

# Закол. Довывод

21 июля

1. Столбцы таблицы  $n \times n$  пронумеровали числами от 0 до  $n - 1$  слева направо, а строки — числами  $n, n + 1, \dots, 2n - 1$  снизу вверх. Таким образом, каждая клетка задаётся номером строки и столбца, в котором она стоит. (Нижняя левая клетка —  $(n, 0)$ .) В каждую из остальных клеток  $(i, j)$  записали число  $\frac{1}{i-j}$ .

Рассматриваются все возможные пути из левого верхнего угла доски в правый нижний, где каждый ход делается на одну клетку вниз или на одну клетку вправо. Назовем *ценой* пути произведение чисел в клетках этого пути (не включая концы). Чему равна суммарная стоимость всех таких путей?

2. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$  и высота  $CH$ . Точка  $H_1$  симметрична точке  $H$  относительно прямой  $BL$ , а точка  $H_2$  симметрична точке  $H_1$  относительно прямой  $CH$ . Оказалось, что четырехугольник  $CH_1LH_2$  — вписанный. Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.

3. Квадрат  $ABCD$  разрезан на прямоугольники так, что ни в какой вершине не сходятся 4 прямоугольника. Все вершины раскрасили в два цвета так, что в любом прямоугольнике противоположные по диагонали вершины разного цвета. Известно, что вершины  $A$  и  $C$  одного цвета. Докажите, что вершины  $B$  и  $D$  тоже одного цвета.

4. Дан квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + ax - 1$  с действительным  $a$ . Саша нашёл 50 действительных решений уравнения  $f(\dots f(x)) = x$  (47 букв  $f$ ). Докажите, что у этого уравнения есть ещё хотя бы 46 действительных решений.

5. Даны целое  $k > 1$  и простое  $p$  такие, что число  $n = kp + 1$  составное. Оказалось, что число  $2^{n-1} - 1$  делится на  $n$ . Докажите, что  $n < 2^k$ .

## Вывод

6. Каждая клетка квадрата  $10 \times 10$  покрашена в один из 60 цветов. Для какого наибольшего натурального  $k$  можно утверждать, что найдутся хотя бы  $k$  клетчатых квадратов  $2 \times 2$ , все 4 клетки каждого из которых покрашены в разные цвета?

7. В неравнобедренный треугольник  $ABC$  вписана окружность с центром в точке  $I$ . Прямые  $BI$  и  $CI$  пересекают его описанную окружность  $\omega$  в точках  $B_1$  и  $C_1$ . Прямая, проходящая через  $I$  параллельно  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $C_2$ , сторону  $AC$  — в точке  $B_2$ , а также окружность  $\omega$  в точках  $X$  и  $Y$ , так что  $C_2$  — между  $Y$  и  $I$ . Докажите, что касательная к  $\omega$ , проведенная в точке  $A$ , а также общие внешние касательные к окружностям  $(B_1B_2X)$  и  $(C_1C_2Y)$  пересекаются в одной точке.

8. Пусть даны целые неотрицательные числа  $a, b, c$ . Треугольник на клетчатой плоскости с вершинами в узлах сетки со стороной 1 назовём  $(a, b, c)$ -треугольником, если на одной его стороне расположено ровно  $a$  узлов (не считая вершин), на другой стороне — ровно  $b$  узлов, а на третьей стороне — ровно  $c$  узлов. Найдите количество троек  $(a, b, c)$  таких, что  $a \leq b \leq c$  и минимальная возможная площадь  $(a, b, c)$ -треугольника равна 9 000 000.