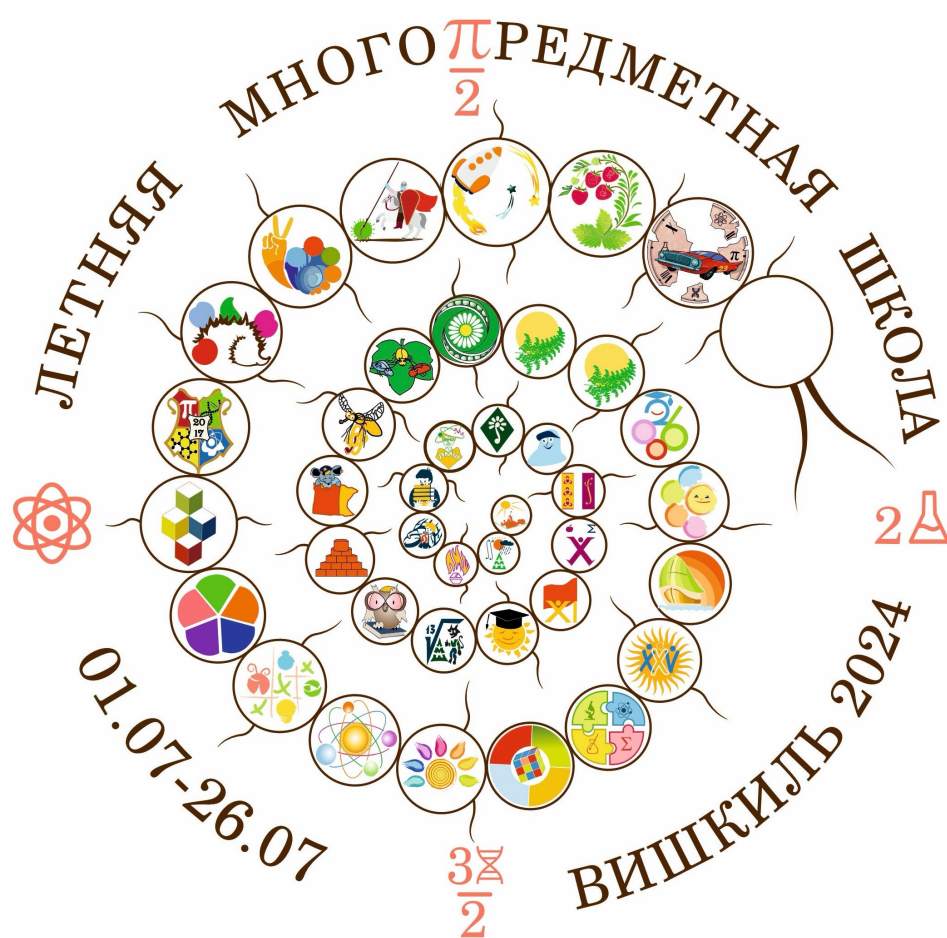


# Материалы занятий

9 класс ПРОФИ



А. В. Антропов  
И.А. Ефремов  
М. В. Першаков  
А. Ф. Халитова

## Дорогие дети!

А точнее, дорогие Ваня, Ваня, Валера, Амир, Дима, Никита, Максим, Влад, Госман, Ульяна, Миша, Кира, Алла, Камилла, Даша, Саша, Сергей, Катя, Латифа, Гриша, Владислав! Снова прощаемся с вами на год. Пусть ваше отношение к геометрии будет таким же гармоническим, как у нас, ваши решения будут такими же фундаментальными и комплексными! Не забывайте заниматься само(и не только)анализом, разделяйте и дальше с нами графы и землю Кировской ЛМШ! С вами было очень приятно работать и проводить время. Уже скучаем. Надеемся, что еще не раз будем иметь возможность вас учить:)

Ждем в следующем году!

До встречи!



Искренне Ваши,

Александр Владимирович,

Игорь Андреевич,

Максим Вадимович,

Альбина Фаридовна.

# Оглавление

1.	Вступительная олимпиада . . . . .	5
2.	Серия 1. Многочлены: теория . . . . .	5
3.	Серия 1. Что забывают рассказать про многочлены . .	7
4.	Серия 2. Diamond-лемма . . . . .	8
5.	Серия 3. Разнобой «Профи ли ты?» . . . . .	10
6.	Серия 4. Интерполяция: теория . . . . .	11
7.	Серия 5. Двойные отношения –1 . . . . .	13
8.	Серия 6. Конспект по анализу . . . . .	15
9.	Серия 6. Самоопросник по пределам . . . . .	19
10.	Серия 6. Задачи по анализу . . . . .	19
11.	Серия 7. Числовые веса . . . . .	20
12.	Серия 8. Интерполяция: задачи . . . . .	22
13.	Серия 9. Разнобой «Профи ли ты? Часть вторая» . . .	23
14.	Серия 10. Уравнение Пелля: теория . . . . .	24
15.	Серия 11. Уравнение Пелля: задачи . . . . .	25
16.	Серия 12. Асимптотики и порядки роста . . . . .	26
17.	Серия 13. Двойные отношения–2 . . . . .	29
18.	Серия 14. Разделяющие множества . . . . .	31
19.	Серия 15. Примерно целое . . . . .	32
20.	Серия 16. Сложное — сумма простого . . . . .	34
21.	Серия 17. Учебный МеждусоБой . . . . .	35
22.	Серия 18. Работа с системами вычетов . . . . .	36
23.	Серия 19. Счет в комплексных числах–1: теория . . . .	38
24.	Серия 19. Счет в комплексных числах–1: задачи . . . .	39
25.	Серия 20. Асимптотика в комбинаторике . . . . .	41
26.	Серия 21. Спуск и подъем по Виету . . . . .	43

27.	Серия 22. Многочлены в комбинаторике . . . . .	44
28.	Серия 23. Инверсия + симметрия . . . . .	45
29.	Серия 23,5. Добавка по геометрии . . . . .	46
30.	Серия 24. Уравнение Пелля-2 . . . . .	48
31.	Матбой Профи-9 — Профи-8 . . . . .	48
32.	Матбой Профи-9 — Полупрофи-9 . . . . .	50
33.	Матбой Профи-9 — Профи-10 . . . . .	51
34.	Матбой Профи-9 — Профи-10 — преподаватели . . . . .	52
35.	Серия 25. КЗВ: теория . . . . .	54
36.	Серия 25. КЗВ: задачи, сюрприз:) . . . . .	55
37.	Серия 26. Разделяющие множества-2 . . . . .	55
38.	Серия 27. Счет в комплексных числах-2: теория . . . . .	57
39.	Серия 27. Счет в комплексных числах-2: задачи . . . . .	58
40.	Серия 28. Рождественская теорема Ферма . . . . .	61
41.	Серия 29. Полувписанная окружность . . . . .	62
42.	Серия 30. Аналитическая теория чисел . . . . .	64
43.	Серия 31. Многочлены в комбинаторике-2 . . . . .	64
44.	Серия 32. Счет в комплексных числах-3: теория . . . . .	65
45.	Серия 32. Счет в комплексных числах-3: задачи . . . . .	66
46.	Серия 33. Гауссовы числа и другие расширения . . . . .	70
47.	Заключительная олимпиада . . . . .	72
48.	Вопросы к зачету . . . . .	73



## 1. Вступительная олимпиада

2 июля

1. Два действительных числа  $a$  и  $b$  таковы, что выполняется равенство

$$a^2 + 2a = 2b^2 + 13b - 8.$$

Известно, что при любом изменении значения  $a$  на другое равенство перестает быть верным. Найдите все возможные значения  $b$ .

2. На плоскости отметили точку  $P$ . Паша хочет провести  $n$  прямых, не проходящих через  $P$ , так, чтобы каждый луч, выходящий из  $P$ , пересекал хотя бы 10 проведенных прямых. При каком наименьшем  $n$  Паша может добиться желаемого?

3. На доске написано натуральное число  $m$ . За один ход число  $m$  заменяется на сумму числа  $m$  и квадрата наибольшего собственного делителя  $m$ . Могло ли после 2024 шагов на доске остаться число, являющееся точным квадратом?

4. При каких натуральных  $n$  на доску  $n \times n$  можно выставить нескольких ладей так, чтобы каждая клетка (включая клетки, на которых стоят ладьи) была побита ровно 3 ладьями? Ладья бьет клетку, на которой стоит; ладьи не бьют сквозь друг друга.

5. Точка  $P$  выбрана на описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ . Пусть  $D$ ,  $E$  и  $F$  — точки, симметричные  $P$  относительно средних линий треугольника  $ABC$ , параллельных  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников  $ADP$ ,  $BEF$  и  $CFP$  имеют общую точку, отличную от  $P$ .

6. В  $n$ -элементном множестве выбрали  $m$  различных подмножеств  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Докажите неравенство

$$n^2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^m |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|)^3.$$

## 2. Серия 1. Многочлены: теория

3 июля

**Определение.** Многочлены  $A$  и  $B$  называются *равными*, если их коэффициенты соответственно равны.

**Комментарий.** Предыдущее определение часто называется *формальным равенством многочленов*, *равенством многочленов как выражений*.

Каждому многочлену можно естественным образом сопоставить функцию. Если для двух многочленов получились одинаковые функции, то говорят о

функциональном равенстве многочленов, равенстве многочленов как функций.

$A(x) = B(x)$	это формальное равенство многочленов, т.е. совпадение многочленов как выражений; иногда можно встретить запись $A(x) \equiv B(x)$ , которая читается как <i>тождественно равно</i> ; мы так писать не будем
$\forall c \in \mathbb{R} \quad A(c) = B(c)$	это функциональное равенство многочленов, т.е. совпадение многочленов как функций
$A(c) = B(c)$	это равенство двух чисел $A(c)$ и $B(c)$
$A(x) = B(x)$	иногда эта запись означает <i>уравнение</i> , т.е. задачу нахождения чисел $c$ , для которых $A(c) = B(c)$ .

Стоит отметить, что в первой и четвёртой строчках  $x$  — это обозначение переменной. Переменная — не число, а просто буква. Если бы мы вместо  $c$  во второй и третьей строчках написали бы тоже  $x$ , то у нас было бы четыре почти одинаковые записи, которые означают абсолютно разные вещи!

**Вывод.** Если отличить первую строчку от четвёртой можно только «по сути»<sup>1</sup>, то вот отличать число от переменной можно с помощью записи<sup>2</sup>. Поэтому я иногда говорю « $x$  — обозначение переменной, давайте для числа выберем какое-то другое». Часто самый простой способ сделать переменную числом — добавить к ней индекс:

$$x \text{ — переменная,} \quad x_0 \text{ — число.}$$

Следующий текст может показаться слишком странным, но мне в целом нравится быть **странным** нестандартным. Когда надо выбрать обозначение, у меня в голове живут какие-то такие представления о буквах:

- $a, b, c, d, e, f, g, h$  — скорее обозначение действительных чисел
- $i, j$  — скорее обозначения для индексов суммирования
- $k, \ell, m, n$  — скорее обозначение натуральных чисел
- $o$  — вообще не надо использовать как букву, слишком на 0 похожа

<sup>1</sup>или используя вместо знака  $=$  знак  $\equiv$

<sup>2</sup>любители ФУР — к вас это тоже относится

- $p, q, r$  — или обозначение простых чисел, или обозначение действительных чисел
- $s, t$  — или обозначение любых чисел, или обозначение переменных, когда они кончились или хочется её выделить
- $u, v, w$  — обозначение или комплексных чисел, или комплексных переменных<sup>3</sup>
- $x, y, z$  — точно переменные

### 3. Серия 1. Что забывают рассказать про многочлены 3 июля

**Комментарий.** Многочлены — тема любопытная. В ней много теории, которую любят рассказывать школьникам (начиная от теоремы Безу, заканчивая чем-нибудь типа «многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля»). При этом иногда забывая поговорить про какие-то совсем «ручные» подходы.

**Определение корня.** Корень многочлена — это в первую очередь такое число, что если его подставить, получится 0. (*И только во вторую — что делится на  $x - x_0$ .*)

**Положительное число не равно нулю.** Если вы можете доказать, что значение многочлена в какой-то точке положительно/отрицательно — то тем самым вы докажете, что указанное число не корень.

**Честное раскрытие скобок.** Равенство многочленов — это про совпадение коэффициентов. Иногда надо вводить  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  и раскрывать скобки.

**Подстановка конкретных чисел.** Равенство многочленов — это про совпадение функций. Иногда надо просто подставлять какие-то конкретные числа.

1. Пусть  $P$  — ненулевой многочлен. Могут ли все коэффициенты многочлена  $P(x) \cdot (x - 1)$  быть неотрицательны? *Придумайте два решения.*

2. Коэффициентами многочленов нечётной степени  $P$  и  $Q$  являются нечётные числа. Докажите, что у многочлена  $P \cdot Q$  есть хотя бы один чётный коэффициент. *Придумайте два решения.*

3. Найдите свободный член многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше 1000, и  $P(19) = P(94) = 1994$ .

4. Пусть  $P(x)$  — произвольный многочлен с целыми коэффициентами, причём известно, что многочлены  $P(x)$  и  $P(P(P(x)))$  имеют общий действительный корень. Докажите, что эти многочлены имеют общий целый корень.

<sup>3</sup>использовать все три — короткий путь перепутать в какой-то момент  $u$  и  $v$ , именно поэтому  $pqr$ -метод, а не  $uvw$

5. Найдите все многочлены  $P(x)$  с действительными коэффициентами, удовлетворяющие условию

$$P(x^2) - P(x) = P((1-x)^2) - P(1-x).$$

6. Про многочлен  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  с целыми коэффициентами известно, что  $-1$  является его корнем, а его значение в точке  $\sqrt{2}$  — целое число. Докажите, что существует хотя бы два различных  $k$ , для которых число  $P(k) + a_k$  чётное.

7. Пусть  $n$  — натуральное число. На  $2n + 1$  карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении

$$* \cdot x^{2n} + * \cdot x^{2n-1} + \dots + * \cdot x + *$$

так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Обязательно ли это можно сделать?

8. Ненулевые числа  $a, b, c$  таковы, что любые два из трёх уравнений  $ax^{11} + bx^4 + c = 0$ ,  $bx^{11} + cx^4 + a = 0$ ,  $cx^{11} + ax^4 + b = 0$  имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень.

9. Дан многочлен

$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

у которого каждый коэффициент  $a_i$  принадлежит отрезку  $[100, 101]$ . При каком минимальном  $n$  у такого многочлена может найтись действительный корень?

10. Многочлен  $P(x)$  с вещественными коэффициентами имеет степень  $10^5$ , а его старший коэффициент равен 1. Найдите наименьшую возможную степень многочлена

$$R(x) = P(x^{1000} + 1) - P(x)^{1000}.$$

## 4. Серия 2. Diamond-лемма

3 июля

**1. Diamond-лемма.** Дан ориентированный граф с, возможно, бесконечным множеством вершин. Будем называть вершину  $v$  потомком вершины  $u$  графа, если существует путь из  $u$  в  $v$ . Если есть ребро из  $u$  в  $v$ , то назовем вершину  $v$  ребенком вершины  $u$ . Известно, что все пути в графе конечны (в частности, нет циклов) и что выполнено следующее условие: для любых двух детей любой вершины графа у этих детей существует общий потомок. Докажите, что у любой вершины графа существует единственный потомок исходящей степени 0.



(a) Предположим, что у некоторой вершины  $A_0$  есть два потомка исходящей степени 0. Докажите, что у  $A_0$  есть ребенок, имеющий двух потомков исходящей степени 0.

(b) Завершите доказательство Diamond-леммы.

2. Пусть  $n$  — натуральное число. В алфавите имеется  $n$  букв и  $n$  соответствующих им *антибукв*. Изначально выписано некоторое слово этого алфавита. Каждую секунду из слова удаляются случайно выбранные рядом стоящие буква и ее антибуква (не важно, кто из них слева, а кто справа) до тех пор, пока не остается несократимое слово. Докажите, что несократимое слово, которое получится в результате, не зависит от хода процесса.

3. На столе лежит кусок пластилина массой  $n$  кг. Его делят на две части, каждая из которых весит целое число килограмм. Затем одну из частей опять делят надвое и так далее, пока не получат  $n$  кусков массой 1 кг. При каждом делении одного куска на две части на доску записывается произведение масс двух новых кусков. Какие значения может принимать сумма всех чисел, записанных на доске?

4. Дана диграмма Юнга. Из нее поочередно удаляются клетчатые доминошки так, чтобы в каждый момент времени диаграмма по-прежнему оставалась корректной. Такие удаления проделываются, пока возможно. Оставшуюся диаграмму назовем *ядром* исходной. Докажите, что определение корректно, то есть результат процесса не зависит от выбора доминошек.

5. Дан конечный граф  $G$ , в вершинах которого расставлены вещественные веса (в вершине с номером  $i$  вес  $r_i$ ). Каждую минуту выбирается произвольная вершина  $V$  с отрицательным весом  $r$ . Ее вес заменяется на  $-r$ , а к весам всех ее соседей прибавляется  $r$ . Процесс заканчивается, когда веса всех вершин неотрицательны. Известно, что из исходной конфигурации процесс заканчивается в любом случае.

(a) Докажите, что результат не зависит от порядка действий;

(b) Докажите, что количество шагов также не зависит от порядка действий.

6. В ряд стоит 100 коробок. В самой левой из них лежит 100 спичек. За ход разрешается из любой коробки переложить одну спичку в соседнюю справа коробку, при условии, что в исходной коробке останется не меньше спичек, чем в той, куда мы спичку добавили. Какие конфигурации могли остаться в конце процесса?

7. Игорь написал на доске числа  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ , именно в таком порядке. Раз в минуту Паша отсчитывает  $2k$  чисел с начала ряда при некотором целом  $k$  и следующие за ними четыре числа  $a, b, c, d$  меняет на два числа  $ac + bd$  и  $ad + bc$  в любом порядке. Через 49 минут на доске остались 2 числа. Докажите, что эти числа не зависят от порядка действий.

8. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по несколько в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:

1) Снять по одному камню с клеток  $n - 1$  и  $n$ , и положить один камень в клетку  $n + 1$ ;

2) Снять два камня с клетки  $n$  и положить по одному камню в клетки  $n + 1$ ,  $n - 2$ .

Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).

## 5. Серия 3. Разнобой «Профи ли ты?»

3 июля

1. Найдите количество способов расставить в клетки доски  $2024 \times 2024$  фишки (в каждую клетку можно ставить не более одной фишки) так, чтобы количества фишек в строках были равны  $1, 2, 3, \dots, 2024$  в некотором порядке, и количества фишек в столбцах также в некотором порядке были равны  $1, 2, 3, \dots, 2024$ .

2. Для каких натуральных  $n$  верно следующее утверждение: для произвольного многочлена  $P(x)$  степени  $n$  с целыми коэффициентами найдутся такие различные натуральные  $a$  и  $b$ , для которых  $P(a) + P(b)$  делится на  $a + b$ ?

3. Катя выбрала простое число  $p < 2024$  и выписала в ряд все числа  $1, 2, 3, \dots, 2024$  так, что для любых 6 чисел  $a, b, c, d, e, f$ , стоящих подряд (именно в таком порядке), число  $ace - bdf$  делится на  $p$ . Чему может быть равно  $p$ ?

4. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $\angle A > 60^\circ$  и  $\angle C > 30^\circ$ . В полуплоскости относительно прямой  $BC$ , не содержащей точку  $A$ , отмечены точки  $D$  и  $E$  такие, что

$$\angle ABE = \angle CBD = 90^\circ \text{ и } \angle BAE = \angle BCD = 60^\circ.$$

Точки  $F$  и  $H$  — середины отрезков  $AE$  и  $CD$  соответственно;  $G$  — точка пересечения прямых  $AC$  и  $DE$ . Докажите, что  $\angle FGH = \angle ABC$ .

5. Пусть  $p$  — простое число. Сколько существует вычетов  $x \in \mathbb{Z}_p$  таких, что  $x$  и  $x + 1$  оба являются квадратичными вычетами по модулю  $p$ ?

6. В связном графе  $n$  вершин. Расстоянием между двумя вершинами называется число ребер в самом коротком пути между ними. Известно, что есть две вершины, расстояние между которыми не меньше  $d$ . Кроме того, степень любой вершины не меньше  $k$ . Докажите, что  $3n > kd$ .

7. Обозначим  $a_n = 3n + \sqrt{n^2 - 1}$ ,  $b_n = 2(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n})$ . Докажите, что существуют такие целые  $A$  и  $B$ , для которых  $\sqrt{a_1 - b_1} + \sqrt{a_2 - b_2} + \dots + \sqrt{a_{49} - b_{49}} = A + B\sqrt{2}$ .

## 6. Серия 4. Интерполяция: теория

4 июля

1. (Ньютон). Докажите индукцией по  $n$ , что для попарно различных действительных чисел  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и любых действительных чисел  $y_0, y_1, \dots, y_n$  существуют многочлен  $f$  такой, что для каждого  $1 \leq i \leq n$  выполнено  $f(x_i) = y_i$ . *По индукции! Не Лагранж! Ньютон! Индукция!*

Для **всероса** скорее всего, ничего, кроме существования хоть какого-то многочлена степени не выше  $n$ , который проходит через данные  $n + 1$  точку<sup>4</sup>, не потребуется. Чаще всего это часть «пример» в задачах на оценку и пример — т.е. почти бесплатные 1–2 балла.

2. Есть 25 футболистов, у каждого из них есть рейтинг  $r_1, r_2, \dots, r_{25}$ , все рейтинги попарно различны. Тренер хочет выбрать из них в команду 11 любимчиков. Для этого он придумывает многочлен  $P$ , для каждого спортсмена вычисляет его *спортивный потенциал*  $P(r_i)$  и выбирает игроков с максимальным потенциалом. Докажите, что ему хватит многочлена 24-ой степени.<sup>5</sup>

3. На плоскости отмечены 2020 точек, их абсциссы различны, каждая из точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Скажем, что многочлен  $P(x)$  *разделяет* эти точек, если либо выше графика  $P(x)$  нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот; на самом графике могут лежать точки обоих цветов. Докажите, что всегда можно построить разделяющий многочлен не выше 2018-й степени.<sup>6</sup>

Обратите внимание во фразе «хоть какого-то многочлена степени не выше  $n$ , который проходит через данные  $n + 1$  точку» на часть «хоть какого-то». Построить такой многочлен можно более чем одним способом. Почему-то в олимпиадных кругах иногда считают, что интерполяционный многочлен — это именно интерполяционный многочлен в форме Лагранжа (об это чуть дальше). В некоторых книжках так даже пишут.

**0<sub>1</sub>**. Вспомните, что любые два многочлена степени не выше  $n$ , которые проходят через данные  $n + 1$  точку (с разными абсциссами), равны.

