

5. Двойные отношения –1

4 июля

Определение. Двойным отношением четверки точек A, B, C, D , лежащих на одной прямой, называется отношение $(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$. Здесь под \overline{XY} мы понимаем вектор с началом в X и концом в Y .

Определение. Двойным отношением упорядоченной четверки прямых a, b, c, d , называется величина

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin \angle(\bar{a}, \bar{c})}{\sin \angle(\bar{b}, \bar{c})} : \frac{\sin \angle(\bar{a}, \bar{d})}{\sin \angle(\bar{b}, \bar{d})},$$

где $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d .

Замечание. Эта величина не зависит от выбора направлений векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$.

Определение. Четверка точек (прямых) называется *гармонической*, если их двойное отношение равно -1 .

1. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке A . На прямой ℓ_1 отмечены точки B_1, C_1, D_1 , а на прямой ℓ_2 — точки B_2, C_2, D_2 . Докажите, что прямые B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 конкurrentны (то есть пересекаются в одной точке или параллельны) тогда и только тогда, когда $(A, B_1, C_1, D_1) = (A, B_2, C_2, D_2)$.

2. (а) Пусть A, B, C, D — различные точки, и $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)$. Докажите, что тогда $(A, B, C, D) = -1$.

(b) Докажите, что если $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

(c) Докажите, что $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$.

3. Докажите, что следующие четверки гармонические.

(а) (A, B, M, P_∞) , где M — середина AB , а P_∞ — бесконечно удаленная точка направления AB .

(b) (A, B, K, L) , где K и L — основания внутренней и внешней биссектрис треугольника ABC .

(c) (A, B, X, Y) , где X и Y центры непересекающихся окружностей разного радиуса, A и B — точки пересечения общих внешних и внутренних касательных.

Замечание. Эти гармонические четверки являются самыми распространёнными и могут помочь в следующих задачах.

4. (а) Четыре прямые, проходящие через точку O , пересекают прямую ℓ в точках A, B, C и D . $\angle AOC = 90^\circ$, а $(A, C, B, D) = -1$. Докажите, что OC — биссектриса угла BOD .

(b) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AN_A и отмечены центры I, I_A вписанной и невписанной окружностей. Докажите, что прямые H_AI, H_AI_A симметричны относительно прямой BC .

5. Теорема о полном четырёхстороннике. Продолжения сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , продолжения BC и AD — в точке F , прямые AC и BD пересекают EF в точках M и N . Докажите, что $(E, F, M, N) = -1$. Придумайте два решения.

Комментарий. На самом деле на картинке можно увидеть гораздо больше гармонических четвёрок.

6. (a) Постройте с помощью одной линейки к трем данным прямым, проходящим через одну точку, четвертую так, чтобы эти прямые образовывали гармоническую четверку.

(b) Постройте с помощью одной линейки четвертую гармоническую к трем данным точкам, лежащим на одной прямой.

7. Продолжения противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q . Через точку O пересечения его диагоналей проводится прямая, параллельная PQ . Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.

8. (a) Дан угол AOB и точка P , лежащая вне угла. Через P проводятся пары секущих, пересекающие лучи OA и OB соответственно в точках A_1, B_1 и A_2, B_2 . Докажите, что все возможные точки пересечения прямых A_1B_2 лежат на фиксированной прямой.

(b) Дан угол с вершиной O и внутри него точка A . Рассмотрим такие точки M, N на разных сторонах данного угла, что углы MAO и OAN равны. Докажите, что все прямые MN проходят через одну точку (или параллельны).

9. Внутренняя и внешняя биссектрисы угла A неравнобедренного треугольника ABC пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Точка M — середина стороны AB . Прямая KM пересекает прямую AC в точке N . Докажите, что $NL = NA$.

10. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE и CF пересекаются в точке H . P и Q — проекции точек A и H на EF соответственно. Пусть R — точка пересечения DP и QH . Найдите HQ/HR .

11. Пусть в треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Пусть X такая точка внутри треугольника ABC , что вписанная окружность треугольника XBC касается XB, XC и BC в Z, Y и D соответственно. Докажите, что $EFZY$ вписанный.