

# Метод Штурма

9 июля

I. Окружите забором длины  $4a$  прямоугольных участков максимальной площади.

II. У Евгения было два положительных числа  $a$  и  $b$ . Евгений заменил их на два новых числа  $c$  и  $d$  такие, что  $a + b = c + d$ ,  $|a - b| > |c - d|$ . Как изменятся значения следующих выражений: **(а)**  $ab$ ; **(б)**  $a^2 + b^2$ , **(в)**  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ; **(г)**  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ?

**(д)** Пусть положительные числа удовлетворяют неравенству  $a < b < c < d$ . Тогда если  $ab = cd$ , то  $a + b > c + d$ .

1. Докажите для неотрицательных чисел неравенство между средними квадратическим и арифметическим

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

2. Докажите для неотрицательных чисел неравенство между средними геометрическим и гармоническим

$$\sqrt[n]{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_n^2} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

3. Найдите наибольшее значение выражения  $\sqrt{1+5x} + \sqrt{1+5y} + \sqrt{1+5z}$ , если сумма положительных чисел  $x, y, z$  равна 1.

4. Докажите, что если  $a_1 + \dots + a_n = 1$  и  $a_j > 0$ , то

$$\text{(а)} \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n;$$

$$\text{(б)} \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq n(n+1)^2.$$

5. **(а)** Пусть  $0 < a_1, \dots, a_n < 1$ , докажите, что

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}};$$

**(б)** Докажите, что при  $a_1, \dots, a_n > 1$  выполняется противоположное неравенство.

6. Докажите, что если  $a_1 + \dots + a_n = 1$  и  $a_j > 0$ , то

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq 2n!.$$

7. Неотрицательные числа  $a, \dots, a_n$  таковы, что  $a_1 + \dots + a_n = \frac{1}{2}$ . Докажите, что

$$\frac{1-a_1}{1+a_1} \cdot \frac{1-a_2}{1+a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1-a_n}{1+a_n} \geq \frac{1}{3}.$$

8. Для неотрицательных чисел  $a, b, c$ , верно, что  $a + b + c = 3$ . Докажите, что  $a^2b + b^2c + c^2a \leq 4$ .

# Метод Штурма

9 июля

I. Окружите забором длины  $4a$  прямоугольных участков максимальной площади.

II. У Евгения было два положительных числа  $a$  и  $b$ . Евгений заменил их на два новых числа  $c$  и  $d$  такие, что  $a + b = c + d$ ,  $|a - b| > |c - d|$ . Как изменятся значения следующих выражений: **(а)**  $ab$ ; **(б)**  $a^2 + b^2$ , **(в)**  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ; **(г)**  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ?

**(д)** Пусть положительные числа удовлетворяют неравенству  $a < b < c < d$ . Тогда если  $ab = cd$ , то  $a + b > c + d$ .

1. Докажите для неотрицательных чисел неравенство между средними квадратическим и арифметическим

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

2. Докажите для неотрицательных чисел неравенство между средними геометрическим и гармоническим

$$\sqrt[n]{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_n^2} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

3. Найдите наибольшее значение выражения  $\sqrt{1+5x} + \sqrt{1+5y} + \sqrt{1+5z}$ , если сумма положительных чисел  $x, y, z$  равна 1.

4. Докажите, что если  $a_1 + \dots + a_n = 1$  и  $a_j > 0$ , то

$$\text{(а)} \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n;$$

$$\text{(б)} \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq n(n+1)^2.$$

5. **(а)** Пусть  $0 < a_1, \dots, a_n < 1$ , докажите, что

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}};$$

**(б)** Докажите, что при  $a_1, \dots, a_n > 1$  выполняется противоположное неравенство.

6. Докажите, что если  $a_1 + \dots + a_n = 1$  и  $a_j > 0$ , то

$$(1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n) \leq 2n!.$$

7. Неотрицательные числа  $a, \dots, a_n$  таковы, что  $a_1 + \dots + a_n = \frac{1}{2}$ . Докажите, что

$$\frac{1-a_1}{1+a_1} \cdot \frac{1-a_2}{1+a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1-a_n}{1+a_n} \geq \frac{1}{3}.$$

8. Для неотрицательных чисел  $a, b, c$ , верно, что  $a + b + c = 3$ . Докажите, что  $a^2b + b^2c + c^2a \leq 4$ .