**0<sub>2</sub>**. Осознайте, что многочлен степени  $n$  совпадает со своим интерполяционным многочленом по  $n + 1$  точке (т.е. по точкам вида  $(a, P(a))$ ). Это

<sup>4</sup>количество точек совпадает с количеством коэффициентов; что логично, учитывая какие-то соображения количества степеней свободы/размерностей

<sup>5</sup>На Туймааде спрашивали наименьшую степень.

<sup>6</sup>На всеросе спрашивали наименьшую степень

даёт нам возможность «восстановить» многочлен, если мы знаем только его значения.

4. Докажите, что если многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения, то и все его коэффициенты рациональные.

5. Пусть  $P$  — многочлен степени не выше  $n$ , для которого  $P(x_i) = y_i$  при  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $Q$  — другой многочлен, для которого  $Q(x_i) = y_i$  при  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Как связаны многочлены  $P$  и  $Q$ ? Заполните пропуски в фразе «многочлен  $P(x) - \boxed{\phantom{0}}$  при делении многочлена  $Q(x)$  на многочлен  $\boxed{\phantom{0}}$ ».

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона используется редко, что логично: он не такой явный. Его удобство — что для «уточнения» многочлена, т.е. если стало на одну точку больше, не надо пересчитывать всё предыдущее.

6. (Лагранж). Пусть  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  — попарно различные действительные числа.

(а) Приведите пример многочлена  $P_0(x)$ , степени  $n$ , для которого  $P_0(x_0) = 1$ ,  $P_0(x_i) = 0$ , где  $i > 0$ .

(б) Выведите из пункта а) существование интерполяционного многочлена степени не выше  $n$ .

У интерполяционного многочлена в форме Лагранжа удобство другое: заранее вычислив многочлены  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$  можно для различных наборов значений (т.е.  $y_0, y_1, \dots, y_n$ ) быстро находить требуемый многочлен.

Часто интерполяционные многочлены используют, чтобы «восстанавливать» сам многочлен (см., например, задачу 4). Тут возникает ещё одно удобство интерполяционного многочлена в форме Лагранжа: он более явный.

7. Многочлен  $P(x)$  степени  $n$  примет целые значения в точках  $0, 1, 2, \dots, n$ . Докажите, что

а)  $n! \cdot P(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами.

б) многочлен  $P(x)$  принимает целые значения во всех целых точках.

8. Пусть  $x_i$  — попарно различные числа,  $f(x)$  — многочлен степени меньше  $n$ . Докажите, что дробь

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}$$

можно представить в виде

$$\frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \dots + \frac{a_n}{x - x_n},$$

где  $a_i$  — некоторые числа.

Не всегда интерполяционный многочлен — панацея. Например, те, кто на финале задачу



**2017.9.6.** Пусть  $a, b, c$  — натуральные числа. Верно ли, что обязательно существует квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами, который в некоторых целых точках принимает значения  $a^3, b^3, c^3$ ?

пытались решить через интерполяционный многочлен Лагранжа, её скорее не решали. Всё таки существуют и другие способы работы с многочленами.

**9.** Многочлен  $P(x)$  степени  $n$  таков, что  $P(k) = \frac{1}{k+1}$  для всех  $k$  от 0 до  $n$ . Найдите  $P(2n)$ . *Направление мысли:*  $(k+1)P(k) = 1$  для всех  $k$  от 0 до  $n$ .

**03.** Задумайтесь и поймите, что если мы будем всё то же самое проделывать в множестве остатков при делении на  $p$  (обозначение:  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  или  $\mathbb{F}_p$ <sup>7</sup>), то в целом все рассуждения и про многочлен Ньютона и про многочлен Лагранжа проходят.

**10.** Пусть  $p$  — простое число.

(а) Докажите, что любая функция  $f: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$  задаётся некоторым многочленом степени не выше  $p-1$ .

(б) Сколько существует функций  $f: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ ? Многочленов степени не выше  $p-1$ ? Сделайте какой-то вывод. Докажите тот же вывод исходя из более классических методов для многочленов.

## 7. Серия 5. Двойные отношения –1

4 июля

**Определение.** Двойным отношением четверки точек  $A, B, C, D$ , лежащих на одной прямой, называется отношение  $(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ . Здесь под  $\overline{XY}$  мы понимаем вектор с началом в  $X$  и концом в  $Y$ .

**Определение.** Двойным отношением упорядоченной четверки прямых  $a, b, c, d$ , называется величина

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin \angle(\bar{a}, \bar{c})}{\sin \angle(\bar{b}, \bar{c})} : \frac{\sin \angle(\bar{a}, \bar{d})}{\sin \angle(\bar{b}, \bar{d})},$$

где  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  — произвольные векторы, направленные вдоль прямых  $a, b, c, d$ .

*Замечание.* Эта величина не зависит от выбора направлений векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ .

**Определение.** Четверка точек (прямых) называется *гармонической*, если их двойное отношение равно  $-1$ .

**1.** Прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  пересекаются в точке  $A$ . На прямой  $\ell_1$  отмечены точки  $B_1, C_1, D_1$ , а на прямой  $\ell_2$  — точки  $B_2, C_2, D_2$ . Докажите, что прямые  $B_1B_2$ ,

<sup>7</sup>иногда пишут просто  $\mathbb{Z}_p$ , но тут может возникнуть путаница, потому что так ещё обозначают целые  $p$ -адические числа, что бы это ни значило

$C_1C_2$ ,  $D_1D_2$  конкурентны (то есть пересекаются в одной точке или параллельны) тогда и только тогда, когда  $(A, B_1, C_1, D_1) = (A, B_2, C_2, D_2)$ .

2. (a) Пусть  $A, B, C, D$  — различные точки, и  $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)$ . Докажите, что тогда  $(A, B, C, D) = -1$ .

(b) Докажите, что если  $(A, B, C, D) = 1$ , то либо  $A = B$ , либо  $C = D$ .

(c) Докажите, что  $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$ .

3. Докажите, что следующие четверки гармонические.

(a)  $(A, B, M, P_\infty)$ , где  $M$  — середина  $AB$ , а  $P_\infty$  — бесконечно удаленная точка направления  $AB$ .

(b)  $(A, B, K, L)$ , где  $K$  и  $L$  — основания внутренней и внешней биссектрис треугольника  $ABC$ .

(c)  $(A, B, X, Y)$ , где  $X$  и  $Y$  центры непересекающихся окружностей разного радиуса,  $A$  и  $B$  — точки пересечения общих внешних и внутренних касательных.

*Замечание.* Эти гармонические четверки являются самыми распространенными и могут помочь в следующих задачах.

4. (a) Четыре прямые, проходящие через точку  $O$ , пересекают прямую  $\ell$  в точках  $A, B, C$  и  $D$ .  $\angle AOC = 90^\circ$ , а  $(A, C, B, D) = -1$ . Докажите, что  $OC$  — биссектриса угла  $BOD$ .

(b) В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AN_A$  и отмечены центры  $I, I_A$  вписанной и невписанной окружностей. Докажите, что прямые  $H_AI, H_AI_A$  симметричны относительно прямой  $BC$ .

5. **Теорема о полном четырёхстороннике.** Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ , продолжения  $BC$  и  $AD$  — в точке  $F$ , прямые  $AC$  и  $BD$  пересекают  $EF$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $(E, F, M, N) = -1$ . Придумайте два решения.

*Комментарий.* На самом деле на картинке можно увидеть гораздо больше гармонических четвёрок.

6. (a) Постройте с помощью одной линейки к трем данным прямым, проходящим через одну точку, четвертую так, чтобы эти прямые образовывали гармоническую четверку.

(b) Постройте с помощью одной линейки четвертую гармоническую к трем данным точкам, лежащим на одной прямой.

7. Продолжения противоположных сторон выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Через точку  $O$  пересечения его диагоналей проводится прямая, параллельная  $PQ$ . Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой  $O$  пополам.

8. (a) Дан угол  $AOB$  и точка  $P$ , лежащая вне угла. Через  $P$  проводятся пары секущих, пересекающие лучи  $OA$  и  $OB$  соответственно в точках  $A_1, B_1$  и

$A_2, B_2$ . Докажите, что все возможные точки пересечения прямых  $A_1B_2$  лежат на фиксированной прямой.

(b) Дан угол с вершиной  $O$  и внутри него точка  $A$ . Рассмотрим такие точки  $M, N$  на разных сторонах данного угла, что углы  $MAO$  и  $OAN$  равны. Докажите, что все прямые  $MN$  проходят через одну точку (или параллельны).

9. Внутренняя и внешняя биссектрисы угла  $A$  неравнобедренного треугольника  $ABC$  пересекают прямую  $BC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Точка  $M$  — середина стороны  $AB$ . Прямая  $KM$  пересекает прямую  $AC$  в точке  $N$ . Докажите, что  $NL = NA$ .

10. В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты  $AD, BE$  и  $CF$  пересекаются в точке  $H$ .  $P$  и  $Q$  — проекции точек  $A$  и  $H$  на  $EF$  соответственно. Пусть  $R$  — точка пересечения  $DP$  и  $QH$ . Найдите  $HQ/HR$ .

11. Пусть в треугольнике  $ABC$  вписанная окружность касается сторон  $BC, CA$  и  $AB$  в точках  $D, E$  и  $F$  соответственно. Пусть  $X$  такая точка внутри треугольника  $ABC$ , что вписанная окружность треугольника  $XBC$  касается  $XB, XC$  и  $BC$  в  $Z, Y$  и  $D$  соответственно. Докажите, что  $EFZY$  вписанный.

## 8. Серия 6. Конспект по анализу

4 июля

### Что такое действительное число

Что мы хотим от действительного числа.

- свойства *поля*, т.е. возможность проводить привычные арифметические операции с числами;
- отношение порядка («меньше или равно»);
- какое-то утверждение, которое означало бы «отсутствии дырок» на числовой прямой (*аксиома полноты*);

**Пример.** Множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  подходит под первые два набора свойств выше, но в нём «есть дырки». Например, между множествами  $L = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 < 2\}$  и  $U = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 \geq 2\}$  есть «дырка», т.е. нет рационального числа, которое попало бы между этими двумя множествами.

**Определение.** Верхней гранью множества  $A \subset \mathbb{R}$  называется такое число  $M$ , что  $\forall a \in A$  выполнено  $a \leq M$ . Точной верхней гранью или *супремумом* множества  $A$  называется наименьшая из его верхних граней. **Обозначение.**  $\sup A$ .

Аналогично определяются *нижняя грань*, *точная нижняя грань* (*инфимум*,  $\inf A$ ).

**Аксиома полноты, наш выбор: принцип супремума.** Всякое ограниченное сверху множество имеет супремум.

Выведем из принципа супремума другого кандидата на роль аксиомы полноты.

**Лемма о вложенных отрезках.** Пусть  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$  — бесконечная последовательность вложенных отрезков. Тогда существует число  $c$ , принадлежащее всем отрезкам, т.е.  $\forall i \in \mathbb{N}$  выполнено  $c \in [a_i, b_i]$ .

**Доказательство.** Пусть  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  — множество всех левых концов данных отрезков. Заметим, что для каждого натурального  $i$  выполнено  $a_i \leq b_i \leq b_1$ , т.е. множество  $A$  ограничено сверху числом  $b_1$ . Тогда у него существует точная верхняя грань  $\sup A$ , назовём её  $c$  и докажем, что это число подходит.

По определению супремума, для каждого  $i$  выполнено  $a_i \leq c$ , т.е. нам достаточно проверить, что для каждого  $i$  выполнено  $c \leq b_i$ . Предположим, что это не так, т.е. найдётся  $k$  такое, что  $b_k < c$ . Докажем, что тогда  $b_k$  — также верхняя грань  $A$ , что и приведёт к противоречию. Действительно, для каждого  $i \leq k$  имеем  $a_i \leq a_k < b_k$ ; для каждого  $i > k$  имеем  $a_i < b_i \leq b_k$ .

### Почему такие числа существуют

**Модель действительных чисел, наш выбор: бесконечные десятичные дроби.** Назовём множеством действительных чисел множество бесконечных десятичных дробей:

$$\overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \dots}, \quad a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}, i \in \mathbb{N}.$$

При этом мы считаем, что

$$\overline{a_0, a_1 \dots a_k 99 \dots} = \overline{a_0, a_1 \dots a_{k-1} (a_k + 1) 00 \dots}, \quad a_k \neq 9 \text{ или } k = 0. \quad (*)$$

Мы делаем такой выбор из-за привычности такой модели. Обратите внимание, что нам надо определить ещё операции сложения и умножения (и именно сложность этого определения — некоторая плата за внешнюю простоту модели).

**Определение.** Пусть  $A = \overline{a_0, a_1 a_2 \dots}$  и  $B = \overline{b_0, b_1 b_2 \dots}$  — два действительных числа. Если  $a_i = b_i$  для каждого  $i$ , то  $A = B$ . Иначе, пусть  $k$  — наименьший индекс такой, что  $a_k \neq b_k$ . Если  $a_k < b_k$ , то мы будем говорить, что  $A < B$ .

**Утверждение.** Введённое отношение порядка удовлетворяет всем свойствам отношения порядка (т.е. рефлексивно, антисимметрично и транзитивно).

**Упражнение (необязательное).** Проверьте это.

**Теорема.** Бесконечные десятичные дроби с введённым отношением порядка удовлетворяют принципу супремума.



**Доказательство.** Пусть  $A$  — некоторое ограниченное сверху множество,  $M = \overline{m_0, \dots}$  — какая-то его верхняя грань (ограниченность множества сверху — синоним её существования). Пусть  $A_0$  — множество всех целых частей  $A$  (т.е.  $\{a_0: \exists x \in A: x = \overline{a_0, \dots}\}$ ). Тогда любой элемент в  $A_0$  не превосходит  $m_0 + 1$  (т.к.  $M$  — верхняя грань). Значит, в  $A_0$  существует наибольший элемент (напомним, что в  $A_0$  лежат только целые числа). Пусть он равен  $s_0$ .

Далее, последовательно строим множества  $A_k$  следующим образом. Пусть  $A_k$  — множество всех элементов из  $A$ , начало десятичной записи которых совпадает с  $\overline{s_0, s_1 \dots s_{k-1}}$ . По построению такое множество непусто. Из всех  $k$ -х цифр после запятой в числах из  $A_k$  выберем наибольшую, её обозначим  $s_k$ .

Полученное число  $\overline{s_0, s_1 s_2 \dots}$  и будет супремумом  $A$ .

**Упражнение.** Докажите это.

**Утверждение (без доказательства).** На множестве бесконечных десятичных дробей можно ввести операции сложения и умножения так, чтобы получившееся множество было полем (т.е. по сложению — коммутативно, ассоциативно, есть 0, есть противоположный элемент; по умножению — коммутативно, ассоциативно, есть 1, есть обратный элемент; умножение дистрибутивно относительно сложения).

## Предел

**Определение.** Пусть  $(a_n)_{n=1}^\infty$  — некоторая последовательность действительных чисел. Число  $A$  называется *пределом* последовательности  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon \text{ выполнено } |a_n - A| < \varepsilon.$$

**Обозначение.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  или « $a_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ ».

**Определение.** Если у последовательности есть предел она называется *сходящейся*.

**Другими словами.** Отметим на числовой прямой точку  $A$ . Тогда  $|x - A| < \varepsilon$  означает, что расстояние от точки  $x$  на числовой прямой меньше  $\varepsilon$ . Множество всех таких точек называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $A$ .

То есть в определении предела написано, что какое бы [маленькое]  $\varepsilon$  нам ни дали, мы сможем предъявить такое [достаточно большое]  $N_\varepsilon$ , что все члены последовательности, начиная с  $N_\varepsilon$ , лежат в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  (т.е. к ней достаточно близки).

Теперь мы можем доказать ещё одно важное утверждение (которое тоже можно выбрать в качестве одной из аксиом полноты).

**Теорема (о монотонной ограниченной последовательности; Вейерштрасс).** Всякая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.

**Доказательство.** Будем доказывать для монотонно возрастающей последовательности  $(a_n)_{n=1}^\infty$ . Пусть  $A = \sup\{a_n\}$ . Докажем, что  $\lim a_n = A$  просто по определению. Нам выдали какой-то  $\varepsilon > 0$ .

Посмотрим на число  $A - \varepsilon$ . Так как  $A$  — точная верхняя грань, то  $A - \varepsilon$  — не верхняя грань. Значит, существует элемент последовательности  $a_N$  больше  $A - \varepsilon$ . Возьмём в качестве  $N_\varepsilon$  число  $N$ . Для любого  $n > N$  тогда

$$A - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq A,$$

откуда легко видеть, что  $|a_n - A| < \varepsilon$ .

**Утверждение (единственность предела).** Пусть  $(a_n)_{n=1}^\infty$  — некоторая последовательность действительных чисел,  $A \neq B$  — два различных числа. Тогда  $(a_n)_{n=1}^\infty$  не может стремиться одновременно и к  $A$ , и к  $B$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Возьмём  $\varepsilon = \frac{|A-B|}{3}$ . Поскольку  $a_n$  стремится к  $A$ , для всех  $n$ , больших некоторого  $N_\varepsilon^A$ , выполнено  $|a_n - A| < \varepsilon$ . Аналогично для всех  $n$ , больших некоторого  $N_\varepsilon^B$ , выполнено  $|a_n - B| < \varepsilon$ .

Тогда, для всех  $n$ , больших  $\max\{N_\varepsilon^A, N_\varepsilon^B\}$ , выполнены одновременно неравенства  $|a_n - A| < \varepsilon$  и  $|a_n - B| < \varepsilon$ . Но так не бывает:

$$|A - B| < |A - a_n| + |a_n - B| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|A - B|.$$

**Совет.** Нарисуйте произошедшее на числовой прямой.

**Упражнение (ограниченность сходящейся последовательности).** Докажите, что если последовательность  $(a_n)_{n=1}^\infty$  сходится, то она ограничена.

**Упражнение (арифметические свойства пределов).** Пусть  $(a_n)_{n=1}^\infty$  и  $(b_n)_{n=1}^\infty$  — две сходящиеся к  $A$  и  $B$  соответственно последовательности. Тогда

1. последовательность  $(a_n + b_n)_{n=1}^\infty$  сходится к  $A + B$ ; другими словами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

2. последовательность  $(a_n b_n)_{n=1}^\infty$  сходится к  $AB$ ; другими словами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

3. пусть  $B \neq 0$ , а также  $b_n \neq 0$  при  $n \geq m$ . Тогда последовательность  $(a_n/b_n)_{n=m}^\infty$  сходится к  $A/B$ ; другими словами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

## Ряды

**Определение.** (Формальный, бесконечный) ряд это выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Определение.** Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — (формальный, бесконечный) ряд. Определим  $K$ -ю частичную сумму как  $S_K = \sum_{n=1}^K a_n$ . Если последовательность  $(S_K)_{K=1}^\infty$  сходится к  $S$  при  $K \rightarrow \infty$ , то говорят, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится к  $S$ .

## 9. Серия 6. Самоопросник по пределам

4 июля

1. Пусть  $x_n$  — сходящаяся последовательность. Тогда  $x_n$  — ограниченная последовательность.

2. Пусть  $x_n$  — сходящаяся последовательность и  $\lim x_n = A$ . Пусть начиная с некоторого момента  $x_n \geq B$ . Тогда  $A \geq B$ .

3. Пусть  $x_n$  — сходящаяся последовательность и  $\lim x_n = A \neq 0$ . Тогда начиная с некоторого момента  $Ax_n > 0$  (т.е.  $A$  и  $x_n$  одного знака).

4. Пусть  $x_n, y_n$  — сходящиеся последовательности и  $\lim x_n = A, \lim y_n = B$ . Пусть начиная с некоторого момента  $x_n \geq y_n$ . Тогда  $A \geq B$ .

5. Пусть  $x_n$  — сходящаяся последовательность,  $y_k$  — ее подпоследовательность и  $\lim x_n = A$ . Тогда последовательность  $y_k$  сходится и  $\lim y_k = A$ .

6. Пусть  $x_n \rightarrow A, y_n \rightarrow A$ . Определим  $z_{2k} = x_k, z_{2k-1} = y_k$ . Докажите, что  $z_n \rightarrow A$ . Объединение двух последовательностей с одним пределом имеет тот же предел

7. Верно ли, что у последовательности, которая принимает конечное число различных значений, обязательно есть предел?

8. В сходящейся последовательности лишь конечное число членов положительны, верно ли что у нее отрицательный предел?

9. Последовательность сходится. Докажите, что из нее можно выделить монотонную подпоследовательность.

10. Найдите сумму ряда  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots$

11. Верно ли, что если последовательности  $x_n$  и  $y_n$  не имеют предела, то и  $x_n + y_n$  не имеет предела?

12. Верно ли, что если последовательности  $x_n$  и  $y_n$  не имеют предела, то и  $x_n \cdot y_n$  не имеет предела?

13. Последовательность  $x_n$  бесконечно малая. А последовательность  $y_n$  произвольна. Какой может быть предел у последовательности  $x_n y_n$ ?

14. Докажите, что монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда какая-нибудь ее подпоследовательность сходится.

15. Докажите, что сходящаяся последовательность достигает либо своей верхней, либо своей нижней грани.

## 10. Серия 6. Задачи по анализу

4 июля

1. Последовательности  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  и  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  сходятся. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right\}$$

2. Пусть  $X$  и  $Y$  два ограниченных сверху числовых множества. Будем называть их суммой  $Z$  множество состоящее из всевозможных сумм  $x + y$ , где  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Докажите, что  $\sup Z = \sup X + \sup Y$ . Верно ли, что  $\sup X \cdot Y = \sup X \cdot \sup Y$ ?

3. Последовательность  $x_n$  такова, что в ней встречаются все дроби вида  $\frac{1}{k}$  ровно по одному разу. Верно ли, что у этой последовательности обязательно есть предел?

4. Чему может быть равен предел частного двух бесконечно малых последовательностей?

5. Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

6. Пусть  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$  — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел, стремящаяся к нулю. Докажите, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  сходится.

7. Последовательность  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  такова, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  — нет. Докажите, что существует такая перестановка  $\sigma$  натуральных чисел, что сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  равна 2024.

## 11. Серия 7. Числовые веса

5 июля

**Упражнение.** В клетки доски  $n \times n$  расставлены фишки. Известно, что во всех строчках и столбцах кроме одного стоят ровно  $k$  фишек. Докажите, что во всех строках и столбцах ровно  $k$  фишек.

**Замечание.** На самом деле при решении мы всем ладьям присвоили веса 1, и посчитали сумму весов двумя способами. Но не всегда объектам надо присваивать равные веса. Может оказаться, что «вклад» разных элементов в процесс разный.

