

# Геометрия масс

13 июля

**Опр.** Пусть  $M$  — некоторая точка плоскости и  $m$  — ненулевое число. Материальной точкой (м.т.)  $mM$  называется точка  $M$  с числом  $m$ , и под этим числом будем подразумевать массу точки  $M$  (считая, что она может быть и отрицательной).

**Опр.** Центром масс системы м.т.  $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$  называется такая точка  $Z$ , для которой имеет место равенство  $m_1\overrightarrow{ZM_1} + m_2\overrightarrow{ZM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{ZM_n} = \vec{0}$  при условии, что  $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$ .

**I. (Теорема 1)** Докажите, что в точках центр масс выражается как

$$\dot{Z} = \frac{m_1\dot{M}_1 + \dots + m_n\dot{M}_n}{m_1 + \dots + m_n}.$$

**II. (Следствие)** Для конечной системы материальных точек центр масс определяется однозначно.

**III. (Теорема 2)** Центр масс двух м.т. расположен на прямой, соединяющей эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага:  $m_1d_1 = m_2d_2$ .

**IV. (Теорема 3)** Пусть в системе  $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$ , отмечены  $k$  м.т.  $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_kM_k$ . Пусть  $Z'$  — центр масс отмеченных м.т. Если всю массу отмеченных м.т. сосредоточить в их центре масс  $Z'$ , то от этого положение центра масс всей системы не изменится, то есть центр масс системы м.т.  $(m_1 + m_2 + \dots + m_k)Z', m_{k+1}M_{k+1}, \dots, m_nM_n$  совпадает с центром масс первоначальной системы. (Обратно тоже работает.)

**1.** Пусть  $ABCD$  — четырехугольник,  $K, L, M, N$  — середины сторон  $AB, BC, CD, DA$ . Докажите, что точка пересечения отрезков  $KM$  и  $LN$  является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

**2.** Пусть  $A_1, B_1, \dots, F_1$  — середины сторон  $AB, BC, \dots, FA$  произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников  $A_1C_1E_1$  и  $B_1D_1F_1$  совпадают.

**3.** Прямая проходит через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  и середину  $L$  медианы  $BB_1$ . В каком отношении делит эта прямая медиану  $CC_1$ ?

**4.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $M$  такая, что  $AM : MC = 1 : 2$ , а на продолжении стороны  $CB$  — точка  $N$  такая, что  $NB = CB$ . Прямая  $NM$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $P$ . В каком отношении эта точка делит сторону  $AB$  и отрезок  $MN$ ?

**5.** В треугольнике  $ABC$  точка  $F$  делит сторону  $BC$  в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины  $B$ . Точки  $M$  и  $P$  отсекают от сторон  $AB$  и  $AC$  по  $\frac{1}{6}$ , считая соответственно от вершины  $A$  и от вершины  $C$ . В каком отношении делится каждый из отрезков  $MP$  и  $AF$  точкой их пересечения?

**6.** На сторонах  $AB, BC, CD, DA$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $K, L, M, N$  соответственно, причем  $AK : KB = DM : MC = a$  и  $BL : LC = AN : ND = b$ .

Пусть  $P$  — точка пересечения отрезков  $KM$  и  $LN$ . Докажите, что  $NP : PL = a$  и  $KP : PM = b$ .

7. В окружность вписан четырехугольник  $ABCD$ .  $M$  — точка пересечения его диагоналей,  $Q$  — середина стороны  $CD$ . Вычислите, в каком отношении делит прямая  $MQ$  сторону  $AB$ , если известно, что  $AD = a$ ,  $BC = b$ .

8. На окружности дано  $n$  точек. Через центр масс  $n - 2$  точек проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две оставшиеся точки. Доказать, что все такие прямые пересекаются в одной точке.

9. Пусть вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке (*точка Жергонна*).

10. Пусть невписанные окружности треугольника  $ABC$  касаются сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке (*точка Нагеля*).

