

# Числа Каталана

14 июля

**Определение.** Число Каталана  $c_n$  — количество способов расставить в ряд  $n$  открывающих и  $n$  закрывающих скобок так, чтобы получилась *правильная скобочная последовательность* (на любом начальном отрезке количество открывающих скобок не меньше количества закрывающих).

**I.** Найдите первые 5 чисел Каталана.

**II.** Сколько есть способов съесть все  $n$  блинов, которые печёт мама, если сын время от времени забегает на кухню и берёт самый верхний блин?

**1.** Докажите, что количество следующих объектов равно соответствующему числу Каталана:

**(а)** Последовательности  $a_1, \dots, a_{2n}$  длины  $2n$ , в которых  $n$  раз встречается  $1$ ,  $n$  раз встречается  $-1$ , и все частичные суммы (суммы первых нескольких членов) неотрицательны.

**(б)** (*Пути Дика*) Пути на клетчатой бумаге из точки  $(0, 0)$  в точку  $(2n, 0)$ , состоящих из  $2n$  отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси  $OX$ .

**(в)** Способы разбить на пары  $2n$  точек, стоящих по окружности, и соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались.

**(г)** (*Триангуляция*) Способы разбить выпуклый  $(n + 2)$ -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (способы, отличающиеся поворотом, различны).

**(д)** Плоские корневые двоичные деревья (у каждой вершины не более двух потомков, левого и правого, и у каждой вершины, кроме корня, один предок) с  $n$  вершинами.

**(е)** Таблицы  $2 \times n$ , заполненные натуральными числами от  $1$  до  $2n$ , так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.

**(ж)** (*Параллеломино*) Неупорядоченные пары путей с шагами  $(0, 1)$  и  $(1, 0)$  длины  $n + 1$ , начинающиеся в точке  $(0, 0)$ , заканчивающиеся в одной точке и пересекающиеся только в начальной и конечной точке.

**(з)** Наборы из  $n$  целых чисел от  $0$  до  $n$ , сумма которых делится на  $n + 1$ .

**(и)** Придумайте свой пример последовательности объектов, количество которых «типа  $n$ » равно  $n$ -ому числу Каталана.

**2.** Докажите формулы для чисел Каталана:

**(а)**  $c_0 = 1$ ,  $c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_0$

**(б)** 
$$c_n = \frac{4^n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} 4^{n-k} c_k}{n+1}$$

**(в)** 
$$c_n = \frac{(n+2)(c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_1)}{2(n-1)}$$

**(г)** 
$$c_n = \frac{4n-2}{n+1} c_{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

$$(д) \ c_n = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^n$$

$$(е) \ c_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$$

Подсказки:

(в) , (г) Триангуляция.

(д) (Лемма Рени) По кругу расставлены  $n+1$  единица и  $n$  минус единиц (в некотором порядке). Мы хотим поставить около одной цифры точку отчёта так, чтобы для любого  $1 \leq k \leq 2n+1$  сумма  $k$  чисел по часовой стрелке, начиная с точки отсчёта, была положительной. Докажите, что можно выбрать такую точку отсчёта, причём единственным способом.

(е) (Принцип отражения) Пути на клетчатой бумаге из точки  $(0,0)$  в точку  $(2n,0)$ , состоящих из  $2n$  отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из точки  $(0,0)$  в точку  $(2n,-2)$ .

3. (Треугольник Каталана) В левом верхнем углу бесконечной вправо и вниз шахматной доски стоит шашка. В каждой клетке, куда может попасть шашка, делая ходы только вниз, будем записывать количество способов добраться до неё из начального положения. Очевидно, в клетку можно попасть только из двух верхних соседей, если они есть, поэтому число в клетке равно сумме его соседей сверху.

|       |    |    |    |    |   |   |   |   |
|-------|----|----|----|----|---|---|---|---|
| 1     |    |    |    |    |   |   |   |   |
|       | 1  |    |    |    |   |   |   |   |
| 1     |    | 1  |    |    |   |   |   |   |
|       | 2  |    | 1  |    |   |   |   |   |
| 2     |    | 3  |    | 1  |   |   |   |   |
|       | 5  |    | 4  |    | 1 |   |   |   |
| 5     |    | 9  |    | 5  |   | 1 |   |   |
|       | 14 |    | 14 |    | 6 |   | 1 |   |
| 14    |    | 28 |    | 20 |   | 7 |   | 1 |
| ..... |    |    |    |    |   |   |   |   |

(а) Докажите, что на левой вертикали треугольника стоят числа Каталана.

(б) Как из чисел треугольника Паскаля можно получить треугольник Каталана? (Попробуйте некоторым образом совместить эти треугольники.)

