

6. Самоопросник по пределам

4 июля

1. Пусть x_n — сходящаяся последовательность. Тогда x_n — ограниченная последовательность.
2. Пусть x_n — сходящаяся последовательность и $\lim x_n = A$. Пусть начиная с некоторого момента $x_n \geq B$. Тогда $A \geq B$.
3. Пусть x_n — сходящаяся последовательность и $\lim x_n = A \neq 0$. Тогда начиная с некоторого момента $Ax_n > 0$ (т.е. A и x_n одного знака).
4. Пусть x_n, y_n — сходящиеся последовательности и $\lim x_n = A, \lim y_n = B$. Пусть начиная с некоторого момента $x_n \geq y_n$. Тогда $A \geq B$.
5. Пусть x_n — сходящаяся последовательность, y_k — ее подпоследовательность и $\lim x_n = A$. Тогда последовательность y_k сходится и $\lim y_k = A$.
6. Пусть $x_n \rightarrow A, y_n \rightarrow A$. Определим $z_{2k} = x_k, z_{2k-1} = y_k$. Докажите, что $z_n \rightarrow A$. Объединение двух последовательностей с одним пределом имеет тот же предел.
7. Верно ли, что у последовательности, которая принимает конечное число различных значений, обязательно есть предел?
8. В сходящейся последовательности лишь конечное число членов положительны, верно ли что у нее отрицательный предел?
9. Последовательность сходится. Докажите, что из нее можно выделить монотонную подпоследовательность.
10. Найдите сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots$
11. Верно ли, что если последовательности x_n и y_n не имеют предела, то и $x_n + y_n$ не имеет предела?
12. Верно ли, что если последовательности x_n и y_n не имеют предела, то и $x_n \cdot y_n$ не имеет предела?
13. Последовательность x_n бесконечно малая. А последовательность y_n произвольна. Какой может быть предел у последовательности $x_n y_n$?
14. Докажите, что монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда какая-нибудь ее подпоследовательность сходится.
15. Докажите, что сходящаяся последовательность достигает либо своей верхней, либо своей нижней грани.