

Учебные материалы

Шамов С.В.  
Уракова Е.М.  
Терёхин А.С.

# Содержание

1 В поле проходит прямая дорога . . . . .	1
2 Критерий Карно . . . . .	1
3 Индуктивные конструкции . . . . .	2
4 Разнобой 1 . . . . .	3
5 Выпуклые многогранники . . . . .	3
6 Квадратный трёхчлен . . . . .	4
7 Разнобой – 2 . . . . .	5
8 Неравенства . . . . .	6
9 Ортологичные треугольники . . . . .	7
10 Найди крайнего . . . . .	8
11 Аликвотные дроби . . . . .	9
12 Как охранять музей . . . . .	9
13 Сумма двух квадратов . . . . .	10
14 Конечное в бесконечном . . . . .	11
15 Матбой профи . . . . .	12
16 Изогональное сопряжение . . . . .	13
17 Сильно связанные турниры . . . . .	14
18 Многочлены . . . . .	15
19 Усреднение . . . . .	16
20 Вокруг неравенства треугольника . . . . .	16
21 Задача о загорающем инопланетянине . . . . .	17
22 Матбой 7-Профи — 8-Профи . . . . .	18
23 Внутренний матбой профи . . . . .	19
24 Матбой 8-Профи — 9-Профи . . . . .	20
25 Усреднение в графах . . . . .	21
26 Арифметические прогрессии . . . . .	22

27 Квадраты, квадраты и еще раз квадраты . . . . .	23
28 Экстремальные графы . . . . .	24
29 Лемма Не-Бернсайда . . . . .	24
30 Красим плоскость . . . . .	26
31 Задачи для абаки . . . . .	27
32 Теоретические вопросы к зачёту . . . . .	29
33 Заключительный тест . . . . .	30

## В поле проходит прямая дорога

2 июля

1. В поле проходит прямая дорога, а по ней со скоростью  $10\text{ км/ч}$  едет велосипедист. Укажите все точки поля, с которых можно догнать велосипедиста, если **(а)** бежать с той же скоростью; **(б)** идти со скоростью  $5\text{ км/ч}$ .
2. На дороге находится автобусная остановка, где стоит дедушка. По полю он может идти со скоростью не более  $3\text{ км/ч}$ , а по дороге — не более  $6\text{ км/ч}$ . Нарисуйте все точки поля, до которых он может дойти за  $1$  час.
3. В  $5\text{ км}$  от дороги располагается избушка лесника. От избушки до автобусной остановки ровно  $13\text{ км}$ . Лесник ходит по полю со скоростью  $3\text{ км/ч}$ , а по дороге —  $5\text{ км/ч}$ . Может ли он попасть на остановку за  $3$  часа  $44$  минуты?
4. Лес представляет собой фигуру площади  $25\text{ км}^2$ , окружённую полем и не имеющую внутренних пустых областей. Путник потерялся в лесу и не знает его формы. Как ему выйти из леса, пройдя не более  $10\sqrt{\pi}\text{ км}$ ?
5. Неподалёку от леса есть берёзовая роща в форме круга с радиусом  $1\text{ км}$ . Найдите минимальную длину пути, который нужно было бы пройти, чтобы гарантированно выбраться из рощи.
6. Вы находитесь в чистом поле на расстоянии  $1\text{ км}$  от прямой дороги, но не знаете, в какой она стороне. Как выйти на дорогу, пройдя не более **(а)**  $7,3\text{ км}$ ; **(б)**  $6,72\text{ км}$ ; **(в)**  $6,4\text{ км}$ ?

## Критерий Карно

3 июля

1. Дан отрезок  $AB$  и вещественное число  $c$ .  
**(а)** Сколько на прямой  $AB$  точек  $X$ , таких что  $AX^2 - BX^2 = c$ ?  
**(б)** Докажите, что ГМТ всех точек плоскости, удовлетворяющих этому равенству, представляет собой прямую, перпендикулярную  $AB$ .  
**(в)** (Критерий Карно) Докажите, что  $AB$  перпендикулярно  $CD$  в том и только том случае, если  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ .
2. В шестиугольнике  $ABCDEF$  углы  $A$  и  $C$  прямые,  $AB = BC$ ,  $CD = DE$ ,  $EF = FA$ . Докажите, что прямые  $DF$  и  $BE$  перпендикулярны.
3. Во вписанном четырехугольнике  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Точка  $P$  лежит на отрезке  $MN$ , причём  $MP = CN$  и  $NP = AM$ . Точка  $O$  — центр описанной окружности четырехугольника. Докажите, что если точки  $O$  и  $P$  не совпадают, то  $OP \perp MN$ .
4. Точка  $H$  — ортоцентр равнобедренного треугольника  $ABC$ . На боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  отмечены точки  $M$  и  $K$  соответственно так, что угол  $KMH$  — прямой. Докажите,

что из отрезков  $AK$ ,  $CM$  и  $MK$  можно составить прямоугольный треугольник.

**5.** В остроугольном треугольнике на высоте  $BH$  выбрана произвольная точка  $X$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно. Перпендикуляр, опущенный из точки  $M$  на  $AX$ , пересекается с перпендикуляром, опущенным из  $N$  на  $CX$ , в точке  $P$ . Докажите, что точка  $P$  равноудалена от точек  $A$  и  $C$ .

**6.** Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ , такой что  $AB = BC$  и  $AD = DC$ . Точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  — середины отрезков  $AB$ ,  $CD$  и  $AC$  соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки  $A$  к прямой  $BC$ , пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки  $C$  к прямой  $AD$ , в точке  $H$ . Докажите, что прямые  $KL$  и  $HM$  перпендикулярны.

**7.** Дан треугольник  $ABC$ . Постройте отрезок, который разобьёт его на два треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

**8.** Пусть  $M$  — середина хорды  $AB$  окружности с центром  $O$ . Точка  $K$  симметрична точке  $M$  относительно  $O$ ,  $P$  — произвольная точка окружности. Перпендикуляр к прямой  $AB$  в точке  $A$  и перпендикуляр к прямой  $PK$  в точке  $P$  пересекаются в точке  $Q$ . Точка  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $P$  на  $AB$ . Докажите, что прямая  $QB$  делит отрезок  $PH$  пополам.

## Индуктивные конструкции

3 июля

**1.** В компании из  $n$  человек ( $n > 4$ ) каждый узнал по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Как за  $2n - 4$  звонка все смогут узнать все новости?

**2.** Слоник за один ход может прыгнуть на любое число клеток по диагонали, равное точному квадрату (на 1, то есть на соседнюю, на 4, на 9 и т.д.). При этом он может перепрыгивать занятые клетки. Докажите, что на достаточно большой доске можно расставить несколько слоников так, чтобы каждый бил ровно 10 других.

**3.** Восемь человек делят пирог. Каждый хочет получить не меньше  $1/8$  от всего пирога, однако у каждого может быть своё представление о ценности той или иной части этого пирога. Как им организовать делёж, чтобы каждый был доволен своей долей?

**4.** Существуют ли 2013 таких различных натуральных чисел, что сумма любых двух из них делится на их разность?

**5.** Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак « $\pm$ », а также обычные знаки « $+$ », « $-$ », « $\times$ » и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака « $\pm$ » либо « $+$ », либо « $-$ » во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдёт выражение  $5 \pm 1$ , а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдёт выражение  $(2 \pm 0,5) \pm 0,5$ . Возможно ли составить необходимое

выражение, если на доске были написаны **(а)** числа 1, 2, 4; **(б)** любые 100 различных действительных чисел?

**6.** В ряд стоят 23 коробочки с шариками, причём для каждого числа  $n$  от 1 до 23 есть коробочка, в которой ровно  $n$  шариков. За одну операцию можно переложить в любую коробочку еще столько же шариков, сколько в ней уже есть, из какой-нибудь другой коробочки, в которой шариков больше. Всегда ли можно такими операциями добиться, чтобы в первой коробочке оказался 1 шарик, во второй — 2 шарика, ..., в 23-й — 23 шарика?

## Разнобой 1

3 июля

1. Докажите, что из 64 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, можно выбрать четыре таких, что сумма двух из них равна сумме двух других.
2. Натуральные числа  $a, b, c$  удовлетворяют соотношению  $a + b = b(a - c)$ , причем число  $c + 1$  — квадрат простого числа. Докажите, что хотя бы одно из чисел  $a + b$  или  $ab$  является квадратом натурального числа.
3. 65 пчёл расположены в различных клетках доски  $9 \times 9$ : Одним ходом каждая пчела перелетает в соседнюю по горизонтали или вертикали клетку. Пчёлы не делают два горизонтальных или вертикальных перемещения подряд. Докажите, что после какого-то хода в одной клетке будет хотя бы две пчелы.
4. В треугольнике  $ABC$  угол  $A = 30^\circ$ . На стороне  $AB$  отмечена точка  $D$ , на стороне  $BC$  — точка  $E$ , а на стороне  $AC$  — точка  $F$  так, что  $AD = DC$  и  $DF = DE = EC$ . Докажите, что  $BE < AF$ .

## Выпуклые многогранники

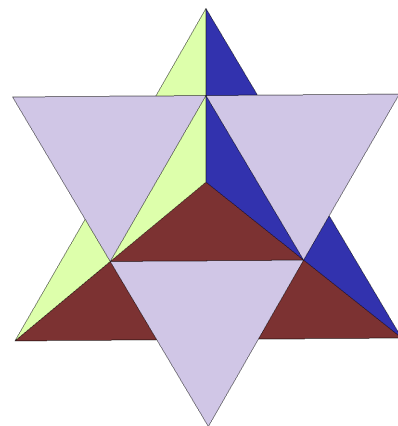
4 июля

**Определение.** Граф, нарисованный на плоскости так, что у его рёбер нет пересечений, называется *плоским*. Он разбивает плоскость на конечное число связных областей (включая внешнюю), которые называют *гранями*.

