

Учебные материалы

Задворнов В.
Казанцева А.В.
Ленюк С.В.
Мещеряков Е.А.
Накипов Н.Н.
Рыжая О.А.

Содержание

1	Вступительный тест М8	1
2	В поле проходит прямая дорога	1
3	Вступительная олимпиада	2
4	Многочлены	3
5	Принцип Карно	3
6	Индуктивные конструкции	4
7	Транснеравенство	5
8	Подобие	6
9	Дробные вычеты	8
10	Движения	9
11	Теорема Безу	10
12	Функция Эйлера	11
13	Лемма Бернсайда	12
14	Квадратный трёхчлен. Задачи	13
15	Неравенства	15
16	Симметрические многочлены	16
17	Теорема Шаля	18
18	Матбой полупрофи	19
19	Счёт в точках	20
20	Неравенство КБШ	22
21	Геометрия масс	23
22	Разнобой	25
23	Числа Каталана	25
24	Облики чисел Каталана	27
25	Конечное в бесконечном	28
26	Планарные графы	29
27	Матбой Полупрофи М8 – Профи М7	30

28	Матбой Полупрофи М8 – Обычные М9	31
29	Матбой Полупрофи М8 – Обычные М9 Lite	32
30	Перестановки	33
31	Массовый разнобой	35
32	Лемма Холла	36
33	Гомотетия	38
34	Комбигеометрия	39
35	Поворот	39
36	Изогонали и их частные случаи	40
37	Заключительная олимпиада	42

Вступительный тест М8

1 июля

1. Напишите формулу Эйлера для планарного графа на плоскости.
2. Сформулируйте определение функции Эйлера. Укажите значение функции Эйлера для $n = 100$.
3. Что такое степень точки? Как определяется радикальная ось двух окружностей? Радикальный центр трёх окружностей?
4. Через точку внутри треугольника провели три прямых параллельных сторонам. Известно, что площади получившихся треугольников равны 9, 25 и 49. Найдите площадь исходного треугольника.
5. В группе 10 мальчиков и 7 девочек. Сколькими способами можно из них выбрать команду из 6 человек, в которой поровну мальчиков и девочек?
6. Дана функция $y = x^2 - 8x + 23$ найдите ее наименьшее значение и укажите при каком значении аргумента оно достигается.
7. Найдите остаток от деления числа 2027^{2024} на 23.
8. Что больше $C_{3n}^0 + C_{3n}^3 + C_{3n}^6 + \dots + C_{3n}^{3n}$ или 2^{3n-2} и почему?
9. Найдите остаток от деления многочлена $x^{2024} + x^{2022} - 2$ на $x^2 - 1$.
10. В треугольнике ABC провели прямую, симметричную медиане AM относительно биссектрисы угла A. Выразите отношение, в котором она делит отрезок BC, через стороны треугольника.
11. Докажите, что для положительных чисел a, b, c верно неравенство $\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \leq \frac{a+b+c}{2}$.
12. Постройте четырёхугольник ABCD, у которого диагональ AC является биссектрисой угла A, зная длины его сторон.
13. Дан правильный 2025-угольник $A_1A_2\dots A_{2025}$ и O — его центр. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2025}}$ равна $\vec{0}$.
14. Докажите неравенство $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 \geq a^3b + b^3c + c^3e + d^3a + e^3d$.
15. Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ имеет целые корни. Числа a, b, c — целые, причем c нечётно. Может ли число $P(2023)$ быть нечётным?

В поле проходит прямая дорога

2 июля

1. В поле проходит прямая дорога, а по ней со скоростью 10 км/ч едет велосипедист. Укажите все точки поля, с которых можно догнать велосипедиста, если **(а)** бежать с той же скоростью; **(б)** идти со скоростью 5 км/ч.
2. На дороге находится автобусная остановка, где стоит дедушка. По полю он может идти со скоростью не более 3 км/ч, а по дороге — не более 6 км/ч. Нарисуйте все точки поля, до которых он может дойти за 1 час.

3. В 5 км от дороги располагается избушка лесника. От избушки до автобусной остановки ровно 13 км. Лесник ходит по полю со скоростью 3 км/ч, а по дороге — 5 км/ч. Может ли он попасть на остановку за 3 часа 44 минуты?
4. Лес представляет собой фигуру площади 25 км^2 , окружённую полем и не имеющую внутренних пустых областей. Путник потерялся в лесу и не знает его формы. Как ему выйти из леса, пройдя не более $10\sqrt{\pi}$ км?
5. Неподалёку от леса есть берёзовая роща в форме круга с радиусом 1 км. Найдите минимальную длину пути, который нужно было бы пройти, чтобы гарантированно выбраться из рощи.
6. Вы находитесь в поле на расстоянии 1 км от прямой дороги, но не знаете, в какой она стороне. Как выйти на дорогу, пройдя не более (а) 7,3; (б) 6,72; (в) 6,4 км?

Вступительная олимпиада

2 июля

1. У квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ все коэффициенты различны и отличны от нуля. Оказалось, что трёхчлен $bx^2 + cx + a$ имеет тот же дискриминант. Докажите, что исходный трёхчлен имеет хотя бы один корень, меньший 1.
2. Сколько существует способов выбрать несколько чисел от 1 до 49, чтобы их произведение было точным квадратом (то есть квадратом целого числа)?
3. Прямоугольник разрезали на полоски $1 \times n$. Докажите, что количество либо горизонтальных, либо вертикальных полосок делится на n .
4. В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. На продолжении стороны AB за точку B отложен отрезок $BD = 2AB$. Найдите угол BDC .
5. Король решил устроить тест своему придворному мудрецу. Мудрецу нужно написать на доске 10-значное число, после чего король назовёт какое-нибудь своё натуральное число от 1 до 100. Если мудрец сможет поставить знаки $+$, $-$, \times (но без скобок) между некоторыми цифрами числа на доске так, чтобы результат был равен числу короля, то он пройдёт тест. Какое число может написать мудрец, чтобы гарантированно справиться с заданием короля?

Многочлены

3 июля

I. Используя теорему Виета, угадайте корни квадратных уравнений:

(а) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

(б) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;

(в) $x^2 - (2a + 4)x + a^2 + 4a = 0$.

II. Не вычисляя корней уравнения $3x^2 + 4x - 1 = 0$, найти $x_1^2 + x_2^2$, $x_2^3x_1 + x_1^3x_2$, $x_2^3 + x_1^3$.

III. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x - 3 = 0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого будут являться числа:

(а) $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$;

(б) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$;

(в) $x_1x_2^2$ и $x_2x_1^2$;

(г) $\frac{x_1}{x_2} + 1$ и $\frac{x_2}{x_1} + 1$.

1. Выразите дискриминант квадратного трехчлена через его корни.

2. Известно, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — целые числа, а p и q — простые числа. Найдите p и q .

3. Пусть изображён график функции $y = x^2 + ax + b$. Точки A и C — точки пересечения графика с осью OX , причем A левее C , B — точка пересечения графика с осью OY . Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC , где O — начало координат.

4. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $\frac{1}{a}$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

5. Дан график функции $y = ax^2$. Прямая пересекает её в точках с абсциссами x_1 и x_2 , а саму ось абсцисс в точке с координатой x_3 . Докажите, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.

6. Сто последовательных чётных чисел взяли в качестве коэффициентов a_k и b_k в 50 квадратных уравнениях вида $x^2 + a_kx + b_k = 0$. Могут ли все эти уравнения иметь целые корни?

7. Про действительные числа a , b , c известно, что $c(a + b + c) < 0$. Докажите, что $b^2 - 4ac > 0$.

Принцип Карно

3 июля

I. Дан отрезок AB и вещественное число c . (а) Сколько на прямой AB точек X , таких что $AX^2 - BX^2 = c$? (б) Докажите, что ГМТ всех точек плоскости, удовлетворяющих этому равенству, представляет собой прямую, перпендикулярную AB .

II. (Принцип Карно) На плоскости даны точки A, B, C и D . Докажите, что AB перпендикулярно CD тогда и только тогда, когда $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$ или $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

1. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$, а углы A и C — прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.
2. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P . Точки A_1 и C_1 — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A_1 на CP , пересекается с перпендикуляром, опущенным из C_1 на AP , в точке K . Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C .
3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AB = CB$ и $AD = DC$. Точки K, L, M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC , пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки C к прямой AD , в точке H . Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.
4. Дан треугольник ABC . Постройте отрезок, который разобьёт его на два треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.
5. (Критерий Карно) **(а)** Пусть из точки M опущены перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на стороны BC, AC, AB соответственно, докажите, что $A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$.
(б) Докажите, что если $A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$, то перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, AC, AB соответственно, пересекаются в одной точке.
6. Применение критерия Карно в известных ситуациях:
(а) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
(б) Три окружности попарно пересекаются. Докажите, что общие хорды (или их продолжения) пар этих окружностей пересекаются в одной точке.
(в) Продолжения радиусов вневписанных окружностей, проведенных в точки касания с *соответствующими* сторонами треугольника, пересекаются в одной точке.
7. Если перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, AC, AB соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.
8. К каждой стороне треугольника провели перпендикуляр в точке касания данной стороны с вневписанной окружностью. Докажите, что три этих перпендикуляра пересекаются в одной точке.

Индуктивные конструкции

4 июля

I. Разрежьте квадрат на:

- (а)** 4 меньших квадрата (не обязательно одинаковых);
- (б)** на 7 квадратов;
- (в)** на 6 квадратов;

(г) на 8 квадратов;

(д) На любое число квадратов, большее пяти.

II. (а) Придумайте 3 различных натуральных числа таких, чтобы каждое было делителем суммы всех остальных;

(б) 4 числа; (в) 10 чисел.

III. Докажите, что число 1 можно представить в виде в суммы 2024 дробей, числители равны 1, а знаменатели — различные натуральные числа.

1. В мастерской изготавливают квадратные решётки, состоящие из квадратных ячеек со стороной 1. Для этого используют заготовки, состоящие из трёх стержней длиной 1, сваренных под прямым углом в виде буквы П. При изготовлении решётки запрещается накладывать стержни друг на друга; можно лишь сваривать их между собой в точках касания. Изготовьте квадратную решётку размером

(а) 2×2 ; (б) 3×3 ; (в) 5×5 ; (г) 9×9 .

2. Если на доске записано число A , к нему можно прибавить любой его собственный делитель (отличный от 1 и самого A) и заменить число на получившуюся сумму. Докажите, что из $A = 4$ можно получить любое составное число.

3. При каких натуральных n числа от 1 до n можно разбить на несколько групп, в каждой из которых одно число, умноженное на 2, равно сумме остальных?

4. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку доски 8×8 , после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. В начале маляр стоит на угловой клетке доски, где все клетки белые. Покажите, как маляру перекрасить только одну произвольную клетку. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

5. В компании из n человек ($n > 4$) каждый узнал по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Как за $2n - 4$ звонка все смогут узнать все новости?

6. Восемь человек делят пирог. Каждый хочет получить не меньше $\frac{1}{8}$ от всего пирога, однако у каждого может быть своё представление о ценности той или иной части этого пирога. Как им организовать делёж, чтобы каждый был доволен своей долей?

