

Серия 23, интерполяция

18 июля

Определение. Построение многочлена $P(x)$ степени не выше n , который в данных различных точках x_0, \dots, x_n принимает соответственно данные значения y_0, \dots, y_n , т. е. $P(x_i) = y_i$, называется *интерполяцией*, а получаемый многочлен — *интерполяционным*.

Задачи

1. а) Постройте многочлен $P(x)$, который в точках x_1, x_2, \dots, x_n равен нулю, а в остальных точках отличен от нуля.

б) Постройте многочлен $P(x)$ степени n , который в точке x_0 принимает значение y_0 , а в точках x_1, x_2, \dots, x_n равен нулю.

в) Постройте многочлен $P(x)$ степени не выше n такой, что $P(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, \dots, n$.

2. Пусть $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ — действительные числа. Докажите, что для любых y_0, y_1, \dots, y_n существует единственный многочлен $P(x)$ степени не выше n , такой, что $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$. Этот многочлен называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

3. а) Постройте квадратный трёхчлен $P(x)$ такой, что $P(-3) = 14, P(-1) = 4, P(1) = 10$.

б) Найдите многочлен наименьшей степени, который при делении на $x - 1$ даёт остаток 10, при делении на $x - 2$ даёт остаток 7, при делении на $x - 4$ даёт остаток 15.

4. Числа a, b и c различны. Сколько корней может иметь уравнение

$$c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b^2 \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x^2$$

в зависимости от значений a, b и c ?

5. Докажите, что для различных значений a, b, c, d выполнено равенство $\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)} = -1$.

6. Докажите, что если $P(x)$ — многочлен, степень которого меньше n , то дробь $\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}$ (x_1, x_2, \dots, x_n — произвольные попарно различные числа) может быть представлена в виде суммы n простейших дробей: $\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$, где A_1, A_2, \dots, A_n — некоторые константы.

Определение. Многочлен называется *целозначным*, если в целых точках он принимает целые значения.

7. а) Докажите, что многочлены вида $C_x^k = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$ целозначны ($C_x^0 = 1$). Такие многочлены называются *биномиальными*.

б) Докажите, что всякий целозначный многочлен степени n представляется линейной комбинацией многочленов $C_x^0, C_x^1, \dots, C_x^n$ с целыми коэффициентами.

в) Докажите, что если многочлен степени n целозначен, то многочлен $n!P(x)$ имеет целые коэффициенты.

8. Докажите, что если многочлен $P(x)$ степени n принимает целые значения в точках $x = 0, 1, \dots, n$, то он принимает целые значения во всех целых точках.

9. Интерполяционный многочлен Ньютона. Доказать, что интерполяционный многочлен степени не выше n , такой, что $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$, однозначно определяется формулой

$$P(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

10. Пусть $P(x)$ — многочлен степени меньше n такой, что $P(i) = \frac{1}{i}$ при всех $i = 1, \dots, n$. Найдите $P(n+1)$.

11. Пусть $P(x)$ — многочлен степени не выше n такой, что $P(i) = 2^i$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$. Найдите $P(n+1)$.