

14. Разделяющие множества

9 июля

Определение. Назовем множество вершин R в графе G *разделяющим*, если граф $G - R$ не является связным.

Определение. Пусть $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R *разделяет* множества X и Y (или, что то же самое, отделяет множества X и Y друг от друга), если никакие две вершины $v_x \in X \setminus R$ и $v_y \in Y \setminus R$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

Определение. Скажем, что множество S *разделяет* R в графе G , если вершины $R \setminus S$ лежат хотя бы в двух разных компонентах связности графа $G - S$.

Определение. Граф G называется k -связным, если при удалении любых $k - 1$ вершин граф не теряет связность.

Определение. Точкой сочленения называется разделяющее множество, состоящее из одной вершины.

1. Пусть M — множество из k вершин в k -связном графе, разделяющее его на $m \geq 2$ компонент связности. Докажите, что количество ребер, проведенных из вершин M к оставшимся вершинам графа, не меньше mk .

2. В графе расстояние между любыми вершинами не превосходит d , и для любой вершины есть другая на расстоянии d от неё. Докажите, что данный граф двусвязен. (Расстояние между вершинами — это количество ребер в кратчайшем пути между ними.)

3. Граф G связан. Назовем *разделителем* минимальное по включению множество вершин, при удалении которых граф теряет связность. Пусть S и R — разделители графа G . Известно, что S не разделяет R . Докажите, что R не разделяет S (возможно, $|R| \neq |S|$).

4. Известно, что граф G на n вершинах является двусвязным, но при этом содержит разделяющее множество из 2 смежных вершин. Докажите, что G содержит двусвязный подграф (не равный G), в котором больше $n/2$ вершин.

5. Назовем ребро графа *разделяющим*, если два конца этого ребра образуют разделяющее множество. В графе расстояние между любыми вершинами не превосходит d , и для любой вершины есть другая на расстоянии d от неё. Докажите, что не более трети всех ребер графа являются разделяющими.

6. Назовем подмножество ребер графа G *разделяющим*, если после удаления этих ребер граф перестает быть связным. Пусть A и B — два минимальных по включению разделяющих реберных подмножества. Докажите, что $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ также является разделяющим.

7. В стране $2n$ городов. Из каждого города можно добраться в каждый, при закрытии любого города это свойство сохраняется. Страна разделилась на две республики A и B , в каждой из которых от любого города можно добраться до любого другого, не покидая республики. В каждой из республик была выбрана столица. Король увидел, что в республике A городов меньше, чем в B , и решил перевести часть городов из B в A так, чтобы в республиках стало поровну городов, по-прежнему внутри каждой республики можно было добраться от любого города до любого другого, и столицы остались бы в разных республиках. Докажите, что король может осуществить свой план.

8. В некотором графе через каждое ребро проходит не более трёх простых циклов. Докажите, что вершины этого графа можно правильно окрасить в три цвета.

9. В k -связном графе G выбраны множества вершин S_1, S_2, S_3 , каждое из которых разделяет граф G ровно на 2 компоненты связности. В каждом из этих множеств ровно k вершин. Докажите, что среди любых 7 вершин графа $G - S_1 - S_2 - S_3$ найдутся две такие, что они лежат в одной компоненте связности при удалении любого из множеств S_1, S_2, S_3

(a) В случае, когда S_1, S_2, S_3 попарно не пересекаются;

(b) Для произвольных S_1, S_2, S_3 .