

32. Комплексные числа в геометрии—3: теория

19 июля

Определение. На комплексной плоскости отмечены точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$. Их *двойным отношением* называется комплексное число $\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$.

1. (а) На комплексной плоскости даны два ориентированных угла $\angle ABC$ и $\angle DEF$, меньшие 180° . Эти углы равны тогда и только тогда, когда

$$\frac{c-b}{a-b} : \frac{f-e}{d-e} = \frac{\overline{c-b}}{\overline{a-b}} : \frac{\overline{f-e}}{\overline{d-e}}.$$

(б) На комплексной плоскости отмечены точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, не лежащие на одной прямой. Докажите, что точки A , B , C , D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{\overline{a-c}}{\overline{b-c}} : \frac{\overline{a-d}}{\overline{b-d}}.$$

Замечание. В пункте (б) мы доказали, что точки A , B , C , D лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно. В двойном отношении точки можно менять местами как угодно.

Подобие. В некоторых задачах удобно вычислять координаты из подобных треугольников. Например, пусть на комплексной плоскости расположены подобные **одинаково ориентированные** треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Мы хотим выразить координату точки c_1 через остальные. Имеем $\frac{c-a}{b-a} = \frac{c_1-a_1}{b_1-a_1}$, далее находим c_1 из соответствующего линейного уравнения.

Поговорим об удобных способах ввести систему отсчета.

Полезная система отсчета 0. Описанная окружность треугольника ABC является единичной с центром в 0, вершины треугольника имеют координаты a , b , c .

Полезная система отсчета 1. Вписанная окружность треугольника ABC является единичной с центром в 0. Пусть точки касания окружности со сторонами имеют комплексные координаты x , y и z . В заведенной системе отсчета

- вершины исходного треугольника имеют координаты $\frac{2xy}{x+y}$, $\frac{2yz}{y+z}$, $\frac{2zx}{z+x}$.

Важный прием. Иногда полезно вводить комплексные координаты не точек, а «углов». Этим мы сейчас и займемся.

Полезная система отсчета 2. Описанная окружность треугольника ABC является единичной с центром в 0. Обозначим координату вершины A через a . Выберем комплексные числа k и l так, чтобы $ak^2 = b$, $al^2 = c$, а также ak и al являлись серединами «меньших дуг» AB и AC соответственно. В заведенной выше системе отсчета

- середина «меньшей» дуги BC имеет координату $-akl$;
- середины «больших» дуг AB , AC и BC имеют координаты $-ak$, $-al$, akl соответственно;
- центр вписанной окружности треугольника ABC имеет координату $ak + al - ak l$;
- центры внеписанных окружностей, касающихся сторон AB , AC и BC имеют координаты $ak + ak l - al$, $al + ak l - ak$, $-akl - ak - al$ соответственно.