

# Лемма Бернсайда

8 июля

**I. (а)** Сколькими способами можно раскрасить в три цвета (а, b, c) клетки квадрата  $5 \times 5$ ?

**(б)** Сколько будет способов, если раскраски, симметричные относительно вертикальной средней линии, считаются одинаковыми?

**(в)** Сколько будет способов, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом на угол, кратный  $90^\circ$ , считаются одинаковыми?

**(г)** Сколько будет способов, если и повороты, и симметрии отождествляют раскраски? Введем несколько определений.

Пусть  $X$  — множество раскрасок «без условий», как в пункте **(а)**. Элементы множества  $X$  будем обозначать буквой  $x$ .

Пусть  $G$  — множество преобразований, которые можно делать с  $x$  (например, повороты, перевороты и т.п.). Элементы  $G$  обозначим как  $f, g, h$ . По сути, мы можем находить  $f(x), g(x), g(f(x)) \in X$ . В последнем случае преобразование называется композицией, и его можно обозначить  $g \circ f$ .

**Опр.** Множество  $G$  называют группой преобразований, если оно обладает свойствами:

**(а)** тождественное преобразование принадлежит  $G$ ;

**(б)** композиция преобразований из  $G$  принадлежит  $G$ ;

**(в)** для каждого  $g \in G$  есть обратное преобразование  $f = g^{-1}$ , принадлежащее  $G$ ;

**(г)** выполняется ассоциативность:  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ . (А коммутативность не обязательна!)

Множество раскрасок  $T_x = \{g(x) \in X | g \in G\}$  называется орбитой элемента  $x$ .

Множество преобразований  $S_x = \{g \in G | g(x) = x\}$  называется стабилизатором элемента  $x$ .

**II. (а)** Пусть  $y \in T_x$ . Докажите, что  $T_y = T_x$ .

**(б)** Выберем одну раскраску  $x$ . Докажите, что  $S_x$  является группой преобразований.

**(в)** Пусть множество  $S_x$  содержит  $k$  элементов  $g_1, g_2, \dots, g_k$ , и  $f$  — произвольное преобразование из  $G$ . Докажите, что  $f \circ g_1(x) = f \circ g_2(x) = \dots = f \circ g_k(x)$ .

**(г)** Докажите, что все  $f \circ g_i$  являются разными элементами  $G$ , хоть и для элемента  $x$  выполнены равенства.

**(д)** Докажите, что если  $f(x) = h(x)$ , то множества вида  $f \circ g_i$  и  $h \circ g_i$  совпадают.

**(е)** Докажите, что  $|S_x| = \frac{|G|}{|T_x|}$ .

**(ж)** Пусть множество  $T_x$  содержит  $m$  элементов  $x_1 = x, x_2, x_3, \dots, x_m$ . Докажите, что тогда

$$|G| = |S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_m}|.$$

**(з)** Пусть  $X$  содержит  $n$  элементов, т.е. раскрасок «без условий». Пусть  $Y$  — множество раскрасок «с условиями», т.е. множество всех орбит в  $X$ . Докажите, что тогда

выполняется равенство

$$|S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_n}| = |G| \cdot |Y|.$$

**(и)** Пусть  $N_i$ , где  $1 \leq i \leq |G|$  — это количество элементов  $X$ , переходящих в себя при преобразовании  $g_i$ . Докажите, что  $|S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_n}| = N_1 + N_2 + \dots + N_{|G|}$ .

**III.** (Лемма Бернсайда) Количество различных раскрасок (орбит) равно среднему арифметическому количеству раскрасок, не меняющихся при каждом преобразовании, т.е.

$$|Y| = \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_{|G|}}{|G|}.$$

1. Снова решите задачу 1.
2. Из проволоки согнули равносторонний треугольник. Его стороны могут быть окрашены в один из  $n$  цветов. Сколько существует движений, переводящих треугольник в себя? Сколько существует различных раскрасок?
3. Сколькими способами можно раскрасить бусы из  $p$  бусинок в  $a$  цветов с точностью до поворота? ( $p$  — простое).
4. Сколько различных бус для 40 бусинок и  $a$  цветов с точностью до поворота?
5. Сколько различных бус можно составить из 10 красных и 4 синих бусин с точностью до поворота и переворота?
6. Сколькими способами можно раскрасить вершины куба в 3 цвета?
7. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в 3 цвета?
8. Сколькими способами можно раскрасить ребра куба в 3 цвета?
9. Сколько различных шестиугольников можно вписать в правильный 15-угольник?