**Упражнение.** В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.

**Упражнение.** Четверть плоскости с положительными координатами разбили на клетки  $1 \times 1$ . В некоторых клетках получившейся доски лежат фишки. Разрешается убрать фишку с клетки, имеющей координаты  $(i, j)$  и поставить по фишке в клетки  $(i + 1, j)$  и  $(i, j + 1)$ , при этом запрещается ставить более одной фишки в клетку. Изначально в трёх левых нижних клетках, образующих уголок, стоит по фишке. Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы они стали пустыми.

1. В классе у каждого ученика не более 20 врагов. Учитель поделил класс на две группы. Школьники хотят, чтобы у каждого ученика из первой группы

было не более 5 врагов внутри группы, а у каждого ученика из второй группы — не более 15 врагов внутри группы. Каждый день одного из школьников, нарушающих это правило, коллективным решением переводят в другую группу. Докажите, что этот процесс когда-то завершится.

2. В ряд стоят  $n$  коробок. В них суммарно лежит  $n$  шариков. За один ход можно выбрать коробку и переложить из нее в каждую соседнюю коробку по одному шарiku. Докажите, что, какие бы операции ни делались, рано или поздно хотя бы один шарик окажется в крайней справа коробке.

3. В прямоугольной таблице  $m$  строк и  $n$  столбцов ( $m < n$ ). В некоторых клетках таблицы стоят звездочки, так что в каждом столбце стоит хотя бы одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звездочка, что в одной строке с нею находится больше звездочек, чем с нею в одном столбце.

4. Несколько камней были разложены в  $N$  кучек. Затем камни разложили по-другому, в  $n < N$  кучек. Докажите, что какой-то камень попал в кучку большего размера, чем та, в которой он лежал изначально.

5. По кругу стоят  $2n$  детей. У них есть суммарно  $2^n - 1$  печенек. За один ход ребенок может передать одну печенку своему соседу. Причем, пожадничав, в этот же момент он сразу съедает одну из своих печенек. Верно ли, что при любом начальном распределении печенек ребята могут действовать так, чтобы передать одну печенку голодному мальчику Вите?

6. По окружности отметили 40 красных, 30 синих и 20 зеленых точек. На каждой дуге между соседними красной и синей точками поставили цифру 1, на каждой дуге между соседними красной и зеленой — цифру 2, а на каждой дуге между соседними синей и зеленой — цифру 3. (На дугах между одноцветными точками поставили 0.) Найдите максимальную возможную сумму поставленных чисел.

7. По кругу стоят 2022 девочки. У одной из них есть 2022 монеты. Раз в минуту каждая девочка, у которой на данный момент есть хотя бы 2 монеты, передает по одной монете своим соседкам. Докажите, что данный процесс не может закончиться.

8. Клетки доски  $m \times n$  покрашены в два цвета. Известно, что на какую бы клетку ни поставить ладью, она будет бить больше клеток не того цвета, на котором стоит (клетка под ладьей тоже считается побитой). Докажите, что на каждой вертикали и каждой горизонтали клеток обоих цветов поровну.

9. В школу ходят  $d$  девочек и  $m$  мальчиков. Каждый мальчик дружит по крайней мере с одной девочкой, каждая девочка — не более чем с десятью мальчиками. Также известно, что у каждого мальчика друзей-девочек было больше, чем у каждой из этих девочек — друзей-мальчиков. Докажите, что  $m \leq \frac{10}{11}d$ .

## 12. Серия 8. Интерполяция: задачи

5 июля

1. Упростите (устно!) выражения

$$a) \ c^2 \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + a^2 \cdot \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \cdot \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

$$b) \ \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} + \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)}.$$

2. Пусть  $a, b, c$  — попарно различные целые числа. Докажите, что число

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$$

целое.

3. Пусть  $x_i$  — попарно различные числа,  $y_i$  — какие-то числа.

(а) Осознайте, что следующая система линейных уравнений имеет ровно одно решение (в переменных  $a_i$ ):

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \dots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = y_n \end{cases}.$$

(б) Докажите, что следующая система линейных уравнений имеет ровно одно решение (в переменных  $a_i$ ):

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_1^n + \dots + a_1 x_{n-1}^n + a_0 x_n^n = 0 \\ a_n x_0^{n-1} + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_{n-1}^{n-1} + a_0 x_n^{n-1} = 0 \\ \dots \\ a_n x_0 + a_{n-1} x_1 + \dots + a_1 x_{n-1} + a_0 x_n = 0 \\ a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0 \end{cases}.$$

4. Дана функция  $f(x)$ , значение которой при любом целом  $x$  целое. Известно, что для любого простого числа  $p$  существует такой многочлен  $Q_p(x)$  степени, не превышающей 2013, с целыми коэффициентами, что  $f(n) - Q_p(n)$  делится на  $p$  при любом целом  $n$ . Докажите, что существует многочлен  $g(x)$  с вещественными коэффициентами такой, что  $g(n) = f(n)$  для любого целого  $n$ .

5. Пусть  $p$  — простое число,  $f(x)$  — многочлен степени  $d$  с целыми коэффициентами. Известно, что  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , остаток при делении  $f(n)$  на  $p$  равен 0 или 1 для всех  $n$ . Докажите, что  $d \geq p - 1$ . МТФ говорит, что степень  $p - 1$  бывает. Решение не через интерполяцию не принимается.

6. Пусть  $P(x)$  — приведённый многочлен степени  $n$ . Ильнур посчитал его значения в  $n+1$  различных целых точках. Докажите, что одно из полученных Ильнуром чисел по модулю хотя бы  $n!/2^n$ .

7. Петя задумал многочлен  $f(x)$  степени не более 130, значения которого при всех целых  $x$  являются целыми числами. За один вопрос Петя может узнать чётность числа  $f(k)$  при одном  $k \in \{1, \dots, 131\}$ . За какое наименьшее количество вопросов Петя сможет узнать чётность числа  $f(0)$ ?

8. (теорема Мак-Дугалла). Пусть на окружности отмечено  $2n$  точек. Обозначим через  $R_i$  произведение расстояний от  $i$ -й точки до остальных. Докажите, что

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} + \dots + \frac{1}{R_{2n-1}} - \frac{1}{R_{2n}} = 0.$$

9. Алиса задумала многочлен десятой степени (с действительными коэффициентами), а Боб хочет его угадать. Боб может за один вопрос назвать любые десять действительных чисел, после чего Алиса говорит Бобу значение её многочлена при одном из названных значений переменной (но не говорит, какое именно число из названных она подставила).

а) Докажите, что Боб сможет определить многочлен Алисы.

б) Какое наименьшее число вопросов ему для этого понадобится?

10. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами  $P(x)$  степени  $n$  такой, что  $P(0), P(1), \dots, P(n)$  — различные степени двойки?

### 13. Серия 9. Разнобой «Профи ли ты? Часть вторая» 5 июля

1. Найдите все натуральные  $n$  и  $k$  такие, что  $n! + n = n^k$ .

2. Паша задумал перестановку  $a_1, a_2, \dots, a_n$  натуральных чисел  $1, 2, \dots, n$  ( $n > 1$ ). Игорь может выбрать пару натуральных чисел  $1 \leq i < j \leq n$ , сообщить ее Паше, а он в ответ назовет Игорю одно из чисел  $ia_j$  или  $ja_i$ . Игорь не знает, какое из этих 2 чисел ему называют. При каких натуральных  $n$  Игорь гарантированно сможет отгадать всю перестановку, задав несколько таких вопросов?

3. Игорь задумал многочлен от двух переменных  $P(x, y)$ . Саша обнаружил, что какое бы целое неотрицательное число  $n$  он не подставил вместо одной из переменных, останется многочлен от второй переменной степени не выше  $n$  (возможно, нулевой). Альбина утверждает, что тогда многочлен  $P(x, x)$  — чётной степени. Права ли Альбина?

4. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < BC < CA$ . Точки  $H_C$  и  $M_C$  — основание высоты из вершины  $C$  и середина стороны  $AB$  соответственно, а  $H$  — ортоцентр треугольника. Пусть  $I_C$  — центр вписанной окружности треугольника  $HH_C M_C$ , а  $J_C$  — центр невписанной окружности треугольника  $HH_C M_C$ , касающейся стороны  $HM_C$ . Аналогично определя-

ются точки  $H_B$ ,  $M_B$ ,  $I_B$  и  $J_B$ . Докажите, что точки  $I_B$ ,  $I_C$ ,  $J_B$ ,  $J_C$  лежат на одной окружности.

**5.** Рассмотрим граф, в котором 1024 вершины — это всевозможные строки из нулей и единиц длины 10, а ребро проводится между двумя строками, если они отличаются ровно в одной позиции. В этом графе выбрали 512 рёбер, не имеющих общих концов, и покрасили в красный. Остальные рёбра покрасили в синий. Докажите, что в графе найдется цикл длины не более чем 18, в котором красные и синие рёбра чередуются.

## 14. Серия 10. Уравнение Пелля: теория

7 июля

Рассмотрим диофантово уравнение  $x^2 - dy^2 = 1$  для каждого натурального  $d$ .

**Замечание.** Тривиальными решениями данного уравнения являются пары  $(\pm 1, 0)$ .

**Упражнение.** Решите уравнение  $x^2 - dy^2 = 1$  в случае, когда  $d$  является точным квадратом.

**Определение.** Пусть  $d$  — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Уравнением Пелля называется диофантово уравнение  $x^2 - dy^2 = 1$ .

**Теорема.** Если  $d$  не является точным квадратом, то существует нетривиальное решение уравнения Пелля.

Доказательство данной теоремы мы обсудим позднее. Сегодня, опираясь на нее, мы опишем все решения уравнения Пелля для каждого  $d$ .

Для дальнейшего понимания происходящего будет полезно временно сменить терминологию. Пусть  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  — «кольцо» чисел  $\{a + b\sqrt{d}, \text{ где } a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

**Замечание.** В этом «кольце» элемент  $1 + 0 \cdot \sqrt{d} = 1$  является единицей. То есть  $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$  для любого  $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ .

**Упражнение.** Докажите, что если  $x_1 + y_1\sqrt{d} = x_2 + y_2\sqrt{d}$ , то  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

**Определение.** Пусть  $z = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ . Нормой  $z$  назовем число

$$N(z) = z \cdot \bar{z} = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2.$$

**Замечание.** Норма является мультипликативной характеристикой элементов  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ . То есть для любых  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  выполнено  $N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$ . Также понятно, что  $N(1) = 1$ .

Решение уравнения Пелля равносильно нахождению всех элементов  $z$  из кольца  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  таких, что  $N(z) = 1$ .



**Определение.** Назовем решение  $(x_1, y_1)$  уравнения Пелля *фундаментальным*, если  $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$ , и  $y_1$  — наименьшее возможное. С этого момента везде под  $(x_1, y_1)$  мы понимаем фундаментальное решение.

**Замечание.** Поскольку есть хотя бы одно решение, где  $x, y \neq 0$ , сменив при необходимости знаки, получим натуральное решение. Значит, фундаментальное решение существует и единственно. Также понятно, что из всех решений с натуральными  $x$  и  $y$  фундаментальное является наименьшим.

**Обозначение.** Пусть  $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{d}$ , где  $(x_1, y_1)$  — фундаментальное решение уравнения Пелля.

1. Докажите, что  $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  обратим в  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  (то есть существует  $z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  такой, что  $zz' = 1$ ) тогда и только тогда, когда  $N(z) = \pm 1$ .

2. (а) Пусть  $z = x + y\sqrt{d}$  имеет норму 1, и при этом  $x, y \in \mathbb{N}$ . Докажите, что  $z/z_1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  и  $N(z/z_1) = 1$ .

(б) Предположим, что  $z/z_1 = x' + y'\sqrt{d} > 1$ . Докажите, что  $x', y' \in \mathbb{N}$ .

(с) Докажите, что все  $z = x + y\sqrt{d}$  с натуральными  $x$  и  $y$  такие, что  $N(z) = 1$  равны  $z_1^k$  для некоторого **натурального**  $k$ . Для доказательства полезно понимать, что  $z_1 > 1$ .

3. **Классификация решений.** Докажите, что все  $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  такие, что  $N(z) = 1$  имеют вид  $\pm z_1^k$  для некоторого **целого**  $k$ .

4. Докажите, что все решения  $(x, y)$  уравнения Пелля описываются формулами

$$\pm \left( \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^k + (x_1 - y_1\sqrt{d})^k}{2}, \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^k - (x_1 - y_1\sqrt{d})^k}{2\sqrt{d}} \right)$$

для **целых**  $k$ .

5. Решите в целых числах уравнения (а)  $x^2 - 2y^2 = 1$ ; (б)  $4x^2 - 3y^2 = 1$ ; (с)  $x^2 - 5y^2 = 25$ ; (д)  $x^2 + y^2 - 1 = 4xy$ .

*Подсказка.* Часто оказывается, что фундаментальное решение можно просто подобрать.

## 15. Серия 11. Уравнение Пелля: задачи

7 июля

1. Будем называть натуральное число *достойным внимания*, если оно делится на квадраты всех своих простых делителей. Докажите, что есть бесконечно много таких натуральных чисел  $a$ , что оба числа  $a$  и  $a + 1$  достойны внимания.

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$  таких, что число  $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$

- (a) является целым;  
 (b) является квадратом целого числа.

3. Опишите все натуральные  $k < m$  такие, что

$$1 + 2 + \dots + k = (k + 1) + (k + 2) + \dots + m.$$

4. Определим последовательность  $a_n = n(n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}])$  для всех натуральных  $n$ . Докажите, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует бесконечное количество натуральных  $k$  таких, что  $a_k \leq \frac{1 + \varepsilon}{2\sqrt{2}}$ .

5. Докажите, что для любого натурального  $k$  число

$$\frac{(2 + \sqrt{3})^{2k-1} + (2 - \sqrt{3})^{2k-1}}{2} - 1$$

является точным квадратом.

6. Найдите все натуральные  $m$  и  $r$  такие, что  $121^r - 2m^2 = 1$ .

7. Решите в целых числах уравнение  $3x^2 - 2y^2 = 1$ .

8. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел  $n$  таких, что число  $n^3 - 2$  представляется в виде суммы двух квадратов целых чисел.

9. Докажите, что уравнение  $x^5 + y^3 + z^2 - 3xyz = 0$  имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

10. Найдите все натуральные числа  $n$  такие, что  $2n^2 + 1$  является степенью тройки.

## 16. Серия 12. Асимптотики и порядки роста

8 июля

Цель этого листочка — поговорить об асимптотическом поведении функции, их порядках роста.

Когда возникает вопрос об описании поведения функции вблизи некоторой точки (или бесконечности), говорят, что интересуются *асимптотикой* или *асимптотическим поведением* функции в окрестности этой точки.

В рамках этого листочка мы в основном рассматриваем стремление к бесконечности, а функции будут определены на множестве натуральных чисел (т.е. по сути — последовательности).

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуют с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

**Определение.** Говорят, что функция  $f$  бесконечно малая по сравнению с  $g$ , и пишут  $f = o(g)$  (читается «о-малое от  $g$ »), если существует функция  $\alpha$  такая, что  $\alpha(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $f(n) = \alpha(n) \cdot g(n)$ .

**Комменатрий.** Запись  $o(f)$  означает какую-то функцию из целого класса функций. Поэтому гораздо корректней было бы писать  $g \in o(f)$ , но так мы потеряем кучу удобств.

0<sub>1</sub>. Осознайте, что означает запись  $o(f) + o(f) = o(f)$ , и докажите это утверждение.

**Комментарий.** Запись  $o(f)$  подразумевает наличие стремления чего-то куда-то (у нас  $n \rightarrow \infty$ ).

0<sub>2</sub>. Осознайте, что тут написано:  $o(f) = f \cdot o(1)$ .

**Определение.** Говорят, что функции  $f$  и  $g$  асимптотически эквивалентны, и пишут  $f \sim g$ , если  $f(n) = g(n) \cdot (1 + o(1))$ .

1. Пусть  $P(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_0$ .

а) Докажите, что  $P(n) \sim a_s n^s$ . Строгое написание «старший член является главным слагаемым».

б) Докажите, что если  $a_s > 0$ , то найдётся  $N > 1$  такое, что при всех  $n > N$  выполнено  $P(n) > 0$ .

**Комментарий.** Обратите ещё раз внимание, что мы говорим про **относительную** малость оставшихся слагаемых, а не абсолютную: понятно, что  $P(n) - a_s n^s$  может быть очень большим по модулю. Поэтому никаких «примерно равно» в качестве строгих доказательств!

**Недоопределение.** Если  $f$  и  $g$  — бесконечно большие функции (т.е. обе стремятся к  $+\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ) и  $g = o(f)$ , то говорят, что  $f$  имеет более высокий порядок роста, чем  $g$ .

**Комментарий.** Я не нашёл общепринятое определение для этого термина. Можно говорить «асимптотически больше», можно говорить «асимптотически сильнее». Лучше никогда не говорить «растёт быстрее».

0<sub>3</sub>. Вспомните пример последовательностей  $a_n$  и  $b_n$  таких, что  $a_n$  «растёт быстрее», чем  $b_n$ , но для которых  $a_n < b_n$  для каждого натурального  $n$ .

Если  $g(n) = f(n) \cdot \alpha(n)$ , где  $\alpha(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то по определению предела для всех достаточно больших  $n$   $|\alpha(n)| < 1$ , откуда  $|g(n)| < |f(n)|$ .

2. Докажите, что любая показательная функция имеет больший порядок роста (при стремлении к бесконечности), чем любой многочлен.

3. Упорядочьте в порядке возрастания порядков роста на бесконечности (одну пару можно просто сравнить, а не сравнить их порядки роста):

$$10^n \quad n^{100} \quad \sqrt{n} \quad n^n \quad n! \quad (n/2)^n \quad C_n^{50} \quad C_{2n}^n \quad 2^{n^2}$$

**Определение.** Пусть  $f$  и  $g$  — некоторые функции. Говорят, что  $f = O(g)$  («о-большое от  $g$ ») при  $n \rightarrow \infty$ , если существует константа  $C > 0$ , что при всех достаточно больших  $n$  выполнено  $|f(n)| < C|g(n)|$ .

**Комментарий.** Опять же, почему-то у такой ситуации нет общепринятого названия. Смысл этого обозначения примерно такой: функция  $f$  не асимптотически больше функции  $g$ . Поэтому наверное можно говорить, что  $f$  асимптотически не больше  $g$ .

Незначимые константы, например  $\sin n$ , всегда можно заменять на  $O(1)$ .

0<sub>4</sub>. Поймите, что  $o(1)$  является  $O(1)$ , а обратное, естественно, неверно. (так что запись  $o(1) = O(1)$  можно читать только слева-направо, но нгелзя справа-налево).

0<sub>5</sub>. Докажите, что если  $f = o(g)$ , а  $h = O(f)$ , то  $h = o(g)$ . Этим удобно бывает пользоваться. Вот в следующей сложной задаче, например. Её лучше порешать потом.

4. \* Пусть последовательность  $a_n$  такова, что  $a_n \cdot e^{a_n} = n$ . Докажите, что  $a_n \sim \ln n$ .

**Комментарий.** Следующие задачи скорее «рядом» с темой, чем «на» тему.

5. Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что для каждого натурального числа  $n$  существует треугольник со сторонами  $a^n, b^n, c^n$ . Докажите, что все эти треугольники равнобедренные.

6. Пусть  $P$  — многочлен с целыми коэффициентами для которого существует последовательность попарно различных натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  такая, что  $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, P(a_3) = a_2, \dots$ . Докажите, что  $\deg P = 1$ .

7. Натуральные числа  $a, b, c$  и  $d$  попарно различны. Докажите, что количество решений уравнения

$$x^3 + ax + b = y^3 + cy + d$$

в целых числах конечно.

8. Найдите все последовательности натуральных чисел  $x_n$  такие, что выполнены следующие два условия: 1)  $x_n \leq n\sqrt{n}$  при любом  $n$ ; 2) разность  $x_n - x_m$  делится на  $n - m$  при любых различных  $n$  и  $m$ .

9. Даны действительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$  и  $b_1, b_2, \dots, b_{2020}$ . Обозначим  $x_n$  число

$$[na_1 + b_1] + [na_2 + b_2] + \dots + [na_{2020} + b_{2020}].$$

Оказалось, что последовательность  $x_n$  — арифметическая прогрессия. Докажите, что  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2020}$  — целое.

10. Про возрастающую последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  известно, что  $a_n < 2020n$  для каждого  $n$ .

а) Докажите, что в этой последовательности бесконечно много членов содержат в своей десятичной записи цифру 1.

б\*) Докажите, что в этой последовательности бесконечно много членов содержат в своей десятичной записи 2020 подряд идущих цифр 1.

11. Найдите все четвёрки чисел  $a, b, c$  и  $d$  такие, что для бесконечного количества натуральных  $n$  выполняется равенство  $(a+b)(2a+b) \dots (an+b) = cn! + d$ .

12. Пусть  $f$  — многочлен с целыми коэффициентами,  $a_n$  — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что  $a_n \leq f(n)$  для всех натуральных  $n$ . Докажите, что существует бесконечно много простых  $p$ , которые делят хотя бы одно из чисел  $a_n$ .

## 17. Серия 13. Двойные отношения–2

8 июля

**Определение.** Точки  $A, B, C, D$  лежат на окружности  $S$ . Пусть  $X$  — произвольная точка этой окружности. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек  $A, B, C, D$  называется  $(A, B, C, D) = (XA, XB, XC, XD)$ .

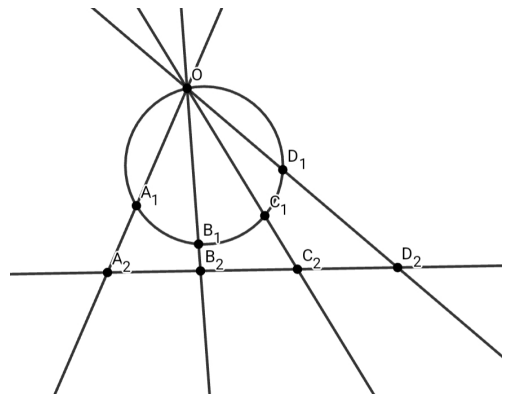
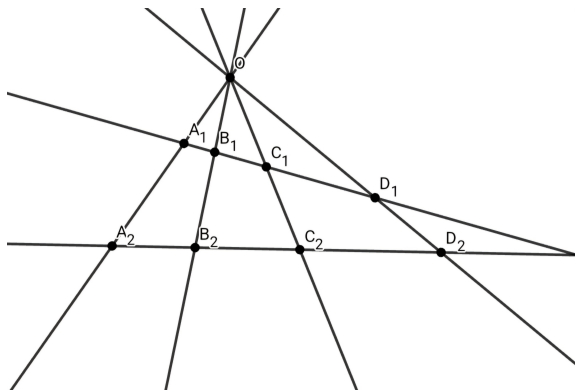
*Замечание.* Определение корректно, то есть не зависит от точки  $X$ .

