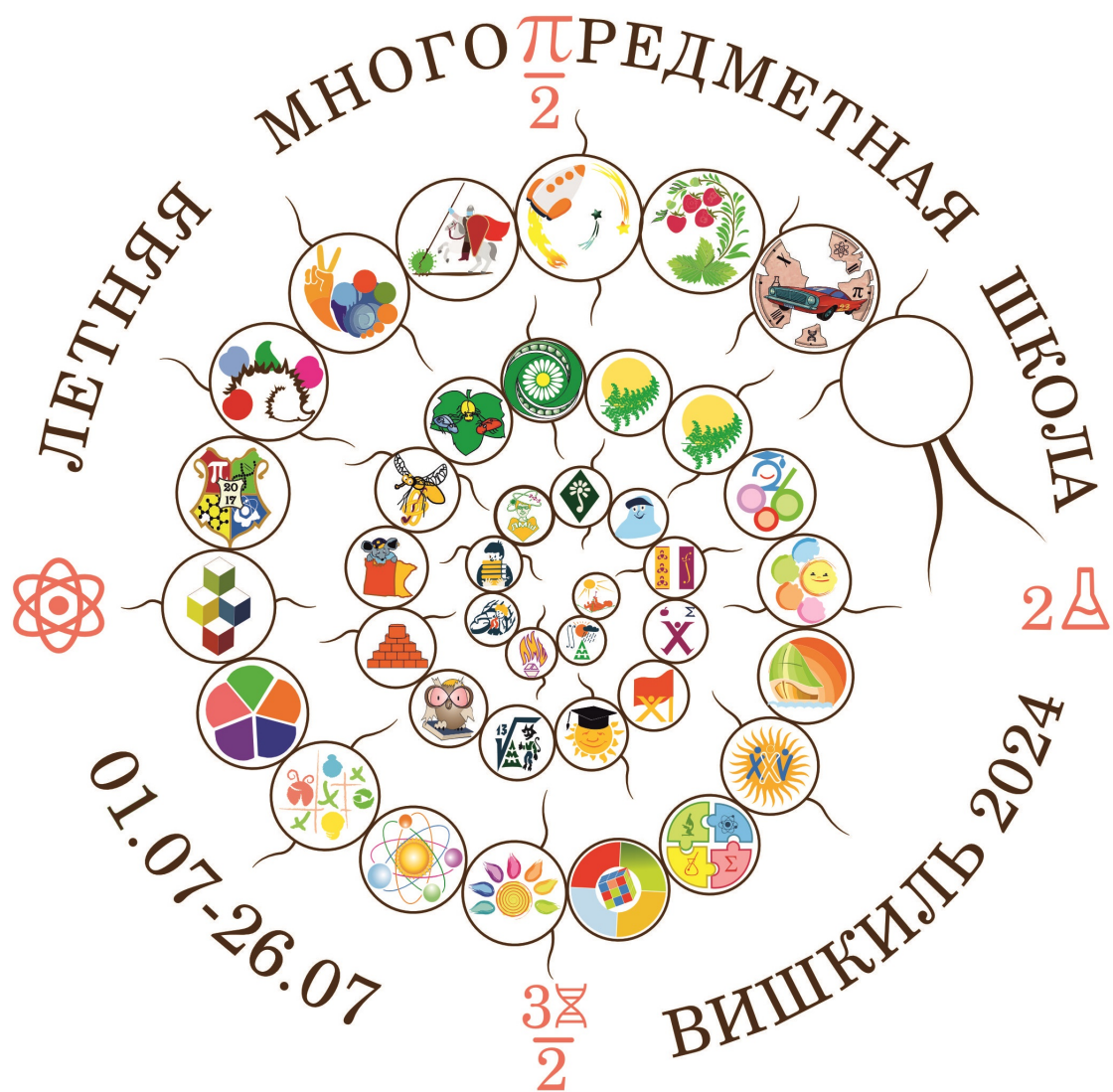


XL Летняя Многопредметная Школа. Вишкиль. 1–26 июля 2024 года. 8 класс



8 класс. Обычная группа

Учебные материалы

Преподаватели:

Задворнов В.

Казанцева А.В.

Ленюк С.В.

Мещеряков Е.А.

Накипов Н.Н.

Рыжая О.А.

Содержание

| | | |
|----|----------------------------------|----|
| 1 | Вступительный тест М8 | 1 |
| 2 | В поле проходит прямая дорога | 1 |
| 3 | Вступительная олимпиада | 2 |
| 4 | Многочлены | 3 |
| 5 | Принцип Карно | 3 |
| 6 | Индуктивные конструкции | 4 |
| 7 | Транс-неравенство | 5 |
| 8 | Подобие | 6 |
| 9 | Дробные вычеты | 8 |
| 10 | Движения | 9 |
| 11 | Теорема Безу | 10 |
| 12 | Функция Эйлера | 11 |
| 13 | Формула включений-исключений | 12 |
| 14 | Квадратный трёхчлен. Задачи | 13 |
| 15 | Метод Штурма | 15 |
| 16 | Симметрические многочлены | 16 |
| 17 | Теорема Шаля | 18 |
| 18 | Матбой обычных групп | 19 |
| 19 | Счёт в точках | 20 |
| 20 | Неравенство КБШ | 21 |
| 21 | Геометрия масс | 22 |
| 22 | Числа Каталана | 24 |
| 23 | Облики чисел Каталана | 25 |
| 24 | Планарные графы | 26 |
| 25 | Матбой Обычные М8 – Обычные М7 | 28 |
| 26 | Матбой Обычные М8 – Полупрофи М7 | 28 |
| 27 | Перестановки | 29 |

| | | |
|----|---|----|
| 28 | Массовый разнобой | 31 |
| 29 | Неприводимые многочлены | 32 |
| 30 | Гомотетия | 33 |
| 31 | Комбигеометрия | 34 |
| 32 | Поворот | 35 |
| 33 | Изогонали и их частные случаи | 36 |
| 34 | Заключительная олимпиада | 37 |

Вступительный тест М8

1 июля

1. Напишите формулу Эйлера для планарного графа на плоскости.
2. Сформулируйте определение функции Эйлера. Укажите значение функции Эйлера для $n = 100$.
3. Что такое степень точки? Как определяется радикальная ось двух окружностей? Радикальный центр трёх окружностей?
4. Через точку внутри треугольника провели три прямых параллельных сторонам. Известно, что площади получившихся треугольников равны 9, 25 и 49. Найдите площадь исходного треугольника.
5. В группе 10 мальчиков и 7 девочек. Сколькими способами можно из них выбрать команду из 6 человек, в которой поровну мальчиков и девочек?
6. Дана функция $y = x^2 - 8x + 23$ найдите ее наименьшее значение и укажите при каком значении аргумента оно достигается.
7. Найдите остаток от деления числа 2027^{2024} на 23.
8. Что больше $C_{3n}^0 + C_{3n}^3 + C_{3n}^6 + \dots + C_{3n}^{3n}$ или 2^{3n-2} и почему?
9. Найдите остаток от деления многочлена $x^{2024} + x^{2022} - 2$ на $x^2 - 1$.
10. В треугольнике ABC провели прямую, симметричную медиане AM относительно биссектрисы угла A. Выразите отношение, в котором она делит отрезок BC, через стороны треугольника.
11. Докажите, что для положительных чисел a, b, c верно неравенство $\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \leq \frac{a+b+c}{2}$.
12. Постройте четырёхугольник ABCD, у которого диагональ AC является биссектрисой угла A, зная длины его сторон.
13. Дан правильный 2025-угольник $A_1A_2\dots A_{2025}$ и O — его центр. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2025}}$ равна $\vec{0}$.
14. Докажите неравенство $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 \geq a^3b + b^3c + c^3e + d^3a + e^3d$.
15. Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ имеет целые корни. Числа a, b, c — целые, причем c нечётно. Может ли число $P(2023)$ быть нечётным?

В поле проходит прямая дорога

2 июля

1. В поле проходит прямая дорога, а по ней со скоростью 10 км/ч едет велосипедист. Укажите все точки поля, с которых можно догнать велосипедиста, если **(а)** бежать с той же скоростью; **(б)** идти со скоростью 5 км/ч.
2. На дороге находится автобусная остановка, где стоит дедушка. По полю он может идти со скоростью не более 3 км/ч, а по дороге — не более 6 км/ч. Нарисуйте все точки поля, до которых он может дойти за 1 час.

3. В 5 км от дороги располагается избушка лесника. От избушки до автобусной остановки ровно 13 км. Лесник ходит по полю со скоростью 3 км/ч, а по дороге — 5 км/ч. Может ли он попасть на остановку за 3 часа 44 минуты?
4. Лес представляет собой фигуру площади 25 км^2 , окружённую полем и не имеющую внутренних пустых областей. Путник потерялся в лесу и не знает его формы. Как ему выйти из леса, пройдя не более $10\sqrt{\pi}$ км?
5. Неподалёку от леса есть берёзовая роща в форме круга с радиусом 1 км. Найдите минимальную длину пути, который нужно было бы пройти, чтобы гарантированно выбраться из рощи.
6. Вы находитесь в поле на расстоянии 1 км от прямой дороги, но не знаете, в какой она стороне. Как выйти на дорогу, пройдя не более (а) 7,3; (б) 6,72; (в) 6,4 км?

Вступительная олимпиада

2 июля

1. У квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ все коэффициенты различны и отличны от нуля. Оказалось, что трёхчлен $bx^2 + cx + a$ имеет тот же дискриминант. Докажите, что исходный трёхчлен имеет хотя бы один корень, меньший 1.
2. Сколько существует способов выбрать несколько чисел от 1 до 49, чтобы их произведение было точным квадратом (то есть квадратом целого числа)?
3. Прямоугольник разрезали на полоски $1 \times n$. Докажите, что количество либо горизонтальных, либо вертикальных полосок делится на n .
4. В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок $BD = 2AB$. Найдите угол BDC .
5. Король решил устроить тест своему придворному мудрецу. Мудрецу нужно написать на доске 10-значное число, после чего король назовёт какое-нибудь своё натуральное число от 1 до 100. Если мудрец сможет поставить знаки $+$, $-$, \times (но без скобок) между некоторыми цифрами числа на доске так, чтобы результат был равен числу короля, то он пройдёт тест. Какое число может написать мудрец, чтобы гарантированно справиться с заданием короля?

Многочлены

3 июля

I. Используя теорему Виета, угадайте корни квадратных уравнений:

(а) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

(б) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;

(в) $x^2 - (2a + 4)x + a^2 + 4a = 0$.

