

# Изогонали и их частные случаи

20 июля

**Опр.** *Изогонали относительно данного угла* — прямые, симметричные относительно биссектрисы этого угла.

**Теорема об изогоналях.** Пусть  $OB$  и  $OC$  — изогонали угла  $AOD$ . Прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $Q$ , прямые  $AB$  и  $CD$  — в точке  $P$  (если  $AB$  и  $CD$  параллельны, то рассматриваем луч  $OP$ , параллельный им). Тогда  $OP$  и  $OQ$  — также изогонали относительно угла  $AOD$ .

**I.** Докажите теорему об изогоналях.

**Опр.** *Изогонально сопряжённые точки в треугольнике* — точки, лежащие на соответствующих изогоналях относительно всех углов треугольника.

**Опр.** *Изогональное сопряжение* — преобразование, ставящее точке, не лежащей на описанной окружности данного треугольника, в соответствие изогонально сопряжённую ей.

**II.** Докажите корректность определения изогонально сопряжённой точки.

**Опр.** *Симедиана* — прямая, изогональная медиане относительно угла, из которого она выходит.

**III.** Точка  $S$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . Тогда эквивалентны условия:

•  $AS$  — симедиана;      •  $\frac{\rho(S, AB)}{\rho(S, AC)} = \frac{AB}{AC}$ ;      •  $\frac{BS}{CS} = \frac{AB^2}{AC^2}$ ;

**IV.** Точка  $X$  внутри треугольника  $ABC$  такова, что  $\angle BAX = \angle ACX$  и  $\angle ABX = \angle CAX$ . Тогда  $AX$  — симедиана.

**V.** (Точка Лемуана) Симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

**1.** В треугольнике  $ABC$  чевианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Оказалось, что  $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$ . Докажите, что  $AA_1$  — высота.

**2.** Пусть  $BA_1$  и  $BC_1$  — внешние биссектрисы угла  $B$  треугольника  $ABC$ ,  $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$ . Докажите, что  $A_1C$  и  $C_1A$  пересекаются на биссектрисе угла  $ABC$ .

**3.** Касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$  в вершинах  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что  $AP$  — симедиана в данном треугольнике.

**4.** В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AA'$ , на отрезке  $AA'$  выбрана точка  $X$ . Прямая  $BX$  пересекает  $AC$  в точке  $B'$ , а прямая  $CX$  пересекает  $AB$  в точке  $C'$ . Отрезки  $A'B'$  и  $CC'$  пересекаются в точке  $P$ , а отрезки  $A'C'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что углы  $PAC$  и  $QAB$  равны.

**5.** Диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $Q$  лежит между параллельными прямыми  $BC$  и  $AD$  так, что  $\angle AQD = \angle CQB$  и прямая  $CD$  разделяет точки  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $\angle BQP = \angle DAQ$ .

**6.** Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Пусть  $I$  и  $J$  — центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$  и  $ADC$  соответственно, а  $I_a$  и  $J_a$  — центры внеписанных

окружностей треугольников  $ABC$  и  $ADC$  соответственно (вписанных в углы  $BAC$  и  $DAC$  соответственно). Докажите, что точка пересечения прямых  $IJ_a$  и  $JI_a$  лежит на биссектрисе угла  $BCD$ .

7. На диаметре  $KW$  окружности взята точка  $M$ , отличная от центра окружности. Лучи  $MA$  и  $MD$  таковы, что  $\angle KMA = \angle WMD < 90^\circ$  ( $A$  и  $D$  — точки пересечения этих лучей с окружностью — лежат в одной полуплоскости относительно прямой  $KW$ ). Докажите, что все прямые  $AD$ , построенные таким образом, пересекают прямую  $KW$  в одной и той же точке  $P$ .

8. Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что симедиана из вершины  $I$  треугольника  $BIC$  пересекает описанную окружность в середине дуги  $BAC$ .

9. Пусть в треугольнике  $ABC$  даны две пары изогонально сопряженных точек  $X, X'$  и  $Y, Y'$ . Тогда точки пересечения  $XY$  с  $X'Y'$  и  $XY'$  с  $X'Y$  тоже изогонально сопряжены.

