

# Неравенства

5 июля

1. Каждое из чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  не меньше  $\frac{1}{2}$  и не больше 1. Докажите неравенство

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \leq 3$$

2. Докажите, что  $(2 - \frac{1}{n})(2 - \frac{3}{n}) \dots (2 - \frac{2n-1}{n}) > \frac{1}{n!}$  при  $n > 1$ .

3. Для положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , сумма которых единица, докажите

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{(a+c)(b+c)} \geq 8.$$

4. Положительные числа  $a$ ,  $b$ ,  $x$  и  $y$  удовлетворяют условию  $ab \geq ax + by$ . Докажите, что  $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ .

5. Для неотрицательных чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

6. (а) Докажите, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} > \frac{9}{2}$$

(б) Докажите, что для любого натурального  $n > 1$  квадрат отношения произведения первых  $n$  нечётных чисел к произведению первых  $n$  чётных чисел больше числа  $\frac{1}{4n}$ , но меньше  $\frac{3}{8n}$ .

7. Попарно различные положительные числа  $x_0, x_1, \dots, x_n$  меньше 1. Докажите, что существует пара  $(x_i, x_j)$ , для которой  $0 < x_i x_j (x_i - x_j) < \frac{1}{3n}$ .

# Неравенства

5 июля

1. Каждое из чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  не меньше  $\frac{1}{2}$  и не больше 1. Докажите неравенство

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \leq 3$$

2. Докажите, что  $(2 - \frac{1}{n})(2 - \frac{3}{n}) \dots (2 - \frac{2n-1}{n}) > \frac{1}{n!}$  при  $n > 1$ .

3. Для положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , сумма которых единица, докажите

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{(a+c)(b+c)} \geq 8.$$

4. Положительные числа  $a$ ,  $b$ ,  $x$  и  $y$  удовлетворяют условию  $ab \geq ax + by$ . Докажите, что  $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ .

5. Для неотрицательных чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

6. (а) Докажите, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} > \frac{9}{2}$$

(б) Докажите, что для любого натурального  $n > 1$  квадрат отношения произведения первых  $n$  нечётных чисел к произведению первых  $n$  чётных чисел больше числа  $\frac{1}{4n}$ , но меньше  $\frac{3}{8n}$ .

7. Попарно различные положительные числа  $x_0, x_1, \dots, x_n$  меньше 1. Докажите, что существует пара  $(x_i, x_j)$ , для которой  $0 < x_i x_j (x_i - x_j) < \frac{1}{3n}$ .