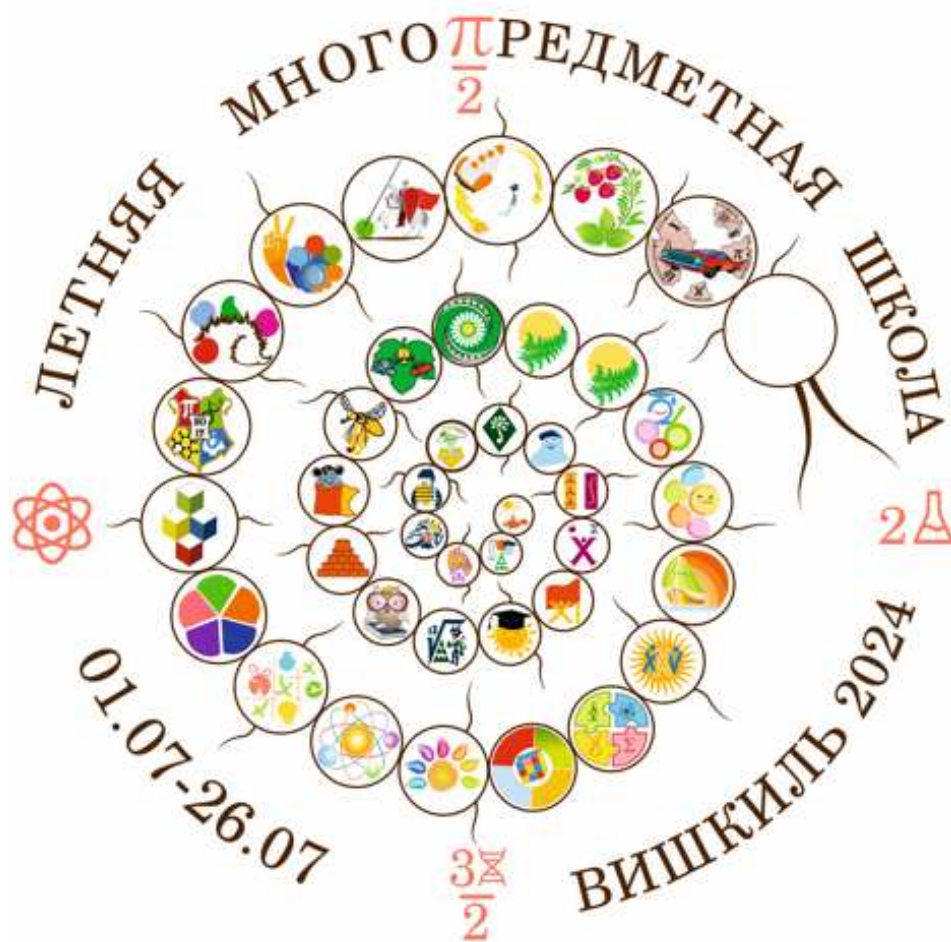


XL Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 1–26 июля 2024 г.



9 КЛАСС. ОБЫЧНЫЕ ГРУППЫ МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Беличенко Н.А.
Горбачёва А.К.
Ковязина Е.М.
Кутявин Д.М.
Оскорбин Д.Н.
Першаков М.В.
Старостина О.В.
Финаревский Л.Б.

От авторов

Перед вами сборник материалов занятий обычных групп 9 класса математического отделения XL Кировской летней многопредметной школы, которая состоялась 1–26 июля 2024 года в ДОЛ «Вишкиль» Котельничского района Кировской области. Сборник может быть интересен школьникам, учителям, руководителям математических кружков. Составители благодарят учеников ЛМШ–2024 за проявленную активность в решении задач настоящего сборника.



Вступительная олимпиада. 2 июля

1. Два действительных числа a и b таковы, что выполняется равенство

$$a^2 + 2a = 2b^2 + 13b - 8.$$

Известно, что при любом изменении значения a на другое равенство перестает быть верным. Найдите все возможные значения b .

2. На плоскости отметили точку P . Паша хочет провести n прямых, не проходящих через P , так, чтобы каждый луч, выходящий из P , пересекал хотя бы 10 проведенных прямых. При каком наименьшем n Паша может добиться желаемого?

3. На доске написано натуральное число m . За один ход число m заменяется на сумму числа m и квадрата наибольшего собственного делителя m . Могло ли после 2024 шагов на доске остаться число, являющееся точным квадратом?

4. При каких натуральных n на доску $n \times n$ можно выставить нескольких ладей так, чтобы каждая клетка (включая клетки, на которых стоят ладьи) была побита ровно 3 ладьями? Ладья бьет клетку, на которой стоит; ладьи не бьют сквозь друг друга.

5. Точка P выбрана на описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Пусть D , E и F — точки, симметричные P относительно средних линий треугольника ABC , параллельных BC , CA и AB соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ADP , BEF и CFP имеют общую точку, отличную от P .

6. В n -элементном множестве выбрали m различных подмножеств A_1, A_2, \dots, A_m . Докажите неравенство

$$n^2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^m |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|)^3.$$

1. Комплексные числа. 3 июля

Определение. Модулем $|z|$ комплексного числа z называется длина вектора \overrightarrow{OZ} , а аргументом $\arg z$ ненулевого числа z — ориентированный угол между положительным направлением действительной оси и вектором \overrightarrow{OZ} .

1. Изобразите на комплексной плоскости числа: $1, i, 1 + i, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Докажите, что:

а) $|z|^2 = z\bar{z}$;

б) $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2 ;

в) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

г) модуль произведения (частного) комплексных чисел равен произведению (частному) модулей.

3. Изобразите на комплексной плоскости следующие множества:

а) $|z - i| = 1$; б) $1 < |z - 1 + 2i| \leq 3$; в) $\frac{|z-2i|}{|z+1|} = 1$;

г) $|iz - 1| > |z - 1|$; д) $|\pi - \arg z| \leq \frac{\pi}{4}$; е) $|\arg(z - i)| \leq \frac{\pi}{4}$.

Определение. Запись $|z|(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, где $\varphi = \arg z$, называется *тригонометрической формой комплексного числа z* .

4. Докажите, что при произведении (делении) комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются (делятся), а аргументы складываются (вычитаются).

5. Формула Муавра. Докажите, что если $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, то для $n \in \mathbb{N}$ верно

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi).$$

6. Вычислите $\frac{(1-i)^7(-\sqrt{3}+i)^{10}}{(1+i)^{15}}$.

Определение. Число w называется *корнем n -ой степени $\sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z* , если $w^n = z$.

7. а) Вычислите все корни $\sqrt{1}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$. Изобразите их на комплексной плоскости.

б) Выведите формулу для нахождения всех значений корня $\sqrt[n]{1}$. Как эти корни расположены на комплексной плоскости?

в) Выведите формулу для нахождения всех значений корня $\sqrt[n]{z}$ в тригонометрической форме. Как эти корни расположены на комплексной плоскости?

8. Найдите все значения $\sqrt[4]{1+i}$ и изобразите их на комплексной плоскости.

9. Решите уравнение $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

10. Найдите а) сумму; б) произведение всех корней $\sqrt[n]{1}$.

11. а) Докажите следующие формулы:

$$\cos nx = C_n^0 \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots$$

$$\sin nx = C_n^1 \sin x \cos^{n-1} x - C_n^3 \sin^3 x \cos^{n-3} x + C_n^5 \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots$$

б) Вычислите $C_{2025}^0 - C_{2025}^2 + C_{2025}^4 - \dots - C_{2025}^{2022} + C_{2025}^{2024}$.

12. Докажите следующие равенства:

$$\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0,$$

$$\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1.$$

13. Вычислите $\frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 44^\circ}$.

2. Поворотная гомотетия. 3 июля

Определение. Поворотная гомотетия — композиция поворота и гомотетии с общим центром. Порядок выполнения преобразований может быть любым, т.е. $R_O^\alpha \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\alpha$.

- Вектор \overrightarrow{AB} переходит в вектор \overrightarrow{CD} , повёрнутый на угол α (при $k > 0$) или $\alpha + 180^\circ$ (при $k < 0$), а его длина умножается на $|k|$.
- Сохраняется форма фигур: прямая переходит в прямую, окружность — в окружность, сохраняются отношения отрезков, углы, параллельность.

Упражнения

1) а) Треугольники YAB и YA_1B_1 с общей вершиной Y одинаково ориентированы и подобны. Докажите, что треугольники YAA_1 и YBB_1 также одинаково ориентированы и подобны.

б) Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке X . Докажите, что четырёхугольники $YABX$ и YA_1B_1X — вписанные.

в) Прямые, содержащие отрезки AB и A_1B_1 , пересекаются в точке X . Описанные окружности треугольников AA_1X и BB_1X с центрами C и D пересекаются в точке Y . Докажите, что треугольники YAB и YA_1B_1 подобны, угол $\angle AYA_1$ равен углу между этими прямыми, а $\angle AYB = \angle A_1YB_1 = \angle CYD$.

Задачи

1. Квадраты $ABCD$ и $AXYZ$ одинаково ориентированы. Докажите, что прямые BX , CY и DZ пересекаются в одной точке.

2. **Точка Микеля.** Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X , прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке Y . Докажите, что четыре описанные окружности треугольников, образованных данными прямыми, проходят через одну точку.

3. Стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Точка M — середина AB , точка N — середина CD . Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BCE , ADE и MNE лежат на одной прямой.

4. На диагонали BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрана такая точка K , что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' — центры вписанных окружностей треугольников

ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X . Докажите, что точки A, X, I, D лежат на одной окружности.

5. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D . Описанная окружность треугольника BCD вторично пересекает окружность, проходящую через точки A и D и касающуюся прямой CD , в точке K . Точка M — середина BC , точка N — середина AD . Докажите, что точки B, M, N и K лежат на одной окружности.

6. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C касается катетов BC и AC в точках D и E соответственно. Точки G и H на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $BD = CG$ и $AE = CH$. Отрезки DH и EG пересекаются в точке M . Докажите, что отличная от M точка пересечения описанных окружностей треугольников DGM и EHM лежит на вписанной окружности треугольника ABC .

3. Многочлены. Теорема Безу. 4 июля

Определения. *Многочлен* — это выражение вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

коэффициенты которого принадлежат числовому множеству \mathbf{K} . *Степень многочлена* $P(x)$ — число $\deg P(x) = n$. Число a_n — *старший коэффициент*, a_0 — *свободный член*. Многочлены *равны*, если у них совпадают все коэффициенты при одинаковых степенях. Вместо x можно подставить любое число x_0 , т. е. вычислить *значение в точке* x_0 . Если $P(x_0) = 0$, то x_0 называют *корнем* многочлена.

Упражнения

- 1) Найдите степень и старший коэффициент следующих многочленов.
а) $(x+1)^{10}(1-2x^2)^3$; б) $(x^2+x+1)^6 - (x+1)^{12}$.
- 2) Найдите свободный член и сумму коэффициентов следующих многочленов:
а) $(x^2-x+1)^{2018}$; б) $(3x^2-4x-2)^{15}$.
- 3) Дан многочлен $(1+x^2+x^4)^{30} + (1+x^3+x^6)^{20}$.
а) Сколько ненулевых коэффициентов имеет этот многочлен?
б) Чему равна сумма всех коэффициентов этого многочлена?
в) Чему равна сумма коэффициентов при чётных степенях этого многочлена?

Определение. *Разделить* многочлен $P(x)$ на ненулевой многочлен $Q(x)$ с остатком — это найти такие многочлены $H(x)$ (*неполное частное*) и $R(x)$ (*остаток*), что выполнено равенство $P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$, причём $\deg R(x) < \deg Q(x)$ или $R(x) \equiv 0$.

4) Поделите столбиком:

а) $6x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 10x + 8$ на $2x^2 - x + 2$; б) $x^{105} + x + 1$ на $x^2 - 1$.

5) Докажите, что для $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$ (или $\mathbf{K} = \mathbb{R}$) при делении многочлена на многочлен с остатком неполное частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$ существуют и определяются однозначно.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$, т. е. $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$, притом $\deg Q(x) = \deg P(x) - 1$.

6) Докажите теорему Безу.