- (Формула Эйлера)** Пусть  $G$  — плоский граф с  $v$  вершинами,  $e$  ребрами,  $f$  гранями и  $k$  компонентами связности. Тогда верно соотношение  $v - e + f = k + 1$ .
- II. Для любого связного плоского графа с  $v > 2$ , без петель и кратных ребер, выполнены неравенства **(а)**  $2e \geq 3f$ ; **(б)**  $e \leq 3v - 6$ . В случае, если все циклы в графе имеют длину хотя бы  $k$ , первое неравенство можно улучшить до  $2e \geq kf$ .
- III. Как произвольному выпуклому многограннику сопоставить плоский граф с тем же числом вершин, рёбер и граней?

## Задачи

1. Многогранник справа образован совмещением двух тетраэдров. Чему равно  $v - e + f$ ?
2. Степан Владимирович решил сшить футбольный мяч, для чего принес 40 пятиугольных и 40 шестиугольных лоскутков (стороны лоскутков равны). Какое наибольшее количество пятиугольных лоскутков он сможет использовать?
3. Докажите, что каждый выпуклый многогранник имеет либо трехгранный угол, либо треугольную грань.



**Определение.** Для плоского графа  $G$  *двойственный граф* определяется следующим образом. Вершины соответствуют граням  $G$ , а ребро проводится, если эти грани в  $G$  имеют общее ребро.

4. (а) Верно ли, что двойственный граф выпуклого многогранника всегда можно нарисовать на плоскости без самопересечений?
- (б) Нарисуйте двойственный граф для полного графа на четырёх вершинах.
- (в) Приведите пример плоского графа на 2024 вершинах, который изоморфен своему двойственному.
5. Докажите, что грани выпуклого многогранника можно правильным образом покрасить в два цвета тогда и только тогда, когда степени всех вершин четны.
6. (а) Докажите, что у выпуклого многогранника есть грань, содержащая не более пяти ребер. (б) Докажите, что грани выпуклого многогранника можно покрасить правильным образом в пять цветов.
7. В выпуклом многограннике существует цикл, проходящий по всем вершинам. Докажите, что его грани можно правильно раскрасить в четыре цвета.
8. Дан выпуклый многогранник с треугольными гранями.
  - (а) Грани покрашены в черный или белый цвет так, что число ребер между одноцветными гранями минимально. Докажите, что если белых граней меньше, чем чёрных, то хотя бы в полтора раза.
  - (б) Какое наибольшее число вершин степени 3 может быть у такого многогранника, если число граней равно  $2n$ ?

## Квадратный трёхчлен

4 июля

1. (а) На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трёхчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трёхчлена.

- (6) На плоскости расположено 100 графиков квадратных трёхчленов. Известно, что у любых четырех есть общая точка. Докажите, что все графики имеют общую точку.
2. Докажите, что стороны любого неравностороннего треугольника можно либо все увеличить, либо все уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы получился прямоугольный треугольник.
3. Существуют ли два квадратных трёхчлена  $ax^2 + bx + c$  и  $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$  с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня?
4. Квадратный трёхчлен  $f(x)$  разрешается заменить на один из трёхчленов  $x^2 f(\frac{1}{x} + 1)$  или  $(x-1)^2 f(\frac{1}{x-1})$ . Можно ли с помощью таких операций из квадратного трёхчлена  $x^2 + 4x + 3$  получить трёхчлен  $x^2 + 10x + 9$ ?
5. Дан приведенный квадратный трёхчлен  $f(x) = x^2 + bx + c$ , имеющий два различных корня. Сколько корней имеет уравнение  $f(x) + f(x - \sqrt{D}) = 0$ ?
6. Васе задали на дом уравнение  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ , где  $p_1$  и  $q_1$  – целые числа. Он нашел его корни  $p_2$  и  $q_2$  и написал новое уравнение  $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ . Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал четыре квадратных уравнения и каждое имело два различных целых корня (если из двух возможных уравнений два различных корня имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба – любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело два различных вещественных корня, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?
7. На доске написано  $n$  выражений вида  $*x^2 + *x + * = 0$  ( $n$  – нечетное число). Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. За ход разрешается заменить одну из звёздочек числом, не равным нулю. Через  $3n$  ходов получится  $n$  квадратных уравнений. Первый игрок стремится к тому, чтобы как можно большее число этих уравнений не имело корней, а второй хочет ему помешать. Какое наибольшее число уравнений, не имеющих корней, может получить первый игрок независимо от игры второго?

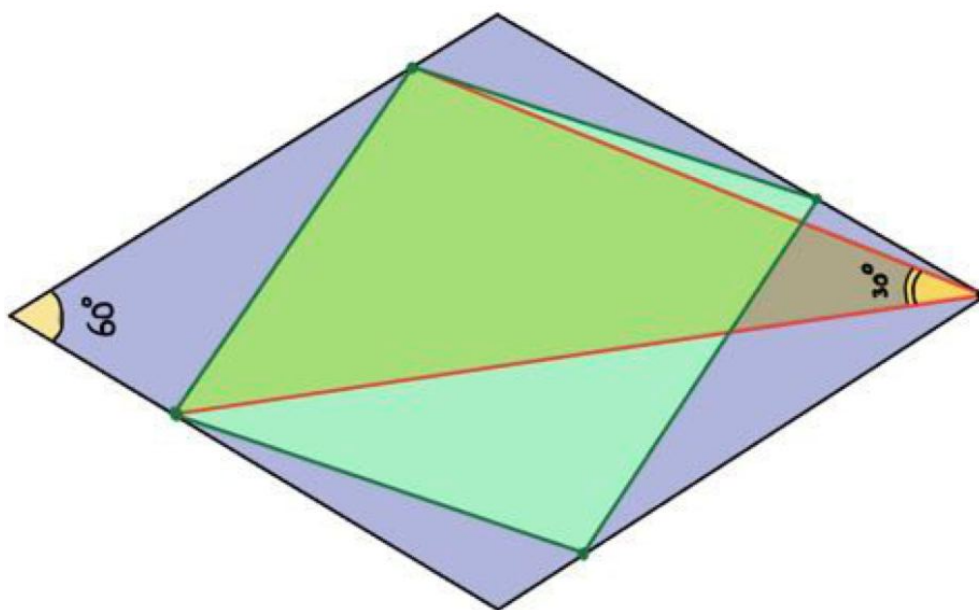
## Разнобой – 2

4 июля

1. Можно ли клетчатый квадрат  $15 \times 15$  покрасить в четыре цвета так, чтобы число клеток каждого двух цветов отличалось не более чем на 1, а в каждом ряду (строке или столбце) встречались клетки не более чем двух цветов?
2. Имеется девять палочек: три красных, три жёлтых, три зелёных. Известно, что можно сложить треугольник из любой тройки палочек трёх разных цветов. Какое количество одноцветных треугольников гарантировано можно составить?
3. Саша выписал величины всех углов четырёхугольника в градусах. Все они оказались целыми числами. Какое наибольшее количество различных цифр могло встретиться в этой записи?



4. В ромб с углом  $60^\circ$  произвольно вписали второй ромб. Докажите, что одна его сторона видна из вершины большего ромба под углом  $30^\circ$ .



## Неравенства

5 июля

1. Каждое из чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  не меньше  $\frac{1}{2}$  и не больше 1. Докажите неравенство

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \leq 3$$

2. Докажите, что  $(2 - \frac{1}{n})(2 - \frac{3}{n}) \dots (2 - \frac{2n-1}{n}) > \frac{1}{n!}$  при  $n > 1$ .

3. Для положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , сумма которых единица, докажите

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{(a+c)(b+c)} \geq 8.$$

4. Положительные числа  $a$ ,  $b$ ,  $x$  и  $y$  удовлетворяют условию  $ab \geq ax + by$ . Докажите, что  $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ .

5. Для неотрицательных чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

6. (a) Докажите, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} > \frac{9}{2}$$

- (б) Докажите, что для любого натурального  $n > 1$  квадрат отношения произведения первых  $n$  нечётных чисел к произведению первых  $n$  чётных чисел больше числа  $\frac{1}{4n}$ , но меньше  $\frac{3}{8n}$ .
7. Попарно различные положительные числа  $x_0, x_1, \dots, x_n$  меньше 1. Докажите, что существует пара  $(x_i, x_j)$ , для которой  $0 < x_i x_j (x_i - x_j) < \frac{1}{3n}$ .

## Ортологичные треугольники

7 июля

1. (Теорема Карно) Дан треугольник  $ABC$ . Из точек  $A_1, B_1, C_1$  опустили перпендикуляры на прямые  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно. Докажите, что данные перпендикуляры пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$A_1 B^2 + B_1 C^2 + C_1 A^2 = A_1 C^2 + B_1 A^2 + C_1 B^2.$$

2. На плоскости даны два треугольника  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$ . Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек  $A_1, B_1, C_1$  на  $BC, AC, AB$  пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из  $A, B, C$  на  $B_1 C_1, A_1 C_1, A_1 B_1$  тоже.

**Определение.** Такие треугольники  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$  называют *ортологичными*. Точки пересечения соответствующих перпендикуляров называют *центрами ортологии*.

