

Изогональное сопряжение

12 июля

Определение. Дан треугольник ABC и точка P , не совпадающая с вершинами треугольника. Точки P_a, P_b, P_c — основания перпендикуляров, опущенных из P на прямые BC, CA, AB соответственно. Треугольник $P_aP_bP_c$ называется *педальным треугольником* точки P .

1. Прямая h_c — перпендикуляр из точки C на прямую P_aP_b . Прямые h_a и h_b определяются аналогично.
- (а) Докажите, что прямая PC симметрична h_c относительно биссектрисы угла C (разберите любые два случая расположения точки P на плоскости).
- (б) (*Прямая Симсона*) Точка Q лежит на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что для неё прямые h_a, h_b и h_c параллельны. Сделайте вывод, что точки Q_a, Q_b и Q_c лежат на одной прямой.
- (в) Докажите, что если P_a, P_b и P_c не лежат на одной прямой, то h_a, h_b и h_c пересекаются в одной точке.

Определение. Эта точка называется *изогонально сопряжённой* точке P .

2. (а) Докажите, что ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены.
- (б) Точка P лежит на прямой AB и не совпадает с A и B . Какой точке она сопряжена?
3. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P . Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC . Докажите, что P и Q изогонально сопряжены.
4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD выбрана точка S , диаметрально противоположная точке O . Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.
5. Пусть точки P и Q , лежащие внутри треугольника, изогонально сопряжены.
- (а) Докажите, что треугольники PP_aP_b и QQ_bQ_a подобны.
- (б) Докажите, что вершины педальных треугольников точек P и Q лежат на одной окружности. Найдите её центр.
- (в) Докажите обратное: если описанные окружности педальных треугольников двух точек совпадают, то эти точки изогонально сопряжены.
6. Точку P отразили относительно прямых, содержащих стороны треугольника. Докажите, что центр описанной окружности получившегося треугольника изогонально сопряжён точке P .

- 7.** Точка P находится внутри треугольника ABC , в котором проведены высоты AA_0 , BB_0 , CC_0 . Точка A_1 симметрична P относительно прямой BC ; точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_0A_1 , B_0B_1 , C_0C_1 пересекаются в одной точке.
- 8.** Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами 120° . Докажите, что прямые, симметричные прямым AT , BT и CT относительно прямых BC , CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.

Изогональное сопряжение

12 июля

Определение. Дан треугольник ABC и точка P , не совпадающая с вершинами треугольника. Точки P_a, P_b, P_c — основания перпендикуляров, опущенных из P на прямые BC, CA, AB соответственно. Треугольник $P_aP_bP_c$ называется *педальным треугольником* точки P .

1. Прямая h_c — перпендикуляр из точки C на прямую P_aP_b . Прямые h_a и h_b определяются аналогично.
- (а) Докажите, что прямая PC симметрична h_c относительно биссектрисы угла C (разберите любые два случая расположения точки P на плоскости).
- (б) (*Прямая Симсона*) Точка Q лежит на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что для неё прямые h_a, h_b и h_c параллельны. Сделайте вывод, что точки Q_a, Q_b и Q_c лежат на одной прямой.
- (в) Докажите, что если P_a, P_b и P_c не лежат на одной прямой, то h_a, h_b и h_c пересекаются в одной точке.

Определение. Эта точка называется *изогонально сопряжённой* точке P .

2. (а) Докажите, что ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены.
- (б) Точка P лежит на прямой AB и не совпадает с A и B . Какой точке она сопряжена?
3. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P . Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC . Докажите, что P и Q изогонально сопряжены.
4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD выбрана точка S , диаметрально противоположная точке O . Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.
5. Пусть точки P и Q , лежащие внутри треугольника, изогонально сопряжены.
- (а) Докажите, что треугольники PP_aP_b и QQ_bQ_a подобны.
- (б) Докажите, что вершины педальных треугольников точек P и Q лежат на одной окружности. Найдите её центр.
- (в) Докажите обратное: если описанные окружности педальных треугольников двух точек совпадают, то эти точки изогонально сопряжены.
6. Точку P отразили относительно прямых, содержащих стороны треугольника. Докажите, что центр описанной окружности получившегося треугольника изогонально сопряжён точке P .

- 7.** Точка P находится внутри треугольника ABC , в котором проведены высоты AA_0 , BB_0 , CC_0 . Точка A_1 симметрична P относительно прямой BC ; точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_0A_1 , B_0B_1 , C_0C_1 пересекаются в одной точке.
- 8.** Стороны треугольника ABC видны из точки T под углами 120° . Докажите, что прямые, симметричные прямым AT , BT и CT относительно прямых BC , CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.