

Серия 22, теорема Брукса

17 июля

Определение. Раскраска вершин графа G в k цветов называется *правильной*, если любые две смежные вершины покрашены в разные цвета. Наименьшее натуральное число k , такое, что существует правильная раскраска вершин графа G в k цветов называется *хроматическим числом* графа G и обозначается $\chi(G)$.

Определения. Через $\alpha(G)$ обозначается размер наибольшего *независимого* множества вершин графа G , то есть такого множества вершин, между которыми нет ни одного ребра. Через $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ обозначаются соответственно наименьшая и наибольшая из степеней вершин графа G .

Определение. Пусть v — вершина графа G . Через $G - v$ обозначается граф, получаемый из G удалением вершины v и всех инцидентных ей рёбер.

Определение. Через \overline{G} обозначается *дополнение* графа G , то есть граф с тем же множеством вершин, что и G , в котором смежны те и только те пары вершин, которые не смежны в графе G .

Задачи

1. Докажите, что для любого графа G на n вершинах выполняется неравенство $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$.
2. Вершины графа G нельзя правильным образом покрасить в d цветов. Докажите, что существует такой подграф H графа G , что $\delta(H) \geq d$.
3. Докажите, что $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$, где n — количество вершин графа G .
4. В графе G всего v вершин и e ребер, его вершины можно правильным образом покрасить в k цветов. Докажите, что $k \geq \frac{v^2}{v^2 - 2e}$.
5. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d \geq 3$. Докажите, что вершины G можно правильным образом раскрасить в d цветов, если
 - а) есть вершина, степень которой меньше d ;
 - б) есть такая вершина v , что граф $G - v$ несвязен;
 - в) есть две такие вершины u и v , что граф $G - u - v$ несвязен;
 - г) есть три вершины u , v и w такие, что u смежна с v и w , вершины v и w несмежны и граф $G - v - w$ связан.

Теорема Брукса. Пусть $d \geq 3$, а G — связный граф, отличный от полного графа на $d + 1$ вершине, и $\Delta(G) \leq d$. Тогда $\chi(G) \leq d$.

6. Докажите теорему Брукса
 - а) при помощи задачи 5;
 - б) при помощи метода чередующихся цепей.