3. Из вершин треугольника  $ABC$  опустили перпендикуляры  $AA_1, BB_1, CC_1$  на прямую  $l$ . Докажите, что перпендикуляры из  $A_1$  на  $BC$ , из  $B_1$  на  $AC$  и из  $C_1$  на  $AB$  пересекаются в одной точке.

**Определение.** Она называется *ортополем*  $l$  относительно треугольника  $ABC$ .

4. Докажите, что треугольник  $ABC$  ортологичен
- (а) треугольнику, образованному основаниями высот;
  - (б) любому треугольнику с вершинами на прямых, содержащих высоты;
  - (в) любому треугольнику с вершинами на срединных перпендикулярах;
  - (г) треугольнику, образованному точками касания (вне)вписанной окружности.
5. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей на соответствующие стороны, пересекаются в одной точке.
6. Точки  $A_1, B_1, C_1$  — середины сторон  $BC, AC, AB$  треугольника  $ABC$ .  $A_2$  — основание перпендикуляра из  $A$  на  $B_1 C_1$ . Точки  $B_2$  и  $C_2$  определяются аналогично. Докажите, что перпендикуляры из  $A_1, B_1, C_1$  на  $B_2 C_2, A_2 C_2, A_2 B_2$  пересекаются в одной точке.

7. Около треугольника  $ABC$  описана окружность. Прямая, проходящая через вершину  $A$  параллельно  $BC$ , пересекает эту окружность в точке  $A_1$ . Точки  $B_1$  и  $C_1$  определяются аналогично. Из точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  опустили перпендикуляры на  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.
8. В треугольник  $ABC$  вписана окружность. Из середины отрезка, соединяющего две точки касания, проводится перпендикуляр к стороне, содержащей третью. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.
9. В четырёхугольнике  $ABCD$  диагонали перпендикулярны.  $E$  и  $F$  — середины сторон  $AD$  и  $AB$ . Из этих точек опустили перпендикуляры на стороны  $BC$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что точка их пересечения лежит на прямой  $AC$ .
10. Пусть  $ABC$  — равносторонний треугольник,  $P$  — произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников  $PAB$ ,  $PBC$  и  $PCA$  на прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соответственно, пересекаются в одной точке.

## Найди крайнего

8 июля

1. На плоскости отмечено  $n$  точек. Известно, что любые 4 из них лежат в вершинах выпуклого четырёхугольника. Докажите, что все точки лежат в вершинах выпуклого  $n$ -угольника.
2. На плоскости отмечено  $n$  точек так, что площадь любого треугольника с вершинами в отмеченных точках не превышает 1. Докажите, что все точки можно поместить в треугольник площади не больше 4.
3. На плоскости отмечено  $n$  точек, не лежащих на одной прямой. Докажите, что существует замкнутая ломаная без самопересечений с вершинами в этих точках.
4. 68 детей параллели М8 устроили гидробой. Они встали на площадке так, что все попарные расстояния между ними различны. Затем каждый облил из ведра ближайшего к нему человека. Докажите, что никто не оказался облит больше 5 раз.
5. Докажите, что для любого множества из хотя бы двух точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, найдется прямая, содержащая ровно 2 точки.
6. На плоскости проведено 300 прямых общего положения. Докажите, что среди областей, на которые они разбивают плоскость, найдется хотя бы 100 треугольников.
7. Дан выпуклый многоугольник площади 1.
- (а) Докажите, что его можно поместить в прямоугольник площади не больше 2;
- (б) Докажите, что в него можно поместить прямоугольник площади хотя бы  $\frac{1}{8}$ .
8. На плоскости дано  $N$  точек, среди попарных расстояний между которыми не более, чем  $n$  различных. Докажите, что  $N \leq n^2 + 2$ .

## Аликвотные дроби

8 июля

1. Можно ли из суммы  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{20}$  вычеркнуть четыре слагаемых так, чтобы значение полученного выражения было целым числом?
2. Верно ли, что для любого  $k$  существует число, которое может быть представлено в виде  $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ , где  $n$  и  $m$  натуральные, не менее чем  $k$  способами?
3. (а) Найдите все натуральные  $n$ , при которых сумма  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  равна целому числу. (б) Докажите, что сумма всех чисел вида  $\frac{1}{pq}$ , где  $1 < p < q < 2024$ , не является целым числом.
4. Число  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$  представили в виде несократимой дроби. Докажите, что если число  $3n + 1$  простое, то числитель получившейся дроби делится на  $3n + 1$ .
5. На доске выписаны числа  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2024}$ . Петя и Вася играют в игру. Каждый по очереди выбирает из написанных на доске два произвольных числа  $a$  и  $b$ , стирает их и пишет на доску число  $a + b + ab$ . После 2023 ходов останется одно число. Петя выигрывает, если оставшееся число будет целым, иначе выигрывает Вася. Кто имеет выигрышную стратегию?
6. (а) Найдите все возрастающие арифметические прогрессии с конечным числом членов, сумма которых сумме всех дробей вида  $\frac{1}{pq}$ , где  $0 < p < q \leq n$ ,  $p + q > n$ ,  $\text{НОД}(p, q) = 1$ .  
(б) Докажите, что любое положительное рациональное число  $N$  можно представить в виде суммы различных дробей с числителем 1 и натуральными знаменателями.
7. Петя и Вася по очереди пишут на доску дроби вида  $\frac{1}{n}$ , где  $n$  — натуральное, начинает Петя. Петя за ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход — одну, за второй ход — две, и так каждым следующим ходом на одну дробь больше. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом.  
(а) Докажите, что любое число  $a$  можно представить в виде суммы  $k$  дробей вида  $\frac{1}{n}$  конечным числом способов (если вообще можно представить).  
(б) Сможет ли Петя помешать ему?

## Как охранять музей

9 июля

1. (а) Докажите, что если все грани планарного графа треугольные, то существует вершина степени не больше 5 не на границе внешней области.  
(б) Докажите, что внутри любого (невыпуклого) пятиугольника можно выбрать точку так, что отрезки, проведённые к вершинам, не будут пересекать стороны пятиугольника.

**(в) (Теорема Фари)** Для всякого планарного графа без петель и кратных ребер существует его укладка, в которой все ребра представлены отрезками.

Представьте, что вы — директор картинной галереи, представляющей собой некоторый  $n$ -угольник. Вам нужно расставить охранников так, чтобы каждая точка находилась в поле зрения хотя бы одного охранника.

**2. (а)** Докажите, что любой многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники. **(б)** При этом можно раскрасить его вершины в три цвета так, чтобы в любом треугольнике все вершины были разного цвета.

**3. (Теорема Хватала) (а)** Докажите, что  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  охранников всегда достаточно, чтобы охранять музей. **(б)** Для каждого  $n$  постройте пример, когда нельзя обойтись меньшим количеством.

**4.** Пусть каждый охранник прохаживается вдоль одной из стен музея. Придумайте такую форму музея, при которой необходимо  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  охранников.

**5. (а)** Сколько охранников необходимо расставить по углам здания, чтобы охранять всю внешнюю территорию?

**(б)** Докажите, что если ставить их в произвольных точках плоскости, то достаточно  $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil$  охранников.

## Сумма двух квадратов

9 июля

**1.** Решите в целых числах уравнение  $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_7^4 = 10000000000002024$ .

**2.** Каково наибольшее количество подряд идущих натуральных чисел, ни одно из которых нельзя представить в виде  $ab^2$ , где  $a$  и  $b$  взаимнопросты,  $b > 1$ ?

**Определение.** Пусть  $p$  — простое число,  $x$  — ненулевой остаток. Множество  $\{x, 2x, 3x, \dots, (p-1)x\}$  образует *полную систему вычетов*, т.е. каждый остаток встречается в ней ровно один раз. Остаток  $y$ , такой что  $xy \equiv 1 \pmod{p}$ , называется *обратным к  $x$*  и обозначается  $x^{-1}$ .

**3.** Пусть  $p$  — нечётное простое число. Для ненулевого остатка  $x$  рассмотрим множество  $M_x = \{x, -x, x^{-1}, -x^{-1}\}$ .

**(а)** Докажите, что любые два таких множества не пересекаются, либо совпадают.

**(б)** Докажите, что все множества, кроме, быть может, двух, состоят ровно из четырёх элементов.

- (в) Сделайте вывод, что уравнение  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  имеет решение в том и только том случае, если  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .
4. (а) Пусть  $p$  — простое число вида  $4k + 3$ . Докажите, что если сумма квадратов натуральных чисел  $a^2 + b^2$  делится на  $p^{2m-1}$ , то  $a$  и  $b$  делятся на  $p^m$ .
- (б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые дают остаток 1 по модулю 4, но не представимы в виде суммы двух квадратов.
5. Докажите, что простых чисел вида (а)  $4k + 1$ ; (б)  $4k + 3$  бесконечно много.
6. Докажите, что если  $a$  и  $b$  — натуральные и  $2^a \equiv 2^b \pmod{101}$ , то  $a \equiv b \pmod{100}$ .

**Теорема** (Критерий Эйлера). Уравнение  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  имеет решение в том и только том случае, если  $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ .

