

Изогонали и их частные случаи

20 июля

Опр. *Изогонали относительно данного угла* — прямые, симметричные относительно биссектрисы этого угла.

Теорема об изогоналях. Пусть OB и OC — изогонали угла AOD . Прямые AC и BD пересекаются в точке Q , прямые AB и CD — в точке P (если AB и CD параллельны, то рассматриваем луч OP , параллельный им). Тогда OP и OQ — также изогонали относительно угла AOD .

I. Докажите теорему об изогоналях.

Опр. *Изогонально сопряжённые точки в треугольнике* — точки, лежащие на соответствующих изогоналях относительно всех углов треугольника.

Опр. *Изогональное сопряжение* — преобразование, ставящее точке, не лежащей на описанной окружности данного треугольника, в соответствие изогонально сопряжённую ей.

II. Докажите корректность определения изогонально сопряжённой точки.

Опр. *Симедиана* — прямая, изогональная медиане относительно угла, из которого она выходит.

III. Точка S лежит на стороне BC треугольника ABC . Тогда эквивалентны условия:

• AS — симедиана; • $\frac{\rho(S, AB)}{\rho(S, AC)} = \frac{AB}{AC}$; • $\frac{BS}{CS} = \frac{AB^2}{AC^2}$;

IV. Точка X внутри треугольника ABC такова, что $\angle BAX = \angle ACX$ и $\angle ABX = \angle CAX$. Тогда AX — симедиана.

V. (Точка Лемуана) Симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

1. В треугольнике ABC чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что AA_1 — высота.

2. Пусть BA_1 и BC_1 — внешние биссектрисы угла B треугольника ABC , $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$. Докажите, что A_1C и C_1A пересекаются на биссектрисе угла ABC .

3. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в вершинах B и C пересекаются в точке P . Докажите, что AP — симедиана в данном треугольнике.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA' , на отрезке AA' выбрана точка X . Прямая BX пересекает AC в точке B' , а прямая CX пересекает AB в точке C' . Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P , а отрезки $A'C'$ и BB' пересекаются в точке Q . Докажите, что углы PAC и QAB равны.

5. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка Q лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что $\angle AQD = \angle CQB$ и прямая CD разделяет точки P и Q . Докажите, что $\angle BQP = \angle DAQ$.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a — центры внеписанных

окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD .

7. На диаметре KW окружности взята точка M , отличная от центра окружности. Лучи MA и MD таковы, что $\angle KMA = \angle WMD < 90^\circ$ (A и D — точки пересечения этих лучей с окружностью — лежат в одной полуплоскости относительно прямой KW). Докажите, что все прямые AD , построенные таким образом, пересекают прямую KW в одной и той же точке P .

8. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что симедиана из вершины I треугольника BIC пересекает описанную окружность в середине дуги BAC .

9. Пусть в треугольнике ABC даны две пары изогонально сопряженных точек X, X' и Y, Y' . Тогда точки пересечения XY с $X'Y'$ и XY' с $X'Y$ тоже изогонально сопряжены.

Изогонали и их частные случаи

20 июля

Опр. *Изогонали относительно данного угла* — прямые, симметричные относительно биссектрисы этого угла.

Теорема об изогоналях. Пусть OB и OC — изогонали угла AOD . Прямые AC и BD пересекаются в точке Q , прямые AB и CD — в точке P (если AB и CD параллельны, то рассматриваем луч OP , параллельный им). Тогда OP и OQ — также изогонали относительно угла AOD .

I. Докажите теорему об изогоналях.

Опр. *Изогонально сопряжённые точки в треугольнике* — точки, лежащие на соответствующих изогоналях относительно всех углов треугольника.

Опр. *Изогональное сопряжение* — преобразование, ставящее точке, не лежащей на описанной окружности данного треугольника, в соответствие изогонально сопряжённую ей.

II. Докажите корректность определения изогонально сопряжённой точки.

Опр. *Симедиана* — прямая, изогональная медиане относительно угла, из которого она выходит.

III. Точка S лежит на стороне BC треугольника ABC . Тогда эквивалентны условия:

• AS — симедиана; • $\frac{\rho(S, AB)}{\rho(S, AC)} = \frac{AB}{AC}$; • $\frac{BS}{CS} = \frac{AB^2}{AC^2}$;

IV. Точка X внутри треугольника ABC такова, что $\angle BAX = \angle ACX$ и $\angle ABX = \angle CAX$. Тогда AX — симедиана.

V. (Точка Лемуана) Симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

1. В треугольнике ABC чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что AA_1 — высота.

2. Пусть BA_1 и BC_1 — внешние биссектрисы угла B треугольника ABC , $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$. Докажите, что A_1C и C_1A пересекаются на биссектрисе угла ABC .

3. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в вершинах B и C пересекаются в точке P . Докажите, что AP — симедиана в данном треугольнике.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA' , на отрезке AA' выбрана точка X . Прямая BX пересекает AC в точке B' , а прямая CX пересекает AB в точке C' . Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P , а отрезки $A'C'$ и BB' пересекаются в точке Q . Докажите, что углы PAC и QAB равны.

5. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка Q лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что $\angle AQD = \angle CQB$ и прямая CD разделяет точки P и Q . Докажите, что $\angle BQP = \angle DAQ$.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a — центры внеписанных

окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD .

7. На диаметре KW окружности взята точка M , отличная от центра окружности. Лучи MA и MD таковы, что $\angle KMA = \angle WMD < 90^\circ$ (A и D — точки пересечения этих лучей с окружностью — лежат в одной полуплоскости относительно прямой KW). Докажите, что все прямые AD , построенные таким образом, пересекают прямую KW в одной и той же точке P .

8. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что симедиана из вершины I треугольника BIC пересекает описанную окружность в середине дуги BAC .

9. Пусть в треугольнике ABC даны две пары изогонально сопряженных точек X, X' и Y, Y' . Тогда точки пересечения XY с $X'Y'$ и XY' с $X'Y$ тоже изогонально сопряжены.