

Функция Эйлера

8 июля

Опр. Определение. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество взаимно простых с n натуральных чисел, не превосходящих n .

I. Найдите:

(а) $\varphi(24)$, $\varphi(120)$;

(б) $\varphi(p)$, где p — простое;

(в) $\varphi(p^n)$, где p — простое.

II. Докажите, что при $n > 2$ $\varphi(n)$ чётно.

1. Найдите сумму взаимно простых с n чисел, не превосходящих n .

2. Пусть m, n — взаимно простые натуральные числа. Строки таблицы пронумерованы числами от 0 до $n-1$, а столбцы — от 0 до $m-1$. На пересечении строки j и столбика i записывается остаток от деления числа $in + jm$ на nm .

(а) Докажите, что все числа в таблице будут различны.

Где в этой таблице числа, взаимно простые с mn ? Докажите мультипликативность функции Эйлера: $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

(б) Докажите функцию Эйлера:

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{k_1} \dots (p_m - 1)p_1^{k_m} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right),$$

$$n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}.$$

3. Докажите, что $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$.

4. Найдите все такие x , что:

(а) $\varphi(x) = 24$;

(б) $\varphi(x) = 56$.

5. Найдите все такие x , что:

(а) $\varphi(x) = \frac{x}{2}$;

(б) $\varphi(x) = \frac{x}{3}$;

(в) $\varphi(x) = \frac{x}{7}$.

6. Рассмотрим ряд дробей:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}.$$

Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на их НОД.

(а) Сколько будет дробей со знаменателем d , где d — делитель n ?

(б) Докажите Тожество Эйлера-Гаусса:

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_s) = n,$$

где d_k — все делители числа n .

Функция Эйлера

8 июля

Опр. Определение. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество взаимно простых с n натуральных чисел, не превосходящих n .

I. Найдите:

(а) $\varphi(24)$, $\varphi(120)$;

(б) $\varphi(p)$, где p — простое;

(в) $\varphi(p^n)$, где p — простое.

II. Докажите, что при $n > 2$ $\varphi(n)$ чётно.

1. Найдите сумму взаимно простых с n чисел, не превосходящих n .

2. Пусть m, n — взаимно простые натуральные числа. Строки таблицы пронумерованы числами от 0 до $n-1$, а столбцы — от 0 до $m-1$. На пересечении строки j и столбика i записывается остаток от деления числа $in + jm$ на nm .

(а) Докажите, что все числа в таблице будут различны.

Где в этой таблице числа, взаимно простые с mn ? Докажите мультипликативность функции Эйлера: $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

(б) Докажите функцию Эйлера:

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{k_1} \dots (p_m - 1)p_1^{k_m} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right),$$

$$n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}.$$

3. Докажите, что $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$.

4. Найдите все такие x , что:

(а) $\varphi(x) = 24$;

(б) $\varphi(x) = 56$.

5. Найдите все такие x , что:

(а) $\varphi(x) = \frac{x}{2}$;

(б) $\varphi(x) = \frac{x}{3}$;

(в) $\varphi(x) = \frac{x}{7}$.

6. Рассмотрим ряд дробей:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}.$$

Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на их НОД.

(а) Сколько будет дробей со знаменателем d , где d — делитель n ?

(б) Докажите Тожество Эйлера-Гаусса:

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_s) = n,$$

где d_k — все делители числа n .