

# Арифметические прогрессии

18 июля

**Определение.** Арифметической прогрессией называется последовательность вещественных чисел вида  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + dn, \dots$

1. Пусть числа  $x^2, y^2, z^2$  образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа  $1/(x + y), 1/(y + z), 1/(x + z)$  также образуют арифметическую прогрессию.
2. Можно ли вычеркнуть из последовательности  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  часть чисел так, чтобы осталась арифметическая прогрессия **(а)** бесконечной длины; **(б)** из 10 членов?
3. Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии  $a_1, a_2, a_3, \dots$  есть числа  $a_1^2, a_2^2, a_3^2$ . Докажите, что эта прогрессия состоит из целых чисел.
4. Все члены арифметической прогрессии – натуральные числа. Докажите, что если продолжать выписывать новые члены этой прогрессии, то рано или поздно найдутся два члена (не обязательно соседние) с равной суммой цифр.
5. Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.  
**(а)** Докажите, что число её членов меньше 100.  
**(б)** Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.  
**(в)** Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.
6. Докажите, что  
**(а)** В арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов вида  $10^k$ .  
**(б)** Любая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит в себе некоторую геометрическую прогрессию.  
**(в)** В произвольной арифметической прогрессии с начальным членом  $a$  и разностью  $d$  содержится бесконечная геометрическая прогрессия в том и только том случае, когда отношение  $a/d$  рационально.  
**(г)** Если бесконечная арифметическая прогрессия содержит хотя бы три последовательных члена геометрической прогрессии, то она содержит бесконечную геометрическую прогрессию.

# Арифметические прогрессии

18 июля

**Определение.** Арифметической прогрессией называется последовательность вещественных чисел вида  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + dn, \dots$

1. Пусть числа  $x^2, y^2, z^2$  образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа  $1/(x + y), 1/(y + z), 1/(x + z)$  также образуют арифметическую прогрессию.
2. Можно ли вычеркнуть из последовательности  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  часть чисел так, чтобы осталась арифметическая прогрессия **(а)** бесконечной длины; **(б)** из 10 членов?
3. Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии  $a_1, a_2, a_3, \dots$  есть числа  $a_1^2, a_2^2, a_3^2$ . Докажите, что эта прогрессия состоит из целых чисел.
4. Все члены арифметической прогрессии – натуральные числа. Докажите, что если продолжать выписывать новые члены этой прогрессии, то рано или поздно найдутся два члена (не обязательно соседние) с равной суммой цифр.
5. Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.  
**(а)** Докажите, что число её членов меньше 100.  
**(б)** Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.  
**(в)** Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.
6. Докажите, что  
**(а)** В арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью, равной 729, найдется бесконечно много членов вида  $10^k$ .  
**(б)** Любая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит в себе некоторую геометрическую прогрессию.  
**(в)** В произвольной арифметической прогрессии с начальным членом  $a$  и разностью  $d$  содержится бесконечная геометрическая прогрессия в том и только том случае, когда отношение  $a/d$  рационально.  
**(г)** Если бесконечная арифметическая прогрессия содержит хотя бы три последовательных члена геометрической прогрессии, то она содержит бесконечную геометрическую прогрессию.