7) а) Многочлен $P(x)$ делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда $P(a) = 0$.

б) Докажите, что число корней многочлена не превосходит его степени.

в) Докажите, что если значения двух многочленов, степень каждого из которых не превосходит n , совпадают в $n + 1$ различных точках, то эти многочлены равны.

г) Если многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$, то корни многочлена $Q(x)$ являются корнями многочлена $P(x)$.

Задачи

1. Пусть $P(x)$ — многочлен, такой, что $P(x) = P(x + 1)$. Докажите, что $P(x)$ — константа.

2. Докажите, что многочлен $(x + 1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x + 1)(2x + 1)$.

3. При каких a и b многочлен $P(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?

4. а) Известно, что многочлен $P(x)$ даёт при делении на $x - 1$ остаток 5, а при делении на $x + 2$ остаток 14. Найдите остаток от деления $P(x)$ на $(x - 1)(x + 2)$.

б) Найдите остаток $R(x)$ от деления многочлена $x^n + x + 2$ на $x^2 - 1$.

5. Докажите, что для любого натурального n , не кратного 3, многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$.

6. Про многочлен $P(x)$ степени 10 с действительными коэффициентами известно, что $P(1) = P(-1)$, $P(2) = P(-2)$, ..., $P(5) = P(-5)$. Докажите, что $P(x) = P(-x)$ для любого действительного x .

7. Найдите все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$xP(x - 1) = (x - 20)P(x).$$

8. Пусть $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Найдите остаток от деления $P(x^5)$ на $P(x)$.

9. Многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет на интервале $(0; 2)$ три различных действительных корня. Докажите, что $-2 < p + q + r < 0$.

10. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2024$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2024) > \frac{1}{64}$.

11. Многочлены $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, при всех действительных x удовлетворяют равенству $P^2(x) + Q^2(x) = R^2(x)$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени — действительные.

4. Велосипедисты. 4 июля

1. а) Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и прямым углом при вершине D . Точка M — середина отрезка AB . Докажите, что $MC = MD$.

б) Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через Q , вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках A и B соответственно. Докажите, что середина отрезка O_1O_2 равноудалена от середин отрезков QA и QB .

в) Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q . Докажите, что на плоскости найдётся точка со следующим свойством: если провести через точку Q произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках A и B , то эта точка будет равноудалена от A и B .

Лемма о двух велосипедистах. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q , одновременно из точки P по часовой стрелке выехали два велосипедиста A и B с одинаковыми угловыми скоростями. Докажите, что существует такая фиксированная точка V на плоскости, что в любой момент времени выполнено $AV = BV$. (Точку V называют *точкой двух велосипедистов*)

2. а) По какой траектории движется середина отрезка AB ?

б) В условиях леммы докажите, что $\angle VPQ = 90^\circ$.

3. Через точку A , не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна — в точках P_1, P_2 , другая — в точках Q_1, Q_2 . Произвольная прямая, проходящая через точку A , пересекает окружность в точках M_1 и M_2 , а описанные окружности треугольников AP_1Q_1 и AP_2Q_2 — вторично в точках N_1 и N_2 соответственно. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть его диагонали пересекаются в точке E , точки M и N — середины диагоналей. Вокруг треугольников AEB, BEC, CED, DEA описаны окружности, причём первая и третья пересекаются

вторично в точке L , вторая и четвёртая — в точке K . Докажите, что точки M, N, K, L лежат на одной окружности.

5. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и P . Обозначим через MA хорду окружности S_1 , касающуюся окружности S_2 в точке M , а через MB — хорду окружности S_2 , касающуюся окружности S_1 в точке M . На луче MP отложен отрезок $PH = MP$. Докажите, что четырёхугольник $MANB$ можно вписать в окружность.

6. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Касательная к окружности ω_1 в точке A пересекает ω_2 в точке C ; касательная к окружности ω_2 в точке A пересекает ω_1 в точке D . Биссектриса угла CAD пересекает ω_1 и ω_2 в точках E и F соответственно. Внешняя биссектриса угла CAD пересекает ω_1 и ω_2 в точках X и Y соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку XY касается описанной окружности треугольника BEF .

7. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 проходят через точку P . Касательная к ω_1 , проведённая в точке P , вторично пересекает ω_2 и ω_3 в точках $P_{1,2}$ и $P_{1,3}$ соответственно. Точки $P_{2,1}, P_{2,3}, P_{3,1}$ и $P_{3,2}$ определяются аналогично. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам $P_{1,2}P_{1,3}, P_{2,1}P_{2,3}$ и $P_{3,1}P_{3,2}$ пересекаются в одной точке.

5. Отношения эквивалентности и группы преобразований. 5 июля

Упражнение. В стране (население которой, возможно, бесконечно) некоторые граждане дружат между собой. При этом выполнены такие правила:

- (1) каждый друг сам себе;
- (2) если A дружит с B , то и B дружит с A ;
- (3) друг моего друга — мой друг.

Докажите, что все жители этой страны разбиваются на кланы таким образом, что любые двое из одного клана дружат, а любые двое из разных кланов — нет.

Определение. Говорят, что на множестве M задано отношение \sim , если для любых двух элементов $a, b \in M$ известно, находится элемент a в отношении \sim к элементу b (пишут: $a \sim b$) или нет.

Определение. Отношение \sim , заданное на множестве M , называется:

- *рефлексивным*, если $a \sim a$ для любого $a \in M$;
- *симметричным*, если для любых $a, b \in M$ из $a \sim b$ следует, что $b \sim a$;
- *транзитивным*, если для любых $a, b, c \in M$ из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует, что $a \sim c$;

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*.

Заменим в упражнении 1 страну произвольным множеством, а дружбу — произвольным заданным на этом множестве отношением эквивалентности. Получится теорема о разбиении: если на непустом множестве задано отношение эквивалентности, то все элементы этого множества разбиваются на непустые непересекающиеся классы таким образом, что любые два элемента из одного класса находятся в данном отношении (то есть, проще говоря, эквивалентны).

Верно, очевидно, и обратное: если произвольное множество разбито на непустые непересекающиеся классы, то отношение «лежать в одном классе» будет отношением эквивалентности. Получается, что разбить множество на непустые классы и задать на нём отношение эквивалентности — это, по сути, одно и то же.

2) Являются ли отношениями эквивалентности:

- а) отношение «больше» на множестве R ;
- б) параллельность прямых;
- в) перпендикулярность прямых;
- г) сравнимость целых чисел по данному модулю;
- д) подобие плоских фигур?

3) Какими отношениями разбиваются:

- а) фигуры на классы равновеликих;
- б) вершины графа на компоненты связности?

Определение. Преобразованием множества M называется биективное отображение этого множества на себя.

Определение. Непустой набор G преобразований множества M называется *группой преобразований* этого множества, если он обладает следующими тремя групповыми свойствами:

- (1) если $f, g \in G$, то и $g \circ f \in G$;
- (2) если $f \in G$, то и $f^{-1} \in G$;
- (3) id_M содержится в G .

Определение. Пусть G — некоторая группа преобразований множества M . Будем говорить, что элемент $x \in M$ *сравним с элементом $y \in M$ по модулю G* , если существует преобразование $f \in G$, переводящее x в y .

Определение. Совокупность всех элементов, сравнимых с x по модулю G , называется *орбитой элемента x , порождённой группой G* .

Теорема. Отношение сравнимости по модулю группы преобразований множества M является отношением эквивалентности на множестве M , т. е. группа преобразований множества разбивает все его элементы на непустые непересекающиеся орбиты.

Задачи

1. Какими группами преобразований порождены следующие отношения эквивалентности:

- а) сравнимость целых чисел по модулю m ;
- б) подобие плоских фигур;
- в) параллельность прямых на плоскости?

2. Придумайте группы преобразований, орбитами которых были бы:

- а) окружности с данным центром;
- б) вершины правильных k -угольников с данным центром;
- в) решётка из точек координатной плоскости с целочисленными координатами и решётки, получающиеся из неё всевозможными сдвигами.

Определение. Пусть G — группа преобразований множества M . Число элементов в группе G называется *порядком группы* и обозначается $|G|$.

3. Каков порядок группы самосовмещений правильного а) пятиугольника; б) шестиугольника?

4. Пусть A — множество из 10 элементов. Приведите пример группы преобразований порядка а) 2; б) 5; в) 7; г) 14; д) 15.

6. Многочлены с целыми коэффициентами. 5 июля

Во всех задачах мы будем рассматривать многочлены с целыми коэффициентами. Множество всех многочленов с целыми коэффициентами обозначается $\mathbb{Z}[x]$.

1. Докажите, что если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ — корень многочлена с целыми коэффициентами $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$), то $a_n : q, a_0 : p$.

2. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что

- а) $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$ при всех целых a и b ;
- б) $P(a) \equiv P(a + b) \pmod{b}$.

3. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причём $P(2)$ делится на 5, а $P(5)$ делится на 2. Докажите, что $P(7)$ делится на 10.

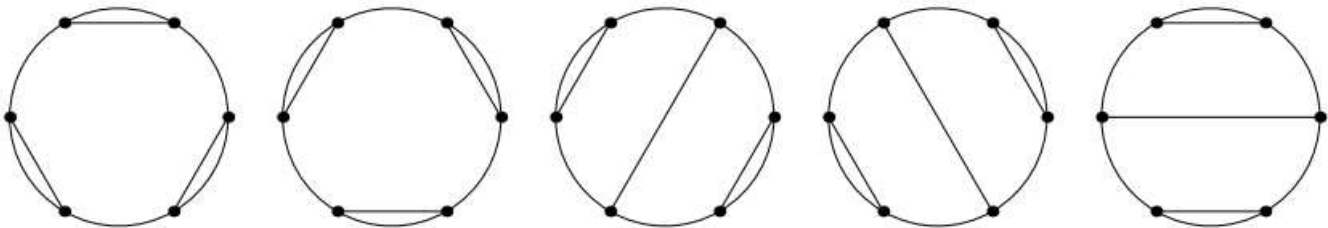
4. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2025$, $P(2025) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k .

5. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность $P(2025) - Q(2025)$ кратна 1012.
6. Известно, что числа p и q простые, а уравнение $x^{100} + px^{99} - q = 0$ имеет целый корень. Докажите, что уравнение $x^{101} - px^{100} + q = 0$ тоже имеет целый корень.
7. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19) = P(94) = 2024$.
8. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .
9. Докажите, что для каждого непостоянного многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ найдётся такое натуральное число n , что $P(n)$ — составное число.
10. В равенстве $x^5 + 2x + 3 = p^k$ числа x и k — натуральные. Может ли число p быть простым?
11. Докажите, что не существует многочлена степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом.
12. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

7. Числа Каталана. 7 июля

Определение. Количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$ называется n -ым числом Каталана C_n .

1. Покажите, что количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (из любой точки выходит одна хорда) равно C_n . Выразите n -е число Каталана через предыдущие.



2. Будем рассматривать все пути из точки $(0, 0)$ длины $2n\sqrt{2}$, идущие по диагоналям клеток вправо-вверх или вправо-вниз (длина каждой диагонали — $\sqrt{2}$).

а) **Принцип отражения.** Докажите, что количество путей с концом в точке $(2n, -2)$, равно количеству путей с концом в $(2n, 0)$, имеющих точки в нижней полуплоскости.

б) Докажите, что $C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$.

3. а) Покажите, что количество триангуляций (разрезаний на n треугольников непересекающимися диагоналями) выпуклого $(n+2)$ -угольника равно C_n .

б) Докажите формулу

$$(n-1)C_n = \frac{(n+2)(C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_1)}{2}.$$

в) Докажите, что $C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}C_n$.

г) Докажите, что $C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$.

