

1. Что забывают рассказать про многочлены

3 июля

Комментарий. Многочлены — тема любопытная. В ней много теории, которую любят рассказывать школьникам (начиная от теоремы Безу, заканчивая чем-нибудь типа «многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля»). При этом иногда забывая поговорить про какие-то совсем «ручные» подходы.

Определение корня. Корень многочлена — это в первую очередь такое число, что если его подставить, получится 0. (*И только во вторую — что делится на $x - x_0$.*)

Положительное число не равно нулю. Если вы можете доказать, что значение многочлена в какой-то точке положительно/отрицательно — то тем самым вы докажете, что указанное число не корень.

Честное раскрытие скобок. Равенство многочленов — это про совпадение коэффициентов. Иногда надо вводить $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ и раскрывать скобки.

Подстановка конкретных чисел. Равенство многочленов — это про совпадение функций. Иногда надо просто подставлять какие-то конкретные числа.

1. Пусть P — ненулевой многочлен. Могут ли все коэффициенты многочлена $P(x) \cdot (x - 1)$ быть неотрицательны? *Придумайте два решения.*

2. Коэффициентами многочленов нечётной степени P и Q являются нечётные числа. Докажите, что у многочлена $P \cdot Q$ есть хотя бы один чётный коэффициент. *Придумайте два решения.*

3. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше 1000, и $P(19) = P(94) = 1994$.

4. Пусть $P(x)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами, причём известно, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий действительный корень. Докажите, что эти многочлены имеют общий целый корень.

5. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие условию

$$P(x^2) - P(x) = P((1 - x)^2) - P(1 - x).$$

6. Про многочлен $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами известно, что -1 является его корнем, а его значение в точке $\sqrt{2}$ — целое число. Докажите, что существует хотя бы два различных k , для которых число $P(k) + a_k$ чётное.

7. Пусть n — натуральное число. На $2n + 1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении

$$* \cdot x^{2n} + * \cdot x^{2n-1} + \dots + * \cdot x + *$$

так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Обязательно ли это можно сделать?

8. Ненулевые числа a, b, c таковы, что любые два из трёх уравнений $ax^{11} + bx^4 + c = 0$, $bx^{11} + cx^4 + a = 0$, $cx^{11} + ax^4 + b = 0$ имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.

9. Дан многочлен

$$P(x) = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100, 101]$. При каком минимальном n у такого многочлена может найтись действительный корень?

10. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет степень 10^5 , а его старший коэффициент равен 1. Найдите наименьшую возможную степень многочлена

$$R(x) = P(x^{1000} + 1) - P(x)^{1000}.$$