

23,5. Добавка по классической геометрии

14 июля

1. Дан треугольник ABC с инцентром в точке I . D — проекция точки I на BC , P — проекция точки I на AD . Докажите, что $\angle BPD = \angle DPC$.

2. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H и пересекают его описанную окружность ω в точках A' , B' , C' ; M — середина BC . Луч MH пересекает ω в точке X . В треугольники $A'B'X$ и $A'C'X$ вписаны окружности с центрами U и V . Докажите, что $UV \parallel BC$.

3. Точка O лежит внутри треугольника ABC . Прямые AO , BO и CO пересекают стороны BC , CA и AB в точках D , E и F соответственно. H — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на EF . Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из H на BE , CF , AB и AC лежат на одной окружности.

4. Касательная в точке A к описанной окружности ω треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D . Прямая ℓ пересекает отрезок AD в точке P , окружность ω в точках Q и T , стороны AB и AC соответственно в точках R и S , а продолжение стороны BC в точке U . Точки P, Q, R, S, T и U расположены на прямой ℓ именно в таком порядке, $QR = ST$. Докажите, что $PQ = UT$.

5. В описанной окружности Ω треугольника ABC проведена хорда XY , параллельная BC и располагающаяся между точкой A и прямой BC . Окружности ω_1 и ω_2 касаются хорды XY , окружности Ω и отрезков AB и AC соответственно, причём расположены они между прямыми XY и BC . Докажите, что общие внутренние касательные к ω_1 и ω_2 пересекаются на биссектрисе угла BAC .

6. Окружность ω с центром I вписана в неравнобедренный остроугольный треугольник ABC . Пусть B_1 и C_1 — проекции точек B и C на прямую AI . Точки X и Y выбраны на отрезке BC так, что $\angle B_1XC_1 = \angle B_1YC_1 = 90^\circ$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника AXY , касается ω .

7. Точка O — центр описанной окружности ω остроугольного треугольника ABC . Биссектриса угла $\angle BAC$ пересекает BC в точке D . Окружность ω_A касается отрезков AB и AC , а также внутренним образом касается ω в точке P . Обозначим через E и F точки касания вневписанных окружностей с **отрезками** AC и AB соответственно. Пусть N — точка Нагеля, то есть точка пересечения отрезков BE и CF . Оказалось, что N лежит на описанной окружности треугольника AEF . Докажите, что N также лежит на описанной окружности треугольника PDO .

8. Общие внешние касательные ℓ_1 и ℓ_2 к окружностям s_1 и s_2 пересекаются в точке K . Окружность w проходит через точку K , касается окружностей s_1 и s_2 и повторно пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2 в точках B и D . Касательные из точек B и D к s_1 , отличные от ℓ_1 и ℓ_2 , пересекаются в точке A . Касательные из точек B и D к s_2 , отличные от ℓ_1 и ℓ_2 , пересекаются в точке C . Докажите, что $\angle AKD = \angle CKB$.