7. (а) Пусть  $t$  — количество чётных чисел, больших  $p/2$ , но меньших  $p$ . Докажите, что

$$2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (p-1) \equiv (-1)^t \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right).$$

- (б) Пользуясь критерием Эйлера, установите, для каких  $p$  имеют решения уравнения  $x^2 \equiv -1$ ,  $x^2 \equiv 2$ ,  $x^2 \equiv -2$ . Результаты запишите в таблицу:

	$8k + 1$	$8k + 3$	$8k + 5$	$8k + 7$
$-1$				
$2$				
$-2$				

8. Докажите, что простых чисел вида  $8k + 3$ ,  $8k + 5$  и  $8k + 7$  бесконечно много.

## Конечное в бесконечном

10 июля

1. Король стоит в углу шахматной доски. Продлим её вправо и влево на миллион клеток. Может ли король обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно один раз? А если доску продлить влево и вправо до бесконечности?
2. На бесконечном листе клетчатой бумаги укладывают кости домино размером  $1 \times 2$  так, что они покрывают все клетки. Можно ли при этом добиться того, чтобы каждая прямая, идущая по линиям сетки, разрешила лишь конечное количество костей домино?
3. (а) Докажите, что в любом конечном графе можно расставить в вершинах натуральные числа так, чтобы числа в двух вершинах были взаимно просты тогда и только тогда, когда эти вершины не смежны.
- (б) Верно ли то же самое для произвольного бесконечного графа?

- (в) Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots$  такая что  $(a_n, a_m) = 1$  тогда и только тогда, когда  $|m - n| = 1$ ?
4. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.
5. Два зеркала бесконечной длины образуют угол. Луч света падает на одно из них. Докажите, что он отразится от зеркал конечное число раз (даже если угол очень маленький).
6. (а) Назовём *полосой* часть плоскости между двумя параллельными прямыми. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос?
- (б) Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей парабол?
- (в) Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей углов, если сумма их градусных мер равна  $359^\circ$ ?
7. (а) На отрезке длины 1 расположено бесконечно много отрезков длины 0,1. Докажите, что найдется отрезочек длины 0,01, лежащий внутри бесконечного числа отрезков.
- (б) В круге радиуса 1 расположено бесконечно много кругов радиуса 0,1. Докажите, что найдется кружок радиуса 0,01, содержащийся в бесконечном числе кругов.

## Матбой профи

10 июля

1. Найдите первые четыре цифры числа  $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 999^{999} + 1000^{1000}$ .
2. Рассматриваются всевозможные  $n$ -значные числа, составленные из цифр 1, 2 и 3. В конце каждого из этих чисел приписывается цифра 1, 2 или 3 так, что к двум числам, у которых во всех разрядах стоят разные цифры, приписываются разные цифры. Доказать, что найдётся  $n$ -значное число, в записи которого участвует лишь одна единица и к которому приписывается единица.
3. Пусть  $m$  и  $n$  - натуральные числа, не меньшие 2. Доказать, что найдётся такое натуральное число  $k$ , что  $\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ .
4. Точка  $H$  — ортоцентр остроугольного треугольника  $ABC$ , в котором  $AB > AC$ . Точка  $E$  симметрична  $C$  относительно высоты  $AH$ .  $F$  — точка пересечения прямых  $EH$  и  $AC$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $AEF$  лежит на прямой  $AB$ .
5. За квадратным фанерным листом  $19 \times 19$  спрятана круглая мишень диаметром 7. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может гарантированно попасть в мишень, сделав не более пяти выстрелов. Не хвастает ли барон?
6. Найдите все натуральные  $n$ , при которых  $n - 1$  и  $n^2 + 3n + 17$  являются кубами.
7. В параллели М8  $2n$  учеников ( $n > 1$ ). На каждый приём пищи приходят дежурить  $n$  из них. После нескольких таких дежурств каждые два ученика подежурили вместе хотя бы один раз. При каком минимальном количестве дежурств такое могло произойти?

8. Какое наибольшее число прямых можно провести на плоскости так, чтобы среди любых 2024 из них нашлись две, образующие угол 12 градусов?

## Изогональное сопряжение

12 июля

**Определение.** Дан треугольник  $ABC$  и точка  $P$ , не совпадающая с вершинами треугольника. Точки  $P_a, P_b, P_c$  — основания перпендикуляров, опущенных из  $P$  на прямые  $BC, CA, AB$  соответственно. Треугольник  $P_aP_bP_c$  называется *педальным треугольником* точки  $P$ .

1. Прямая  $h_c$  — перпендикуляр из точки  $C$  на прямую  $P_aP_b$ . Прямые  $h_a$  и  $h_b$  определяются аналогично.

(а) Докажите, что прямая  $PC$  симметрична  $h_c$  относительно биссектрисы угла  $C$  (разберите любые два случая расположения точки  $P$  на плоскости).

(б) (*Прямая Симсона*) Точка  $Q$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что для неё прямые  $h_a, h_b$  и  $h_c$  параллельны. Сделайте вывод, что точки  $Q_a, Q_b$  и  $Q_c$  лежат на одной прямой.

(в) Докажите, что если  $P_a, P_b$  и  $P_c$  не лежат на одной прямой, то  $h_a, h_b$  и  $h_c$  пересекаются в одной точке.

**Определение.** Эта точка называется *изогонально сопряжённой* точке  $P$ .

2. (а) Докажите, что ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены.

(б) Точка  $P$  лежит на прямой  $AB$  и не совпадает с  $A$  и  $B$ . Какой точке она сопряжена?

3. Касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$  в точках  $B$  и  $C$  пересекаются в точке  $P$ . Точка  $Q$  симметрична точке  $A$  относительно середины отрезка  $BC$ . Докажите, что  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены.

4. В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $CD$  перпендикулярна основаниям,  $O$  — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника  $OCD$  выбрана точка  $S$ , диаметрально противоположная точке  $O$ . Докажите, что  $\angle BSC = \angle ASD$ .

5. Пусть точки  $P$  и  $Q$ , лежащие внутри треугольника, изогонально сопряжены.

(а) Докажите, что треугольники  $PP_aP_b$  и  $QQ_bQ_a$  подобны.

(б) Докажите, что вершины педальных треугольников точек  $P$  и  $Q$  лежат на одной окружности. Найдите её центр.

(в) Докажите обратное: если описанные окружности педальных треугольников двух точек совпадают, то эти точки изогонально сопряжены.



6. Точку  $P$  отразили относительно прямых, содержащих стороны треугольника. Докажите, что центр описанной окружности получившегося треугольника изогонально сопряжён точке  $P$ .
7. Точка  $P$  находится внутри треугольника  $ABC$ , в котором проведены высоты  $AA_0$ ,  $BB_0$ ,  $CC_0$ . Точка  $A_1$  симметрична  $P$  относительно прямой  $BC$ ; точки  $B_1$  и  $C_1$  определяются аналогично. Докажите, что прямые  $A_0A_1$ ,  $B_0B_1$ ,  $C_0C_1$  пересекаются в одной точке.
8. Стороны треугольника  $ABC$  видны из точки  $T$  под углами  $120^\circ$ . Докажите, что прямые, симметричные прямым  $AT$ ,  $BT$  и  $CT$  относительно прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно, пересекаются в одной точке.

## Сильно связанные турниры

13 июля

**Определение.** Ориентированный граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ребро, называется *турниром*.

1. Докажите, что в турнире есть **(а)** вершина, из которой можно добраться до любой другой; **(б)** путь, проходящий по всем вершинам.

**Определение.** Ориентированный граф называется *сильно связным*, если от любой вершины до любой другой есть путь, не нарушающий направления стрелок.

1. Докажите, что в сильно связном турнире есть циклический треугольник.
2. Пусть в сильно связном турнире  $n$  вершин. Докажите, что при всех  $3 \leq k \leq n$  для любой наперёд заданной вершины существует цикл длины  $k$ , проходящий через неё.
3. Докажите, что циклов длины  $k$  в сильно связном турнире на  $n$  вершинах не менее  $n - k + 1$ .
4. Назовем *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух. Докажите, что
  - (а)** В любом турнире найдется царь.
  - (б)** Если в турнире ровно один царь, то он победил всех других участников.
  - (в)** В турнире не может быть ровно двух царей.
5. Докажите, что в турнире с  $n \geq 7$  вершинами найдётся вершина, инвертированием всех рёбер в которой можно добиться того, чтобы граф стал сильно связным.
6. Докажите, что в любом сильно связном ориентированном графе на  $n \geq 3$  вершинах можно выкинуть несколько стрелок, оставив не более  $2n - 3$ , так, чтобы граф остался сильно связным.

# Многочлены

13 июля

1. Александр Сергеевич разбивает многочлены

$$x - 1, (x - 1)(x - 2), (x - 1)(x - 2)(x - 3), \dots, (x - 1)(x - 2) \dots (x - 2024)$$

на две группы. Обозначим через  $P(x)$  произведение многочленов в первой группе и через  $Q(x)$  произведение многочленов во второй группе. Оказалось, что  $P(x)$  делится на  $Q(x)$ . Какую наименьшую степень может иметь многочлен  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ?

2. Последовательность многочленов  $F_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) задана соотношениями  $F_{n+1}(x) = xF_n(x) - F_{n-1}(x)$ ,  $F_0(x) = 2$ ,  $F_1(x) = x$ . Докажите, что при простом  $p$  все, кроме одного, коэффициенты многочлена  $F_p(x)$  делятся на  $p$ .

3. Пусть  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  — многочлен с вещественными коэффициентами, причём  $a_n \geq 1$ . Докажите, что если число  $m$  больше любого из чисел  $|a_{n-1}| + 1, \dots, |a_0| + 1$ , то  $Q(x) = P(x + m)$  — многочлен с положительными коэффициентами.

