

# Подобие

5 июля

**I. (а)** Докажите, что в подобных треугольниках медианы, высоты и биссектрисы проведённые к пропорциональным сторонам, относятся как коэффициент подобия.

**(б)** В подобных треугольниках площади относятся как квадраты коэффициентов подобия.

**Опр.** Преобразование плоскости называют подобием с коэффициентом  $k$ , если после преобразования все расстояния увеличиваются в  $k$  раз.

**II.** Докажите, что преобразование подобия сохраняет углы, в частности, сохраняет свойство прямых быть параллельными.

**III.** Докажите, что если существует преобразование подобия переводящее один треугольник в другой, то треугольники подобны. Верно ли обратное?

**IV.** Дайте определение подобных четырёхугольников. И определение подобия произвольных фигур.

**1.** Докажите, что середины оснований и точка пересечения диагоналей трапеции лежат на одной прямой.

**2.** Площадь трапеции равна 9, а одно из её оснований в 1,5 раза больше другого. Найдите площадь частей, на которые диагонали разбивают трапецию.

**3.** Верно ли утверждение: "Если две стороны и три угла одного треугольника равны двум сторонам и трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны"?

**4.** Отрезок  $BE$  разбивает треугольник  $ABC$  на два подобных треугольника, причём коэффициент подобия равен  $\sqrt{3}$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

**5.** Из вершины  $C$  остроугольного треугольника  $ABC$  опущена высота  $CH$ , а из точки  $H$  опущены перпендикуляры  $HM$  и  $HN$  на стороны  $BC$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что треугольники  $MNC$  и  $ABC$  подобны.

**6.** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  взята точка  $K$ , причём  $AK : BK = 1 : 2$ , а на стороне  $BC$  взята точка  $L$ , причём  $CL : BL = 2 : 1$ . Пусть  $Q$  – точка пересечения прямых  $AL$  и  $CK$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если дано, что площадь треугольника  $BQC$  равна 1.

**7.** Через произвольную точку  $P$  стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  параллельно его медианам  $AK$  и  $CL$  проведены прямые, пересекающие стороны  $BC$  и  $AB$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что медианы  $AK$  и  $CL$  делят отрезок  $EF$  на три равные части.

**8.** На сторонах  $BC$  и  $AD$  четырёхугольника  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM : MC = AN : ND = AB : CD$ . Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что прямая  $MN$  параллельна биссектрисе угла  $AOD$ .

**9.** На стороны  $BC$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  (или на их продолжения) опущены перпендикуляры  $AM$  и  $AN$ . Докажите, что  $\triangle MAN \sim \triangle ABC$ .

- 10.** Медиана  $BK$  и биссектриса  $CL$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите равенство  $\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1$ .
- 11.** Какие четырёхугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырёхугольника?
- 12.** [Задача о бабочке] Через середину  $C$  произвольной хорды  $AB$  окружности проведены две хорды  $KL$  и  $MN$  (точки  $K$  и  $M$  лежат по одну сторону от  $AB$ ). Отрезок  $KN$  пересекает  $AB$  в точке  $P$ . Отрезок  $LM$  пересекает  $AB$  в точке  $Q$ . Докажите, что  $PC = QC$ .

# Подобие

5 июля

**I. (а)** Докажите, что в подобных треугольниках медианы, высоты и биссектрисы проведённые к пропорциональным сторонам, относятся как коэффициент подобия.

**(б)** В подобных треугольниках площади относятся как квадраты коэффициентов подобия.

**Опр.** Преобразование плоскости называют подобием с коэффициентом  $k$ , если после преобразования все расстояния увеличиваются в  $k$  раз.

**II.** Докажите, что преобразование подобия сохраняет углы, в частности, сохраняет свойство прямых быть параллельными.

**III.** Докажите, что если существует преобразование подобия переводящее один треугольник в другой, то треугольники подобны. Верно ли обратное?

**IV.** Дайте определение подобных четырёхугольников. И определение подобия произвольных фигур.

**1.** Докажите, что середины оснований и точка пересечения диагоналей трапеции лежат на одной прямой.

**2.** Площадь трапеции равна 9, а одно из её оснований в 1,5 раза больше другого. Найдите площадь частей, на которые диагонали разбивают трапецию.

**3.** Верно ли утверждение: "Если две стороны и три угла одного треугольника равны двум сторонам и трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны"?

**4.** Отрезок  $BE$  разбивает треугольник  $ABC$  на два подобных треугольника, причём коэффициент подобия равен  $\sqrt{3}$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

**5.** Из вершины  $C$  остроугольного треугольника  $ABC$  опущена высота  $CH$ , а из точки  $H$  опущены перпендикуляры  $HM$  и  $HN$  на стороны  $BC$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что треугольники  $MNC$  и  $ABC$  подобны.

**6.** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  взята точка  $K$ , причём  $AK : BK = 1 : 2$ , а на стороне  $BC$  взята точка  $L$ , причём  $CL : BL = 2 : 1$ . Пусть  $Q$  – точка пересечения прямых  $AL$  и  $CK$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если дано, что площадь треугольника  $BQC$  равна 1.

**7.** Через произвольную точку  $P$  стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  параллельно его медианам  $AK$  и  $CL$  проведены прямые, пересекающие стороны  $BC$  и  $AB$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что медианы  $AK$  и  $CL$  делят отрезок  $EF$  на три равные части.

**8.** На сторонах  $BC$  и  $AD$  четырёхугольника  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM : MC = AN : ND = AB : CD$ . Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что прямая  $MN$  параллельна биссектрисе угла  $AOD$ .

**9.** На стороны  $BC$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  (или на их продолжения) опущены перпендикуляры  $AM$  и  $AN$ . Докажите, что  $\triangle MAN \sim \triangle ABC$ .

- 10.** Медиана  $BK$  и биссектриса  $CL$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите равенство  $\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1$ .
- 11.** Какие четырёхугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырёхугольника?
- 12.** [Задача о бабочке] Через середину  $C$  произвольной хорды  $AB$  окружности проведены две хорды  $KL$  и  $MN$  (точки  $K$  и  $M$  лежат по одну сторону от  $AB$ ). Отрезок  $KN$  пересекает  $AB$  в точке  $P$ . Отрезок  $LM$  пересекает  $AB$  в точке  $Q$ . Докажите, что  $PC = QC$ .