

Конечное в бесконечном

10 июля

1. Король стоит в углу шахматной доски. Продлим её вправо и влево на миллион клеток. Может ли король обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно один раз? А если доску продлить влево и вправо до бесконечности?
2. На бесконечном листе клетчатой бумаги укладывают кости домино размером 1×2 так, что они покрывают все клетки. Можно ли при этом добиться того, чтобы каждая прямая, идущая по линиям сетки, разрежала лишь конечное количество костей домино?
3. (а) Докажите, что в любом конечном графе можно расставить в вершинах натуральные числа так, чтобы числа в двух вершинах были взаимно просты тогда и только тогда, когда эти вершины не смежны.
(б) Верно ли то же самое для произвольного бесконечного графа?
- (в) Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots такая что $(a_n, a_m) = 1$ тогда и только тогда, когда $|m - n| = 1$?
4. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.
5. Два зеркала бесконечной длины образуют угол. Луч света падает на одно из них. Докажите, что он отразится от зеркал конечное число раз (даже если угол очень маленький).
6. (а) Назовём *полосой* часть плоскости между двумя параллельными прямыми. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос?
(б) Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей парабол?
(в) Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей углов, если сумма их градусных мер равна 359° ?
7. (а) На отрезке длины 1 расположено бесконечно много отрезков длины 0,1. Докажите, что найдется отрезочек длины 0,01, лежащий внутри бесконечного числа отрезков.
(б) В круге радиуса 1 расположено бесконечно много кругов радиуса 0,1. Докажите, что найдется кружок радиуса 0,01, содержащийся в бесконечном числе кругов.

Конечное в бесконечном

10 июля

1. Король стоит в углу шахматной доски. Продлим её вправо и влево на миллион клеток. Может ли король обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно один раз? А если доску продлить влево и вправо до бесконечности?
2. На бесконечном листе клетчатой бумаги укладывают кости домино размером 1×2 так, что они покрывают все клетки. Можно ли при этом добиться того, чтобы каждая прямая, идущая по линиям сетки, разрежала лишь конечное количество костей домино?
3. (а) Докажите, что в любом конечном графе можно расставить в вершинах натуральные числа так, чтобы числа в двух вершинах были взаимно просты тогда и только тогда, когда эти вершины не смежны.
(б) Верно ли то же самое для произвольного бесконечного графа?
- (в) Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots такая что $(a_n, a_m) = 1$ тогда и только тогда, когда $|m - n| = 1$?
4. Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.
5. Два зеркала бесконечной длины образуют угол. Луч света падает на одно из них. Докажите, что он отразится от зеркал конечное число раз (даже если угол очень маленький).
6. (а) Назовём *полосой* часть плоскости между двумя параллельными прямыми. Можно ли покрыть плоскость конечным числом полос?
(б) Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей парабол?
(в) Можно ли покрыть плоскость конечным числом внутренностей углов, если сумма их градусных мер равна 359° ?
7. (а) На отрезке длины 1 расположено бесконечно много отрезков длины 0,1. Докажите, что найдется отрезочек длины 0,01, лежащий внутри бесконечного числа отрезков.
(б) В круге радиуса 1 расположено бесконечно много кругов радиуса 0,1. Докажите, что найдется кружок радиуса 0,01, содержащийся в бесконечном числе кругов.