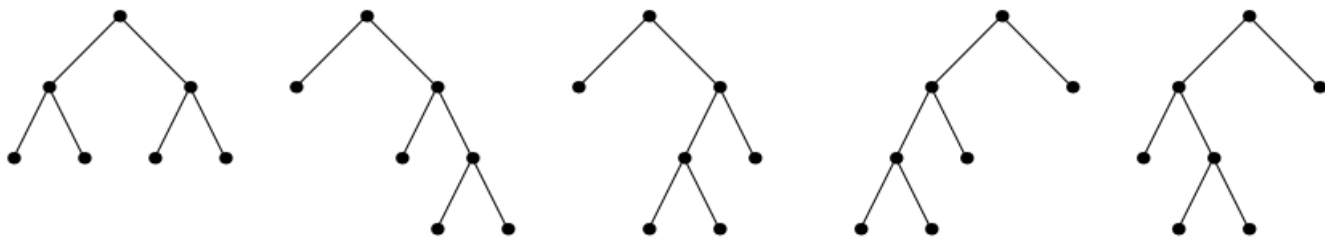
4. Сколько существует непересекающихся пар путей (они идут только вверх и вправо) из точки $(0, 0)$ в одну и ту же точку, суммарной длины $2n+2$? Такие пары путей называются *параллеломино*.

5. Сколько существует таблиц Юнга размером $2 \times n$? Таблица Юнга — это прямоугольник, заполненный последовательными числами так, что они возрастают по строкам и столбцам:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Докажите, что количество подвешенных двоичных деревьев (у каждой вершины не более двух потомков — левого и правого, и у каждой вершины, кроме корня, один предок) с n вершинами равно C_n .

7. Сколько существует различных упорядоченных подвешенных деревьев, где у каждой вершины либо 0, либо 2 потомка, а в графе $n+1$ лист?



8. **Перестановки Кнута.** Докажите, что количество способов расставить числа от 1 до n чисел в ряд так, чтобы не было трёх чисел, стоящих в порядке возрастания, равно C_n .

8. Линейное движение. 7 июля

Определение. Предположим, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ определена точка $A(t)$, вектор $\vec{a}(t)$ или прямая $l(t)$. Будем говорить, что объекты $A(t)$, $\vec{a}(t)$ или $l(t)$ *линейно зависят от t* (или *двигаются линейно*), если существует такой вектор \vec{v} , что

$$A(t) = A(0) + t \cdot \vec{v}, \quad \vec{a}(t) = \vec{a}(0) + t \cdot \vec{v}, \quad l(t) = l(0) + t \cdot \vec{v}.$$

Свойства

- 1) Вектор, соединяющий две линейно движущиеся точки, движется линейно.
- 2) Серединка отрезка, соединяющего две линейно движущиеся точки, движется линейно.
- 3) Параллельная проекция линейно движущейся точки на неподвижную прямую движется линейно.
- 4) Прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку, движется линейно.
- 5) Точка пересечения линейно движущихся прямых движется линейно.

Задачи

1. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD .
2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. На отрезках BC_1 и AB_1 отмечены точки P и Q такие, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1 .

Определение. Определителем матрицы 3×3 вида $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ называется выражение

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Предложение

- а) Если две линейно движущиеся точки совпадают при двух значениях параметра t , то они совпадают всегда.
- б) Если три линейно зависящие от t прямые пересекаются в одной точке при двух значениях параметра t , то они всегда пересекаются в одной точке.
- в) Если линейно движущиеся векторы перпендикулярны при трёх значениях параметра t , то они всегда перпендикулярны.

г) Если линейно движущиеся векторы коллинеарны при трёх значениях параметра t , то они всегда коллинеарны.

д) Если существуют три момента времени t , когда три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой, то они всегда лежат на одной прямой.

3. Прямая Гаусса. На плоскости проведены четыре прямые общего положения. Докажите, что середины отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся прямых, лежат на одной прямой.

4. Диагонали выпуклого четырёхугольника перпендикулярны. Докажите, что перпендикуляры из середин двух смежных сторон к противоположным сторонам пересекаются на диагонали.

5. На сторонах BC, CA, AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечены точки P, X, Y соответственно так, что $PX \parallel AB, PY \parallel CA$. Точка T — середина дуги BC окружности (ABC) . Докажите, что $TP \perp XY$.

6. а) Дана фиксированная точка A . Точки B и C треугольника ABC движутся линейно из точки A в одном направлении по прямым, проходящим через A . Докажите, что центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC движутся линейно.

б) Даны фиксированные точки A и B . Точка C линейно движется по прямой AC . Докажите, что центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC движутся линейно.

7. Пусть на сторонах BA и BC треугольника ABC выбраны точки A_0 и C_0 соответственно, а точки M и M_0 — середины отрезков AC и A_0C_0 . Докажите, что если $AA_0 = CC_0$, то прямая MM_0 параллельна биссектрисе угла ABC .

8. Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих внеписанных окружностей в точках A_1 и B_1 . Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и CBV_1 . Докажите, что A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C .

9. Лемма Бернсайда–1. 8 июля

Определение. Пусть G — группа преобразований множества M . Число элементов в группе G называется *порядком группы* и обозначается $|G|$. *Неподвижной точкой преобразования* называется всякий элемент $x \in M$, который это преобразование переводит в себя.

Задачи

1. Докажите, что если каждое из двух преобразований переводит элемент x в элемент y , то найдётся такое преобразование, для которого x является неподвижной точкой.

2. Докажите, что если все преобразования из группы G , кроме тождественного, не имеют неподвижных точек, то длина каждой её орбиты равна $|G|$.

В ситуации, описанной в последней задаче, найти число орбит очень легко: надо поделить число элементов множества M на порядок группы G . Но мы знаем, что орбита элемента может иметь и другую длину. Это происходит, когда существуют нетождественные преобразования, имеющие неподвижные точки.

Определение. Множество всех преобразований из группы G , оставляющих неподвижной точку x , называется *стабилизатором* элемента x и обозначается $\text{St}(x)$.

3. а) Пусть точки x и y лежат в одной орбите группы G . Тогда преобразований из G , переводящих x в y , столько же, сколько преобразований в стабилизаторе элемента x , то есть $|\text{St}(x)|$.

б) Докажите, что длина орбиты точки x равна $\frac{|G|}{|\text{St}(x)|}$. Это означает, что порядки стабилизаторов у всех точек одной орбиты одинаковы.

в) Докажите, что сумма порядков стабилизаторов всех точек одной орбиты равна $|G|$.

г) У каждого преобразования из группы G найдём число неподвижных точек. Докажите, что сумма всех полученных чисел равна сумме порядков стабилизаторов всех точек множества M .

д) **Лемма Бернсайда.** Для преобразования $g \in G$ обозначим через $N(g)$ число его неподвижных точек. Тогда число орбит группы G равно среднему числу неподвижных точек, то есть $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} N(g)$.

Приложения леммы Бернсайда к решению задач основаны на том, что находить число неподвижных точек преобразования часто бывает легче, чем длины орбит.

Пример. Вычислить количество различных ожерелий из 6 бусинок, каждая из которых может быть одной из трёх цветов.

10. Инверсия—1. 8 июля

Определения. На плоскости дана окружность S с центром O радиуса R . *Инверсией относительно окружности S* называется преобразование плоскости, которое любую точку M , не совпадающую с O , переводит в точку M_1 , лежащую на луче OM , такую, что $OM \cdot OM_1 = R^2$. Для точки O это преобразование не определено. Точка O называется *центром инверсии*, S — *окружностью инверсии*, R — *радиусом инверсии*.

Определение. Углом между двумя кривыми, пересекающимися в точке A , называется угол между касательными к ним, проведёнными в точке A . Окружности, угол между которыми прямой, называются *ортогональными*.

Теория

Т1. Построение. Дана окружность S с центром O и точка M вне окружности.

а) MT — касательная из точки M к окружности S . Из точки T опускаем перпендикуляр на OM . Получаем точку M_1 .

б) Пусть AB — диаметр, перпендикулярный OM , P — точка пересечения AM и окружности S . Прямые BP и OM пересекаются в точке M_1 .

Тогда точки M и M_1 инверсны. Как строить инверсную точку, если M находится внутри окружности S ?

Т2. Основная лемма. Пусть A, A' и B, B' — пары различных точек, инверсных относительно окружности с центром O . Тогда $\angle OAB = \angle OB'A'$.

Т3. Памятка. При инверсии

ЧТО	ВО ЧТО
Прямая через O	В себя
Прямая не через O	Окружность через O
Окружность через O	Прямая не через O
Окружность не через O	Окружность не через O

Т4. Ортогональность. Окружность, проходящая через две взаимно инверсные точки, при инверсии преобразуется в себя.

Т5. Инвариант. Окружность, ортогональная окружности инверсии, инвариантна.

Т6. Обратно — инвариант. Если окружность при инверсии переходит сама в себя и не совпадает с окружностью инверсии, то она ей ортогональна.

Упражнения

1) Нарисуйте образ окружности и двух касательных к ней, проведенных из одной точки, при инверсии

- а) относительно точки пересечений касательных;
- б) относительно точки касания;
- в) относительно центра окружности.

2) Нарисуйте образ треугольника и его высот при инверсии относительно ортоцентра.

Задачи

1. Окружность S_1 касается окружности S_2 в точке K , а её хорды AB — в точке C . Точка L — середина дуги AB , не содержащей точку K . Докажите, что $LA^2 = LC \cdot LK$.

2. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите ГМТ касания этих окружностей.

3. В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей. Рассмотрим множество прямых, проходящих через их точки пересечения. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку (Решите двумя способами — инверсией относительно угла сегмента и относительно искомой точки).

4. В треугольник ABC вписана окружность ω с радиусом r . Пусть ω_A — окружность, проходящая через точки B и C и ортогональная ω . Аналогично определим окружности ω_B и ω_C . Окружности ω_B и ω_C пересекаются вторично в точке A' . Аналогично определим точки B' и C' . Описанная окружность треугольника $A'B'C'$ имеет радиус R . Докажите, что $r = 2R$.

5. а) **Задача Архимеда.** Пусть точка C лежит на отрезке AB . По одну сторону от прямой AB построены полуокружности на диаметрах AB , BC , AC (арбелос). Перпендикуляр MC к отрезку AB делит арбелос на две части. Докажите, что радиусы окружностей, вписанных в эти части арбелоса, равны между собой.

б) **Задача Паппа.** Пусть окружности α , β , γ с диаметрами AB , BC , AC образуют арбелос; δ_0 — окружность, вписанная в арбелос; окружность δ_1 касается окружностей α , β и δ_0 , окружность δ_2 касается окружностей α , β и δ_1 , и так далее. Обозначим R_n — радиус окружности δ_n , d_n — расстояние от центра окружности δ_n до прямой AB . Докажите, что $d_n = 2(n+1)R_n$.

11. Лемма Бернсайда—2. 9 июля

1. В алфавите племени Умбо-Юмбо только две буквы — А и У. Словом считается любая комбинация из трёх букв. Два слова считаются синонимами, если одно из них может быть получено из другого с помощью перестановки букв. Сколько слов с разными значениями в языке Умбо-Юмбо? Решите эту задачу с помощью леммы Бернсайда и проверьте ответ с точки зрения здравого смысла.

2. Вычислить количество ожерелий из а) 4, б) 5 бусинок, каждая из которых может быть одного из двух цветов.

3. Сколькими различными способами можно раскрасить грани правильного тетраэдра, если каждую можно красить любой из данных n красок? Раскраски считаем одинаковыми, если они совмещаются поворотом тетраэдра.

4. Сколькими способами можно раскрасить рёбра куба тремя красками? Раскраски считаем одинаковыми, если они совмещаются поворотом куба.

5. Ожерелье состоит из p бусинок (p — простое), каждая бусинка одного из k цветов. Ожерелье можно вращать, но нельзя переворачивать. Сколько имеется таких ожерелий? Выведите из результата малую теорему Ферма.

6. Ожерелье состоит из n бусинок, каждая одного из k цветов. Ожерелье можно вращать, но нельзя переворачивать. Докажите, что количество различных ожерелий равно

$$\frac{1}{n} \sum_{n \vdots d} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) k^d.$$

7. Сколько существует различных бус из 18 бусин, если 6 бусин окрашены красной краской, а 12 бусин — синей краской? Ожерелье можно вращать, но нельзя переворачивать.

12. Инверсия—2. 9 июля

Теория

Т7. Изменение расстояний. Пусть A_1 и B_1 — образы точек A и B при инверсии с центром O и радиусом R . Тогда $A_1B_1 = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$.

Т8. Конформность. При инверсии сохраняются углы между кривыми.

