

Движения

7 июля

Опр. Движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

I. Докажите, что при движении отрезок переходит в отрезок, прямая в прямую, треугольник в равный себе треугольник, угол в равный себе угол.

Опр. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на такую точку M' , что $\overrightarrow{MM'} = \vec{r}$, называется параллельным переносом $T_{\vec{r}}$ на заданный вектор \vec{r} .

Опр. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на симметричную ей точку M' относительно прямой l , называется осевой симметрией S_l .

Опр. Поворотом вокруг точки O на ориентированный угол α называется преобразование плоскости R_O^α , которое каждую точку M отображает на такую точку M' , что $OM = OM'$ и $\angle MOM' = \alpha$.

Опр. Центральной симметрией относительно точки O называется преобразование плоскости Z_O , которое переводит точку M в такую точку M' , что O — середина отрезка MM' (поворот на 180°).

II. Выразите через стороны трапеции длину отрезка, соединяющего середины оснований.

III. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1 , а серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1 . Докажите, что прямая B_1C_1 касается вписанной окружности треугольника ABC .

IV. Через центр правильного треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен 60° . Докажите, что отрезки этих прямых, являющиеся их пересечением с треугольником, равны.

1. Правильные треугольники ABC и BDE лежат в одной полуплоскости прямой ABD . Точки F и G — середины отрезков AE и CD . Докажите, что треугольник BFG правильный.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены соответственно квадраты $ABED$ и $BCGF$, причем квадрат $ABED$ и треугольник ABC находятся в разных полуплоскостях от прямой AB , а квадрат $BCFG$ — в одной полуплоскости с этим треугольником относительно прямой BC . Докажите, что отрезки EG и AC равны и перпендикулярны.

3. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону от него построены правильные треугольники ABC_1 , AB_1C и A_1BC . Докажите, что

(а) $AA_1 = BB_1 = CC_1$;

(б) меньший угол между AA_1 и BB_1 равен 60° ;

(в) AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке T_1 (первая точка Торичелли);

(г) Докажите аналогичное утверждение для внутреннего построения правильных треугольников (вторая точка Торичелли).

Движения

7 июля

Опр. Движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

I. Докажите, что при движении отрезок переходит в отрезок, прямая в прямую, треугольник в равный себе треугольник, угол в равный себе угол.

Опр. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на такую точку M' , что $\overrightarrow{MM'} = \vec{r}$, называется параллельным переносом $T_{\vec{r}}$ на заданный вектор \vec{r} .

Опр. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на симметричную ей точку M' относительно прямой l , называется осевой симметрией S_l .

Опр. Поворотом вокруг точки O на ориентированный угол α называется преобразование плоскости R_O^α , которое каждую точку M отображает на такую точку M' , что $OM = OM'$ и $\angle MOM' = \alpha$.

Опр. Центральной симметрией относительно точки O называется преобразование плоскости Z_O , которое переводит точку M в такую точку M' , что O — середина отрезка MM' (поворот на 180°).

II. Выразите через стороны трапеции длину отрезка, соединяющего середины оснований.

III. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1 , а серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1 . Докажите, что прямая B_1C_1 касается вписанной окружности треугольника ABC .

IV. Через центр правильного треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен 60° . Докажите, что отрезки этих прямых, являющиеся их пересечением с треугольником, равны.

1. Правильные треугольники ABC и BDE лежат в одной полуплоскости прямой ABD . Точки F и G — середины отрезков AE и CD . Докажите, что треугольник BFG правильный.

2. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены соответственно квадраты $ABED$ и $BCGF$, причем квадрат $ABED$ и треугольник ABC находятся в разных полуплоскостях от прямой AB , а квадрат $BCFG$ — в одной полуплоскости с этим треугольником относительно прямой BC . Докажите, что отрезки EG и AC равны и перпендикулярны.

3. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону от него построены правильные треугольники ABC_1 , AB_1C и A_1BC . Докажите, что

(а) $AA_1 = BB_1 = CC_1$;

(б) меньший угол между AA_1 и BB_1 равен 60° ;

(в) AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке T_1 (первая точка Торичелли);

(г) Докажите аналогичное утверждение для внутреннего построения правильных треугольников (вторая точка Торичелли).