

## 30. Разнобой по аналитической теории чисел

19 июля

1. Назовем натуральное число  $n$  *хорошим*, если оно делится на два последовательных нечетных натуральных числа, больших 1. Докажите, что для любого натурального  $n > 1000$  среди чисел от 1 до  $n$  не более  $\frac{n}{5}$  являются хорошими.

2. Обозначим через  $S = \{1, 4, 8, 9, 16, \dots\}$  множество всех точных степеней (не меньших 2) натуральных чисел. Запишем их в виде возрастающей последовательности  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ . Докажите, что найдётся бесконечно много  $n$  таких, что 9999 делит  $a_{n+1} - a_n$ .

3. Докажите, что для любых  $n$  попарно различных дробей из интервала  $(0, 1)$  сумма их знаменателей не меньше, чем  $\frac{1}{3}n^{3/2}$ .

4. Докажите, что существует бесконечно много чисел вида  $n^2 + 1$ , свободных от квадратов.

5. Существуют ли 1000 попарно непересекающихся арифметических прогрессий с натуральными членами таких, что каждое натуральное число, большее  $10^{100}$ , содержится в одной из них, и каждая прогрессия содержит хотя бы одно простое число, большее 1000?

6. Найдите все многочлены  $P(x)$  с действительными коэффициентами такие, что его значения в любом репьюните (числе, записанном одними единицами) также является репьюнитом.

7. Назовём последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  натуральных чисел *медленно возрастающей*, если она возрастает, но для любого  $n$  выполняется неравенство  $a_n < 9000n$ . Докажите, что в любой медленно возрастающей последовательности существует бесконечное количество индексов  $i$  таких, что  $a_i$  делит НОК всех предыдущих членов последовательности.