

# Теорема Шаля

10 июля

**Опр.** Движение — это преобразование плоскости, которое сохраняет расстояние между любыми двумя точками, т.е. расстояние между двумя точками равно расстоянию между их образами.

**I.** Докажите, что **(а)** композиция двух движений — движение;

**(б)** отображение, обратное к движению — тоже движение.

**II.** Докажите, что **(а)** если два движения совпадают в точках  $A$  и  $B$ , то они совпадают в каждой точке прямой  $AB$ ;

**(б)** если два движения совпадают в трех точках, не лежащих на одной прямой, то они совпадают во всех точках плоскости.

**1.** Докажите, что **(а)** всякий треугольник можно перевести во всякий равный ему композицией не более, чем трех осевых симметрий;

**(б)** всякое движение плоскости является композицией не более, чем трех осевых симметрий.

**2.** Найдите композицию двух осевых симметрий: **(а)** с пересекающимися осями; **(б)** с параллельными осями.

**3.** Докажите, что **(а)** всякий перенос можно представить в виде композиции двух осевых симметрий с параллельными осями, перпендикулярными направлению переноса,

**(б)** всякий поворот — в виде композиции двух осевых симметрий с осями, пересекающимися в центре поворота.

**4.** Что является композицией параллельного переноса и поворота?

**5.** Докажите, что композиция осевой симметрии с осью  $l$  и переноса на вектор  $p \perp l$ , является осевой симметрией с осью  $m \parallel l$ .

**6.** Докажите, что композиция осевой симметрии и переноса на ненулевой вектор, параллельный оси симметрии, не является ни переносом, ни поворотом, ни осевой симметрией.

**7.** Докажите, что композиция осевой симметрии и переноса на вектор, не перпендикулярный оси, есть скользящая симметрия.

**8.** Докажите, что композиция осевой симметрии и поворота есть осевая или скользящая симметрия.

**9.** (Теорема Шаля) все движения плоскости — это переносы, повороты, осевые и скользящие симметрии.

**Опр.** Назовем треугольник  $ABC$  положительно ориентированным (отрицательно ориентированным), если перемещение по его контуру  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  происходит против часовой стрелки (по часовой стрелке).

**10.** Докажите, что не существует такого движения  $D$ , что  $D \circ D$  — осевая симметрия.

# Теорема Шаля

10 июля

**Опр.** Движение — это преобразование плоскости, которое сохраняет расстояние между любыми двумя точками, т.е. расстояние между двумя точками равно расстоянию между их образами.

**I.** Докажите, что **(а)** композиция двух движений — движение;

**(б)** отображение, обратное к движению — тоже движение.

**II.** Докажите, что **(а)** если два движения совпадают в точках  $A$  и  $B$ , то они совпадают в каждой точке прямой  $AB$ ;

**(б)** если два движения совпадают в трех точках, не лежащих на одной прямой, то они совпадают во всех точках плоскости.

**1.** Докажите, что **(а)** всякий треугольник можно перевести во всякий равный ему композицией не более, чем трех осевых симметрий;

**(б)** всякое движение плоскости является композицией не более, чем трех осевых симметрий.

**2.** Найдите композицию двух осевых симметрий: **(а)** с пересекающимися осями; **(б)** с параллельными осями.

**3.** Докажите, что **(а)** всякий перенос можно представить в виде композиции двух осевых симметрий с параллельными осями, перпендикулярными направлению переноса,

**(б)** всякий поворот — в виде композиции двух осевых симметрий с осями, пересекающимися в центре поворота.

**4.** Что является композицией параллельного переноса и поворота?

**5.** Докажите, что композиция осевой симметрии с осью  $l$  и переноса на вектор  $p \perp l$ , является осевой симметрией с осью  $m \parallel l$ .

**6.** Докажите, что композиция осевой симметрии и переноса на ненулевой вектор, параллельный оси симметрии, не является ни переносом, ни поворотом, ни осевой симметрией.

**7.** Докажите, что композиция осевой симметрии и переноса на вектор, не перпендикулярный оси, есть скользящая симметрия.

**8.** Докажите, что композиция осевой симметрии и поворота есть осевая или скользящая симметрия.

**9.** (Теорема Шаля) все движения плоскости — это переносы, повороты, осевые и скользящие симметрии.

**Опр.** Назовем треугольник  $ABC$  положительно ориентированным (отрицательно ориентированным), если перемещение по его контуру  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  происходит против часовой стрелки (по часовой стрелке).

**10.** Докажите, что не существует такого движения  $D$ , что  $D \circ D$  — осевая симметрия.