**Определение.** Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

**Определение.** Вписанный четырехугольник  $ABCD$  называется *гармоническим*, если четвёрка точек  $(A, C, B, D)$  гармоническая.

*Замечание.* Теперь мы можем проецировать двойное отношение с прямой на окружность через точку, лежащую на этой окружности.

Таким образом, мы научились проецировать четвёрки точек с окружности на прямую и с прямой на прямую. На картинках ниже равны двойные отношения  $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ .



1. Пусть  $ABCD$  — гармонический четырехугольник,  $M$  — точка пересечения его диагоналей,  $P$  — точка пересечения касательной к его описанной окружности в точке  $B$  и прямой  $AC$ . Докажите, что  $(A, C, M, P) = -1$ .

2. Докажите, что вписанный четырехугольник  $ABCD$  является гармоническим тогда и только тогда, когда

- (a) Касательные к его описанной окружности в точках  $B$  и  $D$  пересекаются на прямой  $AC$ , либо параллельны этой прямой;
- (b) Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  пересекаются на диагонали  $BD$ ;
- (c) Равны хотя бы два из углов  $BNC$ ,  $DNC$  и  $BAD$ , где  $N$  — середина диагонали  $AC$ ;
- (d) Диагональ  $AC$  содержит симедиану треугольника  $ABD$ .

*Замечание.* Вообще гармонический четырехугольник обладает достаточно забавным свойством «симметричности». Например, доказав конкурентность касательных к окружности в точках  $A$ ,  $C$  и прямой  $BD$ , мы автоматически получаем конкурентность касательных в точках  $B$ ,  $D$  и прямой  $AC$ .

3. (a) В угол  $BAC$  вписана окружность  $\omega$ , касающаяся сторон угла в точках  $B$ ,  $C$ . Хорда  $CD$  окружности  $\omega$  параллельна прямой  $AB$ . Прямая  $AD$  второй раз пересекает окружность  $\omega$  в точке  $E$ . Докажите, что прямая  $CE$  делит отрезок  $AB$  пополам.

(b) Из точки  $P$  к окружности  $\omega$  проведены отрезки касательных  $PA$ ,  $PB$ , точка  $C$  диаметрально противоположна точке  $B$ . Докажите, что прямая  $CP$  делит пополам перпендикуляр, опущенный из точки  $A$  на прямую  $BC$ .

4. (a) На окружности  $\omega$  отмечены различные точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Точка  $P$  не лежит на окружности  $\omega$ . Прямые  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ ,  $PD$  второй раз пересекают окружность  $\omega$  в точках  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ . Докажите, что  $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$ .

(b) Докажите, что при инверсии сохраняется двойное отношение четырех точек.

(c) Четыре окружности  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ ,  $\omega_C$  и  $\omega_D$  касаются окружности  $\omega$  в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  соответственно и касаются друг друга по циклу. Все касания внешние. Докажите, что  $ABCD$  — гармонический четырёхугольник.

5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  ( $AC > AB$ ) провели биссектрису  $AL$  и медиану  $AM$ , последнюю продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника в точке  $D$ . Точка  $F$  симметрична  $L$  относительно  $M$ . Даны углы треугольника  $ABC$ , найдите угол  $FDA$ .

6. **Теорема о бабочке.** Хорды  $AC$  и  $BD$  окружности проходят через середину хорды  $MN$ . Отрезки  $AD$  и  $BC$  пересекают отрезок  $MN$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что  $XM = YN$ .

7.  $B_1$  и  $B_2$  — основания внутренней и внешней биссектрис треугольника  $ABC$ . Касательные, отличные от прямой  $BC$ , проведенные из  $B_1$  и  $B_2$  к вписанной окружности, касаются её в точках  $K_1$  и  $K_2$ . Докажите, что  $B$ ,  $K_1$  и  $K_2$  лежат на одной прямой.

8. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Перпендикуляр из  $B$  к прямой  $AC$  пересекает окружность, построенную на  $AC$ , как на диаметре, в точках  $X$  и  $Y$  ( $X$  ближе к  $B$ , чем  $Y$ ). Аналогично перпендикуляр из  $C$  к прямой  $AB$  пересекает окружность, построенную на  $AB$  как на диаметре, в точках  $Z$  и  $T$  ( $Z$  ближе к  $C$ , чем  $T$ ). Докажите, что прямые  $XZ$ ,  $YT$  и  $BC$  пересекаются в одной точке либо параллельны.

9. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\omega$ . Касательная в точке  $D$  к окружности  $\omega$  пересекает луч  $AC$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ , отрезок  $BC$  — в точке  $Q$ , отрезок  $BD$  — в точке  $R$ , а окружность  $\omega$  — в точках  $S$  и  $T$ . Оказалось, что  $R$  — середина отрезка  $PQ$ . Докажите, что  $R$  — середина отрезка  $ST$ .

## 18. Серия 14. Разделяющие множества

9 июля

**Определение.** Назовем множество вершин  $R$  в графе  $G$  *разделяющим*, если граф  $G - R$  не является связным.

**Определение.** Пусть  $X \not\subset R$ ,  $Y \not\subset R$ . Будем говорить, что  $R$  *разделяет* множества  $X$  и  $Y$  (или, что то же самое, отделяет множества  $X$  и  $Y$  друг от друга), если никакие две вершины  $v_x \in X \setminus R$  и  $v_y \in Y \setminus R$  не лежат в одной компоненте связности графа  $G - R$ .

**Определение.** Скажем, что множество  $S$  *разделяет*  $R$  в графе  $G$ , если вершины  $R \setminus S$  лежат хотя бы в двух разных компонентах связности графа  $G - S$ .

**Определение.** Граф  $G$  называется  $k$ -связным, если  $|G| > k$  и при удалении не более чем  $k - 1$  вершины граф не теряет связность.

**Определение.** *Точкой сочленения* называется разделяющее множество, состоящее из одной вершины.

1. Пусть  $M$  — множество из  $k$  вершин в  $k$ -связном графе, разделяющее его на  $m \geq 2$  компонент связности. Докажите, что количество ребер, проведенных из вершин  $M$  к оставшимся вершинам графа, не меньше  $mk$ .

2. В графе расстояние между любыми вершинами не превосходит  $d$ , и для любой вершины есть другая на расстоянии  $d$  от неё. Докажите, что данный граф двусвязен. (Расстояние между вершинами — это количество рёбер в кратчайшем пути между ними.)

3. Граф  $G$  связан. Назовем *разделителем* минимальное по включению множество вершин, при удалении которых граф теряет связность. Пусть  $S$  и  $R$  — разделители графа  $G$ . Известно, что  $S$  не разделяет  $R$ . Докажите, что  $R$  не разделяет  $S$  (возможно,  $|R| \neq |S|$ ).

4. Известно, что граф  $G$  на  $n$  вершинах является двусвязным, но при этом содержит разделяющее множество из 2 смежных вершин. Докажите, что  $G$  содержит двусвязный подграф (не равный  $G$ ), в котором больше  $n/2$  вершин.

5. Назовем ребро графа *разделяющим*, если два конца этого ребра образуют разделяющее множество. В графе расстояние между любыми вершинами не превосходит  $d$ , и для любой вершины есть другая на расстоянии  $d$  от неё. Докажите, что не более трети всех ребер графа являются разделяющими.

6. Назовем подмножество ребер графа  $G$  *разделяющим*, если после удаления этих ребер граф перестает быть связным. Пусть  $A$  и  $B$  — два минимальных по включению разделяющих реберных подмножества. Докажите, что  $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$  также является разделяющим.

7. В стране  $2n$  городов. Из каждого города можно добраться в каждый, при закрытии любого города это свойство сохраняется. Страна разделилась на две республики  $A$  и  $B$ , в каждой из которых от любого города можно добраться до любого другого, не покидая республики. В каждой из республик была выбрана столица. Король увидел, что в республике  $A$  городов меньше, чем в  $B$ , и решил перевести часть городов из  $B$  в  $A$  так, чтобы в республиках стало поровну городов, по-прежнему внутри каждой республики можно было добраться от любого города до любого другого, и столицы остались бы в разных республиках. Докажите, что король может осуществить свой план.

8. В некотором графе через каждое ребро проходит не более трёх простых циклов. Докажите, что вершины этого графа можно правильно окрасить в три цвета.

9. В  $k$ -связном графе  $G$  выбраны множества вершин  $S_1, S_2, S_3$ , каждое из которых разделяет граф  $G$  ровно на 2 компоненты связности. В каждом из этих множеств ровно  $k$  вершин. Докажите, что среди любых 7 вершин графа  $G - S_1 - S_2 - S_3$  найдутся две такие, что они лежат в одной компоненты связности при удалении любого из множеств  $S_1, S_2, S_3$

(a) В случае, когда  $S_1, S_2, S_3$  попарно не пересекаются;

(b) Для произвольных  $S_1, S_2, S_3$ .

## 19. Серия 15. Примерно целое

9 июля

Это листочек на такую идею: если имеется сходящаяся последовательность целых чисел, то она с некоторого момента постоянная.

**Пример.** Целые числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что  $an^2 + bn + c$  — точный квадрат для каждого натурального  $n$ . Докажите, что существуют такие целые числа  $d$  и  $e$ , что  $an^2 + bn + c = (dn + e)^2$  для каждого натурального  $n$ .

**Рассуждение.** Пусть  $x_n^2 = an^2 + bn + c$ . Тогда  $x_n = \sqrt{an^2 + bn + c} \sim n\sqrt{a}$ . Тогда, например, хочется сказать, что  $x_{n+1} - x_n$  это что-то типа  $\sqrt{a}$ , т.е.



получить, что  $\sqrt{a}$  хотя бы целое. Пробуем:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} - \sqrt{an^2 + bn + c} = \\ &= \frac{(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) - (an^2 + bn + c)}{\sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} + \sqrt{an^2 + bn + c}} = \\ &= \frac{2an + \text{константа}}{\sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} + \sqrt{an^2 + bn + c}} = \frac{2an \cdot (1 + o(1))}{2\sqrt{an} \cdot (1 + o(1))} \rightarrow \sqrt{a} \end{aligned}$$

Итак, последовательность  $x_{n+1} - x_n$  состоит из целых чисел (!) и сходится (!) к  $\sqrt{a}$ . Значит, она равна  $\sqrt{a}$ , начиная с некоторого момента, т.е.  $x_n = dn + e$  для всех достаточно больших  $n$ , где  $d = \sqrt{a}$  — целое число. Но тогда многочлены  $an^2 + bn + c$  и  $(dn + e)^2$  совпадают для всех достаточно больших  $n$ , т.е. совпадают для всех  $n$ .

**Комментарий.** На всякий случай напомним, что из  $x_n \sim n\sqrt{a}$  в общем случае **не** следует, что  $x_{n+1} - x_n \rightarrow \sqrt{a}$ : если расписывать формально, то

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{a} + o(n),$$

но  $o(n)$  может быть и бесконечно большой последовательностью. Так что придётся предполагать и проверять.

**Комментарий.** Обратите внимание, что мы здесь вычитали именно  $x_n$ , чтобы оставаться последовательностью целых чисел. Легко проверить, что  $x_n = n\sqrt{a} + o(1)$ . Но мы ничего не знаем об этой  $o(1)$ . Если же теперь написать

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)\sqrt{a} - n\sqrt{a} + o(1) = \sqrt{a} + o(1),$$

то за счёт целочисленности мы узнаём, что  $o(1)$  в этой записи на самом деле тождественный 0.

**1.** Коэффициенты многочлена  $f$  целые, а его степень равна  $k$ . Известно, что число  $\sqrt[k]{f(n)}$  — целое для каждого натурального  $n$ . Докажите, что существуют такие целые числа  $a$  и  $b$ , что  $f(x) = (ax + b)^k$ .

**2.** Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a^{n+1} + b^{n+1}$  делится на  $a^n + b^n$  для бесконечного множества различных натуральных  $n$ . Обязательно ли тогда  $a = b$ ?

**3.** Многочлены  $f$  и  $g$  с целыми коэффициентами таковы, что для бесконечно многих натуральных  $n$  число  $f(n)$  делится на  $g(n)$ . Докажите, что найдётся такой многочлен  $h$  с рациональными коэффициентами, что  $f = g \cdot h$ .

**4.** Натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , большие 1, таковы, что для всех натуральных  $n$  найдётся такое натуральное  $k$ , что  $a^k + b^k = 2c^n$ . Докажите, что  $a = b$ .

**5.** Среди действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$  есть хотя бы одно не целое. Докажите, что для бесконечно многих натуральных  $n$  числа  $n$  и  $[a_1n] + [a_2n] + \dots + [a_{2020}n]$  взаимно просты.

6. Целые числа  $a$  и  $b$  таковы, что для всех достаточно больших натуральных  $n$  число  $a \cdot 2^n + b$  — точный квадрат. Докажите, что  $a = 0$ .

7. Пусть  $f$  — приведённый многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для каждого натурального числа  $n$  уравнение  $f(x) = 2^n$  имеет хотя бы одно решение в натуральных числах. Докажите, что  $\deg f = 1$ .

## 20. Серия 16. Сложное — сумма простого

10 июля

**Пример.** Известно, что скалярное произведение векторов — линейная функция по аргументам. Как из этого получить формулу для скалярного произведения векторов  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ ?

Достаточно написать, что первый вектор равен  $x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y$ , а второй —  $x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y$  где  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$  — базисные векторы,  $\vec{e}_x$  — вектор  $(1, 0)$ ,  $\vec{e}_y$  — вектор  $(0, 1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} (x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y, x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y) &= x_1x_2(\vec{e}_x, \vec{e}_x) + y_1y_2(\vec{e}_y, \vec{e}_y) + x_1y_2(\vec{e}_x, \vec{e}_y) + \\ &+ x_2y_1(\vec{e}_y, \vec{e}_x) = x_1x_2 + y_1y_2, \end{aligned}$$

в последнем равенстве мы воспользовались тем, что  $(\vec{e}_x, \vec{e}_x) = (\vec{e}_y, \vec{e}_y) = 1$ ,  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = (\vec{e}_y, \vec{e}_x) = 0$ .

1. (китайская теорема об остатках, существование). Пусть  $m_1, m_2, \dots, m_n$  — попарно взаимно простые натуральные числа.

(a) Докажите, что существует такое число  $M_1$ , что  $M_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$ ,  $M_1 \equiv 0 \pmod{m_i}$ ,  $i > 1$ .

(b) Докажите, что для любых попарно взаимно простых натуральных чисел  $m_1, m_2, \dots, m_n$  и для любых целых чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  существует такое число  $a$ , что  $a \equiv a_i \pmod{m_i}$  для каждого  $i$ .

2. В клетчатой таблице  $4 \times 4$  идет игра «Жизнь» по следующим правилам: клетка живет, если на предыдущем ходу у нее было нечётное число живых соседей и мертва в противном случае. Найдите максимум периода по всем расстановкам.

3. По кругу стоят 128 целых чисел. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 128.

4. По окружности расставлены  $p^n$  целых чисел ( $p$  — простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на  $p^{2012}$ , если за ход из каждого числа вычитается его

(a) левый сосед;

(b)  $\ell$ -ый сосед слева,  $\ell$  фиксировано;

(c) \*  $\ell$ -ый сосед слева,  $\ell$  может меняться от хода к ходу.

5. На планете каждая страна граничит не более, чем с семью другими. Страны хотят перераспределить свой золотой запас так, чтобы у любых двух граничащих стран количество золота различалось бы не более, чем в 13 раз. Докажите, что это перераспределение можно провести так, чтобы каждая страна лишилась не более, чем половины своего золота.

## 21. Серия 17. Учебный МеждусоБой

10 июля

1. Найдите в замкнутом виде значение выражения

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{(2^k - 3^1)(2^k - 3^2) \dots (2^k - 3^{1000})}{(2^k - 2^1) \dots (2^k - 2^{k-1})(2^k - 2^{k+1}) \dots (2^k - 2^{1000})}.$$

2. Найдите все многочлены  $P(x)$  с вещественными коэффициентами, для которых неравенство

$$P(a-1)P(a+1) > P(a)^2 - 1$$

выполнено при всех вещественных  $a$ .

3. На плоскости расположены  $n$  окружностей одинакового радиуса, никакие две из которых не касаются, а их объединение есть связная фигура. Пусть  $S$  — множество точек, которые принадлежат хотя бы двум окружностям. Докажите, что  $|S| \geq n$ .

4. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . На стороне  $CD$  отмечена точка  $F$ ,  $E$  — точка пересечения прямых  $AF$  и  $BD$ . Точка  $G$  на стороне  $AB$  такова, что  $EG \parallel AD$ . Обозначим через  $H$  точку пересечения прямых  $CG$  и  $BD$ , через  $I$  — точку пересечения прямых  $FH$ ,  $AB$ . Докажите, что прямые  $CI$ ,  $FG$  и  $AD$  пересекаются в одной точке.

5. В некоторой стране есть несколько шпионов, некоторые пары из них имеют секретные каналы связи. Непустая группа шпионов  $A$  называется *опергруппой*, если любой шпион из  $A$  может передать сообщение любому другому шпиону из  $A$  — возможно, через посредников из этой же группы (в частности, любой шпион образует отдельную опергруппу). Две опергруппы *связаны*, если они не пересекаются, а их объединение — также опергруппа. Резидент составил схему связей между опергруппами, но в этой схеме отсутствуют указания на составы опергрупп. Докажите, что, получив эту схему, контрразведка может восстановить схему связей между шпионами.

6. Последовательность  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  не возрастает и стремится к 0. Докажите, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ .

7. Докажите, что для любого натурального  $10 < N < 1000$  существуют различные натуральные числа  $x_1, x_2, \dots, x_{10}, y_1, y_2, \dots, y_{10}$  такие, что

$$N + 7(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2.$$

8. Дан параллелограмм  $ABCD$ . Прямая  $\ell$  перпендикулярна  $BC$  и проходит через  $B$ . Две окружности с общей хордой  $CD$  касаются прямой  $\ell$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что отрезки  $DP$  и  $DQ$  видны из середины  $AB$  под равными углами.

9. На доске написано некоторое слово, составленное из букв Л, М и Ш. Можно заменять части слова по следующим правилам

$$МЛ \rightarrow ЛМ + Ш, \quad ШЛ \rightarrow ЛШ + М, \quad ШМ \rightarrow МШ + Л,$$

а затем «раскрывать скобки». Например, из выражения  $ШМЛ + М$  можно за одну операцию получить как  $МШЛ + ЛЛ + М$ , так и  $ШЛМ + ШШ + М$ . Докажите, что такими операциями исходное слово можно представить в виде суммы нескольких слов вида  $Л \dots ЛМ \dots МШ \dots Ш$  (возможно, некоторых букв нет), причем такое представление единственно с точностью до порядка слагаемых.

10. Пусть  $a, b$  — натуральные числа, большие 1. Докажите, что существует число, кратное  $a$ , которое в системе счисления с основанием  $b$  содержит все цифры  $0, 1, \dots, b-1$ .

## 22. Серия 18. Работа с системами вычетов

12 июля

**Определение.** Множество всех вычетов по модулю  $n$  называют *полной системой вычетов* по модулю  $n$ .

**Определение.** Обозначим через  $\varphi(n)$  количество чисел, не больших  $n$ , взаимно простых с  $n$ . Говорят, что набор из  $\varphi(n)$  различных вычетов, взаимно простых с  $n$  (если выбрать из каждого класса вычетов по представителю), образует *приведенную систему вычетов* по модулю  $n$ .

**Упражнение.** Пусть  $a$  — произвольное целое число. Тогда при сдвиге полной системы вычетов на  $a$  мы снова получим полную систему вычетов.

**Упражнение.** Пусть  $(a, n) = 1$ . Тогда при домножении полной/приведенной системы вычетов на  $a$  мы снова получим полную/приведенную систему вычетов.

**Следствие.** Пусть  $(a, n) = 1$ . Докажите, что существует *обратный* к  $a$  вычет по модулю  $n$ , то есть такой вычет  $b$ , что  $a \cdot b \equiv 1 \pmod{n}$ .

**Следствие.** Пусть  $(a, n) = 1$ . Докажите, что  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .

1. Дано простое число  $p > 100$ . Докажите, что существуют различные целые неотрицательные числа  $a, b, c, d, e$ , каждое из которых меньше  $p$ , и такие, что  $a + 2b + 3c + 4d + 5e$  делится на  $p$ .

*Подсказка.* Зафиксируйте произвольные различные  $a, b, c, d, e$  и попробуйте сдвигать их на одно и то же число по модулю  $p$ .

2. Пусть  $n$  — нечетное натуральное число. Докажите, что наборов из  $k$  различных натуральных чисел, меньших  $n$ , сумма чисел в котором дает остаток 1 по модулю  $n$  столько же, сколько наборов из  $k$  различных натуральных чисел, меньших  $n$ , сумма которых дает остаток 2 по модулю  $n$ .

3. Пусть  $p$  — простое число. Сколькими способами можно выбрать несколько натуральных чисел из набора  $\{1, 2, 3, \dots, p-1, p\}$  так, чтобы их сумма делилась на  $p$ ?

4. Дано нечетное простое число  $p$ . Для каждого натурального  $k \leq p-1$  обозначим через  $a_k$  количество натуральных делителей числа  $kp+1$ , больших  $k$  и меньших  $p$ . Найдите  $a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1}$ .

5. Дано простое  $p$  и  $p$  натуральных чисел  $a_1, \dots, a_p$ . Докажите, что при некотором целом  $k$

(а) среди чисел  $a_1 + k, a_2 + 2k, \dots, a_p + pk$  есть не более  $\frac{p-1}{2}$  пар, дающих одинаковые остатки при делении на  $p$ ;

(б) числа  $a_1 + k, a_2 + 2k, \dots, a_p + pk$  дают не менее  $p/2$  разных остатков при делении на  $p$ .

6. Дано простое число  $p > 2$ . Докажите, что среди любых  $p+1$  целых чисел можно выбрать  $p-1$  число  $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$  так, чтобы  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (p-1)a_{p-1}$  делилось на  $p$ .

7. Для каких натуральных  $n$  существует такая перестановка  $p_1, p_2, \dots, p_n$  чисел  $1, 2, \dots, n$ , что в каждом из наборов чисел  $p_1 + 1, p_2 + 2, \dots, p_n + n$  и  $p_1 - 1, p_2 - 2, \dots, p_n - n$  все числа дают разные остатки при делении на  $n$ ?

8. Дано нечетное простое число  $p$ . Последовательность целых неотрицательных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , каждое из которых меньше  $p$ , назовём *прекрасной*, если

(1)  $a_1 + a_2 + \dots + a_p$  не делится на  $p$ ;

(2)  $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$  делится на  $p$ .

