

Симметрические многочлены

9 июля

Опр. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – многочлен от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Будем называть этот многочлен *симметрическим*, если для любой перестановки (i_1, i_2, \dots, i_n) чисел $(1, 2, \dots, n)$ выполнено равенство $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$, то есть многочлен не меняется при перестановке его переменных.

Опр. Среди всех симметрических многочленов от переменных x_1, x_2, \dots, x_n выделяют *основные* или *элементарные симметрические* многочлены:

- $\sigma_1^n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$
- $\sigma_2^n = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n$.

Говоря русским языком, элементарный симметрический многочлен σ_k^n представляет собой сумму всевозможных произведений k переменных из n имеющихся.

I. Является ли сумма/разность/произведение симметрических многочленов снова симметрическим многочленом?

II. Какие из нижеприведённых многочленов от переменных x, y, z являются симметрическими? **(а)** $x + y - z$ **(б)** $x^2 + y^2$ **(в)** $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ **(г)** $(x - y)(y - z)(z - x)$

Основная теорема симметрических многочленов. Любой симметрический многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ выражается через основные симметрические многочлены посредством операций $+$, $-$, \times . Иными словами, существует многочлен g от n переменных такой, что $g(\sigma_1^n, \dots, \sigma_n^n) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Напоминание. Из теоремы Безу и возможности делить многочлены с остатком следует факт: если многочлен $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ имеет n корней x_1, x_2, \dots, x_n , то имеет место разложение

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

III. Докажите теорему Виета для многочленов высших степеней. Если x_1, \dots, x_n – корни многочлена $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, то имеет место система равенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_{n-3}, \\ \vdots \\ x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n a_0. \end{cases}$$

Отметим, что в левых частях уравнений системы стоят основные симметрические многочлены от корней многочлена f .

1. Зная, что $\sigma_1^1 = 2$, $\sigma_1^2 = 3$, $\sigma_1^3 = 4$, найдите

(а) $x^2 + y^2 + z^2$ (б) $x^2y^2 + x^2y^2 + y^2z^2$ (в) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

2. Решите системы уравнений:

(а)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases} \quad (б) \begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

3. Даны три вещественных числа x, y, z , для которых

$$x + y + z > 0, xy + xz + yz > 0, xyz > 0.$$

Покажите, что $x, y, z > 0$.

4. Для вещественных чисел a, b, c выполнены равенства $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Докажите, что какое-то из них равно 1.

5. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют равенству $(x + y + z)(xy + xz + yz) = xyz$.

Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.

6. Докажите, что значение любого симметрического многочлена с целыми коэффициентами от корней унитарного многочлена с целыми коэффициентами является целым числом. (Считаем, что все корни вещественные).

7. Пусть $a > b > c$ – корни многочлена $x^3 - 3x + 1$. Докажите, что $(a - b)(a - c)(b - c) = \sqrt{k}$ для некоторого натурального k .

Симметрические многочлены

9 июля

Опр. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – многочлен от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Будем называть этот многочлен *симметрическим*, если для любой перестановки (i_1, i_2, \dots, i_n) чисел $(1, 2, \dots, n)$ выполнено равенство $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$, то есть многочлен не меняется при перестановке его переменных.

Опр. Среди всех симметрических многочленов от переменных x_1, x_2, \dots, x_n выделяют *основные* или *элементарные симметрические* многочлены:

- $\sigma_1^n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$
- $\sigma_2^n = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n$.

Говоря русским языком, элементарный симметрический многочлен σ_k^n представляет собой сумму всевозможных произведений k переменных из n имеющихся.

I. Является ли сумма/разность/произведение симметрических многочленов снова симметрическим многочленом?

II. Какие из нижеприведённых многочленов от переменных x, y, z являются симметрическими? **(а)** $x + y - z$ **(б)** $x^2 + y^2$ **(в)** $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ **(г)** $(x - y)(y - z)(z - x)$

Основная теорема симметрических многочленов. Любой симметрический многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ выражается через основные симметрические многочлены посредством операций $+$, $-$, \times . Иными словами, существует многочлен g от n переменных такой, что $g(\sigma_1^n, \dots, \sigma_n^n) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Напоминание. Из теоремы Безу и возможности делить многочлены с остатком следует факт: если многочлен $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ имеет n корней x_1, x_2, \dots, x_n , то имеет место разложение

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

III. Докажите теорему Виета для многочленов высших степеней. Если x_1, \dots, x_n – корни многочлена $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, то имеет место система равенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_{n-3}, \\ \vdots \\ x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n a_0. \end{cases}$$

Отметим, что в левых частях уравнений системы стоят основные симметрические многочлены от корней многочлена f .

1. Зная, что $\sigma_1^1 = 2$, $\sigma_1^2 = 3$, $\sigma_1^3 = 4$, найдите

(а) $x^2 + y^2 + z^2$ (б) $x^2y^2 + x^2y^2 + y^2z^2$ (в) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

2. Решите системы уравнений:

(а)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases} \quad (б) \begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

3. Даны три вещественных числа x, y, z , для которых

$$x + y + z > 0, xy + xz + yz > 0, xyz > 0.$$

Покажите, что $x, y, z > 0$.

4. Для вещественных чисел a, b, c выполнены равенства $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Докажите, что какое-то из них равно 1.

5. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют равенству $(x + y + z)(xy + xz + yz) = xyz$.

Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.

6. Докажите, что значение любого симметрического многочлена с целыми коэффициентами от корней унитарного многочлена с целыми коэффициентами является целым числом. (Считаем, что все корни вещественные).

7. Пусть $a > b > c$ – корни многочлена $x^3 - 3x + 1$. Докажите, что $(a - b)(a - c)(b - c) = \sqrt{k}$ для некоторого натурального k .