

Индуктивные конструкции

3 июля

1. В компании из n человек ($n > 4$) каждый узнал по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Как за $2n - 4$ звонка все смогут узнать все новости?
2. Слоник за один ход может прыгнуть на любое число клеток по диагонали, равное точному квадрату (на 1, то есть на соседнюю, на 4, на 9 и т.д.). При этом он может перепрыгивать занятые клетки. Докажите, что на достаточно большой доске можно расставить несколько слоников так, чтобы каждый бил ровно 10 других.
3. Восемь человек делят пирог. Каждый хочет получить не меньше $1/8$ от всего пирога, однако у каждого может быть своё представление о ценности той или иной части этого пирога. Как им организовать делёж, чтобы каждый был доволен своей долей?
4. Существуют ли 2013 таких различных натуральных чисел, что сумма каждых двух из них делится на их разность?
5. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак « \pm », а также обычные знаки « $+$ », « $-$ », « \times » и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака « \pm » либо « $+$ », либо « $-$ » во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдёт выражение 5 ± 1 , а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдёт выражение $(2 \pm 0,5) \pm 0,5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны **(а)** числа 1, 2, 4; **(б)** любые 100 различных действительных чисел?
6. В ряд стоят 23 коробочки с шариками, причём для каждого числа n от 1 до 23 есть коробочка, в которой ровно n шариков. За одну операцию можно переложить в любую коробочку ещё столько же шариков, сколько в ней уже есть, из какой-нибудь другой коробочки, в которой шариков больше. Всегда ли можно такими операциями добиться, чтобы в первой коробочке оказался 1 шарик, во второй — 2 шарика, ..., в 23-й — 23 шарика?

Индуктивные конструкции

3 июля

1. В компании из n человек ($n > 4$) каждый узнал по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Как за $2n - 4$ звонка все смогут узнать все новости?
2. Слоник за один ход может прыгнуть на любое число клеток по диагонали, равное точному квадрату (на 1, то есть на соседнюю, на 4, на 9 и т.д.). При этом он может перепрыгивать занятые клетки. Докажите, что на достаточно большой доске можно расставить несколько слоников так, чтобы каждый бил ровно 10 других.
3. Восемь человек делят пирог. Каждый хочет получить не меньше $1/8$ от всего пирога, однако у каждого может быть своё представление о ценности той или иной части этого пирога. Как им организовать делёж, чтобы каждый был доволен своей долей?
4. Существуют ли 2013 таких различных натуральных чисел, что сумма каждых двух из них делится на их разность?
5. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак « \pm », а также обычные знаки « $+$ », « $-$ », « \times » и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака « \pm » либо « $+$ », либо « $-$ » во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдёт выражение 5 ± 1 , а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдёт выражение $(2 \pm 0,5) \pm 0,5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны **(а)** числа 1, 2, 4; **(б)** любые 100 различных действительных чисел?
6. В ряд стоят 23 коробочки с шариками, причём для каждого числа n от 1 до 23 есть коробочка, в которой ровно n шариков. За одну операцию можно переложить в любую коробочку ещё столько же шариков, сколько в ней уже есть, из какой-нибудь другой коробочки, в которой шариков больше. Всегда ли можно такими операциями добиться, чтобы в первой коробочке оказался 1 шарик, во второй — 2 шарика, ..., в 23-й — 23 шарика?