4. (а) Найдите все многочлены  $P(x)$  такие, что  $P(x^2) = P(x)^2$ . (б) Найдите все многочлены  $P(x)$ , такие что существует  $Q(x)$ , для которого  $P(x^2) = Q(P(x))$ .

5. Положительное целое число  $n$  называется *сбалансированным*, если  $n = 1$  или если  $n$  можно записать как произведение четного числа не обязательно различных простых чисел.

Для положительных целых чисел  $a$  и  $b$  рассмотрим полином  $P(x) = (x + a)(x + b)$ .

(а) Докажите, что существуют различные положительные целые числа  $a$  и  $b$  такие, что все числа  $P(1), P(2), \dots, P(50)$  сбалансированы.

(б) Докажите, что если  $P(n)$  сбалансировано для всех натуральных чисел  $n$ , то  $a = b$ .

6. Найдите все многочлены  $P(x)$  с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие условию  $P(a^2) - P(a) = P(b^2) - P(b)$  для всех таких вещественных чисел  $a$  и  $b$ , что  $a + b = 1$ .

7. Найдите все натуральные  $n$ , для которых существует многочлен  $f(x)$  с целыми коэффициентами такой, что все коэффициенты многочлена  $f(x)^2 - (1 + x + \dots + x^{n-1})$  кратны  $n$ .

8. Пусть  $n$  — натуральное число. На  $2n + 1$  карточке написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении  $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \dots + *x + *$  так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Всегда ли это можно сделать?

## Усреднение

14 июля

- I.** По кругу стоят десять чисел, сумма которых равна единице. Докажите, что среди них найдутся четыре подряд идущих числа, сумма которых положительна.
- II.** По краю круглого стола равномерно расставлены таблички с фамилиями дипломатов, участвующих в переговорах. После начала переговоров оказалось, что ни один из дипломатов не сидит около своей таблички. Можно ли повернуть стол так, чтобы по крайней мере два дипломата сидели около своих табличек?
- 1.** По краю круглого стола равномерно расставлены 10 табличек «математик» и 10 табличек «биолог». 10 математиков и 10 биологов в случайном порядке сели за стол. Если у кого-то табличка не соответствует специальности, то он обижается. К какому наименьшему числу обиженных можно гарантированно свести любую расстановку при помощи поворота стола?
- 2.** В группе профи учится 24 ребенка. Посмотрим на все  $24!$  способов раздать детям бейджики.
- (а)** В какой доле всех случаев Лукьян получит свой бейджик?
- (б)** Для каждого способа посчитаем количество детей, получивших свой бейджик. Чему равно среднее арифметическое этих чисел?
- 3.** После того, как все дети наконец получили свои бейджики, они встали в круг лицом к центру. Затем каждый из них дал леща то ли левому, то ли правому соседу. Для каждого способа раздачи лещей посчитаем количество детей, оставшихся без леща. Чему равно среднее арифметическое этих чисел?
- 4.** В группе 10 мальчиков и 10 девочек. Посмотрим на все возможные  $C_{20}^{10}$  способов поставить их в ряд. Для каждого способа подсчитаем количество пар стоящих рядом мальчиков. Чему равняется среднее арифметическое этих чисел?
- 5.** В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Два растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по 51 признаку. Докажите, что в справочнике не может находиться более 50 попарно непохожих растений.
- 6.** В лагере 2024 ребенка, некоторые из которых дружат, а некоторые – нет. Докажите, что можно выбрать пару детей так, что среди оставшихся найдется хотя бы 1011 детей, каждый из которых или дружит с обоими выбранными детьми, или с обоими не дружит.

## Вокруг неравенства треугольника

14 июля

- 1.** Внутри угла  $ABC$ , равного  $105^\circ$ , выбрана точка  $X$  так, что  $\angle XBC = 70^\circ$  и  $BC = BX$ . На отрезке  $BX$  выбрана точка  $Y$  так, что  $AB = BY$ . Докажите, что  $AX + AY \geq CY$ .

2. В треугольнике  $ABC$  угол  $A = 60^\circ$ . Докажите, что  $AB + BC > 2AM$ , где  $M$  — середина  $BC$ .
3. В четырехугольнике  $ABCD$  углы  $A$  и  $C$  тупые. Докажите, что периметр вписанного в  $ABCD$  четырехугольника больше, чем  $2AC$ .
4. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  выбраны точки  $K$  и  $L$  так, что  $AK = BL$ , а на стороне  $BC$  — точки  $M$  и  $N$  так, что  $CN = BM$ . Докажите, что  $KN + LM \geq AC$ .
5. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ , на стороне  $BC$  — точка  $E$ , а на отрезке  $BE$  — точка  $F$  так, что  $\angle ADB = \angle BED = 60^\circ$ ,  $AC = BD$  и  $CD = BF$ . Докажите, что  $AD + CE > AF$ .
6. На сторонах треугольника  $ABC$  как на основаниях построены вовне равнобедренные треугольники  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ ,  $CAB_1$  с углом  $120^\circ$ . Докажите, что периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  не больше периметра треугольника  $ABC$ .
7. Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $M$ . Докажите, что

$$\min(AM, BM, CM) + AM + BM + CM \leq AB + BC + AC.$$

## Задача о загорающем инопланетянине

15 июля

Обитатели плоского мира могут принимать форму произвольной фигуры. Солнечные лучи представляют собой семейство направленных параллельных прямых. Встречая препятствие, солнечный луч дальше не идёт.

Как только точка на периметре инопланетянина подвергается воздействию солнца, в общей сложности, одну минуту, она становится загоревшей. Загорая, инопланетянин может мгновенно поворачиваться на произвольный угол.

1. Какое минимальное время потребуется инопланетянину квадратной формы, чтобы полностью загореть?
2. Какое минимальное время понадобится инопланетянину в форме произвольного треугольника, чтобы полностью загореть?
3. Докажите, что всякому инопланетянину, имеющему форму выпуклого многоугольника, потребуется не более двух, но не менее полутора минут.
4. Какое минимальное время понадобится инопланетянину в форме остроугольного сектора, чтобы целиком загореть?
5. Какое минимальное время понадобится инопланетянину в форме тупоугольного сектора, чтобы целиком загореть?
6. Приведите пример такого инопланетянина, который может целиком загореть, но ему понадобится строго больше двух минут.

7. Докажите, что любому инопланетянину пятиугольной формы достаточно двух минут.

## Матбой 7-Профи — 8-Профи

15 июля

1. Все натуральные числа от 1 до  $N$  поставлены в ряд. К каждому числу прибавили номер места в ряду, на котором оно стоит. Найдите количество таких  $N < 3^{2024}$ , для которых могло оказаться, что каждая из полученных сумм является степенью тройки.

2. У Саши есть неограниченный запас одинаковых салфеток в форме выпуклого четырёхугольника, стороны которого не превосходят 1. Он хочет полностью накрыть ими Большой Квадратный Стол площади  $S^2 = 1000000$ . Салфетки можно класть друг на друга, поворачивать, переворачивать, части салфеток могут выходить за пределы стола, однако, нельзя менять форму салфеток (резать, сгибать и т.п.). Докажите, что с этой задачей он может справиться, истратив салфетки суммарной площадью не более  $1,01 \cdot S^2$ .

3. В каждой клетке квадратной таблицы  $4 \times 4$  записан 0 или 1. Каждую секунду происходит следующее: число в данной клетке становится единицей, если в клетках, соседних по стороне, сумма нечётна, и нулём — в противном случае. Докажите, что в течение первых семи секунд какое-то расположение нулей и единиц обязательно повторится.

4. Найдите все натуральные числа, которые не могут быть представлены в виде:

$$\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$$

где  $a, b$  — некоторые натуральные числа.

5. Натуральное число *замечательно*, если оно взаимно просто с суммой всех своих делителей (включая само число). Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могут быть *замечательными*?

6. В трапеции  $ABCD$  диагональ  $BD$  равна основанию  $AD$ , а диагональ  $AC$  — боковой стороне  $CD$ . Отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $E$ . Точка  $F$  на отрезке  $AD$  выбрана так, что  $EF \parallel CD$ . Докажите, что  $BE = DF$ .

7. На вечеринке у Паши все дарили друг другу подарки. Паша получил подарков в 6 раз больше, чем подарил, а каждый из остальных подарил подарков в 3 раза больше, чем получил. Докажите, что какие-то двое дарили подарки друг другу.

8. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$  — перестановка натуральных чисел от 1 до 2024. Найдите наибольшее возможное значение выражения:

$$|| \dots || x_1 - x_2 | - x_3 | - \dots - x_{2023} | - x_{2024} |.$$

# Внутренний матбой профи

15 июля

1. Для положительных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) + \left(\frac{d}{a} + \frac{a}{d}\right) \geq 2 \frac{(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}}$$

2. Дано квадратное поле  $4 \times 4$ , в каждой клетке которого лежит по монете, орлом или решкой вверх. Каждую секунду со всеми монетами одновременно происходит следующее: монета в данной клетке переворачивается, если в клетках, соседних по стороне, нечётное число орлов, а иначе — не переворачивается. Докажите, что в течение первых семи секунд какое-то расположение орлов и решек обязательно повторится.

3. Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности  $\omega$  с центром  $O$ , причем  $O$  не лежит на прямой  $AB$ . На отрезке  $AB$  выбрана точка  $C$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AC$  и  $CB$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $AON$  и  $BOM$  пересекают  $\omega$  вторично в точках  $K$  и  $L$  соответственно, и пересекаются друг с другом вторично в точке  $X$ . Докажите, что точки  $C$ ,  $K$ ,  $X$ ,  $L$  лежат на одной окружности.

