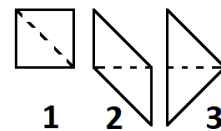


Матбой Полупрофи М7 – Обычные М8

15 июля

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ рассматриваются 5 отрезков — его диагонали. Тройка диагоналей называется удачной, если из них можно составить треугольник. Какое наименьшее возможное количество удачных треугольников может быть?

2. Клетчатый прямоугольник составлен из плиток трёх типов, показанных на рисунке (каждая плитка состоит из двух половин клетки). Может ли плиток второго типа оказаться ровно 111?



3. Числа $2^{3^1}, 2^{3^2}, \dots, 2^{3^{2024}}$ выписаны друг за другом в строчку без пробелов. Получилось число N . За n обозначим количество цифр в записи N . На какую наибольшую степень двойки делится N ?

4. На доске написано произведение натуральных чисел от 1 до n . Разрешается заменять k на $k \cdot (k - 1)$. При каких n можно получить на доске квадрат натурального числа при помощи таких операций?

5. Докажите, что существуют натуральные числа m, n , для которых $\left| \frac{m^2}{n^3} - \sqrt{2024} \right| < \frac{1}{10^{10}}$.

6. Грани куба $3 \times 3 \times 3$ разбиты на единичные квадраты. В некоторых квадратах нарисованы треугольники площадью $\frac{1}{2}$. Никакая точка поверхности не принадлежит одновременно двум треугольникам. Какое максимальное число треугольников могло быть нарисовано?

7. В четырёхугольнике $KLMN$ длина стороны LM равна сумме длин соседних сторон. Также $\angle NKM + \angle LKM = 180^\circ$. Докажите, что $\angle KNM = \angle LMK + \angle MKN$.

8. В ЛМШ 40 корпусов. Между любыми двумя корпусами проходят 2 односторонние тропинки (возможно, обе в одну сторону). Назовем силой корпуса количество тропинок, ведущих из него. Какая максимальная разница в силе может быть у соседних по силе корпусов?

Решение. Оценим сверху разницу между k -м и $(k + 1)$ -м по силе корпусами. Будем пользоваться турнирными терминами (выигрыш 2:0, ничья 1:1). Максимальная суммарная сила k более сильных корпусов достигается, если он обыграли все остальные корпуса, а между собой сыграли как угодно. Тогда у них вместе взятых будет $2k \cdot (40 - k) + k(k - 1)$ очков. Значит, средняя сила каждого из этих корпусов не больше $2(40 - k) + (k - 1) = 79 - k$, а минимальная — тем более не больше этого числа. Аналогично устанавливаем, что средняя сила остальных корпусов не меньше $39 - k$, а наибольшая — тем более. Таким образом, разность не больше 40.

Пример получается из вышеописанной конструкции, если все сильные сыграли друг с другом вничью и все слабые тоже.