II. Не вычисляя корней уравнения $3x^2 + 4x - 1 = 0$, найти $x_1^2 + x_2^2$, $x_2^3x_1 + x_1^3x_2$, $x_2^3 + x_1^3$.

III. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x - 3 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого будут являться числа:

(а) $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$;

(б) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$;

(в) $x_1x_2^2$ и $x_2x_1^2$;

(г) $\frac{x_1}{x_2} + 1$ и $\frac{x_2}{x_1} + 1$.

1. Выразите дискриминант квадратного трехчлена через его корни.

2. Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, а p и q — простые числа. Найдите p и q .

3. Пусть изображён график функции $y = x^2 + ax + b$. Точки A и C — точки пересечения графика с осью OX , причем A левее C , B — точка пересечения графика с осью OY . Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC , где O — начало координат.

4. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $\frac{1}{a}$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

5. Дан график функции $y = ax^2$. Прямая пересекает её в точках с абсциссами x_1 и x_2 , а саму ось абсцисс в точке с координатой x_3 . Докажите, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.

6. Сто последовательных чётных чисел взяли в качестве коэффициентов a_k и b_k в 50 квадратных уравнениях вида $x^2 + a_kx + b_k = 0$. Могут ли все эти уравнения иметь целые корни?

7. Про действительные числа a , b , c известно, что $c(a + b + c) < 0$. Докажите, что $b^2 - 4ac > 0$.

Принцип Карно

3 июля

I. Дан отрезок AB и вещественное число c . (а) Сколько на прямой AB точек X , таких что $AX^2 - BX^2 = c$? (б) Докажите, что ГМТ всех точек плоскости, удовлетворяющих этому равенству, представляет собой прямую, перпендикулярную AB .

II. (Принцип Карно) На плоскости даны точки A, B, C и D . Докажите, что AB перпендикулярно CD тогда и только тогда, когда $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$ или $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

1. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$, а углы A и C — прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.
2. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P . Точки A_1 и C_1 — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A_1 на CP , пересекается с перпендикуляром, опущенным из C_1 на AP , в точке K . Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C .
3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AB = CB$ и $AD = DC$. Точки K, L, M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC , пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD , в точке H . Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.
4. Дан треугольник ABC . Постройте отрезок, который разобьёт его на два треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.
5. (Критерий Карно) **(а)** Пусть из точки M опущены перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на стороны BC, AC, AB соответственно, докажите, что $A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$.
(б) Докажите, что если $A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$, то перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, AC, AB соответственно, пересекаются в одной точке.
6. Применение критерия Карно в известных ситуациях:
(а) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
(б) Три окружности попарно пересекаются. Докажите, что общие хорды (или их продолжения) пар этих окружностей пересекаются в одной точке.
(в) Продолжения радиусов вневписанных окружностей, проведенных в точки касания с соответствующими сторонами треугольника, пересекаются в одной точке.
7. Если перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, AC, AB соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.
8. К каждой стороне треугольника провели перпендикуляр в точке касания данной стороны с вневписанной окружностью. Докажите, что три этих перпендикуляра пересекаются в одной точке.

Индуктивные конструкции

4 июля

I. Разрежьте квадрат на:

- (а)** 4 меньших квадрата (не обязательно одинаковых);
- (б)** на 7 квадратов;
- (в)** на 6 квадратов;

(г) на 8 квадратов;

(д) На любое число квадратов, большее пяти.

II. (а) Придумайте 3 различных натуральных числа таких, чтобы каждое было делителем суммы всех остальных;

(б) 4 числа; (в) 10 чисел.

III. Докажите, что число 1 можно представить в виде суммы 2024 дробей, числители равны 1, а знаменатели — различные натуральные числа.

1. В мастерской изготавливают квадратные решётки, состоящие из квадратных ячеек со стороной 1. Для этого используют заготовки, состоящие из трёх стержней длиной 1, сваренных под прямым углом в виде буквы П. При изготовлении решётки запрещается накладывать стержни друг на друга; можно лишь сваривать их между собой в точках касания. Изготовьте квадратную решётку размером

(а) 2×2 ; (б) 3×3 ; (в) 5×5 ; (г) 9×9 .

2. Если на доске записано число A , к нему можно прибавить любой его собственный делитель (отличный от 1 и самого A) и заменить число на получившуюся сумму. Докажите, что из $A = 4$ можно получить любое составное число.

3. При каких натуральных n числа от 1 до n можно разбить на несколько групп, в каждой из которых одно число, умноженное на 2, равно сумме остальных?

4. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку доски 8×8 , после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. В начале маляр стоит на угловой клетке доски, где все клетки белые. Покажите, как маляру перекрасить только одну произвольную клетку. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

5. В компании из n человек ($n > 4$) каждый узнал по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Как за $2n - 4$ звонка все смогут узнать все новости?

6. Восемь человек делят пирог. Каждый хочет получить не меньше $\frac{1}{8}$ от всего пирога, однако у каждого может быть своё представление о ценности той или иной части этого пирога. Как им организовать делёж, чтобы каждый был доволен своей долей?

Транс-неравенство

4 июля

I. Пусть $a \geq d$, $a \geq b \geq c$. Тогда $(a + b)(c + d) \leq (a + c)(b + d)$ и $ac + bd \leq ab + cd$.

II. Докажите, что при $a, b, c \geq 1$ справедливо неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq abc + \frac{1}{abc} + 1.$$

III. Докажите по индукции транснеравенство:

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Пусть c_1, c_2, \dots, c_n — некоторая

перестановка чисел b_1, b_2, \dots, b_n . Тогда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

1. Пусть $a \geq b \geq c > 0$. Упорядочите наборы чисел по убыванию:

$$\{a^3, b^3, c^3\}, \left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}, \{a^2 b^2, b^2 c^2, c^2 a^2\}, \left\{\frac{b}{ac}, \frac{c}{ab}, \frac{a}{bc}\right\}.$$

2. Докажите неравенство из вступительного теста:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 \geq a^3 b + b^3 c + c^3 e + d^3 a + e^3 d.$$

3. (а) $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$ при $a_i > 0$; (б) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$.

4. Докажите, что для $a, b, c \geq 1$

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

5. Для $a, b, c \geq 1$ докажите, что

$$a + b + c \leq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

6. Для $a, b, c > 1$ докажите неравенство

$$\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ca}{a+b} \geq 3.$$

7. c_1, c_2, \dots, c_n — различные натуральные числа. Докажите, что

$$c_1 + \frac{c_2}{4} + \dots + \frac{c_n}{n^2} > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

8. (Неравенство Чебышёва) Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Докажите:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

Подобие

5 июля

I. (а) Докажите, что в подобных треугольниках медианы, высоты и биссектрисы проведённые к пропорциональным сторонам, относятся как коэффициент подобия.

(б) В подобных треугольниках площади относятся как квадраты коэффициентов подобия.

Опр. Преобразование плоскости называют подобием с коэффициентом k , если после преобразования все расстояния увеличиваются в k раз.

- II.** Докажите, что преобразование подобия сохраняет углы, в частности, сохраняет свойство прямых быть параллельными.
- III.** Докажите, что если существует преобразование подобия переводящее один треугольник в другой, то треугольники подобны. Верно ли обратное?
- IV.** Дайте определение подобных четырёхугольников. И определение подобия произвольных фигур.
- 1.** Докажите, что середины оснований и точка пересечения диагоналей трапеции лежат на одной прямой.
- 2.** Площадь трапеции равна 9, а одно из её оснований в 1,5 раза больше другого. Найдите площадь частей, на которые диагонали разбивают трапецию.
- 3.** Верно ли утверждение: "Если две стороны и три угла одного треугольника равны двум сторонам и трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны"?
- 4.** Отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника, причём коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$. Найдите углы треугольника ABC .
- 5.** Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH , а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что треугольники MNC и ABC подобны.
- 6.** В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K , причём $AK : BK = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L , причём $CL : BL = 2 : 1$. Пусть Q – точка пересечения прямых AL и CK . Найдите площадь треугольника ABC , если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.
- 7.** Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.
- 8.** На сторонах BC и AD четырёхугольника $ABCD$ взяты точки M и N так, что $BM : MC = AN : ND = AB : CD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке O . Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла AOD .
- 9.** На стороны BC и CD параллелограмма $ABCD$ (или на их продолжения) опущены перпендикуляры AM и AN . Докажите, что $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.
- 10.** Медиана BK и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке P . Докажите равенство $\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1$.
- 11.** Какие четырёхугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырёхугольника?
- 12.** [Задача о бабочке] Через середину S произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезок KN пересекает AB в точке P . Отрезок LM пересекает AB в точке Q . Докажите, что $PS = QS$.

Дробные вычеты

5 июля

Опр. Через \mathbb{Z}_n будем обозначать систему вычетов по модулю n .

I. Для простого p сравнение $b x \equiv a \pmod{p}$ имеет решение, и при том единственное.

II. Для какого-нибудь составного n приведите пример сравнение, которое **(а)** не имеет решения; **(б)** имеет единственное решение; **(в)** имеет несколько решений.

Опр. Обратным вычетом x^{-1} к вычету x по модулю n называется такой вычет y , что $xy \equiv 1 \pmod{n}$.

Фокус. Давайте решение x (если оно есть) сравнения $b x \equiv a \pmod{n}$ записывать как $b^{-1}a$ или $\frac{a}{b}$, что удобнее. Теперь хорошо было бы доказать, что вычеты, записанные в виде дробей действительно ведут себя как дроби.

III. Докажите, что если $x \equiv \frac{a}{b}$, а $y \equiv \frac{c}{d} \pmod{p}$, то **(а)** $x * y \equiv \frac{ac}{bd}$; **(б)** $x : y \equiv \frac{ad}{bc}$;

(в) $x + y \equiv \frac{ad + bc}{bd}$; **(г)** $x - y \equiv \frac{ad - bc}{bd}$.

1. **(а)** Определите, какому классу вычетов принадлежит $\frac{3}{4}$ по модулю 7. **(б)** Целое число a таково, что $a^{52} \equiv 36 \pmod{73}$ и $a^{53} \equiv 59 \pmod{73}$. Какой остаток дает число a при делении на 73? **(в)** Какой остаток дает $92!$ при делении на 97?

2. Докажите, что если $3 \neq p \in \mathbb{P}$ и $\exists a \in \mathbb{Z} : a^2 + 9 \vdots p$, то $\exists c \in \mathbb{Z} : c^2 + 1 \vdots p$.