Транснеравенство

4 июля

I. Пусть $a \geq d$, $a b \geq c$. Тогда $(a + b)(c + d) \leq (a + c)(b + d)$ и $ac + bd \leq ab + cd$.

II. Докажите, что при $a, b, c \geq 1$ справедливо неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq abc + \frac{1}{abc} + 1.$$

III. Докажите по индукции транснеравенство:

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Пусть c_1, c_2, \dots, c_n — некоторая

перестановка чисел b_1, b_2, \dots, b_n . Тогда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

1. Пусть $a \geq b \geq c > 0$. Упорядочите наборы чисел по убыванию:

$$\{a^3, b^3, c^3\}, \left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}, \{a^2 b^2, b^2 c^2, c^2 a^2\}, \left\{\frac{b}{ac}, \frac{c}{ab}, \frac{a}{bc}\right\}.$$

2. Докажите неравенство из вступительного теста:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 \geq a^3 b + b^3 c + c^3 e + d^3 a + e^3 d.$$

3. (а) $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$ при $a_i > 0$; (б) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$.

4. Докажите, что для $a, b, c \geq 1$

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

5. Для $a, b, c \geq 1$ докажите, что

$$a + b + c \leq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

6. Для $a, b, c > 1$ докажите неравенство

$$\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ca}{a+b} \geq 3.$$

7. c_1, c_2, \dots, c_n — различные натуральные числа. Докажите, что

$$c_1 + \frac{c_2}{4} + \dots + \frac{c_n}{n^2} > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

8. (Неравенство Чебышёва) Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Докажите:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

Подобие

5 июля

I. (а) Докажите, что в подобных треугольниках медианы, высоты и биссектрисы проведённые к пропорциональным сторонам, относятся как коэффициент подобия.

(б) В подобных треугольниках площади относятся как квадраты коэффициентов подобия.

Опр. Преобразование плоскости называют подобием с коэффициентом k , если после преобразования все расстояния увеличиваются в k раз.

- II.** Докажите, что преобразование подобия сохраняет углы, в частности, сохраняет свойство прямых быть параллельными.
- III.** Докажите, что если существует преобразование подобия переводящее один треугольник в другой, то треугольники подобны. Верно ли обратное?
- IV.** Дайте определение подобных четырёхугольников. И определение подобия произвольных фигур.
1. Докажите, что середины оснований и точка пересечения диагоналей трапеции лежат на одной прямой.
 2. Площадь трапеции равна 9, а одно из её оснований в 1,5 раза больше другого. Найдите площадь частей, на которые диагонали разбивают трапецию.
 3. Верно ли утверждение: "Если две стороны и три угла одного треугольника равны двум сторонам и трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны"?
 4. Отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника, причём коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$. Найдите углы треугольника ABC .
 5. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH , а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Докажите, что треугольники MNC и ABC подобны.
 6. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K , причём $AK : BK = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L , причём $CL : BL = 2 : 1$. Пусть Q – точка пересечения прямых AL и CK . Найдите площадь треугольника ABC , если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.
 7. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.
 8. На сторонах BC и AD четырёхугольника $ABCD$ взяты точки M и N так, что $BM : MC = AN : ND = AB : CD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке O . Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла AOD .
 9. На стороны BC и CD параллелограмма $ABCD$ (или на их продолжения) опущены перпендикуляры AM и AN . Докажите, что $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.
 10. Медиана BK и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке P . Докажите равенство $\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1$.
 11. Какие четырёхугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырёхугольника?
 12. [Задача о бабочке] Через середину S произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезок KN пересекает AB в точке P . Отрезок LM пересекает AB в точке Q . Докажите, что $PS = QS$.

Дробные вычеты

5 июля

Опр. Через \mathbb{Z}_n будем обозначать систему вычетов по модулю n .

I. Для простого p сравнение $b x \equiv a \pmod{p}$ имеет решение, и при том единственное.

II. Для какого-нибудь составного n приведите пример сравнение, которое **(а)** не имеет решения; **(б)** имеет единственное решение; **(в)** имеет несколько решений.

Опр. Обратным вычетом x^{-1} к вычету x по модулю n называется такой вычет y , что $xy \equiv 1 \pmod{n}$.

Фокус. Давайте решение x (если оно есть) сравнения $b x \equiv a \pmod{n}$ записывать как $b^{-1}a$ или $\frac{a}{b}$, что удобнее. Теперь хорошо было бы доказать, что вычеты, записанные в виде дробей действительно ведут себя как дроби.

III. Докажите, что если $x \equiv \frac{a}{b}$, а $y \equiv \frac{c}{d} \pmod{p}$, то **(а)** $x * y \equiv \frac{ac}{bd}$; **(б)** $x : y \equiv \frac{ad}{bc}$;

(в) $x + y \equiv \frac{ad + bc}{bd}$; **(г)** $x - y \equiv \frac{ad - bc}{bd}$.

1. **(а)** Определите, какому классу вычетов принадлежит $\frac{3}{4}$ по модулю 7. **(б)** Целое число a таково, что $a^{52} \equiv 36 \pmod{73}$ и $a^{53} \equiv 59 \pmod{73}$. Какой остаток дает число a при делении на 73? **(в)** Какой остаток дает $92!$ при делении на 97?

2. Докажите, что если $3 \neq p \in \mathbb{P}$ и $\exists a \in \mathbb{Z} : a^2 + 9 \vdots p$, то $\exists c \in \mathbb{Z} : c^2 + 1 \vdots p$.

3. Натуральные числа a и b таковы, что число $a^{2022} + 1$ делится на $ab + 1$. Докажите, что число $b^{2022} + 1$ тоже делится на $ab + 1$.

4. (Теорема Вильсона) $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

5. (Теорема Эйлера) Пусть $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ такое число, что $\text{НОД}(n, k) = 1$. Обозначим за $\varphi(n)$ количество этих чисел. Докажите, что $k^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

6. Пусть p — простое число. Найдите остаток от деления числа C_{2p}^p на p .

7. Докажите, что при простом $p > 2$ числитель дроби

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$$

после приведения делится на p .

8. Даны натуральные числа a , b и c такие, что $ab + 9b + 81$ и $bc + 9c + 81$ делятся на 101. Докажите, что тогда и $ca + 9a + 81$ тоже делится на 101.

9. Для простого числа p и натурального $k > p$ докажите, что $C_k^p \equiv \left[\frac{k}{p} \right] \pmod{p}$.

10. Докажите, что для любого простого числа p существует натуральное число n такое, что $2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 \pmod{p}$.

11. Дано простое p . Докажите, что существует такая перестановка (a_1, a_2, \dots, a_p) чисел $1, 2, 3, \dots, p$, что числа $a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \dots, a_1 a_2 \dots a_p$ дают разные остатки при делении на p .

Движения

7 июля

Опр. Движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

I. Докажите, что при движении отрезок переходит в отрезок, прямая в прямую, треугольник в равный себе треугольник, угол в равный себе угол.

Опр. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на такую точку M' , что $\overrightarrow{MM'} = \vec{r}$, называется параллельным переносом $T_{\vec{r}}$ на заданный вектор \vec{r} .

Опр. Преобразование плоскости, которое каждую точку M отображает на симметричную ей точку M' относительно прямой l , называется осевой симметрией S_l .

Опр. Поворотом вокруг точки O на ориентированный угол α называется преобразование плоскости R_O^α , которое каждую точку M отображает на такую точку M' , что $OM = OM'$ и $\angle MOM' = \alpha$.

Опр. Центральной симметрией относительно точки O называется преобразование плоскости Z_O , которое переводит точку M в такую точку M' , что O — середина отрезка MM' (поворот на 180°).

II. Выразите через стороны трапеции длину отрезка, соединяющего середины оснований.

III. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1 , а серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1 . Докажите, что прямая B_1C_1 касается вписанной окружности треугольника ABC .

IV. Через центр правильного треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен 60° . Докажите, что отрезки этих прямых, являющиеся их пересечением с треугольником, равны.

1. Внутри угла с вершиной O дана точка M . Постройте прямую OM циркулем и линейкой, не используя точку O .

2. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

3. Даны две концентрические окружности. Постройте с помощью циркуля и линейки квадрат так, чтобы две его смежные вершины лежали на одной окружности, а две другие на другой.

4. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону от него построены правильные треугольники ABC_1 , AB_1C и A_1BC . Докажите, что

(а) $AA_1 = BB_1 = CC_1$;

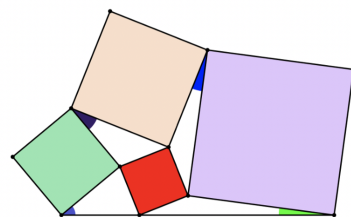
(б) меньший угол между AA_1 и BB_1 равен 60° ;

(в) AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке T_1 (первая точка Торичелли);

(г) Докажите аналогичное утверждение для внутреннего построения правильных треугольников (вторая точка Торичелли).

5. Даны четыре квадрата. Три нижние вершины расположены на одной прямой. **(а)** Докажите, что сумма отмеченных углов равна 90° . **(б)** Докажите, что сторона нижнего центрального квадрата вдвое меньше стороны верхнего.

6. В остроугольном треугольнике ABC : H — ортоцентр. На сторонах AC и BC отмечены точки K и L соответственно так, что $AK = BH$ и $BL = AH$, M — середина отрезка KL . Докажите, что угол AMB — прямой.



Теорема Безу

7 июля

Опр. Многочленом называется функция вида $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, причем $a_n \neq 0$.

Число n называется степенью многочлена — $\deg P$. Числа a_n, \dots, a_0 — коэффициенты многочлена.

I. Докажите, что многочлены можно складывать, вычитать и умножать, при этом получаются снова многочлены. Как ведут себя степени при таких операциях?

II. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, причем $Q(x)$ не равен нулю тождественно. Докажите, что существуют единственные многочлены $T(x)$ и $R(x)$ такие, что $P(x) = Q(x)T(x) + R(x)$, и $\deg R(x) < \deg Q(x)$.

III. (Теорема Безу) Докажите, что остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x - c$ равен $P(c)$.

1. Многочлен $P(x)$ дает остаток 2 при делении на $x - 1$, и остаток 1 при делении на $x - 2$. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на многочлен $(x - 1)(x - 2)$?

2. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(7) = 11$, а $P(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из его коэффициентов — не целое число.

3. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что при любом целом k число $P(k)$ делится на $Q(k)$. Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$.

4. У многочлена $P(x)$ сумма коэффициентов при чётных степенях равняется сумме коэффициентов при нечётных степенях. Этим же свойством обладает многочлен $Q(x)$. Обязательно ли многочлен $P(x) \cdot Q(x)$ обладает этим свойством?

5. Дан непостоянный многочлен $P(x)$ с положительным старшим коэффициентом. Докажите, что, начиная с некоторого момента, он будет принимать положительные значения. (То есть, найдётся такое $M > 0$, что для всех $x > M$ выполнено $P(x) > 0$).

6. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами. Оказалось, что $Q(n) \neq 0$ при натуральных n и $P(n)$ делится на $Q(n)$ при всех натуральных n . Докажите, что $P(x)$ делится на $Q(x)$ как многочлен.

7. Дан многочлен $f_0(x)$. Последовательность многочленов построена следующим образом $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$. Оказалось, что у всех многочленов $f_k(x)$ при $k \leq 100$ все корни

действительные. Пусть a_k обозначает среднее арифметическое корней $f_k(x)$. Известно, что $a_{19} = 97$. Найдите a_{97} .

Функция Эйлера

8 июля

Опр. Определение. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определяется как количество взаимно простых с n натуральных чисел, не превосходящих n .

I. Найдите:

(а) $\varphi(24)$, $\varphi(120)$;

(б) $\varphi(p)$, где p — простое;

(в) $\varphi(p^n)$, где p — простое.

II. Докажите, что при $n > 2$ $\varphi(n)$ четно.

1. Найдите сумму взаимно простых с n чисел, не превосходящих n .

