

# Внутренний матбой профи

15 июля

1. Для положительных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) + \left(\frac{d}{a} + \frac{a}{d}\right) \geq 2 \frac{(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}}$$

2. Дано квадратное поле  $4 \times 4$ , в каждой клетке которого лежит по монете, орлом или решкой вверх. Каждую секунду со всеми монетами одновременно происходит следующее: монета в данной клетке переворачивается, если в клетках, соседних по стороне, нечётное число орлов, а иначе — не переворачивается. Докажите, что в течение первых семи секунд какое-то расположение орлов и решек обязательно повторится.

3. Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности  $\omega$  с центром  $O$ , причем  $O$  не лежит на прямой  $AB$ . На отрезке  $AB$  выбрана точка  $C$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AC$  и  $CB$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $AON$  и  $BOM$  пересекают  $\omega$  вторично в точках  $K$  и  $L$  соответственно, и пересекаются друг с другом вторично в точке  $X$ . Докажите, что точки  $C$ ,  $K$ ,  $X$ ,  $L$  лежат на одной окружности.

4. Маша и Паша по очереди проводят диагонали в правильном 98-угольнике, начинает Маша. Разрешено проводить диагональ, если она не перпендикулярна ни одной из ранее проведенных диагоналей, а также пересекает хотя бы половину ранее проведенных диагоналей. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

5. Будем говорить, что точка  $A(x, y)$  *больше* точки  $B(x', y')$ , если  $x \geq x'$  и  $y \geq y'$ . Если же  $x \leq x'$  и  $y \leq y'$ , то будем говорить, что точка  $A$  *меньше* точки  $B$ . На координатной плоскости отметили несколько точек, обе координаты которых являются натуральными числами, не превосходящими  $n$ . Оказалось, что для каждой отмеченной точки количество точек, больших её, и количество точек, меньших её, отличаются не более, чем на 1. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено?

6. Саша нарисовал граф, вершинами которого являются все возможные последовательности из 0 и 1 длины 2019, а ребро между вершинами проводится, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одном месте. Назовём расстановку ненулевых чисел в вершинах этого графа  $k$ -гармонической, если для любой вершины сумма чисел в соседних с ней вершинах в  $k$  раз больше числа в самой вершине. При каких вещественных  $k$  существует  $k$ -гармоническая расстановка чисел в вершинах этого графа?

7. Дано натуральное число  $n > 10$ . Докажите, что ни для какого  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  число  $(2n)! + k$  не делится на  $n! + 1$ .

8. Все натуральные числа от 1 до  $N$  поставлены в ряд. К каждому числу прибавили номер места в ряду, на котором оно стоит. Найдите количество таких  $N < 3^{2024}$ , для которых могло оказаться, что каждая из полученных сумм является степенью тройки.

# Внутренний матбой профи

15 июля

1. Для положительных чисел  $a, b, c$  и  $d$  докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) + \left(\frac{d}{a} + \frac{a}{d}\right) \geq 2 \frac{(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}}$$

2. Дано квадратное поле  $4 \times 4$ , в каждой клетке которого лежит по монете, орлом или решкой вверх. Каждую секунду со всеми монетами одновременно происходит следующее: монета в данной клетке переворачивается, если в клетках, соседних по стороне, нечётное число орлов, а иначе — не переворачивается. Докажите, что в течение первых семи секунд какое-то расположение орлов и решек обязательно повторится.

3. Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности  $\omega$  с центром  $O$ , причем  $O$  не лежит на прямой  $AB$ . На отрезке  $AB$  выбрана точка  $C$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AC$  и  $CB$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $AON$  и  $BOM$  пересекают  $\omega$  вторично в точках  $K$  и  $L$  соответственно, и пересекаются друг с другом вторично в точке  $X$ . Докажите, что точки  $C, K, X, L$  лежат на одной окружности.

4. Маша и Паша по очереди проводят диагонали в правильном 98-угольнике, начинает Маша. Разрешено проводить диагональ, если она не перпендикулярна ни одной из ранее проведенных диагоналей, а также пересекает хотя бы половину ранее проведенных диагоналей. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

5. Будем говорить, что точка  $A(x, y)$  *больше* точки  $B(x', y')$ , если  $x \geq x'$  и  $y \geq y'$ . Если же  $x \leq x'$  и  $y \leq y'$ , то будем говорить, что точка  $A$  *меньше* точки  $B$ . На координатной плоскости отметили несколько точек, обе координаты которых являются натуральными числами, не превосходящими  $n$ . Оказалось, что для каждой отмеченной точки количество точек, больших её, и количество точек, меньших её, отличаются не более, чем на 1. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено?

6. Саша нарисовал граф, вершинами которого являются все возможные последовательности из 0 и 1 длины 2019, а ребро между вершинами проводится, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одном месте. Назовём расстановку ненулевых чисел в вершинах этого графа  $k$ -гармонической, если для любой вершины сумма чисел в соседних с ней вершинах в  $k$  раз больше числа в самой вершине. При каких вещественных  $k$  существует  $k$ -гармоническая расстановка чисел в вершинах этого графа?

7. Дано натуральное число  $n > 10$ . Докажите, что ни для какого  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  число  $(2n)! + k$  не делится на  $n! + 1$ .

8. Все натуральные числа от 1 до  $N$  поставлены в ряд. К каждому числу прибавили номер места в ряду, на котором оно стоит. Найдите количество таких  $N < 3^{2024}$ , для которых могло оказаться, что каждая из полученных сумм является степенью тройки.