3. Натуральные числа a и b таковы, что число $a^{2022} + 1$ делится на $ab + 1$. Докажите, что число $b^{2022} + 1$ тоже делится на $ab + 1$.

4. (Теорема Вильсона) $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

5. (Теорема Эйлера) Пусть $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое число, что $\text{НОД}(n, k) = 1$. Обозначим за $\varphi(n)$ количество этих чисел. Докажите, что $k^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

6. Пусть p — простое число. Найдите остаток от деления числа C_{2p}^p на p .

7. Докажите, что при простом $p > 2$ числитель дроби

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$$

после приведения делится на p .

8. Даны натуральные числа a , b и c такие, что $ab + 9b + 81$ и $bc + 9c + 81$ делятся на 101. Докажите, что тогда и $ca + 9a + 81$ тоже делится на 101.

9. Для простого числа p и натурального $k > p$ докажите, что $C_k^p \equiv \left[\frac{k}{p} \right] \pmod{p}$.

10. Докажите, что для любого простого числа p существует натуральное число n такое, что $2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 \pmod{p}$.

11. Дано простое p . Докажите, что существует такая перестановка (a_1, a_2, \dots, a_p) чисел $1, 2, 3, \dots, p$, что числа $a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \dots, a_1 a_2 \dots a_p$ дают разные остатки при делении на p .

Движения

7 июля

Опр. Движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

I. Докажите, что при движении отрезок переходит в отрезок, прямая в прямую, треугольник в равный себе треугольник, угол в равный себе угол.

Опр. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на такую точку M' , что $\overrightarrow{MM'} = \vec{r}$, называется параллельным переносом $T_{\vec{r}}$ на заданный вектор \vec{r} .

Опр. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на симметричную ей точку M' относительно прямой l , называется осевой симметрией S_l .

Опр. Поворотом вокруг точки O на ориентированный угол α называется преобразование плоскости R_O^α , которое каждую точку M отображает на такую точку M' , что $OM = OM'$ и $\angle MOM' = \alpha$.

Опр. Центральной симметрией относительно точки O называется преобразование плоскости Z_O , которое переводит точку M в такую точку M' , что O — середина отрезка MM' (поворот на 180°).

II. Выразите через стороны трапеции длину отрезка, соединяющего середины оснований.

III. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1 , а серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1 . Докажите, что прямая B_1C_1 касается вписанной окружности треугольника ABC .

IV. Через центр правильного треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен 60° . Докажите, что отрезки этих прямых, являющиеся их пересечением с треугольником, равны.

1. Правильные треугольники ABC и BDE лежат в одной полуплоскости прямой ABD . Точки F и G — середины отрезков AE и CD . Докажите, что $\triangle BFG$ — правильный.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены соответственно квадраты $ABED$ и $BCGF$, причем квадрат $ABED$ и треугольник ABC находятся в разных полуплоскостях от прямой AB , а квадрат $BCFG$ — в одной полуплоскости с этим треугольником относительно прямой BC . Докажите, что отрезки EG и AC равны и перпендикулярны.

3. Внутри угла с вершиной O дана точка M . Постройте прямую OM циркулем и линейкой, не используя точку O .

4. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

5. Даны две концентрические окружности. Постройте с помощью циркуля и линейки квадрат так, чтобы две его смежные вершины лежали на одной окружности, а две другие на другой.

6. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону от него построены правильные треугольники ABC_1 , AB_1C и A_1BC . Докажите, что

(а) $AA_1 = BB_1 = CC_1$;

(б) меньший угол между AA_1 и BB_1 равен 60° ;

(в) AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке T_1 (первая точка Торичелли);

(г) Докажите аналогичное утверждение для внутреннего построения правильных треугольников (вторая точка Торичелли).

Теорема Безу

7 июля

Опр. Многочленом называется функция вида $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, причем $a_n \neq 0$.

Число n называется степенью многочлена — $\deg P$. Числа a_n, \dots, a_0 — коэффициенты многочлена.

I. Докажите, что многочлены можно складывать, вычитать и умножать, при этом получаются снова многочлены. Как ведут себя степени при таких операциях?

II. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(x)$ не равен нулю тождественно. Докажите, что существуют единственные многочлены $T(x)$ и $R(x)$ такие, что $P(x) = Q(x)T(x) + R(x)$, и $\deg R(x) < \deg Q(x)$.

III. (Теорема Безу) Докажите, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x - c$ равен $P(c)$.

1. Докажите, что многочлен степени n имеет не более чем n корней.

2. Разделите многочлены с остатком:

(а) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 1$ на $x^2 + x + 1$; **(б)** $2x^3 + 2x^2 + x + 6$ на $x^2 + 2x + 1$; **(в)** $x^4 + 1$ на $x^5 + 1$; **(г)** $x^n - 1$ на $x - 1$; **(д)** $x^n + 1$ на $x + 1$.

3. Найдите остаток от деления многочлена $P(x) = x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ **(а)** на $x - 1$; **(б)** на $x + 1$; **(в)** на $x^2 - 1$.

4. Многочлен $P(x)$ дает остаток 2 при делении на $x - 1$, и остаток 1 при делении на $x - 2$. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на многочлен $(x - 1)(x - 2)$?

5. При каких a и b многочлен $P(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?

6. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(7) = 11$, а $P(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из его коэффициентов — не целое число.

7. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что при любом целом k число $P(k)$ делится на $Q(k)$. Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$.

8. У многочлена $P(x)$ сумма коэффициентов при чётных степенях равняется сумме коэффициентов при нечётных степенях. Этим же свойством обладает многочлен $Q(x)$. Обязательно ли многочлен $P(x) \cdot Q(x)$ обладает этим свойством?

9. Дан непостоянный многочлен $P(x)$ с положительным старшим коэффициентом. Докажите, что, начиная с некоторого момента, он будет принимать положительные значения. (То есть, найдётся такое $M > 0$, что для всех $x > M$ выполнено $P(x) > 0$).

10. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Оказалось, что $Q(n) \neq 0$ при натуральных n и $P(n)$ делится на $Q(n)$ при всех натуральных n . Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$ как многочлен.

Функция Эйлера

8 июля

Опр. Определение. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество взаимно простых с n натуральных чисел, не превосходящих n .

I. Найдите:

(а) $\varphi(24)$, $\varphi(120)$;

(б) $\varphi(p)$, где p — простое;

(в) $\varphi(p^n)$, где p — простое.

II. Докажите, что при $n > 2$ $\varphi(n)$ чётно.

1. Найдите сумму взаимно простых с n чисел, не превосходящих n .

2. Пусть m, n — взаимно простые натуральные числа. Строки таблицы пронумерованы числами от 0 до $n-1$, а столбцы — от 0 до $m-1$. На пересечении строчки j и столбика i записывается остаток от деления числа $in + jm$ на nm .

(а) Докажите, что все числа в таблице будут различны.

Где в этой таблице числа, взаимно простые с mn ? Докажите мультипликативность функции Эйлера: $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

(б) Докажите представление функции Эйлера:

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{k_1-1} \dots (p_m - 1)p_m^{k_m-1} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right),$$

$$n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}.$$

3. Докажите, что $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$.

4. Найдите все такие x , что:

(а) $\varphi(x) = 24$;

(б) $\varphi(x) = 56$.

5. Найдите все такие x , что:

(а) $\varphi(x) = \frac{x}{2}$;

(б) $\varphi(x) = \frac{x}{3}$;

(в) $\varphi(x) = \frac{x}{7}$.

6. Рассмотрим ряд дробей:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}.$$

Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на их НОД.

(а) Сколько будет дробей со знаменателем d , где d — делитель n ?

(б) Докажите Тождество Эйлера-Гаусса:

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_s) = n,$$

где d_k — все делители числа n .

Формула включений-исключений

8 июля

I. Сколько натуральных чисел от 1 до 10^6 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

II. В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

III. Выведите формулу включений и исключений для 4 множеств.

IV. Внутри фигуры площади 6 расположено 3 многоугольника площадью не менее 3 каждый. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не менее 1.

1. Дан треугольник, на каждой из сторон которого отмечено по 9 точек, делящих сторону на 10 равных отрезков. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках и сторонами, не параллельными сторонам данного?

2. В 8-этажном здании есть лифт, куда набилось 15 человек. Сколькими способами они могут выйти из лифта так, чтобы ни один этаж не был пустым?

3. Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все. Насколько отличается число трудных задач от числа легких?

4. Внутри фигуры площади 4 расположено 7 многоугольников площадью не менее 1 каждый. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не менее $\frac{1}{7}$.

5. Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, в каждом записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.

6. (Формула для функции Эйлера) Дано $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$; где p_i — простые. Найдите $\varphi(n)$ — количество чисел меньших и взаимнопростых с n .
7. На кафтане площадью 1 размещены 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше $\frac{1}{2}$. Докажите, что найдутся
- (а) две заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{3}{20}$;
 - (б) две заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{5}$;
 - (в) три заплаты, площадь общей части которых не меньше $\frac{1}{20}$.
8. В классе 100 учеников, часть из которых нахватала двоек по k предметам. Двойки по каждой группе из не менее, чем двух предметов получили 60 учеников, по каждой группе из не менее, чем 3 — 55, из не менее, чем 4 — 50 и так далее. Посчитайте количество тех, у кого двоек нет. Для каких k задача имеет смысл?

Квадратный трёхчлен. Задачи

8 июля

1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня

$$\frac{x^2 - a(a-1)x - a^3}{\sqrt{3+2x-x^2}} = 0.$$

2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня.

$$a^2 - 4x^2 + 8|x| - 4 = 0.$$

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет ровно четыре различных корня.

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0.$$

4. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение имеет четыре различных корня.

$$|x^2 + a^2 - 6x - 4a| = 2x + 2a.$$

5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет хотя бы два различных решения

$$|a-4| \cdot x^4 - 2ax^2 + |a-30| = 0.$$

6. Найти все действительные значения a , при которых трехчлен

$$(a^2 - 1)x^2 - 2(a-1)x + 1$$

положителен при всех действительных x .