2. Пусть m , n — взаимно простые натуральные числа. Строки таблицы пронумерованы числами от 0 до $n-1$, а столбцы — от 0 до $m-1$. На пересечении строчки j и столбика i записывается остаток от деления числа $in + jm$ на nm .

(а) Докажите, что все числа в таблице будут различны.

Где в этой таблице числа, взаимно простые с nm ? Докажите мультипликативность функции Эйлера: $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

(б) Докажите представление функции Эйлера:

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{k_1-1} \dots (p_m - 1)p_m^{k_m-1} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right),$$

$$n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}.$$

3. Докажите, что $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$.

4. Найдите все такие x , что:

(а) $\varphi(x) = 24$;

(б) $\varphi(x) = 56$.

5. Найдите все такие x , что:

(а) $\varphi(x) = \frac{x}{2}$;

(б) $\varphi(x) = \frac{x}{3}$;

(в) $\varphi(x) = \frac{x}{7}$.

6. Рассмотрим ряд дробей:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}.$$

Разделим числитель и знаменатель каждой дроби на их НОД.

(а) Сколько будет дробей со знаменателем d , где d — делитель n ?

(б) Докажите Тождество Эйлера-Гаусса:

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_s) = n,$$

где d_k — все делители числа n .

Лемма Бернсайда

8 июля

I. (а) Сколькими способами можно раскрасить в три цвета (a, b, c) клетки квадрата 5×5 ?

(б) Сколько будет способов, если раскраски, симметричные относительно вертикальной средней линии, считаются одинаковыми?

(в) Сколько будет способов, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом на угол, кратный 90° , считаются одинаковыми?

(г) Сколько будет способов, если и повороты, и симметрии отождествляют раскраски? Введем несколько определений.

Пусть X — множество раскрасок «без условий», как в пункте **(а)**. Элементы множества X будем обозначать буквой x .

Пусть G — множество преобразований, которые можно делать с x (например, повороты, перевороты и т.п.). Элементы G обозначим как f, g, h . По сути, мы можем находить $f(x), g(x), g(f(x)) \in X$. В последнем случае преобразование называется композицией, и его можно обозначить $g \circ f$.

Опр. Множество G называют группой преобразований, если оно обладает свойствами:

(а) тождественное преобразование принадлежит G ;

(б) композиция преобразований из G принадлежит G ;

(в) для каждого $g \in G$ есть обратное преобразование $f = g^{-1}$, принадлежащее G ;

(г) выполняется ассоциативность: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. (А коммутативность не обязательна!)

Множество раскрасок $T_x = \{g(x) \in X | g \in G\}$ называется орбитой элемента x .

Множество преобразований $S_x = \{g \in G | g(x) = x\}$ называется стабилизатором элемента x .

II. (а) Пусть $y \in T_x$. Докажите, что $T_y = T_x$.

(б) Выберем одну раскраску x . Докажите, что S_x является группой преобразований.

(в) Пусть множество S_x содержит k элементов g_1, g_2, \dots, g_k , и f — произвольное преобразование из G . Докажите, что $f \circ g_1(x) = f \circ g_2(x) = \dots = f \circ g_k(x)$.

(г) Докажите, что все $f \circ g_i$ являются разными элементами G , хоть и для элемента x выполнены равенства.

(д) Докажите, что если $f(x) = h(x)$, то множества вида $f \circ g_i$ и $h \circ g_i$ совпадают.

(е) Докажите, что $|S_x| = \frac{|G|}{|T_x|}$.

(ж) Пусть множество T_x содержит m элементов $x_1 = x, x_2, x_3, \dots, x_m$. Докажите, что тогда

$$|G| = |S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_m}|.$$

(з) Пусть X содержит n элементов, т.е. раскрасок «без условий». Пусть Y — множество раскрасок «с условиями», т.е. множество всех орбит в X . Докажите, что тогда выполняется равенство

$$|S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_n}| = |G| \cdot |Y|.$$

(и) Пусть N_i , где $1 \leq i \leq |G|$ — это количество элементов X , переходящих в себя при преобразовании g_i . Докажите, что $|S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_n}| = N_1 + N_2 + \dots + N_{|G|}$.

III. (Лемма Бернсайда) Количество различных раскрасок (орбит) равно среднему арифметическому количеств раскрасок, не меняющихся при каждом преобразовании, т.е.

$$|Y| = \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_{|G|}}{|G|}.$$

1. Снова решите задачу 1.

2. Из проволоки согнули равносторонний треугольник. Его стороны могут быть окрашены в один из n цветов. Сколько существует движений, переводящих треугольник в себя? Сколько существует различных раскрасок?

3. Сколькими способами можно раскрасить бусы из p бусинок в a цветов с точностью до поворота? (p — простое).

4. Сколько различных бус для 40 бусинок и a цветов с точностью до поворота?

5. Сколько различных бус можно составить из 10 красных и 4 синих бусин с точностью до поворота и переворота?

6. Сколькими способами можно раскрасить вершины куба в 3 цвета?

7. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в 3 цвета?

8. Сколькими способами можно раскрасить ребра куба в 3 цвета?

9. Сколько различных шестиугольников можно вписать в правильный 15-угольник?

Квадратный трёхчлен. Задачи

8 июля

1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня

$$\frac{x^2 - a(a-1)x - a^3}{\sqrt{3+2x-x^2}} = 0.$$

2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет ровно

два различных корня.

$$a^2 - 4x^2 + 8|x| - 4 = 0.$$

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет ровно четыре различных корня.

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0.$$

4. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение имеет четыре различных корня.

$$|x^2 + a^2 - 6x - 4a| = 2x + 2a.$$

5. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет хотя бы два различных решения

$$|a - 4| \cdot x^4 - 2ax^2 + |a - 30| = 0.$$

6. Найти все действительные значения a , при которых трехчлен

$$(a^2 - 1)x^2 - 2(a - 1)x + 1$$

положителен при всех действительных x .

7. Найти все значения a , при которых корни уравнения будут оба положительными

$$(2 + a)x^2 - 2ax + 3a = 0.$$

8. Найти все те значения параметра c , при которых оба корня квадратного уравнения меньше, чем -1

$$x^2 + 4cx + (1 - 2c + 4c^2) = 0.$$

9. При каких значениях a один из корней уравнения больше 1, а другой меньше 1

$$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0?$$

10. При каких значениях a что корни уравнения различны и оба заключены между -1 и $+1$

$$x^2 + 2x + a = 0$$

11. Установить, при каких значениях m сумма квадратов корней уравнения будет наименьшей

$$x^2 - mx + m - 1 = 0.$$

12. Определить все значения a , при которых уравнения и имеют хотя бы один общий корень

$$x^2 + ax = 1 = 0 \quad x^2 + x + a = 0$$

13. Найти все значения a , при которых из неравенства $ax \cdot 2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$.

14. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня.

$$a^2 - 9x^2 + 18|x| - 9 = 0.$$

15. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение имеет четыре различных корня.

$$|x^2 + a^2 - 7x - 5a| = x + a.$$

16. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет хотя бы два различных решения

$$|a - 2| \cdot x^4 - 2ax^2 + |a - 12| = 0.$$

17. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2 , его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2 .

18. Приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами в трёх последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере ещё в одной целой точке.

19. Найдите все такие функции $f(x)$, что $f(2x + 1) = 4x^2 + 14x + 7$.

20. Про квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 - ax + 1$ известно, что $\|f(x)\| \leq 1$ при $0 \leq x \leq 1$. Найдите наибольшее возможное значение a .

Неравенства

9 июля

1. Известно, что $0 \leq a, b, c \leq 1$. Докажите, что:

(а) $\frac{a}{1+b+ca} + \frac{b}{1+c+ab} + \frac{c}{1+a+bc} \leq \frac{3}{a+b+c}.$

(б) $\frac{a^2}{1+a+abc} + \frac{b^2}{1+b+abc} + \frac{c^2}{1+c+abc} \leq 1.$

(в) $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$

(г) $\frac{a}{7+b^3+c^3} + \frac{b}{7+a^3+c^3} + \frac{c}{7+a^3+b^3} \leq \frac{1}{3}.$

2. (а) Известно, что $a, b, c \geq 0$ и $a + b + c = 2\sqrt{abc}$, докажите, что $bc > b + c$.

(б) Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите, что $(ab + cd) \cdot (ac + bd) \cdot (ad + bc) \leq 8$.

(в) Докажите, что если $a + b + c \geq abc$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$.

(г) Известно, что $a, b > 0$ и $a + b = ab$. Докажите, что $\frac{a}{b^2+4} + \frac{b}{a^2+4} \geq \frac{1}{2}.$

3. (а) Решите уравнение $x^4 - 8x + 63 = 0$.

(б) Для чисел x, y, z выполняется условие $x + y + z = 5$ и $xy + yz + zx = 8$. Докажите, что $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$.

4. (а) По кругу написаны 2024 положительных числа. Сумма любых двух рядом стоящих больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1.

(б) Докажите неравенство для положительных чисел x_1, \dots, x_n

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n^2}{n+x_1+\dots+x_n}.$$

(в) Известно, что $x_1^{100} + \dots + x_n^{100} = 1$, $x_1^{101} + \dots + x_n^{101} = -1$. Какие значения может принимать $x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n$?

Симметрические многочлены

9 июля

Опр. Многочлен f от n переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любых перестановках переменных, то есть для любой перестановки $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ чисел от 1 до n выполнено: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$.

Опр. *Элементарные симметрические многочлены n переменных:*

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \text{ для } 1 \leq k \leq n$$

Иными словами, k -ый элементарный симметрический многочлен представляет собой сумму всевозможных произведений k переменных из n .

I. Докажите, что сумма, разность и произведение симметрических многочленов являются симметрическими многочленами.

II. Являются ли симметрическими следующие многочлены от трёх переменных x, y, z :

(а) $x^2 + y^2$; (б) $x + y - z$; (в) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$; (г) $(x - y)(y - z)(z - x)$.

Основная теорема симметрических многочленов. Любой симметрический многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ выражается через элементарные симметрические многочлены посредством операций $+$, $-$, \times . Иными словами, существует многочлен g от n переменных такой, что $g(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Опр. Будем рассматривать строки из целых неотрицательных чисел. Строка $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ лексикографически меньше строки $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, если для наименьшего i такого, что $a_i \neq b_i$, выполнено $a_i \leq b_i$, или строка A является префиксом строки B .

Таким образом задаётся *лексикографический порядок* на числовых строках с целых неотрицательных элементами.

III. Докажите, что **(а)** строго убывающая последовательность строк из n целых неотрицательных чисел конечна и **(б)** в любом непустом множестве таких строк есть наименьший элемент.

Опр. Степенью одночлена многих переменных $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ назовём строку целых неотрицательных чисел (k_1, k_2, \dots, k_n) .

Опр. Степенью многочлена многих переменных назовём наибольшую в смысле лексикографического порядка из степеней составляющих его одночленов.

IV. Лемма 1. Пусть $u = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $a \neq 0$ — высший член (относительно лексикографического порядка) симметрического многочлена. Тогда $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$.

V. Лемма 2. Для любого одночлена $u = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ с $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0$ существуют такие неотрицательные целые числа l_1, l_2, \dots, l_n , что высший член многочлена $\sigma_1^{l_1} \sigma_2^{l_2} \dots \sigma_n^{l_n}$ совпадает с u . Числа l_1, l_2, \dots, l_n определены этим условием однозначно.

VI. Докажите основную теорему симметрических многочленов с помощью вычитания из текущего многочлена многочлен от $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, чтобы высший член уменьшался в смысле лексикографического порядка.