# Изогонали и их частные случаи

20 июля

**Опр.** *Изогонали относительно данного угла* — прямые, симметричные относительно биссектрисы этого угла.

**Теорема об изогоналях.** Пусть  $OB$  и  $OC$  — изогонали угла  $AOD$ . Прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $Q$ , прямые  $AB$  и  $CD$  — в точке  $P$  (если  $AB$  и  $CD$  параллельны, то рассматриваем луч  $OP$ , параллельный им). Тогда  $OP$  и  $OQ$  — также изогонали относительно угла  $AOD$ .

**I.** Докажите теорему об изогоналях.

**Опр.** *Изогонально сопряжённые точки в треугольнике* — точки, лежащие на соответствующих изогоналях относительно всех углов треугольника.

**Опр.** *Изогональное сопряжение* — преобразование, ставящее точке, не лежащей на описанной окружности данного треугольника, в соответствие изогонально сопряжённую ей.

**II.** Докажите корректность определения изогонально сопряжённой точки.

**Опр.** *Симедиана* — прямая, изогональная медиане относительно угла, из которого она выходит.

**III.** Точка  $S$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . Тогда эквивалентны условия:

•  $AS$  — симедиана;    •  $\frac{\rho(S, AB)}{\rho(S, AC)} = \frac{AB}{AC}$ ;    •  $\frac{BS}{CS} = \frac{AB^2}{AC^2}$ ;

**IV.** Точка  $X$  внутри треугольника  $ABC$  такова, что  $\angle BAX = \angle ACX$  и  $\angle ABX = \angle CAX$ . Тогда  $AX$  — симедиана.

**V.** (Точка Лемуана) Симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

**1.** В треугольнике  $ABC$  чевианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Оказалось, что  $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$ . Докажите, что  $AA_1$  — высота.

**2.** Пусть  $BA_1$  и  $BC_1$  — внешние биссектрисы угла  $B$  треугольника  $ABC$ ,  $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$ . Докажите, что  $A_1C$  и  $C_1A$  пересекаются на биссектрисе угла  $ABC$ .

**3.** Касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$  в вершинах  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что  $AP$  — симедиана в данном треугольнике.

**4.** В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AA'$ , на отрезке  $AA'$  выбрана точка  $X$ . Прямая  $BX$  пересекает  $AC$  в точке  $B'$ , а прямая  $CX$  пересекает  $AB$  в точке  $C'$ . Отрезки  $A'B'$  и  $CC'$  пересекаются в точке  $P$ , а отрезки  $A'C'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что углы  $PAC$  и  $QAB$  равны.

**5.** Диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $Q$  лежит между параллельными прямыми  $BC$  и  $AD$  так, что  $\angle AQD = \angle CQB$  и прямая  $CD$  разделяет точки  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $\angle BQP = \angle DAQ$ .

**6.** Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Пусть  $I$  и  $J$  — центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$  и  $ADC$  соответственно, а  $I_a$  и  $J_a$  — центры внеписанных

окружностей треугольников  $ABC$  и  $ADC$  соответственно (вписанных в углы  $BAC$  и  $DAC$  соответственно). Докажите, что точка пересечения прямых  $IJ_a$  и  $JI_a$  лежит на биссектрисе угла  $BCD$ .

7. На диаметре  $KW$  окружности взята точка  $M$ , отличная от центра окружности. Лучи  $MA$  и  $MD$  таковы, что  $\angle KMA = \angle WMD < 90^\circ$  ( $A$  и  $D$  — точки пересечения этих лучей с окружностью — лежат в одной полуплоскости относительно прямой  $KW$ ). Докажите, что все прямые  $AD$ , построенные таким образом, пересекают прямую  $KW$  в одной и той же точке  $P$ .

8. Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что симедиана из вершины  $I$  треугольника  $BIC$  пересекает описанную окружность в середине дуги  $BAC$ .

9. Пусть в треугольнике  $ABC$  даны две пары изогонально сопряженных точек  $X, X'$  и  $Y, Y'$ . Тогда точки пересечения  $XY$  с  $X'Y'$  и  $XY'$  с  $X'Y$  тоже изогонально сопряжены.