7. Найти все значения a , при которых корни уравнения будут оба положительными

$$(2 + a)x^2 - 2ax + 3a = 0.$$

8. Найти все те значения параметра c , при которых оба корня квадратного уравнения меньше, чем -1

$$x^2 + 4cx + (1 - 2c + 4c^2) = 0.$$

9. При каких значениях a один из корней уравнения больше 1, а другой меньше 1

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0?$$

10. При каких значениях a что корни уравнения различны и оба заключены между -1 и $+1$

$$x^2 + 2x + a = 0$$

11. Установить, при каких значениях m сумма квадратов корней уравнения будет наименьшей

$$x^2 - mx + m - 1 = 0.$$

12. Определить все значения a , при которых уравнения и имеют хотя бы один общий корень

$$x^2 + ax = 1 = 0 \quad x^2 + x + a = 0$$

13. Найти все значения a , при которых из неравенства $ax * 2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$.

14. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня.

$$a^2 - 9x^2 + 18|x| - 9 = 0.$$

15. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение имеет четыре различных корня.

$$|x^2 + a^2 - 7x - 5a| = x + a.$$

16. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет хотя бы два различных решения

$$|a - 2| \cdot x^4 - 2ax^2 + |a - 12| = 0.$$

17. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2 , его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2 .

18. Приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами в трёх последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере ещё в одной целой точке.

19. Найдите все такие функции $f(x)$, что $f(2x + 1) = 4x^2 + 14x + 7$.

20. Про квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 - ax + 1$ известно, что $\|f(x)\| \leq 1$ при $0 \leq x \leq 1$. Найдите наибольшее возможное значение a .

Метод Штурма

9 июля

I. Окружите забором длины $4a$ прямоугольных участков максимальной площади.

II. У Евгения было два положительных числа a и b . Евгений заменил их на два новых числа c и d такие, что $a + b = c + d$, $|a - b| > |c - d|$. Как изменятся значения следующих выражений: (а) ab ; (б) $a^2 + b^2$, (в) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; (г) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$?

(д) Пусть положительные числа удовлетворяют неравенству $a < b < c < d$. Тогда если $ad = bc$, то $a + d > b + c$.

1. Докажите для неотрицательных чисел неравенство между средними квадратическим и арифметическим

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

2. Докажите для неотрицательных чисел неравенство между средними геометрическим и гармоническим

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

3. Найдите наибольшее значение выражения $\sqrt{1 + 5x} + \sqrt{1 + 5y} + \sqrt{1 + 5z}$, если сумма положительных чисел x, y, z равна 1.

4. Докажите, что если $a_1 + \dots + a_n = 1$ и $a_j > 0$, то

$$(a) \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n + 1)^n;$$

$$(б) \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq n(n + 1)^2.$$

5. (а) Пусть $0 < a_1, \dots, a_n < 1$, докажите, что

$$\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \dots + \frac{1}{1 + a_n} \leq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}};$$

(б) Докажите, что при $a_1, \dots, a_n > 1$ выполняется противоположное неравенство.

6. Докажите, что если $a_1 + \dots + a_n = 1$ и $a_j > 0$, то

$$(1 + a_1)(2 + a_2) \dots (n + a_n) \leq 2n!.$$

7. Неотрицательные числа a_1, \dots, a_n таковы, что $a_1 + \dots + a_n = \frac{1}{2}$. Докажите, что

$$\frac{1 - a_1}{1 + a_1} \cdot \frac{1 - a_2}{1 + a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1 - a_n}{1 + a_n} \geq \frac{1}{3}.$$

8. Для неотрицательных чисел a, b, c , верно, что $a + b + c = 3$. Докажите, что $a^2b + b^2c + c^2a \leq 4$.

Симметрические многочлены

9 июля

Опр. Многочлен f от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках переменных, то есть для любой перестановки $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ чисел от 1 до n выполнено: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$.

Опр. *Элементарные симметрические многочлены n переменных:*

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \text{ для } 1 \leq k \leq n$$

Иными словами, k -ый элементарный симметрический многочлен представляет собой сумму всевозможных произведений k переменных из n .

I. Докажите, что сумма, разность и произведение симметрических многочленов являются симметрическими многочленами.

II. Являются ли симметрическими следующие многочлены от трёх переменных x, y, z :
(а) $x^2 + y^2$; **(б)** $x + y - z$; **(в)** $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$; **(г)** $(x - y)(y - z)(z - x)$.

Основная теорема симметрических многочленов. Любой симметрический многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ выражается через элементарные симметрические многочлены посредством операций $+$, $-$, \times . Иными словами, существует многочлен g от n переменных такой, что $g(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Опр. Будем рассматривать строки из целых неотрицательных чисел. Строка $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *лексикографически меньше* строки $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, если для наименьшего i такого, что $a_i \neq b_i$, выполнено $a_i \leq b_i$, или строка A является префиксом строки B .

Таким образом задаётся *лексикографический порядок* на числовых строках с целых неотрицательных элементами.

III. Докажите, что **(а)** строго убывающая последовательность строк из n целых неотрицательных чисел конечна и **(б)** в любом непустом множестве таких строк есть наименьший элемент.

Опр. *Степенью одночлена многих переменных $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ назовём строку целых неотрицательных чисел (k_1, k_2, \dots, k_n) .*

Опр. *Степенью многочлена многих переменных назовём наибольшую в смысле лексикографического порядка из степеней составляющих его одночленов.*

IV. Лемма 1. Пусть $u = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $a \neq 0$ — высший член (относительно лексикографического порядка) симметрического многочлена. Тогда $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.

V. Лемма 2. Для любого одночлена $u = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ с $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0$ существуют такие неотрицательные целые числа l_1, l_2, \dots, l_n , что высший член многочлена $\sigma_1^{l_1} \sigma_2^{l_2} \dots \sigma_n^{l_n}$ совпадает с u . Числа l_1, l_2, \dots, l_n определены этим условием однозначно.

VI. Докажите основную теорему симметрических многочленов с помощью вычитания из текущего многочлена многочлен от $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, чтобы высший член уменьшался в смысле лексикографического порядка.

Напоминание. Из теоремы Безу и возможности делить многочлены с остатком следует факт: если многочлен $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ имеет n корней x_1, x_2, \dots, x_n , то имеет место разложение

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

VII. Докажите теорему Виета для многочленов высших степеней. Если x_1, \dots, x_n — корни многочлена $f = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то имеет место система равенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_2 x_n + \dots + x_{n-1} x_{n-2} = a_{n-2}, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_{n-3}, \\ \vdots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n a_0. \end{cases}$$

Обратите внимание, что в левых частях уравнений системы стоят элементарные симметрические многочлены от корней многочлена f .

1. Зная, что $\sigma_1 = a, \sigma_2 = b, \sigma_3 = c$, найдите

(а) $x^2 + y^2 + z^2$; (б) $x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2$; (в) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

2. Для вещественных чисел a, b, c выполнены равенства $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что какое-то из них равно 1.

3. Числа x, y, z удовлетворяют равенству $(x + y + z)(xy + xz + yz) = xyz$. Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.

4. Даны три вещественных числа x, y, z , для которых

$$x + y + z > 0, xy + xz + yz > 0, xyz > 0.$$

Покажите, что $x, y, z > 0$.

5. Решите системы уравнений:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases} \quad (б) \begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

6. Докажите, что значение любого симметрического многочлена с целыми коэффициентами от корней унитарного (коэффициент при одночлене с высшей степенью равен 1) многочлена с целыми коэффициентами является целым числом. (Считаем, что все

корни вещественные).

7. Пусть $a > b > c$ – корни многочлена $x^3 - 3x + 1$. Докажите, что $(a-b)(a-c)(b-c) = \sqrt{k}$ для некоторого натурального k .

Теорема Шаля

10 июля

Опр. Движение — это преобразование плоскости, которое сохраняет расстояние между любыми двумя точками, т.е. расстояние между двумя точками равно расстоянию между их образами.

I. Докажите, что (а) композиция двух движений — движение;

(б) отображение, обратное к движению — тоже движение.

II. Докажите, что (а) если два движения совпадают в точках A и B , то они совпадают в каждой точке прямой AB ;

(б) если два движения совпадают в трех точках, не лежащих на одной прямой, то они совпадают во всех точках плоскости.

1. Докажите, что (а) всякий треугольник можно перевести во всякий равный ему композицией не более, чем трех осевых симметрий;

(б) всякое движение плоскости является композицией не более, чем трех осевых симметрий.

2. Найдите композицию двух осевых симметрий: (а) с пересекающимися осями; (б) с параллельными осями.

3. Докажите, что (а) всякий перенос можно представить в виде композиции двух осевых симметрий с параллельными осями, перпендикулярными направлению переноса,

(б) всякий поворот — в виде композиции двух осевых симметрий с осями, пересекающимися в центре поворота.

4. Что является композицией параллельного переноса и поворота?

5. Докажите, что композиция осевой симметрии с осью l и переноса на вектор $p \perp l$, является осевой симметрией с осью $m \parallel l$.

6. Докажите, что композиция осевой симметрии и переноса на ненулевой вектор, параллельный оси симметрии, не является ни переносом, ни поворотом, ни осевой симметрией.

7. Докажите, что композиция осевой симметрии и переноса на вектор, не перпендикулярный оси, есть скользящая симметрия.

8. Докажите, что композиция осевой симметрии и поворота есть осевая или скользящая симметрия.

9. (Теорема Шаля) все движения плоскости — это переносы, повороты, осевые и скользящие симметрии.

Опр. Назовем треугольник ABC положительно ориентированным (отрицательно ориентированным), если перемещение по его контуру $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ происходит против часовой стрелки (по часовой стрелке).

10. Докажите, что не существует такого движения D , что $D \circ D$ — осевая симметрия.

Матбой обычных групп

10 июля

1. Докажите, что если $0 < a < b < c$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$, то $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$.

2. Точка M лежит на гипотенузе AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC , а точка N — на её продолжении за точку A так, что $\angle CBM = 30^\circ$ и $\angle ABN = 15^\circ$. Докажите, что $AN = CM$.

3. По кругу лежат n монет массой 9 г и n монет массой 10 г, все они выглядят одинаково. Известно, что монеты каждой массы лежат подряд. При каком наибольшем n за два взвешивания на чашечных весах без гирь можно выяснить, где проходят границы между монетами разной массы?

4. На доске написано число $30!$. За ход Петя может уменьшить его на 3, 4 или 5, а Вася — разделить на 3, 4 или 5. Нельзя получать дробные и отрицательные числа. Начинает Петя, а выигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

5. Натуральное число назовём особым, если в десятичной записи его квадрата цифры идут в неубывающем порядке. Существуют ли два последовательных 100-значных особых числа?

6. Два эльфа считаются ровесниками, если их возрасты отличаются меньше чем на 5 лет. За круглым столом сидят 50 эльфов так, что каждая пара соседей — ровесники. Докажите, что можно посадить за пять круглых столов по десять эльфов так, чтобы по-прежнему каждые два соседа были ровесниками.

7. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . На ω_1 отмечена точка C , а на ω_2 — точка D так, что $\angle BAC = \angle BAD$. Касательные к ω_1 из точек B и C пересекаются в точке P , а касательные к ω_2 из точек B и D — в точке Q . Докажите, что прямая AB проходит через середину отрезка PQ .

8. Клетки прямоугольной таблицы 4×33 раскрашены в белый и чёрный цвета. Саша перекрасил наименьшее необходимое количество клеток в противоположный цвет так, чтобы каждый квадрат 2×2 содержал чётное число белых клеток. Какое наибольшее количество клеток мог перекрасить Саша?

Счёт в точках

12 июля

Напоминание. *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются *эквивалентными*, если $ABDC$ — параллелограмм. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами*. Вектора называются *коллинеарными*, если при откладывании от одной точки их общее начало и их концы лежат на одной прямой.

I. Упростите выражение **(а)** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA}$; **(б)** $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DB}$.

II. (*Лемма о перестановке*) Докажите, что $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{BX}$.

Идея. Направленный отрезок можно мыслить как разность точек $\overrightarrow{PQ} = \dot{Q} - \dot{P}$. А также можно говорить, что точка Q получается из точки P смещением на вектор \overrightarrow{PQ} или $\dot{Q} = \dot{P} + \overrightarrow{PQ}$. Тогда любое выражение из векторов и точек, дающее в результате одну или ноль точек имеет геометрический смысл, определённый однозначно. Доказать это поможет лемма о перестановке: неважно, как разбиты на вектора точки, важно только то, что одни точки — начала, другие — концы.

(Можно считать, что точки — это краткая запись для векторных выражений. Например,:

$$\dot{Q} = \dot{P} + \overrightarrow{PQ} \iff \forall O \in \mathbb{E}_2 \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}.)$$

Опр. По определению, для коллинеарных векторов \vec{x} и \vec{y} существует число λ такое, что $\vec{x} = \lambda\vec{y}$. Тогда *отношением (со)направленных отрезков* $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{y}$ будем называть то самое λ , т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} = \lambda\vec{y} = \lambda\overrightarrow{CD} \iff \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\vec{x}}{\vec{y}} = \lambda.$$

Опр. *Отношением трёх точек (простым отношением точек)*, лежащих на одной прямой, (AB, X) будем называть величину

$$(AB, X) = \frac{\dot{X} - \dot{A}}{\dot{B} - \dot{X}} = \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}}.$$

Говорят, что X *делит* \overrightarrow{AB} в отношении (AB, X) .

1. Найдите точку для отрезка AB , где $A(-1; 5)$, $B(7; 14)$, делящую его в отношении **(а)** $2:1$; **(б)** $4:-1$.

2. (*Правило рычага*) Если \dot{X} делит \overrightarrow{AB} в отношении $\frac{k}{m}$, то $\dot{X} = \frac{m\dot{A} + k\dot{B}}{k+m}$.

3. **(а)** Пусть M — середина отрезка AB . Докажите, что $\dot{M} = \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{B})$. **(б)** Пусть M и N — середины отрезков AB и CD . Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. **(в)** Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что $\dot{M} = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C})$.

(г) Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\dot{A} + \dot{C} = \dot{B} + \dot{D}$.

4. Найдите точку пересечения **(а)** медиан; **(б)** биссектрис; **(в)** высот треугольника ABC , где $A(-12; -30)$, $B(44; 12)$, $C(-28; 33)$.

5. Точки M , K , N и L — середины сторон AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL . Докажите, что

отрезок $PQ = \frac{1}{4}AE$ и $PQ \parallel AE$.

6. Дано несколько точек и для некоторых пар (A, B) этих точек взяты векторы \overrightarrow{AB} , причем в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$.

7. Пусть E и F — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, точки K, L, M и N — середины отрезков AF, CE, BF и DE . Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

8. (Параметрическое уравнение прямой) Докажите, что точка Z лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\vec{Z} = t\vec{A} + (1 - t)\vec{B}$ для некоторого t .

Неравенство КБШ

13 июля

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца: Для любых действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n выполняется неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n пропорциональны, т.е. $b_1 = ta_1, b_2 = ta_2, \dots, b_n = ta_n$.

I. Докажите неравенство КБШ **(а)** для двух переменных; **(б)** для n переменных.

II. При каких значениях переменных (x, y, z) достигается минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$ если известно, что $3x - 4y + 5z = 5$?

III. Используя КБШ докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, а также между средним арифметическим и средним гармоническим.

1. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$, если известно, что $a + 2b + 3c \geq 14$. Когда достигается равенство?

2. Докажите неравенство $ab + \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} \leq 1$ если $|a| \leq 1, |b| \leq 1$.

3. Докажите следующие неравенства, используя неравенство КБШ:

а) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2, a_i > 0$;

б) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

4. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$\sqrt{3a^2 + ab} + \sqrt{3b^2 + bc} + \sqrt{3c^2 + ca} \leq 2(a + b + c).$$

5. Докажите для неотрицательных чисел неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^7 + a_2^7 + \dots + a_n^7) \geq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5).$$

6. **Следствие КБШ (лемма Титу, неравенство Седракияна).** Докажите, что для любых a_1, a_2, \dots, a_n и любых $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Установите, при каких a_i, b_i достигается равенство.

7. Докажите неравенства для положительных a, b, c :

а) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$;

б) $\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$;

в) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (Неравенство Несбитта).

8. Для $x, y, z \geq 1$ докажите, что $\sqrt{x+xyz} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$

Геометрия масс

13 июля

Опр. Пусть M — некоторая точка плоскости и m — ненулевое число. Материальной точкой (м.т.) mM называется точка M с числом m , и под этим числом будем подразумевать массу точки M (считая, что она может быть и отрицательной).

Опр. Центром масс системы м.т. $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$ называется такая точка Z , для которой имеет место равенство $m_1\overrightarrow{ZM_1} + m_2\overrightarrow{ZM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{ZM_n} = \vec{0}$ при условии, что $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$.

I. (Теорема 1) Докажите, что в точках центр масс выражается как

$$\dot{Z} = \frac{m_1\dot{M}_1 + \dots + m_n\dot{M}_n}{m_1 + \dots + m_n}.$$

II. (Следствие) Для конечной системы материальных точек центр масс определяется однозначно.

III. (Теорема 2) Центр масс двух м.т. расположен на прямой, соединяющей эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага: $m_1d_1 = m_2d_2$.

IV. (Теорема 3) Пусть в системе $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$, отмечены k м.т. $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_kM_k$. Пусть Z' — центр масс отмеченных м.т. Если всю массу отмеченных м.т. сосредоточить в их центре масс Z' , то от этого положение центра масс всей системы не изменится, то есть центр масс системы м.т. $(m_1 + m_2 + \dots + m_k)Z', m_{k+1}M_{k+1}, \dots, m_nM_n$ совпадает с центром масс первоначальной системы. (Обратно тоже работает.)

1. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA . Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

2. Пусть A_1, B_1, \dots, F_1 — середины сторон AB, BC, \dots, FA произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.

3. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1 . В каком отношении делит эта прямая сторону BC ?
4. На стороне AC треугольника ABC взята точка M такая, что $AM : MC = 1 : 2$, а на продолжении стороны CB — точка N такая, что $NB = CB$. Прямая NM пересекает сторону AB в точке P . В каком отношении эта точка делит сторону AB и отрезок MN ?
5. В треугольнике ABC точка F делит сторону BC в отношении $3 : 1$, считая от вершины B . Точки M и P отсекают от сторон AB и AC по $\frac{1}{6}$, считая соответственно от вершины A и от вершины C . В каком отношении делится каждый из отрезков MP и AF точкой их пересечения?
6. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно, причем $AK : KB = DM : MC = a$ и $BL : LC = AN : ND = b$. Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN . Докажите, что $NP : PL = a$ и $KP : PM = b$.
7. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. M — точка пересечения его диагоналей, Q — середина стороны CD . Вычислите, в каком отношении делит прямая MQ сторону AB , если известно, что $AD = a, BC = b$.
8. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (точка Жергонна).
9. Пусть внеписанные окружности треугольника ABC касаются сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (точка Нагеля).
10. (**Теорема Чевы**) Дан треугольник ABC , точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$

11. (**Теорема Менелая**) Дан треугольник ABC , точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, CA, AB соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1.$$

Числа Каталана

14 июля

Определение. Число Каталана c_n — количество способов расставить в ряд n открывающих и n закрывающих скобок так, чтобы получилась *правильная скобочная последовательность* (на любом начальном отрезке количество открывающих скобок не меньше количества закрывающих).

I. Найдите первые 5 чисел Каталана.

II. Сколько есть способов съесть все n блинов, которые печёт мама, если сын время от времени забегает на кухню и берёт самый верхний блин?

1. Докажите, что количество следующих объектов равно соответствующему числу Каталана:

(а) Последовательности a_1, \dots, a_{2n} длины $2n$, в которых n раз встречается 1 , n раз встречается -1 , и все частичные суммы (суммы первых нескольких членов) неотрицательны.

(б) (Пути Дика) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси OX .

(в) Способы разбить на пары $2n$ точек, стоящих по окружности, и соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались.

(г) (Триангуляция) Способы разбить выпуклый $(n + 2)$ -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (способы, отличающиеся поворотом, различны).

(д) Плоские корневые двоичные деревья (у каждой вершины не более двух потомков, левого и правого, и у каждой вершины, кроме корня, один предок) с n вершинами.

(е) Таблицы $2 \times n$, заполненные натуральными числами от 1 до $2n$, так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.

(ж) (Параллеломино) Неупорядоченные пары путей с шагами $(0, 1)$ и $(1, 0)$ длины $n + 1$, начинающиеся в точке $(0, 0)$, заканчивающиеся в одной точке и пересекающиеся только в начальной и конечной точке.

(з) Наборы из n целых чисел от 0 до n , сумма которых делится на $n + 1$.

(и) Придумайте свой пример последовательности объектов, количество которых «типа n » равно n -ому числу Каталана.

2. Докажите формулы для чисел Каталана:

$$(а) c_0 = 1, c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \dots + c_{n-1} c_0$$

$$(б) c_n = \frac{4^n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} 4^{n-k} c_k}{n+1}$$

$$(в) c_n = \frac{(n+2)(c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \dots + c_{n-1} c_1)}{2(n-1)}$$

$$(г) c_n = \frac{4n-2}{n+1} c_{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

$$(д) c_n = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^n$$

$$(е) c_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$$

Подсказки:

(в) , (г) Триангуляция.