4. Маша и Паша по очереди проводят диагонали в правильном 98-угольнике, начинает Маша. Разрешено проводить диагональ, если она не перпендикулярна ни одной из ранее проведенных диагоналей, а также пересекает хотя бы половину ранее проведенных диагоналей. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

5. Будем говорить, что точка  $A(x, y)$  *больше* точки  $B(x', y')$ , если  $x \geq x'$  и  $y \geq y'$ . Если же  $x \leq x'$  и  $y \leq y'$ , то будем говорить, что точка  $A$  *меньше* точки  $B$ . На координатной плоскости отметили несколько точек, обе координаты которых являются натуральными числами, не превосходящими  $n$ . Оказалось, что для каждой отмеченной точки количество точек, больших её, и количество точек, меньших её, отличаются не более, чем на 1. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено?

6. Саша нарисовал граф, вершинами которого являются все возможные последовательности из 0 и 1 длины 2019, а ребро между вершинами проводится, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одном месте. Назовём расстановку ненулевых чисел в вершинах этого графа  $k$ -гармонической, если для любой вершины сумма чисел в соседних с ней вершинах в  $k$  раз больше числа в самой вершине. При каких вещественных  $k$  существует  $k$ -гармоническая расстановка чисел в вершинах этого графа?

7. Дано натуральное число  $n > 10$ . Докажите, что ни для какого  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  число  $(2n)! + k$  не делится на  $n! + 1$ .

8. Все натуральные числа от 1 до  $N$  поставлены в ряд. К каждому числу прибавили номер места в ряду, на котором оно стоит. Найдите количество таких  $N < 3^{2024}$ , для

которых могло оказаться, что каждая из полученных сумм является степенью тройки.

## Матбой 8-Профи — 9-Профи

15 июля

1. Для положительных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) + \left(\frac{d}{a} + \frac{a}{d}\right) \geq 2 \frac{(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}}.$$

2. Для положительных вещественных чисел  $p$  и  $q$  будем называть *остатком при делении  $p$  на  $q$*  наименьшее неотрицательное вещественное число  $r$  такое, что  $\frac{p-r}{q}$  — целое число. Докажите, что для каждого натурального  $b$  существует ровно одно натуральное  $a$  такое, что если  $r_1$  и  $r_2$  — остатки при делении  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  на  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$  соответственно, то  $r_1 + r_2 = \sqrt{2}$ .

3. На биссектрисе  $AD$  остроугольного треугольника  $ABC$  ( $AB > AC$ ) лежит точка  $P$ . Прямые  $BP$  и  $CP$  пересекают стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $Q$  и  $R$  соответственно. Докажите, что  $PB - PC > RB - QC$ .

4. Саша нарисовал граф, вершинами которого являются все возможные последовательности из 0 и 1 длины 2019, а ребро между вершинами проводится, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одном месте. Назовём расстановку ненулевых чисел в вершинах этого графа *k-гармонической*, если для любой вершины сумма чисел в соседних с ней вершинах в  $k$  раз больше числа в самой вершине. При каких вещественных  $k$  существует  $k$ -гармоническая расстановка чисел в вершинах этого графа?

5. Дано натуральное число  $n > 10$ . Докажите, что ни для какого  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  число  $(2n)! + k$  не делится на  $n! + 1$ .

6. Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности  $\omega$  с центром  $O$ , причем  $O$  не лежит на прямой  $AB$ . На отрезке  $AB$  выбрана точка  $C$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AC$  и  $CB$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $AON$  и  $BOM$  пересекают  $\omega$  вторично в точках  $K$  и  $L$  соответственно, и пересекаются друг с другом вторично в точке  $X$ . Докажите, что точки  $C, K, X, L$  лежат на одной окружности.

7. Маша и Паша по очереди проводят диагонали в правильном 98-угольнике, начинает Маша. Разрешено проводить диагональ, если она не перпендикулярна ни одной из ранее проведенных диагоналей, а также пересекает хотя бы половину ранее проведенных диагоналей. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

8. Будем говорить, что точка  $A(x, y)$  больше точки  $B(x', y')$ , если  $x \geq x'$  и  $y \geq y'$ . Если же  $x \leq x'$  и  $y \leq y'$ , то будем говорить, что точка  $A$  меньше точки  $B$ . На координатной плоскости отметили несколько точек, обе координаты которых являются натуральными числами, не превосходящими  $n$ . Оказалось, что для каждой отмеченной

точки количество точек, больших её, и количество точек, меньших её, отличаются не более, чем на 1. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено?

**9.** Найдите все вещественные числа  $x$  такие, что  $4x^5 - 7$  и  $4x^{13} - 7$  — точные квадраты.

**10.** Вдоль окружности расположено  $n$  монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Если две соседние монеты лежат одинаково (обе орлом или обе решкой), разрешается обе перевернуть. Сколько имеется вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга, применяя такие операции?

## Усреднение в графах

17 июля

**1.** В графе с 10 вершинами 60 треугольников. Докажите, что существует вершина степени не меньше, чем 7.

**2.** На дискотеке между 7 мальчиками и 7 девочками состоялось 22 парных танца. Докажите, что для каких-то двух мальчиков найдутся такие две девочки, с которыми оба они успели потанцевать.

**3.** Вершины графа красят в  $d$  цветов. **(а)** Какова доля раскрасок, в которых концы выбранного ребра одноцветные, среди всех раскрасок? **(б)** Докажите, что существует раскраска, в которой доля ребер с одноцветными концами не больше  $\frac{1}{d}$ .

**4.** Докажите, что можно покрасить рёбра полного графа на  $n > 2$  вершинах в два цвета, чтобы одноцветных треугольников было меньше четверти.

**5. (а)** Вершины полного графа пронумерованы числами от 1 до  $n$ . Сколько существует способов задать ориентацию рёбер так, чтобы эти вершины в фиксированном порядке образовывали цикл?

**(б)** Докажите, что для любого  $n$  существует турнир на  $n$  вершинах, в котором имеется не менее  $\frac{(n-1)!}{2^n}$  гамильтоновых циклов.

**6.** Дано натуральное число  $n > 1000$ . В однокруговом волейбольном турнире участвует  $M < 2^n$  команд. Докажите, что могло оказаться так, что из любых  $2n + 1$  команд найдутся 3, выигравших друг друга по циклу.

**7.** В двудольном графе меньше, чем  $2^n$  вершин, для каждой из которых задан список из  $n$  цветов.

**(а)** Заменим каждый цвет из списков на число 0 или 1, после чего сопоставим вершинам первой доли конъюнкцию чисел в списке, а вершинам второй доли — дизъюнкцию. Какова доля замен, в которых выбранной вершине первой доли оказалась сопоставлена 1?

**(б)** Докажите, что можно так покрасить каждую вершину в один из цветов ее списка, что смежные вершины будут разных цветов.



# Арифметические прогрессии

18 июля

**Определение.** Арифметической прогрессией называется последовательность вещественных чисел вида  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + dn, \dots$

1. Пусть числа  $x^2, y^2, z^2$  образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа  $1/(x + y), 1/(y + z), 1/(x + z)$  также образуют арифметическую прогрессию.
2. Можно ли вычеркнуть из последовательности  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  часть чисел так, чтобы осталась арифметическая прогрессия **(а)** бесконечной длины; **(б)** из 10 членов?
3. Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии  $a_1, a_2, a_3, \dots$  есть числа  $a_1^2, a_2^2, a_3^2$ . Докажите, что эта прогрессия состоит из целых чисел.
4. Все члены арифметической прогрессии – натуральные числа. Докажите, что если продолжать выписывать новые члены этой прогрессии, то рано или поздно найдутся два члена (не обязательно соседние) с равной суммой цифр.
5. Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.  
**(а)** Докажите, что число её членов меньше 100.  
**(б)** Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.  
**(в)** Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.
6. Докажите, что  
**(а)** В арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов вида  $10^k$ .  
**(б)** Любая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит в себе некоторую геометрическую прогрессию.  
**(в)** В произвольной арифметической прогрессии с начальным членом  $a$  и разностью  $d$  содержится бесконечная геометрическая прогрессия в том и только том случае, когда отношение  $a/d$  рационально.  
**(г)** Если бесконечная арифметическая прогрессия содержит хотя бы три последовательных члена геометрической прогрессии, то она содержит бесконечную геометрическую прогрессию.

# Квадраты, квадраты и еще раз квадраты

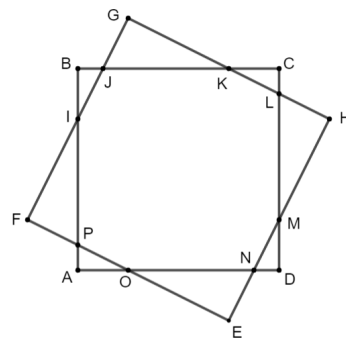
18 июля

I. Докажите, что прямоугольник, описанный около квадрата, является квадратом.

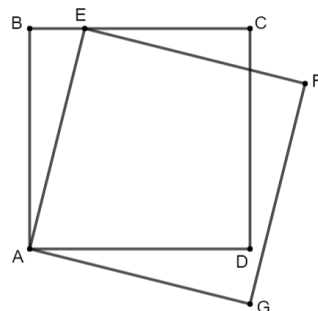
II. Квадраты  $ABCD$  и  $EFGH$  расположены так, как показано на рисунке.

(а) Докажите, что отрезки  $IM$  и  $OK$  равны и перпендикулярны.

