

Сильно связанные турниры

13 июля

Определение. Ориентированный граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ребро, называется *турниром*.

I. Докажите, что в турнире есть **(а)** вершина, из которой можно добраться до любой другой; **(б)** путь, проходящий по всем вершинам.

Определение. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если от любой вершины до любой другой есть путь, не нарушающий направления стрелок.

1. Докажите, что в сильно связном турнире есть циклический треугольник.
2. Пусть в сильно связном турнире n вершин. Докажите, что при всех $3 \leq k \leq n$ для любой наперёд заданной вершины существует цикл длины k , проходящий через неё.
3. Докажите, что циклов длины k в сильно связном турнире на n вершинах не менее $n - k + 1$.
4. Назовем *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух. Докажите, что
 - (а)** В любом турнире найдется царь.
 - (б)** Если в турнире ровно один царь, то он победил всех других участников.
 - (в)** В турнире не может быть ровно двух царей.
5. Докажите, что в турнире с $n \geq 7$ вершинами найдётся вершина, инвертированием всех рёбер в которой можно добиться того, чтобы граф стал сильно связным.
6. Докажите, что в любом сильно связном ориентированном графе на $n \geq 3$ вершинах можно выкинуть несколько стрелок, оставив не более $2n - 3$, так, чтобы граф остался сильно связным.

Сильно связанные турниры

13 июля

Определение. Ориентированный граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ребро, называется *турниром*.

I. Докажите, что в турнире есть **(а)** вершина, из которой можно добраться до любой другой; **(б)** путь, проходящий по всем вершинам.

Определение. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если от любой вершины до любой другой есть путь, не нарушающий направления стрелок.

1. Докажите, что в сильно связном турнире есть циклический треугольник.
2. Пусть в сильно связном турнире n вершин. Докажите, что при всех $3 \leq k \leq n$ для любой наперёд заданной вершины существует цикл длины k , проходящий через неё.
3. Докажите, что циклов длины k в сильно связном турнире на n вершинах не менее $n - k + 1$.
4. Назовем *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух. Докажите, что
 - (а)** В любом турнире найдется царь.
 - (б)** Если в турнире ровно один царь, то он победил всех других участников.
 - (в)** В турнире не может быть ровно двух царей.
5. Докажите, что в турнире с $n \geq 7$ вершинами найдётся вершина, инвертированием всех рёбер в которой можно добиться того, чтобы граф стал сильно связным.
6. Докажите, что в любом сильно связном ориентированном графе на $n \geq 3$ вершинах можно выкинуть несколько стрелок, оставив не более $2n - 3$, так, чтобы граф остался сильно связным.