

## 8. Интерполяция: задачи

5 июля

1. Упростите (устно!) выражения

$$a) c^2 \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + a^2 \cdot \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \cdot \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

$$b) \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} + \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)}.$$

2. Пусть  $a, b, c$  — попарно различные целые числа. Докажите, что число

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$$

целое.

3. Пусть  $x_i$  — попарно различные числа,  $y_i$  — какие-то числа.

а) Осознайте, что следующая система линейных уравнений имеет ровно одно решение (в переменных  $a_i$ ):

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \dots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases}.$$

б) Докажите, что следующая система линейных уравнений имеет ровно одно решение (в переменных  $a_i$ ):

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = 0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0 \\ \dots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = 0 \end{cases}.$$

4. Дана функция  $f(x)$ , значение которой при любом целом  $x$  целое. Известно, что для любого простого числа  $p$  существует такой многочлен  $Q_p(x)$  степени, не превышающей 2013, с целыми коэффициентами, что  $f(n) - Q_p(n)$  делится на  $p$  при любом целом  $n$ . Докажите, что существует многочлен  $g(x)$  с вещественными коэффициентами такой, что  $g(n) = f(n)$  для любого целого  $n$ .

5. Пусть  $p$  — простое число,  $f(x)$  — многочлен степени  $d$  с целыми коэффициентами. Известно, что  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , остаток при делении  $f(n)$  на  $p$  равен 0 или 1 для всех  $n$ . Докажите, что  $d \geq p - 1$ . МТФ говорит, что степень  $p - 1$  бывает. Решение не через интерполяцию не принимается.

6. Пусть  $P(x)$  — приведённый многочлен степени  $n$ . Ильнур посчитал его значения в  $n+1$  различных целых точках. Докажите, что одно из полученных Ильнуром чисел по модулю хотя бы  $n!/2^n$ .

7. Петя задумал многочлен  $f(x)$  степени не более 130, значения которого при всех целых  $x$  являются целыми числами. За один вопрос Петя может узнать чётность числа  $f(k)$  при одном  $k \in \{1, \dots, 131\}$ . За какое наименьшее количество вопросов Петя сможет узнать чётность числа  $f(0)$ ?

8 (теорема Мак-Дугалла). Пусть на окружности отмечено  $2n$  точек. Обозначим через  $R_i$  произведение расстояний от  $i$ -й точки до остальных. Докажите, что

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} + \dots + \frac{1}{R_{2n-1}} - \frac{1}{R_{2n}} = 0.$$

9. Алиса задумала многочлен десятой степени (с действительными коэффициентами), а Боб хочет его угадать. Боб может за один вопрос назвать любые десять действительных чисел, после чего Алиса говорит Бобу значение её многочлена при одном из названных значений переменной (но не говорит, какое именно число из названных она подставила).

а) Докажите, что Боб сможет определить многочлен Алисы.

б) Какое наименьшее число вопросов ему для этого понадобится?

10. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами  $P(x)$  степени  $n$  такой, что  $P(0), P(1), \dots, P(n)$  — различные степени двойки?