(д) (Лемма Рени) По кругу расставлены $n + 1$ единица и n минус единиц (в некотором порядке). Мы хотим поставить около одной цифры точку отчёта так, чтобы для любого $1 \leq k \leq 2n + 1$ сумма k чисел по часовой стрелке, начиная с точки отсчёта, была положительной. Докажите, что можно выбрать такую точку отсчёта, причём единственным способом.

(е) (Принцип отражения) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, -2)$.

3. (Треугольник Каталана) В левом верхнем углу бесконечной вправо и вниз шахматной доски стоит шашка. В каждой клетке, куда может попасть шашка, делая ходы только вниз, будем записывать количество способов добраться до неё из начального положения. Очевидно, в клетку можно попасть только из двух верхних соседей, если они есть, поэтому число в клетке равно сумме его соседей сверху.

```

      1
    1
  1  1
    2  1
  2  3  1
    5  4  1
  5  9  5  1
    14 14 6  1
  14 28 20 7  1
  .....

```

(а) Докажите, что на левой вертикали треугольника стоят числа Каталана.

(б) Как из чисел треугольника Паскаля можно получить треугольник Каталана? (Попробуйте некоторым образом совместить эти треугольники.)

Облики чисел Каталана

14 июля

Количество каждого из следующих объектов равно числу Каталана c_n .

(а) Способы съесть все n блинов, которые печёт мама, если сын время от времени забегает на кухню и берет самый верхний блин.

(б) Последовательности a_1, \dots, a_{2n} длины $2n$, в которых n единиц и n минус единиц и все частичные суммы (суммы первых нескольких членов) неотрицательны.

(в) (Триангуляция) Способы разбить на пары $2n$ точек, стоящих по окружности, и

соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались.

(г) Способы разбить выпуклый $(n + 2)$ -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (способы, отличающиеся поворотом, различны).

(д) (Пути Дика) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси OX .

(е) Последовательности целых чисел $s = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ такие, что $s_0 = 0$, $|s_i - s_{i-1}| = 1$, $1 \leq i \leq 2n$ и: 1) если $s_{2n} = 0$; 2) если $s_1 \neq 0, \dots, s_{2n} \neq 0$; 3) если $s_1 \geq 0, \dots, s_{2n} \geq 0$.

(ж) Пути с концом в точке $(2n, 0)$, имеющие ровно $2k$ ходов в нижней полуплоскости (для любого фиксированного $0 \leq k \leq n$).

(з) Пути из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям сетки, идущие вправо и вверх, не поднимающиеся выше прямой $y = x$.

(и) Пути из точки $(0, 0)$ в точку $(n - 1, n + 1)$ равно числу путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) , поднимающихся выше диагонали $y = x$.

(к) Плоские корневые строго двоичные деревья (фиксированный корень, у каждой вершины либо два потомка, либо ни одного) с ровно $n + 1$ пронумерованным листом.

(л) Плоские корневые деревья с $n + 1$ вершиной.

(м) Плоские корневые двоичные деревья (у каждой вершины не более двух потомков, левого и правого, и у каждой вершины, кроме корня, один предок) с n вершинами.

(н) Таблицы $2 \times n$, заполненные натуральными числами от 1 до $2n$, так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.

(о) (Параллеломино) Неупорядоченные пары путей с шагами $(0, 1)$ и $(1, 0)$ длины $n + 1$, начинающиеся в точке $(0, 0)$, заканчивающиеся в одной точке и пересекающиеся только в начальной и конечной точке.

(п) Способы заполнить n -«лесенку» (высоты n) n прямоугольниками.

(р) Неубывающие последовательности чисел из \mathbb{N} a_1, \dots, a_n : $a_i \leq i$ для $1 \leq i \leq n$;

(с) Последовательности натуральных чисел вида $1, a_1, \dots, a_n, 1$, в которых каждый член является делителем суммы двух соседей.

(т) Наборы из n целых чисел от 0 до n , сумма которых делится на $n + 1$.

(у) (Перестановки Кнута) Способы расставить числа от 1 до n чисел в ряд так, чтобы не было трёх чисел, стоящих в порядке возрастания.

Планарные графы

15 июля

Опр. Планарный граф — граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. Плоский граф — изображение планарного графа без пересечений ребер. Ребра плоского графа делят плоскость на части, которые называются гранями.

I. Дан плоский граф. Обозначим количество вершин за V , ребер — за P , граней — за G .

(а) Докажите, что если граф — дерево, то $V - P + G = 2$.

(б) Докажите, что при удалении ребра, не являющимся мостом, величина $V - P + G$ не изменяется.

(в) Для связного плоского графа докажите формулу $V - P + G = 2$.

(г) Чему равно $V - P + G$, если граф содержит K компонент связности?

1. В стране Озерная 7 озер и 10 каналов (канал соединяет 2 озера), причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

2. Докажите, что для любого связного плоского графа с хотя бы двумя ребрами, без петель и кратных ребер, выполняется неравенство $2P \geq 3G$.

3. Докажите, что для графа из предыдущей задачи выполняется неравенство $P \leq 3V - 6$.

Контрольный вопрос: что будет, если в графе не более 1 ребра, или есть петли и кратные ребра? Выполняется ли формула $V - P + G = 2$? Выполняется ли неравенство $P \leq 3V - 6$?

4. Как изменятся неравенства 2 и 3 задачи, если граф двудолен (все остальные свойства также выполняются)?

5. Докажите, что полный граф на пяти вершинах (K_5) и полный двудольный граф, обе доли которого содержат 3 вершины ($K_{3,3}$) — не планарны.

Рассмотрим выпуклый многогранник и точку внутри него. Поместим многогранник внутрь сферы с центром в этой точке, и спроецируем его из центра на сферу. У полученного на сфере графа ребра не пересекаются. Почему?

Поставим сферу на плоскость так, чтобы точка, диаметрально противоположная точке касания (полюс), не принадлежала нарисованному на сфере графу. Спроецируем из полюса на плоскость все точки сферы (стереографическая проекция). Получился плоский граф, соответствующий многограннику.

6. Докажите, что для выпуклого многогранника выполняется формула $V - P + G = 2$.

7. Приведите пример многогранника, для которого эта формула не выполняется.

8. Все грани выпуклого многогранника — квадраты. Сколько у него вершин, ребер и граней?

9. Все грани выпуклого многогранника — правильные пятиугольники. Сколько у него вершин, ребер и граней?

10. Все грани выпуклого многогранника — правильные треугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер. Сколько у него вершин, ребер и граней?

11. (а) Докажите, что у любого планарного графа есть вершина степени не больше 5.

(б) Докажите, что у выпуклого многогранника есть грань, содержащая не больше 5 ребер.

12. Семиугольник разбили на выпуклые 5 и 6-угольники. Известно, что в каждой вер-

шине семиугольника сходится хотя бы 2 части разбиения, и никакая вершина любого многоугольника не является внутренней точкой стороны другого многоугольника. Докажите, что 5-угольников не менее 13.

Матбой Обычные М8 – Обычные М7

15 июля

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ рассматриваются 5 отрезков — его диагонали. Тройка диагоналей называется удачной, если из них можно составить треугольник. Какое наименьшее возможное количество удачных треугольников может быть?
2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено равенство $AB = BD + CD$. Пусть E — середина диагонали AC . Докажите, что $\angle BED = 90^\circ$.
3. На доске написано произведение натуральных чисел от 1 до n . Разрешается заменять k на $k \cdot (k - 1)$. При каких n можно получить на доске квадрат натурального числа при помощи таких операций?
4. В клетках квадрата 5×5 стоят 25 различных натуральных чисел, причём в клетках, имеющих общую диагональ, числа взаимно просты. Какое минимальное значение может принимать наибольшее из чисел?
5. В четырехугольнике длины сторон выражаются целыми числами. Известно, что сумма любых трех делится на четвертую. Докажите, что в четырехугольнике есть две равные стороны.
6. В ЛМШ 40 корпусов. Между любыми двумя корпусами проходят 2 односторонние тропинки (возможно, обе в одну сторону). Назовем силой корпуса количество тропинок, ведущих из него. Какая максимальная разница в силе может быть у соседних по силе корпусов?
7. Грани куба $3 \times 3 \times 3$ разбиты на единичные квадраты. В некоторых квадратах нарисованы треугольники площадью $\frac{1}{2}$. Никакая точка поверхности не принадлежит одновременно двум треугольникам. Какое максимальное число треугольников могло быть нарисовано?
8. На плоскости отмечен миллион точек. Докажите, что существует стозвенная ломаная с вершинами в этих точках, все звенья которой имеют разную длину.

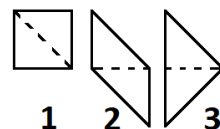
Матбой Обычные М8 – Полупрофи М7

15 июля

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ рассматриваются 5 отрезков — его диагонали. Тройка диагоналей называется удачной, если из них можно составить треугольник. Какое наименьшее возможное количество удачных треугольников может быть?

2. Клетчатый прямоугольник составлен из плиток трёх типов, показанных на рисунке (каждая плитка состоит из двух половин клетки). Может ли плиток второго типа оказаться ровно 111?

3. Числа $2^{3^1}, 2^{3^2}, \dots, 2^{3^{2024}}$ выписаны друг за другом в строчку без пробелов. Получилось число N . За n обозначим количество цифр в записи



N . На какую наибольшую степень двойки делится N ?

4. На доске написано произведение натуральных чисел от 1 до n . Разрешается заменять k на $k \cdot (k - 1)$. При каких n можно получить на доске квадрат натурального числа при помощи таких операций?

5. Докажите, что существуют натуральные числа m, n , для которых $\left| \frac{m^2}{n^3} - \sqrt{2024} \right| < \frac{1}{10^{10}}$.

6. Грани куба $3 \times 3 \times 3$ разбиты на единичные квадраты. В некоторых квадратах нарисованы треугольники площадью $\frac{1}{2}$. Никакая точка поверхности не принадлежит одновременно двум треугольникам. Какое максимальное число треугольников могло быть нарисовано?

7. В четырёхугольнике $KLMN$ длина стороны LM равна сумме длин соседних сторон. Также $\angle NKM + \angle LKM = 180^\circ$. Докажите, что $\angle KNM = \angle LMK + \angle MKN$.

