

Представьтесь, пожалуйста:

Вступительный тест М8

1. Напишите формулу Эйлера для планарного графа на плоскости.

2. Сформулируйте определение функции Эйлера. Укажите значение функции Эйлера для $n = 100$.

3. Что такое степень точки? Как определяется радикальная ось двух окружностей? Радикальный центр трёх окружностей?

4. Через точку внутри треугольника провели три прямых параллельных сторонам. Известно, что площади получившихся треугольников равны 9, 25 и 49. Найдите площадь исходного треугольника.

5. В группе 10 мальчиков и 7 девочек. Сколькими способами можно из них выбрать команду из 6 человек, в которой поровну мальчиков и девочек?

6. Дана функция $y = x^2 - 8x + 23$ найдите ее наименьшее значение и укажите при каком значении аргумента оно достигается.

7. Найдите остаток от деления числа 2027^{2024} на 23.

8. Что больше $C_{3n}^0 + C_{3n}^3 + C_{3n}^6 + \dots + C_{3n}^{3n}$ или 2^{3n-2} и почему?

9. Найдите остаток от деления многочлена $x^{2024} + x^{2022} - 2$ на $x^2 - 1$.

10. В треугольнике ABC провели прямую, симметричную медиане AM относительно биссектрисы угла A . Выразите отношение, в котором она делит отрезок BC , через стороны треугольника.

11. Докажите, что для положительных чисел a, b, c верно неравенство $\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \leq \frac{a+b+c}{2}$.

12. Постройте четырёхугольник $ABCD$, у которого диагональ AC является биссектрисой угла A , зная длины его сторон.

13. Дан правильный 2025-угольник $A_1A_2 \dots A_{2025}$ и O — его центр. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2025}}$ равна $\vec{0}$.

14. Докажите неравенство $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 \geq a^3b + b^3c + c^3e + d^3a + e^3d$.

15. Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ имеет целые корни. Числа a, b, c — целые, причем c нечётно. Может ли число $P(2023)$ быть нечётным?