

Лемма Холла

18 июля

Опр. *Условие разнообразия* — любые k юношей в совокупности знакомы с хотя бы k девушками.

Опр. *Паросочетание в графе* — набор рёбер, в котором никакие два ребра не имеют общих концов. Паросочетание называется *совершенным*, если в нём задействованы все вершины.

Лемма Холла. Есть n юношей и n девушек, некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. В графе есть совершенное паросочетание (можем поженить всех юношей на знакомых им девушках) тогда и только тогда, когда выполнено условие разнообразия.

I. Докажите лемму Холла. Для доказательства достаточности условия разнообразия воспользуйтесь индукцией по числу юношей с разбором двух случаев:

- Для любого k любые k юношей знакомы не менее чем с $k + 1$ девушкой.
- Есть группа из k юношей, которые знакомы ровно с k девушками.

II. (*Лемма Холла для арабских стран*) Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km .

III. (*Лемма Холла с дефицитом*) Даны натуральное число s , а также m юношей и несколько девушек. Если для любого $k > s$ любые k юношей знают не меньше, чем $k - s$ девушек, то можно одновременно поженить хотя бы $m - s$ юношей.

1. Докажите, что рёбра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k , можно правильно раскрасить в k цветов (из каждой вершины должны выходить рёбра всех цветов по одному разу).

2. Лист бумаги разбит на n многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на n других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот лист можно проткнуть n иголками так, что каждый из $2n$ многоугольников будет проткнут по разу.

3. В школу "Хогвартс" поступило 24 первокурсника. Известно, что в Гриффиндоре учатся храбрые, в Когтевране — умные, в Пуффендуде — старательные, а в Слизерине — хитрые. Каждый первокурсник обладает ровно двумя этими качествами, и все качества встречаются одинаковое число раз. Докажите, что Распределительная Шляпа сможет поровну поделить первокурсников на факультеты.

4. В таблице 1000×2000 (1000 строк и 2000 столбцов) в некоторых клетках стоит фишка. Известно, что в каждой строке стоит 50 фишек, а в каждом столбце по 25 фишек. Докажите, что можно оставить в каждом столбце ровно одну фишку так, чтобы в каждой строчке осталось ровно по 2 фишки.

- 5.** Прямоугольник $m \times n$ ($m < n$) называется латинским прямоугольником, если он заполнен натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строчке и в каждом столбце стоят разные числа. Докажите, что латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата.
- 6.** Полную колоду из 52 карт разбили на 13 стопок по 4 карты в каждой. Докажите, что всегда можно выбрать по одной карте из каждой стопки, чтобы было выбрано по одной карте каждого достоинства.
- 7.** На конференцию приехали 300 математиков, каждый знает 3 языка из 5 разрешенных на конференции. Докажите, что их можно разбить на три секции по 100 человек, говорящих на одном языке.
- 8.** В прямоугольной таблице $m \times n$ записаны неотрицательные числа. В каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одно положительное число. Более того, если ряд и столбец пересекаются по положительному элементу, тогда суммы чисел в ряде и столбце совпадают. Докажите, что $m = n$.
- 9.** На планете Нибиру живут пришельцы трёх различных гендеров — всего $3M$ особей по M каждого гендера. Каждый пришелец испытывает симпатию как минимум к $\frac{3}{4}M$ пришельцам каждого из двух других гендеров. Брак на планете Нибиру заключается только между тремя пришельцами разных гендеров, испытывающих симпатию друг к другу. Докажите, что всех пришельцев можно разбить на M взаимно симпатизирующих троек и поженить.
- 10.** Дед Мороз хочет подарить n детям подарки. i -тому ребенку нравится $x_i > 0$ подарков. Докажите, что если $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} < 1$, то Дед Мороз может подарить каждому ребенку нравящийся ему подарок.
- 11.** Правильный треугольник со стороной n разбит на правильные треугольники со стороной 1. Назовём треугольник красивым, если он ориентирован так же, как и большой треугольник. Петя вырезал из треугольника n красивых треугольников со стороной 1. Докажите, что оставшуюся доску можно разбить на пары соседних по стороне треугольничков тогда и только тогда, когда для каждого k ($1 \leq k \leq n$) и каждого красивого треугольника со стороной k в нём содержится не более k закрашенных треугольников.