Найдите количество прекрасных последовательностей.

9. Дано нечетное натуральное число  $n$ . На доске выписаны в порядке возрастания все остатки, которые могут давать степени 2 при делении на  $n$ . (Например, при  $n = 9$  на доске были бы написаны числа 1, 2, 4, 5, 7, 8.) Всегда ли по этим числам можно определить  $n$ ?

10. Дано простое число  $p \geq 5$ . Для каждой перестановки  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  чисел  $1, 2, \dots, p$ , в которой  $x_i \neq i$  для каждого  $i \leq p$ , посчитали остаток

от деления числа  $x_1 + 2x_2 + \dots + px_p$  на  $p$ . Докажите, что перестановок, у которых этот остаток равен 1, столько же, сколько перестановок, у которых он равен 4.

## 23. Серия 19. Счет в комплексных числах–1: теория 12 июля

Во всех дальнейших сериях будем обозначать поле комплексных чисел через  $\mathbb{C}$ .

Рассмотрим плоскость с декартовой системой координат. Вектор с координатами  $(x, y)$  будет соответствовать комплексному числу  $x + yi$ .

**Замечание.** Сложению и вычитанию комплексных чисел соответствует сложение и вычитание соответствующих векторов на координатной плоскости.

**Определение.** Модулем комплексного числа  $z = x + yi$  назовем число  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  (по аналогии с модулем вектора).

Зададим на плоскости прямоугольную декартову систему координат  $Oxy$ . Тогда каждому комплексному числу  $z$ , представленному в алгебраической форме  $z = x + iy$ , можно однозначно поставить в соответствие точку  $M$  плоскости с координатами  $(x, y)$  (то есть точке  $M(x, y)$  на самом деле сопоставлен вектор  $\overline{OM}$ ). Комплексное число  $z$  называют *комплексной координатой* соответствующей точки  $M$  и пишут  $M(z)$ . Понятно, что модуль комплексного числа  $z$  равен расстоянию от точки  $M$  до начала координат.

Следовательно, множество точек евклидовой плоскости находится во взаимно однозначном соответствии с множеством комплексных чисел. Эту плоскость называют плоскостью комплексных чисел. Начало  $O$  системы координат называют при этом начальной или нулевой точкой плоскости комплексных чисел.

**Определение.** На комплексной плоскости  $Oxy$  отмечена точка  $M(z)$ . Ориентированный угол (против часовой стрелки) между осью  $Ox$  и вектором  $\overline{OM}$  называется аргументом комплексного числа  $z$  и обозначается через  $\arg z$ .

**Тригонометрическая форма комплексного числа.** Пусть  $\varphi = \arg z$ . Тогда

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

**Замечание.** Легко проверить, что  $|1/z| = 1/|z|$ ,  $\arg 1/z = -\arg z$ .

**Упражнение.** Выполнены соотношения:

- $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ .
- $\arg z_1 / z_2 = \arg z_1 - \arg z_2$ .

**Определение.** Если дано комплексное число  $z = x + iy$ , то комплексное число  $\bar{z} = x - iy$  называется комплексно сопряженным к данному числу.

**Упражнение.** Выполнены соотношения:

- $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$  для  $\forall z \in \mathbb{C}$ .
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  для  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  для  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .
- $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$  для  $\forall z_2 \neq 0, z_1 \in \mathbb{C}$ .
- $\arg \bar{z} = -\arg z$  для  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

## 24. Серия 19. Счет в комплексных числах–1: задачи 12 июля

Используя определенную выше терминологию, попробуем решить несколько простых (пока что) задач.

**Упражнение.** Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  является параллелограммом тогда и только тогда, когда комплексные координаты  $a, b, c, d$  его вершин удовлетворяют условию  $a + c = b + d$ .

**Решение.** Расположим наш четырехугольник на комплексной плоскости. Пусть  $A(a), B(b), C(c), D(d)$ . Тогда середина  $M$  отрезка  $AC$  имеет координату  $\frac{a+c}{2}$  так как  $\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OC}}{2}$ . Аналогично середина отрезка  $BD$  имеет координату  $\frac{b+d}{2}$ . То есть равенство  $a + c = b + d$  равносильно совпадению середин отрезков  $AC$  и  $BD$ , то есть равносильно тому, что  $ABCD$  — параллелограмм.

**Упражнение.** На комплексной плоскости даны точки  $A(a), B(b)$  и  $C(c)$ , причем  $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$  для некоторого вещественного  $\lambda \neq -1$ . Тогда  $c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$ .

**Решение.** Как мы знаем, вектору  $\overline{AC}$  соответствует комплексное число  $c - a$ , а вектору  $\overline{CB}$  — комплексное число  $b - c$ . Тогда имеем  $c - a = \lambda(b - c)$ , откуда  $c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$ .

**Упражнение.** Дан положительно ориентированный квадрат  $ABCD$  с комплексными координатами вершин  $A(a), B(b)$ . Найдите комплексные координаты вершин  $C$  и  $D$ .

**Решение.** Как мы понимаем, вектор  $\overline{BA}$  получается из вектора  $\overline{BC}$  поворотом против часовой стрелки на  $\pi/2$ . Тогда имеем

$$a - b = (c - b) \cdot (\cos \pi/2 + i \sin \pi/2) = (c - b) \cdot i,$$

$$\text{откуда } c = \frac{a - b + bi}{i} = b + bi - ai.$$

Теперь найдем координату точки  $D$ . Можно записать, что вектор  $\overline{AD}$  получается из вектора  $\overline{AB}$  поворотом на  $\pi/2$  против часовой стрелки. Откуда  $d - a = (b - a) \cdot i$ , то есть  $d = bi - ai + a$ .

**Упражнение.** Докажите, что сумма квадратов длин диагоналей четырехугольника равна удвоенной сумме квадратов его средних линий.

**Решение.** Обозначим четырехугольник через  $ABCD$  и снова расположим его на комплексной плоскости. Обозначим через  $a, b, c, d$ , координаты вершин  $A, B, C, D$  соответственно. Тогда требуется доказать тождество

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{a+b-c-d}{2} \right) \overline{\left( \frac{a+b-c-d}{2} \right)} + 2 \left( \frac{a+d-b-c}{2} \right) \overline{\left( \frac{a+d-b-c}{2} \right)} = \\ = (a-c)\overline{(a-c)} + (b-d)\overline{(b-d)}. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок получаем верное равенство.

### Для самостоятельного решения

1. Дан четырехугольник  $ABCD$ . Пусть  $M$  — середина стороны  $AB$ ,  $N$  — середина стороны  $CD$ . В четырехугольниках  $AMND$  и  $MBCN$  отметили середины диагоналей. Докажите, что 4 полученных точки являются вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой.

2. Точки  $M, K, N$  и  $L$  — середины сторон  $AB, BC, CD$  и  $DE$  пятиугольника  $ABCDE$  (не обязательно выпуклого),  $P$  и  $Q$  — середины отрезков  $MN$  и  $KL$ . Докажите, что отрезок  $PQ$  в четыре раза меньше стороны  $AE$  и параллелен ей.

3. Докажите, что комплексная координата точки пересечения медиан  $M(m)$  треугольника  $ABC$  с координатами вершин  $A(a), B(b), C(c)$  выражается по формуле  $m = \frac{a+b+c}{3}$ .

4. (а) Дан положительно ориентированный правильный треугольник  $ABC$  с комплексными координатами вершин  $A(a), B(b)$ . Найдите комплексную координату вершины  $C$ .

(б) **Невероятно полезное соображение.** Дан положительно ориентированный треугольник  $ABC$  с комплексными координатами вершин  $a, b, c$  соответственно и углом  $\angle ACB = \varphi$ . Докажите, что координата центра описанной окружности треугольника  $ABC$  вычисляется по формуле  $x = \frac{a\zeta - b}{\zeta - 1}$ , где  $\zeta = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$ .

5. (а) Докажите, что сумма квадратов длин медиан треугольника равна  $3/4$  суммы квадратов его сторон.

(б) **Основное тождество параллелограмма.** Дан параллелограмм  $ABCD$ . Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

(с) Дан произвольный четырехугольник  $ABCD$ . Пусть  $M$  и  $N$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  соответственно. Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$



6. На плоскости нарисованы два квадрата —  $ABCD$  и  $KLMN$  (их вершины перечислены против часовой стрелки). Докажите, что середины отрезков  $AK$ ,  $BL$ ,  $CM$ ,  $DN$  также являются вершинами квадрата.

7. Из медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  составлен треугольник  $KMN$ , а из медиан  $KK_1$ ,  $MM_1$  и  $NN_1$  треугольника  $KMN$  — треугольник  $PQR$ . Докажите, что третий треугольник подобен первому и найдите коэффициент подобия.

8. На сторонах треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники  $ADB$ ,  $BEC$  и  $CFA$ , то есть

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = k, \quad \angle ADB = \angle BEC = \angle CFA = \alpha.$$

Докажите, что:

- (a) середины отрезков  $AC$ ,  $DC$ ,  $BC$  и  $EF$  — вершины параллелограмма;
- (b) у этого параллелограмма два угла равны  $\alpha$ , а отношение сторон равно  $k$ .

9. На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  вовне построены равнобедренные прямоугольные треугольники  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ ,  $CAB_1$  с гипотенузами  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  совпадают.

10. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки  $M$  до вершин треугольника минимальна, если  $M$  — точка пересечения медиан треугольника.

11. На сторонах  $BC$  и  $CD$  ромба  $ABCD$  отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно так, что  $BP = CQ$ . Докажите, что точка пересечения медиан треугольника  $APQ$  лежит на диагонали  $BD$  ромба.

12. Точка  $M$  лежит на прямой, содержащей гипотенузу  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $MA^2 \cdot BC^2 + MB^2 \cdot AC^2 = MC^2 \cdot AB^2$ .

13. На сторонах выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники  $ABC'$ ,  $BCD'$ ,  $CDE'$ ,  $DEF'$ ,  $EFA'$  и  $FAB'$ . Оказалось, что треугольник  $B'D'F'$  — равносторонний. Докажите, что треугольник  $A'C'E'$  также равносторонний.

## 25. Серия 20. Асимптотика в комбинаторике

13 июля

**Упражнение.** Бесконечную клетчатую плоскость разбили на равные параллелограммы с целочисленными вершинами, не содержащие целочисленных точек внутри и на границе. Докажите, что площадь параллелограмма равна 1.

1. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали прямоугольник (со сторонами, параллельными линиям клеток).

2. У Пети есть бесконечно много одинаковых треугольных салфеток. Докажите, что для достаточно больших  $R$  Петя сможет покрыть этими салфетками более 99% площади круглого стола радиуса  $R$  (салфетки не перекрываются, не вылезают за край стола, их можно переворачивать).

3. Из бесконечной клетчатой доски выкинули несколько клеток. Расстояние между центрами каждой двух выкинутых клеток не меньше 1000. Всегда ли оставшуюся часть можно разбить на доминошки?

4. Дано натуральное  $n \geq 2021$ . Числа  $1, 2, \dots, n^2$  вписаны в клетки таблицы  $n \times n$  так, что в каждой клетке написано одно число. Докажите, что можно отметить  $n$  клеток, никакие две из которых не находятся в одной строке или в одном столбце, так, чтобы никакие четыре числа, стоящие в отмеченных клетках, не образовывали арифметическую прогрессию.

5. Двое игроков отмечают точки плоскости. Сначала первый отмечает точку красным цветом, затем второй отмечает 100 точек синим, затем первый снова одну точку красным, второй 100 точек синим и так далее. (Перекрашивать уже отмеченные точки нельзя.) Докажите, что первый может построить правильный треугольник с красными вершинами.

6. Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить клетки нельзя. Учителника побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник  $1 \times 2$  или  $2 \times 1$  такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Смогут ли ученики помешать учительнице победить?

7. (a) Ограниченная фигура на плоскости имеет площадь  $S > 1$ . Докажите, что её можно сдвинуть на целочисленный вектор так, чтобы исходная фигура и её образ пересекались.

(b) **Лемма Минковского.** В центре координатной плоскости расположена выпуклая центрально-симметричная относительно центра координат фигура площади больше 4. Докажите, что в ней найдется еще одна целочисленная точка.

8. Дано неотрицательное число  $C$ . В каждой клетке квадрата  $n \times n$  сидит жук. Для каждой пары жуков посчитали расстояние между ними. После этого каждый жук переполз в одну из соседних по стороне клеток, причем в

каждой клетке снова сидит ровно 1 жук. Для каждой пары жуков снова посчитали расстояние между ними. Оказалось, что для каждого натурального  $n$  количество не изменившихся расстояний не меньше  $Cn^4$ . Чему может быть равно  $C$ ?

9. На окружности отмечены  $n > 10^{100}$  точек. Двое по очереди проводят отрезки с концами в отмеченных точках, первый своим ходом проводит один красный отрезок, второй — 100 синих. Один и тот же отрезок запрещено проводить дважды. Первый игрок хочет, чтобы после нескольких ходов граф, образованный  $n$  отмеченными точками и красными отрезками, был связным. Сможет ли второй ему помешать?

## 26. Серия 21. Спуск и подъем по Виету

13 июля

**Упражнение.** Докажите, что если для некоторых натуральных чисел  $a, b, k$  выполнено равенство  $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k$ , то  $k$  — точный квадрат.

**Упражнение.** Про натуральные числа  $a$  и  $b$  известно, что  $a^2 + b^2 + 1$  делится на  $ab$ . Докажите, что  $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$ .

### Для самостоятельного решения

1. Докажите, что уравнение  $a^2 + b^2 + a + b = 5ab$  не имеет решений в натуральных числах.

2. Докажите, что существуют натуральные числа  $a, b, c, d$ , большие  $10^{2024}$ , такие, что  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + abd + acd + bcd$ .

3. Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что число  $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$  целое. Докажите, что оно равно 5.

4. Какие натуральные значения может принимать выражение  $\frac{(a + b + c)^2}{abc}$  при натуральных  $a, b, c$ ?

5. Пусть  $n$  — натуральное число такое, что уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = n(xyz + 1)$  имеет решение в натуральных числах. Докажите, что  $n$  представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.

6. Дано натуральное число  $k$ . Докажите, что существует бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  такая, что для любого  $n$  число  $a_n^2 + k$  делится на  $a_{n+1}$ , а число  $a_{n+1}^2 + k$  делится на  $a_n$ .

7. Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $|a^2 + b^2 - abc - 2| < c$ . Докажите, что число  $a^2 + b^2 - abc$  является точным квадратом.

8. Натуральные числа  $a, b, c$  удовлетворяют условию  $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2abc$ . Докажите, что хотя бы одно из чисел  $\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2}$  является точным квадратом.

9. Решите в натуральных числах уравнение  $4a^3 + b + c = 4abc + 2a$ .

10. О натуральных числах  $x$  и  $y$  известно, что  $x^2$  делится на  $2xy + y^2 - 1$ . Докажите, что  $y^2 - 1$  делится на  $2x$ .

## 27. Серия 22. Многочлены в комбинаторике

14 июля

Рассмотрим произвольную последовательность чисел  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , пока что конечную. Как мы помним, такие последовательности однозначно сопоставляются многочленам по правилу

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Например, последовательность  $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$  отображается в многочлен

$$C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n = (1+x)^n.$$

Теперь для подсчета суммы членов этой последовательности достаточно подставить  $x = 1$ , а для подсчета знакопеременной суммы  $x = -1$ . Оказывается, что подобная техника часто позволяет вычислять коэффициенты многочленов. Для этого можно даже подставлять в многочлен комплексные аргументы.

**Упражнение.** Пусть  $p$  — простое число. Сколькими способами можно выбрать несколько натуральных чисел из набора  $\{1, 2, 3, \dots, p-1, p\}$  так, чтобы их сумма делилась на  $p$ ?

Отметим, что последовательности  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , состоящей из целых неотрицательных чисел, можно также сопоставить многочлен  $x^{a_0} + x^{a_1} + \dots + x^{a_n}$ .

**Упражнение.** Некоторый клетчатый прямоугольник разбит на прямоугольники  $m \times 1$  и  $1 \times n$  (которые нельзя поворачивать). Докажите, что его можно разбить на прямоугольники только одного из этих типов.

**Полезная лемма.** Пусть  $p$  — простое число. Рассмотрим корни из единицы  $p$ -ой степени  $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1}$ , где  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$ . Оказалось, что для некоторых рациональных  $a_0, a_1, \dots, a_n$  верно

$$a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0.$$

Тогда  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1}$ .

1. Сколькими способами можно выбрать подмножество  $\{1, 2, \dots, 2000\}$ , сумма элементов которого делится на 4?

2. Сколькими способами можно раскрасить  $n$  шариков в два цвета так, чтобы количество шариков первого цвета делилось на 3?

3. Даны два игральных кубика. На каждом из них может выпасть число от 1 до 6 включительно, но не обязательно равновероятно; все вероятности являются неотрицательными вещественными числами. Может ли оказаться так, что при одновременном броске обоих кубиков сумма выпавших чисел с равной вероятностью принимала значения  $2, 3, 4, \dots, 12$ ?

4. Из квадрата  $13 \times 13$  удалили центральную клетку. Можно ли оставшуюся фигуру разрезать на прямоугольники  $1 \times 4$  и  $4 \times 1$ ?

5. Дано простое число  $p$  и два набора натуральных чисел  $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ ,  $B = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ . Известно, что среди чисел вида  $a_i + b_j$  ( $1 \leq i, j \leq p$ ) ровно  $p$  чисел дают остаток 0 при делении на  $p$ , ровно  $p$  дают остаток 1,  $\dots$ , ровно  $p$  дают остаток  $p - 1$ . Докажите, что в одном из наборов каждый остаток при делении на  $p$  встречается ровно по одному разу.

6. Вершины правильного  $n$ -угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

7. Пусть  $p$  — простое число. Сколькими способами можно выбрать  $p$  чисел из набора  $\{1, 2, 3, \dots, 2p - 1, 2p\}$  так, чтобы их сумма делилась на  $p$ ?

8. Последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  натуральных чисел таковы, что наборы их попарных сумм  $\{a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n\}$  и  $\{b_1 + b_2, b_1 + b_3, \dots, b_{n-1} + b_n\}$  совпадают. Докажите, что  $n = 2^k$  для некоторого натурального  $k$ .

9. Даны  $2n$  различных действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ . В клетки доски  $n \times n$  расставлены числа по следующему правилу: в клетке  $(i, j)$  стоит число  $a_i + b_j$ . Оказалось, что произведения чисел во всех строках одинаковые. Докажите, что произведения чисел во всех столбцах также одинаковые.

## 28. Серия 23. Инверсия + симметрия

14 июля

1. Углы  $AOB$  и  $COD$  совмещаются поворотом так, что луч  $OA$  совмещается с лучом  $OC$ , а луч  $OB$  — с лучом  $OD$ . В эти углы вписаны окружности, пересекающиеся в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что углы  $AOE$  и  $DOF$  равны.

2. В трапеции  $ABCD$  с основанием  $AD$  и  $BC$  лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $K$ . Точки  $P$  и  $Q$  — центры описанных окружностей треугольников  $ABD$  и  $BCD$ . Докажите, что  $\angle PKA = \angle QKD$ .

**3. Лемма Варьера.** Окружность  $\omega$  касается сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  и его описанной окружности в точках  $X, Y, P$  (такая окружность называется *полуописанной*), а внеписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его стороны  $AC$  в точке  $Q$ .

- (a) Докажите, что  $\angle ABP = \angle CBQ$ ;
- (b) Докажите, что центр вписанной в  $ABC$  окружности лежит на прямой  $XY$ ;
- (c) Докажите, что четырёхугольники  $AXIP$  и  $CYIP$  являются вписанными.

**4. (a)** Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < AC$ . Пусть  $D$  — точка пересечения биссектрисы угла  $BAC$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$ ,  $Z$  — точка пересечения серединного перпендикуляра к  $AC$  с внешней биссектрисой угла  $BAC$ . Докажите, что середина отрезка  $AB$  лежит на описанной окружности треугольника  $ADZ$ .

**(b)** В окружность  $\Omega$  вписан остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB > AC$ . Пусть  $P$  и  $Q$  — середины меньшей и большей дуг  $AC$  окружности  $\Omega$  соответственно. Пусть  $M$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $Q$  на отрезок  $AB$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $BMC$ , делит пополам отрезок  $BP$ .

**5.** Пусть  $\omega$  — описанная окружность треугольника  $ABC$ . Окружность с центром в точке  $O$  касается отрезка  $BC$  в точке  $P$  и дуги  $BC$  окружности  $\omega$ , не содержащей точку  $A$ , в точке  $Q$ . Докажите, что если  $\angle BAO = \angle CAO$ , то  $\angle BAP = \angle CAQ$ .

**6.** Гипотенуза  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  касается вписанной и соответствующей внеписанной окружностей в точках  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Окружность, проходящая через середины сторон, касается этих окружностей в точках  $S_1, S_2$  соответственно. Докажите, что  $\angle S_1CT_1 = \angle S_2CT_2$ .

**7.** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно. Прямые, проходящие через  $A$  перпендикулярно  $AC$  и  $AB$ , пересекают  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Прямая  $XM$  пересекает  $AB$  в точке  $P$ , а прямая  $YN$  пересекает  $AC$  в точке  $Q$ . Докажите, что точки  $O, P, Q$  лежат на одной прямой.

## 29. Серия 23,5. Добавка по геометрии

14 июля

**1.** Дан треугольник  $ABC$  с инцентром в точке  $I$ .  $D$  — проекция точки  $I$  на  $BC$ ,  $P$  — проекция точки  $I$  на  $AD$ . Докажите, что  $\angle BPD = \angle DPC$ .

**2.** Высоты остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$  и пересекают его описанную окружность  $\omega$  в точках  $A', B', C'$ ;  $M$  — середи-

на  $BC$ . Луч  $MH$  пересекает  $\omega$  в точке  $X$ . В треугольники  $A'B'X$  и  $A'C'X$  вписаны окружности с центрами  $U$  и  $V$ . Докажите, что  $UV \parallel BC$ .

3. Точка  $O$  лежит внутри треугольника  $ABC$ . Прямые  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  пересекают стороны  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  в точках  $D$ ,  $E$  и  $F$  соответственно.  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $D$  на  $EF$ . Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из  $H$  на  $BE$ ,  $CF$ ,  $AB$  и  $AC$  лежат на одной окружности.

4. Касательная в точке  $A$  к описанной окружности  $\omega$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $D$ . Прямая  $\ell$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $P$ , окружность  $\omega$  в точках  $Q$  и  $T$ , стороны  $AB$  и  $AC$  соответственно в точках  $R$  и  $S$ , а продолжение стороны  $BC$  в точке  $U$ . Точки  $P, Q, R, S, T$  и  $U$  расположены на прямой  $\ell$  именно в таком порядке,  $QR = ST$ . Докажите, что  $PQ = UT$ .