# Числа Каталана

14 июля

**Определение.** Число Каталана  $c_n$  — количество способов расставить в ряд  $n$  открывающих и  $n$  закрывающих скобок так, чтобы получилась *правильная скобочная последовательность* (на любом начальном отрезке количество открывающих скобок не меньше количества закрывающих).

**I.** Найдите первые 5 чисел Каталана.

**II.** Сколько есть способов съесть все  $n$  блинов, которые печёт мама, если сын время от времени забегает на кухню и берёт самый верхний блин?

**1.** Докажите, что количество следующих объектов равно соответствующему числу Каталана:

**(а)** Последовательности  $a_1, \dots, a_{2n}$  длины  $2n$ , в которых  $n$  раз встречается  $1$ ,  $n$  раз встречается  $-1$ , и все частичные суммы (суммы первых нескольких членов) неотрицательны.

**(б)** (*Пути Дика*) Пути на клетчатой бумаге из точки  $(0, 0)$  в точку  $(2n, 0)$ , состоящих из  $2n$  отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси  $OX$ .

**(в)** Способы разбить на пары  $2n$  точек, стоящих по окружности, и соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались.

**(г)** (*Триангуляция*) Способы разбить выпуклый  $(n + 2)$ -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (способы, отличающиеся поворотом, различны).

**(д)** Плоские корневые двоичные деревья (у каждой вершины не более двух потомков, левого и правого, и у каждой вершины, кроме корня, один предок) с  $n$  вершинами.

**(е)** Таблицы  $2 \times n$ , заполненные натуральными числами от  $1$  до  $2n$ , так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.

**(ж)** (*Параллеломино*) Неупорядоченные пары путей с шагами  $(0, 1)$  и  $(1, 0)$  длины  $n + 1$ , начинающиеся в точке  $(0, 0)$ , заканчивающиеся в одной точке и пересекающиеся только в начальной и конечной точке.

**(з)** Наборы из  $n$  целых чисел от  $0$  до  $n$ , сумма которых делится на  $n + 1$ .

**(и)** Придумайте свой пример последовательности объектов, количество которых «типа  $n$ » равно  $n$ -ому числу Каталана.

**2.** Докажите формулы для чисел Каталана:

**(а)**  $c_0 = 1$ ,  $c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_0$

**(б)** 
$$c_n = \frac{4^n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} 4^{n-k} c_k}{n+1}$$

**(в)** 
$$c_n = \frac{(n+2)(c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_1)}{2(n-1)}$$

**(г)** 
$$c_n = \frac{4n-2}{n+1} c_{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

$$(д) \quad c_n = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^n$$

$$(е) \quad c_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$$

Подсказки:

(в) , (г) Триангуляция.

(д) (Лемма Рени) По кругу расставлены  $n+1$  единица и  $n$  минус единиц (в некотором порядке). Мы хотим поставить около одной цифры точку отчёта так, чтобы для любого  $1 \leq k \leq 2n+1$  сумма  $k$  чисел по часовой стрелке, начиная с точки отсчёта, была положительной. Докажите, что можно выбрать такую точку отсчёта, причём единственным способом.

(е) (Принцип отражения) Пути на клетчатой бумаге из точки  $(0,0)$  в точку  $(2n,0)$ , состоящих из  $2n$  отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из точки  $(0,0)$  в точку  $(2n,-2)$ .

3. (Треугольник Каталана) В левом верхнем углу бесконечной вправо и вниз шахматной доски стоит шашка. В каждой клетке, куда может попасть шашка, делая ходы только вниз, будем записывать количество способов добраться до неё из начального положения. Очевидно, в клетку можно попасть только из двух верхних соседей, если они есть, поэтому число в клетке равно сумме его соседей сверху.

|       |    |    |    |    |   |   |   |   |  |
|-------|----|----|----|----|---|---|---|---|--|
| 1     |    |    |    |    |   |   |   |   |  |
|       | 1  |    |    |    |   |   |   |   |  |
| 1     |    | 1  |    |    |   |   |   |   |  |
|       | 2  |    | 1  |    |   |   |   |   |  |
| 2     |    | 3  |    | 1  |   |   |   |   |  |
|       | 5  |    | 4  |    | 1 |   |   |   |  |
| 5     |    | 9  |    | 5  |   | 1 |   |   |  |
|       | 14 |    | 14 |    | 6 |   | 1 |   |  |
| 14    |    | 28 |    | 20 |   | 7 |   | 1 |  |
| ..... |    |    |    |    |   |   |   |   |  |

(а) Докажите, что на левой вертикали треугольника стоят числа Каталана.

(б) Как из чисел треугольника Паскаля можно получить треугольник Каталана? (Попробуйте некоторым образом совместить эти треугольники.)