

26. Разделяющие множества–2

17 июля

Сегодня мы докажем одно из ключевых утверждений в теории связности графов, а также выведем из него некоторые другие теоремы теории графов.

Определение. Граф G называется k -связным, если $|G| > k$ и при удалении не более чем $k - 1$ вершины граф не теряет связность.

1. Теорема Геринга/Менгера. В графе G выбраны подмножества вершин X и Y , возможно, пересекающиеся, в каждом из которых хотя бы k вершин. Известно, что в G не существует множества из менее чем k вершин, разделяющего X и Y . Тогда существует k непересекающихся простых путей из X в Y .

Замечание. Эти пути не должны иметь даже общих концов, путь может состоять из одной вершины. Например, если $v \in X \cap Y$, то v является путем из X в Y .

Доказательство будем проводить индукцией по количеству вершин в графе.

(a) Предположим, что существует множество R из k вершин, разделяющее X и Y . Рассмотрим граф $G_x = G - (Y \setminus R)$. Докажите, что в любом подмножестве вершин G_x , разделяющем X и R в новом графе, хотя бы k вершин.

(b) Таким образом, для графа G_x и множеств X и R выполнено предположение индукции. Проведя аналогичные рассуждения для графа $G_y = G - (X \setminus R)$, завершите переход индукции в условии пункта (a).

(c) Теперь предположим, что разделяющего множества из пункта (a) нет. Начнем выкидывать из графа G ребра до тех пор, пока выполнены условия теоремы. Пусть на очередном шаге при выкидывании ребра между вершинами x и y начинает существовать множество T , содержащее не более $k - 1$ вершины, разделяющее X и Y . Тогда мы знаем, что $T \cup \{xy\}$ разделяет X и Y , но при этом $T \cup x$ — не разделяет. Какой вывод можно сделать?

(d) Завершите доказательство теоремы Геринга/Менгера.

Замечание. Таким образом, мы доказали, что для любых двух подмножеств вершин X и Y существует либо разделяющее множество из не более чем $k - 1$ вершины, либо k непересекающихся путей. И то, и другое одновременно, очевидно, выполняться не может.

2. В стране n городов, некоторые из которых соединены двухсторонними авиалиниями. От страны отделились две республики A и B . Оказалось, что длина кратчайшего пути из городов республики A до городов республики B больше \sqrt{n} . Докажите, что существует множество S из не более чем \sqrt{n} городов такое, что любой путь из A в B проходит через S .

3. Теорема Менгера. Пусть x и y — несмежные вершины графа G . Известно, что в любом подмножестве, разделяющем x и y , хотя бы k вершин. Докажите, что существует k различных простых путей из x и y , не имеющих общих вершин, отличных от x и y .

Замечание. В подавляющем большинстве случаев теорема Менгера применяется в ослабленном виде из предыдущей задачи.

4. Пусть k — натуральное число. В графе G между вершинами u и v существует ровно $2k - 1$ простых путей. Причем каждая из оставшихся вершин участвует не более чем в двух таких путях. Докажите, что существует k простых путей из u в v таких, что каждая из оставшихся вершин участвует не более чем в одном таком пути.

5. Пусть G — k -связный граф.

(a) Докажите, что для любых двух вершин x и y существует k различных простых путей из x и y , не имеющих общих вершин, отличных от x и y .

(b) Докажите, что для любых k вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.

6. Докажите, что для любых трех вершин x, y, z двусвязного графа G существует простой путь из x в z , проходящий через y .

7. Пусть A, B — два множества вершин в ориентированном (возможно, с кратными ребрами и петлями) конечном графе G . Назовем множество $C \subset A$ хорошим, если из C в B существует $|C|$ непересекающихся по вершинам путей. Докажите, что все максимальные по включению хорошие множества содержат одинаковое количество элементов.