5. В описанной окружности  $\Omega$  треугольника  $ABC$  проведена хорда  $XU$ , параллельная  $BC$  и располагающаяся между точкой  $A$  и прямой  $BC$ . Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются хорды  $XU$ , окружности  $\Omega$  и отрезков  $AB$  и  $AC$  соответственно, причём расположены они между прямыми  $XU$  и  $BC$ . Докажите, что общие внутренние касательные к  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются на биссектрисе угла  $BAC$ .

6. Окружность  $\omega$  с центром  $I$  вписана в неравнобедренный остроугольный треугольник  $ABC$ . Пусть  $B_1$  и  $C_1$  — проекции точек  $B$  и  $C$  на прямую  $AI$ . Точки  $X$  и  $Y$  выбраны на отрезке  $BC$  так, что  $\angle B_1XC_1 = \angle B_1YC_1 = 90^\circ$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $AXY$ , касается  $\omega$ .

7. Точка  $O$  — центр описанной окружности  $\omega$  остроугольного треугольника  $ABC$ . Биссектриса угла  $\angle BAC$  пересекает  $BC$  в точке  $D$ . Окружность  $\omega_A$  касается отрезков  $AB$  и  $AC$ , а также внутренним образом касается  $\omega$  в точке  $P$ . Обозначим через  $E$  и  $F$  точки касания вневписанных окружностей с отрезками  $AC$  и  $AB$  соответственно. Пусть  $N$  — точка Нагеля, то есть точка пересечения отрезков  $BE$  и  $CF$ . Оказалось, что  $N$  лежит на описанной окружности треугольника  $AEF$ . Докажите, что  $N$  также лежит на описанной окружности треугольника  $PDO$ .

8. Общие внешние касательные  $\ell_1$  и  $\ell_2$  к окружностям  $s_1$  и  $s_2$  пересекаются в точке  $K$ . Окружность  $w$  проходит через точку  $K$ , касается окружностей  $s_1$  и  $s_2$  и повторно пересекает прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в точках  $B$  и  $D$ . Касательные из точек  $B$  и  $D$  к  $s_1$ , отличные от  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , пересекаются в точке  $A$ . Касательные из точек  $B$  и  $D$  к  $s_2$ , отличные от  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , пересекаются в точке  $C$ . Докажите, что  $\angle AKD = \angle CKB$ .

### 30. Серия 24. Уравнение Пелля-2

15 июля

Сегодня мы наконец докажем теорему о существовании нетривиального решения уравнения Пелля.

Удивительно короткое доказательство теоремы о существовании решения уравнения Пелля опубликовал в 2008 году Н. Вайлдбергер (Австралия). Все ранее известные доказательства были не совсем элементарны.

Положим  $g(x, y) = x^2 - dy^2$  и будем преобразовывать эту квадратичную форму следующим образом. Если на очередном шаге получилась форма  $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ , то преобразуем ее или в  $g(x + y, y)$ , или в  $g(x, x + y)$  так, чтобы у новой формы коэффициент при  $x^2$  был  $> 0$ , а при  $y^2$  был  $< 0$  — как и у начальной формы.

1. (a) Прделайте эти преобразования для формы  $x^2 - 2y^2$ .

(b) На каком-то шаге должно стать очевидным, что уравнение  $x^2 - 2y^2 = 1$  имеет решение.

2. Аналогично, прделайте алгоритм для формы  $x^2 - 7y^2$ .

3. (a) Что происходит с дискриминантом формы  $D = b^2 - 4ac$  при этих преобразованиях?

(b) Докажите, что на каждом шаге преобразование может быть выбрано ровно одним способом.

(c) Докажите, что в полученной последовательности форм встретится только конечное число форм. Следовательно, последовательность заиклится.

(d) Докажите, что по очередной форме можно восстановить предыдущую. Следовательно, последовательность заиклится без предпериода.

(e) Докажите, что у уравнения Пелля существует нетривиальное решение.

### 31. Матбой Профи-9 — Профи-8

15 июля

1. Для положительных чисел  $a, b, c$  и  $d$  докажите неравенство

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) + \left(\frac{d}{a} + \frac{a}{d}\right) \geq 2 \frac{(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}}.$$

2. Для положительных вещественных чисел  $p$  и  $q$  будем называть *остатком при делении  $p$  на  $q$*  наименьшее неотрицательное вещественное число  $r$  такое, что  $\frac{p-r}{q}$  — целое число. Докажите, что для каждого натурального  $b$  существует ровно одно натуральное  $a$  такое, что если  $r_1$  и  $r_2$  — остатки при делении  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  на  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$  соответственно, то  $r_1 + r_2 = \sqrt{2}$ .



3. На биссектрисе  $AD$  остроугольного треугольника  $ABC$  ( $AB > AC$ ) лежит точка  $P$ . Прямые  $BP$  и  $CP$  пересекают стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $Q$  и  $R$  соответственно. Докажите, что  $PB - PC > RB - QC$ .

4. Саша нарисовал граф, вершинами которого являются все возможные последовательности из 0 и 1 длины 2019, а ребро между вершинами проводится, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одном месте. Назовём расстановку ненулевых чисел в вершинах этого графа  $k$ -гармонической, если для любой вершины сумма чисел в соседних с ней вершинах в  $k$  раз больше числа в самой вершине. При каких вещественных  $k$  существует  $k$ -гармоническая расстановка чисел в вершинах этого графа?

5. Дано натуральное число  $n > 10$ . Докажите, что ни для какого  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  число  $(2n)! + k$  не делится на  $n! + 1$ .

6. Точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности  $\omega$  с центром  $O$ , причем  $O$  не лежит на прямой  $AB$ . На отрезке  $AB$  выбрана точка  $C$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AC$  и  $CB$  соответственно. Описанные окружности треугольников  $AON$  и  $BOM$  пересекают  $\omega$  вторично в точках  $K$  и  $L$  соответственно, и пересекаются друг с другом вторично в точке  $X$ . Докажите, что точки  $C, K, X, L$  лежат на одной окружности.

7. Маша и Паша по очереди проводят диагонали в правильном 98-угольнике, начинает Маша. Разрешено проводить диагональ, если она не перпендикулярна ни одной из ранее проведенных диагоналей, а также пересекает хотя бы половину ранее проведенных диагоналей. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

8. Будем говорить, что точка  $A(x, y)$  больше точки  $B(x', y')$ , если  $x \geq x'$  и  $y \geq y'$ . Если же  $x \leq x'$  и  $y \leq y'$ , то будем говорить, что точка  $A$  меньше точки  $B$ . На координатной плоскости отметили несколько точек, обе координаты которых являются натуральными числами, не превосходящими  $n$ . Оказалось, что для каждой отмеченной точки количество точек, больших её, и количество точек, меньших её, отличаются не более, чем на 1. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено?

9. Найдите все вещественные числа  $x$  такие, что  $4x^5 - 7$  и  $4x^{13} - 7$  — точные квадраты.

10. Вдоль окружности расположено  $n$  монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Если две соседние монеты лежат одинаково (обе орлом или обе решкой), разрешается обе перевернуть. Сколько имеется вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга, применяя такие операции?

## 32. Матбой Профи-9 — Полупрофи-9

15 июля

1. Пусть  $n$  – натуральное число,

$$(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}.$$

Докажите, что  $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + \dots - a_{2n-1}^2 + a_{2n}^2 = a_n$ .

2. Пусть  $a_1, a_2, \dots$  – бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для всех натуральных чисел  $m$  и  $n$  число  $a_m a_n - 1$  делится на  $a_{m+n}$ . Докажите, что все члены последовательности, начиная с некоторого, равны 1.

3. На острове Антромортем живут 800 человек, каждый из которых – рыцарь или лжец. Массы жителей равны 2, 4, 8, ...,  $2^{800}$  в некотором неизвестном никому порядке. Колонизатор прибыл на остров с двухчашечными весами без гирь, которые показывают верный знак, если на весах рыцарей не меньше, чем лжецов, и противоположный, если лжецов на весах больше, чем рыцарей. Может ли он за 10 взвешиваний гарантированно определить самого тяжёлого жителя? (Во время взвешивания обе чаши весов не должны быть пусты.)

4. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  из вершины прямого угла  $C$  опущена высота  $CH$ . В треугольники  $ACH$  и  $BCH$  вписали окружности;  $O_1$  и  $O_2$  – их центры;  $P_1$  и  $P_2$  – их точки касания с  $AC$  и  $BC$ . Докажите, что прямые  $O_1P_1$  и  $O_2P_2$  пересекаются на  $AB$ .

5. Волшебной стране 100 городов. Некоторые из них соединены беспосадочными двухсторонними авиалиниями. Назовем город  $A$  *достойным внимания*, если при любой нумерации городов Волшебной страны числами 1, 2, ..., 100 найдётся город с номером  $m$ , до которого из  $A$  можно добраться ровно за  $m$  перелётов. Например, в маршруте  $A - B - A - B - A - B$  ровно 5 перелётов. Оказалось, что в Волшебной стране есть ровно  $k$  городов, достойных внимания. Докажите, что города Волшебной страны можно разбить на  $k + 2$  провинции так, чтобы авиалинии соединяли только города из разных провинций.

6. Для положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , произведение которых равно 1, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3 + 2b^2 + 2b + 4} + \frac{1}{b^3 + 2c^2 + 2c + 4} + \frac{1}{c^3 + 2a^2 + 2a + 4} \leq \frac{1}{3}.$$

7. Пусть  $\Gamma$  – описанная окружность треугольника  $ABC$ . Окружность  $\Omega$  касается стороны  $AB$  и касается окружности  $\Gamma$  в точке, лежащей с точкой  $C$  по одну сторону от  $AB$ . Биссектриса угла  $BCA$  пересекает  $\Omega$  в двух различных точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $\angle ABP = \angle QBC$ .

8. Саша хочет расставить в каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости по натуральному числу так, чтобы все числа были различны и для каждой клетки хотя бы в  $k$  соседних с ней по стороне или по углу клетках стояли числа, кратные числу в этой клетке. При каком наибольшем  $k$  такое возможно?

9. Вася выбрал натуральное  $m$  и хочет написать на волшебной доске натуральное число, которое доска будет преобразовывать по такому правилу: если в какой-то момент на доске оказалось число  $x < 2^m$ , через минуту оно заменится на число  $x^2 + 2^m$ , а если число  $x \geq 2^m$ , то через минуту оно уменьшится ровно вдвое. При каких  $m$  Вася может написать на доске такое число, что оно всегда будет оставаться целым?

10. На плоскости отмечено конечное множество точек. *Диском* назовём круг, построенный на отрезке, соединяющем две отмеченных точки, как на диаметре (круг содержит свою границу). Каким наименьшим числом дисков гарантированно удастся покрыть все отмеченные точки?

### 33. Матбой Профи-9 — Профи-10

15 июля

1. Сумма положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{3a^2 - a - b^2} + \frac{b^2}{3b^2 - b - c^2} + \frac{c^2}{3c^2 - c - a^2} \geq 3,$$

если известно, что все знаменатели положительные.

2. Даны  $n$  векторов с суммой ноль и точка  $C$ . Докажите, что их можно упорядочить  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  таким образом, чтобы все точки  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , где для всякого  $k$  выполнено  $CB_k = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$ , лежали внутри или на границе какого-нибудь угла с вершиной  $C$  и величиной  $60^\circ$ .

3. Найдите все такие многочлены  $P(x)$  вещественными коэффициентами, что

$$P(x)^2 + 1 = 4P(x^2 + 4x + 1).$$

4. Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $\angle ACP = \angle BCQ$  и  $\angle CBP = \angle ABQ$ . Точка  $Z$  — проекция точки  $P$  на прямую  $BC$ . Точка  $Q'$  симметрична точке  $Q$  относительно точки  $Z$ . Точки  $K$  и  $L$  выбраны на лучах  $AB$  и  $AC$  соответственно так, что  $Q'K \parallel QC$  и  $Q'L \parallel QB$ . Докажите, что  $\angle KPL = \angle BPC$ .

5. Саша нарисовал граф, вершинами которого являются все возможные последовательности из 0 и 1 длины 2019, а ребро между вершинами проводится, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одном месте. Назовём расстановку ненулевых чисел в вершинах этого графа  $k$ -гармонической, если для любой вершины сумма чисел в соседних с ней

вершинах в  $k$  раз больше числа в самой вершине. При каких вещественных  $k$  существует  $k$ -гармоническая расстановка чисел в вершинах этого графа?

6. Напомним, что *палиндромом* называется натуральное число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Например, 12321 — палиндром, а 1210 — нет. Существует ли натуральное число  $N > 1$  такое, что все его натуральные степени являются палиндромами?

7. На окружности  $S$  отмечены точки  $A$  и  $B$ . Касательные к окружности  $S$ , проведенные в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $C$ . Пусть  $M$  — середина отрезка  $AB$ . Окружность  $S_1$ , проходящая через точки  $M$  и  $C$ , вторично пересекает отрезок  $AB$  в точке  $D$  и окружность  $S$  — в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что касательные, проведенные к окружности  $S$  в точках  $K$  и  $L$ , пересекаются на отрезке  $CD$ .

8. Найдите все простые  $p$ , для которых существует ровно одно  $a \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  такое, что  $p$  делит  $a^3 - 3a + 1$ .

9. Вдоль окружности расположено  $n$  монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Если две соседние монеты лежат одинаково (обе орлом или обе решкой), разрешается обе перевернуть. Сколько имеется вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга, применяя такие операции?

10. В языке волков две буквы:  $\Phi$  и  $\Pi$ , любая конечная последовательность которых образует слово. Слово  $Y$  называется потомком слова  $X$ , если  $Y$  получается из  $X$  вычеркиванием некоторых букв (например, слово  $\Phi\Phi\Pi\Phi$  имеет 8 потомков:  $\Phi$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi\Phi$ ,  $\Phi\Pi$ ,  $\Pi\Phi$ ,  $\Phi\Phi\Pi$ ,  $\Phi\Pi\Phi$ ,  $\Phi\Phi\Phi$ ). При данном  $n$  определите, какое наибольшее число потомков может иметь  $n$ -буквенное слово языка волков.

### 34. Матбой Профи-9 — Профи-10 — преподаватели 15 июля

1. Сумма положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{3a^2 - a - b^2} + \frac{b^2}{3b^2 - b - c^2} + \frac{c^2}{3c^2 - c - a^2} \geq 3,$$

если известно, что все знаменатели положительные.

2. На плоскости проведены  $n > 10$  прямых общего положения. Докажите, что среди них есть прямая, с каждой стороны от которой не меньше  $\left\lceil \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rceil$  точек пересечения проведенных прямых (точки пересечения, расположенные на этой прямой, не учитываются).

3. Многочлены  $P(x)$  и  $Q(x)$  с вещественными коэффициентами таковы, что  $P(x) - P(y)$  делится на  $Q(x) - Q(y)$  как многочлены от двух переменных.

Докажите, что существует многочлен  $H(x)$  с вещественными коэффициентами такой, что  $P(x) = H(Q(x))$ .

4. Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $\angle ACP = \angle BCQ$  и  $\angle CBP = \angle ABQ$ . Точка  $Z$  — проекция точки  $P$  на прямую  $BC$ . Точка  $Q'$  симметрична точке  $Q$  относительно точки  $Z$ . Точки  $K$  и  $L$  выбраны на лучах  $AB$  и  $AC$  соответственно так, что  $Q'K \parallel QC$  и  $Q'L \parallel QB$ . Докажите, что  $\angle KPL = \angle BPC$ .

5. Саша нарисовал граф, вершинами которого являются все возможные последовательности из 0 и 1 длины 2019, а ребро между вершинами проводится, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одном месте. Назовём расстановку ненулевых чисел в вершинах этого графа  $k$ -гармонической, если для любой вершины сумма чисел в соседних с ней вершинах в  $k$  раз больше числа в самой вершине. При каких вещественных  $k$  существует  $k$ -гармоническая расстановка чисел в вершинах этого графа?

6. Дано натуральное число  $n > 10$ . Докажите, что ни для какого  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  число  $(2n)! + k$  не делится на  $n! + 1$ .

7. На окружности  $S$  отмечены точки  $A$  и  $B$ . Касательные к окружности  $S$ , проведенные в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $C$ . Пусть  $M$  — середина отрезка  $AB$ . Окружность  $S_1$ , проходящая через точки  $M$  и  $C$ , вторично пересекает отрезок  $AB$  в точке  $D$  и окружность  $S$  — в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что касательные, проведенные к окружности  $S$  в точках  $K$  и  $L$ , пересекаются на отрезке  $CD$ .

8. Для натурального  $n$ , не делящегося на 3, обозначим через  $C(n)$  наибольшее количество  $k$  целых чисел  $a_1, \dots, a_k$ , которые можно выбрать так, чтобы при любых индексах  $i$  и  $j$  и любом натуральном  $t$  число  $3^t a_i - a_j$  не делилось на  $n$ . Докажите, что число  $C(3d+1) + C(3d+2)$  нечётно при любом натуральном  $d$ .

9. Вдоль окружности расположено  $n$  монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Если две соседние монеты лежат одинаково (обе орлом или обе решкой), разрешается обе перевернуть. Сколько имеется вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга, применяя такие операции?

10. Дано натуральное число  $n$ . Алиса и Боб по очереди вписывают в клетки клетчатой доски  $2n \times 2n$  различные положительные числа, начинает Алиса. В каждую клетку можно вписать только одно число. После того как таблица заполнена, в каждой строке и в каждом столбце закрашивают клетку с наибольшим числом (одна клетка может быть закрашена несколько раз). Боб хочет, чтобы после заполнения всей таблицы было закрашено как можно больше клеток, а Алиса — как можно меньше. Сколько будет закрашено клеток в конце игры при правильной игре обоих игроков?

## 35. Серия 25. КЗВ: теория

16 июля

**Определение.** Пусть  $p$  — простое число,  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Говорят, что  $a \in \mathbb{F}_p$  является квадратичным вычетом по модулю  $p$ , если существует  $b \in \mathbb{F}_p$  такой, что  $a \equiv b^2 \pmod{p}$ . Иначе  $a$  называется квадратичным невычетом.

**Упражнение.** Существует  $\frac{p-1}{2}$  различных квадратичных вычетов по модулю  $p$ .

**Определение.** Символом Лежандра назовем выражение  $\left(\frac{a}{p}\right)$ , равное 1, если  $a$  — квадратичный вычет по модулю  $p$ ;  $-1$ , если  $a$  — квадратичный невычет по модулю  $p$ , и 0, если  $a \equiv 0 \pmod{p}$ .

1. Докажите, что

$$(a) \quad \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}; \quad (b) \quad \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right).$$

2. Поймем для каких простых  $p$  число  $r \not\equiv 0 \pmod{p}$  является квадратичным вычетом.

(a) Рассмотрим множество вычетов  $S = \{r \cdot 1, r \cdot 2, r \cdot 3, \dots, r \cdot \frac{p-1}{2}\}$ . Докажите, что для каждого ненулевого  $a \in \mathbb{F}_p$  ровно один из вычетов  $a, p-a$  содержится в  $S$ ;

(b) Отождествим каждый элемент  $S$  с целым числом из множества  $\{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ . Докажите, что  $\left(\frac{r}{p}\right) = (-1)^{\nu(p)}$ , где  $\nu(p)$  — количество элементов в  $S$ , больших  $\frac{p-1}{2}$ .

3. Докажите, что 2 является квадратичным вычетом по модулю  $p$  тогда и только тогда, когда  $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ .

4. Пусть  $p$  и  $q$  — различные простые нечетные числа. Рассмотрим прямоугольник на целочисленной решетке с вершинами в точках  $(1, 1)$ ,  $(1, \frac{q-1}{2})$ ,  $(\frac{p-1}{2}, 1)$ ,  $(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2})$ . Посчитав точки внутри и на границе этого прямоугольника, докажите, что

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[ \frac{iq}{p} \right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[ \frac{jp}{q} \right] = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}.$$

5. (a) Пусть  $p$  и  $q$  — различные простые нечетные числа. В условиях леммы Гаусса (задача 2b) для  $a = q$  докажите, что  $\nu(q) \equiv \sum_{i=1}^{(p-1)/2} \left[ \frac{iq}{p} \right]$ .

(b) **Квадратичный закон взаимности.** Пусть  $p, q$  — различные нечетные простые числа. Тогда выполнено равенство:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

6. Найдите

(a)  $\left(\frac{3}{239}\right)$ ; (b)  $\left(\frac{1009}{2017}\right)$ ; (c)  $\left(\frac{113}{967}\right)$ .

### 36. Серия 25. КЗВ: задачи, сюрприз:)

16 июля

1. Докажите, что простых чисел вида  $10k - 1$  бесконечно много.
2. Докажите, что число  $2^n + 1$  не имеет простых делителей вида  $8k + 7$ .
3. Дано  $k = 2^{2^n} + 1$ . Докажите, что  $k$  простое тогда и только тогда, когда  $k$  является делителем числа  $3^{\frac{k-1}{2}} + 1$ .
4. Найдите все натуральные числа  $n$ , для которых  $3^n - 1$  делится на  $2^n - 1$ .
5. Даны натуральные числа  $n$  и  $k$ . Оказалось, что  $\varphi(5^n - 1) = 5^k - 1$ . Докажите, что  $(n, k) > 1$ .
6. Последовательность  $\{x_n\}$  определена рекурсивно:  $x_1 = a$  при некотором натуральном  $a$ , а также  $x_{n+1} = 2x_n + 1$ . Пусть  $y_n = 2^{x_n} - 1$ . Какое максимальное количество подряд идущих простых чисел может быть в последовательности  $\{y_n\}$ ?
7. Решите уравнение  $x^3 - x + 9 = 5y^2$  в целых числах.
8. Докажите, что число  $5^n - 1$  не делится на  $2^n + 1$  ни при каком натуральном  $n$ .
9. Существуют ли нечётные натуральные  $a, b, c$  такие, что  $a^2b = b^2a + 1 + 7c^2$ ?

### 37. Серия 26. Разделяющие множества–2

17 июля

Сегодня мы докажем одно из ключевых утверждений в теории связности графов, а также выведем из него некоторые другие теоремы теории графов.

**Определение.** Граф  $G$  называется  $k$ -связным, если  $|G| > k$  и при удалении не более чем  $k - 1$  вершины граф не теряет связность.

**1. Теорема Геринга/Менгера.** В графе  $G$  выбраны подмножества вершин  $X$  и  $Y$ , возможно, пересекающиеся, в каждом из которых хотя бы  $k$  вершин. Известно, что в  $G$  не существует множества из менее чем  $k$  вершин, разделяющего  $X$  и  $Y$ . Тогда существует  $k$  непересекающихся простых путей из  $X$  в  $Y$ .

