

Как охранять музей

9 июля

1. (а) Докажите, что если все грани планарного графа треугольные, то существует вершина степени не больше 5 не на границе внешней области.
- (б) Докажите, что внутри любого (невыпуклого) пятиугольника можно выбрать точку так, что отрезки, проведённые к вершинам, не будут пересекать стороны пятиугольника.
- (в) **(Теорема Фари)** Для всякого планарного графа без петель и кратных ребер существует его укладка, в которой все ребра представлены отрезками.

Представьте, что вы — директор картинной галереи, представляющей собой некоторый n -угольник. Вам нужно расставить охранников так, чтобы каждая точка находилась в поле зрения хотя бы одного охранника.

2. (а) Докажите, что любой многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники. (б) При этом можно раскрасить его вершины в три цвета так, чтобы в любом треугольнике все вершины были разного цвета.
3. **(Теорема Хватала)** (а) Докажите, что $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ охранников всегда достаточно, чтобы охранять музей. (б) Для каждого n постройте пример, когда нельзя обойтись меньшим количеством.
4. Пусть каждый охранник прохаживается вдоль одной из стен музея. Придумайте такую форму музея, при которой необходимо $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ охранников.
5. (а) Сколько охранников необходимо расставить по углам здания, чтобы охранять всю внешнюю территорию?
- (б) Докажите, что если ставить их в произвольных точках плоскости, то достаточно $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ охранников.

Как охранять музей

9 июля

1. **(а)** Докажите, что если все грани планарного графа треугольные, то существует вершина степени не больше 5 не на границе внешней области.
- (б)** Докажите, что внутри любого (невыпуклого) пятиугольника можно выбрать точку так, что отрезки, проведённые к вершинам, не будут пересекать стороны пятиугольника.
- (в) (Теорема Фари)** Для всякого планарного графа без петель и кратных ребер существует его укладка, в которой все ребра представлены отрезками.

Представьте, что вы — директор картинной галереи, представляющей собой некоторый n -угольник. Вам нужно расставить охранников так, чтобы каждая точка находилась в поле зрения хотя бы одного охранника.

2. **(а)** Докажите, что любой многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники. **(б)** При этом можно раскрасить его вершины в три цвета так, чтобы в любом треугольнике все вершины были разного цвета.
3. **(Теорема Хватала)** **(а)** Докажите, что $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ охранников всегда достаточно, чтобы охранять музей. **(б)** Для каждого n постройте пример, когда нельзя обойтись меньшим количеством.
4. Пусть каждый охранник прохаживается вдоль одной из стен музея. Придумайте такую форму музея, при которой необходимо $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ охранников.
5. **(а)** Сколько охранников необходимо расставить по углам здания, чтобы охранять всю внешнюю территорию?
- (б)** Докажите, что если ставить их в произвольных точках плоскости, то достаточно $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ охранников.