

б) Дан многочлен  $P(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2 \dots (x-a_n)^2 + 1$ , где  $a_1, \dots, a_n$  — различные целые числа. Докажите, что он неприводим над  $\mathbb{Q}$ .

**Основная теорема алгебры.** Любой многочлен степени не меньше единицы с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень. Другими словами, неприводимыми над  $\mathbb{C}$  многочленами являются только многочлены первой степени.

9. Пусть  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ . Докажите, что если  $P(z) = 0$ , то  $P(\bar{z}) = 0$ .

10. Докажите следующие следствия основной теоремы алгебры:

а) Всякий многочлен степени  $n \geq 1$  с комплексными коэффициентами единственным образом (с точностью до умножения на число) раскладывается в произведение  $n$  линейных множителей с комплексными коэффициентами.

б) Любой многочлен с действительными коэффициентами единственным образом раскладывается в произведение многочленов степени не выше второй с действительными коэффициентами. Другими словами, неприводимыми над  $\mathbb{R}$  многочленами являются в точности многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.

в) Любой многочлен с действительными коэффициентами нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.

11. Разложите многочлен на неприводимые многочлены с действительными коэффициентами:

а)  $x^4 + 1$ ; б)  $x^8 + x^4 + 1$ ; в)  $x^{2n} - 1$ .

12. Многочлен  $P(x)$  с действительными коэффициентами при всех действительных  $x$  принимает только положительные значения. Докажите, что найдутся такие многочлены  $A(x)$  и  $B(x)$  с действительными коэффициентами, для которых  $P(x) = A^2(x) + B^2(x)$ .