Задачи

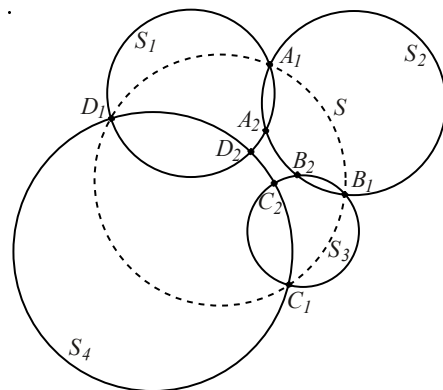
1. **Неравенство Птолемея.** Докажите, что для любых четырёх точек A, B, C, D плоскости выполнено неравенство

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $ABCD$ — выпуклый вписанный четырёхугольник или точки A, B, C, D лежат на одной прямой.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω с центром O , причём O не лежит на диагоналях четырёхугольника. Описанная окружность Ω_1 треугольника AOC проходит через середину диагонали BD . Докажите, что описанная окружность Ω_2 треугольника BOD проходит через середину диагонали AC .

3. Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4 . Пусть S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2 , S_2 и S_3 — в точках B_1 и B_2 , S_3 и S_4 — в точках C_1 и C_2 , S_4 и S_1 — в точках D_1 и D_2 (см. рисунок). Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности (прямой) S , то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности (прямой).



4. Теорема о бабочке. Пусть O — середина хорды AB окружности S , MN и PQ — произвольные хорды, проходящие через O , E и F — точки пересечения хорды AB с отрезками MP и NQ соответственно. Докажите, что O — середина отрезка EF .

5. Окружность S_A проходит через точки A и C ; окружность S_B проходит через точки B и C ; центры обеих окружностей лежат на прямой AB . Окружность S касается окружностей S_A и S_B внутренним образом, а кроме того, она касается отрезка AB в точке C_1 . Докажите, что CC_1 — биссектриса треугольника ABC .

13. Неприводимость многочленов. 10 июля

Пусть K — некоторое числовое множество (например, множество целых, рациональных, действительных или комплексных чисел). $P(x)$ — многочлен с коэффициентами из множества K , т. е. $P(x) \in K[x]$.

Определение. Многочлен $P(x) \in K[x]$ называется *приводимым над K* , если существуют $Q(x), R(x) \in K[x]$ ненулевой степени, такие, что $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$. В противном случае $P(x)$ *неприводимым над K* .

0. Приводимы ли над \mathbb{Z} многочлены а) $x^3 + 2$; б) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$?

1. Пусть $P(x), Q(x), R(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причём $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$. Известно, что все коэффициенты многочлена $P(x)$ делятся на некоторое простое число p . Докажите, что либо все коэффициенты $Q(x)$, либо все коэффициенты $R(x)$ делятся на p .

2. Пусть $P(x), Q(x), R(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причём $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$. Обозначим НОД всех коэффициентов $P(x), Q(x), R(x)$ за a, b, c соответственно. Докажите, что $a = bc$.

Определение. НОД всех коэффициентов многочлена с целыми коэффициентами называется *содержанием многочлена*.

Лемма Гаусса. Произведение многочленов с содержанием 1 является многочленом с содержанием 1.

3. а) Докажите, что любой многочлен $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ можно представить в виде $\frac{m}{n}Q(x)$, где $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причём содержание многочлена $Q(x)$ равно 1.

б) Докажите, что если многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ приводим над \mathbb{Q} , то он приводим и над \mathbb{Z} .

4. а) **Признак Эйзенштейна.** Пусть $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причём старший коэффициент не делится на простое число p , все остальные коэффициенты делятся на p , но свободный член не делится на p^2 . Докажите, что тогда $P(x)$ неприводим над \mathbb{Z} .

б) Приведите пример многочлена, для которого обратное утверждение неверно.

5. Лемма. Пусть a — целое число. Если многочлен $P(x)$ неприводим над \mathbb{Z} , то $P(x+a)$ — тоже неприводим над \mathbb{Z} .

6. Докажите, что следующие многочлены неприводимы над \mathbb{Z} :

а) $15x^5 + 18x^4 - 9x^2 + 27x - 36$; б) $x^4 + 1$; в) $x^6 + x^3 + 1$; г) $x^{n+1} + 5x^n - 3$.

7. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ неприводим над \mathbb{Z} тогда и только тогда, когда p — простое число.

8. а) Докажите, что многочлен $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$, где a_1, \dots, a_n — различные целые числа, неприводим над \mathbb{Q} .

б) Дан многочлен $P(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$, где a_1, \dots, a_n — различные целые числа. Докажите, что он неприводим над \mathbb{Q} .

Основная теорема алгебры. Любой многочлен степени не меньше единицы с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень. Другими словами, неприводимыми над \mathbb{C} многочленами являются только многочлены первой степени.

9. Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Докажите, что если $P(z) = 0$, то $P(\bar{z}) = 0$.

10. Докажите следующие следствия основной теоремы алгебры:

а) Всякий многочлен степени $n \geq 1$ с комплексными коэффициентами единственным образом (с точностью до умножения на число) раскладывается в произведение n линейных множителей с комплексными коэффициентами.

б) Любой многочлен с действительными коэффициентами единственным образом раскладывается в произведение многочленов степени не выше второй с действительными коэффициентами. Другими словами, неприводимыми над \mathbb{R} многочленами являются в точности многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.

в) Любой многочлен с действительными коэффициентами нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.

11. Разложите многочлен на неприводимые многочлены с действительными коэффициентами:

а) $x^4 + 1$; б) $x^8 + x^4 + 1$; в) $x^{2n} - 1$.

12. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами при всех действительных x принимает только положительные значения. Докажите, что найдутся такие многочлены $A(x)$ и $B(x)$ с действительными коэффициентами, для которых $P(x) = A^2(x) + B^2(x)$.

Внутренний матбой М9-Полупрофи. 10 июля

1. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D , I — центр этой окружности. Описанная окружность треугольника ABC пересекается с прямой AI в точке M , а с прямой DM — в точке N . Докажите, что $AN \perp IN$.
2. Найдите все значения параметра $a \in (-2; 2)$, при которых многочлен $x^{154} - ax^{77} + 1$ делится на многочлен $x^{14} - ax^7 + 1$.
3. Дано натуральное число n . Алиса и Боб по очереди вписывают в клетки клетчатой доски $2n \times 2n$ различные положительные числа, начинает Алиса. В каждую клетку можно вписать только одно число. После того как таблица заполнена, в каждой строке и в каждом столбце закрашивают клетку с наибольшим числом (одна клетка может быть закрашена несколько раз). Докажите, что Боб может играть так, чтобы в итоге было закрашено не меньше $3n$ клеток.
4. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$. Найдите максимально возможное значение выражения $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc+1}$.
5. На сторонах AB и BC неравнобедренного остроугольного треугольника ABC построены как на основаниях равнобедренные треугольники AFB и BEC с одинаковыми углами при основаниях, причём $\angle CAF = \angle ACE$. Прямая FE пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Докажите, что треугольник BKM — равнобедренный.
6. Найдите все натуральные n , для которых существует натуральное число k , такое, что для каждого натурального делителя d числа n число $d - k$ также является делителем (возможно, отрицательным) числа n .
7. Дан набор из $2n$ натуральных чисел, сумма которых кратна n . Разрешается выбрать n чисел и прибавить ко всем одно и то же натуральное число. Докажите, что можно сделать все числа равными, выполнив не более $2n - 1$ таких операций.
8. В графе среди любых трёх простых циклов нечётной длины найдутся два, которые имеют общую вершину. Докажите, что вершины этого графа можно покрасить правильно в 8 цветов.

Внутренний матбой М9. 10 июля

1. Даны два четырёхугольника. Для каждого из них выписали в произвольном порядке 6 чисел — длины сторон и диагоналей. Оказалось, что выписанные наборы совпали. Верно ли, что четырёхугольники равны?

2. Даны 2024 квадратных трёхчлена $x^2 - a_i x + b_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2024$, у которых на месте коэффициентов a_i, b_i встречаются по одному разу все числа от 1 до 4048. Никакие два трёхчлена не имеют общих корней. На вещественной прямой отметили все корни этих трёхчленов. Докажите, что расстояние между какими-то двумя отмеченными точками меньше $1/250$.

3. Дана возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел a_1, a_2, a_3, \dots . Известно, что $a_3 = 13$. Найдите максимально возможное значение суммы $a_{a_1} + a_{a_2} + a_{a_3} + a_{a_4} + a_{a_5}$.

4. Дан остроугольный треугольник ABC , в котором $\angle ACB = 45^\circ$. Пусть G и O — точка пересечения медиан и центр описанной окружности соответственно треугольника ABC . Известно, что $OG = 1$ и $OG \parallel BC$. Найти длину отрезка BC .

5. На сторонах AB и BC неравнобедренного остроугольного треугольника ABC построены как на основаниях равнобедренные треугольники AFB и BEC с одинаковыми углами при основаниях, причём $\angle CAF = \angle ACE$. Прямая FE пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Докажите, что треугольник BKM — равнобедренный.

6. Найдите все натуральные n , для которых существует натуральное число k , такое, что для каждого натурального делителя d числа n число $d - k$ также является делителем (возможно, отрицательным) числа n .

7. Дан набор из $2n$ натуральных чисел, сумма которых кратна n . Разрешается выбрать n чисел и прибавить ко всем одно и то же натуральное число. Докажите, что можно сделать все числа равными, выполнив не более $2n - 1$ таких операций.

8. В графе любые два нечётных цикла пересекаются. Докажите, что вершины этого графа можно покрасить правильно в 5 цветов.

14. Мощность множеств и бесконечные конструкции. 12 июля

Для конечных множеств мы можем корректно определить понятие размера или мощности. Мощность — это просто количество элементов в этом множестве. Однако для бесконечных множеств это определение оказывается неприменимым.

Определение. Множество называется *бесконечным*, если оно содержит конечные подмножества сколь угодно большой мощности.

Примеры. Следующие множества бесконечны: множество натуральных чисел; множество рациональных чисел; множество точек на отрезке $[0; 1]$.

Определение. Бесконечное множество называется *счётным*, если существует биекция этого множества с натуральным рядом.

Определение. Два множества, между которыми существует биекция, называются *равномощными*, говорят также, что эти множества имеют одинаковую мощность. Таким образом, счётные множества — это множества, равномощные натуральному ряду.

Понятно, что множества, равномощные счётному, счётны.

Задачи

1. Докажите счётность следующих множеств:

- а) множество целых чисел;
- б) множество целых точек на координатной плоскости;
- в) множество клеток бесконечной шахматной доски;
- г) бесконечное подмножество натурального ряда;
- д) множество рациональных чисел.

2. Являются ли счётными множества многочленов:

- а) линейных с целыми коэффициентами;
- б) линейных с рациональными коэффициентами;
- в) n -ой степени с рациональными коэффициентами;
- г) всех многочленов с рациональными коэффициентами?

3. Докажите, что бесконечное множество непересекающихся интервалов на плоскости счётно.

4. Докажите, что объединение а) конечного; б) счётного множества счётных множеств счётно.

5. Докажите счётность следующих множеств:

- а) множество всех текстов (конечных), написанных на русском языке;
- б) множество конечных последовательностей натуральных чисел;
- в) бесконечное множество непересекающихся восьмерок на плоскости?

6. В последовательности чисел сумма первых n членов больше n для любого натурального n . Докажите, что эта последовательность содержит бесконечно много положительных чисел.

7. **Диагональный метод Кантора.** Дана последовательность бесконечных десятичных дробей. Постройте ещё одну такую дробь, отличную от всех дробей последовательности.

8. а) Дана последовательность бесконечных в обе стороны двоичных дробей. Докажите, что есть ещё одна такая дробь, отличная от всех данных.

б) Дана последовательность бесконечных в обе стороны двоичных цепочек (без запятой). Цепочки, отличающиеся друг из друга сдвигом, считаются равными. Докажите, что есть ещё одна цепочка, не равная ни одной данной.

15. Комплексные числа в геометрии—1. 12 июля

Будем обозначать через z комплексную координату точки Z комплексной плоскости. Точка O — начало координат, для остальных точек координата соответствует букве.

