

# Счёт в точках

12 июля

**Напоминание.** *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются *эквивалентными*, если  $ABDC$  — параллелограмм. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами*. Вектора называются *коллинеарными*, если при откладывании от одной точки их общее начало и их концы лежат на одной прямой.

**I.** Упростите выражение **(а)**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA}$ ; **(б)**  $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DB}$ .

**II.** (Лемма о перестановке) Докажите, что  $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{BX}$ .

**Идея.** Направленный отрезок можно мыслить как разность точек  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ . А также можно говорить, что точка  $Q$  получается из точки  $P$  смещением на вектор  $\overrightarrow{PQ}$  или  $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ . Тогда любое выражение из векторов и точек, дающее в результате одну или ноль точек имеет геометрический смысл, определённый однозначно. Доказать это поможет лемма о перестановке: неважно, как разбиты на вектора точки, важно только то, что одни точки — начала, другие — концы.

(Можно считать, что точки — это краткая запись для векторных выражений. Например,  $Q = P + \overrightarrow{PQ} \iff \forall O \in \mathbb{E}_2 \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ .)

**Опр.** По определению, для коллинеарных векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  существует число  $\lambda$  такое, что  $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ . Тогда *отношением (со)направленных отрезков*  $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$  и  $\overrightarrow{CD} = \vec{y}$  будем называть то самое  $\lambda$ , т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} = \lambda \vec{y} = \lambda \overrightarrow{CD} \iff \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\vec{x}}{\vec{y}} = \lambda.$$

**Опр.** *Отношением трёх точек (простым отношением точек)*, лежащих на одной прямой,  $(AB, X)$  будем называть величину

$$(AB, X) = \frac{\dot{X} - \dot{A}}{\dot{B} - \dot{X}} = \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}}.$$

Говорят, что  $X$  *делит*  $\overrightarrow{AB}$  в отношении  $(AB, X)$ .

**1.** (Правило рычага) Если  $\dot{X}$  делит  $\overrightarrow{AB}$  в отношении  $\frac{k}{m}$ , то  $\dot{X} = \frac{m\dot{A} + k\dot{B}}{k+m}$ .

**2. (а)** Пусть  $M$  — середина отрезка  $AB$ . Докажите, что  $\dot{M} = \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{B})$ . **(б)** Пусть  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ . **(в)** Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\dot{M} = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C})$ .

**(г)** Если  $ABCD$  — параллелограмм, то  $\dot{A} + \dot{C} = \dot{B} + \dot{D}$ .

**3.** Найдите точку пересечения **(а)** биссектрис; **(б)** высот; **(в)** симедиан треугольника  $ABC$ , где  $A(-12; -30)$ ,  $B(44; 12)$ ,  $C(-28; 33)$ .

**4.** Точки  $M$ ,  $K$ ,  $N$  и  $L$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$  пятиугольника  $ABCDE$

(не обязательно выпуклого),  $P$  и  $Q$  — середины отрезков  $MN$  и  $KL$ . Докажите, что отрезок  $PQ = \frac{1}{4}AE$  и  $PQ \parallel AE$ .

5. На прямой лежат 2023 точки  $M_1, \dots, M_{2023}$ . Вне прямой дана точка  $A$ . Может ли так случиться, что можно расставить на отрезках  $AM_1, \dots, AM_{2023}$  стрелки так, чтобы сумма полученных векторов была равна  $\vec{0}$ ?

6. Даны параллелограммы  $A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4, C_1C_2C_3C_4$ . Обозначим через  $S_i$  точку пересечения медиан треугольника  $A_iB_iC_i$ . Докажите, что  $S_1S_2S_3S_4$  — параллелограмм.

7. (Параметрическое уравнение прямой) Докажите, что точка  $Z$  лежит на прямой  $AB$  тогда и только тогда, когда  $\dot{Z} = t\dot{A} + (1 - t)\dot{B}$  для некоторого  $t$ .

8. Длины сторон треугольника  $ABC$  равны  $a, b$  и  $c$  ( $AB = c, BC = a, CA = b$  и  $a < b < c$ ). На лучах  $BC$  и  $AC$  отмечены соответственно такие точки  $B_1$  и  $A_1$ , что  $BB_1 = AA_1 = c$ . На лучах  $CA$  и  $BA$  отмечены соответственно такие точки  $C_2$  и  $B_2$ , что  $CC_2 = BB_2 = a$ . Найти  $|A_1B_1| : |C_2B_2|$ .

9. Докажите, что если  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1$  и  $k_1, k_2, \dots, k_n > 0$ , то  $\dot{A} = k_1\dot{A}_1 + k_2\dot{A}_2 + \dots + k_n\dot{A}_n$  принадлежит выпуклой оболочке множества  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ . И наоборот, для любой точки выпуклой оболочки существуют такие коэффициенты.

