

10. Уравнение Пелля: теория

7 июля

Рассмотрим диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = 1$ для каждого натурального d .

Замечание. Тривиальными решениями данного уравнения являются пары $(\pm 1, 0)$.

Упражнение. Решите уравнение $x^2 - dy^2 = 1$ в случае, когда d является точным квадратом.

Определение. Пусть d — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Уравнением Пелля называется диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = 1$.

Теорема. Если d не является точным квадратом, то существует нетривиальное решение уравнения Пелля.

Доказательство данной теоремы мы обсудим позднее. Сегодня, опираясь на нее, мы опишем все решения уравнения Пелля для каждого d .

Для дальнейшего понимания происходящего будет полезно временно сменить терминологию. Обозначим через $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ «кольцо» чисел $\{a + b\sqrt{d}, \text{ где } a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Замечание. В этом «кольце» элемент $1 + 0 \cdot \sqrt{d} = 1$ является единицей. То есть $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ для любого $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Упражнение. Докажите, что если $x_1 + y_1\sqrt{d} = x_2 + y_2\sqrt{d}$, то $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Определение. Пусть $z = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Нормой z назовем число

$$N(z) = z \cdot \bar{z} = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2.$$

Замечание. Норма является мультипликативной характеристикой элементов $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. То есть для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ выполнено $N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$. Также понятно, что $N(1) = 1$.

Решение уравнения Пелля равносильно нахождению всех элементов $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ таких, что $N(z) = 1$.

Определение. Назовем решение (x_1, y_1) уравнения Пелля *фундаментальным*, если $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$, и y_1 — наименьшее возможное. С этого момента везде под (x_1, y_1) мы понимаем фундаментальное решение.

Замечание. Поскольку есть хотя бы одно решение, где $x, y \neq 0$, сменив при необходимости знаки, получим натуральное решение. Значит, фундаментальное решение существует и единственно. Также понятно, что из всех решений с натуральными x и y фундаментальное является наименьшим.

Обозначение. Пусть $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{d}$, где (x_1, y_1) — фундаментальное решение уравнения Пелля.

1. Докажите, что $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ обратим в $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ (то есть существует $z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ такой, что $zz' = 1$) тогда и только тогда, когда $N(z) = \pm 1$.

2. (а) Пусть $z = x + y\sqrt{d}$ имеет норму 1, и при этом $x, y \in \mathbb{N}$. Докажите, что $z/z_1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ и $N(z/z_1) = 1$.

(б) Предположим, что $z/z_1 = x' + y'\sqrt{d} > 1$. Докажите, что $x', y' \in \mathbb{N}$.

(с) Докажите, что все $z = x + y\sqrt{d}$ с натуральными x и y такие, что $N(z) = 1$ равны z_1^k для некоторого **натурального** k . Для доказательства полезно понимать, что $z_1 > 1$.

3. **Классификация решений.** Докажите, что все $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ такие, что $N(z) = 1$ имеют вид $\pm z_1^k$ для некоторого **целого** k .

4. Докажите, что все решения (x, y) уравнения Пелля описываются формулами

$$\pm \left(\frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^k + (x_1 - y_1\sqrt{d})^k}{2}, \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^k - (x_1 - y_1\sqrt{d})^k}{2\sqrt{d}} \right)$$

для **целых** k .

5. Решите в целых числах уравнения (а) $x^2 - 2y^2 = 1$; (б) $4x^2 - 3y^2 = 1$; (с) $x^2 - 5y^2 = 25$; (д) $x^2 + y^2 - 1 = 4xy$.

Подсказка. Часто оказывается, что фундаментальное решение можно просто подобрать.