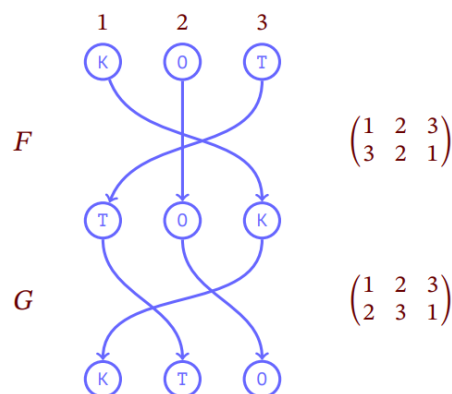


Перестановки

17 июля

Опр. Перестановка чисел $1, \dots, n$ — это взаимнооднозначное отображение s которое переводит число k в число $s(k)$. Перестановка может быть записана следующим образом

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & s(3) & \dots & s(n) \end{pmatrix}.$$



I. На шахматной доске отмечены 16 клеток, так что на каждой горизонтали и каждой вертикали находятся по две отмеченные клетки. Доказать, что из этих клеток можно выбрать 8 так, что расставленные в них ладьи не будут бить друг друга.

II. Двадцать школьников решали 20 задач. Известно, что каждую из задач решили 2 школьника и каждый школьник решил по две задачи. Доказать, что можно так организовать разбор задач, что каждый школьник расскажет по одной задаче и каждая задача будет рассказана ровно один раз.

Опр. Перестановка называется циклической (или просто циклом), если она сдвигает некоторые элементы по кругу, а остальные оставляет неподвижными.

Цикл переставляющий элементы $\{a_1, \dots, a_k\}$ записывается в виде (a_1, a_2, \dots, a_k) (то есть $s(a_k) = a_1$).

Два цикла называются независимыми, если никакой элемент не сдвигается первой и второй перестановкой одновременно.

III. Найти перестановку на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, являющуюся композицией следующих циклов: $(134)(235)$; $(23)(245)$.

1. Покажите, что для любых трех перестановок $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$. То есть операция композиции перестановок ассоциативна.

2. Записать в виде композиции независимых циклов следующие перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Доказать, что любая перестановка есть композиция независимых циклов.

4. (а) По кругу расположено 2024 карточек. Автомат умеет менять местами любые две карточки. Можно ли сдвинуть все карточки по кругу, используя автомат многократно?

(б) Можно ли сделать то же самое с помощью суперавтомата, который не умеет сразу менять местами любые две карточки, но умеет менять местами две соседние?

5. (а) Доказать, что любой цикл есть композиция циклов длины два. (Такие циклы называются транспозициями.) **(б)** Докажите то же про произвольную перестановку.

(в) Транспозиция называется элементарной, если она меняет местами два соседних

числа. (Т.е. имеет вид $(i, i + 1)$). Доказать, что любую перестановку можно разложить в композицию элементарных транспозиций.

IV. На книжной полке в библиотеке стоит собрание сочинений, состоящее из 2024 томов. В библиотеке работает комиссия. Если она обнаруживает пару томов на полке, расположенную так, что том с меньшим номером из этой пары стоит раньше тома с большим номером, то за каждую такую пару библиотекарь получает выговор.

(а) Сколько выговоров получит библиотекарь, если все тома будут расположены в обратном порядке?

(б) При некоторой расстановке книг библиотекарь получил некоторое количество выговоров. Можно ли так переставить две книги, чтобы число выговоров увеличилось на 100?

(в) Библиотекарю удалось расставить два экземпляра этого собрания сочинений в правильном порядке. В библиотеку забрались два хулигана. Каждый из них каждую секунду переставляет какие-нибудь две книги на своей полке. Может ли оказаться так, что у первого из них через 100 секунд книги будут расставлены точно так же, как у второго через 99 секунд?

(г) Доказать, что книги можно расставить так, что библиотекарь получит ровно миллион выговоров.

Опр. Пусть дана некоторая перестановка на множестве чисел $1, 2, \dots, n$. Пара чисел (i, j) называется инверсией данной перестановки, если большее из этих чисел расположено в перестановке раньше меньшего. Перестановка называется чётной (нечётной), если чётно (нечётно) число её инверсий.

6. Найти чётность: **(а)** перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; **(б)** произвольной транспозиции.

7. Доказать, что при умножении произвольной перестановки на транспозицию чётность перестановки изменится.

8. Найти чётность цикла: **(а)** длины 3; **(б)** длины 4; **(в)** произвольной длины n .

9. Доказать, что композиция перестановок одинаковой чётности есть чётная перестановка, а композиция перестановок разной чётности — нечетная.

10. Сформулировать определение группы перестановок по аналогии с группой движений. Доказать, что все чётные перестановки образуют группу, а все нечётные не образуют.

