

Серия 13, неприводимость многочленов

10 июля

Пусть K — некоторое числовое множество (например, множество целых, рациональных, действительных или комплексных чисел). $P(x)$ — многочлен с коэффициентами из множества K , т. е. $P(x) \in K[x]$.

Определение. Многочлен $P(x) \in K[x]$ называется *приводимым над K* , если существуют $Q(x), R(x) \in K[x]$ ненулевой степени, такие, что $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$. В противном случае $P(x)$ *неприводимым над K* .

0. Приводимы ли над \mathbb{Z} многочлены а) $x^3 + 2$; б) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$?

1. Пусть $P(x), Q(x), R(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причём $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$. Известно, что все коэффициенты многочлена $P(x)$ делятся на некоторое простое число p . Докажите, что либо все коэффициенты $Q(x)$, либо все коэффициенты $R(x)$ делятся на p .

2. Пусть $P(x), Q(x), R(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причём $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$. Обозначим НОД всех коэффициентов $P(x), Q(x), R(x)$ за a, b, c соответственно. Докажите, что $a = bc$.

Определение. НОД всех коэффициентов многочлена с целыми коэффициентами называется *содержанием многочлена*.

Лемма Гаусса. Произведение многочленов с содержанием 1 является многочленом с содержанием 1.

3. а) Докажите, что любой многочлен $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ можно представить в виде $\frac{m}{n}Q(x)$, где $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причём содержание многочлена $Q(x)$ равно 1.

б) Докажите, что если многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ приводим над \mathbb{Q} , то он приводим и над \mathbb{Z} .

4. а) **Признак Эйзенштейна.** Пусть $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причём старший коэффициент не делится на простое число p , все остальные коэффициенты делятся на p , но свободный член не делится на p^2 . Докажите, что тогда $P(x)$ неприводим над \mathbb{Z} .

б) Приведите пример многочлена, для которого обратное утверждение неверно.

5. **Лемма.** Пусть a — целое число. Если многочлен $P(x)$ неприводим над \mathbb{Z} , то $P(x + a)$ — тоже неприводим над \mathbb{Z} .

6. Докажите, что следующие многочлены неприводимы над \mathbb{Z} :

а) $15x^5 + 18x^4 - 9x^2 + 27x - 36$; б) $x^4 + 1$; в) $x^6 + x^3 + 1$; г) $x^{n+1} + 5x^n - 3$.

7. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ неприводим над \mathbb{Z} тогда и только тогда, когда p — простое число.

8. а) Докажите, что многочлен $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$, где a_1, \dots, a_n — различные целые числа, неприводим над \mathbb{Q} .

б) Дан многочлен $P(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2 \dots (x-a_n)^2 + 1$, где a_1, \dots, a_n — различные целые числа. Докажите, что он неприводим над \mathbb{Q} .

Основная теорема алгебры. Любой многочлен степени не меньше единицы с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень. Другими словами, неприводимыми над \mathbb{C} многочленами являются только многочлены первой степени.

9. Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Докажите, что если $P(z) = 0$, то $P(\bar{z}) = 0$.

10. Докажите следующие следствия основной теоремы алгебры:

а) Всякий многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами единственным образом (с точностью до умножения на число) раскладывается в произведение n линейных множителей с комплексными коэффициентами.

б) Любой многочлен с действительными коэффициентами единственным образом раскладывается в произведение многочленов степени не выше второй с действительными коэффициентами. Другими словами, неприводимыми над \mathbb{R} многочленами являются в точности многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.

в) Любой многочлен с действительными коэффициентами нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.

11. Разложите многочлен на неприводимые многочлены с действительными коэффициентами:

а) $x^4 + 1$; б) $x^8 + x^4 + 1$; в) $x^{2n} - 1$.

12. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами при всех действительных x принимает только положительные значения. Докажите, что найдутся такие многочлены $A(x)$ и $B(x)$ с действительными коэффициентами, для которых $P(x) = A^2(x) + B^2(x)$.