

## Серия 12, инверсия – 2

9 июля

### Теория

**Т7. Изменение расстояний.** Пусть  $A_1$  и  $B_1$  — образы точек  $A$  и  $B$  при инверсии с центром  $O$  и радиусом  $R$ . Тогда  $A_1B_1 = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$ .

**Т8. Конформность.** При инверсии сохраняются углы между кривыми.

### Задачи

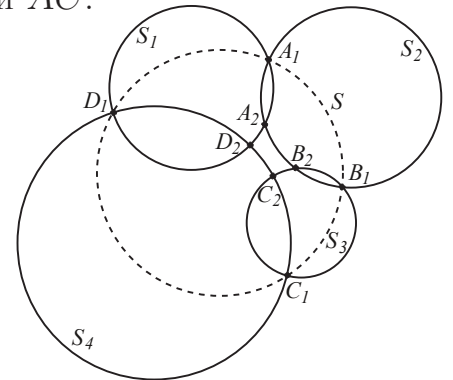
**1. Неравенство Птолемея.** Докажите, что для любых четырёх точек  $A, B, C, D$  плоскости выполнено неравенство

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда  $ABCD$  — выпуклый вписанный четырёхугольник или точки  $A, B, C, D$  лежат на одной прямой.

**2.** Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\Omega$  с центром  $O$ , причём  $O$  не лежит на диагоналях четырёхугольника. Описанная окружность  $\Omega_1$  треугольника  $AOC$  проходит через середину диагонали  $BD$ . Докажите, что описанная окружность  $\Omega_2$  треугольника  $BOD$  проходит через середину диагонали  $AC$ .

**3.** Даны четыре окружности  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Пусть  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются в точках  $A_1$  и  $A_2$ ,  $S_2$  и  $S_3$  — в точках  $B_1$  и  $B_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$  — в точках  $C_1$  и  $C_2$ ,  $S_4$  и  $S_1$  — в точках  $D_1$  и  $D_2$  (см. рисунок). Докажите, что если точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  лежат на одной окружности (прямой)  $S$ , то и точки  $A_2, B_2, C_2, D_2$  лежат на одной окружности (прямой).



**4. Теорема о бабочке.** Пусть  $O$  — середина хорды  $AB$  окружности  $S$ ,  $MN$  и  $PQ$  — произвольные хорды, проходящие через  $O$ ,  $E$  и  $F$  — точки пересечения хорды  $AB$  с отрезками  $MP$  и  $NQ$  соответственно. Докажите, что  $O$  — середина отрезка  $EF$ .

**5.** Окружность  $S_A$  проходит через точки  $A$  и  $C$ ; окружность  $S_B$  проходит через точки  $B$  и  $C$ ; центры обеих окружностей лежат на прямой  $AB$ . Окружность  $S$  касается окружностей  $S_A$  и  $S_B$  внутренним образом, а кроме того, она касается отрезка  $AB$  в точке  $C_1$ . Докажите, что  $CC_1$  — биссектриса треугольника  $ABC$ .

## Инверсия. Добавка

9 июля

1. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются внешним образом в точке  $O$ . Точки  $A$  и  $B$  на окружности  $\omega_1$  и точки  $C$  и  $D$  на окружности  $\omega_2$  таковы, что  $AC$  и  $BD$  — общие внешние касательные к окружностям. Прямая  $AO$  пересекает отрезок  $CD$  в точке  $M$ , а прямая  $CO$  пересекает вторично окружность  $\omega_1$  в точке  $N$ . Докажите, что точки  $B$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной прямой.
2. Четыре окружности расположены так, что каждая касается внешним образом двух других. Каждая из этих окружностей касается внутренним образом пятой окружности в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Докажите, что  $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ .
3. Дан треугольник  $ABC$ , вписанный в окружность с центром в точке  $O$ . Пусть  $T$  — точка пересечения окружности, проходящей через точки  $A$  и  $C$  и касающейся прямой  $AB$ , и описанной окружности треугольника  $BOC$ . Пусть  $K$  — точка пересечения прямых  $BC$  и  $OT$ . Докажите, что  $AK$  касается описанной окружности треугольника  $ABC$ .

## Инверсия. Добавка

9 июля

1. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются внешним образом в точке  $O$ . Точки  $A$  и  $B$  на окружности  $\omega_1$  и точки  $C$  и  $D$  на окружности  $\omega_2$  таковы, что  $AC$  и  $BD$  — общие внешние касательные к окружностям. Прямая  $AO$  пересекает отрезок  $CD$  в точке  $M$ , а прямая  $CO$  пересекает вторично окружность  $\omega_1$  в точке  $N$ . Докажите, что точки  $B$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной прямой.
2. Четыре окружности расположены так, что каждая касается внешним образом двух других. Каждая из этих окружностей касается внутренним образом пятой окружности в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Докажите, что  $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ .
3. Дан треугольник  $ABC$ , вписанный в окружность с центром в точке  $O$ . Пусть  $T$  — точка пересечения окружности, проходящей через точки  $A$  и  $C$  и касающейся прямой  $AB$ , и описанной окружности треугольника  $BOC$ . Пусть  $K$  — точка пересечения прямых  $BC$  и  $OT$ . Докажите, что  $AK$  касается описанной окружности треугольника  $ABC$ .