

Лемма Не-Бернсайда

19 июля

1. Пусть p — простое число. Разобьём круг на p секторов и будем красить в a цветов. Будем считать раскраски эквивалентными, если их можно перевести друг в друга поворотом.

(а) Сколько раскрасок может лежать в одном классе эквивалентности?

(б) Сделайте отсюда вывод, что $a^p \equiv a \pmod{p}$.

2. Назовём *узором* раскраску таблицы $n \times n$ в два цвета. Одной операцией разрешается перекрасить все клетки любых столбцов или строк в противоположные цвета.

(а) Докажите, что если применить все 2^{2n} операций к одному и тому же узору, то полученные таким образом узоры будут встречаться ровно по два раза.

(б) Будем считать узоры одинаковыми, если один можно перевести в другой при помощи одной операции. Сколько существует различных узоров?

3. Для правильного n -угольника на плоскости рассмотрим множество D_n всех движений, которые переводят его в себя.

(а) Рассмотрим вершины A и B . Докажите, что среди элементов D_n существует ровно два движения, которые переводят одну в другую.

(б) Сколько всего элементов в множестве D_n ? Верно ли, что любое такое движение можно представить в виде композиции симметрии и поворота?

4. Пусть над элементами некоего множества X разрешено совершать некоторые действия $G = \{f : X \rightarrow X\}$. При этом, выполнены три свойства:

- Тожественное преобразование id_X принадлежит G .
- Композиция действий из G также принадлежит G .
- Если f принадлежит G , то оно обратимо, и обратное f^{-1} тоже принадлежит G .

Назовём *орбитой* элемента $x \in X$ множество $Gx = \{f(x) | f \in G\} \subseteq X$.

Назовём *стабилизатором* элемента $x \in X$ множество $Sx = \{g \in G | g(x) = x\} \subseteq G$.

Докажите, что

(а) Для любого $y \in Gx$ выполнено $|Sy| = |Sx|$. Как следствие, $|G| = |Gx| \cdot |Sx|$.

(б) Обозначим через s общее число орбит. Докажите, что выполнено равенство

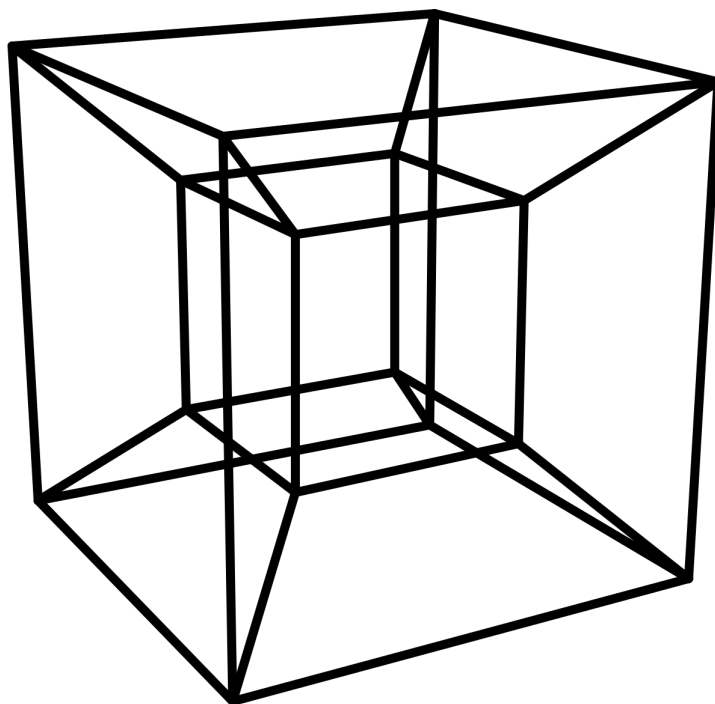
$$s \cdot |G| = \sum_{g \in G} \text{Fix}(g),$$

где $\text{Fix}(g)$ — это число тех элементов X , которые остаются на месте под действием g .

5. Сколько существует способов покрасить вершины правильного шестиугольника в k цветов с точностью до поворота?

6. В квадрате проведена диагональ. Сколько существует способов покрасить пять отрезков (стороны квадрата и диагональ) в k цветов с точностью до самосовмещения?

7. (а) Сколько всего существует вращений куба, при которых он переходит в себя?
- (б) Посчитайте отдельно число вращений, если ось вращения проходит через две вершины; через середины двух сторон; через центры двух граней.
- (в) Рассмотрим все раскраски граней куба в k цветов. Для каждого типа вращения подсчитайте, сколько раскрасок переводятся в себя.
- (г) Сколько существует различных (с точностью до вращения) раскрасок граней куба в k цветов?
- (д) В центре каждой грани куба нарисовали стрелочку \uparrow , \downarrow , \leftarrow или \rightarrow . Сколько (с точностью до вращения) существует таких расстановок?
8. Восемь вершин четырёхмерного гиперкуба расположены в точках с координатами (x, y, z, t) , где все переменные принимают значения 0 или 1. Рёбра проводятся в том и только том случае, если у вершин различается ровно одна координата. Расстояния в четырёхмерном пространстве вычисляются по аналогии с трёхмерным. Посчитайте, сколько самосовмещений существует у четырёхмерного гиперкуба.



