

Матбой Полупрофи

10 июля

1. Пусть $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$, где a, b, c — положительные числа.

Покажите справедливость неравенства

$$\frac{a}{\sqrt{bc}(a+1)} + \frac{b}{\sqrt{ac}(b+1)} + \frac{c}{\sqrt{ab}(c+1)} < \sqrt{2}$$

и покажите, что выражение в левой части может быть сколь угодно близко к $\sqrt{2}$.

2. В классе учатся $2n$ учеников ($n > 1$). За раз на экскурсию могут поехать n учеников. После нескольких экскурсий каждые два ученика из класса побывали вместе хотя бы на одной экскурсии. При каком минимальном количестве экскурсий такое могло произойти?

3. По краю круглого стола с метровыми промежутками стоят p блюдца (p — простое), на каждом по одному печенью. Карлсон проходит вокруг стола k метров, останавливается и берёт печенье с блюда. Затем Малыш, стартовав из того же места, проходит вокруг стола m метров, останавливается и берёт там печенье с блюда. Потом Карлсон от места своей остановки идёт k метров и берёт печенье с блюда, если оно там ещё осталось, и т.д. Все переходы они делают в одном направлении. Кому из них достанется больше печенья и на сколько, если k и m — различные натуральные числа меньше p ?

4. На клетчатой доске 10×10 стоит невидимая ладья. За один вопрос можно указать любой набор клеток и узнать, сколько из них побиты ладьёй. Сколько таких вопросов нужно, чтобы наверняка узнать положение ладьи? Ладья бьёт поле, на котором стоит.

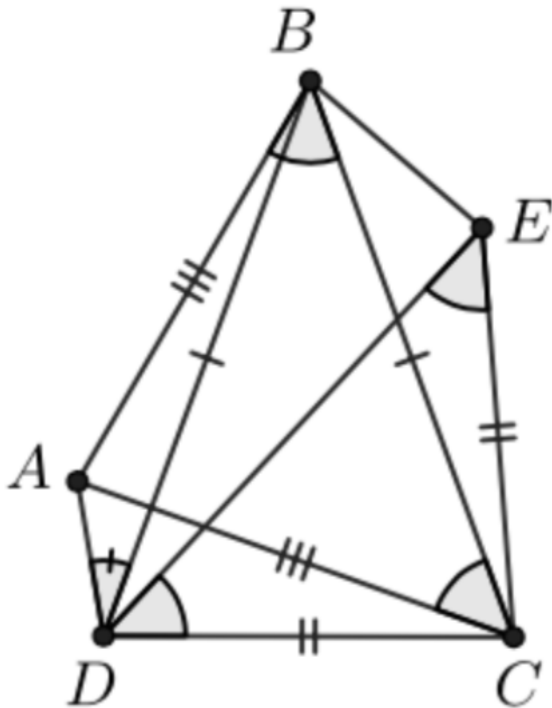
5. В шахматном турнире участвуют 14 игроков. В каждом туре они разбиваются на пары случайным образом, но два шахматиста, игравшие друг с другом раньше, второй раз играть не могут. Турнир заканчивается, когда такое разбиение невозможно. Найдите минимально возможное число туров.

6. Три попарно различных вещественных числа a, b, c таковы, что множество $\{a+b, b+c, c+a\}$ совпадает с множеством $\{ab, bc, ca\}$. Докажите, что множество $\{a, b, c\}$ совпадает с множеством $\{a^2 - 2, b^2 - 2, c^2 - 2\}$.

7. В стране 100 городов. Некоторые из них соединены дорогами, причем между любыми двумя городами есть не более одной дороги. Города пронумерованы числами от 1 до 100. Петя совершил 100 путешествий по дорогам страны, каждый раз начиная путешествия в разных городах. Все свои путешествия он осуществляет по следующему правилу. Оказавшись в каком-либо городе A , Петя находит среди всех городов, соединённых с A , город B с наименьшим номером. Если город B уже был посещен в этом путешествии, или из A вообще нет ни одной дороги, путешествие тут же заканчивается в A . В противном случае, Петя перемещается из A в B и продолжает путешествие по этому же правилу. Оказалось, что совершив 100 путешествий, Петя посетил все города

страны поровну раз. При каком наибольшем количестве дорог в стране такое возможно?

8. Равнобедренные треугольники ABC и CDE с равными углами при основании расположены на плоскости так, что $BC = BD$ (см. рисунок). Оказалось, что угол $ADB = 30^\circ$. Найдите угол BEC .



Матбой Полупрофи

10 июля

1. Пусть $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$, где a, b, c — положительные числа.

Покажите справедливость неравенства

$$\frac{a}{\sqrt{bc}(a+1)} + \frac{b}{\sqrt{ac}(b+1)} + \frac{c}{\sqrt{ab}(c+1)} < \sqrt{2}$$

и покажите, что выражение в левой части может быть сколь угодно близко к $\sqrt{2}$.

2. В классе учатся $2n$ учеников ($n > 1$). За раз на экскурсию могут поехать n учеников. После нескольких экскурсий каждые два ученика из класса побывали вместе хотя бы на одной экскурсии. При каком минимальном количестве экскурсий такое могло произойти?

3. По краю круглого стола с метровыми промежутками стоят p блюдца (p — простое), на каждом по одному печенью. Карлсон проходит вокруг стола k метров, останавливается и берёт печенье с блюда. Затем Малыш, стартовав из того же места, проходит вокруг стола m метров, останавливается и берёт там печенье с блюда. Потом Карлсон от места своей остановки идёт k метров и берёт печенье с блюда, если оно там ещё осталось, и т.д. Все переходы они делают в одном направлении. Кому из них достанется больше печенья и на сколько, если k и m — различные натуральные числа меньше p ?

4. На клетчатой доске 10×10 стоит невидимая ладья. За один вопрос можно указать любой набор клеток и узнать, сколько из них побиты ладьёй. Сколько таких вопросов нужно, чтобы наверняка узнать положение ладьи? Ладья бьёт поле, на котором стоит.

5. В шахматном турнире участвуют 14 игроков. В каждом туре они разбиваются на пары случайным образом, но два шахматиста, игравшие друг с другом раньше, второй раз играть не могут. Турнир заканчивается, когда такое разбиение невозможно. Найдите минимально возможное число туров.

6. Три попарно различных вещественных числа a, b, c таковы, что множество $\{a+b, b+c, c+a\}$ совпадает с множеством $\{ab, bc, ca\}$. Докажите, что множество $\{a, b, c\}$ совпадает с множеством $\{a^2-2, b^2-2, c^2-2\}$.

7. В стране 100 городов. Некоторые из них соединены дорогами, причем между любыми двумя городами есть не более одной дороги. Города пронумерованы числами от 1 до 100. Петя совершил 100 путешествий по дорогам страны, каждый раз начиная путешествия в разных городах. Все свои путешествия он осуществляет по следующему правилу. Оказавшись в каком-либо городе A , Петя находит среди всех городов, соединённых с A , город B с наименьшим номером. Если город B уже был посещен в этом путешествии, или из A вообще нет ни одной дороги, путешествие тут же заканчивается в A . В противном случае, Петя перемещается из A в B и продолжает путешествие по этому же правилу. Оказалось, что совершив 100 путешествий, Петя посетил все города

страны поровну раз. При каком наибольшем количестве дорог в стране такое возможно?

8. Равнобедренные треугольники ABC и CDE с равными углами при основании расположены на плоскости так, что $BC = BD$ (см. рисунок). Оказалось, что угол $ADB = 30^\circ$. Найдите угол BEC .

