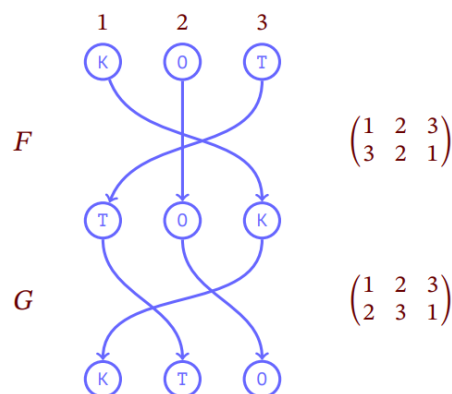


# Перестановки

17 июля

**Опр.** Перестановка чисел  $1, \dots, n$  — это взаимнооднозначное отображение  $s$  которое переводит число  $k$  в число  $s(k)$ . Перестановка может быть записана следующим образом

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & s(3) & \dots & s(n) \end{pmatrix}.$$



**I.** На шахматной доске отмечены 16 клеток, так что на каждой горизонтали и каждой вертикали находятся по две отмеченные клетки. Доказать, что из этих клеток можно выбрать 8 так, что расставленные в них ладьи не будут бить друг друга.

**II.** Двадцать школьников решали 20 задач. Известно, что каждую из задач решили 2 школьника и каждый школьник решил по две задачи. Доказать, что можно так организовать разбор задач, что каждый школьник расскажет по одной задаче и каждая задача будет рассказана ровно один раз.

**Опр.** Перестановка называется циклической (или просто циклом), если она сдвигает некоторые элементы по кругу, а остальные оставляет неподвижными.

Цикл переставляющий элементы  $\{a_1, \dots, a_k\}$  записывается в виде  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  (то есть  $s(a_k) = a_1$ ).

Два цикла называются независимыми, если никакой элемент не сдвигается первой и второй перестановкой одновременно.

**III.** Найти перестановку на множестве  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , являющуюся композицией следующих циклов:  $(134)(235)$ ;  $(23)(245)$ .

**1.** Покажите, что для любых трех перестановок  $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$ . То есть операция композиции перестановок ассоциативна.

**2.** Записать в виде композиции независимых циклов следующие перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

**3.** Доказать, что любая перестановка есть композиция независимых циклов.

**4. (а)** По кругу расположено 2024 карточек. Автомат умеет менять местами любые две карточки. Можно ли сдвинуть все карточки по кругу, используя автомат многократно?

**(б)** Можно ли сделать то же самое с помощью суперавтомата, который не умеет сразу менять местами любые две карточки, но умеет менять местами две соседние?

**5. (а)** Доказать, что любой цикл есть композиция циклов длины два. (Такие циклы называются транспозициями.) **(б)** Докажите то же про произвольную перестановку.

**(в)** Транспозиция называется элементарной, если она меняет местами два соседних

числа. (Т.е. имеет вид  $(i, i + 1)$ ). Доказать, что любую перестановку можно разложить в композицию элементарных транспозиций.

**IV.** На книжной полке в библиотеке стоит собрание сочинений, состоящее из 2024 томов. В библиотеке работает комиссия. Если она обнаруживает пару томов на полке, расположенную так, что том с меньшим номером из этой пары стоит раньше тома с большим номером, то за каждую такую пару библиотекарь получает выговор.

**(а)** Сколько выговоров получит библиотекарь, если все тома будут расположены в обратном порядке?

**(б)** При некоторой расстановке книг библиотекарь получил некоторое количество выговоров. Можно ли так переставить две книги, чтобы число выговоров увеличилось на 100?

**(в)** Библиотекарю удалось расставить два экземпляра этого собрания сочинений в правильном порядке. В библиотеку забрались два хулигана. Каждый из них каждую секунду переставляет какие-нибудь две книги на своей полке. Может ли оказаться так, что у первого из них через 100 секунд книги будут расставлены точно так же, как у второго через 99 секунд?

**(г)** Доказать, что книги можно расставить так, что библиотекарь получит ровно миллион выговоров.

**Опр.** Пусть дана некоторая перестановка на множестве чисел  $1, 2, \dots, n$ . Пара чисел  $(i, j)$  называется инверсией данной перестановки, если большее из этих чисел расположено в перестановке раньше меньшего. Перестановка называется чётной (нечётной), если чётно (нечётно) число её инверсий.

**6.** Найти чётность: **(а)** перестановки  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ; **(б)** произвольной транспозиции.

**7.** Доказать, что при умножении произвольной перестановки на транспозицию чётность перестановки изменится.

**8.** Найти чётность цикла: **(а)** длины 3; **(б)** длины 4; **(в)** произвольной длины  $n$ .

**9.** Доказать, что композиция перестановок одинаковой чётности есть чётная перестановка, а композиция перестановок разной чётности — нечетная.

**10.** Сформулировать определение группы перестановок по аналогии с группой движений. Доказать, что все чётные перестановки образуют группу, а все нечётные не образуют.

