

Функция Эйлера

8 июля

Опр. Определение. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество взаимно простых с n натуральных чисел, не превосходящих n .

I. Найдите:

(а) $\varphi(24)$, $\varphi(120)$;

(б) $\varphi(p)$, где p — простое;

(в) $\varphi(p^n)$, где p — простое.

II. Докажите, что при $n > 2$ $\varphi(n)$ чётно.

1. Найдите сумму взаимно простых с n чисел, не превосходящих n .

2. Пусть m, n — взаимно простые натуральные числа. Строки таблицы пронумерованы числами от 0 до $n-1$, а столбцы — от 0 до $m-1$. На пересечении строчки j и столбика i записывается остаток от деления числа $in + jm$ на nm .

(а) Докажите, что все числа в таблице будут различны.

Где в этой таблице числа, взаимно простые с mn ? Докажите мультипликативность функции Эйлера: $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

(б) Докажите функцию Эйлера:

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{k_1} \dots (p_m - 1)p_1^{k_m} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right),$$

$$n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}.$$

3. Докажите, что $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$.

4. Найдите все такие x , что:

(а) $\varphi(x) = 24$;

(б) $\varphi(x) = 56$.

5. Найдите все такие x , что:

(а) $\varphi(x) = \frac{x}{2}$;

(б) $\varphi(x) = \frac{x}{3}$;

(в) $\varphi(x) = \frac{x}{7}$.

6. Рассмотрим ряд дробей:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}.$$

Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на их НОД.

(а) Сколько будет дробей со знаменателем d , где d — делитель n ?

(б) Докажите Тожество Эйлера-Гаусса:

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_s) = n,$$

где d_k — все делители числа n .

Формула включений-исключений

8 июля

- I.** Сколько натуральных чисел от 1 до 10^6 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?
- II.** В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?
- III.** Выведите формулу включений и исключений для 4 множеств.
- IV.** Внутри фигуры площади 6 расположено 3 многоугольника площадью не менее 3 каждый. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не менее 1.
- 1.** Дан треугольник, на каждой из сторон которого отмечено по 9 точек, делящих сторону на 10 равных отрезков. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках и сторонами, не параллельными сторонам данного?
- 2.** В 8-этажном здании есть лифт, куда набилось 15 человек. Сколькими способами они могут выйти из лифта так, чтобы ни один этаж не был пустым?
- 3.** Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все. Насколько отличается число трудных задач от числа легких?
- 4.** Внутри фигуры площади 4 расположено 7 многоугольников площадью не менее 1 каждый. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не менее $\frac{1}{7}$.
- 5.** Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, в каждом записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.
- 6.** (Формула для функции Эйлера) Дано $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$; где p_i — простые. Найдите $\phi(n)$ — количество чисел меньших и взаимнопростых с n .
- 7.** На кафтане площадью 1 размещены 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше $\frac{1}{2}$. Докажите, что найдутся
- (а)** две заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{3}{20}$;
- (б)** две заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{5}$;
- (в)** три заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{20}$.
- 8.** В классе 100 учеников, часть из которых нахватала двоек по k предметам. Двойки по каждой группе из не менее, чем двух предметов получили 60 учеников, по каждой группе из не менее, чем 3 — 55, из не менее, чем 4 — 50 и так далее. Посчитайте количество тех, у кого двоек нет. Для каких k задача имеет смысл?