

Неприводимые многочлены

18 июля

Опр. Ненулевой многочлен с действительными коэффициентами называется неприводимым над \mathbb{R} , если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов степени выше 1.

Теорема. Любой многочлен степени выше двух приводим над \mathbb{R} .

Опр. Ненулевой многочлен с целыми коэффициентами называется неприводимым над \mathbb{Z} , если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами степени выше 1.

I. Разложите многочлен $x^4 + 1$ в произведение неприводимых над \mathbb{R} .

II. Доказать, что многочлен $x^4 - x^2 + 1$ неприводим над \mathbb{Z} .

1. Разложите многочлен в произведение неприводимых над \mathbb{R} . **(а)** $x^4 + 4$; **(б)** $x^4 - 10x^2 + 1$; **(в)** $x^6 + 27$; **(г*)** $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$.

2. Разложите на неприводимые сомножители ненулевой степени с целыми коэффициентами многочлен $x^{12} - 1$.

3. Можно ли следующие многочлены представить в виде произведения многочленов с целыми коэффициентами **(а)** $x^4 + 2$; **(б)** $x^3 + 4x^2 - 3x + 7$; **(в)** $x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

4. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках равен ± 1 . Докажите, что его нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

5. Разложите на неприводимые над \mathbb{Z} множители многочлен $x^{2017} - 3^{2017}$.

6*. Доказать критерий Эйзенштейна. Пусть дан многочлен с целыми коэффициентами

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Если существует простое число p такое что

1) a_n не делится на p

2) $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ делится на p

3) a_0 не делится на p^2

тогда многочлен $f(x)$ неприводим над \mathbb{Z} .

Неприводимые многочлены

18 июля

Опр. Ненулевой многочлен с действительными коэффициентами называется неприводимым над \mathbb{R} , если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов степени выше 1.

Теорема. Любой многочлен степени выше двух приводим над \mathbb{R} .

Опр. Ненулевой многочлен с целыми коэффициентами называется неприводимым над \mathbb{Z} , если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами степени выше 1.

I. Разложите многочлен $x^4 + 1$ в произведение неприводимых над \mathbb{R} .

II. Доказать, что многочлен $x^4 - x^2 + 1$ неприводим над \mathbb{Z} .

1. Разложите многочлен в произведение неприводимых над \mathbb{R} . **(а)** $x^4 + 4$; **(б)** $x^4 - 10x^2 + 1$; **(в)** $x^6 + 27$; **(г*)** $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$.

2. Разложите на неприводимые сомножители ненулевой степени с целыми коэффициентами многочлен $x^{12} - 1$.

3. Можно ли следующие многочлены представить в виде произведения многочленов с целыми коэффициентами **(а)** $x^4 + 2$; **(б)** $x^3 + 4x^2 - 3x + 7$; **(в)** $x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

4. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках равен ± 1 . Докажите, что его нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

5. Разложите на неприводимые над \mathbb{Z} множители многочлен $x^{2017} - 3^{2017}$.

6*. Доказать критерий Эйзенштейна. Пусть дан многочлен с целыми коэффициентами

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Если существует простое число p такое что

1) a_n не делится на p

2) $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ делится на p

3) a_0 не делится на p^2

тогда многочлен $f(x)$ неприводим над \mathbb{Z} .