

КБШ

13 июля

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца: Для любых действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n выполняется неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n пропорциональны, т.е. $b_1 = ta_1, b_2 = ta_2, \dots, b_n = ta_n$.

I. Докажите неравенство КБШ **(а)** для двух переменных; **(б)** для n переменных.

II. При каких значениях переменных (x, y, z) достигается минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$ если известно, что $3x - 4y + 5z = 5$?

III. Используя КБШ докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, а также между средним арифметическим и средним гармоническим.

Задачи

1. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$, если известно, что $a + 2b + 3c \geq 14$. Когда достигается равенство?

2. $\sqrt{a}(a + c - b) + \sqrt{b}(a + b - c) + \sqrt{c}(b + c - a) \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)}$ где a, b, c - стороны некоторого треугольника.

3. Докажите следующие неравенства, используя неравенство КБШ:

а) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2, a_i > 0;$

б) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$

4. $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_9a_{10} + a_{10}a_1 \geq -1$ если $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{10}^2 = 1$

5. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$\sqrt{3a^2 + ab} + \sqrt{3b^2 + bc} + \sqrt{3c^2 + ca} \leq 2(a + b + c).$$

6. Для положительных чисел a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n докажите неравенство

$$\left((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2 \right) \left(\frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \dots + \frac{1}{a_nb_n} \right) \geq 4n^2.$$

7. $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^7 + a_2^7 + \dots + a_n^7) \geq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5)$

8. Следствие КБШ (лемма Титу, неравенство Седракияна). Докажите, что для любых a_1, a_2, \dots, a_n и любых $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Установите, при каких a_i, b_i достигается равенство.

9. Докажите неравенства для положительных a, b, c :

а) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$;

б) $\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$;

в) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (Неравенство Несбитта).

10. Найдите наименьшее значение выражения $(u-v)^2 + (\sqrt{2} - u^2 - \frac{9}{v})^2$ если $0 < u < \sqrt{2}, v > 0$

11. Докажите, что для трёх наборов положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ и c_1, c_2, \dots, c_n справедливо неравенство $(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3) \geq (\sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} + \sqrt[3]{a_2 b_2 c_2} + \dots + \sqrt[3]{a_n b_n c_n})^3$

КБШ

13 июля

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца: Для любых действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n выполняется неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n пропорциональны, т.е. $b_1 = ta_1, b_2 = ta_2, \dots, b_n = ta_n$.

I. Докажите неравенство КБШ **(а)** для двух переменных; **(б)** для n переменных.

II. При каких значениях переменных (x, y, z) достигается минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$ если известно, что $3x - 4y + 5z = 5$?

III. Используя КБШ докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, а также между средним арифметическим и средним гармоническим.

Задачи

1. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$, если известно, что $a + 2b + 3c \geq 14$. Когда достигается равенство?

2. $\sqrt{a}(a + c - b) + \sqrt{b}(a + b - c) + \sqrt{c}(b + c - a) \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)}$ где a, b, c - стороны некоторого треугольника.

3. Докажите следующие неравенства, используя неравенство КБШ:

а) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2, a_i > 0;$

б) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$

4. $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_9a_{10} + a_{10}a_1 \geq -1$ если $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{10}^2 = 1$

5. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$\sqrt{3a^2 + ab} + \sqrt{3b^2 + bc} + \sqrt{3c^2 + ca} \leq 2(a + b + c).$$

6. Для положительных чисел a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n докажите неравенство

$$\left((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2 \right) \left(\frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \dots + \frac{1}{a_nb_n} \right) \geq 4n^2.$$

7. $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^7 + a_2^7 + \dots + a_n^7) \geq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5)$

8. Следствие КБШ (лемма Титу, неравенство Седракияна). Докажите, что для любых a_1, a_2, \dots, a_n и любых $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Установите, при каких a_i, b_i достигается равенство.

9. Докажите неравенства для положительных a, b, c :

а) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$;

б) $\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$;

в) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (Неравенство Несбитта).

10. Найдите наименьшее значение выражения $(u-v)^2 + (\sqrt{2} - u^2 - \frac{9}{v})^2$ если $0 < u < \sqrt{2}, v > 0$

11. Докажите, что для трёх наборов положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ и c_1, c_2, \dots, c_n справедливо неравенство $(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3) \geq (\sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} + \sqrt[3]{a_2 b_2 c_2} + \dots + \sqrt[3]{a_n b_n c_n})^3$