# Счёт в точках

12 июля

**Напоминание.** *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются *эквивалентными*, если  $ABDC$  — параллелограмм. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами*. Вектора называются *коллинеарными*, если при откладывании от одной точки их общее начало и их концы лежат на одной прямой.

**I.** Упростите выражение **(а)**  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA}$ ; **(б)**  $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DB}$ .

**II.** (Лемма о перестановке) Докажите, что  $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{BX}$ .

**Идея.** Направленный отрезок можно мыслить как разность точек  $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ . А также можно говорить, что точка  $Q$  получается из точки  $P$  смещением на вектор  $\overrightarrow{PQ}$  или  $Q = P + \overrightarrow{PQ}$ . Тогда любое выражение из векторов и точек, дающее в результате одну или ноль точек имеет геометрический смысл, определённый однозначно. Доказать это поможет лемма о перестановке: неважно, как разбиты на вектора точки, важно только то, что одни точки — начала, другие — концы.

(Можно считать, что точки — это краткая запись для векторных выражений. Например,  $Q = P + \overrightarrow{PQ} \iff \forall O \in \mathbb{E}_2 \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ .)

**Опр.** По определению, для коллинеарных векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  существует число  $\lambda$  такое, что  $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ . Тогда *отношением (со)направленных отрезков*  $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$  и  $\overrightarrow{CD} = \vec{y}$  будем называть то самое  $\lambda$ , т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} = \lambda \vec{y} = \lambda \overrightarrow{CD} \iff \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\vec{x}}{\vec{y}} = \lambda.$$

**Опр.** *Отношением трёх точек (простым отношением точек)*, лежащих на одной прямой,  $(AB, X)$  будем называть величину

$$(AB, X) = \frac{\dot{X} - \dot{A}}{\dot{B} - \dot{X}} = \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}}.$$

Говорят, что  $X$  *делит*  $\overrightarrow{AB}$  *в отношении*  $(AB, X)$ .

**1.** (Правило рычага) Если  $\dot{X}$  делит  $\overrightarrow{AB}$  в отношении  $\frac{k}{m}$ , то  $\dot{X} = \frac{m\dot{A} + k\dot{B}}{k+m}$ .

**2. (а)** Пусть  $M$  — середина отрезка  $AB$ . Докажите, что  $\dot{M} = \frac{1}{2}(\dot{A} + \dot{B})$ . **(б)** Пусть  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ . **(в)** Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\dot{M} = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C})$ .

**(г)** Если  $ABCD$  — параллелограмм, то  $\dot{A} + \dot{C} = \dot{B} + \dot{D}$ .

**3.** Найдите точку пересечения **(а)** биссектрис; **(б)** высот; **(в)** симедиан треугольника  $ABC$ , где  $A(-12; -30)$ ,  $B(44; 12)$ ,  $C(-28; 33)$ .

**4.** Точки  $M$ ,  $K$ ,  $N$  и  $L$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$  пятиугольника  $ABCDE$

(не обязательно выпуклого),  $P$  и  $Q$  — середины отрезков  $MN$  и  $KL$ . Докажите, что отрезок  $PQ = \frac{1}{4}AE$  и  $PQ \parallel AE$ .

5. На прямой лежат 2023 точки  $M_1, \dots, M_{2023}$ . Вне прямой дана точка  $A$ . Может ли так случиться, что можно расставить на отрезках  $AM_1, \dots, AM_{2023}$  стрелки так, чтобы сумма полученных векторов была равна  $\vec{0}$ ?

6. Даны параллелограммы  $A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4, C_1C_2C_3C_4$ . Обозначим через  $S_i$  точку пересечения медиан треугольника  $A_iB_iC_i$ . Докажите, что  $S_1S_2S_3S_4$  — параллелограмм.

7. (Параметрическое уравнение прямой) Докажите, что точка  $Z$  лежит на прямой  $AB$  тогда и только тогда, когда  $\dot{Z} = t\dot{A} + (1 - t)\dot{B}$  для некоторого  $t$ .

8. Длины сторон треугольника  $ABC$  равны  $a, b$  и  $c$  ( $AB = c, BC = a, CA = b$  и  $a < b < c$ ). На лучах  $BC$  и  $AC$  отмечены соответственно такие точки  $B_1$  и  $A_1$ , что  $BB_1 = AA_1 = c$ . На лучах  $CA$  и  $BA$  отмечены соответственно такие точки  $C_2$  и  $B_2$ , что  $CC_2 = BB_2 = a$ . Найти  $|A_1B_1| : |C_2B_2|$ .

9. Докажите, что если  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1$  и  $k_1, k_2, \dots, k_n > 0$ , то  $\dot{A} = k_1\dot{A}_1 + k_2\dot{A}_2 + \dots + k_n\dot{A}_n$  принадлежит выпуклой оболочке множества  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ . И наоборот, для любой точки выпуклой оболочки существуют такие коэффициенты.