

Многочлены

13 июля

1. Александр Сергеевич разбивает многочлены

$$x - 1, (x - 1)(x - 2), (x - 1)(x - 2)(x - 3), \dots, (x - 1)(x - 2) \dots (x - 2024)$$

на две группы. Обозначим через $P(x)$ произведение многочленов в первой группе и через $Q(x)$ произведение многочленов во второй группе. Оказалось, что $P(x)$ делится на $Q(x)$. Какую наименьшую степень может иметь многочлен $\frac{P(x)}{Q(x)}$?

2. Последовательность многочленов $F_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) задана соотношениями $F_{n+1}(x) = xF_n(x) - F_{n-1}(x)$, $F_0(x) = 2$, $F_1(x) = x$. Докажите, что при простом p все, кроме одного, коэффициенты многочлена $F_p(x)$ делятся на p .

3. Пусть $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ — многочлен с вещественными коэффициентами, причём $a_n \geq 1$. Докажите, что если число m больше любого из чисел $|a_{n-1}| + 1, \dots, |a_0| + 1$, то $Q(x) = P(x + m)$ — многочлен с положительными коэффициентами.

4. (а) Найдите все многочлены $P(x)$ такие, что $P(x^2) = P(x)^2$. (б) Найдите все многочлены $P(x)$, такие что существует $Q(x)$, для которого $P(x^2) = Q(P(x))$.

5. Положительное целое число n называется *сбалансированным*, если $n = 1$ или если n можно записать как произведение четного числа не обязательно различных простых чисел.

Для положительных целых чисел a и b рассмотрим полином $P(x) = (x + a)(x + b)$.

(а) Докажите, что существуют различные положительные целые числа a и b такие, что все числа $P(1), P(2), \dots, P(50)$ сбалансированы.

(б) Докажите, что если $P(n)$ сбалансировано для всех натуральных чисел n , то $a = b$.

6. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие условию $P(a^2) - P(a) = P(b^2) - P(b)$ для всех таких вещественных чисел a и b , что $a + b = 1$.

7. Найдите все натуральные n , для которых существует многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами такой, что все коэффициенты многочлена $f(x)^2 - (1 + x + \dots + x^{n-1})$ кратны n .

8. Пусть n — натуральное число. На $2n + 1$ карточке написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \dots + *x + *$ так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Всегда ли это можно сделать?

Многочлены

13 июля

1. Александр Сергеевич разбивает многочлены

$$x - 1, (x - 1)(x - 2), (x - 1)(x - 2)(x - 3), \dots, (x - 1)(x - 2) \dots (x - 2024)$$

на две группы. Обозначим через $P(x)$ произведение многочленов в первой группе и через $Q(x)$ произведение многочленов во второй группе. Оказалось, что $P(x)$ делится на $Q(x)$. Какую наименьшую степень может иметь многочлен $\frac{P(x)}{Q(x)}$?

2. Последовательность многочленов $F_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) задана соотношениями $F_{n+1}(x) = xF_n(x) - F_{n-1}(x)$, $F_0(x) = 2$, $F_1(x) = x$. Докажите, что при простом p все, кроме одного, коэффициенты многочлена $F_p(x)$ делятся на p .

3. Пусть $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ — многочлен с вещественными коэффициентами, причём $a_n \geq 1$. Докажите, что если число m больше любого из чисел $|a_{n-1}| + 1, \dots, |a_0| + 1$, то $Q(x) = P(x + m)$ — многочлен с положительными коэффициентами.

4. (а) Найдите все многочлены $P(x)$ такие, что $P(x^2) = P(x)^2$. (б) Найдите все многочлены $P(x)$, такие что существует $Q(x)$, для которого $P(x^2) = Q(P(x))$.

5. Положительное целое число n называется *сбалансированным*, если $n = 1$ или если n можно записать как произведение четного числа не обязательно различных простых чисел.

Для положительных целых чисел a и b рассмотрим полином $P(x) = (x + a)(x + b)$.

(а) Докажите, что существуют различные положительные целые числа a и b такие, что все числа $P(1), P(2), \dots, P(50)$ сбалансированы.

(б) Докажите, что если $P(n)$ сбалансировано для всех натуральных чисел n , то $a = b$.

6. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие условию $P(a^2) - P(a) = P(b^2) - P(b)$ для всех таких вещественных чисел a и b , что $a + b = 1$.

7. Найдите все натуральные n , для которых существует многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами такой, что все коэффициенты многочлена $f(x)^2 - (1 + x + \dots + x^{n-1})$ кратны n .

8. Пусть n — натуральное число. На $2n + 1$ карточке написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \dots + *x + *$ так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Всегда ли это можно сделать?