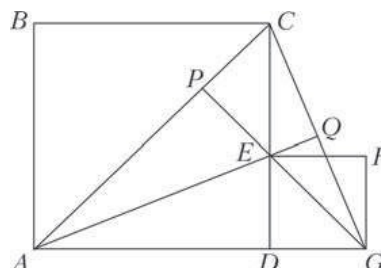
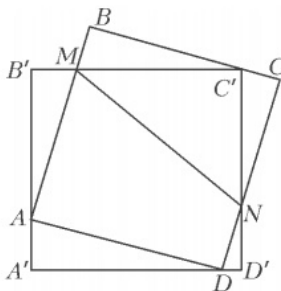
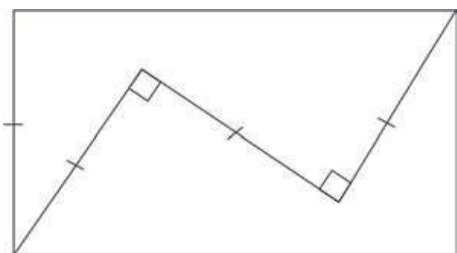
(б) Докажите, что площади четырехугольников  $JONK$  и  $IPML$  равны.



1. Квадраты  $ABCD$  и  $AEFG$  расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что (а)  $CF \parallel BD$  (б) точки  $C, D$  и  $G$  лежат на одной прямой.



2. Внутри прямоугольника проведена ломаная, звенья которой равны меньшей стороне прямоугольника, а соседние звенья перпендикулярны. Найдите отношение сторон прямоугольника.



3. Квадраты  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  расположены так, что вершины  $A$  и  $D$  первого квадрата лежат на сторонах  $A'B'$  и  $A'D'$  второго, а вершина  $C'$  второго — на стороне  $BC$  первого. Докажите, что отрезок  $MN$ , соединяющий две общие точки границ квадратов, проходит через центр  $O$  квадрата  $ABCD$ .

4. Квадраты  $ABCD$  и  $DEFG$  расположены так, как показано на рисунке выше. Прямые  $AC$  и  $GE$  пересекаются в точке  $P$ , а прямые  $AE$  и  $CG$  — в точке  $Q$ . Докажите, что точки  $B, P, Q, F$  лежат на одной прямой.

5. На сторонах  $AB, BC, CD$  и  $DA$  квадрата  $ABCD$  отмечены точки  $K, L, M$  и  $N$  так, что  $AK = BL = CM = DN$ . Отрезки  $DK$  и  $MN$  пересекаются в точке  $E$ , а отрезки  $KC$  и  $LM$  — в точке  $F$ . Докажите, что  $EF \parallel AB$ .

6. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены квадраты  $ABDE$  и  $ACFG$ . Докажите, что прямые  $BF$  и  $CD$  пересекаются на высоте треугольника  $ABC$ .

7. В остроугольном треугольнике  $ABC$   $H$  — ортоцентр. На сторонах  $AC$  и  $BC$  отмечены точки  $K$  и  $L$  соответственно так, что  $AK = BH$  и  $BL = AH$ ,  $M$  — середина отрезка  $KL$ .

Докажите, что угол  $\angle AMB$  – прямой.

## Экстремальные графы

19 июля

1. (а) Найдите максимальное количество рёбер в несвязном графе на  $n$  вершинах.
- (б) Найдите максимальное количество рёбер в несвязном графе на  $n$  вершинах, имеющего не менее  $k$  компонент связности.
2. Назовём свойство графа *наследственным*, если оно выполняется для всех его подграфов. Пусть  $P(n)$  – наибольшее количество рёбер в графе с  $n$  вершинами, обладающем наследственным свойством. Докажите, что  $P(n) \leq \frac{n}{n-2}P(n-1)$ .
3. (а) На планете существует 100 государств, и какие бы три из них не взять, среди них найдутся два, имеющие дипломатические отношения. Какое минимальное число посольств на планете?
- (б) Найдите максимальное число рёбер у графа на 30 вершинах, у которого нет полного подграфа на трёх вершинах.
- (в) Докажите, что если в графе на  $2n$  вершинах не менее  $n^2 + 1$  рёбер, то в нём есть треугольник.
- (г) Найдите максимальное число рёбер у графа на 30 вершинах, у которого нет полного подграфа на четырёх вершинах.
4. За круглым столом сидят  $2n$  человек. Разрешается любых двух людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?
5. (а) В графе на  $n$  вершинах любые два нечетных цикла не имеют общих рёбер. Найдите максимальное количество рёбер в таком графе.
- (б) Найдите максимальное количество рёбер в графе, если в нём  $n$  вершин и нет циклов четной длины.

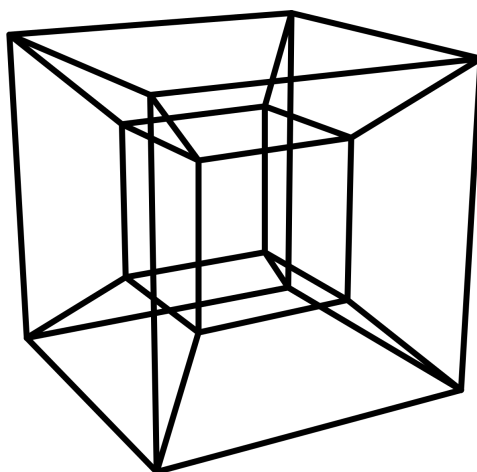
## Лемма Не-Бернсайда

19 июля

1. Пусть  $p$  — простое число. Разобьём круг на  $p$  секторов и будем красить в  $a$  цветов. Будем считать раскраски эквивалентными, если их можно перевести друг в друга поворотом.
- (а) Сколько раскрасок может лежать в одном классе эквивалентности?
- (б) Сделайте отсюда вывод, что  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .
2. Назовём узором раскраску таблицы  $n \times n$  в два цвета. Одной операцией разрешается перекрасить все клетки любых столбцов или строк в противоположные цвета.

- (а) Докажите, что если применить все  $2^{2^n}$  операций к одному и тому же узору, то полученные таким образом узоры будут встречаться ровно по два раза.
- (б) Будем считать узоры одинаковыми, если один можно перевести в другой при помощи одной операции. Сколько существует различных узоров?
3. Для правильного  $n$ -угольника на плоскости рассмотрим множество  $D_n$  всех движений, которые переводят его в себя.
- (а) Рассмотрим вершины  $A$  и  $B$ . Докажите, что среди элементов  $D_n$  существует ровно два движения, которые переводят одну в другую.
- (б) Сколько всего элементов в множестве  $D_n$ ? Верно ли, что любое такое движение можно представить в виде композиции симметрии и поворота?
4. Пусть над элементами некоего множества  $X$  разрешено совершать некоторые действия  $G = \{f : X \rightarrow X\}$ . При этом, выполнены три свойства:
- Тожественное преобразование  $\text{id}_X$  принадлежит  $G$ .
  - Композиция действий из  $G$  также принадлежит  $G$ .
  - Если  $f$  принадлежит  $G$ , то оно обратимо, и обратное  $f^{-1}$  тоже принадлежит  $G$ .
- Назовём *орбитой* элемента  $x \in X$  множество  $Gx = \{f(x) | f \in G\} \subseteq X$ .
- Назовём *стабилизатором* элемента  $x \in X$  множество  $Sx = \{g \in G | g(x) = x\} \subseteq G$ .
- Докажите, что
- (а) Для любого  $y \in Gx$  выполнено  $|Sy| = |Sx|$ . Как следствие,  $|G| = |Gx| \cdot |Sx|$ .
- (б) Обозначим через  $s$  общее число орбит. Докажите, что выполнено равенство
- $$s \cdot |G| = \sum_{g \in G} \text{Fix}(g),$$
- где  $\text{Fix}(g)$  — это число тех элементов  $X$ , которые остаются на месте под действием  $g$ .
5. Сколько существует способов покрасить вершины правильного шестиугольника в  $k$  цветов с точностью до поворота?
6. В квадрате проведена диагональ. Сколько существует способов покрасить пять отрезков (стороны квадрата и диагональ) в  $k$  цветов с точностью до самосовмещения?
7. (а) Сколько всего существует вращений куба, при которых он переходит в себя?
- (б) Посчитайте отдельно число вращений, если ось вращения проходит через две вершины; через середины двух сторон; через центры двух граней.
- (в) Рассмотрим все раскраски граней куба в  $k$  цветов. Для каждого типа вращения подсчитайте, сколько раскрасок переводятся в себя.
- (г) Сколько существует различных (с точностью до вращения) раскрасок граней куба в  $k$  цветов?
- (д) В центре каждой грани куба нарисовали стрелочку  $\uparrow$ ,  $\downarrow$ ,  $\leftarrow$  или  $\rightarrow$ . Сколько (с точностью до вращения) существует таких расстановок?
8. Восемь вершин четырёхмерного гиперкуба расположены в точках с координатами

$(x, y, z, t)$ , где все переменные принимают значения 0 или 1. Рёбра проводятся в том и только том случае, если у вершин различается ровно одна координата. Расстояния в четырёхмерном пространстве вычисляются по аналогии с трёхмерным. Посчитайте, сколько самосовмещений существует у четырёхмерного гиперкуба.



