

17. Учебный Междусобой

10 июля

1. Найдите в замкнутом виде значение выражения

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{(2^k - 3^1)(2^k - 3^2) \dots (2^k - 3^{1000})}{(2^k - 2^1) \dots (2^k - 2^{k-1})(2^k - 2^{k+1}) \dots (2^k - 2^{1000})}.$$

2. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, для которых неравенство

$$P(a-1)P(a+1) > P(a)^2 - 1$$

выполнено при всех вещественных a .

3. На плоскости расположены n окружностей одинакового радиуса, никакие две из которых не касаются, а их объединение есть связная фигура. Пусть S — множество точек, которые принадлежат хотя бы двум окружностям. Докажите, что $|S| \geq n$.

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . На стороне CD отмечена точка F , E — точка пересечения прямых AF и BD . Точка G на стороне AB такова, что $EG \parallel AD$. Обозначим через H точку пересечения прямых CG и BD , через I — точку пересечения прямых FH , AB . Докажите, что прямые CI , FG и AD пересекаются в одной точке.

5. В некоторой стране есть несколько шпионов, некоторые пары из них имеют секретные каналы связи. Непустая группа шпионов A называется *опергруппой*, если любой шпион из A может передать сообщение любому другому шпиону из A — возможно, через посредников из этой же группы (в частности, любой шпион образует отдельную опергруппу). Две опергруппы *связаны*, если они не пересекаются, а их объединение — также опергруппа. Резидент составил схему связей между опергруппами, но в этой схеме отсутствуют указания на составы опергрупп. Докажите, что, получив эту схему, контрразведка может восстановить схему связей между шпионами.

6. Последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ не возрастает и стремится к 0. Докажите, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$.

7. Докажите, что для любого натурального $10 < N < 1000$ существуют различные натуральные числа $x_1, x_2, \dots, x_{10}, y_1, y_2, \dots, y_{10}$ такие, что

$$N + 7(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2.$$

8. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая ℓ перпендикулярна BC и проходит через B . Две окружности с общей хордой CD касаются прямой ℓ в точках P и Q . Докажите, что отрезки DP и DQ видны из середины AB под равными углами.

9. На доске написано некоторое слово, составленное из букв Л, М и Ш. Можно заменять части слова по следующим правилам

$$\text{МЛ} \rightarrow \text{ЛМ} + \text{Ш}, \quad \text{ШЛ} \rightarrow \text{ЛШ} + \text{М}, \quad \text{ШМ} \rightarrow \text{МШ} + \text{Л},$$

а затем «раскрывать скобки». Например, из выражения $\text{ШМЛ} + \text{М}$ можно за одну операцию получить как $\text{МШЛ} + \text{ЛЛ} + \text{М}$, так и $\text{ШЛМ} + \text{ШШ} + \text{М}$. Докажите, что такими операциями исходное слово можно представить в виде суммы нескольких слов вида $\text{Л} \dots \text{ЛМ} \dots \text{МШ} \dots \text{Ш}$ (возможно, некоторых букв нет), причем такое представление единственно с точностью до порядка слагаемых.

10. Пусть a, b — натуральные числа, большие 1. Докажите, что существует число, кратное a , которое в системе счисления с основанием b содержит все цифры $0, 1, \dots, b-1$.