

22. Многочлены в комбинаторике

14 июля

Рассмотрим произвольную последовательность чисел $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, пока что конечную. Как мы помним, такие последовательности однозначно сопоставляются многочленам по правилу

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Например, последовательность $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ отображается в многочлен

$$C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n = (1+x)^n.$$

Теперь для подсчета суммы членов этой последовательности достаточно подставить $x = 1$, а для подсчета знакопеременной суммы $x = -1$. Оказывается, что подобная техника часто позволяет вычислять коэффициенты многочленов. Для этого можно даже подставлять в многочлен комплексные аргументы.

Упражнение. Пусть p — простое число. Сколькими способами можно выбрать несколько натуральных чисел из набора $\{1, 2, 3, \dots, p-1, p\}$ так, чтобы их сумма делилась на p ?

Отметим, что последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, состоящей из целых неотрицательных чисел, можно также сопоставить многочлен $x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_n}$.

Упражнение. Некоторый клетчатый прямоугольник разбит на прямоугольники $m \times 1$ и $1 \times n$ (которые нельзя поворачивать). Докажите, что его можно разбить на прямоугольники только одного из этих типов.

Полезная лемма. Пусть p — простое число. Рассмотрим корни из единицы p -ой степени $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1}$, где $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$. Оказалось, что для некоторых рациональных a_0, a_1, \dots, a_n верно

$$a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0.$$

Тогда $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1}$.

1. Сколькими способами можно выбрать подмножество множества $\{1, 2, \dots, 2000\}$, сумма элементов которого делится на 4?

2. Сколькими способами можно раскрасить n шариков в два цвета так, чтобы количество шариков первого цвета делилось на 3?

3. Даны два игральных кубика. На каждом из них может выпасть число от 1 до 6 включительно, но не обязательно равновероятно; все вероятности являются неотрицательными вещественными числами. Может ли оказаться так, что при одновременном броске обоих кубиков сумма выпавших чисел с равной вероятностью принимала значения $2, 3, 4, \dots, 12$?

4. Из квадрата 13×13 удалили центральную клетку. Можно ли оставшуюся фигуру разрезать на прямоугольники 1×4 и 4×1 ?

5. Дано простое число p и два набора натуральных чисел $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_p)$. Известно, что среди чисел вида $a_i + b_j$ ($1 \leq i, j \leq p$) ровно p чисел дают остаток 0 при делении на p , ровно p дают остаток 1, ..., ровно p дают остаток $p-1$. Докажите, что в одном из наборов каждый остаток при делении на p встречается ровно по одному разу.

6. Вершины правильного n -угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

7. Пусть p — простое число. Сколькими способами из набора $\{1, 2, 3, \dots, 2p-1, 2p\}$ можно выбрать p чисел так, чтобы их сумма делилась на p ?

8. Последовательности a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n натуральных чисел таковы, что наборы их парных сумм $\{a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n\}$ и $\{b_1 + b_2, b_1 + b_3, \dots, b_{n-1} + b_n\}$ совпадают. Докажите, что $n = 2^k$ для некоторого натурального k .

9. Даны $2n$ различных действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$. В клетки доски $n \times n$ расставлены числа по следующему правилу: в клетке (i, j) стоит число $a_i + b_j$. Оказалось, что произведения чисел во всех строках одинаковые. Докажите, что произведения чисел во всех столбцах также одинаковые.