

# Транснеравенство

4 июля

I. Пусть  $a \geq d$ ,  $a \geq b \geq c$ . Тогда  $(a+b)(c+d) \geq (a+c)(b+d)$  и  $ac+bd \geq ab+cd$

II. Докажите, что при  $a, b, c \geq 1$  справедливо неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq abc + \frac{1}{abc} + 1$$

III. Докажите по индукции *транснеравенство*:

Пусть  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  и  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Пусть  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — некоторая перестановка чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Тогда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

1. Пусть  $a \geq b \geq c > 0$ . Упорядочите наборы чисел по убыванию:

$$\{a^3, b^3, c^3\}, \left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}, \{a^2 b^2, b^2 c^2, c^2 a^2\}, \left\{\frac{b}{ac}, \frac{c}{ab}, \frac{a}{bc}\right\}$$

2. Докажите неравенство из вступительного теста:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 \geq a^3 b + b^3 c + c^3 e + d^3 a + e^3 d$$

3. (а)  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$  при  $a_i > 0$ ; (б)  $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$ .

4. Докажите, что для  $a, b, c \geq 1$

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$$

5. Для  $a, b, c \geq 1$  докажите, что

$$a + b + c \leq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}$$

6. Для  $a, b, c > 1$  докажите неравенство

$$\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ca}{a+b} \geq 3$$

7.  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — различные натуральные числа. Докажите, что

$$c_1 + \frac{c_2}{4} + \dots + \frac{c_n}{n^2} > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

8. (Неравенство Чебышёва) Пусть  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  и  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Докажите:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

# Транснеравенство

4 июля

I. Пусть  $a \geq d$ ,  $a \geq b \geq c$ . Тогда  $(a+b)(c+d) \geq (a+c)(b+d)$  и  $ac+bd \geq ab+cd$

II. Докажите, что при  $a, b, c \geq 1$  справедливо неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq abc + \frac{1}{abc} + 1$$

III. Докажите по индукции *транснеравенство*:

Пусть  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  и  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Пусть  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — некоторая перестановка чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Тогда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

1. Пусть  $a \geq b \geq c > 0$ . Упорядочите наборы чисел по убыванию:

$$\{a^3, b^3, c^3\}, \left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}, \{a^2 b^2, b^2 c^2, c^2 a^2\}, \left\{\frac{b}{ac}, \frac{c}{ab}, \frac{a}{bc}\right\}$$

2. Докажите неравенство из вступительного теста:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 \geq a^3 b + b^3 c + c^3 e + d^3 a + e^3 d$$

3. (а)  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$  при  $a_i > 0$ ; (б)  $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$ .

4. Докажите, что для  $a, b, c \geq 1$

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$$

5. Для  $a, b, c \geq 1$  докажите, что

$$a + b + c \leq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}$$

6. Для  $a, b, c > 1$  докажите неравенство

$$\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ca}{a+b} \geq 3$$

7.  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — различные натуральные числа. Докажите, что

$$c_1 + \frac{c_2}{4} + \dots + \frac{c_n}{n^2} > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

8. (Неравенство Чебышёва) Пусть  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  и  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Докажите:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$