

Теорема Безу

7 июля

Опр. Многочленом называется функция вида $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, причем $a_n \neq 0$.

Число n называется степенью многочлена — $\deg P$. Числа a_n, \dots, a_0 — коэффициенты многочлена.

I. Докажите, что многочлены можно складывать, вычитать и умножать, при этом получаются снова многочлены. Как ведут себя степени при таких операциях?

II. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(x)$ не равен нулю тождественно. Докажите, что существуют единственные многочлены $T(x)$ и $R(x)$ такие, что $P(x) = Q(x)T(x) + R(x)$, и $\deg R(x) < \deg Q(x)$.

III. (Теорема Безу) Докажите, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x - c$ равен $P(c)$.

1. Докажите, что многочлен степени n имеет не более чем n корней.

2. Разделите многочлены с остатком:

(а) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 1$ на $x^2 + x + 1$; **(б)** $2x^3 + 2x^2 + x + 6$ на $x^2 + 2x + 1$; **(в)** $x^4 + 1$ на $x^5 + 1$; **(г)** $x^n - 1$ на $x - 1$; **(д)** $x^n + 1$ на $x + 1$.

3. Найдите остаток от деления многочлена $P(x) = x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ **(а)** на $x - 1$; **(б)** на $x + 1$; **(в)** на $x^2 - 1$.

4. Многочлен $P(x)$ дает остаток 2 при делении на $x - 1$, и остаток 1 при делении на $x - 2$. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на многочлен $(x - 1)(x - 2)$?

5. При каких a и b многочлен $P(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?

6. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(7) = 11$, а $P(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из его коэффициентов — не целое число.

7. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что при любом целом k число $P(k)$ делится на $Q(k)$. Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$.

8. У многочлена $P(x)$ сумма коэффициентов при чётных степенях равняется сумме коэффициентов при нечётных степенях. Этим же свойством обладает многочлен $Q(x)$. Обязательно ли многочлен $P(x) \cdot Q(x)$ обладает этим свойством?

9. Дан непостоянный многочлен $P(x)$ с положительным старшим коэффициентом. Докажите, что, начиная с некоторого момента, он будет принимать положительные значения. (То есть, найдётся такое $M > 0$, что для всех $x > M$ выполнено $P(x) > 0$).

10. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Оказалось, что $Q(n) \neq 0$ при натуральных n и $P(n)$ делится на $Q(n)$ при всех натуральных n . Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$ как многочлен.

Теорема Безу

7 июля

Опр. Многочленом называется функция вида $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, причем $a_n \neq 0$.

Число n называется степенью многочлена — $\deg P$. Числа a_n, \dots, a_0 — коэффициенты многочлена.

I. Докажите, что многочлены можно складывать, вычитать и умножать, при этом получаются снова многочлены. Как ведут себя степени при таких операциях?

II. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(x)$ не равен нулю тождественно. Докажите, что существуют единственные многочлены $T(x)$ и $R(x)$ такие, что $P(x) = Q(x)T(x) + R(x)$, и $\deg R(x) < \deg Q(x)$.

III. (Теорема Безу) Докажите, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x - c$ равен $P(c)$.

1. Докажите, что многочлен степени n имеет не более чем n корней.

2. Разделите многочлены с остатком:

(а) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 1$ на $x^2 + x + 1$; **(б)** $2x^3 + 2x^2 + x + 6$ на $x^2 + 2x + 1$; **(в)** $x^4 + 1$ на $x^5 + 1$; **(г)** $x^n - 1$ на $x - 1$; **(д)** $x^n + 1$ на $x + 1$.

3. Найдите остаток от деления многочлена $P(x) = x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ **(а)** на $x - 1$; **(б)** на $x + 1$; **(в)** на $x^2 - 1$.

4. Многочлен $P(x)$ дает остаток 2 при делении на $x - 1$, и остаток 1 при делении на $x - 2$. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на многочлен $(x - 1)(x - 2)$?

5. При каких a и b многочлен $P(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?

6. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(7) = 11$, а $P(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из его коэффициентов — не целое число.

7. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что при любом целом k число $P(k)$ делится на $Q(k)$. Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$.

8. У многочлена $P(x)$ сумма коэффициентов при чётных степенях равняется сумме коэффициентов при нечётных степенях. Этим же свойством обладает многочлен $Q(x)$. Обязательно ли многочлен $P(x) \cdot Q(x)$ обладает этим свойством?

9. Дан непостоянный многочлен $P(x)$ с положительным старшим коэффициентом. Докажите, что, начиная с некоторого момента, он будет принимать положительные значения. (То есть, найдётся такое $M > 0$, что для всех $x > M$ выполнено $P(x) > 0$).

10. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Оказалось, что $Q(n) \neq 0$ при натуральных n и $P(n)$ делится на $Q(n)$ при всех натуральных n . Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$ как многочлен.