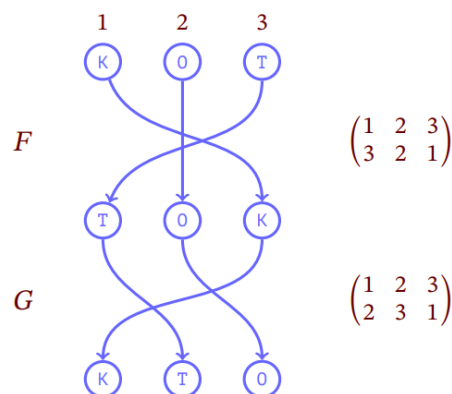
11. В городе Урюпинске разрешены только тройные обмены квартир. Может ли в результате нескольких обменов получиться так, что семья Ивановых поменяется квартирами с семьёй Петровых, а все остальные жители останутся при своих квартирах?

Перестановки

17 июля

Опр. Перестановка чисел $1, \dots, n$ — это взаимнооднозначное отображение s которое переводит число k в число $s(k)$. Перестановка может быть записана следующим образом

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & s(3) & \dots & s(n) \end{pmatrix}.$$



I. На шахматной доске отмечены 16 клеток, так что на каждой горизонтали и каждой вертикали находятся по две отмеченные клетки. Доказать, что из этих клеток можно выбрать 8 так, что расставленные в них ладьи не будут бить друг друга.

II. Двадцать школьников решали 20 задач. Известно, что каждую из задач решили 2 школьника и каждый школьник решил по две задачи. Доказать, что можно так организовать разбор задач, что каждый школьник расскажет по одной задаче и каждая задача будет рассказана ровно один раз.

Опр. Перестановка называется циклической (или просто циклом), если она сдвигает некоторые элементы по кругу, а остальные оставляет неподвижными.

Цикл переставляющий элементы $\{a_1, \dots, a_k\}$ записывается в виде (a_1, a_2, \dots, a_k) (то есть $s(a_k) = a_1$).

Два цикла называются независимыми, если никакой элемент не сдвигается первой и второй перестановкой одновременно.

III. Найти перестановку на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, являющуюся композицией следующих циклов: $(134)(235)$; $(23)(245)$.

1. Покажите, что для любых трех перестановок $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$. То есть операция композиции перестановок ассоциативна.

2. Записать в виде композиции независимых циклов следующие перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Доказать, что любая перестановка есть композиция независимых циклов.

4. (а) По кругу расположено 2024 карточек. Автомат умеет менять местами любые две карточки. Можно ли сдвинуть все карточки по кругу, используя автомат многократно?

(б) Можно ли сделать то же самое с помощью суперавтомата, который не умеет сразу менять местами любые две карточки, но умеет менять местами две соседние?

5. (а) Доказать, что любой цикл есть композиция циклов длины два. (Такие циклы называются транспозициями.) **(б)** Докажите то же про произвольную перестановку.

(в) Транспозиция называется элементарной, если она меняет местами два соседних

числа. (Т.е. имеет вид $(i, i + 1)$). Доказать, что любую перестановку можно разложить в композицию элементарных транспозиций.

IV. На книжной полке в библиотеке стоит собрание сочинений, состоящее из 2024 томов. В библиотеке работает комиссия. Если она обнаруживает пару томов на полке, расположенную так, что том с меньшим номером из этой пары стоит раньше тома с большим номером, то за каждую такую пару библиотекарь получает выговор.

(а) Сколько выговоров получит библиотекарь, если все тома будут расположены в обратном порядке?

(б) При некоторой расстановке книг библиотекарь получил некоторое количество выговоров. Можно ли так переставить две книги, чтобы число выговоров увеличилось на 100?

(в) Библиотекарю удалось расставить два экземпляра этого собрания сочинений в правильном порядке. В библиотеку забрались два хулигана. Каждый из них каждую секунду переставляет какие-нибудь две книги на своей полке. Может ли оказаться так, что у первого из них через 100 секунд книги будут расставлены точно так же, как у второго через 99 секунд?

(г) Доказать, что книги можно расставить так, что библиотекарь получит ровно миллион выговоров.

Опр. Пусть дана некоторая перестановка на множестве чисел $1, 2, \dots, n$. Пара чисел (i, j) называется инверсией данной перестановки, если большее из этих чисел расположено в перестановке раньше меньшего. Перестановка называется чётной (нечётной), если чётно (нечётно) число её инверсий.

6. Найти чётность: **(а)** перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; **(б)** произвольной транспозиции.

7. Доказать, что при умножении произвольной перестановки на транспозицию чётность перестановки изменится.

8. Найти чётность цикла: **(а)** длины 3; **(б)** длины 4; **(в)** произвольной длины n .

9. Доказать, что композиция перестановок одинаковой чётности есть чётная перестановка, а композиция перестановок разной чётности — нечетная.

10. Сформулировать определение группы перестановок по аналогии с группой движений. Доказать, что все чётные перестановки образуют группу, а все нечётные не образуют.

11. В городе Урюпинске разрешены только тройные обмены квартир. Может ли в результате нескольких обменов получиться так, что семья Ивановых поменяется квартирами с семьёй Петровых, а все остальные жители останутся при своих квартирах?