

Матбой Профи-9 — Профи-8

15 июля

1. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) + \left(\frac{d}{a} + \frac{a}{d}\right) \geq 2 \frac{(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}}.$$

2. Для положительных вещественных чисел p и q будем называть *остатком при делении p на q* наименьшее неотрицательное вещественное число r такое, что $\frac{p-r}{q}$ — целое число. Докажите, что для каждого натурального b существует ровно одно натуральное a такое, что если r_1 и r_2 — остатки при делении $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ на $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ соответственно, то $r_1 + r_2 = \sqrt{2}$.

3. На биссектрисе AD остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$) лежит точка P . Прямые BP и CP пересекают стороны AC и AB в точках Q и R соответственно. Докажите, что $PB - PC > RB - QC$.

4. Саша нарисовал граф, вершинами которого являются все возможные последовательности из 0 и 1 длины 2019, а ребро между вершинами проводится, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одном месте. Назовём расстановку ненулевых чисел в вершинах этого графа k -гармонической, если для любой вершины сумма чисел в соседних с ней вершинах в k раз больше числа в самой вершине. При каких вещественных k существует k -гармоническая расстановка чисел в вершинах этого графа?

5. Дано натуральное число $n > 10$. Докажите, что ни для какого $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ число $(2n)! + k$ не делится на $n! + 1$.

6. Точки A и B лежат на окружности ω с центром O , причем O не лежит на прямой AB . На отрезке AB выбрана точка C . Точки M и N — середины отрезков AC и CB соответственно. Описанные окружности треугольников AON и BOM пересекают ω вторично в точках K и L соответственно, и пересекаются друг с другом вторично в точке X . Докажите, что точки C, K, X, L лежат на одной окружности.

7. Маша и Паша по очереди проводят диагонали в правильном 98-угольнике, начинает Маша. Разрешено проводить диагональ, если она не перпендикулярна ни одной из ранее проведенных диагоналей, а также пересекает хотя бы половину ранее проведенных диагоналей. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

8. Будем говорить, что точка $A(x, y)$ больше точки $B(x', y')$, если $x \geq x'$ и $y \geq y'$. Если же $x \leq x'$ и $y \leq y'$, то будем говорить, что точка A меньше точки B . На координатной плоскости отметили несколько точек, обе координаты которых являются натуральными числами, не превосходящими n . Оказалось, что для каждой отмеченной точки количество точек, больших её, и количество точек, меньших её, отличаются не более, чем на 1. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено?

9. Найдите все вещественные числа x такие, что $4x^5 - 7$ и $4x^{13} - 7$ — точные квадраты.

10. Вдоль окружности расположено n монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Если две соседние монеты лежат одинаково (обе орлом или обе решкой), разрешается обе перевернуть. Сколько имеется вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга, применяя такие операции?