Напоминание. Из теоремы Безу и возможности делить многочлены с остатком следует факт: если многочлен $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ имеет n корней x_1, x_2, \dots, x_n , то имеет место разложение

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

VII. Докажите теорему Виета для многочленов высших степеней. Если x_1, \dots, x_n — корни многочлена $f = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, то имеет место система равенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \dots + x_2 x_n + \dots + x_{n-1} x_{n-2} = a_{n-2}, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_{n-3}, \\ \vdots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n a_0. \end{cases}$$

Обратите внимание, что в левых частях уравнений системы стоят элементарные симметрические многочлены от корней многочлена f .

1. Зная, что $\sigma_1 = a, \sigma_2 = b, \sigma_3 = c$, найдите

(а) $x^2 + y^2 + z^2$; **(б)** $x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2$; **(в)** $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

2. Для вещественных чисел a, b, c выполнены равенства $abc = 1$ и $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что какое-то из них равно 1.

3. Числа x, y, z удовлетворяют равенству $(x + y + z)(xy + xz + yz) = xyz$. Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.

4. Даны три вещественных числа x, y, z , для которых

$$x + y + z > 0, xy + xz + yz > 0, xyz > 0.$$

Покажите, что $x, y, z > 0$.

5. Решите системы уравнений:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases} \quad (б) \begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

6. Докажите, что значение любого симметрического многочлена с целыми коэффициентами от корней унитарного (коэффициент при одночлене с высшей степенью равен 1) многочлена с целыми коэффициентами является целым числом. (Считаем, что все корни вещественные).

7. Пусть $a > b > c$ – корни многочлена $x^3 - 3x + 1$. Докажите, что $(a-b)(a-c)(b-c) = \sqrt{k}$ для некоторого натурального k .

Теорема Шаля

10 июля

Опр. Движение — это преобразование плоскости, которое сохраняет расстояние между любыми двумя точками, т.е. расстояние между двумя точками равно расстоянию между их образами.

I. Докажите, что (а) композиция двух движений — движение;

(б) отображение, обратное к движению — тоже движение.

II. Докажите, что (а) если два движения совпадают в точках A и B , то они совпадают в каждой точке прямой AB ;

(б) если два движения совпадают в трех точках, не лежащих на одной прямой, то они совпадают во всех точках плоскости.

1. Докажите, что (а) всякий треугольник можно перевести во всякий равный ему композицией не более, чем трех осевых симметрий;

(б) всякое движение плоскости является композицией не более, чем трех осевых симметрий.

2. Найдите композицию двух осевых симметрий: (а) с пересекающимися осями; (б) с параллельными осями.

3. Докажите, что (а) всякий перенос можно представить в виде композиции двух осевых симметрий с параллельными осями, перпендикулярными направлению переноса,

(б) всякий поворот — в виде композиции двух осевых симметрий с осями, пересекающимися в центре поворота.

4. Что является композицией параллельного переноса и поворота?

5. Докажите, что композиция осевой симметрии с осью l и переноса на вектор $p \perp l$, является осевой симметрией с осью $m \parallel l$.
6. Докажите, что композиция осевой симметрии и переноса на ненулевой вектор, параллельный оси симметрии, не является ни переносом, ни поворотом, ни осевой симметрией.
7. Докажите, что композиция осевой симметрии и переноса на вектор, не перпендикулярный оси, есть скользящая симметрия.
8. Докажите, что композиция осевой симметрии и поворота есть осевая или скользящая симметрия.
9. (Теорема Шаля) все движения плоскости — это переносы, повороты, осевые и скользящие симметрии.
- Опр.** Назовем треугольник ABC положительно ориентированным (отрицательно ориентированным), если перемещение по его контуру $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ происходит против часовой стрелки (по часовой стрелке).
10. Докажите, что не существует такого движения D , что $D \circ D$ — осевая симметрия.

Матбой полупрофи

10 июля

1. Пусть $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$, где a, b, c — положительные числа. Покажите справедливость неравенства

$$\frac{a}{\sqrt{bc}(a+1)} + \frac{b}{\sqrt{ac}(b+1)} + \frac{c}{\sqrt{ab}(c+1)} < \sqrt{2}$$

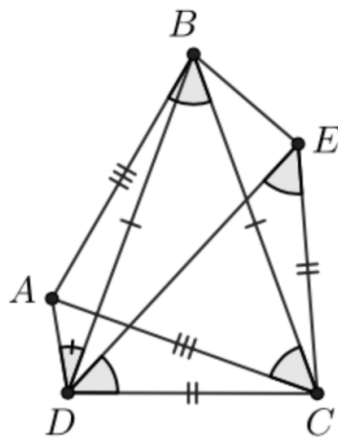
и покажите, что выражение в левой части может быть сколь угодно близко к $\sqrt{2}$.

2. В классе учатся $2n$ учеников ($n > 1$). За раз на экскурсию могут поехать n учеников. После нескольких экскурсий каждые два ученика из класса побывали вместе хотя бы на одной экскурсии. При каком минимальном количестве экскурсий такое могло произойти?
3. По краю круглого стола с метровыми промежутками стоят p блюдца (p — простое), на каждом по одному печенью. Карлсон проходит вокруг стола k метров, останавливается и берёт печенье с блюда. Затем Малыш, стартовав из того же места, проходит вокруг стола m метров, останавливается и берёт там печенье с блюда. Потом Карлсон от места своей остановки идёт k метров и берёт печенье с блюда, если оно там ещё осталось, и т.д. Все переходы они делают в одном направлении. Кому из них достанется больше печенья и на сколько, если k и m — различные натуральные числа меньше p ?
4. На клетчатой доске 10×10 стоит невидимая ладья. За один вопрос можно указать любой набор клеток и узнать, сколько из них побиты ладьёй. Сколько таких вопросов нужно, чтобы наверняка узнать положение ладьи? Ладья бьёт поле, на котором стоит.

5. В шахматном турнире участвуют 14 игроков. В каждом туре они разбиваются на пары случайным образом, но два шахматиста, игравшие друг с другом раньше, второй раз играть не могут. Турнир заканчивается, когда такое разбиение невозможно. Найдите минимально возможное число туров.

6. Три попарно различных вещественных числа a, b, c таковы, что множество $\{a + b, b + c, c + a\}$ совпадает с множеством $\{ab, bc, ca\}$. Докажите, что множество $\{a, b, c\}$ совпадает с множеством $\{a^2 - 2, b^2 - 2, c^2 - 2\}$.

7. В стране 100 городов. Некоторые из них соединены дорогами, причем между любыми двумя городами есть не более одной дороги. Города пронумерованы числами от 1 до 100. Петя совершил 100 путешествий по дорогам страны, каждый раз начиная путешествия в разных городах. Все свои путешествия он осуществляет по следующему правилу. Оказавшись в каком-либо городе A , Петя находит среди всех городов, соединенных с A , город B с наименьшим номером. Если город B уже был посещен в этом путешествии, или из A вообще нет ни одной дороги, путешествие тут же заканчивается в A . В противном случае, Петя перемещается из A в B и продолжает путешествие по этому же правилу. Оказалось, что совершив 100 путешествий, Петя посетил все города страны поровну раз. При каком наибольшем количестве дорог в стране такое возможно?



8. Равнобедренные треугольники ABC и CDE с равными углами при основании расположены на плоскости так, что $BC = BD$ (см. рисунок). Оказалось, что угол $ADB = 30^\circ$. Найдите угол BEC .

Счёт в точках

12 июля

Напоминание. *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленные отрезки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются *эквивалентными*, если $ABDC$ — параллелограмм. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами*. Вектора называются *коллинеарными*, если при откладывании от одной точки их общее начало и их концы лежат на одной прямой.

I. Упростите выражение (а) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA}$; (б) $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DB}$.

II. (Лемма о перестановке) Докажите, что $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{BX}$.

Идея. Направленный отрезок можно мыслить как разность точек $\overrightarrow{PQ} = Q - P$. А также можно говорить, что точка Q получается из точки P смещением на вектор \overrightarrow{PQ} или $Q = P + \overrightarrow{PQ}$. Тогда любое выражение из векторов и точек, дающее в результате одну или ноль точек имеет геометрический смысл, определённый однозначно. Доказать это

поможет лемма о перестановке: неважно, как разбиты на вектора точки, важно только то, что одни точки — начала, другие — концы.

(Можно считать, что точки — это краткая запись для векторных выражений. Например, $\dot{Q} = \dot{P} + \overrightarrow{PQ} \iff \forall O \in \mathbb{E}_2 \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$.)

Опр. По определению, для коллинеарных векторов \vec{x} и \vec{y} существует число λ такое, что $\vec{x} = \lambda\vec{y}$. Тогда *отношением (со)направленных отрезков* $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{y}$ будем называть то самое λ , т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} = \lambda\vec{y} = \lambda\overrightarrow{CD} \iff \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\vec{x}}{\vec{y}} = \lambda.$$

Опр. *Отношением трёх точек (простым отношением точек)*, лежащих на одной прямой, (AB, X) будем называть величину

$$(AB, X) = \frac{\dot{X} - \dot{A}}{\dot{B} - \dot{X}} = \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}}.$$

Говорят, что X делит \overrightarrow{AB} в отношении (AB, X) .

1. (Правило рычага) Если \dot{X} делит \overrightarrow{AB} в отношении $\frac{k}{m}$, то $\dot{X} = \frac{m\dot{A} + k\dot{B}}{k+m}$.
2. (а) Пусть M — середина отрезка AB . Докажите, что $\dot{M} = \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{B})$. (б) Пусть M и N — середины отрезков AB и CD . Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. (в) Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что $\dot{M} = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C})$. (г) Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\dot{A} + \dot{C} = \dot{B} + \dot{D}$.
3. Найдите точку пересечения (а) биссектрис; (б) высот; (в) симедиан треугольника ABC , где $A(-12; -30)$, $B(44; 12)$, $C(-28; 33)$.
4. Точки M , K , N и L — середины сторон AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL . Докажите, что отрезок $PQ = \frac{1}{4}AE$ и $PQ \parallel AE$.
5. На прямой лежат 2023 точки M_1, \dots, M_{2023} . Вне прямой дана точка A . Может ли так случиться, что можно расставить на отрезках AM_1, \dots, AM_{2023} стрелки так, чтобы сумма полученных векторов была равна $\vec{0}$?
6. Даны параллелограммы $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$. Обозначим через S_i точку пересечения медиан треугольника $A_iB_iC_i$. Докажите, что $S_1S_2S_3S_4$ — параллелограмм.
7. (Параметрическое уравнение прямой) Докажите, что точка Z лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\dot{Z} = t\dot{A} + (1-t)\dot{B}$ для некоторого t .
8. Длины сторон треугольника ABC равны a , b и c ($AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и $a < b < c$). На лучах BC и AC отмечены соответственно такие точки B_1 и A_1 , что $BB_1 = AA_1 = c$. На лучах CA и BA отмечены соответственно такие точки C_2 и B_2 , что $CC_2 = BB_2 = a$. Найти $|A_1B_1| : |C_2B_2|$.
9. Докажите, что если $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1$ и $k_1, k_2, \dots, k_n > 0$, то $\dot{A} = k_1\dot{A}_1 + k_2\dot{A}_2 + \dots + k_n\dot{A}_n$.

$\dots + k_n \dot{A}_n$ принадлежит выпуклой оболочке множества $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. И наоборот, для любой точки выпуклой оболочки существуют такие коэффициенты.

Неравенство КБШ

13 июля

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца: Для любых действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n выполняется неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда наборы a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n пропорциональны, т.е. $b_1 = t a_1, b_2 = t a_2, \dots, b_n = t a_n$.

