

Геометрия масс

13 июля

Опр. Пусть M — некоторая точка плоскости и m — ненулевое число. Материальной точкой (м.т.) mM называется точка M с числом m , и под этим числом будем подразумевать массу точки M (считая, что она может быть и отрицательной).

Опр. Центром масс системы м.т. $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$ называется такая точка Z , для которой имеет место равенство $m_1\overrightarrow{ZM_1} + m_2\overrightarrow{ZM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{ZM_n} = \vec{0}$ при условии, что $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$.

I. (Теорема 1) Докажите, что в точках центр масс выражается как

$$\dot{Z} = \frac{m_1\dot{M}_1 + \dots + m_n\dot{M}_n}{m_1 + \dots + m_n}.$$

II. (Следствие) Для конечной системы материальных точек центр масс определяется однозначно.

III. (Теорема 2) Центр масс двух м.т. расположен на прямой, соединяющей эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага: $m_1d_1 = m_2d_2$.

IV. (Теорема 3) Пусть в системе $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$, отмечены k м.т. $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_kM_k$. Пусть Z' — центр масс отмеченных м.т. Если всю массу отмеченных м.т. сосредоточить в их центре масс Z' , то от этого положение центра масс всей системы не изменится, то есть центр масс системы м.т. $(m_1 + m_2 + \dots + m_k)Z', m_{k+1}M_{k+1}, \dots, m_nM_n$ совпадает с центром масс первоначальной системы. (Обратно тоже работает.)

1. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA . Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

2. Пусть A_1, B_1, \dots, F_1 — середины сторон AB, BC, \dots, FA произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.

3. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1 . В каком отношении делит эта прямая сторону BC ?

4. На стороне AC треугольника ABC взята точка M такая, что $AM : MC = 1 : 2$, а на продолжении стороны CB — точка N такая, что $NB = CB$. Прямая NM пересекает сторону AB в точке P . В каком отношении эта точка делит сторону AB и отрезок MN ?

5. В треугольнике ABC точка F делит сторону BC в отношении $3 : 1$, считая от вершины B . Точки M и P отсекают от сторон AB и AC по $\frac{1}{6}$, считая соответственно от вершины A и от вершины C . В каком отношении делится каждый из отрезков MP и AF точкой их пересечения?

6. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно, причем $AK : KB = DM : MC = a$ и $BL : LC = AN : ND = b$.

Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN . Докажите, что $NP : PL = a$ и $KP : PM = b$.

7. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. M — точка пересечения его диагоналей, Q — середина стороны CD . Вычислите, в каком отношении делит прямая MQ сторону AB , если известно, что $AD = a$, $BC = b$.

8. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB , BC , CA в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке (точка Жергонна).

9. Пусть внеписанные окружности треугольника ABC касаются сторон AB , BC , CA в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке (точка Нагеля).

10. (Теорема Чевы) Дан треугольник ABC , точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на прямых BC , CA , AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$

11. (Теорема Менелая) Дан треугольник ABC , точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на прямых BC , CA , AB соответственно. Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1.$$

Геометрия масс

13 июля

Опр. Пусть M — некоторая точка плоскости и m — ненулевое число. Материальной точкой (м.т.) mM называется точка M с числом m , и под этим числом будем подразумевать массу точки M (считая, что она может быть и отрицательной).

Опр. Центром масс системы м.т. $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$ называется такая точка Z , для которой имеет место равенство $m_1\overrightarrow{ZM_1} + m_2\overrightarrow{ZM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{ZM_n} = \vec{0}$ при условии, что $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$.

I. (Теорема 1) Докажите, что в точках центр масс выражается как

$$\dot{Z} = \frac{m_1\dot{M}_1 + \dots + m_n\dot{M}_n}{m_1 + \dots + m_n}.$$

II. (Следствие) Для конечной системы материальных точек центр масс определяется однозначно.

III. (Теорема 2) Центр масс двух м.т. расположен на прямой, соединяющей эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага: $m_1d_1 = m_2d_2$.

IV. (Теорема 3) Пусть в системе $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$, отмечены k м.т. $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_kM_k$. Пусть Z' — центр масс отмеченных м.т. Если всю массу отмеченных м.т. сосредоточить в их центре масс Z' , то от этого положение центра масс всей системы не изменится, то есть центр масс системы м.т. $(m_1 + m_2 + \dots + m_k)Z', m_{k+1}M_{k+1}, \dots, m_nM_n$ совпадает с центром масс первоначальной системы. (Обратно тоже работает.)

1. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA . Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

2. Пусть A_1, B_1, \dots, F_1 — середины сторон AB, BC, \dots, FA произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.

3. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1 . В каком отношении делит эта прямая сторону BC ?

4. На стороне AC треугольника ABC взята точка M такая, что $AM : MC = 1 : 2$, а на продолжении стороны CB — точка N такая, что $NB = CB$. Прямая NM пересекает сторону AB в точке P . В каком отношении эта точка делит сторону AB и отрезок MN ?

5. В треугольнике ABC точка F делит сторону BC в отношении $3 : 1$, считая от вершины B . Точки M и P отсекают от сторон AB и AC по $\frac{1}{6}$, считая соответственно от вершины A и от вершины C . В каком отношении делится каждый из отрезков MP и AF точкой их пересечения?

6. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно, причем $AK : KB = DM : MC = a$ и $BL : LC = AN : ND = b$.

Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN . Докажите, что $NP : PL = a$ и $KP : PM = b$.

7. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. M — точка пересечения его диагоналей, Q — середина стороны CD . Вычислите, в каком отношении делит прямая MQ сторону AB , если известно, что $AD = a$, $BC = b$.

8. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB , BC , CA в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке (точка Жергонна).

9. Пусть внеписанные окружности треугольника ABC касаются сторон AB , BC , CA в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке (точка Нагеля).

10. (**Теорема Чевы**) Дан треугольник ABC , точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на прямых BC , CA , AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$

11. (**Теорема Менелая**) Дан треугольник ABC , точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на прямых BC , CA , AB соответственно. Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1.$$