

Аликвотные дроби

8 июля

1. Можно ли из суммы $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{20}$ вычеркнуть четыре слагаемых так, чтобы значение полученного выражения было целым числом?
2. Верно ли, что для любого k существует число, которое может быть представлено в виде $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, где n и m натуральные, не менее чем k способами?
3. (а) Найдите все натуральные n , при которых сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ равна целому числу. (б) Докажите, что сумма всех чисел вида $\frac{1}{pq}$, где $1 < p < q < 2024$, не является целым числом.
4. Число $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ представили в виде несократимой дроби. Докажите, что если число $3n + 1$ простое, то числитель получившейся дроби делится на $3n + 1$.
5. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2024}$. Петя и Вася играют в игру. Каждый по очереди выбирает из написанных на доске два произвольных числа a и b , стирает их и пишет на доску число $a + b + ab$. После 2023 ходов останется одно число. Петя выигрывает, если оставшееся число будет целым, иначе выигрывает Вася. Кто имеет выигрышную стратегию?
6. Найдите все возрастающие арифметические прогрессии с конечным числом членов, сумма которых равна 1, а каждый член имеет вид $\frac{1}{n}$, где n натуральное.
7. (а) Докажите, что число $\frac{1}{2}$ равно сумме всех дробей вида $\frac{1}{pq}$, где $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$, $\text{НОД}(p, q) = 1$.
(б) Докажите, что любое положительное рациональное число N можно представить в виде суммы различных дробей с числителем 1 и натуральными знаменателями.
8. Петя и Вася по очереди пишут на доску дроби вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное, начинает Петя. Петя за ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход — одну, за второй ход — две, и так каждым следующим ходом на одну дробь больше. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом.
(а) Докажите, что любое число a можно представить в виде суммы k дробей вида $\frac{1}{n}$ конечным числом способов (если вообще можно представить).
(б) Сможет ли Петя помешать ему?

Аликвотные дроби

8 июля

1. Можно ли из суммы $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{20}$ вычеркнуть четыре слагаемых так, чтобы значение полученного выражения было целым числом?
2. Верно ли, что для любого k существует число, которое может быть представлено в виде $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, где n и m натуральные, не менее чем k способами?
3. (а) Найдите все натуральные n , при которых сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ равна целому числу. (б) Докажите, что сумма всех чисел вида $\frac{1}{pq}$, где $1 < p < q < 2024$, не является целым числом.
4. Число $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ представили в виде несократимой дроби. Докажите, что если число $3n + 1$ простое, то числитель получившейся дроби делится на $3n + 1$.
5. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2024}$. Петя и Вася играют в игру. Каждый по очереди выбирает из написанных на доске два произвольных числа a и b , стирает их и пишет на доску число $a + b + ab$. После 2023 ходов останется одно число. Петя выигрывает, если оставшееся число будет целым, иначе выигрывает Вася. Кто имеет выигрышную стратегию?
6. Найдите все возрастающие арифметические прогрессии с конечным числом членов, сумма которых равна 1, а каждый член имеет вид $\frac{1}{n}$, где n натуральное.
7. (а) Докажите, что число $\frac{1}{2}$ равно сумме всех дробей вида $\frac{1}{pq}$, где $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$, $\text{НОД}(p, q) = 1$.
(б) Докажите, что любое положительное рациональное число N можно представить в виде суммы различных дробей с числителем 1 и натуральными знаменателями.
8. Петя и Вася по очереди пишут на доску дроби вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное, начинает Петя. Петя за ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход — одну, за второй ход — две, и так каждым следующим ходом на одну дробь больше. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом.
(а) Докажите, что любое число a можно представить в виде суммы k дробей вида $\frac{1}{n}$ конечным числом способов (если вообще можно представить).
(б) Сможет ли Петя помешать ему?