

# Гомотетия

18 июля

**Опр.** Гомотетией называют преобразование плоскости, переводящее точку  $X$  в точку  $X'$ , обладающую тем свойством, что  $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$  (точка  $O$  и число  $k$  фиксированы).

Точку  $O$  называют центром гомотетии, а число  $k$  – коэффициентом гомотетии.

Гомотетию с центром в точке  $O$  и коэффициентом  $k$  будем обозначать  $H_O^k$ .

**I.** Докажите, что если  $A' = H_O^k(A)$  и  $B' = H_O^k(B)$ , то  $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ .

**II.** Докажите, что гомотетия — преобразование подобия.

**III.** Докажите, что любую окружность можно перевести в любую другую гомотетией и найдите все возможные центры и коэффициенты.

**1.** Докажите, что для любой точки  $A$  верно следующее:  $H_O^{\frac{1}{k}}(H_O^k(A)) = A$ .

**2.** Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $M$ . Докажите, что точки пересечения медиан треугольников  $ABM$ ,  $BCM$ ,  $CDM$ ,  $DAM$  образуют квадрат.

**3.** На основаниях  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  вне нее построены равносторонние треугольники  $BCX$  и  $ADY$ . Докажите, что прямая  $XY$  проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

**4.** Внутри полосы между двумя параллельными прямыми  $a$  и  $b$  нарисованы две окружности  $\omega_a$  и  $\omega_b$ , касающиеся друг друга в точке  $S$ . Кроме того, окружность  $\omega_a$  касается прямой  $a$  в точке  $A$ ; окружность  $\omega_b$  касается прямой  $b$  в точке  $B$ . Докажите, что точка  $S$  лежит на отрезке  $AB$ .

**5.** Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке  $A$ . Прямая  $l$  пересекает первую окружность в точках  $B$  и  $C$  и касается второй окружности в точке  $D$ . Докажите, что  $AD$  — биссектриса внешнего угла  $BAC$ .

**6.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$  так, что радиусы вписанных окружностей треугольников  $ABD$  и  $BCD$  равны. Докажите, что радиусы невписанных окружностей этих треугольников напротив вершины  $B$  тоже равны.

**7.** На плоскости фиксированы окружность  $\omega$ , точка  $A$  на ней и  $T$  внутри. Рассматриваются всевозможные хорды  $BC$ , проходящие через  $T$ . Найдите ГМТ

**(а)** точек пересечения медиан треугольника  $ABC$ ; **(б)** ортоцентров треугольника  $ABC$ .

**8.** Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника  $ABC$ , а  $A_0, B_0, C_0$  — середины дуг описанной окружности.

**(а)** Докажите, что прямые  $A_1A_0$ ,  $B_1B_0$  и  $C_1C_0$  пересекаются в одной точке.

**(б)** Пусть  $I$  и  $O$  — центры вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$ . Докажите, что ортоцентр треугольника  $A_1B_1C_1$  лежит на прямой  $OI$ .

**9.** Пусть  $AK$  и  $BL$  — высоты остроугольного треугольника  $ABC$ , а  $\omega$  — невписанная окружность треугольника  $ABC$ , касающаяся отрезка  $AB$ . Общие внутренние касательные к окружностям  $(CKL)$  и  $\omega$  пересекают прямую  $AB$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $AP = BQ$ .

# Гомотетия

18 июля

**Опр.** Гомотетией называют преобразование плоскости, переводящее точку  $X$  в точку  $X'$ , обладающую тем свойством, что  $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$  (точка  $O$  и число  $k$  фиксированы).

Точку  $O$  называют центром гомотетии, а число  $k$  – коэффициентом гомотетии.

Гомотетию с центром в точке  $O$  и коэффициентом  $k$  будем обозначать  $H_O^k$ .

**I.** Докажите, что если  $A' = H_O^k(A)$  и  $B' = H_O^k(B)$ , то  $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ .

**II.** Докажите, что гомотетия — преобразование подобия.

**III.** Докажите, что любую окружность можно перевести в любую другую гомотетией и найдите все возможные центры и коэффициенты.

**1.** Докажите, что для любой точки  $A$  верно следующее:  $H_O^{\frac{1}{k}}(H_O^k(A)) = A$ .

**2.** Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $M$ . Докажите, что точки пересечения медиан треугольников  $ABM$ ,  $BCM$ ,  $CDM$ ,  $DAM$  образуют квадрат.

**3.** На основаниях  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  вне нее построены равносторонние треугольники  $BCX$  и  $ADY$ . Докажите, что прямая  $XY$  проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

**4.** Внутри полосы между двумя параллельными прямыми  $a$  и  $b$  нарисованы две окружности  $\omega_a$  и  $\omega_b$ , касающиеся друг друга в точке  $S$ . Кроме того, окружность  $\omega_a$  касается прямой  $a$  в точке  $A$ ; окружность  $\omega_b$  касается прямой  $b$  в точке  $B$ . Докажите, что точка  $S$  лежит на отрезке  $AB$ .

**5.** Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке  $A$ . Прямая  $l$  пересекает первую окружность в точках  $B$  и  $C$  и касается второй окружности в точке  $D$ . Докажите, что  $AD$  — биссектриса внешнего угла  $BAC$ .

**6.** На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$  так, что радиусы вписанных окружностей треугольников  $ABD$  и  $BCD$  равны. Докажите, что радиусы невписанных окружностей этих треугольников напротив вершины  $B$  тоже равны.

**7.** На плоскости фиксированы окружность  $\omega$ , точка  $A$  на ней и  $T$  внутри. Рассматриваются всевозможные хорды  $BC$ , проходящие через  $T$ . Найдите ГМТ

**(а)** точек пересечения медиан треугольника  $ABC$ ; **(б)** ортоцентров треугольника  $ABC$ .

**8.** Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника  $ABC$ , а  $A_0, B_0, C_0$  — середины дуг описанной окружности.

**(а)** Докажите, что прямые  $A_1A_0$ ,  $B_1B_0$  и  $C_1C_0$  пересекаются в одной точке.

**(б)** Пусть  $I$  и  $O$  — центры вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$ . Докажите, что ортоцентр треугольника  $A_1B_1C_1$  лежит на прямой  $OI$ .

**9.** Пусть  $AK$  и  $BL$  — высоты остроугольного треугольника  $ABC$ , а  $\omega$  — невписанная окружность треугольника  $ABC$ , касающаяся отрезка  $AB$ . Общие внутренние касательные к окружностям  $(CKL)$  и  $\omega$  пересекают прямую  $AB$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $AP = BQ$ .