

2. Графы состояний и Diamond-лемма

3 июля

1. Diamond-лемма. Дан ориентированный граф с, возможно, бесконечным множеством вершин. Будем называть вершину v потомком вершины u графа, если существует путь из u в v . Если есть ребро из u в v , то назовем вершину v ребенком вершины u . Известно, что все пути в графе конечны (в частности, нет циклов) и что выполнено следующее условие: для любых двух детей любой вершины графа u этих детей существует общий потомок. Докажите, что у любой вершины графа существует единственный потомок исходящей степени 0.

(a) Предположим, что у некоторой вершины A_0 есть два потомка исходящей степени 0. Докажите, что у A_0 есть ребенок, имеющий двух потомков исходящей степени 0.

(b) Завершите доказательство Diamond-леммы.

2. Пусть n — натуральное число. В алфавите имеется n букв и n соответствующих им *антибукв*. Изначально выписано некоторое слово этого алфавита. Каждую секунду из слова удаляются случайно выбранные рядом стоящие буква и ее антибуква (не важно, кто из них слева, а кто справа) до тех пор, пока не остается несократимое слово. Докажите, что несократимое слово, которое получится в результате, не зависит от хода процесса.

3. На столе лежит кусок пластилина массой n кг. Его делят на две части, каждая из которых весит целое число килограмм. Затем одну из частей опять делят надвое и так далее, пока не получат n кусков массой 1 кг. При каждом делении одного куска на две части на доску записывается произведение масс двух новых кусков. Какие значения может принимать сумма всех чисел, записанных на доске?

4. Дана диграмма Юнга. Из нее поочередно удаляются клетчатые доминошки так, чтобы в каждый момент времени диаграмма по-прежнему оставалась корректной. Такие удаления проделываются, пока возможно. Оставшуюся диаграмму назовем *ядром* исходной. Докажите, что определение корректно, то есть результат процесса не зависит от выбора доминошек.

5. Дан конечный граф G , в вершинах которого расставлены вещественные веса (в вершине с номером i вес r_i). Каждую минуту выбирается произвольная вершина V с отрицательным весом r . Ее вес заменяется на $-r$, а к весам всех ее соседей прибавляется r . Процесс заканчивается, когда веса всех вершин неотрицательны. Известно, что из исходной конфигурации процесс заканчивается в любом случае.

(a) Докажите, что результат не зависит от порядка действий;

(b) Докажите, что количество шагов также не зависит от порядка действий.

6. В ряд стоит 100 коробок. В самой левой из них лежит 100 спичек. За ход разрешается из любой коробки переложить одну спичку в соседнюю справа коробку, при условии, что в исходной коробке останется не меньше спичек, чем в той, куда мы спичку добавили. Какие конфигурации могли остаться в конце процесса?

7. Игорь написал на доске числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$, именно в таком порядке. Раз в минуту Паша отсчитывает $2k$ чисел с начала ряда при некотором целом k и следующие за ними четыре числа a, b, c, d меняет на два числа $ac + bd$ и $ad + bc$ в любом порядке.

Через 49 минут на доске остались 2 числа. Докажите, что эти числа не зависят от порядка действий.

8. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по несколько в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:

1) Снять по одному камню с клеток $n - 1$ и n , и положить один камень в клетку $n + 1$;

2) Снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $n + 1$, $n - 2$.

Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).