

Квадратный трёхчлен

4 июля

1. (а) На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трёхчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трёхчлена.
- (б) На плоскости расположено 100 графиков квадратных трёхчленов. Известно, что у любых четырех есть общая точка. Докажите, что все графики имеют общую точку.
2. Существуют ли два квадратных трёхчлена $ax^2 + bx + c$ и $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня?
3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трёхчленов $x^2 f(\frac{1}{x} + 1)$ или $(x-1)^2 f(\frac{1}{x-1})$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трёхчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трёхчлен $x^2 + 10x + 9$?
4. Докажите, что стороны любого неравностороннего треугольника можно либо все увеличить, либо все уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы получился прямоугольный треугольник.
5. Дан приведенный квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + bx + c$, имеющий два различных корня. Сколько корней имеет уравнение $f(x) + f(x - \sqrt{D}) = 0$?
6. Васе задали на дом уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, где p_1 и q_1 – целые числа. Он нашел его корни p_2 и q_2 и написал новое уравнение $x^2 + p_2x + q_2 = 0$. Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал четыре квадратных уравнения и каждое имело два различных целых корня (если из двух возможных уравнений два различных корня имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба – любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело два различных вещественных корня, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?
7. На доске написано n выражений вида $*x^2 + *x + * = 0$ (n – нечетное число). Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. За ход разрешается заменить одну из звездочек числом, не равным нулю. Через $3n$ ходов получится n квадратных уравнений. Первый игрок стремится к тому, чтобы как можно большее число этих уравнений не имело корней, а второй хочет ему помешать. Какое наибольшее число уравнений, не имеющих корней, может получить первый игрок независимо от игры второго?

Квадратный трёхчлен

4 июля

1. (а) На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трёхчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трёхчлена.
- (б) На плоскости расположено 100 графиков квадратных трёхчленов. Известно, что у любых четырех есть общая точка. Докажите, что все графики имеют общую точку.
2. Существуют ли два квадратных трёхчлена $ax^2 + bx + c$ и $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня?
3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трёхчленов $x^2 f(\frac{1}{x} + 1)$ или $(x-1)^2 f(\frac{1}{x-1})$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трёхчлена $x^2 + 4x + 3$ получить трёхчлен $x^2 + 10x + 9$?
4. Докажите, что стороны любого неравностороннего треугольника можно либо все увеличить, либо все уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы получился прямоугольный треугольник.
5. Дан приведенный квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + bx + c$, имеющий два различных корня. Сколько корней имеет уравнение $f(x) + f(x - \sqrt{D}) = 0$?
6. Васе задали на дом уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, где p_1 и q_1 – целые числа. Он нашел его корни p_2 и q_2 и написал новое уравнение $x^2 + p_2x + q_2 = 0$. Повторив операцию еще трижды, Вася заметил, что он решал четыре квадратных уравнения и каждое имело два различных целых корня (если из двух возможных уравнений два различных корня имело ровно одно, то Вася всегда выбирал его, а если оба – любое). Однако, как ни старался Вася, у него не получилось составить пятое уравнение так, чтобы оно имело два различных вещественных корня, и Вася сильно расстроился. Какое уравнение Васе задали на дом?
7. На доске написано n выражений вида $*x^2 + *x + * = 0$ (n – нечетное число). Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. За ход разрешается заменить одну из звездочек числом, не равным нулю. Через $3n$ ходов получится n квадратных уравнений. Первый игрок стремится к тому, чтобы как можно большее число этих уравнений не имело корней, а второй хочет ему помешать. Какое наибольшее число уравнений, не имеющих корней, может получить первый игрок независимо от игры второго?