

7. Числовые веса

5 июля

Упражнение. В клетки доски $n \times n$ расставлены фишки. Известно, что во всех сточках и столбцах кроме одного стоят ровно k фишек. Докажите, что во всех строках и столбцах ровно k фишек.

Замечание. На самом деле при решении мы всем ладьям присвоили веса 1, и посчитали сумму весов двумя способами. Но не всегда объектам надо присваивать равные веса. Может оказаться, что «вклад» разных элементов в процесс разный.

Упражнение. В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.

Упражнение. Четверть плоскости с положительными координатами разбили на клетки 1×1 . В некоторых клетках получившейся доски лежат фишки. Разрешается убрать фишку с клетки, имеющей координаты (i, j) и поставить по фишке в клетки $(i + 1, j)$ и $(i, j + 1)$, при этом запрещается ставить более одной фишки в клетку. Изначально в трёх левых нижних клетках, образующих уголок, стоит по фишке. Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы они стали пустыми.

1. В классе у каждого ученика не более 20 врагов. Учитель поделил класс на две группы. Школьники хотят, чтобы у каждого ученика из первой группы было не более 5 врагов внутри группы, а у каждого ученика из второй группы — не более 15 врагов внутри группы. Каждый день одного из школьников, нарушающих это правило, коллективным решением переводят в другую группу. Докажите, что этот процесс когда-то завершится.

2. В ряд стоят n коробок. В них суммарно лежит n шариков. За один ход можно выбрать коробку и переложить из нее в каждую соседнюю коробку по одному шарiku. Докажите, что, какие бы операции ни делались, рано или поздно хотя бы один шарик окажется в крайней справа коробке.

3. В прямоугольной таблице m строк и n столбцов ($m < n$). В некоторых клетках таблицы стоят звездочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звездочка, что в одной строке с нею находится больше звездочек, чем с нею в одном столбце.

4. Несколько камней были разложены в N кучек. Затем камни разложили по-другому, в $n < N$ кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

5. По кругу стоят $2n$ детей. У них есть суммарно $2^n - 1$ печенек. За один ход ребенок может передать одну печенку своему соседу. Причем, пожадничав, в этот же момент он сразу съедает одну из своих печенек. Верно ли, что при любом начальном распределении печенек ребята могут действовать так, чтобы передать одну печенку голодному мальчику Вите?

6. По окружности отметили 40 красных, 30 синих и 20 зеленых точек. На каждой дуге между соседними красной и синей точками поставили цифру 1, на каждой дуге между соседними красной и зеленой — цифру 2, а на каждой дуге между соседними синей и зеленой — цифру 3. (На дугах между одноцветными точками поставили 0.) Найдите максимальную возможную сумму поставленных чисел.

7. По кругу стоят 2022 девочки. У одной из них есть 2022 монеты. Раз в минуту каждая девочка, у которой на данный момент есть хотя бы 2 монеты, передает по одной монете своим соседкам. Докажите, что данный процесс не может закончиться.

8. Клетки доски $m \times n$ покрашены в два цвета. Известно, что на какую бы клетку ни поставить ладью, она будет бить больше клеток не того цвета, на котором стоит (клетка под ладьей тоже считается побитой). Докажите, что на каждой вертикали и каждой горизонтали клеток обоих цветов поровну.

9. В школу ходят d девочек и m мальчиков. Каждый мальчик дружит по крайней мере с одной девочкой, каждая девочка — не более чем с десятью мальчиками. Также известно, что у каждого мальчика друзей-девочек было больше, чем у каждой из этих девочек — друзей-мальчиков. Докажите, что $m \leq \frac{10}{11}d$.