I. Докажите неравенство КБШ **(а)** для двух переменных; **(б)** для n переменных.

II. При каких значениях переменных (x, y, z) достигается минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$ если известно, что $3x - 4y + 5z = 5$?

III. Используя КБШ докажите неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим, а также между средним арифметическим и средним гармоническим.

1. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$, если известно, что $a + 2b + 3c \geq 14$. Когда достигается равенство?

2. $\sqrt{a}(a + c - b) + \sqrt{b}(a + b - c) + \sqrt{c}(b + c - a) \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)}$ где a, b, c - стороны некоторого треугольника.

3. Докажите следующие неравенства, используя неравенство КБШ:

а) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2, a_i > 0;$

б) $\sqrt{n} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$

4. $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_9 a_{10} + a_{10} a_1 \geq -1$ если $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{10}^2 = 1$

5. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$\sqrt{3a^2 + ab} + \sqrt{3b^2 + bc} + \sqrt{3c^2 + ca} \leq 2(a + b + c).$$

6. Для положительных чисел a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n докажите неравенство

$$\left((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2 \right) \left(\frac{1}{a_1 b_1} + \frac{1}{a_2 b_2} + \dots + \frac{1}{a_n b_n} \right) \geq 4n^2.$$

7. Докажите для неотрицательных чисел неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^7 + a_2^7 + \dots + a_n^7) \geq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5).$$

8. Следствие КБШ (лемма Титу, неравенство Седракияна). Докажите, что для любых a_1, a_2, \dots, a_n и любых $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Установите, при каких a_i, b_i достигается равенство.

9. Докажите неравенства для положительных a, b, c :

а) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$;

б) $\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$;

в) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (Неравенство Несбитта).

10. Найдите наименьшее значение выражения $(u-v)^2 + (\sqrt{2-u^2} - \frac{9}{v})^2$ если $0 < u < \sqrt{2}, v > 0$

11. Докажите, что для трёх наборов положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ и c_1, c_2, \dots, c_n справедливо неравенство $(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3) \geq (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \dots + a_nb_nc_n)^3$

Геометрия масс

13 июля

Опр. Пусть M — некоторая точка плоскости и m — ненулевое число. Материальной точкой (м.т.) mM называется точка M с числом m , и под этим числом будем подразумевать массу точки M (считая, что она может быть и отрицательной).

Опр. Центром масс системы м.т. $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$ называется такая точка Z , для которой имеет место равенство $m_1\overrightarrow{ZM_1} + m_2\overrightarrow{ZM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{ZM_n} = \vec{0}$ при условии, что $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$.

I. (Теорема 1) Докажите, что в точках центр масс выражается как

$$\dot{Z} = \frac{m_1\dot{M}_1 + \dots + m_n\dot{M}_n}{m_1 + \dots + m_n}.$$

II. (Следствие) Для конечной системы материальных точек центр масс определяется однозначно.

III. (Теорема 2) Центр масс двух м.т. расположен на прямой, соединяющей эти точки; его положение определяется архимедовым правилом рычага: $m_1d_1 = m_2d_2$.

IV. (Теорема 3) Пусть в системе $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$, отмечены k м.т. $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_kM_k$. Пусть Z' — центр масс отмеченных м.т. Если всю массу отмеченных м.т. сосредоточить в их центре масс Z' , то от этого положение центра масс всей системы не изменится, то есть центр масс системы м.т. $(m_1 + m_2 + \dots + m_k)Z', m_{k+1}M_{k+1}, \dots, m_nM_n$ совпадает с центром масс первоначальной системы. (Обратно тоже работает.)

1. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA . Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

2. Пусть A_1, B_1, \dots, F_1 — середины сторон AB, BC, \dots, FA произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.
3. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1 . В каком отношении делит эта прямая медиану CC_1 ?
4. На стороне AC треугольника ABC взята точка M такая, что $AM : MC = 1 : 2$, а на продолжении стороны CB — точка N такая, что $NB = CB$. Прямая NM пересекает сторону AB в точке P . В каком отношении эта точка делит сторону AB и отрезок MN ?
5. В треугольнике ABC точка F делит сторону BC в отношении $3 : 1$, считая от вершины B . Точки M и P отсекают от сторон AB и AC по $\frac{1}{6}$, считая соответственно от вершины A и от вершины C . В каком отношении делится каждый из отрезков MP и AF точкой их пересечения?
6. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно, причем $AK : KB = DM : MC = a$ и $BL : LC = AN : ND = b$. Пусть P — точка пересечения отрезков KM и LN . Докажите, что $NP : PL = a$ и $KP : PM = b$.
7. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. M — точка пересечения его диагоналей, Q — середина стороны CD . Вычислите, в каком отношении делит прямая MQ сторону AB , если известно, что $AD = a, BC = b$.
8. На окружности дано n точек. Через центр масс $n - 2$ точек проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две оставшиеся точки. Доказать, что все такие прямые пересекаются в одной точке.
9. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (точка Жергонна).
10. Пусть невписанные окружности треугольника ABC касаются сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (точка Нагеля).
11. (**Теорема Чевы**) Дан треугольник ABC , точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$

12. (**Теорема Менелая**) Дан треугольник ABC , точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, CA, AB соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой

тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1.$$

Разнобой

13 июля

1. Для положительных действительных чисел выполняется равенство $abc = 1$. Докажите, что

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a + b + c + 1).$$

2. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведена высота BB' и отмечены точки H и O — точка пересечения высот и центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника NOB' относительно прямой HO , лежит на средней линии треугольника ABC .

3. Докажите, что многочлен $(x^2 - x + 1)^{100} + (x^2 + x + 1)^{100}$ не содержит нечётных степеней x .

4. Вова утверждает, что придумал такую комбинацию вращений кубика рубика, что из любого состояния кубика можно перейти в собранное, повторив эту комбинацию достаточное число раз. Не привирает ли Вова?

Числа Каталана

14 июля

Определение. Число Каталана c_n — количество способов расставить в ряд n открывающих и n закрывающих скобок так, чтобы получилась *правильная скобочная последовательность* (на любом начальном отрезке количество открывающих скобок не меньше количества закрывающих).

I. Найдите первые 5 чисел Каталана.

II. Сколько есть способов съесть все n блинов, которые печёт мама, если сын время от времени забегает на кухню и берёт самый верхний блин?

1. Докажите, что количество следующих объектов равно соответствующему числу Каталана:

(а) Последовательности a_1, \dots, a_{2n} длины $2n$, в которых n раз встречается 1 , n раз встречается -1 , и все частичные суммы (суммы первых нескольких членов) неотрицательны.

(б) (Пути Дика) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси OX .

- (в) Способы разбить на пары $2n$ точек, стоящих по окружности, и соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались.
- (г) (Триангуляция) Способы разбить выпуклый $(n + 2)$ -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (способы, отличающиеся поворотом, различны).
- (д) Плоские корневые двоичные деревья (у каждой вершины не более двух потомков, левого и правого, и у каждой вершины, кроме корня, один предок) с n вершинами.
- (е) Таблицы $2 \times n$, заполненные натуральными числами от 1 до $2n$, так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.
- (ж) (Параллеломино) Неупорядоченные пары путей с шагами $(0, 1)$ и $(1, 0)$ длины $n + 1$, начинающиеся в точке $(0, 0)$, заканчивающиеся в одной точке и пересекающиеся только в начальной и конечной точке.
- (з) Наборы из n целых чисел от 0 до n , сумма которых делится на $n + 1$.
- (и) Придумайте свой пример последовательности объектов, количество которых «типа n » равно n -ому числу Каталана.

2. Докажите формулы для чисел Каталана:

(а) $c_0 = 1, c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_0$

(б)
$$c_n = \frac{4^n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} 4^{n-k} c_k}{n+1}$$

(в)
$$c_n = \frac{(n+2)(c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \dots + c_{n-1}c_1)}{2(n-1)}$$

(г)
$$c_n = \frac{4n-2}{n+1} c_{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

(д)
$$c_n = \frac{1}{2n+1} C_{2n+1}^n$$

(е)
$$c_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$$

Подсказки:

(в), (г) Триангуляция.

(д) (Лемма Рени) По кругу расставлены $n + 1$ единица и n минус единиц (в некотором порядке). Мы хотим поставить около одной цифры точку отчёта так, чтобы для любого $1 \leq k \leq 2n + 1$ сумма k чисел по часовой стрелке, начиная с точки отсчёта, была положительной. Докажите, что можно выбрать такую точку отсчёта, причём единственным способом.

(е) (Принцип отражения) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, -2)$.

3. (Треугольник Каталана) В левом верхнем углу бесконечной вправо и вниз шахматной доски стоит шашка. В каждой клетке, куда может попасть шашка, делая ходы только вниз, будем записывать количество способов добраться до неё из начального положения. Очевидно, в клетку можно попасть только из двух верхних соседей, если они есть,

поэтому число в клетке равно сумме его соседей сверху.

1									
	1								
1		1							
	2		1						
2		3		1					
	5		4		1				
5		9		5		1			
	14		14		6		1		
14		28		20		7		1	
.....									

- (а) Докажите, что на левой вертикали треугольника стоят числа Каталана.
- (б) Как из чисел треугольника Паскаля можно получить треугольник Каталана? (Попробуйте некоторым образом совместить эти треугольники.)

Облики чисел Каталана

14 июля

Количество каждого из следующих объектов равно числу Каталана c_n .

- (а) Способы съесть все n блинов, которые печёт мама, если сын время от времени забегает на кухню и берет самый верхний блин.
- (б) Последовательности a_1, \dots, a_{2n} длины $2n$, в которых n единиц и n минус единиц и все частичные суммы (суммы первых нескольких членов) неотрицательны.
- (в) (Триангуляция) Способы разбить на пары $2n$ точек, стоящих по окружности, и соединить точки в парах отрезками так, чтобы отрезки не пересекались.
- (г) Способы разбить выпуклый $(n+2)$ -угольник непересекающимися диагоналями на треугольники (способы, отличающиеся поворотом, различны).
- (д) (Пути Дика) Пути на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси OX .
- (е) Последовательности целых чисел $s = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ такие, что $s_0 = 0$, $|s_i - s_{i-1}| = 1$, $1 \leq i \leq 2n$ и: 1) если $s_{2n} = 0$; 2) если $s_1 \neq 0, \dots, s_{2n} \neq 0$; 3) если $s_1 \geq 0, \dots, s_{2n} \geq 0$.
- (ж) Пути с концом в точке $(2n,0)$, имеющие ровно $2k$ ходов в нижней полуплоскости (для любого фиксированного $0 \leq k \leq n$).
- (з) Пути из точки $(0,0)$ в точку (n,n) по линиям сетки, идущие вправо и вверх, не поднимающиеся выше прямой $y = x$.
- (и) Пути из точки $(0,0)$ в точку $(n-1, n+1)$ равно числу путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n) , поднимающихся выше диагонали $y = x$.
- (к) Плоские корневые строго двоичные деревья (фиксированный корень, у каждой

- вершины либо два потомка, либо ни одного) с ровно $n + 1$ пронумерованным листом.
- (л) Плоские корневые деревья с $n + 1$ вершиной.
- (м) Плоские корневые двоичные деревья (у каждой вершины не более двух потомков, левого и правого, и у каждой вершины, кроме корня, один предок) с n вершинами.
- (н) Таблицы $2 \times n$, заполненные натуральными числами от 1 до $2n$, так, что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают.
- (о) (Параллеломино) Неупорядоченные пары путей с шагами $(0, 1)$ и $(1, 0)$ длины $n + 1$, начинающиеся в точке $(0, 0)$, заканчивающиеся в одной точке и пересекающиеся только в начальной и конечной точке.
- (п) Способы заполнить n -«лесенку» (высоты n) n прямоугольниками.
- (р) Неубывающие последовательности чисел из \mathbb{N} a_1, \dots, a_n : $a_i \leq i$ для $1 \leq i \leq n$;
- (с) Последовательности натуральных чисел вида $1, a_1, \dots, a_n, 1$, в которых каждый член является делителем суммы двух соседей.
- (т) Наборы из n целых чисел от 0 до n , сумма которых делится на $n + 1$.
- (у) (Перестановки Кнута) Способы расставить числа от 1 до n чисел в ряд так, чтобы не было трёх чисел, стоящих в порядке возрастания.

