

### 3. Разнобой «Профи ли ты?»

2 июля

1. Найдите количество способов расставить в клетки доски  $2024 \times 2024$  фишки (в каждую клетку можно ставить не более одной фишки) так, чтобы количества фишек в строках были равны  $1, 2, 3, \dots, 2024$  в некотором порядке, и количества фишек в столбцах также в некотором порядке были равны  $1, 2, 3, \dots, 2024$ .

2. Для каких натуральных  $n$  верно следующее утверждение: для произвольного многочлена  $P(x)$  степени  $n$  с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные  $a$  и  $b$ , для которых  $P(a) + P(b)$  делится на  $a + b$ ?

3. Катя выбрала простое число  $p < 2024$  и выписала в ряд все числа  $1, 2, 3, \dots, 2024$  так, что для любых 6 чисел  $a, b, c, d, e, f$ , стоящих подряд (именно в таком порядке), число  $ace - bdf$  делится на  $p$ . Чему может быть равно  $p$ ?

4. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $\angle A > 60^\circ$  и  $\angle C > 30^\circ$ . В полуплоскости относительно прямой  $BC$ , не содержащей точку  $A$ , отмечены точки  $D$  и  $E$  такие, что

$$\angle ABE = \angle CBD = 90^\circ \text{ и } \angle BAE = \angle BCD = 60^\circ.$$

Точки  $F$  и  $H$  — середины отрезков  $AE$  и  $CD$  соответственно;  $G$  — точка пересечения прямых  $AC$  и  $DE$ . Докажите, что  $\angle FGH = \angle ABC$ .

5. Пусть  $p$  — простое число. Сколько существует вычетов  $x \in \mathbb{Z}_p$  таких, что  $x$  и  $x + 1$  оба являются квадратичными вычетами по модулю  $p$ ?

6. В связном графе  $n$  вершин. Расстоянием между двумя вершинами называется число ребер в самом коротком пути между ними. Известно, что есть две вершины, расстояние между которыми не меньше  $d$ . Кроме того, степень любой вершины не меньше  $k$ . Докажите, что  $3n > kd$ .

7. Обозначим  $a_n = 3n + \sqrt{n^2 - 1}$ ,  $b_n = 2(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n})$ . Докажите, что существуют такие целые  $A$  и  $B$ , для которых  $\sqrt{a_1 - b_1} + \sqrt{a_2 - b_2} + \dots + \sqrt{a_{49} - b_{49}} = A + B\sqrt{2}$ .