Упражнения

1) Пусть z_0 — некоторое фиксированное комплексное число. Какие преобразования комплексной плоскости задают следующие функции:

- а) $w(z) = z + z_0$; б) $w(z) = \bar{z}$; в) $w(z) = z \cdot z_0$, где $|z_0| = 1$;
г) $w(z) = r \cdot z$, где $r \in \mathbb{R}$; д) $wz = z_0 \cdot z$?

2) Дан правильный треугольник ABC и комплексная координата вершины A . Найдите комплексную координату вершины B для положительно ориентированного треугольника ABC , если за начальную точку принята

- а) вершина C ;
б) центр треугольника ABC ;
в) основание высоты AA_1 .

Задачи

1. Точка C лежит на отрезке AB и делит его в отношении $p : q$, считая от вершины A . Тогда $c = \frac{q}{p+q}a + \frac{p}{p+q}b$.

2. Найдите комплексную координату точки пересечения медиан треугольника, вершины которого имеют координаты a, b и c .

3. а) Квадрат длины отрезка $AB^2 = (b-a)(\bar{b}-\bar{a})$;
б) $z\bar{z} = 1$ — уравнение единичной окружности с центром в точке O .
в) Напишите общее уравнение окружности.

4. а) $OA \parallel OB \Leftrightarrow \frac{a}{b}$ — действительное число $\Leftrightarrow a\bar{b} = \bar{a}b$;

б) $AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{b-a}{d-c}$ — действительное число $\Leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) = (\bar{a}-\bar{b})(c-d)$;

в) **Критерий коллинеарности трёх точек.** Точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-c}{b-c} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}$.

5. а) $OA \perp OB \Leftrightarrow \frac{a}{b}$ — чисто мнимое число $\Leftrightarrow a\bar{b} + \bar{a}b = 0$;

б) $AB \perp CD \Leftrightarrow \frac{b-a}{d-c}$ — чисто мнимое число $\Leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d) = 0$;

6. Пусть A, B, C, D — точки единичной окружности с центром в O .

а) $AB \parallel CD \Leftrightarrow ab = cd$;

б) $AB \perp CD \Leftrightarrow ab + cd = 0$.

7. а) $\frac{(a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}}$ — точка, симметричная Z относительно AB .

б) $\frac{(\bar{a} - \bar{b})z + (a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{2(\bar{a} - \bar{b})}$ — основание перпендикуляра из точки Z на прямую AB .

8. Пусть A, B — точки единичной окружности с центром в O .

а) $z + ab\bar{z} = a + b$ — уравнение прямой AB ;

б) $\bar{a}z + a\bar{z} = 2$ — уравнение касательной к окружности в точке A ;

в) $\frac{1}{2}(a + b + m - ab\bar{m})$ — основание перпендикуляра из точки M на прямую AB ;

г) $\frac{2ab}{a+b}$ — точка пересечения касательных к окружности в точках A и B .

9. Пусть треугольник ABC вписан в единичную окружность. Докажите, что координата его ортоцентра равна $h = a + b + c$.

10. Точки A, B, C, D лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда

$$\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{a}-\bar{d}} : \frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{d}}.$$

11. Пусть вписанная окружность треугольника ABC является единичной и касается сторон BC, AC, AB в точках P, Q, R . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC имеет координату $\frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}$.

12. Треугольники ABC и XYZ подобны и одинаково ориентированы (с соответствием сторон) тогда и только тогда, когда

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{z-x}{y-x} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 1 \\ c & z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Дан треугольник ABC . Докажите, что $\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{i}{4}$ — ориентированная площадь треугольника.

16. Континуальные множества. 13 июля

1. Докажите, что множество всех бесконечных десятичных дробей несчётно.
2. а) Докажите, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.
б) Пусть A и B — непересекающиеся множества. Докажите, что если B счётно и A бесконечно, то $A \cup B$ равномощно A .
3. Докажите, что множество точек на отрезке $[0; 1]$ равномощно множеству бесконечных десятичных дробей с нулевой целой частью, а значит, несчётно.

Определение. Множества, равномощные отрезку $[0; 1]$, называются *континуальными*. Говорят также, что такие множества имеют мощность континуума.

4. Докажите континуальность следующих множеств:
а) интервала $(0; 1)$;
б) полуинтервала $[0; 1)$;
в) вещественных чисел.
5. Постройте явно биекцию между $[0; 1]$ и $[0; 1)$.
6. Докажите, что множество всех подмножеств натурального ряда равномощно отрезку $[0; 1]$.
7. В государстве любое подмножество граждан состоит в тайном обществе. В некоторый момент каждый гражданин доносит ровно на одно тайное общество. Докажите, что на некоторое тайное общество не поступило доносов.

Определение. Действительное число называется *конструктивным*, если существует конечный алгоритм, вычисляющий его с любой точностью.

8. Докажите, что множество конструктивных чисел счётно.
9. а) Найдите ошибку в следующем рассуждении. Занумеруем как-нибудь все конструктивные числа и рассмотрим следующий алгоритм вычисления числа x : « i -ый знак после запятой десятичной записи числа x равен 1, если у i -го конструктивного числа он не равен 1, и равен 2 иначе». Получаем противоречие, так как этот алгоритм вычисляет число, отличное от всех конструктивных.
б) Приведите пример неконструктивного числа.
10. Обозначим через 2^X множество всех подмножеств множества X . Докажите, что 2^X не равномощно X .

17. Линейные рекурренты. 13 июля

Определения. Последовательность $\{x_n\}$ называется *рекуррентой порядка k* , если x_{n+k} выражается через $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Рекуррентное соотношение порядка k называется *линейным*, если

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k},$$

где a_i — некоторые фиксированные числа, $a_k \neq 0$.

Характеристическим уравнением этой линейной рекурренты, называется уравнение вида $x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \dots - a_k = 0$.

Задачи

1. а) Докажите, что две рекурренты порядка k , заданные одним и тем же соотношением, совпадают тогда и только тогда, когда совпадают её первые k членов.

б) Докажите, что геометрическая прогрессия $x_n = q^n$, является решением линейной рекурренты тогда и только тогда, когда q является корнем характеристического уравнения.

в) Докажите, что если y_n и z_n некоторые решения линейной рекурренты, то $C_1 y_n + C_2 z_n$ также является решением этой рекурренты.

2. Пусть характеристическое уравнение линейной рекурренты второго порядка $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}$ имеет два различных корня q_1, q_2 . Докажите, что любую последовательность, удовлетворяющую данному рекуррентному соотношению, можно представить в виде:

$$x_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n,$$

где C_i — некоторые константы, которые определяются по начальным условиям.

3. а) Найдите все геометрические прогрессии, удовлетворяющие рекуррентному соотношению $x_{n+2} = x_{n+1} + 12x_n$.

б) Найдите формулу n -го члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением $x_1 = 1, x_2 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + 12x_n$.

4. Пусть x_n — рекуррентная последовательность второго порядка, и корни её характеристического уравнения совпадают, т. е. $q_1 = q_2 = q$. Докажите, что можно подобрать такие числа C_1 и C_2 , что $x_n = q^n(C_1 + nC_2)$.

Замечание. Для рекуррент более высоких порядков можно доказать аналогичные утверждения. Если x_n — рекуррентная последовательность порядка k , и её характеристическое уравнение имеет k различных корней q_1, q_2, \dots, q_k , то любую последовательность, удовлетворяющую данному рекуррентному соотношению, можно

представить в виде

$$x_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \dots + C_k q_k^n,$$

где C_i — некоторые константы, которые определяются по начальным условиям. Если q — корень кратности m характеристического уравнения, то этому корню соответствуют линейно независимые решения $\{q^n\}, \{nq^n\}, \{n^2q^n\}, \dots, \{n^{m-1}q^n\}$.

5. Найдите явную формулу n -го члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением

а) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n, a_1 = 1, a_2 = -1;$

б) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, a_1 = 1, a_2 = 3;$

в) $a_{n+2} = 8a_{n+1} - 16a_n, a_1 = 2, a_2 = 3.$

6. Найдите формулу общего члена для чисел Фибоначчи.

7. Последовательность определена формулой $a_n = (5 + \sqrt{17})^n + (5 - \sqrt{17})^n$. Найдите рекуррентное соотношение для a_n . Докажите, что $a_n, n \in \mathbb{N}$, делится на 2^n , но не делится на 2^{n+1} .

8. Сколькими способами можно заполнить коробку размером $2 \times 2 \times n$ кирпичами размером $1 \times 1 \times 2$? Найдите явную формулу n -го члена последовательности.

9. Натуральные числа a и b не равны 1. Последовательность $\{x_n\}$ задана начальными условиями $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$ и соотношениями

$$x_{2n} = ax_{2n-1} - x_{2n-2}, \quad x_{2n+1} = bx_{2n} - x_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Докажите, что при любых натуральных m и n произведение $x_{n+m} \cdot x_{n+m-1} \cdot \dots \cdot x_{n+1}$ делится на $x_m \cdot x_{m-1} \cdot \dots \cdot x_1$.

18. Принцип крайнего в графах. 14 июля

Если вы хотите рассмотреть какой-то элемент в графе, рассмотрите крайний. Например, можно рассматривать наибольший путь, максимальное паросочетание, наименьший цикл, вершину наибольшей/наименьшей степени и так далее.

Упражнение. В графе G степень каждой вершины хотя бы t ($t \geq 2$). Докажите, что в G существует простой путь длины хотя бы t и простой цикл длины хотя бы $t + 1$.

Задачи

1. Все простые циклы графа имеют длину, кратную натуральному числу $n \geq 3$. Докажите, что в графе есть вершина степени не более 2.

2. Архипелаг состоит из 1000 островов, некоторые пары которых соединены мостами, причём от любого острова можно добраться по мостам до любого другого. Оказалось,

что для любых четырёх островов A, B, C, D таких, что есть мост между A и B , между B и C , между C и D , также есть мост между A и C или между B и D . Докажите, что есть остров, соединённый мостами со всеми остальными.

3. В группе из 1002 человек, говорящих на разных языках, любые трое могут общаться (возможно, один переводит двум другим). Доказать, что их можно разбить на пары, в каждой из которых имеется общий язык.

4. Андрюша нарисовал карту из нескольких городов и дорог между ними (дорог получилось не менее двух, каждая дорога соединяет различные города). На каждом городе он написал, сколько дорог из него выходит. Могло ли получиться так, что на этой карте нет двух дорог с совпадающими наборами чисел на концах?

5. В графе n вершин, $5n$ рёбер и нет циклов длины менее пяти. Докажите, что в этом графе есть 5 не пересекающихся по вершинам циклов.

6. Каждый из 100 человек послал кому-то другому из этих 100 человек письмо. Известно, что если выбрать из них любых 40 человек, то в этой компании найдутся и отправитель, и получатель одного письма. При каком наименьшем k заведомо можно выбрать k писем так, чтобы каждый из 100 человек оказался либо отправителем, либо получателем хотя бы одного из этих писем?

7. В изоляторе собралось несколько детей. Оказалось, что любые два дитя, имеющих одинаковое число друзей в изоляторе, не имеют общих друзей. Докажите, что найдётся скучающий бедолага, у которого не более одного друга.

8. В стране 300 городов, некоторые из них соединены дорогами. Оказалось, что для любой четвёрки городов от любого города этой четвёрки можно добраться до любого другого города этой четвёрки, не проезжая через оставшиеся 296 городов. Докажите, что можно выбрать 100 городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой.

9. Рёбра полного графа с n вершинами покрашены в несколько цветов таким образом, что каждый цвет встречается не более $n - 2$ раз. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми покрашены в различные цвета.

10. Денис и Максим играют в игру на графе с 2023 вершинами. Первым ходом Денис устанавливает фишку. Далее игроки по очереди передвигают фишку по рёбрам графа, начиная с Максима. Нельзя заходить в вершину, в которой уже была фишка. Проигрывает тот, кто не имеет хода. Кто выигрывает при правильной игре?

19. Комплексные числа в геометрии—2. 14 июля

Упражнения

1) На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что центры построенных квадратов образуют квадрат.