**Замечание.** Эти пути не должны иметь даже общих концов, путь может состоять из одной вершины. Например, если  $v \in X \cap Y$ , то  $v$  является путем из  $X$  в  $Y$ .

Доказательство будем проводить индукцией по количеству вершин в графе.

(а) Предположим, что существует множество  $R$  из  $k$  вершин, разделяющее  $X$  и  $Y$ . Рассмотрим граф  $G_x = G - (Y \setminus R)$ . Докажите, что в любом подмножестве вершин  $G_x$ , разделяющем  $X$  и  $R$  в новом графе, хотя бы  $k$  вершин.

(b) Таким образом, для графа  $G_x$  и множеств  $X$  и  $R$  выполнено предположение индукции. Проведя аналогичные рассуждения для графа  $G_y = G - (X \setminus R)$ , завершите переход индукции в условии пункта (а).

(c) Теперь предположим, что разделяющего множества из пункта (а) нет. Начнем выкидывать из графа  $G$  ребра до тех пор, пока выполнены условия теоремы. Пусть на очередном шаге при выкидывании ребра между вершинами  $x$  и  $y$  начинает существовать множество  $T$ , содержащее не более  $k - 1$  вершины, разделяющее  $X$  и  $Y$ . Тогда мы знаем, что  $T \cup \{xy\}$  разделяет  $X$  и  $Y$ , но при этом  $T \cup x$  — не разделяет. Какой вывод можно сделать?

(d) Завершите доказательство теоремы Геринга/Менгера.

**Замечание.** Таким образом, мы доказали, что для любых двух подмножеств вершин  $X$  и  $Y$  существует либо разделяющее множество из не более чем  $k - 1$  вершины, либо  $k$  непересекающихся путей. И то, и другое одновременно, очевидно, выполняться не может.

2. В стране  $n$  городов, некоторые из которых соединены двухсторонними авиалиниями. От страны отделились две республики  $A$  и  $B$ . Оказалось, что длина кратчайшего пути из городов республики  $A$  до городов республики  $B$  больше  $\sqrt{n}$ . Докажите, что существует множество  $S$  из не более чем  $\sqrt{n}$  городов такое, что любой путь из  $A$  в  $B$  проходит через  $S$ .

3. **Теорема Менгера.** Пусть  $x$  и  $y$  — несмежные вершины графа  $G$ . Известно, что в любом подмножестве, разделяющем  $x$  и  $y$ , хотя бы  $k$  вершин. Докажите, что существует  $k$  различных простых путей из  $x$  и  $y$ , не имеющих общих вершин, отличных от  $x$  и  $y$ .

**Замечание.** В подавляющем большинстве случаев теорема Менгера применяется в ослабленном виде из предыдущей задачи.

4. Пусть  $k$  — натуральное число. В графе  $G$  между вершинами  $u$  и  $v$  существует ровно  $2k - 1$  простых путей. Причем каждая из оставшихся вершин участвует не более чем двух таких путях. Докажите, что существует  $k$  простых путей из  $u$  в  $v$  таких, что каждая из оставшихся вершин участвует не более чем в одном таком пути.

5. Пусть  $G$  —  $k$ -связный граф.

(а) Докажите, что для любых двух вершин  $x$  и  $y$  существует  $k$  различных простых путей из  $x$  и  $y$ , не имеющих общих вершин, отличных от  $x$  и  $y$ .

(b) Докажите, что для любых  $k$  вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.



6. Докажите, что для любых трех вершин  $x, y, z$  двусвязного графа  $G$  существует простой путь из  $x$  в  $z$ , проходящий через  $y$ .

7. Пусть  $A, B$  — два множества вершин в ориентированном (возможно, с кратными ребрами и петлями) конечном графе  $G$ . Назовем множество  $C \subset A$  хорошим, если из  $C$  в  $B$  существует  $|C|$  непересекающихся по вершинам путей. Докажите, что все максимальные по включению хорошие множества содержат одинаковое количество элементов.

### 38. Серия 27. Счет в комплексных числах–2: теория 17 июля

1. (a) Рассмотрим ненулевые вектора  $u$  и  $v$ . Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — комплексные числа, соответствующие  $u$  и  $v$  соответственно. Докажите, что  $u$  и  $v$  коллинеарны тогда и только тогда, когда  $z_1/z_2 = \overline{z_1/z_2}$  (другими словами  $z_1/z_2$  — вещественное).

(b) Рассмотрим точки  $A(a), B(b), C(c), D(d)$  на комплексной плоскости. Докажите, что  $AB \parallel CD$  тогда и только тогда, когда  $\frac{a-b}{c-d} = \frac{\overline{a-b}}{\overline{c-d}}$ .

(c) Докажите, что точки  $A(a), B(b), C(c)$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $\frac{a-c}{b-c} = \frac{\overline{a-c}}{\overline{b-c}}$ .

**Замечание.** Понятно, что точки  $a, b, c$  можно менять местами в предыдущем уравнении. При приведении к общему знаменателю, получается уравнение

$$a(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b}) = 0,$$

которым **не** рекомендуется пользоваться в дальнейшем.

2. (a) Рассмотрим ненулевые вектора  $u$  и  $v$ . Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — комплексные числа, соответствующие  $u$  и  $v$  соответственно. Докажите, что  $u \perp v$  тогда и только тогда, когда  $z_1/z_2 = -\overline{z_1/z_2}$  (другими словами  $z_1/z_2$  — чисто мнимое).

(b) Рассмотрим точки  $A(a), B(b), C(c), D(d)$  на комплексной плоскости. Докажите, что  $AB \perp CD$  тогда и только тогда, когда  $\frac{a-b}{d-c} = -\frac{\overline{a-b}}{\overline{d-c}}$ .

**Замечание.** Подобные уравнения находят широкое применение при работе с единичной окружностью.

3. Рассмотрим единичную окружность  $\omega$  с центром в 0 на комплексной плоскости. Понятно, что точка  $Z(z)$  лежит на  $\omega$  тогда и только тогда, когда  $z\bar{z} = 1$  или же  $\bar{z} = \frac{1}{z}$ .

(a) Рассмотрим хорду  $A(a)B(b)$  окружности  $\omega$ . Докажите, что точка  $Z(z)$  лежит на прямой  $AB$  тогда и только тогда, когда  $z + \bar{z} \cdot ab = a + b$ .

(b) Докажите, что точка  $Z(z)$  лежит на касательной к  $\omega$  в точке  $A$  тогда и только тогда, когда  $z + \bar{z} \cdot a^2 = 2a$ .

**Замечание.** Уравнение касательной к окружности совпадает с уравнением хорды в случае, когда точки  $A$  и  $B$  совпадают.

(c) Рассмотрим точку  $C(c)$ . Докажите, что проекция точки  $C$  на прямую  $AB$  имеет комплексную координату  $\frac{a + b + c - \bar{c}ab}{2}$ .

(d) На **единичной окружности с центром в 0** выбраны точки  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $C(c)$ . Докажите, что ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  имеет комплексную координату  $a + b + c$ .

### 39. Серия 27. Счет в комплексных числах–2: задачи 17 июля

**Упражнение.** Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $O$  — центр его описанной окружности, а  $H$  — точка пересечения высот. Обозначим через  $D$  точку, симметричную точке  $O$  относительно прямой  $AC$ . Докажите, что  $OD = BH$ .

**Решение.** Не нарушая общности, пусть описанная окружность треугольника  $ABC$  является единичной с центром в нуле. Тогда точка пересечения высот треугольника  $ABC$  имеет комплексную координату  $a + b + c$ . Заметим, что середина отрезка  $AC$  является также серединой отрезка  $OD$ , откуда  $d + 0 = a + c$ , то есть  $d = a + c$ . Тогда вектору  $\overrightarrow{OD}$  соответствует комплексное число  $a + c$ , а вектору  $\overrightarrow{BH}$  — комплексное число  $h - b = a + c$ , то есть  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BH}$ , откуда  $OD = BH$ .

**Упражнение.** Докажите, что если средние линии четырехугольника равны, то его диагонали перпендикулярны, и обратно.

**Решение.** Расположим четырехугольник на комплексной плоскости. Пусть  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $C(c)$ ,  $D(d)$  — комплексные координаты его вершин. Пусть  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  соответственно. Тогда

$$KM^2 = \frac{1}{4}(a + b - c - d)(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c} - \bar{d}).$$

Аналогично  $LN^2 = \frac{1}{4}(b + c - a - d)(\bar{b} + \bar{c} - \bar{a} - \bar{d})$ . То есть условие равенства средних линий равносильно равенству

$$(a + b - c - d)(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c} - \bar{d}) = (b + c - a - d)(\bar{b} + \bar{c} - \bar{a} - \bar{d});$$

$$2(a\bar{b} + b\bar{a} + c\bar{d} + d\bar{c}) = 2(a\bar{d} + d\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b}), \quad a\bar{b} + b\bar{a} + c\bar{d} + d\bar{c} = a\bar{d} + d\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b}.$$

С другой стороны перпендикулярность диагоналей равносильна равенству

$$(a - c)(\bar{b} - \bar{d}) + (\bar{a} - \bar{c})(b - d) = 0.$$

После несложного раскрытия скобок получаем

$$a\bar{b} + b\bar{a} + c\bar{d} + d\bar{c} - b\bar{c} - c\bar{b} - a\bar{d} - d\bar{a} = 0, \quad a\bar{b} + b\bar{a} + c\bar{d} + d\bar{c} = a\bar{d} + d\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b}.$$

То есть мы получили то же самое условие.

**Упражнение.** Касательные в концах  $A$  и  $B$  диаметра окружности пересекаются с третьей касательной в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что произведение  $AX \cdot BY$  не зависит от положения третьей касательной.

**Решение.** Не нарушая общности, пусть окружность из условия является единичной с центром в  $O$ . Точки  $A(a)$  и  $B(b)$  лежат на этой окружности, причем  $b = -a$ , а третья касательная проходит через точку  $C(c)$  данной окружности. Запишем систему уравнений для точки  $x$ :

$$x + \bar{x}a^2 = 2a, \quad x + \bar{x}c^2 = 2c,$$

откуда  $x = \frac{2ac^2 - 2ca^2}{c^2 - a^2} = \frac{2ac}{a + c}$ . Аналогично  $y = \frac{2bc}{b + c}$ . Теперь заметим, что

$$(x - a)(y - b) = \frac{a(c - a)}{c + a} \cdot \frac{b(c - b)}{c + b} = \frac{a(c - a)}{c + a} \cdot \frac{-a(c + a)}{c - a} = -a^2,$$

то есть  $|AX \cdot BY| = |-a^2| = 1$ .

### Для самостоятельного решения

**1. Прямая Эйлера.** Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $O$  — центр описанной окружности,  $M$  — точка пересечения медиан,  $H$  — точка пересечения высот. Докажите, что точки  $O, M, H$  лежат на одной прямой, причем  $\overline{MH} = 2\overline{OM}$ .

**2.** Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух его противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон.

**3.** Дан треугольник  $ABC$ . Обозначим через  $O$  центр его описанной окружности, через  $R$  — ее радиус, через  $H$  — точку пересечения высот треугольника  $ABC$ . Докажите, что

$$OH^2 = 9R^2 - AB^2 - BC^2 - CA^2.$$

**4.** Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $O$  — центр его описанной окружности, а  $H$  — точка пересечения высот. Обозначим через  $D$  точку, симметричную точке  $O$  относительно прямой  $AC$ . Докажите, что  $OD = BH$ .

**5. (a)** Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$ . Обозначим через  $H_D$  ортоцентр треугольника  $ABC$ . Аналогично определим точки  $H_A, H_B, H_C$ . Докажите, что прямые  $AH_A, BH_B, CH_C, DH_D$  пересекаются в одной точке.

**(b)** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром в  $O$ . Обозначим через  $H_D$  ортоцентр треугольника  $ABC$ . Пусть  $N_D$  — середина отрезка

$OH_D$ . Аналогично определим точки  $H_A, H_B, H_C, N_A, N_B, N_C$ . Докажите, что прямые  $AN_A, BN_B, CN_C, DN_D$  пересекаются в одной точке.

6. Точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $AH$  — его высота. Точка  $P$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $A$  на прямую  $CO$ . Докажите, что прямая  $HP$  проходит через середину отрезка  $AB$ .

7. Известно, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  имеют общую описанную окружность. Оказалось, что  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ . Доказать, что перпендикуляры, опущенные из вершин одного треугольника на прямые, содержащие соответственные стороны другого, пересекаются в одной точке, лежащей на данной окружности.

8. Касательная в точке  $C$  к окружности пересекает в точке  $M$  прямую, содержащую диаметр  $AB$  этой окружности. Перпендикуляр к  $AB$  в точке  $M$  пересекает прямые  $AC$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$ . Докажите, что точка  $M$  — середина отрезка  $DE$ .

9. Пусть точки  $A, B, C$  лежат на окружности, а прямая  $b$  касается этой окружности в точке  $B$ . Из точки  $P$ , лежащей на прямой  $b$ , опущены перпендикуляры  $PA_1$  и  $PC_1$  на прямые  $AB$  и  $BC$  соответственно (точки  $A_1$  и  $C_1$  лежат на отрезках  $AB$  и  $BC$ ). Докажите, что  $A_1C_1 \perp AC$ .

10. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с диаметром  $AC$ . Точки  $K$  и  $M$  — проекции вершин  $A$  и  $C$  соответственно на прямую  $BD$ . Через точку  $K$  проведена прямая, параллельная  $BC$  и пересекающая  $AC$  в точке  $P$ . Докажите, что угол  $KPM$  — прямой.

11. Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — основания высот треугольника  $ABC$  из вершин  $A, B, C$  соответственно. обозначим через  $A_B, A_C$  проекции точки  $A_1$  на прямые  $AB$  и  $AC$  соответственно. Аналогично определим точки  $B_A, B_C, C_A, C_B$ . Докажите, что  $A_BA_C = B_AB_C = C_AC_B$ .

12. В неравнобедренном остроугольном треугольнике  $ABC$  точки  $C_0$  и  $B_0$  — середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $O$  — центр описанной окружности,  $H$  — точка пересечения высот. Прямые  $BH$  и  $OC_0$  пересекаются в точке  $P$ , а прямые  $CH$  и  $OB_0$  — в точке  $Q$ . Оказалось, что четырёхугольник  $OPHQ$  — ромб. Докажите, что точки  $A, P$  и  $Q$  лежат на одной прямой.

13. Остроугольный треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\omega$  с центром в точке  $O$ . Прямая  $\ell$ , параллельная прямой  $AO$ , пересекает отрезки  $AB, BC$  и луч  $CA$  в точках  $D, E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника  $AFD$ , середина отрезка  $AE$  и точка  $O$  лежат на одной прямой.

## 40. Серия 28. Рождественская теорема Ферма

18 июля

**Упражнение.** Дано натуральное число  $m$ . Известно, что для некоторого натурального  $n$  число  $2^n \cdot m$  представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел. Докажите, что тогда и  $m$  представимо в таком виде.

**Решение.** Пусть  $2^n \cdot m = x^2 + y^2$ . Заметив, что  $x$  и  $y$  одной четности, получаем

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{2} = 2^{n-1} \cdot m.$$

Спускаясь далее аналогично, получаем требуемое.

Осознаем, что подобная замена была вполне естественной. Действительно, рассмотрим уравнение  $a^2 + b^2 = 2$  (в нашем случае  $a = b = 1$ ). Разложив в кольце  $\mathbb{Z}[i]$ , получаем  $(a+bi)(a-bi) = 2$ . С другой стороны  $(x+yi)(x-yi) = 2^n \cdot m$ . У нас возникает желание по аналогии с уравнением Пелля поделить одно решение на другое, чтобы получить  $2^{n-1} \cdot m$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{x+yi}{a+bi} \cdot \frac{x-yi}{a-bi} &= (x+yi) \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}i\right) \cdot \overline{(x+yi)} \overline{\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}i\right)} = \\ &= \left(\frac{xa+yb}{2} + \frac{ya-xb}{2}i\right) \cdot \left(\frac{xa+yb}{2} - \frac{ya-xb}{2}i\right). \end{aligned}$$

Мы воспользовались, тем, что  $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}i$  является обратным к числу  $a+bi$ . Осталось лишь заметить, что в паре  $\left(\frac{xa+yb}{2}, \frac{ya-xb}{2}\right)$  оба числа являются целыми.

Подобная техника спуска достаточно естественна и применяется при попытке обобщения Рождественской теоремы Ферма. Теперь временно забудем про все вышесказанное.

**1. Рождественская теорема Ферма.** Нечетное простое число  $p$  представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

(a) Докажите, что если  $p = a^2 + b^2$  для целых  $a$  и  $b$ , то  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ;

(b) Пусть  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Обозначим через  $i$  вычет по модулю  $p$  такой, что  $i^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . Пусть каждое из чисел  $a$  и  $b$  бегает в диапазоне  $0, 1, 2, 3, \dots, [\sqrt{p}]$ . Докажите, что найдутся различные пары  $(a_1, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$  из данного диапазона такие, что  $a_1 - ib_1 \equiv a_2 - ib_2 \pmod{p}$ ;

(c) Завершите доказательство рождественской теоремы Ферма.

**2. (a)** Два числа представляются в виде суммы двух квадратов целых чисел. Докажите, что их произведение представляется в виде двух квадратов.

(b) Докажите, что натуральное число  $N$  представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда каждое простое число вида  $4k + 3$  входит в разложение  $n$  на простые множители в четной степени.

3. Докажите, что уравнение  $x^2 + y^2 = z^5 + z$  имеет бесконечно много целых решений, в которых  $x$ ,  $y$  и  $z$  попарно взаимно просты.

4. Какие простые числа представимы

(a) в виде  $x^2 + 2y^2$  для целых  $x$  и  $y$ ?

*Подсказка.* Сначала поймите, по каким простым модулям  $-2$  является квадратичным вычетом. Затем попробуйте сделать то же, что и в первой задаче. Из рассуждения должно получиться, что  $p = x^2 + 2y^2$  или  $2p = x^2 + 2y^2$ .

(b) в виде  $x^2 + 3y^2$  для целых  $x$  и  $y$ ?

5. Какие простые числа представимы в виде (a)  $x^2 - 2y^2$ ; (b)  $x^2 - 7y^2$  для целых  $x$  и  $y$ ?

6. Какие простые числа представимы в виде  $x^2 + 5y^2$  для целых  $x$  и  $y$ ?

7. Какие простые числа представимы в виде  $x^2 + xy + y^2$  для целых  $x$  и  $y$ ?

8. Докажите, что не существует целого  $n$  такого, что  $n^7 + 7$  является квадратом целого числа.

9. Все числа, которые можно представить в виде суммы квадратов двух взаимно простых натуральных чисел, выписаны в порядке возрастания. Докажите, что для любого  $n$  в этой последовательности можно найти  $n$  последовательных нечётных членов.

## 41. Серия 29. Полувписанная окружность

18 июля

**Определение.** Пусть треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\Omega$ . Окружность  $S_A$  называется *полувписанной*, если она касается сторон  $AB$  и  $AC$  и окружности  $\Omega$  внутренним образом.

Во всех следующих задачах будем использовать следующие обозначения, если в условиях не оговорено иное.

Треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\Omega$ . Окружность  $S_A$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно и «меньшей» дуги  $BC$  в точке  $T_A$ . Пусть  $B_1$ ,  $C_1$  — середины «меньших» дуг  $AC$  и  $AB$  окружности  $\Omega$ ,  $W$  — середина «большой» дуги  $BC$ ,  $E$  — середина «меньшей» дуги  $BC$ ,  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .  $D$  и  $Q$  — точки касания вписанной и невписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ , со стороной  $BC$  соответственно.

1. Докажите следующие утверждения:

(a) Прямые  $T_AK$  и  $T_AL$  проходят через точки  $C_1$  и  $B_1$  соответственно.

(b) Прямая  $B_1C_1$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AI$ .

- (с)  $B_1C_1$  делит пополам отрезки  $AK$  и  $AL$ .
- (d) Прямая  $T_AA$  содержит симедиану треугольника  $B_1C_1T_A$ . (Следовательно, четырёхугольник  $B_1AC_1T_A$  — гармонический.)
- (е) Прямая  $T_AW$  содержит медиану треугольника  $B_1C_1T_A$ .
- (f) Точка  $I$  лежит на прямой  $T_AW$ .
- (g) Прямая  $KL$  — касательная к окружностям, описанным около  $BIC$  и  $T_AIE$ .
- (h) Прямые  $CC_1$  и  $BB_1$  являются касательными к окружностям  $T_AVKI$  и  $T_ACLI$  соответственно.
- (i) Аналогично определим точки  $T_B$  и  $T_C$ . Докажите, что прямые  $AT_A$ ,  $BT_B$  и  $CT_C$  пересекаются в одной точке, являющейся центром гомотетии, переводящей вписанную окружность в описанную.
- (j) Прямые  $KL$ ,  $BC$  и  $T_AE$  пересекаются в одной точке. Далее эту точку будем обозначать через  $R_A$ .
- (k) Аналогично определим точки  $R_B$  и  $R_C$ . Докажите, что точки  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$  лежат на одной прямой.
- (l)  $T_A$  — центр поворотной гомотетии, переводящий треугольник  $BKI$  в треугольник  $ILC$ .
- (m)  $\angle BT_AD = \angle ABC$ ,  $\angle BT_AA = \angle CT_AD$ . (Следовательно,  $AB$  касается описанной окружности треугольника  $BT_AD$ .)
- Подсказка.* Возможно, стоит рассмотреть точку  $A'$  на окружности  $\Omega$  такую, что  $A'A \parallel BC$ .
- (n) Окружность  $T_ADE$  пересекает сторону  $BC$  в точке на прямой  $AI$ .
2. Прямая, проходящая через вершину  $A$ , пересекает сторону  $BC$  и окружность  $\Omega$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Тогда точки  $X$ ,  $Y$ ,  $T_A$  и  $D$  лежат на одной окружности.
3. Касательные, проведённые к описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$  в точках  $A$  и  $C$ , пересекаются в точке  $Z$ .  $AA_1$ ,  $CC_1$  — высоты. Прямая  $A_1C_1$  пересекает прямые  $ZA$ ,  $ZC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников  $ABC$  и  $XYZ$  касаются.
4.  $S$  — вторая точка пересечения окружности  $IWE$  с прямой, проходящей через  $I$  и параллельной  $BC$ . Докажите, что прямые  $AQ$  и  $ES$  пересекаются на окружности  $\Omega$ .
5. Пусть перпендикуляр, восстановленный в точке  $B$  к прямой  $AB$ , пересекается с описанной окружностью треугольника  $ABC$  в точке  $U$ , и с биссектрисой угла  $BAC$  в точке  $Z$ . Докажите, что длина касательной, проведённой из точки  $U$  к полувписанной окружности, равна длине отрезка  $UZ$ .

