

Массовый разнобой

17 июля

1. Докажите, что центр масс пятиугольника $ABCDE$ лежит на отрезке, соединяющем вершину A и центр масс четырёхугольника $BCDE$. В каком отношении он делит этот отрезок?
2. Стороны $\triangle ABC$, противолежащие вершинам A , B и C имеют длины a , b и c .
(а) Доказать, что центр масс системы aA , bB , cC — центр вписанной окружности этого треугольника.
(б) В каком отношении биссектриса AA_1 делится точкой пересечения биссектрис?
3. Из четырех точек A , B , C , D никакие три не лежат на одной прямой. Точки пересечения медиан треугольников BCD , ACD , ABD , ABC обозначены соответственно A' , B' , C' , D' . Доказать, что отрезки AA' , BB' , CC' , DD' пересекаются в одной точке Z .
4. Даны четыре точки A , B , C , D . Через K , L , M , N , P , Q обозначены середины отрезков AB , CD , AC , BD , AD , BC . Доказать, что середины отрезков KL , MN и PQ совпадают между собой и с точкой Z из предыдущей задачи.
5. Пусть система материальных точек $m_i M_i$ ($i = 1 \dots n$) с центром масс Z под действием преобразования подобия f (в том числе и движения) переходит систему точек $m_i M'_i$ ($f(M_i) = M'_i$) с центром масс Z' . Докажите, что $Z' = f(Z)$.
6. (а) Докажите, что для любой точки X на прямой AB существуют массы α , β такие, что X — центр масс αA , βB .
(б) Докажите, что для любой точки X внутри треугольника ABC существует набор масс α , β , γ такой, что X — центр масс αA , βB и γC .
(в) Докажите тоже самое для произвольной точки плоскости.

Вопрос: Однозначно ли определяются массы из предыдущей задачи? И если нет, то что вы можете предложить для того, чтобы эти массы определялись однозначно?

7. (а) Пусть дан многоугольник M и для любой пары его вершин A , B существует движение плоскости f , переводящее M в себя и удовлетворяющее условию $f(A) = B$. Докажите, что вокруг него можно описать окружность. (б) Тот же вопрос про многогранник и описанную сферу.

Массовый разнобой

17 июля

1. Докажите, что центр масс пятиугольника $ABCDE$ лежит на отрезке, соединяющем вершину A и центр масс четырёхугольника $BCDE$. В каком отношении он делит этот отрезок?
2. Стороны $\triangle ABC$, противолежащие вершинам A , B и C имеют длины a , b и c .
(а) Доказать, что центр масс системы aA , bB , cC — центр вписанной окружности этого треугольника.
(б) В каком отношении биссектриса AA_1 делится точкой пересечения биссектрис?
3. Из четырех точек A , B , C , D никакие три не лежат на одной прямой. Точки пересечения медиан треугольников BCD , ACD , ABD , ABC обозначены соответственно A' , B' , C' , D' . Доказать, что отрезки AA' , BB' , CC' , DD' пересекаются в одной точке Z .
4. Даны четыре точки A , B , C , D . Через K , L , M , N , P , Q обозначены середины отрезков AB , CD , AC , BD , AD , BC . Доказать, что середины отрезков KL , MN и PQ совпадают между собой и с точкой Z из предыдущей задачи.
5. Пусть система материальных точек $m_i M_i$ ($i = 1 \dots n$) с центром масс Z под действием преобразования подобия f (в том числе и движения) переходит систему точек $m_i M'_i$ ($f(M_i) = M'_i$) с центром масс Z' . Докажите, что $Z' = f(Z)$.
6. (а) Докажите, что для любой точки X на прямой AB существуют массы α , β такие, что X — центр масс αA , βB .
(б) Докажите, что для любой точки X внутри треугольника ABC существует набор масс α , β , γ такой, что X — центр масс αA , βB и γC .
(в) Докажите тоже самое для произвольной точки плоскости.

Вопрос: Однозначно ли определяются массы из предыдущей задачи? И если нет, то что вы можете предложить для того, чтобы эти массы определялись однозначно?

7. (а) Пусть дан многоугольник M и для любой пары его вершин A , B существует движение плоскости f , переводящее M в себя и удовлетворяющее условию $f(A) = B$. Докажите, что вокруг него можно описать окружность. (б) Тот же вопрос про многогранник и описанную сферу.