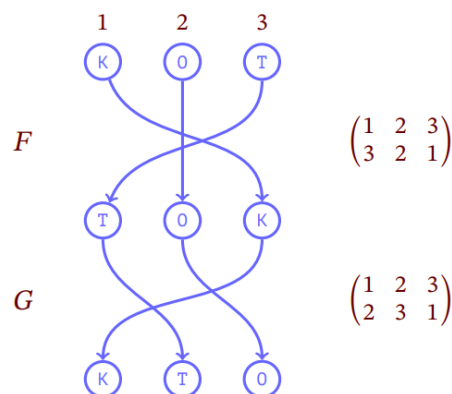
**11.** В городе Урюпинске разрешены только тройные обмены квартир. Может ли в результате нескольких обменов получиться так, что семья Ивановых поменяется квартирами с семьёй Петровых, а все остальные жители останутся при своих квартирах?

# Перестановки

17 июля

**Опр.** Перестановка чисел  $1, \dots, n$  — это взаимнооднозначное отображение  $s$  которое переводит число  $k$  в число  $s(k)$ . Перестановка может быть записана следующим образом

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & s(3) & \dots & s(n) \end{pmatrix}.$$



**I.** На шахматной доске отмечены 16 клеток, так что на каждой горизонтали и каждой вертикали находятся по две отмеченные клетки. Доказать, что из этих клеток можно выбрать 8 так, что расставленные в них ладьи не будут бить друг друга.

**II.** Двадцать школьников решали 20 задач. Известно, что каждую из задач решили 2 школьника и каждый школьник решил по две задачи. Доказать, что можно так организовать разбор задач, что каждый школьник расскажет по одной задаче и каждая задача будет рассказана ровно один раз.

**Опр.** Перестановка называется циклической (или просто циклом), если она сдвигает некоторые элементы по кругу, а остальные оставляет неподвижными.

Цикл переставляющий элементы  $\{a_1, \dots, a_k\}$  записывается в виде  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  (то есть  $s(a_k) = a_1$ ).

Два цикла называются независимыми, если никакой элемент не сдвигается первой и второй перестановкой одновременно.

**III.** Найти перестановку на множестве  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , являющуюся композицией следующих циклов:  $(134)(235)$ ;  $(23)(245)$ .

**1.** Покажите, что для любых трех перестановок  $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$ . То есть операция композиции перестановок ассоциативна.

**2.** Записать в виде композиции независимых циклов следующие перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

**3.** Доказать, что любая перестановка есть композиция независимых циклов.

**4. (а)** По кругу расположено 2024 карточек. Автомат умеет менять местами любые две карточки. Можно ли сдвинуть все карточки по кругу, используя автомат многократно?

**(б)** Можно ли сделать то же самое с помощью суперавтомата, который не умеет сразу менять местами любые две карточки, но умеет менять местами две соседние?

**5. (а)** Доказать, что любой цикл есть композиция циклов длины два. (Такие циклы называются транспозициями.) **(б)** Докажите то же про произвольную перестановку.

**(в)** Транспозиция называется элементарной, если она меняет местами два соседних

числа. (Т.е. имеет вид  $(i, i + 1)$ ). Доказать, что любую перестановку можно разложить в композицию элементарных транспозиций.

**IV.** На книжной полке в библиотеке стоит собрание сочинений, состоящее из 2024 томов. В библиотеке работает комиссия. Если она обнаруживает пару томов на полке, расположенную так, что том с меньшим номером из этой пары стоит раньше тома с большим номером, то за каждую такую пару библиотекарь получает выговор.

**(а)** Сколько выговоров получит библиотекарь, если все тома будут расположены в обратном порядке?

**(б)** При некоторой расстановке книг библиотекарь получил некоторое количество выговоров. Можно ли так переставить две книги, чтобы число выговоров увеличилось на 100?

**(в)** Библиотекарю удалось расставить два экземпляра этого собрания сочинений в правильном порядке. В библиотеку забрались два хулигана. Каждый из них каждую секунду переставляет какие-нибудь две книги на своей полке. Может ли оказаться так, что у первого из них через 100 секунд книги будут расставлены точно так же, как у второго через 99 секунд?

**(г)** Доказать, что книги можно расставить так, что библиотекарь получит ровно миллион выговоров.

**Опр.** Пусть дана некоторая перестановка на множестве чисел  $1, 2, \dots, n$ . Пара чисел  $(i, j)$  называется инверсией данной перестановки, если большее из этих чисел расположено в перестановке раньше меньшего. Перестановка называется чётной (нечётной), если чётно (нечётно) число её инверсий.

**6.** Найти чётность: **(а)** перестановки  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ; **(б)** произвольной транспозиции.

**7.** Доказать, что при умножении произвольной перестановки на транспозицию чётность перестановки изменится.

**8.** Найти чётность цикла: **(а)** длины 3; **(б)** длины 4; **(в)** произвольной длины  $n$ .

**9.** Доказать, что композиция перестановок одинаковой чётности есть чётная перестановка, а композиция перестановок разной чётности — нечетная.

**10.** Сформулировать определение группы перестановок по аналогии с группой движений. Доказать, что все чётные перестановки образуют группу, а все нечётные не образуют.

**11.** В городе Урюпинске разрешены только тройные обмены квартир. Может ли в результате нескольких обменов получиться так, что семья Ивановых поменяется квартирами с семьёй Петровых, а все остальные жители останутся при своих квартирах?