

# Задачи для абаки

20 июля

## Алгебра

А8 Упростите выражение  $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}$

А16 Пусть  $x_1$  и  $x_2$  - корни квадратного уравнения  $x^2 - 9x - 3 = 0$ . Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа  $x_1 + \frac{1}{x_1}$  и  $x_2 + \frac{1}{x_2}$ .

А24 Чему может равняться  $x$  если известно, что

$$x = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}.$$

А32 Квадратная функция определена выражением  $f(x) = x^2 - 2$ . Сколько действительных корней имеет уравнение  $f(f(f(f(f(x))))) = 0$ ?

А40 Укажите 5 арифметических прогрессий с различными целыми разностями не равными 1, покрывающие натуральный ряд.

## Геометрия

Г8. В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  все внутренние углы равны. Известно, что  $AB = 2$ ,  $CD = 5$ ,  $DE = 7$ ,  $EF = 1$ . Найдите  $BC$  и  $AF$ .

Г16. Через вершину  $B$  параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая, которая делит сторону  $AD$  в отношении  $1 : 5$  считая от вершины  $A$ . В каком отношении она делит диагональ  $AC$ ?

Г24. В треугольник вписана окружность радиуса 2. Одна из точек касания с ней делит соответствующую сторону треугольника на отрезки длины 3 и 10. Найдите периметр треугольника.

Г32. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AB = 3$ ,  $AC = 5$ , а одна из медиан равна 1.

Г40. На катетах с длинами  $a$  и  $b$  прямоугольного треугольника выбираются точки  $P$  и  $Q$  соответственно. Пусть  $K$  и  $H$  - основания перпендикуляров  $PK$  и  $QH$ , опущенных на гипотенузу. Найдите наименьшее возможное значение суммы  $KP + PQ + QH$ .

## Целые числа

Ц48. Найдите наибольшее трехзначное  $n$ , такое что  $\text{НОД}(n, 60) = 6$

Ц116. Найдите все простые  $p$ , для которых число  $2^p + p^2$  также простое.

Ц24. Сколькими способами можно представить число, являющееся произведением  $n$  различных нечетных простых чисел, в виде разности двух квадратов натуральных чисел?

Ц32. Придумайте натуральные числа  $a, b, c, d$ , такие что числа  $a^2 + b^2$ ,  $a^2 + b^2 + c^2$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  - квадраты целых чисел.

Ц40. Даны числа  $1, 2, 3, \dots, 2010$ . Найдите наибольшее  $m$ , обладающее таким свойством: какие бы  $m$  из данных чисел ни вычеркнуть, среди оставшихся чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

### Комбинаторика

К8. Сколько квадратов можно нарисовать по линиям сетки на доске  $5 \times 5$ ?

К16. В компании  $N$  человек. Каждому из них нравится ровно  $k$  людей из этой компании. При каком наименьшем  $k$  можно утверждать, что обязательно найдутся два человека из этой компании, которые нравятся друг другу?

К24. Двое играют в следующую игру. В клетчатом прямоугольнике  $m$  на  $n$  каждый по очереди вычёркивает все клетки какого-нибудь горизонтального или вертикального ряда, в котором ещё есть невычеркнутые клетки. Выигрывает тот, кто вычёркивает последние клетки. При каких  $m$  и  $n$  выигрывает первый?

К32. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на шахматной доске размерами  $8$  на  $8$  так, чтобы в каждом ряду, каждой строке и на каждой диагонали стояла хотя бы одна фишка (диагональ может состоять из одной клетки).

К40. На доске написано  $100$  нулей,  $101$  единица и  $102$  двойки. Разрешается стереть две неравные цифры и вместо них написать одну цифру, отличную от стёртых. Такая операция была проделана столько раз, сколько было возможно. Что могло остаться на доске? (могло остаться несколько чисел)

### Комбинаторная геометрия

КГ8. Разрезать квадрат со стороной  $4$  клетки на прямоугольники, сумма периметров которых равна  $25$ .

КГ16. Фигура  $F$  имеет две оси симметрии, угол между которыми равен  $46^\circ$ . Какое наименьшее число осей симметрии может иметь  $F$ ?

КГ24. На сторонах треугольника  $ABC$  отметили несколько точек –  $a$  точек на стороне  $BC$ ,  $b$  точек на стороне  $CA$ ,  $c$  точек на стороне  $AB$ . Каждую отмеченную точку соединили с противоположной вершиной, и оказалось что никакие три проведенных чевианы не пересекаются в одной точке. На сколько частей они разбили треугольник  $ABC$ ?

КГ32. Нарисуйте два пятиугольника так, чтобы у них были одни и те же вершины, но не было ни одной общей стороны.

КГ40. Какое наибольшее число точек можно отметить в прямоугольнике  $3 \times 4$ , так что расстояние между любыми двумя из них было больше  $\sqrt{5}$ ?