

Симметрические многочлены

9 июля

Опр. Многочлен f от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках переменных, то есть для любой перестановки $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ чисел от 1 до n выполнено: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$.

Опр. *Элементарные симметрические многочлены n переменных:*

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \text{ для } 1 \leq k \leq n$$

Иными словами, k -ый элементарный симметрический многочлен представляет собой сумму всевозможных произведений k переменных из n .

I. Докажите, что сумма, разность и произведение симметрических многочленов являются симметрическими многочленами.

II. Являются ли симметрическими следующие многочлены от трёх переменных x, y, z :

(а) $x^2 + y^2$; **(б)** $x + y - z$; **(в)** $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$; **(г)** $(x - y)(y - z)(z - x)$.

Основная теорема симметрических многочленов. Любой симметрический многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ выражается через элементарные симметрические многочлены посредством операций $+$, $-$, \times . Иными словами, существует многочлен g от n переменных такой, что $g(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Опр. Будем рассматривать строки из целых неотрицательных чисел. Строка $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *лексикографически меньше* строки $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, если для наименьшего i такого, что $a_i \neq b_i$, выполнено $a_i \leq b_i$, или строка A является префиксом строки B .

Таким образом задаётся *лексикографический порядок* на числовых строках с целых неотрицательных элементами.

III. Докажите, что **(а)** строго убывающая последовательность строк из n целых неотрицательных чисел конечна и **(б)** в любом непустом множестве таких строк есть наименьший элемент.

Опр. Степенью одночлена многих переменных $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ назовём строку целых неотрицательных чисел (k_1, k_2, \dots, k_n) .

Опр. Степенью многочлена многих переменных назовём наибольшую в смысле лексикографического порядка из степеней составляющих его одночленов.

IV. Лемма 1. Пусть $u = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $a \neq 0$ — высший член (относительно лексикографического порядка) симметрического многочлена. Тогда $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.

V. Лемма 2. Для любого одночлена $u = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ с $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0$ существуют такие неотрицательные целые числа l_1, l_2, \dots, l_n , что высший член многочлена $\sigma_1^{l_1} \sigma_2^{l_2} \dots \sigma_n^{l_n}$ совпадает с u . Числа l_1, l_2, \dots, l_n определены этим условием однозначно.

VI. Докажите основную теорему симметрических многочленов с помощью вычитания из текущего многочлена многочлен от $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, чтобы высший член уменьшался в смысле лексикографического порядка.

Напоминание. Из теоремы Безу и возможности делить многочлены с остатком следует факт: если многочлен $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ имеет n корней x_1, x_2, \dots, x_n , то имеет место разложение

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

VII. Докажите теорему Виета для многочленов высших степеней. Если x_1, \dots, x_n — корни многочлена $f = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то имеет место система равенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_2 x_n + \dots + x_{n-1} x_{n-2} = a_{n-2}, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_{n-3}, \\ \vdots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n a_0. \end{cases}$$

Обратите внимание, что в левых частях уравнений системы стоят элементарные симметрические многочлены от корней многочлена f .

1. Зная, что $\sigma_1 = a, \sigma_2 = b, \sigma_3 = c$, найдите

(а) $x^2 + y^2 + z^2$; (б) $x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2$; (в) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

2. Для вещественных чисел a, b, c выполнены равенства $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что какое-то из них равно 1.

3. Числа x, y, z удовлетворяют равенству $(x + y + z)(xy + xz + yz) = xyz$. Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.

4. Даны три вещественных числа x, y, z , для которых

$$x + y + z > 0, xy + xz + yz > 0, xyz > 0.$$

Покажите, что $x, y, z > 0$.

5. Решите системы уравнений:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases} \quad (б) \begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

6. Докажите, что значение любого симметрического многочлена с целыми коэффициентами от корней унитарного (коэффициент при одночлене с высшей степенью равен 1) многочлена с целыми коэффициентами является целым числом. (Считаем, что все корни вещественные).

7. Пусть $a > b > c$ — корни многочлена $x^3 - 3x + 1$. Докажите, что $(a-b)(a-c)(b-c) = \sqrt{k}$ для некоторого натурального k .