11. (**Теорема Чевы**) Дан треугольник  $ABC$ , точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на прямых  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно. Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$

12. (**Теорема Менелая**) Дан треугольник  $ABC$ , точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на прямых  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно. Докажите, что точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1.$$

# Геометрия масс

13 июля

**Опр.** Пусть  $M$  — некоторая точка плоскости и  $m$  — ненулевое число. Материальной точкой (м.т.)  $mM$  называется точка  $M$  с числом  $m$ , и под этим числом будем подразумевать массу точки  $M$  (считая, что она может быть и отрицательной).

**Опр.** Центром масс системы м.т.  $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$  называется такая точка  $Z$ , для которой имеет место равенство  $m_1\overrightarrow{ZM_1} + m_2\overrightarrow{ZM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{ZM_n} = \vec{0}$  при условии, что  $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$ .

**I. (Теорема 1)** Докажите, что в точках центр масс выражается как

$$\dot{Z} = \frac{m_1\dot{M}_1 + \dots + m_n\dot{M}_n}{m_1 + \dots + m_n}.$$

**II. (Следствие)** Для конечной системы материальных точек центр масс определяется однозначно.

**III. (Теорема 2)** Центр масс двух м.т. расположен на прямой, соединяющей эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага:  $m_1d_1 = m_2d_2$ .

**IV. (Теорема 3)** Пусть в системе  $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$ , отмечены  $k$  м.т.  $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_kM_k$ . Пусть  $Z'$  — центр масс отмеченных м.т. Если всю массу отмеченных м.т. сосредоточить в их центре масс  $Z'$ , то от этого положение центра масс всей системы не изменится, то есть центр масс системы м.т.  $(m_1 + m_2 + \dots + m_k)Z', m_{k+1}M_{k+1}, \dots, m_nM_n$  совпадает с центром масс первоначальной системы. (Обратно тоже работает.)

**1.** Пусть  $ABCD$  — четырехугольник,  $K, L, M, N$  — середины сторон  $AB, BC, CD, DA$ . Докажите, что точка пересечения отрезков  $KM$  и  $LN$  является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

**2.** Пусть  $A_1, B_1, \dots, F_1$  — середины сторон  $AB, BC, \dots, FA$  произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников  $A_1C_1E_1$  и  $B_1D_1F_1$  совпадают.

**3.** Прямая проходит через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  и середину  $L$  медианы  $BB_1$ . В каком отношении делит эта прямая медиану  $CC_1$ ?

**4.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $M$  такая, что  $AM : MC = 1 : 2$ , а на продолжении стороны  $CB$  — точка  $N$  такая, что  $NB = CB$ . Прямая  $NM$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $P$ . В каком отношении эта точка делит сторону  $AB$  и отрезок  $MN$ ?

**5.** В треугольнике  $ABC$  точка  $F$  делит сторону  $BC$  в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины  $B$ . Точки  $M$  и  $P$  отсекают от сторон  $AB$  и  $AC$  по  $\frac{1}{6}$ , считая соответственно от вершины  $A$  и от вершины  $C$ . В каком отношении делится каждый из отрезков  $MP$  и  $AF$  точкой их пересечения?

**6.** На сторонах  $AB, BC, CD, DA$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $K, L, M, N$  соответственно, причем  $AK : KB = DM : MC = a$  и  $BL : LC = AN : ND = b$ .

Пусть  $P$  — точка пересечения отрезков  $KM$  и  $LN$ . Докажите, что  $NP : PL = a$  и  $KP : PM = b$ .

7. В окружность вписан четырехугольник  $ABCD$ .  $M$  — точка пересечения его диагоналей,  $Q$  — середина стороны  $CD$ . Вычислите, в каком отношении делит прямая  $MQ$  сторону  $AB$ , если известно, что  $AD = a$ ,  $BC = b$ .

8. На окружности дано  $n$  точек. Через центр масс  $n - 2$  точек проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две оставшиеся точки. Доказать, что все такие прямые пересекаются в одной точке.

9. Пусть вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке (*точка Жергонна*).

10. Пусть внеписанные окружности треугольника  $ABC$  касаются сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке (*точка Нагеля*).

11. (**Теорема Чевы**) Дан треугольник  $ABC$ , точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на прямых  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно. Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$

12. (**Теорема Менелая**) Дан треугольник  $ABC$ , точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на прямых  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно. Докажите, что точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1.$$