

Гомотетия

18 июля

Опр. Гомотетией называют преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X' , обладающую тем свойством, что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы).

Точку O называют центром гомотетии, а число k – коэффициентом гомотетии.

Гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k будем обозначать H_O^k .

I. Докажите, что если $A' = H_O^k(A)$ и $B' = H_O^k(B)$, то $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

II. Докажите, что гомотетия — преобразование подобия.

III. Докажите, что любую окружность можно перевести в любую другую гомотетией и найдите все возможные центры и коэффициенты.

1. Докажите, что для любой точки A верно следующее: $H_O^{\frac{1}{k}}(H_O^k(A)) = A$.

2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M . Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM , BCM , CDM , DAM образуют квадрат.

3. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY . Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

4. Внутри полосы между двумя параллельными прямыми a и b нарисованы две окружности ω_a и ω_b , касающиеся друг друга в точке S . Кроме того, окружность ω_a касается прямой a в точке A ; окружность ω_b касается прямой b в точке B . Докажите, что точка S лежит на отрезке AB .

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Прямая l пересекает первую окружность в точках B и C и касается второй окружности в точке D . Докажите, что AD — биссектриса внешнего угла BAC .

6. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и BCD равны. Докажите, что радиусы невписанных окружностей этих треугольников напротив вершины B тоже равны.

7. На плоскости фиксированы окружность ω , точка A на ней и T внутри. Рассматриваются всевозможные хорды BC , проходящие через T . Найдите ГМТ

(а) точек пересечения медиан треугольника ABC ; **(б)** ортоцентров треугольника ABC .

8. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC , а A_0, B_0, C_0 — середины дуг описанной окружности.

(а) Докажите, что прямые A_1A_0 , B_1B_0 и C_1C_0 пересекаются в одной точке.

(б) Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC . Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI .

9. Пусть AK и BL — высоты остроугольного треугольника ABC , а ω — невписанная окружность треугольника ABC , касающаяся отрезка AB . Общие внутренние касательные к окружностям (CKL) и ω пересекают прямую AB в точках P и Q . Докажите, что $AP = BQ$.

Гомотетия

18 июля

Опр. Гомотетией называют преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X' , обладающую тем свойством, что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы).

Точку O называют центром гомотетии, а число k – коэффициентом гомотетии.

Гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k будем обозначать H_O^k .

I. Докажите, что если $A' = H_O^k(A)$ и $B' = H_O^k(B)$, то $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

II. Докажите, что гомотетия — преобразование подобия.

III. Докажите, что любую окружность можно перевести в любую другую гомотетией и найдите все возможные центры и коэффициенты.

1. Докажите, что для любой точки A верно следующее: $H_O^{\frac{1}{k}}(H_O^k(A)) = A$.

2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M . Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM , BCM , CDM , DAM образуют квадрат.

3. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY . Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

4. Внутри полосы между двумя параллельными прямыми a и b нарисованы две окружности ω_a и ω_b , касающиеся друг друга в точке S . Кроме того, окружность ω_a касается прямой a в точке A ; окружность ω_b касается прямой b в точке B . Докажите, что точка S лежит на отрезке AB .

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Прямая l пересекает первую окружность в точках B и C и касается второй окружности в точке D . Докажите, что AD — биссектриса внешнего угла BAC .

6. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и BCD равны. Докажите, что радиусы невписанных окружностей этих треугольников напротив вершины B тоже равны.

7. На плоскости фиксированы окружность ω , точка A на ней и T внутри. Рассматриваются всевозможные хорды BC , проходящие через T . Найдите ГМТ

(а) точек пересечения медиан треугольника ABC ; **(б)** ортоцентров треугольника ABC .

8. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC , а A_0, B_0, C_0 — середины дуг описанной окружности.

(а) Докажите, что прямые A_1A_0 , B_1B_0 и C_1C_0 пересекаются в одной точке.

(б) Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC . Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI .

9. Пусть AK и BL — высоты остроугольного треугольника ABC , а ω — невписанная окружность треугольника ABC , касающаяся отрезка AB . Общие внутренние касательные к окружностям (CKL) и ω пересекают прямую AB в точках P и Q . Докажите, что $AP = BQ$.