

# Матбой Учебка

10 июля

1. Докажите, что если  $0 < a < b < c$  и  $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ , то  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ .
2. Точка  $M$  лежит на гипотенузе  $AC$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$ , а точка  $N$  – на её продолжении за точку  $A$  так, что  $\angle CBM = 30^\circ$  и  $\angle ABN = 15^\circ$ . Докажите, что  $AN = CM$ .
3. По кругу лежат  $n$  монет массой 9 г и  $n$  монет массой 10 г, все они выглядят одинаково. Известно, что монеты каждой массы лежат подряд. При каком наибольшем  $n$  за два взвешивания на чашечных весах без гирь можно выяснить, где проходят границы между монетами разной массы?
4. На доске написано число  $30!$ . За ход Петя может уменьшить его на 3, 4 или 5, а Вася – разделить на 3, 4 или 5. Нельзя получать дробные и отрицательные числа. Начинает Петя, а выигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?
5. Натуральное число назовём особым, если в десятичной записи его квадрата цифры идут в неубывающем порядке. Существуют ли два последовательных 100-значных особых числа?
6. Два эльфа считаются ровесниками, если их возрасты отличаются меньше чем на 5 лет. За круглым столом сидят 50 эльфов так, что каждая пара соседей – ровесники. Докажите, что можно посадить за пять круглых столов по десять эльфов так, чтобы по-прежнему каждые два соседа были ровесниками.
7. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На  $\omega_1$  отмечена точка  $C$ , а на  $\omega_2$  – точка  $D$  так, что  $\angle BAC = \angle BAD$ . Касательные к  $\omega_1$  из точек  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ , а касательные к  $\omega_2$  из точек  $B$  и  $D$  – в точке  $Q$ . Докажите, что прямая  $AB$  проходит через середину отрезка  $PQ$ .
8. Клетки прямоугольной таблицы  $4 \times 33$  раскрашены в белый и чёрный цвета. Саша перекрасил наименьшее необходимое количество клеток в противоположный цвет так, чтобы каждый квадрат  $2 \times 2$  содержал чётное число белых клеток. Какое наибольшее количество клеток мог перекрасить Саша?

# Матбой Учебка

10 июля

1. Докажите, что если  $0 < a < b < c$  и  $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ , то  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$ .
2. Точка  $M$  лежит на гипотенузе  $AC$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$ , а точка  $N$  – на её продолжении за точку  $A$  так, что  $\angle CBM = 30^\circ$  и  $\angle ABN = 15^\circ$ . Докажите, что  $AN = CM$ .
3. По кругу лежат  $n$  монет массой 9 г и  $n$  монет массой 10 г, все они выглядят одинаково. Известно, что монеты каждой массы лежат подряд. При каком наибольшем  $n$  за два взвешивания на чашечных весах без гирь можно выяснить, где проходят границы между монетами разной массы?
4. На доске написано число  $30!$ . За ход Петя может уменьшить его на 3, 4 или 5, а Вася – разделить на 3, 4 или 5. Нельзя получать дробные и отрицательные числа. Начинает Петя, а выигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?
5. Натуральное число назовём особым, если в десятичной записи его квадрата цифры идут в неубывающем порядке. Существуют ли два последовательных 100-значных особых числа?
6. Два эльфа считаются ровесниками, если их возрасты отличаются меньше чем на 5 лет. За круглым столом сидят 50 эльфов так, что каждая пара соседей – ровесники. Докажите, что можно посадить за пять круглых столов по десять эльфов так, чтобы по-прежнему каждые два соседа были ровесниками.
7. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На  $\omega_1$  отмечена точка  $C$ , а на  $\omega_2$  – точка  $D$  так, что  $\angle BAC = \angle BAD$ . Касательные к  $\omega_1$  из точек  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ , а касательные к  $\omega_2$  из точек  $B$  и  $D$  – в точке  $Q$ . Докажите, что прямая  $AB$  проходит через середину отрезка  $PQ$ .
8. Клетки прямоугольной таблицы  $4 \times 33$  раскрашены в белый и чёрный цвета. Саша перекрасил наименьшее необходимое количество клеток в противоположный цвет так, чтобы каждый квадрат  $2 \times 2$  содержал чётное число белых клеток. Какое наибольшее количество клеток мог перекрасить Саша?