

Счёт в точках

12 июля

Напоминание. *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются *эквивалентными*, если $ABDC$ — параллелограмм. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами*. Вектора называются *коллинеарными*, если при откладывании от одной точки их общее начало и их концы лежат на одной прямой.

I. Упростите выражение **(а)** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA}$; **(б)** $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DB}$.

II. (*Лемма о перестановке*) Докажите, что $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{BX}$.

Идея. Направленный отрезок можно мыслить как разность точек $\overrightarrow{PQ} = Q - P$. А также можно говорить, что точка Q получается из точки P смещением на вектор \overrightarrow{PQ} или $Q = P + \overrightarrow{PQ}$. Тогда любое выражение из векторов и точек, дающее в результате одну или ноль точек имеет геометрический смысл, определённый однозначно. Доказать это поможет лемма о перестановке: неважно, как разбиты на вектора точки, важно только то, что одни точки — начала, другие — концы.

(Можно считать, что точки — это краткая запись для векторных выражений. Например, : $Q = P + \overrightarrow{PQ} \iff \forall O \in \mathbb{E}_2 \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$.)

Опр. По определению, для коллинеарных векторов \vec{x} и \vec{y} существует число λ такое, что $\vec{x} = \lambda \vec{y}$. Тогда *отношением (со)направленных отрезков* $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{y}$ будем называть то самое λ , т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} = \lambda \vec{y} = \lambda \overrightarrow{CD} \iff \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\vec{x}}{\vec{y}} = \lambda.$$

Опр. *Отношением трёх точек (простым отношением точек)*, лежащих на одной прямой, (AB, X) будем называть величину

$$(AB, X) = \frac{\dot{X} - \dot{A}}{\dot{B} - \dot{X}} = \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}}.$$

Говорят, что X *делит* \overrightarrow{AB} в отношении (AB, X) .

1. Найдите точку для отрезка AB , где $A(-1; 5)$, $B(7; 14)$, делящую его в отношении **(а)** $2:1$; **(б)** $4:-1$.

2. (*Правило рычага*) Если \dot{X} делит \overrightarrow{AB} в отношении $\frac{k}{m}$, то $\dot{X} = \frac{m\dot{A} + k\dot{B}}{k+m}$.

3. **(а)** Пусть M — середина отрезка AB . Докажите, что $\dot{M} = \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{B})$. **(б)** Пусть M и N — середины отрезков AB и CD . Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. **(в)** Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что $\dot{M} = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C})$.

(г) Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\dot{A} + \dot{C} = \dot{B} + \dot{D}$.

4. Найдите точку пересечения **(а)** медиан; **(б)** биссектрис треугольника ABC , где $A(-12; -30)$, $B(44; 12)$, $C(-28; 33)$.

5. Точки M , K , N и L — середины сторон AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL . Докажите, что отрезок $PQ = \frac{1}{4}AE$ и $PQ \parallel AE$.
6. Дано несколько точек и для некоторых пар (A, B) этих точек взяты векторы \overrightarrow{AB} , причем в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$.
7. Пусть E и F — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, точки K , L , M и N — середины отрезков AF , CE , BF и DE . Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.
8. (Параметрическое уравнение прямой) Докажите, что точка Z лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\vec{Z} = t\vec{A} + (1 - t)\vec{B}$ для некоторого t .

Счёт в точках

12 июля

Напоминание. *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются *эквивалентными*, если $ABDC$ — параллелограмм. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами*. Вектора называются *коллинеарными*, если при откладывании от одной точки их общее начало и их концы лежат на одной прямой.

I. Упростите выражение **(а)** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA}$; **(б)** $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DB}$.

II. (*Лемма о перестановке*) Докажите, что $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{BX}$.

Идея. Направленный отрезок можно мыслить как разность точек $\overrightarrow{PQ} = Q - P$. А также можно говорить, что точка Q получается из точки P смещением на вектор \overrightarrow{PQ} или $Q = P + \overrightarrow{PQ}$. Тогда любое выражение из векторов и точек, дающее в результате одну или ноль точек имеет геометрический смысл, определённый однозначно. Доказать это поможет лемма о перестановке: неважно, как разбиты на вектора точки, важно только то, что одни точки — начала, другие — концы.

(Можно считать, что точки — это краткая запись для векторных выражений. Например, : $Q = P + \overrightarrow{PQ} \iff \forall O \in \mathbb{E}_2 \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$.)

Опр. По определению, для коллинеарных векторов \vec{x} и \vec{y} существует число λ такое, что $\vec{x} = \lambda \vec{y}$. Тогда *отношением (со)направленных отрезков* $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{y}$ будем называть то самое λ , т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} = \lambda \vec{y} = \lambda \overrightarrow{CD} \iff \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\vec{x}}{\vec{y}} = \lambda.$$

Опр. *Отношением трёх точек (простым отношением точек)*, лежащих на одной прямой, (AB, X) будем называть величину

$$(AB, X) = \frac{\dot{X} - \dot{A}}{\dot{B} - \dot{X}} = \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}}.$$

Говорят, что X *делит* \overrightarrow{AB} в отношении (AB, X) .

1. Найдите точку для отрезка AB , где $A(-1; 5)$, $B(7; 14)$, делящую его в отношении **(а)** $2:1$; **(б)** $4:-1$.

2. (*Правило рычага*) Если \dot{X} делит \overrightarrow{AB} в отношении $\frac{k}{m}$, то $\dot{X} = \frac{m\dot{A} + k\dot{B}}{k+m}$.

3. **(а)** Пусть M — середина отрезка AB . Докажите, что $\dot{M} = \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{B})$. **(б)** Пусть M и N — середины отрезков AB и CD . Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. **(в)** Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что $\dot{M} = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C})$.

(г) Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\dot{A} + \dot{C} = \dot{B} + \dot{D}$.

4. Найдите точку пересечения **(а)** медиан; **(б)** биссектрис треугольника ABC , где $A(-12; -30)$, $B(44; 12)$, $C(-28; 33)$.

5. Точки M , K , N и L — середины сторон AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL . Докажите, что отрезок $PQ = \frac{1}{4}AE$ и $PQ \parallel AE$.
6. Дано несколько точек и для некоторых пар (A, B) этих точек взяты векторы \overrightarrow{AB} , причем в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$.
7. Пусть E и F — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, точки K , L , M и N — середины отрезков AF , CE , BF и DE . Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.
8. (Параметрическое уравнение прямой) Докажите, что точка Z лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\vec{Z} = t\vec{A} + (1 - t)\vec{B}$ для некоторого t .