

Закол. Довывод

21 июля

1. Столбцы таблицы $n \times n$ пронумеровали числами от 0 до $n - 1$ слева направо, а строки — числами $n, n + 1, \dots, 2n - 1$ снизу вверх. Таким образом, каждая клетка задаётся номером строки и столбца, в котором она стоит. (Нижняя левая клетка — $(n, 0)$.) В каждую из остальных клеток (i, j) записали число $\frac{1}{i-j}$.

Рассматриваются все возможные пути из левого верхнего угла доски в правый нижний, где каждый ход делается на одну клетку вниз или на одну клетку вправо. Назовем *ценой* пути произведение чисел в клетках этого пути (не включая концы). Чему равна суммарная стоимость всех таких путей?

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL и высота CH . Точка H_1 симметрична точке H относительно прямой BL , а точка H_2 симметрична точке H_1 относительно прямой CH . Оказалось, что четырехугольник CH_1LH_2 — вписанный. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

3. Квадрат $ABCD$ разрезан на прямоугольники так, что ни в какой вершине не сходятся 4 прямоугольника. Все вершины раскрасили в два цвета так, что в любом прямоугольнике противоположные по диагонали вершины разного цвета. Известно, что вершины A и C одного цвета. Докажите, что вершины B и D тоже одного цвета.

4. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax - 1$ с действительным a . Саша нашёл 50 действительных решений уравнения $f(\dots f(x)) = x$ (47 букв f). Докажите, что у этого уравнения есть ещё хотя бы 46 действительных решений.

5. Даны целое $k > 1$ и простое p такие, что число $n = kp + 1$ составное. Оказалось, что число $2^{n-1} - 1$ делится на n . Докажите, что $n < 2^k$.

Вывод

6. Каждая клетка квадрата 10×10 покрашена в один из 60 цветов. Для какого наибольшего натурального k можно утверждать, что найдутся хотя бы k клетчатых квадратов 2×2 , все 4 клетки каждого из которых покрашены в разные цвета?

7. В неравнобедренный треугольник ABC вписана окружность с центром в точке I . Прямые BI и CI пересекают его описанную окружность ω в точках B_1 и C_1 . Прямая, проходящая через I параллельно BC , пересекает сторону AB в точке C_2 , сторону AC — в точке B_2 , а также окружность ω в точках X и Y , так что C_2 — между Y и I . Докажите, что касательная к ω , проведенная в точке A , а также общие внешние касательные к окружностям (B_1B_2X) и (C_1C_2Y) пересекаются в одной точке.

8. Пусть даны целые неотрицательные числа a, b, c . Треугольник на клетчатой плоскости с вершинами в узлах сетки со стороной 1 назовём (a, b, c) -треугольником, если на одной его стороне расположено ровно a узлов (не считая вершин), на другой стороне — ровно b узлов, а на третьей стороне — ровно c узлов. Найдите количество троек (a, b, c) таких, что $a \leq b \leq c$ и минимальная возможная площадь (a, b, c) -треугольника равна 9 000 000.