

Серия 5, отношения эквивалентности и группы преобразований

5 июля

Упражнение

1) В стране (население которой, возможно, бесконечно) некоторые граждане дружат между собой. При этом выполнены такие правила:

- (1) каждый друг сам себе;
- (2) если А дружит с Б, то и Б дружит с А;
- (3) друг моего друга — мой друг.

Докажите, что все жители этой страны разбиваются на кланы таким образом, что любые двое из одного клана дружат, а любые двое из разных кланов — нет.

Определение. Говорят, что на множестве M задано отношение \sim , если для любых двух элементов $a, b \in M$ известно, находится элемент a в отношении \sim к элементу b (пишут: $a \sim b$) или нет.

Определение. Отношение \sim , заданное на множестве M , называется:

- *рефлексивным*, если $a \sim a$ для любого $a \in M$;
- *симметричным*, если для любых $a, b \in M$ из $a \sim b$ следует, что $b \sim a$;
- *транзитивным*, если для любых $a, b, c \in M$ из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует, что $a \sim c$;

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*.

Заменим в упражнении 1 страну произвольным множеством, а дружбу — произвольным заданным на этом множестве отношением эквивалентности. Получится теорема о разбиении: если на непустом множестве задано отношение эквивалентности, то все элементы этого множества разбиваются на непустые непересекающиеся классы таким образом, что любые два элемента из одного класса находятся в данном отношении (то есть, проще говоря, эквивалентны).

Верно, очевидно, и обратное: если произвольное множество разбито на непустые непересекающиеся классы, то отношение «лежать в одном классе» будет отношением эквивалентности. Получается, что разбить множество на непустые классы и задать на нём отношение эквивалентности — это, по сути, одно и то же.

2) Являются ли отношениями эквивалентности:

- а) отношение «больше» на множестве R ;
- б) параллельность прямых;
- в) перпендикулярность прямых;
- г) сравнимость целых чисел по данному модулю;
- д) подобие плоских фигур?

3) Какими отношениями разбиваются:

- а) фигуры на классы равновеликих;
- б) вершины графа на компоненты связности?

Определение. Преобразованием множества M называется биективное отображение этого множества на себя.

Определение. Непустой набор G преобразований множества M называется *группой преобразований* этого множества, если он обладает следующими тремя групповыми свойствами:

- (1) если $f, g \in G$, то и $g \circ f \in G$;
- (2) если $f \in G$, то и $f^{-1} \in G$;
- (3) id_M содержится в G .

Определение. Пусть G — некоторая группа преобразований множества M . Будем говорить, что элемент $x \in M$ *сравним с элементом $y \in M$ по модулю G* , если существует преобразование $f \in G$, переводящее x в y .

Определение. Совокупность всех элементов, сравнимых с x по модулю G , называется *орбитой элемента x , порождённой группой G* .

Теорема. Отношение сравнимости по модулю группы преобразований множества M является отношением эквивалентности на множестве M , т. е. группа преобразований множества разбивает все его элементы на непустые непересекающиеся орбиты.

Задачи

1. Какими группами преобразований порождены следующие отношения эквивалентности:

- а) сравнимость целых чисел по модулю m ;
- б) подобие плоских фигур;
- в) параллельность прямых на плоскости?

2. Придумайте группы преобразований, орбитами которых были бы:

- а) окружности с данным центром;
- б) вершины правильных k -угольников с данным центром;
- в) решётка из точек координатной плоскости с целочисленными координатами и решётки, получающиеся из неё всевозможными сдвигами.

Определение. Пусть G — группа преобразований множества M . Число элементов в группе G называется *порядком группы* и обозначается $|G|$.

3. Каков порядок группы самосовмещений правильного а) пятиугольника; б) шестиугольника?

4. Пусть A — множество из 10 элементов. Приведите пример группы преобразований порядка а) 2; б) 5; в) 7; г) 14; д) 15.