \leq 2n$ и: 1) если $s_{2n} = 0$; 2) если $s_1 \neq 0, \dots, s_{2n} \neq 0$; 3) если $s_1 \geq 0, \dots, s_{2n} \geq 0$.
- (ж) Пути с концом в точке $(2n, 0)$, имеющие ровно $2k$ ходов в нижней полуплоскости (для любого фиксированного $0 \leq k \leq n$).
- (з) Пути из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям сетки, идущие вправо и вверх, не поднимающиеся выше прямой $y = x$.
- (и) Пути из точки $(0, 0)$ в точку $(n-1, n+1)$ равно числу путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) , поднимающихся выше диагонали $y = x$.
- (к) Плоские корневые строго двоичные деревья (фиксированный корень, у каждой вершины либо два потомка, либо ни одного) с ровно $n+1$ пронумерованным листом.
- (л) Плоские корневые деревья с $n+1$ вершиной.
- (м) Плоские корневые двоичные деревья (у каждой вершины не более двух потомков, левого и правого, и у каждой вершины, кроме корня, один предок) с n вершинами.
- (н) Таблицы $2 \times n$, заполненные натуральными числами от 1 до $2n$, так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.
- (о) (Параллеломино) Неупорядоченные пары путей с шагами $(0, 1)$ и $(1, 0)$ длины $n+1$, начинающиеся в точке $(0, 0)$, заканчивающиеся в одной точке и пересекающиеся только в начальной и конечной точке.
- (п) Способы заполнить n -«лесенку» (высоты n) n прямоугольниками.
- (р) Неубывающие последовательности чисел из \mathbb{N} a_1, \dots, a_n : $a_i \leq i$ для $1 \leq i \leq n$;
- (с) Последовательности натуральных чисел вида $1, a_1, \dots, a_n, 1$, в которых каждый член является делителем суммы двух соседей.
- (т) Наборы из n целых чисел от 0 до n , сумма которых делится на $n+1$.
- (у) (Перестановки Кнута) Способы расставить числа от 1 до n чисел в ряд так, чтобы не было трёх чисел, стоящих в порядке возрастания.

Облики чисел Каталана

14 июля

Количество каждого из следующих объектов равно числу Каталана c_n .

(а) Способы съесть все n блинов, которые печёт мама, если сын время от времени забегает на кухню и берет самый верхний блин.

(б) Последовательности a_1, \dots, a_{2n} длины $2n$, в которых n единиц и n минус единиц и все частичные суммы (суммы первых нескольких членов) неотрицательны.

(в) (*Триангуляция*) Способы разбить на пары $2n$ точек, стоящих по окружности, и соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались.

(г) Способы разбить выпуклый $(n+2)$ -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (способы, отличающиеся поворотом, различны).

(д) (*Пути Дика*) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси OX .

(е) Последовательности целых чисел $s = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ такие, что $s_0 = 0$, $|s_i - s_{i-1}| = 1$, $1 \leq i \leq 2n$ и: 1) если $s_{2n} = 0$; 2) если $s_1 \neq 0, \dots, s_{2n} \neq 0$; 3) если $s_1 \geq 0, \dots, s_{2n} \geq 0$.

(ж) Пути с концом в точке $(2n, 0)$, имеющие ровно $2k$ ходов в нижней полуплоскости (для любого фиксированного $0 \leq k \leq n$).

(з) Пути из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям сетки, идущие вправо и вверх, не поднимающиеся выше прямой $y = x$.

(и) Пути из точки $(0, 0)$ в точку $(n-1, n+1)$ равно числу путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) , поднимающихся выше диагонали $y = x$.

(к) Плоские корневые строго двоичные деревья (фиксированный корень, у каждой вершины либо два потомка, либо ни одного) с ровно $n+1$ пронумерованным листом.

(л) Плоские корневые деревья с $n+1$ вершиной.

(м) Плоские корневые двоичные деревья (у каждой вершины не более двух потомков, левого и правого, и у каждой вершины, кроме корня, один предок) с n вершинами.

(н) Таблицы $2 \times n$, заполненные натуральными числами от 1 до $2n$, так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.

(о) (*Параллеломино*) Неупорядоченные пары путей с шагами $(0, 1)$ и $(1, 0)$ длины $n+1$, начинающиеся в точке $(0, 0)$, заканчивающиеся в одной точке и пересекающиеся только в начальной и конечной точке.

(п) Способы заполнить n -«лесенку» (высоты n) n прямоугольниками.

(р) Неубывающие последовательности чисел из \mathbb{N} a_1, \dots, a_n : $a_i \leq i$ для $1 \leq i \leq n$;

(с) Последовательности натуральных чисел вида $1, a_1, \dots, a_n, 1$, в которых каждый член является делителем суммы двух соседей.

(т) Наборы из n целых чисел от 0 до n , сумма которых делится на $n+1$.

(у) (*Перестановки Кнута*) Способы расставить числа от 1 до n чисел в ряд так, чтобы не было трёх чисел, стоящих в порядке возрастания.