

# Планарные графы

15 июля

**Опр.** Планарный граф — граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. Плоский граф — изображение планарного графа без пересечений ребер. Ребра плоского графа делят плоскость на части, которые называются гранями.

**I.** Дан плоский граф. Обозначим количество вершин за  $V$ , ребер — за  $P$ , граней — за  $G$ .

**(а)** Докажите, что если граф — дерево, то  $V - P + G = 2$ .

**(б)** Докажите, что при удалении ребра, не являющимся мостом, величина  $V - P + G$  не изменяется.

**(в)** Для связного плоского графа докажите формулу  $V - P + G = 2$ .

**(г)** Чему равно  $V - P + G$ , если граф содержит  $K$  компонент связности?

**1.** В стране Озерная 7 озер и 10 каналов (канал соединяет 2 озера), причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

**2.** Докажите, что для любого связного плоского графа с хотя бы двумя ребрами, без петель и кратных ребер, выполняется неравенство  $2P \geq 3G$ .

**3.** Докажите, что для графа из предыдущей задачи выполняется неравенство  $P \leq 3V - 6$ .

*Контрольный вопрос: что будет, если в графе не более 1 ребра, или есть петли и кратные ребра? Выполняется ли формула  $V - P + G = 2$ ? Выполняется ли неравенство  $P \leq 3V - 6$ ?*

**4.** Как изменятся неравенства 2 и 3 задачи, если граф двудолен (все остальные свойства также выполняются)?

**5.** Докажите, что полный граф на пяти вершинах ( $K_5$ ) и полный двудольный граф, обе доли которого содержат 3 вершины ( $K_{3,3}$ ) — не планарны.

*Рассмотрим выпуклый многогранник и точку внутри него. Поместим многогранник внутрь сферы с центром в этой точке, и спроецируем его из центра на сферу. У полученного на сфере графа ребра не пересекаются. Почему?*

*Поставим сферу на плоскость так, чтобы точка, диаметрально противоположная точке касания (полюс), не принадлежала нарисованному на сфере графу. Спроецируем из полюса на плоскость все точки сферы (стереографическая проекция). Получился плоский граф, соответствующий многограннику.*

**6.** Докажите, что для выпуклого многогранника выполняется формула  $V - P + G = 2$ .

**7.** Приведите пример многогранника, для которого эта формула не выполняется.

**8.** Все грани выпуклого многогранника — квадраты. Сколько у него вершин, ребер и граней?

- 9.** Все грани выпуклого многогранника — правильные пятиугольники. Сколько у него вершин, ребер и граней?
- 10.** Все грани выпуклого многогранника — правильные треугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер. Сколько у него вершин, ребер и граней?
- 11. (а)** Докажите, что у любого планарного графа есть вершина степени не больше 5.
- (б)** Докажите, что у выпуклого многогранника есть грань, содержащая не больше 5 ребер.
- 12.** Семиугольник разбили на выпуклые 5 и 6-угольники. Известно, что в каждой вершине семиугольника сходится хотя бы 2 части разбиения, и никакая вершина любого многоугольника не является внутренней точкой стороны другого многоугольника. Докажите, что 5-угольников не менее 13.

# Планарные графы

15 июля

**Опр.** Планарный граф — граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. Плоский граф — изображение планарного графа без пересечений ребер. Ребра плоского графа делят плоскость на части, которые называются гранями.

**I.** Дан плоский граф. Обозначим количество вершин за  $V$ , ребер — за  $P$ , граней — за  $G$ .

**(а)** Докажите, что если граф — дерево, то  $V - P + G = 2$ .

**(б)** Докажите, что при удалении ребра, не являющимся мостом, величина  $V - P + G$  не изменяется.

**(в)** Для связного плоского графа докажите формулу  $V - P + G = 2$ .

**(г)** Чему равно  $V - P + G$ , если граф содержит  $K$  компонент связности?

**1.** В стране Озерная 7 озер и 10 каналов (канал соединяет 2 озера), причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

**2.** Докажите, что для любого связного плоского графа с хотя бы двумя ребрами, без петель и кратных ребер, выполняется неравенство  $2P \geq 3G$ .

**3.** Докажите, что для графа из предыдущей задачи выполняется неравенство  $P \leq 3V - 6$ .

*Контрольный вопрос: что будет, если в графе не более 1 ребра, или есть петли и кратные ребра? Выполняется ли формула  $V - P + G = 2$ ? Выполняется ли неравенство  $P \leq 3V - 6$ ?*

**4.** Как изменятся неравенства 2 и 3 задачи, если граф двудолен (все остальные свойства также выполняются)?

**5.** Докажите, что полный граф на пяти вершинах ( $K_5$ ) и полный двудольный граф, обе доли которого содержат 3 вершины ( $K_{3,3}$ ) — не планарны.

*Рассмотрим выпуклый многогранник и точку внутри него. Поместим многогранник внутрь сферы с центром в этой точке, и спроецируем его из центра на сферу. У полученного на сфере графа ребра не пересекаются. Почему?*

*Поставим сферу на плоскость так, чтобы точка, диаметрально противоположная точке касания (полюс), не принадлежала нарисованному на сфере графу. Спроецируем из полюса на плоскость все точки сферы (стереографическая проекция). Получился плоский граф, соответствующий многограннику.*

**6.** Докажите, что для выпуклого многогранника выполняется формула  $V - P + G = 2$ .

**7.** Приведите пример многогранника, для которого эта формула не выполняется.

**8.** Все грани выпуклого многогранника — квадраты. Сколько у него вершин, ребер и граней?

- 9.** Все грани выпуклого многогранника — правильные пятиугольники. Сколько у него вершин, ребер и граней?
- 10.** Все грани выпуклого многогранника — правильные треугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер. Сколько у него вершин, ребер и граней?
- 11. (а)** Докажите, что у любого планарного графа есть вершина степени не больше 5.
- (б)** Докажите, что у выпуклого многогранника есть грань, содержащая не больше 5 ребер.
- 12.** Семиугольник разбили на выпуклые 5 и 6-угольники. Известно, что в каждой вершине семиугольника сходится хотя бы 2 части разбиения, и никакая вершина любого многоугольника не является внутренней точкой стороны другого многоугольника. Докажите, что 5-угольников не менее 13.