

# Массовый разнобой

17 июля

1. Докажите, что центр масс пятиугольника  $ABCDE$  лежит на отрезке, соединяющем вершину  $A$  и центр масс четырёхугольника  $BCDE$ . В каком отношении он делит этот отрезок?
2. Стороны  $\triangle ABC$ , противолежащие вершинам  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеют длины  $a$ ,  $b$  и  $c$ .  
(а) Доказать, что центр масс системы  $aA$ ,  $bB$ ,  $cC$  — центр вписанной окружности этого треугольника.  
(б) В каком отношении биссектриса  $AA_1$  делится точкой пересечения биссектрис?
3. Пусть  $ABCD$  — описанный четырёхугольник, точки  $K$ ,  $L$ ,  $N$ ,  $M$  — точки касания сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  с вписанной окружностью. В каком отношении отрезки  $KN$  и  $LM$  делятся своей точкой пересечения?
4. В угол  $PAQ$  вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках  $P$  и  $Q$ . Прямая  $BC$  касается окружности в точке  $T$ . Прямые  $BQ$  и  $CP$  пересекаются в точке  $M$ . Доказать, что точки  $A$ ,  $T$  и  $M$  лежат на одной прямой.
5. Из четырех точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  никакие три не лежат на одной прямой. Точки пересечения медиан треугольников  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$ ,  $ABC$  обозначены соответственно  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ . Доказать, что отрезки  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  пересекаются в одной точке  $Z$ .
6. Даны четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Через  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  обозначены середины отрезков  $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$ ,  $BD$ ,  $AD$ ,  $BC$ . Доказать, что середины отрезков  $KL$ ,  $MN$  и  $PQ$  совпадают между собой и с точкой  $Z$  из предыдущей задачи.
7. Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 1. Точка  $M$  делит сторону  $BC$  в отношении  $3 : 5$ , считая от вершины  $B$ . Прямые  $AM$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ . Вычислить площадь четырёхугольника  $CMPD$ .
8. Пусть система материальных точек  $m_i M_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) с центром масс  $Z$  под действием преобразования подобия  $f$  (в том числе и движения) переходит систему точек  $m_i M'_i$  ( $f(M_i) = M'_i$ ) с центром масс  $Z'$ . Докажите, что  $Z' = f(Z)$ .
9. (а) Докажите, что для любой точки  $X$  на прямой  $AB$  существуют массы  $\alpha$ ,  $\beta$  такие, что  $X$  — центр масс  $\alpha A$ ,  $\beta B$ .  
(б) Докажите, что для любой точки  $X$  внутри треугольника  $ABC$  существует набор масс  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  такой, что  $X$  — центр масс  $\alpha A$ ,  $\beta B$  и  $\gamma C$ .  
(в) Докажите тоже самое для произвольной точки плоскости.

*Вопрос: Однозначно ли определяются массы из предыдущей задачи? И если нет, то что вы можете предложить для того, чтобы эти массы определялись однозначно?*

10. (а) Пусть дан многоугольник  $M$  и для любой пары его вершин  $A$ ,  $B$  существует движение плоскости  $f$ , переводящее  $M$  в себя и удовлетворяющее условию  $f(A) = B$ . Докажите, что вокруг него можно описать окружность. (б) Тот же вопрос про

многогранник и описанную сферу.

# Массовый разнобой

17 июля

1. Докажите, что центр масс пятиугольника  $ABCDE$  лежит на отрезке, соединяющем вершину  $A$  и центр масс четырёхугольника  $BCDE$ . В каком отношении он делит этот отрезок?
2. Стороны  $\triangle ABC$ , противолежащие вершинам  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеют длины  $a$ ,  $b$  и  $c$ .  
(а) Доказать, что центр масс системы  $aA$ ,  $bB$ ,  $cC$  — центр вписанной окружности этого треугольника.  
(б) В каком отношении биссектриса  $AA_1$  делится точкой пересечения биссектрис?
3. Пусть  $ABCD$  — описанный четырёхугольник, точки  $K$ ,  $L$ ,  $N$ ,  $M$  — точки касания сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  с вписанной окружностью. В каком отношении отрезки  $KN$  и  $LM$  делятся своей точкой пересечения?
4. В угол  $PAQ$  вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках  $P$  и  $Q$ . Прямая  $BC$  касается окружности в точке  $T$ . Прямые  $BQ$  и  $CP$  пересекаются в точке  $M$ . Доказать, что точки  $A$ ,  $T$  и  $M$  лежат на одной прямой.
5. Из четырех точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  никакие три не лежат на одной прямой. Точки пересечения медиан треугольников  $BCD$ ,  $ACD$ ,  $ABD$ ,  $ABC$  обозначены соответственно  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ . Доказать, что отрезки  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  пересекаются в одной точке  $Z$ .
6. Даны четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Через  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  обозначены середины отрезков  $AB$ ,  $CD$ ,  $AC$ ,  $BD$ ,  $AD$ ,  $BC$ . Доказать, что середины отрезков  $KL$ ,  $MN$  и  $PQ$  совпадают между собой и с точкой  $Z$  из предыдущей задачи.
7. Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 1. Точка  $M$  делит сторону  $BC$  в отношении  $3 : 5$ , считая от вершины  $B$ . Прямые  $AM$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ . Вычислить площадь четырёхугольника  $CMPD$ .
8. Пусть система материальных точек  $m_i M_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) с центром масс  $Z$  под действием преобразования подобия  $f$  (в том числе и движения) переходит систему точек  $m_i M'_i$  ( $f(M_i) = M'_i$ ) с центром масс  $Z'$ . Докажите, что  $Z' = f(Z)$ .
9. (а) Докажите, что для любой точки  $X$  на прямой  $AB$  существуют массы  $\alpha$ ,  $\beta$  такие, что  $X$  — центр масс  $\alpha A$ ,  $\beta B$ .  
(б) Докажите, что для любой точки  $X$  внутри треугольника  $ABC$  существует набор масс  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  такой, что  $X$  — центр масс  $\alpha A$ ,  $\beta B$  и  $\gamma C$ .  
(в) Докажите тоже самое для произвольной точки плоскости.

*Вопрос: Однозначно ли определяются массы из предыдущей задачи? И если нет, то что вы можете предложить для того, чтобы эти массы определялись однозначно?*

10. (а) Пусть дан многоугольник  $M$  и для любой пары его вершин  $A$ ,  $B$  существует движение плоскости  $f$ , переводящее  $M$  в себя и удовлетворяющее условию  $f(A) = B$ . Докажите, что вокруг него можно описать окружность. (б) Тот же вопрос про

многогранник и описанную сферу.