Симметрические многочлены

9 июля

Опр. Многочлен f от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках переменных, то есть для любой перестановки $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ чисел от 1 до n выполнено: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$.

Опр. *Элементарные симметрические многочлены n переменных:*

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \text{ для } 1 \leq k \leq n$$

Иными словами, k -ый элементарный симметрический многочлен представляет собой сумму всевозможных произведений k переменных из n .

I. Докажите, что сумма, разность и произведение симметрических многочленов являются симметрическими многочленами.

II. Являются ли симметрическими следующие многочлены от трёх переменных x, y, z :

(а) $x^2 + y^2$; **(б)** $x + y - z$; **(в)** $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$; **(г)** $(x - y)(y - z)(z - x)$.

Основная теорема симметрических многочленов. Любой симметрический многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ выражается через элементарные симметрические многочлены посредством операций $+$, $-$, \times . Иными словами, существует многочлен g от n переменных такой, что $g(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Опр. Будем рассматривать строки из целых неотрицательных чисел. Строка $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *лексикографически меньше* строки $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, если для наименьшего i такого, что $a_i \neq b_i$, выполнено $a_i \leq b_i$, или строка A является префиксом строки B .

Таким образом задаётся *лексикографический порядок* на числовых строках с целых неотрицательных элементами.

III. Докажите, что **(а)** строго убывающая последовательность строк из n целых неотрицательных чисел конечна и **(б)** в любом непустом множестве таких строк есть наименьший элемент.

Опр. Степенью одночлена многих переменных $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ назовём строку целых неотрицательных чисел (k_1, k_2, \dots, k_n) .

Опр. Степенью многочлена многих переменных назовём наибольшую в смысле лексикографического порядка из степеней составляющих его одночленов.

IV. Лемма 1. Пусть $u = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $a \neq 0$ — высший член (относительно лексикографического порядка) симметрического многочлена. Тогда $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.

V. Лемма 2. Для любого одночлена $u = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ с $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0$ существуют такие неотрицательные целые числа l_1, l_2, \dots, l_n , что высший член многочлена $\sigma_1^{l_1} \sigma_2^{l_2} \dots \sigma_n^{l_n}$ совпадает с u . Числа l_1, l_2, \dots, l_n определены этим условием однозначно.

VI. Докажите основную теорему симметрических многочленов с помощью вычитания из текущего многочлена многочлен от $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, чтобы высший член уменьшался в смысле лексикографического порядка.

Напоминание. Из теоремы Безу и возможности делить многочлены с остатком следует факт: если многочлен $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ имеет n корней x_1, x_2, \dots, x_n , то имеет место разложение

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

VII. Докажите теорему Виета для многочленов высших степеней. Если x_1, \dots, x_n — корни многочлена $f = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то имеет место система равенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_2 x_n + \dots + x_{n-1} x_{n-2} = a_{n-2}, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_{n-3}, \\ \vdots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n a_0. \end{cases}$$

Обратите внимание, что в левых частях уравнений системы стоят элементарные симметрические многочлены от корней многочлена f .

1. Зная, что $\sigma_1 = a, \sigma_2 = b, \sigma_3 = c$, найдите

(а) $x^2 + y^2 + z^2$; (б) $x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2$; (в) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

2. Для вещественных чисел a, b, c выполнены равенства $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что какое-то из них равно 1.

3. Числа x, y, z удовлетворяют равенству $(x + y + z)(xy + xz + yz) = xyz$. Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.

4. Даны три вещественных числа x, y, z , для которых

$$x + y + z > 0, xy + xz + yz > 0, xyz > 0.$$

Покажите, что $x, y, z > 0$.

5. Решите системы уравнений:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases} \quad (б) \begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

6. Докажите, что значение любого симметрического многочлена с целыми коэффициентами от корней унитарного (коэффициент при одночлене с высшей степенью равен 1) многочлена с целыми коэффициентами является целым числом. (Считаем, что все корни вещественные).

7. Пусть $a > b > c$ — корни многочлена $x^3 - 3x + 1$. Докажите, что $(a-b)(a-c)(b-c) = \sqrt{k}$ для некоторого натурального k .