

Усреднение в графах

17 июля

1. В графе с 10 вершинами 60 треугольников. Докажите, что существует вершина степени не меньше, чем 7.
2. На дискотеке между 7 мальчиками и 7 девочками состоялось 22 парных танца. Докажите, что для каких-то двух мальчиков найдутся такие две девочки, с которыми оба они успели потанцевать.
3. Вершины графа красят в d цветов. **(а)** Какова доля раскрасок, в которых концы выбранного ребра одноцветные, среди всех раскрасок? **(б)** Докажите, что существует раскраска, в которой доля ребер с одноцветными концами не больше $\frac{1}{d}$.
4. Докажите, что можно покрасить рёбра полного графа на $n > 2$ вершинах в два цвета, чтобы одноцветных треугольников было меньше четверти.
5. **(а)** Вершины полного графа пронумерованы числами от 1 до n . Сколько существует способов задать ориентацию рёбер так, чтобы эти вершины в фиксированном порядке образовывали цикл?
- (б)** Докажите, что для любого n существует турнир на n вершинах, в котором имеется не менее $\frac{(n-1)!}{2^n}$ гамильтоновых циклов.
6. Дано натуральное число $n > 1000$. В однокруговом волейбольном турнире участвует $M < 2^n$ команд. Докажите, что могло оказаться так, что из любых $2n + 1$ команд найдутся 3, выигравших друг друга по циклу.
7. В двудольном графе меньше, чем 2^n вершин, для каждой из которых задан список из n цветов.
(а) Заменяем каждый цвет из списков на число 0 или 1, после чего сопоставим вершинам первой доли конъюнкцию чисел в списке, а вершинам второй доли — дизъюнкцию. Какова доля замен, в которых выбранной вершине первой доли оказалась сопоставлена 1?
(б) Докажите, что можно так покрасить каждую вершину в один из цветов ее списка, что смежные вершины будут разных цветов.

Усреднение в графах

17 июля

1. В графе с 10 вершинами 60 треугольников. Докажите, что существует вершина степени не меньше, чем 7.
2. На дискотеке между 7 мальчиками и 7 девочками состоялось 22 парных танца. Докажите, что для каких-то двух мальчиков найдутся такие две девочки, с которыми оба они успели потанцевать.
3. Вершины графа красят в d цветов. **(а)** Какова доля раскрасок, в которых концы выбранного ребра одноцветные, среди всех раскрасок? **(б)** Докажите, что существует раскраска, в которой доля ребер с одноцветными концами не больше $\frac{1}{d}$.
4. Докажите, что можно покрасить рёбра полного графа на $n > 2$ вершинах в два цвета, чтобы одноцветных треугольников было меньше четверти.
5. **(а)** Вершины полного графа пронумерованы числами от 1 до n . Сколько существует способов задать ориентацию рёбер так, чтобы эти вершины в фиксированном порядке образовывали цикл?
- (б)** Докажите, что для любого n существует турнир на n вершинах, в котором имеется не менее $\frac{(n-1)!}{2^n}$ гамильтоновых циклов.
6. Дано натуральное число $n > 1000$. В однокруговом волейбольном турнире участвует $M < 2^n$ команд. Докажите, что могло оказаться так, что из любых $2n + 1$ команд найдутся 3, выигравших друг друга по циклу.
7. В двудольном графе меньше, чем 2^n вершин, для каждой из которых задан список из n цветов.
(а) Заменяем каждый цвет из списков на число 0 или 1, после чего сопоставим вершинам первой доли конъюнкцию чисел в списке, а вершинам второй доли — дизъюнкцию. Какова доля замен, в которых выбранной вершине первой доли оказалась сопоставлена 1?
(б) Докажите, что можно так покрасить каждую вершину в один из цветов ее списка, что смежные вершины будут разных цветов.