

Экстремальные графы

19 июля

1. (а) Найдите максимальное количество рёбер в несвязном графе на n вершинах.
(б) Найдите максимальное количество рёбер в несвязном графе на n вершинах, имеющего не менее k компонент связности.
2. Назовём свойство графа *наследственным*, если оно выполняется для всех его подграфов. Пусть $P(n)$ - наибольшее количество рёбер в графе с n вершинами, обладающем наследственным свойством. Докажите, что $P(n) \leq \frac{n}{n-2}P(n-1)$.
3. (а) На планете существует 100 государств, и какие бы три из них не взять, среди них найдутся два, имеющие дипломатические отношения. Какое минимальное число посольств на планете?
(б) Найдите максимальное число рёбер у графа на 30 вершинах, у которого нет полного подграфа на трёх вершинах.
(в) Докажите, что если в графе на $2n$ вершинах не менее $n^2 + 1$ рёбер, то в нём есть треугольник.
- (г) Найдите максимальное число рёбер у графа на 30 вершинах, у которого нет полного подграфа на четырёх вершинах.
4. За круглым столом сидят $2n$ человек. Разрешается любых двух людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?
5. (а) В графе на n вершинах любые два нечетных цикла не имеют общих рёбер. Найдите максимальное количество рёбер в таком графе.
(б) Найдите максимальное количество рёбер в графе, если в нём n вершин и нет циклов четной длины.

Экстремальные графы

19 июля

1. (а) Найдите максимальное количество рёбер в несвязном графе на n вершинах.
(б) Найдите максимальное количество рёбер в несвязном графе на n вершинах, имеющего не менее k компонент связности.
2. Назовём свойство графа *наследственным*, если оно выполняется для всех его подграфов. Пусть $P(n)$ - наибольшее количество рёбер в графе с n вершинами, обладающем наследственным свойством. Докажите, что $P(n) \leq \frac{n}{n-2}P(n-1)$.
3. (а) На планете существует 100 государств, и какие бы три из них не взять, среди них найдутся два, имеющие дипломатические отношения. Какое минимальное число посольств на планете?
(б) Найдите максимальное число рёбер у графа на 30 вершинах, у которого нет полного подграфа на трёх вершинах.
(в) Докажите, что если в графе на $2n$ вершинах не менее $n^2 + 1$ рёбер, то в нём есть треугольник.
- (г) Найдите максимальное число рёбер у графа на 30 вершинах, у которого нет полного подграфа на четырёх вершинах.
4. За круглым столом сидят $2n$ человек. Разрешается любых двух людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?
5. (а) В графе на n вершинах любые два нечетных цикла не имеют общих рёбер. Найдите максимальное количество рёбер в таком графе.
(б) Найдите максимальное количество рёбер в графе, если в нём n вершин и нет циклов четной длины.