

## Серия 17, линейные рекурренты

13 июля

**Определения.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *рекуррентой порядка  $k$* , если  $x_{n+k}$  выражается через  $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}$  для всех  $n \geq k$ .

Рекуррентное соотношение порядка  $k$  называется *линейным*, если

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k},$$

где  $a_i$  — некоторые фиксированные числа,  $a_k \neq 0$ .

*Характеристическим уравнением* этой линейной рекурренты, называется уравнение вида  $x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \dots - a_k = 0$ .

### Задачи

1. а) Докажите, что две рекурренты порядка  $k$ , заданные одним и тем же соотношением, совпадают тогда и только тогда, когда совпадают её первые  $k$  членов.

б) Докажите, что геометрическая прогрессия  $x_n = q^n$ , является решением линейной рекурренты тогда и только тогда, когда  $q$  является корнем характеристического уравнения.

в) Докажите, что если  $y_n$  и  $z_n$  некоторые решения линейной рекурренты, то  $C_1 y_n + C_2 z_n$  также является решением этой рекурренты.

2. Пусть характеристическое уравнение линейной рекурренты второго порядка  $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}$  имеет два различных корня  $q_1, q_2$ . Докажите, что любую последовательность, удовлетворяющую данному рекуррентному соотношению, можно представить в виде:

$$x_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n,$$

где  $C_i$  — некоторые константы, которые определяются по начальным условиям.

3. а) Найдите все геометрические прогрессии, удовлетворяющие рекуррентному соотношению  $x_{n+2} = x_{n+1} + 12x_n$ .

б) Найдите формулу  $n$ -го члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + 12x_n$ .

4. Пусть  $x_n$  — рекуррентная последовательность второго порядка, и корни её характеристического уравнения совпадают, т. е.  $q_1 = q_2 = q$ . Докажите, что можно подобрать такие числа  $C_1$  и  $C_2$ , что  $x_n = q^n(C_1 + nC_2)$ .

**Замечание.** Для рекуррент более высоких порядков можно доказать аналогичные утверждения. Если  $x_n$  — рекуррентная последовательность порядка  $k$ , и её характеристическое уравнение имеет  $k$  различных корней  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , то любую последовательность, удовлетворяющую данному рекуррентному соотношению, можно представить в виде:

$$x_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \dots + C_k q_k^n,$$

где  $C_i$  — некоторые константы, которые определяются по начальным условиям. Если  $q$  — корень кратности  $m$  характеристического уравнения, то этому корню соответствуют линейно независимые решения  $\{q^n\}, \{nq^n\}, \{n^2q^n\}, \dots, \{n^{m-1}q^n\}$ .

5. Найдите явную формулу  $n$ -го члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением

а)  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n, a_1 = 1, a_2 = -1;$

б)  $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, a_1 = 1, a_2 = 3;$

в)  $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 16a_n, a_1 = 2, a_2 = 3.$

6. Найдите формулу общего члена для чисел Фибоначчи.

7. Последовательность определена формулой  $a_n = (5 + \sqrt{17})^n + (5 - \sqrt{17})^n$ . Найдите рекуррентное соотношение для  $a_n$ . Докажите, что  $a_n, n \in \mathbb{N}$ , делится на  $2^n$ , но не делится на  $2^{n+1}$ .

8. Сколькими способами можно заполнить коробку размером  $2 \times 2 \times n$  кирпичами размером  $1 \times 1 \times 2$ ? Найдите явную формулу  $n$ -го члена последовательности.

9. Натуральные числа  $a$  и  $b$  не равны 1. Последовательность  $\{x_n\}$  задана начальными условиями  $x_0 = 1$  и  $x_1 = 1$  и соотношениями

$$x_{2n} = ax_{2n-1} - x_{2n-2}, \quad x_{2n+1} = bx_{2n} - x_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Докажите, что при любых натуральных  $m$  и  $n$  произведение  $x_{n+m} \cdot x_{n+m-1} \cdot \dots \cdot x_{n+1}$  делится на  $x_m \cdot x_{m-1} \cdot \dots \cdot x_1$ .