

## Серия 26, геометрические неравенства

19 июля

**Определение.** Пусть  $A$  и  $B$  — два подмножества некоторого множества, где определено какое-то сложение. Тогда  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ .

На плоскости, где точки можно отождествить с их радиус-векторами, такую операцию называют *суммой Минковского* фигур  $A$  и  $B$ .

**Упражнение.** Найдите сумму Минковского:

- а)  $A$  и точки;
- б) двух параллельных отрезков;
- в) двух непараллельных отрезков;
- г) трёх попарно непараллельных отрезков;
- д) двух кругов;
- е) двух окружностей.

**Определение.** Назовём  $\varepsilon$ -окрестностью фигуры множество всех точек плоскости, находящихся на расстоянии не больше  $\varepsilon$  от этой фигуры.

### Задачи

1. Дан выпуклый многоугольник площади  $S$  и периметра  $P$ . Найдите площадь и периметр его  $\varepsilon$ -окрестности.

2. Докажите, что если  $A$  и  $B$  — выпуклы, то  $A + B$  тоже.

**Определение.** Диаметр множества  $A$  называют наибольшее расстояние между точками  $A$  и обозначают его  $\text{diam}(A)$ .

3. Докажите, что для многоугольников  $A, B$  верно

- а)  $\text{diam}(A) = \max\{|x|, x \in (A + (-A))\}$ ;
- б)  $\text{diam}(A + B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B)$ .

4. На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника  $A$  и  $B$ , у них  $m$  и  $n$  сторон соответственно. На каждой стороне нарисуем стрелочку в порядке обхода по часовой стрелке и получим набор из  $m + n$  векторов с нулевой суммой. Отложив их последовательно в порядке обхода по часовой стрелке получим границу выпуклого многоугольника  $M$ . Докажите, что  $M = A + B$ .

**Замечание.** Из задачи 4 следует, что  $P(A + B) = P(A) + P(B)$  для выпуклых многоугольников. Отсюда можно доказать, что оно верно для любых выпуклых множеств.

5. Выпуклую фигуру периметра  $P$  разрежали прямолинейным разрезом длины  $l$  на две части. Пусть  $M$  — множество середин отрезков с концами в разных частях. Найдите периметр  $M$ .

**6. Коробка в коробке.** а) Пусть  $M$  — прямоугольный параллелепипед с длинами рёбер  $a, b, c$ ,  $B$  — шар единичного радиуса, а функция  $V_M(\varepsilon)$  — объём тела  $M + \varepsilon B$ . Найдите коэффициенты  $A, B, C, D$  и докажите формулу:

$$V_M(\varepsilon) = A + B\varepsilon + C\varepsilon^2 + D\varepsilon^3.$$

б) Пусть  $M_1, M_2$  — два прямоугольных параллелепипеда, причём  $M_1 \subset M_2$ . Сравните  $V_{M_1}(\varepsilon)$  и  $V_{M_2}(\varepsilon)$ .

в) Выведите из б), что сумма длин рёбер первого параллелепипеда не больше, чем сумма длин рёбер второго.

**Определение.** Кирпичём назовем прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Назовем *кирпичным множеством* конечное объединение кирпичей.

**Замечание.** Любое кирпичное множество может быть представлено в виде дизъюнктного объединения кирпичей.

**7.** а) Докажите, что сумма двух кирпичных множеств — кирпичное множество.

б) Пусть  $A, B$  — кирпичи. Докажите неравенство  $\sqrt{S(A+B)} \geq \sqrt{S(A)} + \sqrt{S(B)}$ .

в) Пусть  $A, B$  — некоторые фигуры, прямые  $l$  и  $m$  параллельны оси абсцисс.  $l$  разбивает  $A$  на две части — верхнюю  $A_1$  и нижнюю  $A_2$ ; аналогично  $m$  разбивает  $B$  на  $B_1$  и  $B_2$ . Докажите, что фигуры  $A_1 + B_1$  и  $A_2 + B_2$  лежат в разных полуплоскостях относительно некоторой прямой.

г) Пусть  $A$  и  $B$  — кирпичные множества. Докажите, что

$$\sqrt{S(A+B)} \geq \sqrt{S(A)} + \sqrt{S(B)}.$$

**Замечание.** С помощью предельного перехода из задачи 6 можно вывести неравенство Брунна — Минковского: если  $A$  и  $B$  — два выпуклых многоугольника либо выпуклый многоугольник и круг, то  $\sqrt{S(A+B)} \geq \sqrt{S(A)} + \sqrt{S(B)}$ .

**8.** Выведите из неравенства Брунна-Минковского изопериметрическое неравенство для многоугольника: в любом многоугольнике периметра  $P$  и площади  $S$  выполняется неравенство  $4\pi S \leq P^2$ .

**9.** Диаметр выпуклого многоугольника равен 2. Докажите, что его площадь не превосходит  $\pi$ .