

Ортологичные треугольники

7 июля

1. (Теорема Карно) Дан треугольник ABC . Из точек A_1, B_1, C_1 опустили перпендикуляры на прямые BC, AC и AB соответственно. Докажите, что данные перпендикуляры пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + B_1A^2 + C_1B^2.$$

2. На плоскости даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на BC, AC, AB пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из A, B, C на B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 тоже.

Определение. Такие треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называют *ортологичными*. Точки пересечения соответствующих перпендикуляров называют *центрами ортологии*.

3. Из вершин треугольника ABC опустили перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на прямую l . Докажите, что перпендикуляры из A_1 на BC , из B_1 на AC и из C_1 на AB пересекаются в одной точке.

Определение. Она называется *ортополом* l относительно треугольника ABC .

4. Докажите, что треугольник ABC ортологичен

- (а) треугольнику, образованному основаниями высот;
- (б) любому треугольнику с вершинами на прямых, содержащих высоты;
- (в) любому треугольнику с вершинами на срединных перпендикулярах;
- (г) треугольнику, образованному точками касания (вне)вписанной окружности.

5. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров внеписанных окружностей на соответствующие стороны, пересекаются в одной точке.

6. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC . A_2 — основание перпендикуляра из A на B_1C_1 . Точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что перпендикуляры из A_1, B_1, C_1 на B_2C_2, A_2C_2, A_2B_2 пересекаются в одной точке.

7. Около треугольника ABC описана окружность. Прямая, проходящая через вершину A параллельно BC , пересекает эту окружность в точке A_1 . Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1, C_1 опустили перпендикуляры на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

8. В треугольник ABC вписана окружность. Из середины отрезка, соединяющего две точки касания, проводится перпендикуляр к стороне, содержащей третью. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

9. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны. E и F — середины сторон AD и AB . Из этих точек опустили перпендикуляры на стороны BC и CD соответственно. Докажите, что точка их пересечения лежит на прямой AC .

10. Пусть ABC — равносторонний треугольник, P — произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников PAB , PBC и PCA на прямые AB , BC и CA соответственно, пересекаются в одной точке.

Ортологичные треугольники

7 июля

1. (Теорема Карно) Дан треугольник ABC . Из точек A_1, B_1, C_1 опустили перпендикуляры на прямые BC, AC и AB соответственно. Докажите, что данные перпендикуляры пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + B_1A^2 + C_1B^2.$$

2. На плоскости даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на BC, AC, AB пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из A, B, C на B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 тоже.

Определение. Такие треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называют *ортологичными*. Точки пересечения соответствующих перпендикуляров называют *центрами ортологии*.

3. Из вершин треугольника ABC опустили перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на прямую l . Докажите, что перпендикуляры из A_1 на BC , из B_1 на AC и из C_1 на AB пересекаются в одной точке.

Определение. Она называется *ортополом* l относительно треугольника ABC .

4. Докажите, что треугольник ABC ортологичен

- (а) треугольнику, образованному основаниями высот;
- (б) любому треугольнику с вершинами на прямых, содержащих высоты;
- (в) любому треугольнику с вершинами на срединных перпендикулярах;
- (г) треугольнику, образованному точками касания (вне)вписанной окружности.

5. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров внеписанных окружностей на соответствующие стороны, пересекаются в одной точке.

6. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC . A_2 — основание перпендикуляра из A на B_1C_1 . Точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что перпендикуляры из A_1, B_1, C_1 на B_2C_2, A_2C_2, A_2B_2 пересекаются в одной точке.

7. Около треугольника ABC описана окружность. Прямая, проходящая через вершину A параллельно BC , пересекает эту окружность в точке A_1 . Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1, C_1 опустили перпендикуляры на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

8. В треугольник ABC вписана окружность. Из середины отрезка, соединяющего две точки касания, проводится перпендикуляр к стороне, содержащей третью. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

9. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны. E и F — середины сторон AD и AB . Из этих точек опустили перпендикуляры на стороны BC и CD соответственно. Докажите, что точка их пересечения лежит на прямой AC .

10. Пусть ABC — равносторонний треугольник, P — произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников PAB , PBC и PCA на прямые AB , BC и CA соответственно, пересекаются в одной точке.