

Серия 9, лемма Бернсайда – 1

8 июля

Определение. Пусть G — группа преобразований множества M . Число элементов в группе G называется *порядком группы* и обозначается $|G|$. *Неподвижной точкой преобразования* называется всякий элемент $x \in M$, который это преобразование переводит в себя.

Задачи

1. Докажите, что если каждое из двух преобразований переводит элемент x в элемент y , то найдётся такое преобразование, для которого x является неподвижной точкой.
2. Докажите, что если все преобразования из группы G , кроме тождественного, не имеют неподвижных точек, то длина каждой её орбиты равна $|G|$.

В ситуации, описанной в последней задаче, найти число орбит очень легко: надо поделить число элементов множества M на порядок группы G . Но мы знаем, что орбита элемента может иметь и другую длину. Это происходит, когда существуют нетождественные преобразования, имеющие неподвижные точки.

Определение. Множество всех преобразований из группы G , оставляющих неподвижной точку x , называется *стабилизатором* элемента x и обозначается $St(x)$.

3. а) Пусть точки x и y лежат в одной орбите группы G . Тогда преобразований из G , переводящих x в y , столько же, сколько преобразований в стабилизаторе элемента x , то есть $|St(x)|$.

б) Докажите, что длина орбиты точки x равна $\frac{|G|}{|St(x)|}$. Это означает, что порядки стабилизаторов у всех точек одной орбиты одинаковы.

в) Докажите, что сумма порядков стабилизаторов всех точек одной орбиты равна $|G|$.

г) У каждого преобразования из группы G найдём число неподвижных точек. Докажите, что сумма всех полученных чисел равна сумме порядков стабилизаторов всех точек множества M .

д) **Лемма Бернсайда.** Для преобразования $g \in G$ обозначим через $N(g)$ число его неподвижных точек. Тогда число орбит группы G равно среднему числу неподвижных точек, то есть $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} N(g)$.

Приложения леммы Бернсайда к решению задач основаны на том, что находить число неподвижных точек преобразования часто бывает легче, чем длины орбит.

Пример. Вычислить количество различных ожерелий из 6 бусинок, каждая из которых может быть одной из трёх цветов.