

15. Примерно целое целое не примерно целое, а целое

9 июля

Это листочек на такую идею: если имеется сходящаяся последовательность целых чисел, то она с некоторого момента постоянная.

Пример. Целые числа a , b и c таковы, что $an^2 + bn + c$ — точный квадрат для каждого натурального n . Докажите, что существуют такие целые числа d и e , что $an^2 + bn + c = (dn + e)^2$ для каждого натурального n .

Рассуждение. Пусть $x_n^2 = an^2 + bn + c$. Тогда $x_n = \sqrt{an^2 + bn + c} \sim n\sqrt{a}$. Тогда, например, хочется сказать, что $x_{n+1} - x_n$ это что-то типа \sqrt{a} , т.е. получить, что \sqrt{a} хотя бы целое. Пробуем:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} - \sqrt{an^2 + bn + c} = \frac{(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) - (an^2 + bn + c)}{\sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} + \sqrt{an^2 + bn + c}} = \\ &= \frac{2an + \text{константа}}{\sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} + \sqrt{an^2 + bn + c}} = \frac{2an \cdot (1 + o(1))}{2\sqrt{an} \cdot (1 + o(1))} \rightarrow \sqrt{a} \end{aligned}$$

Итак, последовательность $x_{n+1} - x_n$ состоит из целых чисел (!) и сходится (!) к \sqrt{a} . Значит, она равна \sqrt{a} , начиная с некоторого момента, т.е. $x_n = dn + e$ для всех достаточных n , где $d = \sqrt{a}$ — целое число. Но тогда многочлены $an^2 + bn + c$ и $(dn + e)^2$ совпадают для всех достаточно больших n , т.е. совпадают для всех n .

Комментарий. На всякий случай напомним, что из $x_n \sim n\sqrt{a}$ в общем случае **не** следует, что $x_{n+1} - x_n \rightarrow \sqrt{a}$: если расписывать формально, то

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{a} + o(n),$$

но $o(n)$ может быть и бесконечно большой последовательностью. Так что придётся предполагать и проверять.

Комментарий. Обратите внимание, что мы здесь вычитали именно x_n , чтобы оставаться последовательностью целых чисел. Легко проверить, что $x_n = n\sqrt{a} + o(1)$. Но мы ничего не знаем об этой $o(1)$. Если же теперь написать

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)\sqrt{a} - n\sqrt{a} + o(1) = \sqrt{a} + o(1),$$

то за счёт целочисленности мы узнаём, что $o(1)$ в этой записи на самом деле тождественный 0.

1. Коэффициенты многочлена f целые, а его степень равна k . Известно, что число $\sqrt[k]{f(n)}$ — целое для каждого натурального n . Докажите, что существуют такие целые числа a и b , что $f(x) = (ax+b)^k$.

2. Натуральные числа a и b таковы, что $a^{n+1} + b^{n+1}$ делится на $a^n + b^n$ для бесконечного множества различных натуральных n . Обязательно ли тогда $a = b$?

3. Многочлены f и g с целыми коэффициентами таковы, что для бесконечно многих натуральных n выполнено $f(n):g(n)$. Докажите, что найдётся такой многочлен h с рациональными коэффициентами, что $f = g \cdot h$.

4. Натуральные числа a , b и c , большие 1, таковы, что для всех натуральных n найдётся такое натуральное k , что $a^k + b^k = 2c^n$. Докажите, что $a = b$.

5. Среди действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$ есть хотя бы одно не целое. Докажите, что для бесконечно многих натуральных n числа n и $[a_1n] + [a_2n] + \dots + [a_{2020}n]$ взаимно просты.

6. Целые числа a и b таковы, что для всех достаточно больших натуральных n число $a \cdot 2^n + b$ — точный квадрат. Докажите, что $a = 0$.

7. Пусть f — приведённый многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для каждого натурального числа n уравнение $f(x) = 2^n$ имеет хотя бы одно решение в натуральных числах. Докажите, что $\deg f = 1$.