2) Даны окружность с центром O и точка M . Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до концов хорды, параллельной OM , не зависит от выбора хорды.

Задачи

1. Точки M , K , N и L — середины сторон AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL . Докажите, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность.

а) Докажите, что ортоцентры треугольников BCD , CDA , DAB , ABC лежат на одной окружности.

б) Докажите, что радиус этой окружности равен радиусу описанной окружности $ABCD$.

3. Докажите, что в любом треугольнике ABC выполняется соотношение

$$OH^2 = 9R^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2),$$

где O — центр описанной окружности, R — её радиус, H — ортоцентр треугольника.

4. **Теорема Ньютона.** Докажите, что в описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.

5. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AC и BC ($AC > BC$) взяты точки M и N так, что $AM = BC$ и $CM = NB$. Докажите, что угол между отрезками AN и BM равен 45° .

6. Пусть A, B, C, D — четыре точки на окружности с центром O . Точки A_C, A_D — проекции точки A на BC и BD соответственно; точки B_C, B_D — проекции точки B на AC и AD соответственно. Точки H_A и H_B — ортоцентры треугольников ACD и BCD соответственно. Докажите, что если $A_C A_D \perp OH_B$, то $B_C B_D \perp OH_A$.

7. Пусть P — точка внутри треугольника ABC . Прямая γ проходит через точку P . Пусть A', B', C' — точки пересечения прямых, симметричных PA, PB, PC относительно γ , с прямыми BC, AC, AB соответственно. Докажите, что A', B', C' лежат на одной прямой.

20. Построения одним циркулем. 15 июля

Будем говорить, что «прямая» считается *заданной* (или построенной), если на ней указано (или построено) хотя бы две точки. «Отрезок» считается заданным, если указаны его концы.

1. Базовое построение. Дана окружность S с центром O и точка A вне окружности. Постройте образ точки A при инверсии относительно окружности S .

2. Даны две точки A и B .

- а) Удвойте «отрезок» AB ;
- б) Разделите «отрезок» AB пополам;
- в) Поделите «отрезок» AB на n равных частей.

3. Дана окружность S с центром O и точка A внутри окружности. Постройте образ точки A при инверсии относительно окружности S .

4. а) Постройте основание перпендикуляра на «прямую» AB из точки C , не лежащей на этой прямой.

б) Постройте «прямую» через точку A , перпендикулярную «прямой» AB .

5. а) Даны окружность S с центром O и «прямая» AB , не проходящая через O . Постройте образ «прямой» AB при инверсии относительно S .

б) Проведите окружность через 3 данные точки.

в) Постройте центр данной окружности.

г) Даны окружность S с центром O и окружность S_1 не проходящая через O . Постройте образ окружности S_1 при инверсии относительно S .

6. а) Даны окружность S и «прямая» AB . Постройте точки пересечения «прямой» AB с окружностью S .

б) Даны две «прямые» AB и CD . Постройте точку пересечения этих «прямых».

в) **Теорема Мора-Маскерони.** Любое построение, выполнимое с помощью циркуля и линейки, выполнимо с помощью одного циркуля.

Внешний матбой М8 — М9. 15 июля

1. В ЛМШ есть 2024 корпуса, занумерованные числами от 1 до 2024, а также 2024 горничные, k -я из которых умеет менять состояние (т. е. открытые закрывать, а закрытые открывать) всех корпусов, номера которых делятся на k . Завхоз может потребовать от горничных открыть любые корпуса по своему выбору. Какие корпуса должен потребовать завхоз, чтобы количество горничных, которых необходимо будет использовать, было наибольшим? Требуется указать все такие списки.

2. При каких n выпуклый n -угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы из каждой вершины исходило чётное число диагоналей?

3. На квадратном континенте все страны прямоугольны. Две страны считаются соседями, если имеют общий отрезок границы ненулевой длины. Назовём страну *влиятельной*, если у неё не менее десяти соседей. Могут ли не менее трети всех стран быть влиятельными?

4. В остроугольном треугольнике ABC , вписанном в окружность Γ , точка I — центр вписанной окружности, касающейся AB в точке F . Биссектриса внешнего угла ACB пересекает луч AB в точке L . Точка K на дуге CB окружности Γ , не содержащей A , такова, что $\angle CKI = \angle IKL$. Луч KI пересекает Γ вторично в точке D . Докажите, что $\angle ACF = \angle DCB$.

5. Существует ли натуральное число n , для которого числа $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ можно по крайней мере 2024 способами разбить на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была точным квадратом?

6. В ряд выписаны 2023 числа, каждое из которых равно 1 или -1 . Для любого числа в ряду можно найти начинающийся с этого числа или заканчивающийся этим числом отрезок из нескольких последовательных чисел (может быть, одного), сумма которых неположительна. Какую наибольшую сумму могут иметь все числа?

7. В некоторых клетках доски 2020×2020 провели по одной диагонали. Луч, падающий на проведенную диагональ с любой стороны, отражается от неё по правилу «угол падения равен углу отражения». В середине левой стороны левой клетки каждой строки установлен лазер, луч которого выходит вправо, а в середине правой стороны правой клетки каждой строки — лазер, луч которого выходит влево. Луч каждого лазера имеет номер, равный номеру строки, в которой он начинается (строки пронумерованы сверху вниз). Луч становится красным, если он выходит из доски через верхнюю её сторону, и зелёным, если через нижнюю. Известно, что каждый луч стал зелёным или красным. Докажите, что сумма номеров красных лучей меньше или равна сумме номеров зелёных.

8. Произведение $(1^2 + 1)(2^2 + 1) \dots (n^2 + 1)$ делится на квадрат простого числа p . Докажите, что $p < 2n$.

Внутренний матбой ПРОФИ-9 — ПОЛУПРОФИ-9. 15 июля

1. Пусть n – натуральное число,

$$(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}.$$

Докажите, что $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + \dots - a_{2n-1}^2 + a_{2n}^2 = a_n$.

2. Пусть a_1, a_2, \dots – бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для всех натуральных чисел m и n число $a_m a_n - 1$ делится на a_{m+n} . Докажите, что все члены последовательности, начиная с некоторого, равны 1.

3. На острове Антромортем живут 800 человек, каждый из которых – рыцарь или лжец. Массы жителей равны $2, 4, 8, \dots, 2^{800}$ в некотором неизвестном никому порядке. Колонизатор прибыл на остров с двухчашечными весами без гирь, которые показывают верный знак, если на весах рыцарей не меньше, чем лжецов, и противоположный, если лжецов на весах больше, чем рыцарей. Может ли он за 10 взвешиваний гарантированно определить самого тяжёлого жителя? (Во время взвешивания обе чаши весов не должны быть пусты.)

4. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CH . В треугольники ACH и BCH вписали окружности; O_1 и O_2 — их центры; P_1 и P_2 — их точки касания с AC и BC . Докажите, что прямые O_1P_1 и O_2P_2 пересекаются на AB .

5. Волшебной стране 100 городов. Некоторые из них соединены беспосадочными двухсторонними авиалиниями. Назовём город A *достойным внимания*, если при любой нумерации городов Волшебной страны числами $1, 2, \dots, 100$ найдётся город с номером m , до которого из A можно добраться ровно за m перелётов. Например, в маршруте $A - B - A - B - A - B$ ровно 5 перелётов. Оказалось, что в Волшебной стране есть ровно k городов, достойных внимания. Докажите, что города Волшебной страны можно разбить на $k + 2$ провинции так, чтобы авиалинии соединяли только города из разных провинций.

6. Для положительных чисел a, b и c , произведение которых равно 1, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3 + 2b^2 + 2b + 4} + \frac{1}{b^3 + 2c^2 + 2c + 4} + \frac{1}{c^3 + 2a^2 + 2a + 4} \leq \frac{1}{3}.$$

7. Пусть Γ — описанная окружность треугольника ABC . Окружность Ω касается стороны AB и касается окружности Γ в точке, лежащей с точкой C по одну сторону от AB . Биссектриса угла BCA пересекает Ω в двух различных точках P и Q . Докажите, что $\angle ABP = \angle QBC$.

8. Саша хочет расставить в каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости по натуральному числу так, чтобы все числа были различны и для каждой клетки хотя бы в k соседних с ней по стороне или по углу клетках стояли числа, кратные числу в этой клетке. При каком наибольшем k такое возможно?

9. Вася выбрал натуральное m и хочет написать на волшебной доске натуральное число, которое доска будет преобразовывать по такому правилу: если в какой-то момент на доске оказалось число $x < 2^m$, через минуту оно заменится на число $x^2 + 2^m$, а если число $x \geq 2^m$, то через минуту оно уменьшится ровно вдвое. При каких m Вася может написать на доске такое число, что оно всегда будет оставаться целым?

10. На плоскости отмечено конечное множество точек. *Диском* назовём круг, построенный на отрезке, соединяющем две отмеченных точки, как на диаметре (круг содержит свою границу). Каким наименьшим числом дисков гарантированно удастся покрыть все отмеченные точки?

Внешний матбой М9 — М10. 15 июля

1. Даны положительные числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Докажите, что

$$\left(\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \right)^2 \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + \dots + \frac{1}{a_n - a_{n-1}}.$$

2. Пусть Γ — описанная окружность треугольника ABC . Окружность Ω касается стороны AB и касается окружности Γ в точке, лежащей с точкой C по одну сторону от AB . Биссектриса угла BCA пересекает Ω в двух различных точках P и Q . Докажите, что $\angle ABP = \angle QBC$.

3. С клетчатым прямоугольником разрешается проделывать такую операцию. Разрезать на три клетчатых многоугольника, два из них сложить в прямоугольник, а третий — выкинуть. Докажите, что, начиная с квадрата $2n \times 2n$, можно проделать n^2 таких операций подряд.

4. Граф G можно нарисовать на плоскости так, что каждое ребро — отрезок единичной длины (рёбра могут пересекаться и накладываться друг на друга, разные вершины должны соответствовать различным точкам). Может ли оказаться, что в любом таком рисунке найдутся две вершины на расстоянии $\frac{1}{2024}$?

5. Докажите, что существует составное число, которое после прибавления $100!$ становится простым.

6. Окружность ω касается большей окружности Ω внутренним образом. Хорды AM и AN окружности Ω касаются ω в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PM + NQ \geq PQ$.

7. Обозначим через $F(n)$ количество таких непустых подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$, что НОД всех элементов такого подмножества взаимно прост с числом n . Докажите, что $\sum_{d|n} F(d) = 2^n - 1$.

8. Многочлен с целыми коэффициентами $f(x)$ таков, что $f(10) = 10$. Найдите наибольшее возможное количество целых решений уравнения $f(x) = x^2$.

9. На плоскости есть 46 точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что из них можно выбрать 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

10. Аня и Бенья по очереди выбирают числа из набора $\{0, 1, 2, \dots, 81\}$, каждый своим ходом выбирает одно ещё не выбранное число. Начинает Аня. Когда все числа выбраны, Аня считает сумму выбранных ей чисел — число A , а Бенья считает сумму выбранных им чисел — число B . Аня хочет добиться того, чтобы $\text{НОД}(A, B)$ был как можно больше, а Бенья — чтобы как можно меньше. Какой результат могут гарантировать себе ребята независимо от действий соперника?

21. Квадратичные вычеты. 17 июля

В этом листочке p — простое число, не равное 2.

Упражнение. а) Для каждого ненулевого остатка a по простому модулю p существует единственный обратный остаток, т. е. такой остаток b , что $ab \equiv 1 \pmod{p}$. Обозначение: $b = a^{-1}$.

б) Остатки по простому модулю можно делить, т. е. сравнение $ax \equiv b \pmod{p}$ имеет единственное решение.

Определение. Ненулевой вычет a называется *квадратичным вычетом* по простому модулю p , если существует такое b , что $b^2 \equiv a \pmod{p}$. В противном случае a называется *квадратичным невычетом*. Таким образом, вычеты по модулю p разбиваются на 3 группы: нулевой вычет, квадратичные вычеты и квадратичные невычеты.

Задачи

1. Найдите все квадратичные вычеты по модулям 5, 7, 11, 13.

