

Числа Каталана

14 июля

Определение. Число Каталана c_n — количество способов расставить в ряд n открывающих и n закрывающих скобок так, чтобы получилась *правильная скобочная последовательность* (на любом начальном отрезке количество открывающих скобок не меньше количества закрывающих).

I. Найдите первые 5 чисел Каталана.

II. Сколько есть способов съесть все n блинов, которые печёт мама, если сын время от времени забегает на кухню и берёт самый верхний блин?

1. Докажите, что количество следующих объектов равно соответствующему числу Каталана:

(а) Последовательности a_1, \dots, a_{2n} длины $2n$, в которых n раз встречается 1 , n раз встречается -1 , и все частичные суммы (суммы первых нескольких членов) неотрицательны.

(б) (*Пути Дика*) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси OX .

(в) Способы разбить на пары $2n$ точек, стоящих по окружности, и соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались.

(г) (*Триангуляция*) Способы разбить выпуклый $(n + 2)$ -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (способы, отличающиеся поворотом, различны).

(д) Плоские корневые двоичные деревья (у каждой вершины не более двух потомков, левого и правого, и у каждой вершины, кроме корня, один предок) с n вершинами.

(е) Таблицы $2 \times n$, заполненные натуральными числами от 1 до $2n$, так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.

(ж) (*Параллеломино*) Неупорядоченные пары путей с шагами $(0, 1)$ и $(1, 0)$ длины $n + 1$, начинающиеся в точке $(0, 0)$, заканчивающиеся в одной точке и пересекающиеся только в начальной и конечной точке.

(з) Наборы из n целых чисел от 0 до n , сумма которых делится на $n + 1$.

(и) Придумайте свой пример последовательности объектов, количество которых «типа n » равно n -ому числу Каталана.

2. Докажите формулы для чисел Каталана:

$$(а) \quad c_0 = 1, \quad c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \dots + c_{n-1} c_0$$

$$(б) \quad c_n = \frac{4^n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} 4^{n-k} c_k}{n+1}$$

$$(в) \quad c_n = \frac{(n+2)(c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \dots + c_{n-1} c_1)}{2(n-1)}$$

$$(г) \quad c_n = \frac{4n-2}{n+1} c_{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

$$(д) \quad c_n = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^n$$

$$(е) \quad c_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$$

Подсказки:

(в) , (г) Триангуляция.

(д) (Лемма Рени) По кругу расставлены $n+1$ единица и n минус единиц (в некотором порядке). Мы хотим поставить около одной цифры точку отчёта так, чтобы для любого $1 \leq k \leq 2n+1$ сумма k чисел по часовой стрелке, начиная с точки отсчёта, была положительной. Докажите, что можно выбрать такую точку отсчёта, причём единственным способом.

(е) (Принцип отражения) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из точки $(0,0)$ в точку $(2n,-2)$.

3. (Треугольник Каталана) В левом верхнем углу бесконечной вправо и вниз шахматной доски стоит шашка. В каждой клетке, куда может попасть шашка, делая ходы только вниз, будем записывать количество способов добраться до неё из начального положения. Очевидно, в клетку можно попасть только из двух верхних соседей, если они есть, поэтому число в клетке равно сумме его соседей сверху.

1								
	1							
1		1						
	2		1					
2		3		1				
	5		4		1			
5		9		5		1		
	14		14		6		1	
14		28		20		7		1
.....								

(а) Докажите, что на левой вертикали треугольника стоят числа Каталана.

(б) Как из чисел треугольника Паскаля можно получить треугольник Каталана? (Попробуйте некоторым образом совместить эти треугольники.)

Числа Каталана

14 июля

Определение. Число Каталана c_n — количество способов расставить в ряд n открывающих и n закрывающих скобок так, чтобы получилась *правильная скобочная последовательность* (на любом начальном отрезке количество открывающих скобок не меньше количества закрывающих).

I. Найдите первые 5 чисел Каталана.

II. Сколько есть способов съесть все n блинов, которые печёт мама, если сын время от времени забегает на кухню и берёт самый верхний блин?

1. Докажите, что количество следующих объектов равно соответствующему числу Каталана:

(а) Последовательности a_1, \dots, a_{2n} длины $2n$, в которых n раз встречается 1 , n раз встречается -1 , и все частичные суммы (суммы первых нескольких членов) неотрицательны.

(б) (*Пути Дика*) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси OX .

(в) Способы разбить на пары $2n$ точек, стоящих по окружности, и соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались.

(г) (*Триангуляция*) Способы разбить выпуклый $(n + 2)$ -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (способы, отличающиеся поворотом, различны).

(д) Плоские корневые двоичные деревья (у каждой вершины не более двух потомков, левого и правого, и у каждой вершины, кроме корня, один предок) с n вершинами.

(е) Таблицы $2 \times n$, заполненные натуральными числами от 1 до $2n$, так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.

(ж) (*Параллеломино*) Неупорядоченные пары путей с шагами $(0, 1)$ и $(1, 0)$ длины $n + 1$, начинающиеся в точке $(0, 0)$, заканчивающиеся в одной точке и пересекающиеся только в начальной и конечной точке.

(з) Наборы из n целых чисел от 0 до n , сумма которых делится на $n + 1$.

(и) Придумайте свой пример последовательности объектов, количество которых «типа n » равно n -ому числу Каталана.

2. Докажите формулы для чисел Каталана:

$$(а) \quad c_0 = 1, \quad c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \dots + c_{n-1} c_0$$

$$(б) \quad c_n = \frac{4^n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} 4^{n-k} c_k}{n+1}$$

$$(в) \quad c_n = \frac{(n+2)(c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \dots + c_{n-1} c_1)}{2(n-1)}$$

$$(г) \quad c_n = \frac{4n-2}{n+1} c_{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

$$(д) c_n = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^n$$

$$(е) c_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$$

Подсказки:

(в) , (г) Триангуляция.

(д) (Лемма Рени) По кругу расставлены $n+1$ единица и n минус единиц (в некотором порядке). Мы хотим поставить около одной цифры точку отчёта так, чтобы для любого $1 \leq k \leq 2n+1$ сумма k чисел по часовой стрелке, начиная с точки отсчёта, была положительной. Докажите, что можно выбрать такую точку отсчёта, причём единственным способом.

(е) (Принцип отражения) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из точки $(0,0)$ в точку $(2n,-2)$.

3. (Треугольник Каталана) В левом верхнем углу бесконечной вправо и вниз шахматной доски стоит шашка. В каждой клетке, куда может попасть шашка, делая ходы только вниз, будем записывать количество способов добраться до неё из начального положения. Очевидно, в клетку можно попасть только из двух верхних соседей, если они есть, поэтому число в клетке равно сумме его соседей сверху.

1									
	1								
1		1							
	2		1						
2		3		1					
	5		4		1				
5		9		5		1			
	14		14		6		1		
14		28		20		7		1	
.....									

(а) Докажите, что на левой вертикали треугольника стоят числа Каталана.

(б) Как из чисел треугольника Паскаля можно получить треугольник Каталана? (Попробуйте некоторым образом совместить эти треугольники.)