

## Серия 11, лемма Бернсайда – 2

9 июля

1. В алфавите племени Умбо-Юмбо только две буквы — А и У. Словом считается любая комбинация из трёх букв. Два слова считаются синонимами, если одно из них может быть получено из другого с помощью перестановки букв. Сколько слов с разными значениями в языке Умбо-Юмбо? Решите эту задачу с помощью леммы Бернсайда и проверьте ответ с точки зрения здравого смысла.

2. Вычислить количество ожерелий из а) 4, б) 5 бусинок, каждая из которых может быть одного из двух цветов.

3. Сколькими различными способами можно раскрасить грани правильного тетраэдра, если каждую можно красить любой из данных  $n$  красок? Раскраски считаем одинаковыми, если они совмещаются поворотом тетраэдра.

4. Сколькими способами можно раскрасить рёбра куба тремя красками? Раскраски считаем одинаковыми, если они совмещаются поворотом куба.

5. Ожерелье состоит из  $p$  бусинок ( $p$  — простое), каждая бусинка одного из  $k$  цветов. Ожерелье можно вращать, но нельзя переворачивать. Сколько имеется таких ожерелий? Выведите из результата малую теорему Ферма.

6. Ожерелье состоит из  $n$  бусинок, каждая одного из  $k$  цветов. Ожерелье можно вращать, но нельзя переворачивать. Докажите, что количество различных ожерелий равно

$$\frac{1}{n} \sum_{n \vdots d} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) k^d.$$

7. Сколько существует различных бус из 18 бусин, если 6 бусин окрашены красной краской, а 12 бусин — синей краской? Ожерелье можно вращать, но нельзя переворачивать.