(см. также en.wikipedia.org/wiki/Tesseract)

Лемма Не-Бернсайда

19 июля

1. Пусть p — простое число. Разобьём круг на p секторов и будем красить в a цветов. Будем считать раскраски эквивалентными, если их можно перевести друг в друга поворотом.

(а) Сколько раскрасок может лежать в одном классе эквивалентности?

(б) Сделайте отсюда вывод, что $a^p \equiv a \pmod{p}$.

2. Назовём *узором* раскраску таблицы $n \times n$ в два цвета. Одной операцией разрешается перекрасить все клетки любых столбцов или строк в противоположные цвета.

(а) Докажите, что если применить все 2^{2n} операций к одному и тому же узору, то полученные таким образом узоры будут встречаться ровно по два раза.

(б) Будем считать узоры одинаковыми, если один можно перевести в другой при помощи одной операции. Сколько существует различных узоров?

3. Для правильного n -угольника на плоскости рассмотрим множество D_n всех движений, которые переводят его в себя.

(а) Рассмотрим вершины A и B . Докажите, что среди элементов D_n существует ровно два движения, которые переводят одну в другую.

(б) Сколько всего элементов в множестве D_n ? Верно ли, что любое такое движение можно представить в виде композиции симметрии и поворота?

4. Пусть над элементами некоего множества X разрешено совершать некоторые действия $G = \{f : X \rightarrow X\}$. При этом, выполнены три свойства:

- Тожественное преобразование id_X принадлежит G .
- Композиция действий из G также принадлежит G .
- Если f принадлежит G , то оно обратимо, и обратное f^{-1} тоже принадлежит G .

Назовём *орбитой* элемента $x \in X$ множество $Gx = \{f(x) | f \in G\} \subseteq X$.

Назовём *стабилизатором* элемента $x \in X$ множество $Sx = \{g \in G | g(x) = x\} \subseteq G$.

Докажите, что

(а) Для любого $y \in Gx$ выполнено $|Sy| = |Sx|$. Как следствие, $|G| = |Gx| \cdot |Sx|$.

(б) Обозначим через s общее число орбит. Докажите, что выполнено равенство

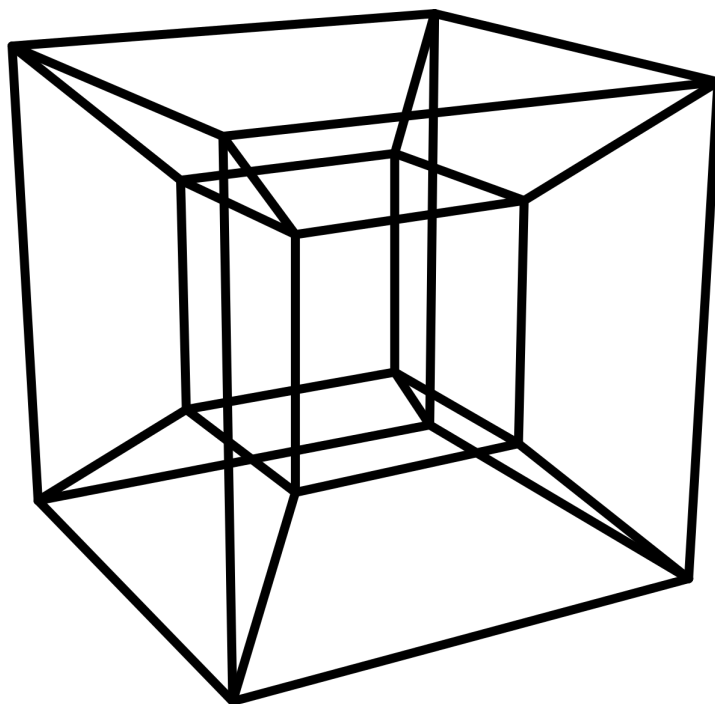
$$s \cdot |G| = \sum_{g \in G} \text{Fix}(g),$$

где $\text{Fix}(g)$ — это число тех элементов X , которые остаются на месте под действием g .

5. Сколько существует способов покрасить вершины правильного шестиугольника в k цветов с точностью до поворота?

6. В квадрате проведена диагональ. Сколько существует способов покрасить пять отрезков (стороны квадрата и диагональ) в k цветов с точностью до самосовмещения?

7. (а) Сколько всего существует вращений куба, при которых он переходит в себя?
- (б) Посчитайте отдельно число вращений, если ось вращения проходит через две вершины; через середины двух сторон; через центры двух граней.
- (в) Рассмотрим все раскраски граней куба в k цветов. Для каждого типа вращения подсчитайте, сколько раскрасок переводятся в себя.
- (г) Сколько существует различных (с точностью до вращения) раскрасок граней куба в k цветов?
- (д) В центре каждой грани куба нарисовали стрелочку \uparrow , \downarrow , \leftarrow или \rightarrow . Сколько (с точностью до вращения) существует таких расстановок?
8. Восемь вершин четырёхмерного гиперкуба расположены в точках с координатами (x, y, z, t) , где все переменные принимают значения 0 или 1. Рёбра проводятся в том и только том случае, если у вершин различается ровно одна координата. Расстояния в четырёхмерном пространстве вычисляются по аналогии с трёхмерным. Посчитайте, сколько самосовмещений существует у четырёхмерного гиперкуба.



(см. также en.wikipedia.org/wiki/Tesseract)