

Матбой Обычные М7 – Обычные М8

15 июля

1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ рассматриваются 5 отрезков — его диагонали. Тройка диагоналей называется удачной, если из них можно составить треугольник. Какое наименьшее возможное количество удачных треугольников может быть?
2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD выполнено равенство $AB = BD + CD$. Пусть E — середина диагонали AC . Докажите, что $\angle BED = 90^\circ$.
3. На доске написано произведение натуральных чисел от 1 до n . Разрешается заменять k на $k \cdot (k - 1)$. При каких n можно получить на доске квадрат натурального числа при помощи таких операций?
4. В клетках квадрата 5×5 стоят 25 различных натуральных чисел, причём в клетках, имеющих общую диагональ, числа взаимно просты. Какое минимальное значение может принимать наибольшее из чисел?
5. В четырехугольнике длины сторон выражаются целыми числами. Известно, что сумма любых трех делится на четвертую. Докажите, что в четырехугольнике есть две равные стороны.
6. В ЛМШ 40 корпусов. Между любыми двумя корпусами проходят 2 односторонние тропинки (возможно, обе в одну сторону). Назовем силой корпуса количество тропинок, ведущих из него. Какая максимальная разница в силе может быть у соседних по силе корпусов?
7. Грани куба $3 \times 3 \times 3$ разбиты на единичные квадраты. В некоторых квадратах нарисованы треугольники площадью $\frac{1}{2}$. Никакая точка поверхности не принадлежит одновременно двум треугольникам. Какое максимальное число треугольников могло быть нарисовано?
8. На плоскости отмечен миллион точек. Докажите, что существует стозвенная ломаная с вершинами в этих точках, все звенья которой имеют разную длину.