(см. также [en.wikipedia.org/wiki/Tesseract](https://en.wikipedia.org/wiki/Tesseract))

## Красим плоскость

20 июля

- Плоскость покрашена в 2 цвета (оба цвета присутствуют). Докажите, что найдутся
  - две точки одного цвета на расстоянии 1;
  - две точки разного цвета на расстоянии 1;
  - правильный треугольник с одноцветными вершинами;
  - прямоугольный треугольник с одноцветными вершинами;
  - отрезок, середина и концы которого покрашены в один цвет.
- Каждая точка плоскости покрашена в один из  $n$  цветов. Докажите, что найдется прямоугольник с одноцветными вершинами.
- Каждая точка плоскости покрашена в один из  $n$  цветов. Оказалось, что любая прямая проходит через точки не более чем двух цветов. При каком наибольшем  $n$  это возможно?
- Плоскость покрашена в 3 цвета (все цвета присутствуют). Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.
- Назовем *хроматическим числом плоскости*  $\chi(\mathbb{R}^2)$  наименьшее число цветов, в которое плоскость можно покрасить так, чтобы не нашлось двух одноцветных точек на расстоянии 1. Докажите, что **(а)**  $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$  **(б)**  $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ .
- Докажите пункты **(в)** и **(д)** первой задачи при условии, что плоскость покрашена в 3 цвета.

# Задачи для абаки

20 июля

## Алгебра

А8 Упростите выражение  $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}$

А16 Пусть  $x_1$  и  $x_2$  - корни квадратного уравнения  $x^2 - 9x - 3 = 0$ . Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа  $x_1 + \frac{1}{x_1}$  и  $x_2 + \frac{1}{x_2}$ .

А24 Чему может равняться  $x$  если известно, что

$$x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}.$$

А32 Квадратная функция определена выражением  $f(x) = x^2 - 2$ . Сколько действительных корней имеет уравнение  $f(f(f(f(f(x))))) = 0$ ?

А40 Укажите 5 арифметических прогрессий с различными целыми разностями не равными 1, покрывающие натуральный ряд.

## Геометрия

Г8. В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  все внутренние углы равны. Известно, что  $AB = 2$ ,  $CD = 5$ ,  $DE = 7$ ,  $EF = 1$ . Найдите  $BC$  и  $AF$ .

Г16. Через вершину  $B$  параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая, которая делит сторону  $AD$  в отношении  $1 : 5$  считая от вершины  $A$ . В каком отношении она делит диагональ  $AC$ ?

Г24. В треугольник вписана окружность радиуса 2. Одна из точек касания с ней делит соответствующую сторону треугольника на отрезки длины 3 и 10. Найдите периметр треугольника.

Г32. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AB = 3$ ,  $AC = 5$ , а одна из медиан равна 1.

Г40. На катетах с длинами  $a$  и  $b$  прямоугольного треугольника выбираются точки  $P$  и  $Q$  соответственно. Пусть  $K$  и  $H$  - основания перпендикуляров  $PK$  и  $QH$ , опущенных на гипотенузу. Найдите наименьшее возможное значение суммы  $KP + PQ + QH$ .

## Целые числа

Ц48. Найдите наибольшее трехзначное  $n$ , такое что  $\text{НОД}(n, 60) = 6$

Ц416. Найдите все простые  $p$ , для которых число  $2^p + p^2$  также простое.

Ц24. Сколькими способами можно представить число, являющееся произведением  $n$  различных нечетных простых чисел, в виде разности двух квадратов натуральных чисел?

Ц432. Придумайте натуральные числа  $a, b, c, d$ , такие что числа  $a^2 + b^2$ ,  $a^2 + b^2 + c^2$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  - квадраты целых чисел.

Ц440. Даны числа  $1, 2, 3, \dots, 2010$ . Найдите наибольшее  $m$ , обладающее таким свойством: какие бы  $m$  из данных чисел ни вычеркнуть, среди оставшихся чисел найдутся

два, одно из которых делится на другое.

### Комбинаторика

К8. Сколько квадратов можно нарисовать по линиям сетки на доске  $5 \times 5$ ?

К16. В компании  $N$  человек. Каждому из них нравится ровно  $k$  людей из этой компании. При каком наименьшем  $k$  можно утверждать, что обязательно найдутся два человека из этой компании, которые нравятся друг другу?

К24. Двое играют в следующую игру. В клетчатом прямоугольнике  $m$  на  $n$  каждый по очереди вычёркивает все клетки какого-нибудь горизонтального или вертикального ряда, в котором ещё есть невычеркнутые клетки. Выигрывает тот, кто вычёркивает последние клетки. При каких  $m$  и  $n$  выигрывает первый?

К32. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на шахматной доске размерами 8 на 8 так, чтобы в каждом ряду, каждой строке и на каждой диагонали стояла хотя бы одна фишка (диагональ может состоять из одной клетки).

К40. На доске написано 100 нулей, 101 единица и 102 двойки. Разрешается стереть две неравные цифры и вместо них написать одну цифру, отличную от стёртых. Такая операция была проделана столько раз, сколько было возможно. Что могло остаться на доске? (могло остаться несколько чисел)

### Комбинаторная геометрия

КГ8. Разрезать квадрат со стороной 4 клетки на прямоугольники, сумма периметров которых равна 25.

КГ16. Фигура  $F$  имеет две оси симметрии, угол между которыми равен  $46^\circ$ . Какое наименьшее число осей симметрии может иметь  $F$ ?

КГ24. На сторонах треугольника  $ABC$  отметили несколько точек –  $a$  точек на стороне  $BC$ ,  $b$  точек на стороне  $CA$ ,  $c$  точек на стороне  $AB$ . Каждую отмеченную точку соединили с противоположной вершиной, и оказалось что никакие три проведенных чевианы не пересекаются в одной точке. На сколько частей они разбили треугольник  $ABC$ ?

КГ32. Нарисуйте два пятиугольника так, чтобы у них были одни и те же вершины, но не было ни одной общей стороны.

КГ40. Какое наибольшее число точек можно отметить в прямоугольнике  $3 \times 4$ , так что расстояние между любыми двумя из них было больше  $\sqrt{5}$ ?

# Теоретические вопросы к зачёту

22 июля

1. Критерий Карно. Теорема Карно, ортологичные треугольники. Ортопол. Примеры ортологичных треугольников.
2. Формула Эйлера и её следствия. Связь с выпуклыми многогранниками. Двойственный граф. Раскраски многогранника в 2, 4 и 5 цветов.
3. Теорема Хватала. Теорема Фари. Как расставить охранников на плоскости, чтобы видеть всю внешнюю территорию?
4. Сумма двух квадратов по простому модулю, метод разбиения на четвёрки. Исследование случаев  $-1$ ,  $2$ ,  $-2$  при помощи критерия Эйлера. Простых чисел вида  $8k + 3$ ,  $8k + 5$  и  $8k + 7$  бесконечно много.
5. Педальный треугольник, прямая Симсона. Педальные треугольники изогонально сопряжённых точек. Точки Торричелли и Аполлония.
6. Циклы в сильно связном турнире. Задача об инвертировании рёбер одной вершины. Задача о выкидывании рёбер сильно связного графа.
7. Идея усреднения. Задача о числе пар стоящих рядом мальчиков. Рёбра полного графа можно покрасить в два цвета, чтобы одноцветных треугольников было меньше четверти. Для любого  $n > 1000$  существует турнир, в котором среди любых  $2n + 1$  команд найдутся три, по циклу выигравшие друг друга.
8. В каких случаях арифметическая прогрессия содержит в себе геометрическую? Докажите, что если арифметическая прогрессия содержит квадраты трёх первых членов, то она целочисленная.
9. Лемма не-Бернсайда. Доказательство Малой теоремы Ферма. Число способов покрасить куб в  $k$  цветов.
10. Хроматическое число плоскости. Одноцветные конструкции при раскраске плоскости в три цвета.



# Заключительный тест

22 июля

**Определение.** Пусть дан набор значений  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Число  $C$  называется *медианой* этого набора, если половина чисел не больше  $C$ , и половина не меньше  $C$ .

В конце смены детям была предложена следующая задача.

1. (а) Оцените **сложность** занятий по шкале  
от 1 (кенгуру за три балла) ... до 7 (**неподъёмная гробина**);
- (б) Оцените **новизну** занятий по шкале  
от 1 (было на кружке 5 класса) ... до 7 (**передний край науки**).

С медианами получившихся наборов можно ознакомиться в таблице:

Тема	(а)	(б)	Тема	(а)	(б)
1. В поле проходит дорога	4	4,5	15. Конечное в бесконечном	3	4
2. Индуктивные конструкции	3	3	16. Изогональное сопряжение	5	6
3. Критерий Карно	3	5	17. Многочлены	6	4
4. Разнобой-1	3	3	18. Сильно связные турниры	4	3
5. Выпуклые многогранники	4,5	5	19. Вокруг нер-ва треуг-ка	4	2
6. Квадратный трехчлен	4	3	20. Усреднение	3	3
7. Разнобой-2	4	3	21. Задача об инопланетянине	2,5	5
8. Неравенства	4	3	22. Усреднение в графах	4	4
9. Ортологичные треугольники	3	6	23. Арифмет-е прогрессии	4	3
10. Аликвотные дроби	4	3	24. Ещё раз квадраты	4	3,5
11. Найти крайнего	3	2,5	25. Лемма не-Бернсайда	5,5	6,5
12. Невозможные объекты	5	6	26. Экстремальные графы	5	5
13. Как охранять музей	5	5	27. Красим плоскость	4	4
14. Сумма двух квадратов	4,5	4	28. Абака	3	3

Также, мы подсчитали среднее арифметическое всех полученных чисел:

**Сложность: 3,9    Новизна: 3,96**