# Лемма Бернсайда

8 июля

**I. (а)** Сколькими способами можно раскрасить в три цвета (а, b, c) клетки квадрата  $5 \times 5$ ?

**(б)** Сколько будет способов, если раскраски, симметричные относительно вертикальной средней линии, считаются одинаковыми?

**(в)** Сколько будет способов, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом на угол, кратный  $90^\circ$ , считаются одинаковыми?

**(г)** Сколько будет способов, если и повороты, и симметрии отождествляют раскраски? Введем несколько определений.

Пусть  $X$  — множество раскрасок «без условий», как в пункте **(а)**. Элементы множества  $X$  будем обозначать буквой  $x$ .

Пусть  $G$  — множество преобразований, которые можно делать с  $x$  (например, повороты, перевороты и т.п.). Элементы  $G$  обозначим как  $f, g, h$ . По сути, мы можем находить  $f(x), g(x), g(f(x)) \in X$ . В последнем случае преобразование называется композицией, и его можно обозначить  $g \circ f$ .

**Опр.** Множество  $G$  называют группой преобразований, если оно обладает свойствами:

**(а)** тождественное преобразование принадлежит  $G$ ;

**(б)** композиция преобразований из  $G$  принадлежит  $G$ ;

**(в)** для каждого  $g \in G$  есть обратное преобразование  $f = g^{-1}$ , принадлежащее  $G$ ;

**(г)** выполняется ассоциативность:  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ . (А коммутативность не обязательна!)

Множество раскрасок  $T_x = \{g(x) \in X | g \in G\}$  называется орбитой элемента  $x$ .

Множество преобразований  $S_x = \{g \in G | g(x) = x\}$  называется стабилизатором элемента  $x$ .

**II. (а)** Пусть  $y \in T_x$ . Докажите, что  $T_y = T_x$ .

**(б)** Выберем одну раскраску  $x$ . Докажите, что  $S_x$  является группой преобразований.

**(в)** Пусть множество  $S_x$  содержит  $k$  элементов  $g_1, g_2, \dots, g_k$ , и  $f$  — произвольное преобразование из  $G$ . Докажите, что  $f \circ g_1(x) = f \circ g_2(x) = \dots = f \circ g_k(x)$ .

**(г)** Докажите, что все  $f \circ g_i$  являются разными элементами  $G$ , хоть и для элемента  $x$  выполнены равенства.

**(д)** Докажите, что если  $f(x) = h(x)$ , то множества вида  $f \circ g_i$  и  $h \circ g_i$  совпадают.

**(е)** Докажите, что  $|S_x| = \frac{|G|}{|T_x|}$ .

**(ж)** Пусть множество  $T_x$  содержит  $m$  элементов  $x_1 = x, x_2, x_3, \dots, x_m$ . Докажите, что тогда

$$|G| = |S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_m}|.$$

**(з)** Пусть  $X$  содержит  $n$  элементов, т.е. раскрасок «без условий». Пусть  $Y$  — множество раскрасок «с условиями», т.е. множество всех орбит в  $X$ . Докажите, что тогда

выполняется равенство

$$|S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_n}| = |G| \cdot |Y|.$$

(и) Пусть  $N_i$ , где  $1 \leq i \leq |G|$  — это количество элементов  $X$ , переходящих в себя при преобразовании  $g_i$ . Докажите, что  $|S_{x_1}| + |S_{x_2}| + \dots + |S_{x_n}| = N_1 + N_2 + \dots + N_{|G|}$ .

III. (Лемма Бернсайда) Количество различных раскрасок (орбит) равно среднему арифметическому количеству раскрасок, не меняющихся при каждом преобразовании, т.е.

$$|Y| = \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_{|G|}}{|G|}.$$

1. Снова решите задачу 1.
2. Из проволоки согнули равносторонний треугольник. Его стороны могут быть окрашены в один из  $n$  цветов. Сколько существует движений, переводящих треугольник в себя? Сколько существует различных раскрасок?
3. Сколькими способами можно раскрасить бусы из  $p$  бусинок в  $a$  цветов с точностью до поворота? ( $p$  — простое).
4. Сколько различных бус для 40 бусинок и  $a$  цветов с точностью до поворота?
5. Сколько различных бус можно составить из 10 красных и 4 синих бусин с точностью до поворота и переворота?
6. Сколькими способами можно раскрасить вершины куба в 3 цвета?
7. Сколькими способами можно раскрасить грани куба в 3 цвета?
8. Сколькими способами можно раскрасить ребра куба в 3 цвета?
9. Сколько различных шестиугольников можно вписать в правильный 15-угольник?