Лемма Холла

18 июля

Опр. *Условие разнообразия* — любые k юношей в совокупности знакомы с хотя бы k девушками.

Опр. *Паросочетание в графе* — набор рёбер, в котором никакие два ребра не имеют общих концов. Паросочетание называется *совершенным*, если в нём задействованы все вершины.

Лемма Холла. Есть n юношей и n девушек, некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. В графе есть совершенное паросочетание (можем поженить всех юношей на знакомых им девушках) тогда и только тогда, когда выполнено условие разнообразия.

I. Докажите лемму Холла. Для доказательства достаточности условия разнообразия воспользуйтесь индукцией по числу юношей с разбором двух случаев:

- Для любого k любые k юношей знакомы не менее чем с $k + 1$ девушкой.
- Есть группа из k юношей, которые знакомы ровно с k девушками.

II. (*Лемма Холла для арабских стран*) Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km .

III. (*Лемма Холла с дефицитом*) Даны натуральное число s , а также m юношей и несколько девушек. Если для любого $k > s$ любые k юношей знают не меньше, чем $k - s$ девушек, то можно одновременно поженить хотя бы $m - s$ юношей.

1. Докажите, что рёбра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k , можно правильно раскрасить в k цветов (из каждой вершины должны выходить рёбра всех цветов по одному разу).

2. Лист бумаги разбит на n многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на n других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот лист можно проткнуть n иголками так, что каждый из $2n$ многоугольников будет проткнут по разу.

3. В школу "Хогвартс" поступило 24 первокурсника. Известно, что в Гриффиндоре учатся храбрые, в Когтеварне — умные, в Пуффендуде — старательные, а в Слизерине — хитрые. Каждый первокурсник обладает ровно двумя этими качествами, и все качества встречаются одинаковое число раз. Докажите, что Распределительная Шляпа сможет поровну поделить первокурсников на факультеты.

4. В таблице 1000×2000 (1000 строк и 2000 столбцов) в некоторых клетках стоит фишка. Известно, что в каждой строке стоит 50 фишек, а в каждом столбце по 25 фишек. Докажите, что можно оставить в каждом столбце ровно одну фишку так, чтобы в каждой строчке осталось ровно по 2 фишки.

- 5.** Прямоугольник $m \times n$ ($m < n$) называется латинским прямоугольником, если он заполнен натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строчке и в каждом столбце стоят разные числа. Докажите, что латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата.
- 6.** Полную колоду из 52 карт разбили на 13 стопок по 4 карты в каждой. Докажите, что всегда можно выбрать по одной карте из каждой стопки, чтобы было выбрано по одной карте каждого достоинства.
- 7.** На конференцию приехали 300 математиков, каждый знает 3 языка из 5 разрешенных на конференции. Докажите, что их можно разбить на три секции по 100 человек, говорящих на одном языке.
- 8.** В прямоугольной таблице $m \times n$ записаны неотрицательные числа. В каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одно положительное число. Более того, если ряд и столбец пересекаются по положительному элементу, тогда суммы чисел в ряде и столбце совпадают. Докажите, что $m = n$.
- 9.** На планете Нибиру живут пришельцы трёх различных гендеров — всего $3M$ особей по M каждого гендера. Каждый пришелец испытывает симпатию как минимум к $\frac{3}{4}M$ пришельцам каждого из двух других гендеров. Брак на планете Нибиру заключается только между тремя пришельцами разных гендеров, испытывающих симпатию друг к другу. Докажите, что всех пришельцев можно разбить на M взаимно симпатизирующих троек и поженить.
- 10.** Дед Мороз хочет подарить n детям подарки. i -тому ребенку нравится $x_i > 0$ подарков. Докажите, что если $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} < 1$, то Дед Мороз может подарить каждому ребенку нравящийся ему подарок.
- 11.** Правильный треугольник со стороной n разбит на правильные треугольники со стороной 1. Назовём треугольник красивым, если он ориентирован так же, как и большой треугольник. Петя вырезал из треугольника n красивых треугольников со стороной 1. Докажите, что оставшуюся доску можно разбить на пары соседних по стороне треугольничков тогда и только тогда, когда для каждого k ($1 \leq k \leq n$) и каждого красивого треугольника со стороной k в нём содержится не более k закрашенных треугольников.