8. В ЛМШ 40 корпусов. Между любыми двумя корпусами проходят 2 односторонние тропинки (возможно, обе в одну сторону). Назовем силой корпуса количество тропинок, ведущих из него. Какая максимальная разница в силе может быть у соседних по силе корпусов?

Решение. Оценим сверху разницу между k -м и $(k + 1)$ -м по силе корпусами. Будем пользоваться турнирными терминами (выигрыш 2:0, ничья 1:1). Максимальная суммарная сила k более сильных корпусов достигается, если он обыграли все остальные корпуса, а между собой сыграли как угодно. Тогда у них вместе взятых будет $2k \cdot (40 - k) + k(k - 1)$ очков. Значит, *средняя* сила каждого из этих корпусов не больше $2(40 - k) + (k - 1) = 79 - k$, а минимальная — тем более не больше этого числа. Аналогично устанавливаем, что средняя сила остальных корпусов не меньше $39 - k$, а наибольшая — тем более. Таким образом, разность не больше 40.

Пример получается из вышеописанной конструкции, если все сильные сыграли друг с другом вничью и все слабые тоже.

Перестановки

17 июля

Опр. Перестановка чисел $1, \dots, n$ — это взаимнооднозначное отображение s которое

переводит число k в число $s(k)$. Перестановка может быть записана следующим образом

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & s(3) & \dots & s(n) \end{pmatrix}.$$

I. На шахматной доске отмечены 16 клеток, так что на каждой горизонтали и каждой вертикали находятся по две отмеченные клетки. Доказать, что из этих клеток можно выбрать 8 так, что расставленные в них ладьи не будут бить друг друга.

II. Двадцать школьников решали 20 задач. Известно, что каждую из задач решили 2 школьника и каждый школьник решил по две задачи. Доказать, что можно так организовать разбор задач, что каждый школьник расскажет по одной задаче и каждая задача будет рассказана ровно один раз.

Опр. Перестановка называется циклической (или просто циклом), если она сдвигает некоторые элементы по кругу, а остальные оставляет неподвижными.

Цикл переставляющий элементы $\{a_1, \dots, a_k\}$ записывается в виде (a_1, a_2, \dots, a_k) (то есть $s(a_k) = a_{k+1}$).

Два цикла называются независимыми, если никакой элемент не сдвигается первой и второй перестановкой одновременно.

III. Найти перестановку на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, являющуюся композицией следующих циклов: $(134)(235)$; $(23)(245)$.

1. Покажите, что для любых трех перестановок $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$. То есть операция композиции перестановок ассоциативна.

2. Записать в виде композиции независимых циклов следующие перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Доказать, что любая перестановка есть композиция независимых циклов.

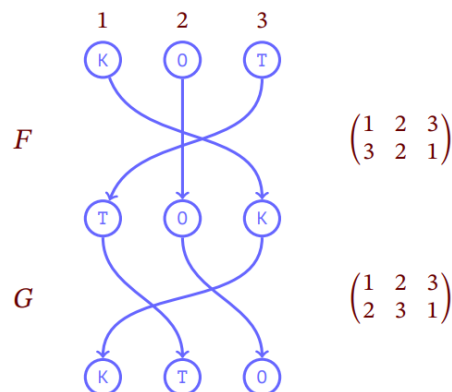
4. (а) По кругу расположено 2024 карточек. Автомат умеет менять местами любые две карточки. Можно ли сдвинуть все карточки по кругу, используя автомат многократно?

(б) Можно ли сделать то же самое с помощью суперавтомата, который не умеет сразу менять местами любые две карточки, но умеет менять местами две соседние?

5. (а) Доказать, что любой цикл есть композиция циклов длины два. (Такие циклы называются транспозициями.) **(б)** Докажите то же про произвольную перестановку.

(в) Транспозиция называется элементарной, если она меняет местами два соседних числа. (Т.е. имеет вид $(i, i+1)$). Доказать, что любую перестановку можно разложить в композицию элементарных транспозиций.

IV. На книжной полке в библиотеке стоит собрание сочинений, состоящее из 2024 то-



мов. В библиотеке работает комиссия. Если она обнаруживает пару томов на полке, расположенную так, что том с меньшим номером из этой пары стоит раньше тома с большим номером, то за каждую такую пару библиотекарь получает выговор.

(а) Сколько выговоров получит библиотекарь, если все тома будут расположены в обратном порядке?

(б) При некоторой расстановке книг библиотекарь получил некоторое количество выговоров. Можно ли так переставить две книги, чтобы число выговоров увеличилось на 100?

(в) Библиотекарю удалось расставить два экземпляра этого собрания сочинений в правильном порядке. В библиотеку забрались два хулигана. Каждый из них каждую секунду переставляет какие-нибудь две книги на своей полке. Может ли оказаться так, что у первого из них через 100 секунд книги будут расставлены точно так же, как у второго через 99 секунд?

(г) Доказать, что книги можно расставить так, что библиотекарь получит ровно миллион выговоров.

Опр. Пусть дана некоторая перестановка на множестве чисел $1, 2, \dots, n$. Пара чисел (i, j) называется инверсией данной перестановки, если большее из этих чисел расположено в перестановке раньше меньшего. Перестановка называется чётной (нечётной), если чётно (нечётно) число её инверсий.

6. Найти чётность: **(а)** перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; **(б)** произвольной транспозиции.

7. Доказать, что при умножении произвольной перестановки на транспозицию чётность перестановки изменится.

8. Найти чётность цикла: **(а)** длины 3; **(б)** длины 4; **(в)** произвольной длины n .

9. Доказать, что композиция перестановок одинаковой чётности есть чётная перестановка, а композиция перестановок разной чётности — нечетная.

10. Сформулировать определение группы перестановок по аналогии с группой движений. Доказать, что все чётные перестановки образуют группу, а все нечётные не образуют.

11. В городе Урюпинске разрешены только тройные обмены квартир. Может ли в результате нескольких обменов получиться так, что семья Ивановых поменяется квартирами с семьёй Петровых, а все остальные жители останутся при своих квартирах?

Массовый разнобой

17 июля

1. Докажите, что центр масс пятиугольника $ABCDE$ лежит на отрезке, соединяющем вершину A и центр масс четырёхугольника $BCDE$. В каком отношении он делит этот отрезок?

2. Стороны $\triangle ABC$, противолежащие вершинам A , B и C имеют длины a , b и c .
(а) Доказать, что центр масс системы aA , bB , cC — центр вписанной окружности этого треугольника. **(б)** В каком отношении биссектриса AA_1 делится точкой пересечения биссектрис?

3. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник, точки K , L , N , M — точки касания сторон AB , BC , CD и DA с вписанной окружностью. В каком отношении отрезки KN и LM делятся своей точкой пересечения?

4. Из четырех точек A , B , C , D никакие три не лежат на одной прямой. Точки пересечения медиан треугольников BCD , ACD , ABD , ABC обозначены соответственно A' , B' , C' , D' . Доказать, что отрезки AA' , BB' , CC' , DD' пересекаются в одной точке Z .

5. Даны четыре точки A , B , C , D . Через K , L , M , N , P , Q обозначены середины отрезков AB , CD , AC , BD , AD , BC . Доказать, что середины отрезков KL , MN и PQ совпадают между собой и с точкой Z из предыдущей задачи.

6. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1. Точка M делит сторону BC в отношении $3 : 5$, считая от вершины B . Прямые AM и BD пересекаются в точке P . Вычислить площадь четырехугольника $CPMD$.

7. Пусть система материальных точек $m_i M_i$ ($i = 1 \dots n$) с центром масс Z под действием преобразования подобия f (в том числе и движения) переходит систему точек $m_i M'_i$ ($f(M_i) = M'_i$) с центром масс Z' . Докажите, что $Z' = f(Z)$.

8. **(а)** Докажите, что для любой точки X на прямой AB существуют массы α , β такие, что X — центр масс αA , βB .

(б) Докажите, что для любой точки X внутри треугольника ABC существует набор масс α , β , γ такой, что X — центр масс αA , βB и γC .

(в) Докажите тоже самое для произвольной точки плоскости.

Вопрос: Однозначно ли определяются массы из предыдущей задачи? И если нет, то что вы можете предложить для того, чтобы эти массы определялись однозначно?

9. **(а)** Пусть дан многоугольник M и для любой пары его вершин A , B существует движение плоскости f , переводящее M в себя и удовлетворяющее условию $f(A) = B$. Докажите, что вокруг него можно описать окружность. **(б)** Тот же вопрос про многогранник и описанную сферу.

Неприводимые многочлены

18 июля

Опр. Ненулевой многочлен с действительными коэффициентами называется неприводимым над \mathbb{R} , если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов степени выше 1.

Теорема. Любой многочлен степени выше двух приводим над \mathbb{R} .

Опр. Ненулевой многочлен с целыми коэффициентами называется неприводимым над \mathbb{Z} , если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами степени выше 1.

I. Разложите многочлен $x^4 + 1$ в произведение неприводимых над \mathbb{R} .

II. Доказать, что многочлен $x^4 - x^2 + 1$ неприводим над \mathbb{Z} .

1. Разложите многочлен в произведение неприводимых над \mathbb{R} . **(а)** $x^4 + 4$; **(б)** $x^4 - 10x^2 + 1$; **(в)** $x^6 + 27$; **(г*)** $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$.

2. Разложите на неприводимые сомножители ненулевой степени с целыми коэффициентами многочлен $x^{12} - 1$.

3. Можно ли следующие многочлены представить в виде произведения многочленов с целыми коэффициентами **(а)** $x^4 + 2$; **(б)** $x^3 + 4x^2 - 3x + 7$; **(в)** $x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

4. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках равен ± 1 . Докажите, что его нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

5. Разложите на неприводимые над \mathbb{Z} множители многочлен $x^{2017} - 3^{2017}$.

6*. Доказать критерий Эйзенштейна. Пусть дан многочлен с целыми коэффициентами

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Если существует простое число p такое что

1) a_n не делится на p

2) $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ делится на p

3) a_0 не делится на p^2

тогда многочлен $f(x)$ неприводим над \mathbb{Z} .

Гомотетия

18 июля

Опр. Гомотетией называют преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X' , обладающую тем свойством, что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы).

Точку O называют центром гомотетии, а число k – коэффициентом гомотетии.

Гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k будем обозначать H_O^k .

I. Докажите, что если $A' = H_O^k(A)$ и $B' = H_O^k(B)$, то $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

II. Докажите, что гомотетия — преобразование подобия.

III. Докажите, что любую окружность можно перевести в любую другую гомотетией и найдите все возможные центры и коэффициенты.