Конечное в бесконечном

14 июля

Опр. Говорят, что величина бывает сколь угодно большой, если для любого натурального N существует значение величины, превосходящее N .

I. Верны ли следующие утверждения:

(а) в ряду натуральных чисел найдется сколь угодно много последовательных составных чисел;

(б) в ряду натуральных чисел найдется бесконечно много последовательных составных чисел.

1. Король стоит в углу шахматной доски. Продлим её вправо и влево на миллион клеток. Может ли король обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно один раз? А если доску продлить влево и вправо до бесконечности?

2. На бесконечном листе клетчатой бумаги укладывают кости домино размером 1×2 так, что они покрывают все клетки. Можно ли при этом добиться того, чтобы каждая прямая, идущая по линиям сетки, разрежала лишь конечное количество костей домино?

3. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

4. Два зеркала бесконечной длины образуют угол. Луч света падает на одно из них. Докажите, что он отразится от зеркал конечное число раз (даже если угол очень маленький).

5. (а) Назовём *полосой* часть плоскости между двумя параллельными прямыми. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос?
- (б) Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей парабол?
- (в) Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей углов, если сумма их градусных мер равна 359° ?
6. (а) На отрезке длины 1 расположено бесконечно много отрезков длины 0,1. Докажите, что найдется отрезочек длины 0,01, лежащий внутри бесконечного числа отрезков.
- (б) В круге радиуса 1 расположено бесконечно много кругов радиуса 0,1. Докажите, что найдется кружок радиуса 0,01, содержащийся в бесконечном числе кругов.

Планарные графы

15 июля

Опр. Планарный граф — граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер. Плоский граф — изображение планарного графа без пересечений ребер. Ребра плоского графа делят плоскость на части, которые называются гранями.

I. Дан плоский граф. Обозначим количество вершин за V , ребер — за E , граней — за F .

- (а) Докажите, что если граф — дерево, то $V - E + F = 2$.
- (б) Докажите, что при удалении ребра, не являющимся мостом, величина $V - E + F$ не изменяется.
- (в) Для связного плоского графа докажите формулу $V - E + F = 2$.
- (г) Чему равно $V - E + F$, если граф содержит K компонент связности?
1. В стране Озерная 7 озер и 10 каналов (канал соединяет 2 озера), причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?
2. Докажите, что для любого связного плоского графа с хотя бы двумя ребрами, без петель и кратных ребер, выполняется неравенство $2E \geq 3F$.
3. Докажите, что для графа из предыдущей задачи выполняется неравенство $E \leq 3V - 6$.

Контрольный вопрос: что будет, если в графе не более 1 ребра, или есть петли и кратные ребра? Выполняется ли формула $V - E + F = 2$? Выполняется ли неравенство $E \leq 3V - 6$?

4. Как изменятся неравенства 2 и 3 задачи, если граф двудолен (все остальные свойства также выполняются)?
5. Докажите, что полный граф на пяти вершинах (K_5) и полный двудольный граф, обе доли которого содержат 3 вершины ($K_{3,3}$) — не планарны.

Рассмотрим выпуклый многогранник и точку внутри него. Поместим многогранник внутрь сферы с центром в этой точке, и спроецируем его из центра на сферу. У полученного на сфере графа ребра не пересекаются. Почему?

Поставим сферу на плоскость так, чтобы точка, диаметрально противоположная точке касания (полюс), не принадлежала нарисованному на сфере графу. Спроецируем из полюса на плоскость все точки сферы (стереографическая проекция). Получился плоский граф, соответствующий многограннику.

6. Докажите, что для выпуклого многогранника выполняется формула $V - P + G = 2$.
7. Приведите пример многогранника, для которого эта формула не выполняется.
8. Все грани выпуклого многогранника — квадраты. Сколько у него вершин, ребер и граней?
9. Все грани выпуклого многогранника — правильные пятиугольники. Сколько у него вершин, ребер и граней?
10. Все грани выпуклого многогранника — правильные треугольники и в каждой вершине сходится одинаковое число ребер. Сколько у него вершин, ребер и граней?
11. (а) Докажите, что у любого планарного графа есть вершина степени не больше 5.
(б) Докажите, что у выпуклого многогранника есть грань, содержащая не больше 5 ребер.
12. Семиугольник разбили на выпуклые 5 и 6-угольники. Известно, что в каждой вершине семиугольника сходится хотя бы 2 части разбиения, и никакая вершина любого многоугольника не является внутренней точкой стороны другого многоугольника. Докажите, что 5-угольников не менее 13.

Матбой Полупрофи М8 – Профи М7

15 июля

1. Все натуральные числа от 1 до N поставлены в ряд. К каждому числу прибавили номер места в ряду, на котором оно стоит. При каких N могло оказаться, что каждая из полученных сумм является степенью двойки?
2. В бригаде 2024 солдата. Каждый день несколько из них (но не все) идут в дозор. За несколько дней произошло так, что каждый с каждым побывал в дозоре ровно 1 раз. Солдат за участие в дозоре получает 1 рубль. Докажите, что кто-то из солдат заработал не менее 46 рублей.
3. В каждой клетке квадратной таблицы 4×4 записан 0 или 1. Каждую секунду происходит следующее: число в данной клетке становится единицей, если в клетках, соседних по стороне, сумма нечётна, и нулём — в противном случае. Докажите, что в течение первых семи секунд какое-то расположение нулей и единиц обязательно повторится.
4. В трапеции $ABCD$ диагональ BD равна основанию AD , а диагональ AC — боковой стороне CD . Отрезки AC и BD пересекаются в точке E . Точка F на отрезке AD выбрана так, что $EF \parallel CD$. Докажите, что $BE = DF$.

5. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ — перестановка натуральных чисел от 1 до 2024. Найдите наибольшее возможное значение выражения:

$$|| \dots || x_1 - x_2 | - x_3 | - \dots - x_{2023} | - x_{2024} |.$$

6. В строчку в произвольном порядке выписано 999 единиц и несколько нулей. Докажите, что можно вставить плюсы между некоторыми цифрами так, чтобы сумма полученных чисел оказалась степенью тройки.

7. Решите уравнение в натуральных числах:

$$(a + b^2)(b + a^2) = 2^n.$$

8. В треугольнике ABC угол B — острый. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D . На стороне AC взята точка P . Докажите, что $\angle BPD < \angle DPC$.

Матбой Полупрофи М8 – Обычные М9

15 июля

1. В ЛМШ есть 2024 корпуса, занумерованные числами от 1 до 2024, а также 2024 горничные, k -я из которых умеет менять состояние (т.е. открытые закрывать, а закрытые открывать) всех корпусов, номера которых делятся на k . Завхоз может потребовать от горничных открыть любые корпуса по своему выбору. Какие корпуса должен потребовать завхоз, чтобы количество горничных, которых необходимо будет использовать, было наибольшим? Требуется указать все такие списки.

2. При каких n выпуклый n -угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы из каждой вершины исходило чётное число диагоналей?

3. На квадратном континенте все страны прямоугольны. Две страны считаются соседями, если имеют общий отрезок границы ненулевой длины. Назовем страну влиятельной, если у нее не менее десяти соседей. Могут ли не менее трети всех стран быть влиятельными?

4. В остроугольном треугольнике ABC , вписанном в окружность Γ , точка I — центр вписанной окружности, касающиеся AB в точке F . Биссектриса внешнего угла $\angle ACB$ пересекает луч AB в точке L . Точка K на дуге CB окружности Γ , не содержащей A , такова, что $\angle CKI = \angle IKL$. Луч KI пересекает Γ вторично в точке D . Докажите, что $\angle ACF = \angle DCB$.

5. Существует ли натуральное число n , для которого числа $1, 2, \dots, 2n - 1, 2n$ можно по крайней мере 2024 способами разбить на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была точным квадратом?

6. В ряд выписаны 2023 числа, каждое из которых равно 1 или -1 . Для любого числа в ряду можно найти начинающийся с этого числа или заканчивающийся этим числом

отрезок из нескольких последовательных чисел (может быть, одного), сумма которых неположительна. Какую наибольшую сумму могут иметь все числа?

7. В некоторых клетках доски 2020×2020 провели по одной диагонали. Луч, падающий на проведенную диагональ с любой стороны, отражается от неё по правилу «угол падения равен углу отражения». В середине левой стороны левой клетки каждой строки установлен лазер, луч которого выходит вправо, а в середине правой стороны правой клетки каждой строки — лазер, луч которого выходит влево. Луч каждого лазера имеет номер, равный номеру строки, в которой он начинается (строки пронумерованы сверху вниз). Луч становится красным, если он выходит из доски через верхнюю её сторону, и зелёным, если через нижнюю. Известно, что каждый луч стал зелёным или красным. Докажите, что сумма номеров красных лучей меньше или равна сумме номеров зелёных.

8. Произведение $(1^2 + 1)(2^2 + 1)\dots(n^2 + 1)$ делится на квадрат простого числа p . Докажите, что $p < 2n$.

Матбой Полупрофи М8 – Обычные М9 Lite

15 июля

1. В ЛМШ есть 20 корпусов, занумерованных числами от 1 до 20, а также 20 горничных, k -я из которых умеет менять состояние (т.е. открытые закрывать, а закрытые открывать) всех корпусов, номера которых делятся на k . Завхоз может потребовать от горничных открыть любые корпуса по своему выбору. Какие корпуса должен потребовать открыть завхоз, чтобы количество горничных, которых необходимо будет использовать, было наибольшим? Требуется указать все такие списки.

2. При каких n выпуклый n -угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы из каждой вершины исходило чётное число диагоналей?

3. Дан остроугольный треугольник ABC . Перпендикуляр из B к прямой AC пересекает окружность, построенную на AC , как на диаметре, в точках X и Y (X ближе к B , чем Y). Аналогично перпендикуляр из C к прямой AB пересекает окружность, построенную на AB как на диаметре, в точках Z и T (Z ближе к C , чем T). Докажите, что прямые XZ , YT и BC пересекаются в одной точке либо параллельны.

4. В каждом узле бесконечной клетчатой доски со стороной 1 растёт дерево. Два лесоруба нашли бревно длиной 100, которое лежит параллельно горизонтальным линиям доски. Могут ли они его повернуть так, чтобы оно лежало параллельно вертикальным линиям доски? Толщиной бревна и деревьев можно пренебречь.

5. Дано натуральное число m . Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 1$ и $a_n = m + a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ при $n \geq 2$. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, являющихся делителями членов последовательности.