2. а) Докажите, что для ненулевого остатка c квадратное сравнение $x^2 \equiv c \pmod{p}$ имеет ровно два решения по модулю p или не имеет их вовсе.

- б) Сколько существует квадратичных вычетов по модулю p ?
3. Докажите, что если x квадратичный вычет, то x^{-1} квадратичный вычет.
4. Докажите, что
- а) произведение двух квадратичных вычетов — квадратичный вычет;
 - б) произведение квадратичного вычета и квадратичного невычета — квадратичный невычет;
 - в) произведение двух квадратичных невычетов — квадратичный вычет.
5. а) При каких p количество квадратичных вычетов чётно?
- б) Докажите, что -1 квадратичный вычет тогда и только тогда, когда $p = 4k + 1$.
- в) Используя теорему Вильсона о том, что $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$, предложите формулу для корня из -1 при $p = 4k + 1$.
6. а) Какие простые числа встречаются в разложении выражений вида $n^2 + 1$ на простые множители?
- б) Докажите, что простых чисел вида $4k + 1$ бесконечно много.
7. Найдите сумму квадратичных вычетов по модулю p .
8. Докажите, что сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$
- а) имеет два решения по модулю p , если дискриминант — квадратичный вычет;
 - б) не имеет решений, если дискриминант — квадратичный невычет;
 - в) имеет ровно одно решение по модулю p , если дискриминант сравним с нулём по модулю p .

Определение. Символом Лежандра называется число

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ делится на } p; \\ 1, & \text{если } a \text{ — квадратичный вычет по модулю } p; \\ -1, & \text{если } a \text{ — квадратичный невычет по модулю } p. \end{cases}$$

Замечание. Утверждение задачи 4 можно переписать как $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$.

Утверждение задачи 5 можно переписать как $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

Критерий Эйлера. $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

9. а) Проверьте критерий Эйлера для $p = 7$.
- б) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p , то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.
- в) Докажите критерий Эйлера для p вида $4k + 3$.

г) Докажите критерий Эйлера для p вида $4k + 1$.

10. Теорема Жирара. Пусть $x^2 + y^2$ делится на простое число p вида $4k + 3$. Докажите, что x и y делятся на p .

11. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 7 = y^2$.

22. Теорема Брукса. 17 июля

Определение. Раскраска вершин графа G в k цветов называется *правильной*, если любые две смежные вершины покрашены в разные цвета. Наименьшее натуральное число k , такое, что существует правильная раскраска вершин графа G в k цветов называется *хроматическим числом* графа G и обозначается $\chi(G)$.

Определения. Через $\alpha(G)$ обозначается размер наибольшего *независимого* множества вершин графа G , то есть такого множества вершин, между которыми нет ни одного ребра. Через $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ обозначаются соответственно наименьшая и наибольшая из степеней вершин графа G .

Определение. Пусть v — вершина графа G . Через $G - v$ обозначается граф, получаемый из G удалением вершины v и всех инцидентных ей рёбер.

Определение. Через \overline{G} обозначается *дополнение* графа G , то есть граф с тем же множеством вершин, что и G , в котором смежны те и только те пары вершин, которые не смежны в графе G .

Задачи

1. Докажите, что для любого графа G на n вершинах выполняется неравенство $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$.

2. Вершины графа G нельзя правильным образом покрасить в d цветов. Докажите, что существует такой подграф H графа G , что $\delta(H) \geq d$.

3. Докажите, что $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$, где n — количество вершин графа G .

4. В графе G всего v вершин и e рёбер, его вершины можно правильным образом покрасить в k цветов. Докажите, что $k \geq \frac{v^2}{v^2 - 2e}$.

5. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d \geq 3$. Докажите, что вершины G можно правильным образом раскрасить в d цветов, если

- а) есть вершина, степень которой меньше d ;
- б) есть такая вершина v , что граф $G - v$ несвязен;
- в) есть две такие вершины u и v , что граф $G - u - v$ несвязен;

г) есть три вершины u , v и w такие, что u смежна с v и w , вершины v и w несмежны и граф $G - v - w$ связан.

Теорема Брукса. Пусть $d \geq 3$, а G — связный граф, отличный от полного графа на $d + 1$ вершине, и $\Delta(G) \leq d$. Тогда $\chi(G) \leq d$.

6. Докажите теорему Брукса

а) при помощи задачи 5;

б) при помощи метода чередующихся цепей.

23. Интерполяция. 18 июля

Определение. Построение многочлена $P(x)$ степени не выше n , который в данных различных точках x_0, \dots, x_n принимает соответственно данные значения y_0, \dots, y_n , т. е. $P(x_i) = y_i$, называется *интерполяцией*, а получаемый многочлен — *интерполяционным*.

Задачи

1. а) Постройте многочлен $P(x)$, который в точках x_1, x_2, \dots, x_n равен нулю, а в остальных точках отличен от нуля.

б) Постройте многочлен $P(x)$ степени n , который в точке x_0 принимает значение y_0 , а в точках x_1, x_2, \dots, x_n равен нулю.

в) Постройте многочлен $P(x)$ степени не выше n такой, что $P(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, \dots, n$.

2. Пусть $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ — действительные числа. Докажите, что для любых y_0, y_1, \dots, y_n существует единственный многочлен $P(x)$ степени не выше n , такой, что $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$. Этот многочлен называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

3. а) Постройте квадратный трёхчлен $P(x)$ такой, что $P(-3) = 14, P(-1) = 4, P(1) = 10$.

б) Найдите многочлен наименьшей степени, который при делении на $x - 1$ даёт остаток 10, при делении на $x - 2$ даёт остаток 7, при делении на $x - 4$ даёт остаток 15.

4. Числа a, b и c различны. Сколько корней может иметь уравнение

$$c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b^2 \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x^2$$

в зависимости от значений a, b и c ?

5. Докажите, что для различных значений a, b, c, d выполнено равенство $\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)} = -1$.

6. Докажите, что если $P(x)$ — многочлен, степень которого меньше n , то дробь $\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}$ (x_1, x_2, \dots, x_n — произвольные попарно различные числа) может быть представлена в виде суммы n простейших дробей: $\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$, где A_1, A_2, \dots, A_n — некоторые константы.

Определение. Многочлен называется *целозначным*, если в целых точках он принимает целые значения.

7. а) Докажите, что многочлены вида $C_x^k = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$ целозначны ($C_x^0 = 1$). Такие многочлены называются *биномиальными*.

б) Докажите, что всякий целозначный многочлен степени n представляется линейной комбинацией многочленов $C_x^0, C_x^1, \dots, C_x^n$ с целыми коэффициентами.

в) Докажите, что если многочлен степени n целозначен, то многочлен $n!P(x)$ имеет целые коэффициенты.

8. Докажите, что если многочлен $P(x)$ степени n принимает целые значения в точках $x = 0, 1, \dots, n$, то он принимает целые значения во всех целых точках.

9. **Интерполяционный многочлен Ньютона.** Доказать, что интерполяционный многочлен степени не выше n , такой, что $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$, однозначно определяется формулой

$$P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}).$$

10. Пусть $P(x)$ — многочлен степени меньше n такой, что $P(i) = \frac{1}{i}$ при всех $i = 1, \dots, n$. Найдите $P(n+1)$.

11. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не выше n такой, что $P(i) = 2^i$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$. Найдите $P(n+1)$.

24. Больше в меньшем. 18 июля

Теорема. Пусть вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на рёбрах другого тетраэдра $ABCD$. Тогда сумма длин всех рёбер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем $4/3$ суммы длин всех рёбер тетраэдра $ABCD$.

1. а) Один тетраэдр расположен внутри другого. Может ли периметр внутреннего тетраэдра быть больше периметра внешнего?

б) Один треугольник расположен внутри другого. Может ли периметр внутреннего треугольника быть больше периметра внешнего?

в) Назовём грань тетраэдра *наибольшей*, если её периметр не меньше периметра каждой из остальных граней. Докажите, что периметр тетраэдра не превосходит удвоенного периметра его наибольшей грани.

г) Треугольник расположен внутри выпуклого многоугольника. Докажите, что периметр треугольника не превосходит периметра многоугольника.

д) Докажите, что периметр фигуры-проекции тетраэдра на плоскость меньше $2/3$ суммы длин проекций рёбер тетраэдра на эту плоскость.

е) Докажите Теорему.

Определение. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если для любых $x_1, x_2 \in I$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ выполнено неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Определение. *Надграфиком* функции $y = f(x)$ называется множество точек (x, y) координатной плоскости таких, что $y \geq f(x)$.

2. а) Докажите, что функция выпукла на промежутке тогда и только тогда, когда её надграфик на этом промежутке — выпуклое множество.

б) Докажите, что сумма функций, выпуклых на промежутке, также является выпуклой на этом промежутке функцией.

в) Докажите, что наибольшее значение функции, выпуклой на отрезке, достигается на границе этого отрезка.

г) Пусть $f(X)$ — выпуклая функция точки X . Пусть X пробегает некоторый отрезок. Докажите, что наибольшее значение f достигается на границе этого отрезка.

д) Докажите, что функция расстояния от точки пространства до некоторой фиксированной точки этого пространства является выпуклой на всем пространстве.

е) Пусть A, B, C фиксированные точки пространства. Докажите, что периметр тетраэдра $ABCX$ является выпуклой функцией точки X .

ж) Докажите Теорему.

25. Турниры. 19 июля

Определение. *Турнирный граф* или просто *турнир* — это ориентированный граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним ориентированным ребром.

1. Докажите, что в турнире есть гамильтонов путь.

2. Какие-то две команды набрали в круговом волейбольном турнире одинаковое число очков. Докажите, что найдутся такие команды A, B и C , что A выиграла у B , B выиграла у C , а C выиграла у A .

Определение. Вершины a и b ориентированного графа G назовём *связанными*, если в графе G существуют ориентированные пути из a в b и из b в a . Ориентированный граф называется *сильно связным*, если любые две его вершины связаны.

3. Докажите, что в сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.
4. Докажите, что в сильно связном турнире G с четырьмя и более вершинами существуют две такие вершины $a, b \in V(G)$, что турниры $G - a$ и $G - b$ сильно связны.
5. **Теорема Муна.** Пусть G — сильно связный турнирный граф, $v(G)$ — количество вершин графа G и $3 \leq k \leq v(G)$.
- а) Докажите, что для любой вершины $v \in V(G)$ существует простой цикл длины k , проходящий через v .
- б) Докажите, что в графе G существует хотя бы $v(G) - k + 1$ простых циклов длины k .
6. Пусть G — турнирный граф на n вершинах, где
- а) n чётно;
- б) n нечётно и $n \geq 7$.
- Докажите, что в нём существует такой гамильтонов путь $a_1 a_2 \dots a_n$, что его концы соединены ребром $a_1 a_n$.

26. Геометрические неравенства. 19 июля

Определение. Пусть A и B — два подмножества некоторого множества, где определено какое-то сложение. Тогда $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

На плоскости, где точки можно отождествить с их радиус-векторами, такую операцию называют *суммой Минковского* фигур A и B .

Упражнение. Найдите сумму Минковского:

- а) A и точки;
- б) двух параллельных отрезков;
- в) двух непараллельных отрезков;
- г) трёх попарно непараллельных отрезков;
- д) двух кругов;
- е) двух окружностей.

Определение. Назовём ε -окрестностью фигуры множество всех точек плоскости, находящихся на расстоянии не больше ε от этой фигуры.

Задачи

1. Дан выпуклый многоугольник площади S и периметра P . Найдите площадь и периметр его ε -окрестности.
2. Докажите, что если A и B — выпуклы, то $A + B$ тоже.

Определение. Диаметр множества A называют наибольшее расстояние между точками A и обозначают его $\text{diam}(A)$.

3. Докажите, что для многоугольников A, B верно

- а) $\text{diam}(A) = \max\{|x|, x \in (A + (-A))\}$;
- б) $\text{diam}(A + B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B)$.

4. На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника A и B , у них m и n сторон соответственно. На каждой стороне нарисуем стрелочку в порядке обхода по часовой стрелке и получим набор из $m + n$ векторов с нулевой суммой. Отложив их последовательно в порядке обхода по часовой стрелке получим границу выпуклого многоугольника M . Докажите, что $M = A + B$.