1. Докажите, что для любой точки A верно следующее: $H_O^{\frac{1}{k}}(H_O^k(A)) = A$.

2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M . Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM , BCM , CDM , DAM образуют квадрат.

3. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY . Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
4. Внутри полосы между двумя параллельными прямыми a и b нарисованы две окружности ω_a и ω_b , касающиеся друг друга в точке S . Кроме того, окружность ω_a касается прямой a в точке A ; окружность ω_b касается прямой b в точке B . Докажите, что точка S лежит на отрезке AB .
5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Прямая l пересекает первую окружность в точках B и C и касается второй окружности в точке D . Докажите, что AD — биссектриса внешнего угла BAC .
6. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и BCD равны. Докажите, что радиусы невписанных окружностей этих треугольников напротив вершины B тоже равны.
7. На плоскости фиксированы окружность ω , точка A на ней и T внутри. Рассматриваются всевозможные хорды BC , проходящие через T . Найдите ГМТ
- (а) точек пересечения медиан треугольника ABC ; (б) ортоцентров треугольника ABC .
8. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC , а A_0, B_0, C_0 — середины дуг описанной окружности.
- (а) Докажите, что прямые A_1A_0, B_1B_0 и C_1C_0 пересекаются в одной точке.
- (б) Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC . Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI .
9. Пусть AK и BL — высоты остроугольного треугольника ABC , а ω — невписанная окружность треугольника ABC , касающаяся отрезка AB . Общие внутренние касательные к окружностям (CKL) и ω пересекают прямую AB в точках P и Q . Докажите, что $AP = BQ$.

Комбигеометрия

18 июля

1. На плоскости отмечено n точек. Известно, что любые 4 из них лежат в вершинах выпуклого четырехугольника. Докажите, что все точки лежат в вершинах выпуклого n -угольника.
2. На плоскости отмечено n точек так, что площадь любого треугольника с вершинами в отмеченных точках не превышает 1. Докажите, что все точки можно поместить в треугольник площади не больше 4.
3. На плоскости отмечено n точек, не лежащих на одной прямой. Докажите, что существует замкнутая ломаная без самопересечений с вершинами в этих точках.
4. 68 детей параллели М8 устроили гидробой. Они встали на площадке так, что все попарные расстояния между ними различны. Затем каждый облил из ведра ближайшего

к нему человека. Докажите, что никто не оказался облит больше 5 раз.

5. Докажите, что для любого множества из хотя бы двух точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, найдется прямая, содержащая ровно 2 точки.

6. На плоскости проведено 300 прямых общего положения. Докажите, что среди областей, на которые они разбивают плоскость, найдется хотя бы 100 треугольников.

7. Дан выпуклый многоугольник площади 1.

(а) Докажите, что его можно поместить в прямоугольник площади не больше 2;

(б) Докажите, что в него можно поместить прямоугольник площади хотя бы $\frac{1}{8}$.

8. На плоскости дано N точек, среди попарных расстояний между которыми не более, чем n различных. Докажите, что $N \leq n^2 + 2$.

Поворот

19 июля

I. Докажите, что композиция двух поворотов на углы в сумме не кратные 360° является поворотом. В какой точке находится центр и чему равен угол этого поворота? Рассмотрите случай, когда сумма углов кратна 360° .

II. Дан равносторонний треугольник ABC , O — центр треугольника. Найдите композицию поворотов: (а) $R_B^{-60^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$; (б) $R_O^{-120^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$; (в) $R_O^{120^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$.

III. На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC вне его построены правильные треугольники BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 . Докажите, что композиция поворотов с центрами A_1 , B_1 , C_1 на углы 60° есть центральная симметрия. Найдите ее центр.

1. Археологи нашли старинный свиток, в котором было написано: «Встань около березы, и дойди от нее, не сворачивая, до колодца, а у колодца поверни под прямым углом налево и пройди такое же расстояние. В том месте, где ты оказался, вбей колышек в землю. Теперь опять встань у березы, и дойди от нее, не сворачивая, до дуба, поверни под прямым углом направо и пройди такое же расстояние. Вбей второй колышек в землю. Посередине между колышками зарыт клад». Оказалось, что колодец и дуб по-прежнему на месте, но березы уже нет. Смогут ли археологи найти клад?

2. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACP и BCQ . Найти углы треугольника, у которого вершины совпадают с серединой M стороны AB , точкой P и центром O треугольника BCQ .

3. (Теорема Наполеона) На сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники. Докажите, что их центры — вершины правильного треугольника.

4. Постройте треугольник, если известны три точки, являющиеся вершинами правильных треугольников, построенных вне треугольника на его сторонах.

5. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая, пересекающая ω_1 и ω_2 в точках C и D (A на отрезке CD). Пусть M и N —

середины дуг BC и BD соответственно, не содержащих точку A , K — середина CD . Докажите, что точки A, K, M, N лежат на одной окружности.

6. На сторонах четырехугольника, вне его построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами четырехугольника, у которого диагонали равны и перпендикулярны.

7. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ как на диаметрах построили полуокружности. На AB и CD — внешним образом, а на BC и DA — внутренним. После чего отметили точки K, L, M, N — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Они образуют четырехугольник. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

8. На сторонах AB и BC вписанного четырехугольника $ABCD$ выбраны такие точки K и L соответственно, что $AK = CD$ и $CL = AD$. Пусть M — середина KL . Докажите, что $\angle AMC = 90^\circ$.

Изогонали и их частные случаи

20 июля

Опр. *Изогонали относительно данного угла* — прямые, симметричные относительно биссектрисы этого угла.

Теорема об изогоналях. Пусть OB и OC — изогонали угла AOD . Прямые AC и BD пересекаются в точке Q , прямые AB и CD — в точке P (если AB и CD параллельны, то рассматриваем луч OP , параллельный им). Тогда OP и OQ — также изогонали относительно угла AOD .

I. Докажите теорему об изогоналях.

Опр. *Изогонально сопряжённые точки в треугольнике* — точки, лежащие на соответствующих изогоналях относительно всех углов треугольника.

Опр. *Изогональное сопряжение* — преобразование, ставящее точке, не лежащей на описанной окружности данного треугольника, в соответствие изогонально сопряжённую ей.

II. Докажите корректность определения изогонально сопряжённой точки.

Опр. *Симедиана* — прямая, изогональная медиане относительно угла, из которого она выходит.

III. Точка S лежит на стороне BC треугольника ABC . Тогда эквивалентны условия:

$$\bullet AS \text{ — симедиана}; \quad \bullet \frac{\rho(S, AB)}{\rho(S, AC)} = \frac{AB}{AC}; \quad \bullet \frac{BS}{CS} = \frac{AB^2}{AC^2};$$

IV. Точка X внутри треугольника ABC такова, что $\angle BAX = \angle ACX$ и $\angle ABX = \angle CAX$. Тогда AX — симедиана.

V. (*Точка Лемуана*) Симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

1. В треугольнике ABC чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что AA_1 — высота.
2. Пусть BA_1 и BC_1 — внешние биссектрисы угла B треугольника ABC , $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$. Докажите, что A_1C и C_1A пересекаются на биссектрисе угла ABC .
3. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в вершинах B и C пересекаются в точке P . Докажите, что AP — симедиана в данном треугольнике.
4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA' , на отрезке AA' выбрана точка X . Прямая BX пересекает AC в точке B' , а прямая CX пересекает AB в точке C' . Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P , а отрезки $A'C'$ и BB' пересекаются в точке Q . Докажите, что углы PAC и QAB равны.
5. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка Q лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что $\angle AQD = \angle CQB$ и прямая CD разделяет точки P и Q . Докажите, что $\angle BQP = \angle DAQ$.
6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a — центры невписанных окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD .
7. На диаметре KW окружности взята точка M , отличная от центра окружности. Лучи MA и MD таковы, что $\angle KMA = \angle WMD < 90^\circ$ (A и D — точки пересечения этих лучей с окружностью — лежат в одной полуплоскости относительно прямой KW). Докажите, что все прямые AD , построенные таким образом, пересекают прямую KW в одной и той же точке P .
8. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что симедиана из вершины I треугольника BIC пересекает описанную окружность в середине дуги BAC .
9. Пусть в треугольнике ABC даны две пары изогонально сопряженных точек X, X' и Y, Y' . Тогда точки пересечения XY с $X'Y'$ и XY' с $X'Y$ тоже изогонально сопряжены.

Заключительная олимпиада

21 июля

Довывод

1. В вершинах тетраэдра записали 4 разных натуральных числа. На каждом ребре написали произведение этих чисел. В каждой грани записали произведение трех чисел в ее вершинах. Внутри тетраэдра записали число, равное произведению чисел во всех его вершинах. Эти числа сложили и получили 2024. Какие числа были написаны в вершинах?

2. В состоящем из n элементов множестве M выбрано несколько подмножеств. При этом каждое невыбранное подмножество множества M представимо в виде пересечения некоторых выбранных подмножеств. Какое наименьшее число подмножеств могло быть выбрано?

3. В треугольнике ABC на стороне AB и на продолжении стороны BC за точку C отмечены точки E и F соответственно так, что $AE = CF = AC$. Прямые EC и AF пересекаются в точке D , H — основание перпендикуляра, опущенного из D на прямую AC . Докажите, что длина AH равна полупериметру треугольника ABC .

4. Для положительных x_i таких, что $x_1 + \dots + x_{10} = 1$, найдите наибольшее значение выражения

$$(1 + 2x_1) \cdot (3 + 4x_2) \cdot (7 + 8x_3) \cdot \dots \cdot (1023 + 1024x_{10}).$$

5. Возьмём всевозможные квадратные трёхчлены с натуральными коэффициентами, не превосходящими 100. Каких трёхчленов больше: имеющих хотя бы один действительный корень, или не имеющих ни одного?

Вывод

6. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

7. В клубе джентльменов каждые два джентльмена — либо друзья, либо враги. Известно, что у каждого ровно 75 врагов. Кроме того, в клубе выполняется правило: «Враг моего друга — мой враг». Сколько джентльменов могло быть в клубе?

8. Биссектрисы AA_1 и CC_1 прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке I . Перпендикуляр, опущенный из вершины B на прямую AI , пересекает прямую CI в точке C_0 ; перпендикуляр, опущенный из вершины B на прямую CI , пересекает прямую AI в точке A_0 . Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_0BC_0 лежит на прямой A_1C_1 .

9. Решите в целых числах уравнение $n^2 + 5 = m^3$.