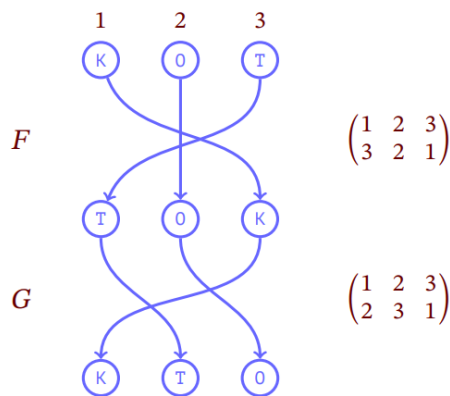
6. Существует ли натуральное число n , для которого числа $1, 2, \dots, 2n - 1, 2n$ можно по крайней мере 2024 способами разбить на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была точным квадратом?
7. В ряд выписаны 2023 числа, каждое из которых равно 1 или -1 . Для любого числа в ряду можно найти начинающийся с этого числа или заканчивающийся этим числом отрезок из нескольких последовательных чисел (может быть, одного), сумма которых неположительна. Какую наибольшую сумму могут иметь все числа?
8. Произведение $(1^2 + 1)(2^2 + 1) \dots (n^2 + 1)$ делится на квадрат простого числа p . Докажите, что $p < 2n$.

Перестановки

17 июля

Опр. Перестановка чисел $1, \dots, n$ — это взаимнооднозначное отображение s которое переводит число k в число $s(k)$. Перестановка может быть записана следующим образом

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & s(3) & \dots & s(n) \end{pmatrix}.$$



I. На шахматной доске отмечены 16 клеток, так что на каждой горизонтали и каждой вертикали находятся по две отмеченные клетки. Доказать, что из этих клеток можно выбрать 8 так, что расставленные в них ладьи не будут бить друг друга.

II. Двадцать школьников решали 20 задач. Известно, что каждую из задач решили 2 школьника и каждый школьник решил по две задачи. Доказать, что можно так организовать разбор задач, что каждый школьник расскажет по одной задаче и каждая задача будет рассказана ровно один раз.

Опр. Перестановка называется циклической (или просто циклом), если она сдвигает некоторые элементы по кругу, а остальные оставляет неподвижными.

Цикл переставляющий элементы $\{a_1, \dots, a_k\}$ записывается в виде (a_1, a_2, \dots, a_k) (то есть $s(a_k) = a_1$).

Два цикла называются независимыми, если никакой элемент не сдвигается первой и второй перестановкой одновременно.

III. Найти перестановку на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, являющуюся композицией следующих циклов: $(134)(235)$; $(23)(245)$.

1. Покажите, что для любых трех перестановок $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$. То есть операция композиции перестановок ассоциативна.

2. Записать в виде композиции независимых циклов следующие перестановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Доказать, что любая перестановка есть композиция независимых циклов.

4. (а) По кругу расположено 2024 карточек. Автомат умеет менять местами любые две карточки. Можно ли сдвинуть все карточки по кругу, используя автомат многократно?

(б) Можно ли сделать то же самое с помощью суперавтомата, который не умеет сразу менять местами любые две карточки, но умеет менять местами две соседние?

5. (а) Доказать, что любой цикл есть композиция циклов длины два. (Такие циклы называются транспозициями.) (б) Докажите то же про произвольную перестановку.

(в) Транспозиция называется элементарной, если она меняет местами два соседних числа. (Т.е. имеет вид $(i, i+1)$). Доказать, что любую перестановку можно разложить в композицию элементарных транспозиций.

IV. На книжной полке в библиотеке стоит собрание сочинений, состоящее из 2024 томов. В библиотеке работает комиссия. Если она обнаруживает пару томов на полке, расположенную так, что том с меньшим номером из этой пары стоит раньше тома с большим номером, то за каждую такую пару библиотекарь получает выговор.

(а) Сколько выговоров получит библиотекарь, если все тома будут расположены в обратном порядке?

(б) При некоторой расстановке книг библиотекарь получил некоторое количество выговоров. Можно ли так переставить две книги, чтобы число выговоров увеличилось на 100?

(в) Библиотекарю удалось расставить два экземпляра этого собрания сочинений в правильном порядке. В библиотеку забрались два хулигана. Каждый из них каждую секунду переставляет какие-нибудь две книги на своей полке. Может ли оказаться так, что у первого из них через 100 секунд книги будут расставлены точно так же, как у второго через 99 секунд?

(г) Доказать, что книги можно расставить так, что библиотекарь получит ровно миллион выговоров.

Опр. Пусть дана некоторая перестановка на множестве чисел $1, 2, \dots, n$. Пара чисел (i, j) называется инверсией данной перестановки, если большее из этих чисел расположено в перестановке раньше меньшего. Перестановка называется чётной (нечётной), если чётно (нечётно) число её инверсий.

6. Найти чётность: (а) перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; (б) произвольной транспозиции.

7. Доказать, что при умножении произвольной перестановки на транспозицию чётность перестановки изменится.

8. Найти чётность цикла: (а) длины 3; (б) длины 4; (в) произвольной длины n .

9. Доказать, что композиция перестановок одинаковой чётности есть чётная перестановка, а композиция перестановок разной чётности — нечетная.
10. Сформулировать определение группы перестановок по аналогии с группой движений. Доказать, что все чётные перестановки образуют группу, а все нечётные не образуют.
11. В городе Урюпинске разрешены только тройные обмены квартир. Может ли в результате нескольких обменов получиться так, что семья Ивановых поменяется квартирами с семьёй Петровых, а все остальные жители останутся при своих квартирах?

Массовый разнобой

17 июля

1. Докажите, что центр масс пятиугольника $ABCDE$ лежит на отрезке, соединяющем вершину A и центр масс четырёхугольника $BCDE$. В каком отношении он делит этот отрезок?
2. Стороны $\triangle ABC$, противолежащие вершинам A , B и C имеют длины a , b и c .
(а) Доказать, что центр масс системы aA , bB , cC — центр вписанной окружности этого треугольника. (б) В каком отношении биссектриса AA_1 делится точкой пересечения биссектрис?
3. Пусть $ABCD$ — описанный четырёхугольник, точки K , L , N , M — точки касания сторон AB , BC , CD и DA с вписанной окружностью. В каком отношении отрезки KN и LM делятся своей точкой пересечения?
4. В угол PAQ вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках P и Q . Прямая BC касается окружности в точке T . Прямые BQ и CP пересекаются в точке M . Доказать, что точки A , T и M лежат на одной прямой.
5. Из четырех точек A , B , C , D никакие три не лежат на одной прямой. Точки пересечения медиан треугольников BCD , ACD , ABD , ABC обозначены соответственно A' , B' , C' , D' . Доказать, что отрезки AA' , BB' , CC' , DD' пересекаются в одной точке Z .
6. Даны четыре точки A , B , C , D . Через K , L , M , N , P , Q обозначены середины отрезков AB , CD , AC , BD , AD , BC . Доказать, что середины отрезков KL , MN и PQ совпадают между собой и с точкой Z из предыдущей задачи.
7. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1. Точка M делит сторону BC в отношении $3 : 5$, считая от вершины B . Прямые AM и BD пересекаются в точке P . Вычислить площадь четырёхугольника $CMPD$.
8. Пусть система материальных точек $m_i M_i$ ($i = 1 \dots n$) с центром масс Z под действием преобразования подобия f (в том числе и движения) переходит систему точек $m_i M'_i$ ($f(M_i) = M'_i$) с центром масс Z' . Докажите, что $Z' = f(Z)$.
9. (а) Докажите, что для любой точки X на прямой AB существуют массы α , β такие, что X — центр масс αA , βB .
(б) Докажите, что для любой точки X внутри треугольника ABC существует набор

масс α , β , γ такой, что X — центр масс αA , βB и γC .

(в) Докажите тоже самое для произвольной точки плоскости.

Вопрос: Однозначно ли определяются массы из предыдущей задачи? И если нет, то что вы можете предложить для того, чтобы эти массы определялись однозначно?

10. (а) Пусть дан многоугольник M и для любой пары его вершин A , B существует движение плоскости f , переводящее M в себя и удовлетворяющее условию $f(A) = B$. Докажите, что вокруг него можно описать окружность. **(б)** Тот же вопрос про многогранник и описанную сферу.

Лемма Холла

18 июля

Опр. Условие разнообразия — любые k юношей в совокупности знакомы с хотя бы k девушками.

Опр. Паросочетание в графе — набор рёбер, в котором никакие два ребра не имеют общих концов. Паросочетание называется *совершенным*, если в нём задействованы все вершины.

Лемма Холла. Есть n юношей и n девушек, некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. В графе есть совершенное паросочетание (можем поженить всех юношей на знакомых им девушках) тогда и только тогда, когда выполнено условие разнообразия.

I. Докажите лемму Холла. Для доказательства достаточности условия разнообразия воспользуйтесь индукцией по числу юношей с разбором двух случаев:

- Для любого k любые k юношей знакомы не менее чем с $k + 1$ девушкой.
- Есть группа из k юношей, которые знакомы ровно с k девушками.

II. (Лемма Холла для арабских стран) Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km .

III. (Лемма Холла с дефицитом) Даны натуральное число s , а также m юношей и несколько девушек. Если для любого $k > s$ любые k юношей знают не меньше, чем $k - s$ девушек, то можно одновременно поженить хотя бы $m - s$ юношей.

1. Докажите, что рёбра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k , можно правильно раскрасить в k цветов (из каждой вершины должны выходить ребра всех цветов по одному разу).

2. Лист бумаги разбит на n многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на n других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот лист можно проткнуть n иголками так, что каждый из $2n$ многоугольников будет проткнут по разу.

- 3.** В школу "Хогвартс" поступило 24 первокурсника. Известно, что в Гриффиндоре учатся храбрые, в Когтеваране — умные, в Пуффендуде — старательные, а в Слизерине — хитрые. Каждый первокурсник обладает ровно двумя этими качествами, и все качества встречаются одинаковое число раз. Докажите, что Распределительная Шляпа сможет поровну поделить первокурсников на факультеты.
- 4.** В таблице 1000×2000 (1000 строк и 2000 столбцов) в некоторых клетках стоит фишка. Известно, что в каждой строке стоит 50 фишек, а в каждом столбце по 25 фишек. Докажите, что можно оставить в каждом столбце ровно одну фишку так, чтобы в каждой строчке осталось ровно по 2 фишки.
- 5.** Прямоугольник $m \times n$ ($m < n$) называется латинским прямоугольником, если он заполнен натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строчке и в каждом столбце стоят разные числа. Докажите, что латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата.
- 6.** Полную колоду из 52 карт разбили на 13 стопок по 4 карты в каждой. Докажите, что всегда можно выбрать по одной карте из каждой стопки, чтобы было выбрано по одной карте каждого достоинства.
- 7.** На конференцию приехали 300 математиков, каждый знает 3 языка из 5 разрешенных на конференции. Докажите, что их можно разбить на три секции по 100 человек, говорящих на одном языке.
- 8.** В прямоугольной таблице $m \times n$ записаны неотрицательные числа. В каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одно положительное число. Более того, если ряд и столбец пересекаются по положительному элементу, тогда суммы чисел в ряде и столбце совпадают. Докажите, что $m = n$.
- 9.** На планете Нибиру живут пришельцы трёх различных гендеров — всего $3M$ особей по M каждого гендера. Каждый пришелец испытывает симпатию как минимум к $\frac{3}{4}M$ пришельцам каждого из двух других гендеров. Брак на планете Нибиру заключается только между тремя пришельцами разных гендеров, испытывающих симпатию друг к другу. Докажите, что всех пришельцев можно разбить на M взаимно симпатизирующих троек и поженить.
- 10.** Дед Мороз хочет подарить n детям подарки. i -тому ребенку нравится $x_i > 0$ подарков. Докажите, что если $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} < 1$, то Дед Мороз может подарить каждому ребенку нравящийся ему подарок.
- 11.** Правильный треугольник со стороной n разбит на правильные треугольники со стороной 1. Назовём треугольник красивым, если он ориентирован так же, как и большой треугольник. Петя вырезал из треугольника n красивых треугольников со стороной 1. Докажите, что оставшуюся доску можно разбить на пары соседних по стороне треугольничков тогда и только тогда, когда для каждого k ($1 \leq k \leq n$) и каждого красивого треугольника со стороной k в нём содержится не более k закрашенных треугольников.