Замечание. Из задачи 4 следует, что $P(A + B) = P(A) + P(B)$ для выпуклых многоугольников. Отсюда можно доказать, что оно верно для любых выпуклых множеств.

5. Выпуклую фигуру периметра P разрезали прямолинейным разрезом длины l на две части. Пусть M — множество середин отрезков с концами в разных частях. Найдите периметр M .

6. **Коробка в коробке.** а) Пусть M — прямоугольный параллелепипед с длинами рёбер a, b, c , B — шар единичного радиуса, а функция $V_M(\varepsilon)$ — объём тела $M + \varepsilon B$. Найдите коэффициенты A, B, C, D и докажите формулу:

$$V_M(\varepsilon) = A + B\varepsilon + C\varepsilon^2 + D\varepsilon^3.$$

б) Пусть M_1, M_2 — два прямоугольных параллелепипеда, причём $M_1 \subset M_2$. Сравните $V_{M_1}(\varepsilon)$ и $V_{M_2}(\varepsilon)$.

в) Выведите из б), что сумма длин рёбер первого параллелепипеда не больше, чем сумма длин рёбер второго.

Определение. Кирпичём назовём прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Назовём *кирпичным множеством* конечное объединение кирпичей.

Замечание. Любое кирпичное множество может быть представлено в виде дизъюнктного объединения кирпичей.

7. а) Докажите, что сумма двух кирпичных множеств — кирпичное множество.

б) Пусть A, B — кирпичи. Докажите неравенство $\sqrt{S(A + B)} \geq \sqrt{S(A)} + \sqrt{S(B)}$.

в) Пусть A, B — некоторые фигуры, прямые l и m параллельны оси абсцисс. l разбивает A на две части — верхнюю A_1 и нижнюю A_2 ; аналогично m разбивает B на

B_1 и B_2 . Докажите, что фигуры $A_1 + B_1$ и $A_2 + B_2$ лежат в разных полуплоскостях относительно некоторой прямой.

г) Пусть A и B — кирпичные множества. Докажите, что

$$\sqrt{S(A+B)} \geq \sqrt{S(A)} + \sqrt{S(B)}.$$

Замечание. С помощью предельного перехода из задачи 6 можно вывести неравенство Брунна — Минковского: если A и B — два выпуклых многоугольника либо выпуклый многоугольник и круг, то $\sqrt{S(A+B)} \geq \sqrt{S(A)} + \sqrt{S(B)}$.

8. Выведите из неравенства Брунна-Минковского изопериметрическое неравенство для многоугольника: в любом многоугольнике периметра P и площади S выполняется неравенство $4\pi S \leq P^2$.

9. Диаметр выпуклого многоугольника равен 2. Докажите, что его площадь не превосходит π .

27. Уравнение Пелля. 20 июля

1. Решим в натуральных числах уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$.

Разложим на множители левую часть равенства $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})$.

Первое нетривиальное, то есть отличное от $(1; 0)$, решение уравнения даёт пара $(3; 2)$.

а) Пусть $(a; b)$ — некоторое решение уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$. Получите, умножая обе части уравнения на $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1$, ещё одно решение уравнения.

б) Докажите, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений. Укажите линейное рекуррентное соотношение, позволяющее по имеющемуся решению $(x_n; y_n)$ найти другое решение $(x_{n+1}; y_{n+1})$.

в) Установите рекуррентное соотношение, позволяющее по решению $(a; b)$ найти решение $(c; d)$, при этом $c < a, d < b$.

г) Докажите, что все нетривиальные решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ — это пары $(x_n; y_n)$, заданные соотношением $x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n, n \in \mathbb{N}$.

Определение. Уравнение вида $x^2 - dy^2 = 1$, где d не является квадратом натурального числа, называется *уравнением Пелля*. Наименьшее нетривиальное решение уравнения Пелля называется его *фундаментальным решением*.

2. Докажите, что все решения уравнения Пелля выражаются через фундаментальное решение.

Обозначим множество чисел вида $a + b\sqrt{d}$, где a и b — целые числа, через $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Все решения (если они есть) уравнения $x^2 - dy^2 = 1$ принадлежат множеству $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. В задаче 2 доказано, что если $(x_0; y_0)$ — фундаментальное решение уравнения

$x^2 - dy^2 = 1$, то все решения соответствуют числам, являющимся степенями числа $x_0 + y_0\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Нахождение фундаментального решения перебором иногда бывает затруднительным (например, фундаментальное решение уравнения $x^2 - 61y^2 = 1$ имеет вид $x_0 = 1766319049, y_0 = 226153980$). Всегда ли нахождение фундаментального решения перебором приведет к успеху? Всегда ли уравнение Пелля $x^2 - dy^2 = 1$ имеет решение? Оказывается, что всегда. Удивительно короткое доказательство теоремы о существовании решения уравнения Пелля опубликовал в 2008 году Н. Вайлдбергер (Австралия). Все ранее известные доказательства были не совсем элементарны.

Положим $g(x, y) = x^2 - dy^2$ и будем преобразовывать эту квадратичную форму. Если на очередном шаге получилась форма $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, то преобразуем её или в $g(x + y, y)$ или в $g(x, x + y)$ так, чтобы у новой формы коэффициент при x^2 был положительным, а при y^2 был отрицательным — как и у начальной формы.

3. а) Прделайте эти преобразования для формы $x^2 - 2y^2$.

б) На каком-то шаге должно стать очевидным, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет решение.

в) Аналогично, прделайте алгоритм для формы $x^2 - 7y^2$.

4. а) Что происходит с дискриминантом формы $D = b^2 - 4ac$ при этих преобразованиях?

б) Докажите, что на каждом шаге преобразование может быть выбрано ровно одним способом.

в) Докажите, что в полученной последовательности форм встретится только конечное число форм. Следовательно, последовательность заиклится.

г) Докажите, что по очередной форме можно восстановить предыдущую. Следовательно, последовательность заиклится без предпериода.

д) Докажите, что у уравнения Пелля существует нетривиальное решение.

5. Напишите рекуррентные и явные формулы для решения уравнения $x^2 - 7y^2 = 1$.

6. Решите в целых числах уравнение $x^2 - y^2 + 2xy - 1 = 0$.

28. Теорема Хелли на плоскости. 20 июля

Теорема Хелли. Дано конечное семейство выпуклых множеств на плоскости. Известно, что любые три из них пересекаются. Тогда все множества имеют общую точку.

Задачи

1. а) Докажите теорему Хелли для 4 выпуклых множеств.
б) Докажите теорему Хелли для n выпуклых множеств ($n \geq 4$).
2. На плоскости заданы несколько полуплоскостей, внутренности которых покрывают всю плоскость. Доказать, что из этих полуплоскостей можно выбрать три, внутренности которых тоже покрывают всю плоскость.
3. На плоскости даны несколько точек, любые три из которых можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все эти точки можно накрыть таким кругом.
4. **Теорема Юнга.** Докажите, что любой выпуклый многоугольник диаметра 1 можно покрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
5. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырёхугольников, образованных последовательными вершинами.
6. Даны X_1, \dots, X_n — выпуклые многоугольники. Известно, что для любых трёх из них можно параллельно перенести некоторый многоугольник M так, что он одновременно пересечётся с каждым из них. Докажите, что можно так параллельно перенести M , что он пересечётся со всеми многоугольниками X_1, \dots, X_n .

Заключительная олимпиада. 21 июля**Довывод**

1. Столбцы таблицы $n \times n$ пронумеровали числами от 0 до $n - 1$ слева направо, а строки — числами $n, n + 1, \dots, 2n - 1$ снизу вверх. Таким образом, каждая клетка задаётся номером строки и столбца, в котором она стоит. (Нижняя левая клетка — $(n, 0)$). В каждую из клеток (i, j) записали число $\frac{1}{i-j}$. Рассматриваются все возможные пути из левого верхнего угла доски в правый нижний, где каждый ход делается на одну клетку вниз или на одну клетку вправо. Назовем *ценой* пути произведение чисел в клетках этого пути (не включая концы). Чему равна суммарная стоимость всех таких путей?
2. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL и высота CH . Точка H_1 симметрична точке H относительно прямой BL , а точка H_2 симметрична точке H_1 относительно прямой CH . Оказалось, что четырёхугольник CH_1LH_2 — вписанный. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.
3. Квадрат $ABCD$ разрезан на прямоугольники так, что ни в какой вершине не сходятся 4 прямоугольника. Все вершины раскрасили в два цвета так, что в любом

прямоугольнике противоположные по диагонали вершины разного цвета. Известно, что вершины A и C одного цвета. Докажите, что вершины B и D тоже одного цвета.

4. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax - 1$ с действительным a . Саша нашёл 50 действительных решений уравнения $f(\dots f(x)) = x$ (47 букв f). Докажите, что у этого уравнения есть ещё хотя бы 46 действительных решений.

5. Даны целое $k > 1$ и простое p такие, что число $n = kp + 1$ составное. Оказалось, что число $2^{n-1} - 1$ делится на n . Докажите, что $n < 2^k$.

Вывод

6. Каждая клетка квадрата 10×10 покрашена в один из 60 цветов. Для какого наибольшего натурального k можно утверждать, что найдутся хотя бы k клетчатых квадратов 2×2 , все 4 клетки каждого из которых покрашены в разные цвета?

7. В неравносторонний треугольник ABC вписана окружность с центром в точке I . Прямые BI и CI пересекают его описанную окружность ω в точках B_1 и C_1 . Прямая, проходящая через I параллельно BC , пересекает сторону AB в точке C_2 , сторону AC — в точке B_2 , а также окружность ω в точках X и Y , так что C_2 — между Y и I . Докажите, что касательная к ω , проведенная в точке A , а также общие внешние касательные к окружностям (B_1B_2X) и (C_1C_2Y) пересекаются в одной точке.

8. Пусть даны целые неотрицательные числа a , b , c . Треугольник на клетчатой плоскости с вершинами в узлах сетки со стороной 1 назовём (a, b, c) -треугольником, если на одной его стороне расположено ровно a узлов (не считая вершин), на другой стороне — ровно b узлов, а на третьей стороне — ровно c узлов. Найдите количество троек (a, b, c) таких, что $a \leq b \leq c$ и минимальная возможная площадь (a, b, c) -треугольника равна 9000000.

Оглавление

Вступительная олимпиада. 2 июля	2
1. Комплексные числа. 3 июля	2
2. Поворотная гомотетия. 3 июля	4
3. Многочлены. Теорема Безу. 4 июля	5
4. Велосипедисты. 4 июля	7
5. Отношения эквивалентности и группы преобразований. 5 июля	8
6. Многочлены с целыми коэффициентами. 5 июля	10
7. Числа Каталана. 7 июля	11
8. Линейное движение. 7 июля	13
9. Лемма Бернсайда–1. 8 июля	14
10. Инверсия–1. 8 июля	15
11. Лемма Бернсайда–2. 9 июля	17
12. Инверсия–2. 9 июля	18
13. Неприводимость многочленов. 10 июля	19
Внутренний матбой М9-Полупрофи. 10 июля	21
Внутренний матбой М9. 10 июля	21
14. Мощность множеств и бесконечные конструкции. 12 июля	22
15. Комплексные числа в геометрии–1. 12 июля	24
16. Континуальные множества. 13 июля	26
17. Линейные рекурренты. 13 июля	27
18. Принцип крайнего в графах. 14 июля	28
19. Комплексные числа в геометрии–2. 14 июля	30
20. Построения одним циркулем. 15 июля	31
Внешний матбой М8 — М9. 15 июля	31
Внутренний матбой ПРОФИ-9 — ПОЛУПРОФИ-9. 15 июля	33
Внешний матбой М9 — М10. 15 июля	34
21. Квадратичные вычеты. 17 июля	35
22. Теорема Брукса. 17 июля	37
23. Интерполяция. 18 июля	38
24. Больше в меньшем. 18 июля	39
25. Турниры. 19 июля	40
26. Геометрические неравенства. 19 июля	41
27. Уравнение Пелля. 20 июля	43
28. Теорема Хелли на плоскости. 20 июля	44
Заключительная олимпиада. 21 июля	45