Гомотетия

18 июля

Опр. Гомотетией называют преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X' , обладающую тем свойством, что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы).

Точку O называют центром гомотетии, а число k – коэффициентом гомотетии.

Гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k будем обозначать H_O^k .

I. Докажите, что если $A' = H_O^k(A)$ и $B' = H_O^k(B)$, то $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

II. Докажите, что гомотетия — преобразование подобия.

III. Докажите, что любую окружность можно перевести в любую другую гомотетией и найдите все возможные центры и коэффициенты.

1. Докажите, что для любой точки A верно следующее: $H_O^{\frac{1}{k}}(H_O^k(A)) = A$.

2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M . Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM , BCM , CDM , DAM образуют квадрат.

3. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY . Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

4. Внутри полосы между двумя параллельными прямыми a и b нарисованы две окружности ω_a и ω_b , касающиеся друг друга в точке S . Кроме того, окружность ω_a касается прямой a в точке A ; окружность ω_b касается прямой b в точке B . Докажите, что точка S лежит на отрезке AB .

5. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Прямая l пересекает первую окружность в точках B и C и касается второй окружности в точке D . Докажите, что AD — биссектриса внешнего угла BAC .

6. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и BCD равны. Докажите, что радиусы невписанных окружностей этих треугольников напротив вершины B тоже равны.

7. На плоскости фиксированы окружность ω , точка A на ней и T внутри. Рассматриваются всевозможные хорды BC , проходящие через T . Найдите ГМТ

(а) точек пересечения медиан треугольника ABC ; **(б)** ортоцентров треугольника ABC .

8. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC , а A_0, B_0, C_0 — середины дуг описанной окружности.

(а) Докажите, что прямые A_1A_0 , B_1B_0 и C_1C_0 пересекаются в одной точке.

(б) Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC . Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI .

9. Пусть AK и BL — высоты остроугольного треугольника ABC , а ω — невписанная окружность треугольника ABC , касающаяся отрезка AB . Общие внутренние касательные к окружностям (CKL) и ω пересекают прямую AB в точках P и Q . Докажите, что $AP = BQ$.

Комбигеометрия

18 июля

1. На плоскости отмечено n точек. Известно, что любые 4 из них лежат в вершинах выпуклого четырехугольника. Докажите, что все точки лежат в вершинах выпуклого n -угольника.
2. На плоскости отмечено n точек так, что площадь любого треугольника с вершинами в отмеченных точках не превышает 1. Докажите, что все точки можно поместить в треугольник площади не больше 4.
3. На плоскости отмечено n точек, не лежащих на одной прямой. Докажите, что существует замкнутая ломаная без самопересечений с вершинами в этих точках.
4. 68 детей параллели М8 устроили гидробой. Они встали на площадке так, что все попарные расстояния между ними различны. Затем каждый облил из ведра ближайшего к нему человека. Докажите, что никто не оказался облит больше 5 раз.
5. Докажите, что для любого множества из хотя бы двух точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, найдется прямая, содержащая ровно 2 точки.
6. На плоскости проведено 300 прямых общего положения. Докажите, что среди областей, на которые они разбивают плоскость, найдется хотя бы 100 треугольников.
7. Дан выпуклый многоугольник площади 1.
(а) Докажите, что его можно поместить в прямоугольник площади не больше 2;
(б) Докажите, что в него можно поместить прямоугольник площади хотя бы $\frac{1}{8}$.
8. На плоскости дано N точек, среди попарных расстояний между которыми не более, чем n различных. Докажите, что $N \leq n^2 + 2$.

Поворот

19 июля

- I. Докажите, что композиция двух поворотов на углы в сумме не кратные 360° является поворотом. В какой точке находится центр и чему равен угол этого поворота? Рассмотрите случай, когда сумма углов кратна 360° .
- II. Дан равносторонний треугольник ABC , O — центр треугольника. Найдите композицию поворотов: (а) $R_B^{-60^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$; (б) $R_O^{-120^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$; (в) $R_O^{120^\circ} \circ R_A^{60^\circ}$.
- III. На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC вне его построены правильные треугольники BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 . Докажите, что композиция поворотов с центрами A_1 , B_1 , C_1 на углы 60° есть центральная симметрия. Найдите ее центр.
1. Археологи нашли старинный свиток, в котором было написано: «Встань около березы, и дойди от нее, не сворачивая, до колодца, а у колодца поверни под прямым углом налево и пройди такое же расстояние. В том месте, где ты оказался, вбей колышек в землю. Теперь опять встань у березы, и дойди от нее, не сворачивая, до дуба, поверни

под прямым углом направо и пройди такое же расстояние. Вбей второй колышек в землю. Посередине между колышками зарыт клад». Оказалось, что колодец и дуб по-прежнему на месте, но березы уже нет. Смогут ли археологи найти клад?

2. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACP и BCQ . Найти углы треугольника, у которого вершины совпадают с серединой M стороны AB , точкой P и центром O треугольника BCQ .

3. (Теорема Наполеона) На сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники. Докажите, что их центры — вершины правильного треугольника.

4. Постройте треугольник, если известны три точки, являющиеся вершинами правильных треугольников, построенных вне треугольника на его сторонах.

5. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая, пересекающая ω_1 и ω_2 в точках C и D (A на отрезке CD). Пусть M и N — середины дуг BC и BD соответственно, не содержащих точку A , K — середина CD . Докажите, что точки A , K , M , N лежат на одной окружности.

6. На сторонах четырехугольника, вне его построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами четырехугольника, у которого диагонали равны и перпендикулярны.

7. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ как на диаметрах построили полуокружности. На AB и CD — внешним образом, а на BC и DA — внутренним. После чего отметили точки K , L , M , N — середины дуг AB , BC , CD и DA соответственно. Они образуют четырехугольник. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

8. На сторонах AB и BC вписанного четырехугольника $ABCD$ выбраны такие точки K и L соответственно, что $AK = CD$ и $CL = AD$. Пусть M — середина KL . Докажите, что $\angle AMC = 90^\circ$.

Изогонали и их частные случаи

20 июля

Опр. *Изогонали относительно данного угла* — прямые, симметричные относительно биссектрисы этого угла.

Теорема об изогоналях. Пусть OB и OC — изогонали угла AOD . Прямые AC и BD пересекаются в точке Q , прямые AB и CD — в точке P (если AB и CD параллельны, то рассматриваем луч OP , параллельный им). Тогда OP и OQ — также изогонали относительно угла AOD .

I. Докажите теорему об изогоналях.

Опр. *Изогонально сопряжённые точки в треугольнике* — точки, лежащие на соответствующих изогоналях относительно всех углов треугольника.

Опр. *Изогональное сопряжение* — преобразование, ставящее точке, не лежащей на

описанной окружности данного треугольника, в соответствие изогонально сопряжённую ей.

II. Докажите корректность определения изогонально сопряжённой точки.

Опр. Симедиана — прямая, изогональная медиане относительно угла, из которого она выходит.

III. Точка S лежит на стороне BC треугольника ABC . Тогда эквивалентны условия:

• AS — симедиана; • $\frac{\rho(S, AB)}{\rho(S, AC)} = \frac{AB}{AC}$; • $\frac{BS}{CS} = \frac{AB^2}{AC^2}$;

IV. Точка X внутри треугольника ABC такова, что $\angle BAX = \angle ACX$ и $\angle ABX = \angle CAX$. Тогда AX — симедиана.

V. (Точка Лемуана) Симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

1. В треугольнике ABC чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что AA_1 — высота.

2. Пусть BA_1 и BC_1 — внешние биссектрисы угла B треугольника ABC , $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90^\circ$. Докажите, что A_1C и C_1A пересекаются на биссектрисе угла ABC .

3. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в вершинах B и C пересекаются в точке P . Докажите, что AP — симедиана в данном треугольнике.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA' , на отрезке AA' выбрана точка X . Прямая BX пересекает AC в точке B' , а прямая CX пересекает AB в точке C' . Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P , а отрезки $A'C'$ и BB' пересекаются в точке Q . Докажите, что углы PAC и QAB равны.

5. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка Q лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что $\angle AQD = \angle CQB$ и прямая CD разделяет точки P и Q . Докажите, что $\angle BQP = \angle DAQ$.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a — центры внеписанных окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD .

7. На диаметре KW окружности взята точка M , отличная от центра окружности. Лучи MA и MD таковы, что $\angle KMA = \angle WMD < 90^\circ$ (A и D — точки пересечения этих лучей с окружностью — лежат в одной полуплоскости относительно прямой KW). Докажите, что все прямые AD , построенные таким образом, пересекают прямую KW в одной и той же точке P .

8. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что симедиана из вершины I треугольника BIC пересекает описанную окружность в середине дуги BAC .

9. Пусть в треугольнике ABC даны две пары изогонально сопряженных точек X, X' и Y, Y' . Тогда точки пересечения XY с $X'Y'$ и XY' с $X'Y$ тоже изогонально сопряжены.

Заключительная олимпиада

21 июля

Довывод

1. В вершинах тетраэдра записали 4 разных натуральных числа. На каждом ребре написали произведение этих чисел. В каждой грани записали произведение трех чисел в ее вершинах. Внутри тетраэдра записали число, равное произведению чисел во всех его вершинах. Эти числа сложили и получили 2024. Какие числа были написаны в вершинах?
2. В состоящем из n элементов множестве M выбрано несколько подмножеств. При этом каждое невыбранное подмножество множества M представимо в виде пересечения некоторых выбранных подмножеств. Какое наименьшее число подмножеств могло быть выбрано?
3. В треугольнике ABC на стороне AB и на продолжении стороны BC за точку C отмечены точки E и F соответственно так, что $AE = CF = AC$. Прямые EC и AF пересекаются в точке D , H — основание перпендикуляра, опущенного из D на прямую AC . Докажите, что длина AH равна полупериметру треугольника ABC .
4. Для положительных x_i таких, что $x_1 + \dots + x_{10} = 1$, найдите наибольшее значение выражения

$$(1 + 2x_1) \cdot (3 + 4x_2) \cdot (7 + 8x_3) \cdot \dots \cdot (1023 + 1024x_{10}).$$

5. Возьмём всевозможные квадратные трёхчлены с натуральными коэффициентами, не превосходящими 100. Каких трёхчленов больше: имеющих хотя бы один действительный корень, или не имеющих ни одного?

Вывод

6. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

7. В клубе джентльменов каждые два джентльмена — либо друзья, либо враги. Известно, что у каждого ровно 75 врагов. Кроме того, в клубе выполняется правило: «Враг моего друга — мой враг». Сколько джентльменов могло быть в клубе?
8. Биссектрисы AA_1 и CC_1 прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) пересекаются в точке I . Перпендикуляр, опущенный из вершины B на прямую AI , пересекает прямую CI в точке C_0 ; перпендикуляр, опущенный из вершины B на прямую CI , пересекает прямую AI в точке A_0 . Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_0BC_0 лежит на прямой A_1C_1 .
9. Решите в целых числах уравнение $n^2 + 5 = m^3$.