6. Пусть  $F$  — точка пересечения прямых  $AT_A$  и  $KL$ . Докажите, что  $\angle BFK = \angle CFL$ .

7. Точка  $X$  лежит на «меньшей» дуге  $BC$ ,  $I_1$  и  $I_2$  — инцентры треугольников  $BAH$  и  $CAH$  соответственно. Докажите, что  $XI_1I_2T_A$  — вписанный.

8. Касательные из точки  $X$  к вписанной окружности треугольника  $ABC$  пересекают  $BC$  в точках  $U_1$  и  $U_2$ . Докажите, что  $XU_1U_2T_A$  — вписанный.

## 42. Серия 30. Аналитическая теория чисел

19 июля

1. Назовем натуральное число  $n$  *хорошим*, если оно делится на два последовательных нечетных натуральных числа, больших 1. Докажите, что для любого натурального  $n > 1000$  среди чисел от 1 до  $n$  не более  $\frac{n}{5}$  являются хорошими.

2. Обозначим через  $S = \{1, 4, 8, 9, 16, \dots\}$  множество всех точных степеней (не меньших 2) натуральных чисел. Запишем их в виде возрастающей последовательности  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ . Докажите, что найдётся бесконечно много  $n$  таких, что 9999 делит  $a_{n+1} - a_n$ .

3. Докажите, что для любых  $n$  попарно различных дробей из интервала  $(0, 1)$  сумма их знаменателей не меньше, чем  $\frac{1}{3}n^{3/2}$ .

4. Докажите, что существует бесконечно много чисел вида  $n^2 + 1$ , свободных от квадратов.

5. Существуют ли 1000 попарно непересекающихся арифметических прогрессий с натуральными членами таких, что каждое натуральное число, большее  $10^{100}$ , содержится в одной из них, и каждая прогрессия содержит хотя бы одно простое число, большее 1000?

6. Найдите все многочлены  $P(x)$  с действительными коэффициентами такие, что его значения в любом репьюните (числе, записанном одними единицами) также является репьюнитом.

7. Назовём последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  натуральных чисел *медленно возрастающей*, если она возрастает, но для любого  $n$  выполняется неравенство  $a_n < 9000n$ . Докажите, что в любой медленно возрастающей последовательности существует бесконечное количество индексов  $i$  таких, что  $a_i$  делит НОК всех предыдущих членов последовательности.

## 43. Серия 31. Многочлены в комбинаторике–2

19 июля

1. Докажите, что натуральное число  $p > 2$  является простым тогда и только тогда, когда любой  $p$ -угольник с равными углами и рациональными длинами сторон является правильным.



2. Погода в мае месяце бывает двух типов: хорошая и не очень. Учёные установили две закономерности:

- 1 мая погода всегда не очень;
- для  $2 \leq k \leq 31$  погода  $k$ -го мая следующего года не очень тогда и только тогда, когда в текущем году погода  $k$  и  $k - 1$  мая отличалась.

В каком году впервые погода в течение всего мая будет в точности такой же, как в 2007?

3. Последовательность различных натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots$  такова, что для любого натурального  $n$  выполнено  $a_n \leq 4.999n$ .

(а) Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$  таких, что сумма цифр числа  $a_n$  не делится на 5.

(б) Верно ли утверждение пункта (а), если  $a_n \leq 5n$  для всех натуральных  $n$ ?

4. Изначально в каждой клетке клетчатой плоскости лежит монета решкой вверх. Разрешается выбрать квадрат  $2 \times 2$  и перевернуть в нём все монеты, кроме верхней правой. Можно ли добиться того, чтобы через конечное число ходов ровно две монеты лежали орлом вверх?

5. На бесконечной клетчатой плоскости выбрали строку и заполнили её нулями, лишь в одну клетку поставив единицу. Строки ниже выбранной последовательно заполняются числами по следующему правилу: каждое число в новой строке — это сумма трёх чисел, стоящих в трёх соседних (по стороне или диагонали) клетках старой строки. Докажите, что в столбце, содержащем единичку исходной строки, нет чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.

#### 44. Серия 32. Счет в комплексных числах—3: теория 19 июля

**Определение.** На комплексной плоскости отмечены точки  $A(a), B(b), C(c), D(d)$ . Их *двойным отношением* называется комплексное число  $\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$ .

1. (а) На комплексной плоскости даны два ориентированных угла  $\angle ABC$  и  $\angle DEF$ , меньшие  $180^\circ$ . Эти углы равны тогда и только тогда, когда

$$\frac{c-b}{a-b} : \frac{f-e}{d-e} = \overline{\frac{c-b}{a-b}} : \overline{\frac{f-e}{d-e}}.$$

(б) На комплексной плоскости отмечены точки  $A(a), B(b), C(c), D(d)$ , не лежащие на одной прямой. Докажите, что точки  $A, B, C, D$  лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \overline{\frac{a-c}{b-c}} : \overline{\frac{a-d}{b-d}}.$$

**Замечание.** В пункте (b) мы доказали, что точки  $A, B, C, D$  лежат на одной прямой или окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно. В двойном отношении точки можно менять местами как угодно.

**Подобие.** В некоторых задачах удобно вычислять координаты из подобных треугольников. Например, пусть на комплексной плоскости расположены подобные **одинаково ориентированные** треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Мы хотим выразить координату точки  $c_1$  через остальные. Имеем  $\frac{c-a}{b-a} = \frac{c_1-a_1}{b_1-a_1}$ , далее находим  $c_1$  из соответствующего линейного уравнения.

Поговорим об удобных способах ввести систему отсчета.

**Полезная система отсчета 0.** Описанная окружность треугольника  $ABC$  является единичной с центром в 0, вершины треугольника имеют координаты  $a, b, c$ .

**Полезная система отсчета 1.** Вписанная окружность треугольника  $ABC$  является единичной с центром в 0. Пусть точки касания окружности со сторонами имеют комплексные координаты  $x, y$  и  $z$ . В заведенной системе отсчета

- вершины исходного треугольника имеют координаты  $\frac{2xy}{x+y}, \frac{2yz}{y+z}, \frac{2zx}{z+x}$ .

**Важный прием.** Иногда полезно вводить комплексные координаты не точек, а «углов». Этим мы сейчас и займемся.

**Полезная система отсчета 2.** Описанная окружность треугольника  $ABC$  является единичной с центром в 0. Обозначим координату вершины  $A$  через  $a$ . Выберем комплексные числа  $k$  и  $l$  так, чтобы  $ak^2 = b, al^2 = c$ , а также  $ak$  и  $al$  являлись серединами «меньших дуг»  $AB$  и  $AC$  соответственно. В заведенной выше системе отсчета

- середина «меньшей» дуги  $BC$  имеет координату  $-akl$ ;
- середины «больших» дуг  $AB, AC$  и  $BC$  имеют координаты  $-ak, -al, ak$  соответственно;
- центр вписанной имеет координату  $ak + al - ak$ ;
- центры невписанных окружностей, касающихся сторон  $AB, AC$  и  $BC$  имеют координаты  $ak + ak - al, al + ak - ak, -ak - ak - al$  соответственно.

## 45. Серия 32. Счет в комплексных числах–3: задачи 19 июля

**Упражнение.** Докажите, что середины сторон треугольника  $ABC$ , основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности (окружности девяти точек треугольника).

**Решение.** Пусть описанная окружность треугольника  $ABC$  является единичной с центром в 0. Тогда середины сторон имеют координаты  $m = \frac{a+b}{2}$ ,

$n = \frac{b+c}{2}$  и  $k = \frac{c+a}{2}$ . Докажем, что каждая из оставшихся шести точек лежит на данной окружности. Сначала разберемся с основаниями высот. Достаточно проверить для основания высоты из  $A$  на  $BC$ , имеющему координату  $h_a = \frac{a+b+c-\bar{a}bc}{2}$ . Имеем

$$\frac{h_a - m}{n - m} : \frac{h_a - k}{n - k} = \frac{(c - \bar{a}bc)(b - a)}{(b - \bar{a}bc)(c - a)} = \frac{(ac - bc)(b - a)}{(ab - cb)(c - a)} = \frac{c(b - a)^2}{b(c - a)^2}.$$

Это двойное отношение действительно вещественно, так как

$$\frac{\overline{c(b-a)^2}}{b(c-a)^2} = \frac{\frac{1}{c}(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})^2}{\frac{1}{b}(\frac{1}{c} - \frac{1}{a})^2} = \frac{(b-a)^2 c^2 a^2 b}{(c-a)^2 b^2 a^2 c} = \frac{c(b-a)^2}{b(c-a)^2}.$$

Теперь проведем проверку для середин отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами. Как мы помним, ортоцентр треугольника, вписанного в единичную окружность, имеет координаты  $a+b+c$ . Поэтому середина отрезка  $AH$  имеет координату  $x = \frac{2a+b+c}{2}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{x - m}{n - m} : \frac{x - k}{n - k} &= \frac{(a+c)(b-a)}{(a+b)(c-a)}, \quad \frac{\overline{(a+c)(b-a)}}{\overline{(a+b)(c-a)}} = \frac{(\frac{1}{a} + \frac{1}{c})(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})}{(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(\frac{1}{c} - \frac{1}{a})} = \\ &= \frac{(a+c)(b-a)a^2bc}{(a+b)(c-a)a^2bc} = \frac{(a+c)(b-a)}{(a+b)(c-a)}. \end{aligned}$$

**Упражнение.** Докажите, что  $IO^2 = R^2 - 2Rr$ , где  $I, O$  — центры вписанной окружности и описанной окружностей соответственно, а  $R$  и  $r$  — их радиусы.

**Решение.** Введем систему отсчета 2. Тогда центр вписанной окружности имеет комплексную координату  $ak + al - ak l$ . Проекция центра вписанной окружности на прямую  $BC$  вычисляется по формуле проекции на хорду единичной окружности  $\frac{ak^2 + al^2 + ak + al - ak l^2 - ak^2 l + ak l}{2} = \frac{ak^2 + al^2 + ak + al - ak l^2 - ak^2 l}{2}$ . Тогда, поскольку  $R = 1$ , мы знаем, что  $2Rr$  совпадает с длиной вектора

$$\begin{aligned} (ak^2 + al^2 + ak + al - ak l^2 - ak^2 l) - 2(ak + al - ak l) &= \\ &= a(k+l)^2 - (a + ak l)(k+l) = -a(1-k)(1-l)(k+l). \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} IO^2 - R^2 &= (ak + al - ak l)\overline{(ak + al - ak l)} - 1 = \\ &= \frac{(k+l - kl)(k+l - 1) - kl}{kl} = -\frac{(1-k)(1-l)(k+l)}{kl}. \end{aligned}$$

Вспоминая, что  $|a| = |k| = |l| = 1$ , получаем требуемое.

**Упражнение.** В четырехугольнике  $ABCD$  отмечены точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Оказалось, что прямая  $MN$  образует равные углы со сторонами  $AD$  и  $BC$ . Докажите, что  $AD \parallel BC$  или  $AD = BC$ .

**Решение.** Как обычно расположим четырехугольник на комплексной плоскости. Пусть  $x = a - d$ ,  $y = b - c$ . Тогда  $m - n = \frac{x + y}{2}$ . Поскольку прямая  $MN$  образует равные углы с  $AD$  и  $BC$ , мы получаем, что при их одинаковой ориентации  $AD \parallel BC$ . Иначе  $\frac{x + y}{2x} : \frac{2y}{x + y} = \frac{(x + y)^2}{4xy} = \frac{(\bar{x} + \bar{y})^2}{4\bar{x}\bar{y}}$ . Приведя к общему знаменателю и раскрыв скобки, имеем  $x^2\bar{x}\bar{y} + y^2\bar{x}\bar{y} = \bar{x}^2xy + \bar{y}^2xy$ . Переносим все в одну сторону и раскладывая на множители, имеем  $(x\bar{x} - y\bar{y})(x\bar{y} - y\bar{x}) = 0$ . Если первая скобка равна 0, то  $AD = BC$ , иначе  $x/y = \bar{x}/\bar{y}$ , откуда  $AD \parallel BC$ .

### Для самостоятельного решения

1. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность.

(а) Докажите, что ортоцентры треугольников  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$  лежат на одной окружности;

(б) Докажите, что эта окружность равна описанной окружности треугольника  $ABC$ .

2. В треугольнике  $ABC$  ( $AB < BC$ )  $I$  — центр вписанной окружности  $M$  — середина  $AC$ ,  $N$  — середина дуги  $ABC$  описанной окружности треугольника. Докажите, что  $\angle IMA = \angle INB$ .

3. Докажите, что  $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ , где  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $R$  — ее радиус,  $I_a$  — центр внеписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ ,  $r_a$  — радиус этой окружности.

4. На окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ , выбрана точка  $K$ . Оказалось, что прямая  $CK$  пересекает отрезок  $AD$  в такой точке  $M$ , что  $AM/MD = 2$ . Пусть  $O$  — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника  $OKD$  лежит на описанной окружности треугольника  $COD$ .

5. Дан параллелограмм  $ABCD$  с тупым углом  $A$ . Точка  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на  $BC$ . Продолжение медианы  $CM$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную около него окружность в точке  $K$ . Докажите, что точки  $K$ ,  $H$ ,  $C$  и  $D$  лежат на одной окружности.

6. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $O$  центр описанной окружности треугольника  $BIC$ . Докажите, что  $\angle BDO = \angle CEO$ .

*Подсказка.* Не умаляя общности, треугольник  $ABC$  положительно ориентирован. Введите систему отсчета 1. Пусть  $\angle ABC = \beta$ . Тогда комплексное число  $d/e$  отвечает за поворот на угол  $180^\circ - \beta$  против часовой стрелки. Чтобы найти координату  $O$ , достаточно вспомнить задачу 4(b) из серии 19.

7. В остроугольном неравностороннем треугольнике  $ABC$  проведены медиана  $AM$  и высота  $AH$ . На прямых  $AB$  и  $AC$  отмечены точки  $Q$  и  $P$  соответственно так, что  $QM \perp AC$  и  $PM \perp AB$ . Описанная окружность треугольника  $PMQ$  пересекает прямую  $BC$  вторично в точке  $X$ . Докажите, что  $BH = CX$ .

8. Биссектриса угла  $A$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает прямые  $BC$ ,  $CD$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $CPQ$  лежит на описанной окружности треугольника  $BCD$ .

9. На плоскости фиксирован остроугольный треугольник  $ABC$  с наибольшей стороной  $BC$ . Пусть  $PQ$  — произвольный диаметр его описанной окружности, причём точка  $P$  лежит на меньшей дуге  $AB$ , а точка  $Q$  — на меньшей дуге  $AC$ . Точки  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на прямую  $AB$ , из точки  $Q$  на прямую  $AC$  и из точки  $A$  на прямую  $PQ$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $XYZ$  лежит на фиксированной окружности (не зависящей от выбора точек  $P$  и  $Q$ ).

10. На сторонах  $AB$  и  $AC$  остроугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $MN$  проходит через центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$ . Обозначим через  $Q$  и  $P$  середины отрезков  $CM$  и  $BN$  соответственно. Докажите, что  $\angle POQ = \angle BAC$ .

11. В треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $AA_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $I$ . Прямая, проходящая через точку  $B$  параллельно  $AC$  пересекает лучи  $AA_1$  и  $CC_1$  в точках  $A_2$  и  $C_2$  соответственно. Точка  $O_a$  — центр описанной окружности треугольника  $AC_1C_2$ , точка  $O_c$  — центр описанной окружности треугольника  $CA_1A_2$ . Докажите, что  $\angle O_aBO_c = \angle AIC$ .

12. Пусть  $O$  — центр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $T$  — центр описанной окружности треугольника  $AOC$ ,  $M$  — середина  $AC$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  выбраны точки  $D$  и  $E$  соответственно так, что  $\angle BDM = \angle BEM = \angle B$ . Докажите, что  $BT \perp DE$ .

13. Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $A'$  — середина стороны  $BC$ ,  $B_c$  — проекция вершины  $B$  на биссектрису угла  $ACB$ ,  $C_b$  — проекция вершины  $C$  на биссектрису угла  $ABC$ . Обозначим через  $A_0$  центр описанной окружности треугольника  $A'B_cC_b$ . Аналогично определены точки  $B_0$ ,  $C_0$ . Докажите, что ортоцентр треугольника  $A_0B_0C_0$  совпадает с центром вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

## 46. Серия 33. Гауссовы числа и другие расширения 20 июля

Сегодня мы изучим некоторые полезные теоретико-числовые свойства колец  $\mathbb{Z}[i]$  (кольцо гауссовых чисел),  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  и  $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ .

Мы можем воспринимать данные кольца как «расширения» кольца  $\mathbb{Z}$  целых чисел.

**Естественный вопрос.** Какие свойства, аналогичные кольцу  $\mathbb{Z}$  есть у данных колец?

Для начала хочется научиться сравнивать числа в этих кольцах между собой. Для этого полезно вспомнить понятие нормы.

**Определение.** Нормой гауссова числа  $z = a + bi$  называется

$$N(z) = z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

**Определение.** Нормой числа  $z = a + b\sqrt{-2}$  называется  $N(z) = a^2 + 2b^2$ .

**Определение.** Нормой числа  $z = a + b\omega$ , где  $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$  называется  $N(z) = a^2 + ab + b^2$ . Если переписать элемент кольца в виде  $a_1 + b_1\sqrt{-3}$  для рациональных  $a_1$  и  $b_1$ , то  $N(z) = a_1^2 + 3b_1^2$ .

**Замечание.** Норма является мультипликативной функцией, то есть для любых  $z_1, z_2$  выполнено  $N(z_1 \cdot z_2) = N(z_1) \cdot N(z_2)$ .

Норма нужна нам для того, чтобы научиться «сравнивать» между собой гауссовы числа. Из этого естественным образом возникает следующее свойство.

**Деление с остатком.** В следующих кольцах возможно деление с остатком, то есть любых чисел  $z_1$  и  $z_2$ , где  $z_2 \neq 0$ , существуют числа  $u$  и  $r$  из того же кольца такие, что  $z_1 = z_2u + r$  и  $N(r) < N(z_2)$ .

- Кольцо гауссовых чисел  $\mathbb{Z}[i]$  с нормой  $N(a + bi) = a^2 + b^2$ .
- Кольцо  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  с нормой  $N(a + b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$ .
- Кольцо  $\mathbb{Z}[\omega]$ , где  $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ , с нормой  $N(a + b\omega) = a^2 + ab + b^2$ .

**Замечание.** Мы взяли кольцо  $\mathbb{Z}[\omega]$ , а не  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  для того, чтобы существовало деление с остатком.

**Упражнение для желающих.** Покажите, что кольца  $\mathbb{Z}[\omega]$ , где  $\omega = \frac{1+\sqrt{-7}}{2}$  или  $\frac{1+\sqrt{-11}}{2}$  также допускают деление с остатком относительно стандартной нормы.

**Соглашение.** В дальнейшем всегда  $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ .

**Определение.** Наибольшим общим делителем двух чисел  $z_1, z_2$  из кольца  $\mathbb{Z}[i]$  ( $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ,  $\mathbb{Z}[\omega]$ ) называется их общий делитель, имеющий наибольшую норму.

**Замечание.** Наибольший общий делитель определен с точностью до домножения на обратимый элемент.

**Теорема о линейном представлении НОД.** Для любых чисел  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$  ( $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ,  $\mathbb{Z}[\omega]$ ) существуют числа  $u, v \in \mathbb{Z}[i]$  ( $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ,  $\mathbb{Z}[\omega]$ ) такие, что  $(z_1, z_2) = uz_1 + vz_2$ .

**Определение.** Число  $z$  в кольце  $\mathbb{Z}[i]$  ( $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ,  $\mathbb{Z}[\omega]$ ) называется простым, если оно не раскладывается в произведение двух чисел из кольца с меньшей нормой.

**Основная теорема арифметики.** Любое ненулевое число из кольца  $\mathbb{Z}[i]$  ( $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ,  $\mathbb{Z}[\omega]$ ) можно разложить в произведение простых чисел из данного кольца, причем это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей и домножения на обратимые элементы кольца.

**Полезный контрпример.** Кольцо  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  не удовлетворяет основной теореме арифметики, поскольку  $21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$ .

Теперь немного поговорим про простые элементы в наших кольцах. Заметим, что не все простые числа  $\mathbb{Z}$  являются простыми числами в наших кольцах.

**Теорема.** (а) Целое число  $z > 0$  является простым в кольце  $\mathbb{Z}[i]$  тогда и только тогда, когда оно простое в  $\mathbb{Z}$  и  $z \equiv 3 \pmod{4}$ .

(b) Целое число  $z > 0$  является простым в кольце  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  тогда и только тогда, когда оно простое в  $\mathbb{Z}$  и  $z \equiv 5 \pmod{8}$  или  $z \equiv 7 \pmod{8}$ .

(с) Целое число  $z > 0$  является простым в кольце  $\mathbb{Z}[\omega]$  тогда и только тогда, когда оно простое в  $\mathbb{Z}$  и  $z = 2$  или  $z \equiv 1 \pmod{3}$ .

**Теорема.** Если  $N(z)$  является простым числом в  $\mathbb{Z}$ , то  $z$  является простым числом в  $\mathbb{Z}[i]$  ( $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ,  $\mathbb{Z}[\omega]$ ).

**Замечание.** Как мы понимаем, обратное утверждение неверно.

**Упражнение.** Взаимно простые в совокупности целые числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что  $a^2 + b^2 = c^2$ . Докажите, что существуют такие целые числа  $u$  и  $v$ , что  $a = u^2 - v^2$ ,  $b = 2uv$  или наоборот.

### Для самостоятельного решения

1. Рассмотрим число  $4 = 2 \cdot 2 = (1 - \sqrt{-3}) \cdot (1 + \sqrt{-3})$ . То есть мы получили противоречие с основной теоремой арифметики для  $\mathbb{Z}[\omega]$ ? Где мы вас обманываем?

2. (а) Докажите, что каждое простое число представляется в виде  $x^2 + y^2$  для целых  $x$  и  $y$  не более чем одним способом с точностью до знаков  $x$  и  $y$ .

(b) Верно ли, что каждое простое число представляется в виде  $x^2 + 2y^2$  для целых  $x$  и  $y$  не более чем одним способом с точностью до знаков  $x$  и  $y$ ?

(с) Верно ли, что каждое простое число представляется в виде  $x^2 + 3y^2$  для целых  $x$  и  $y$  не более чем одним способом с точностью до знаков  $x$  и  $y$ ?

3. Опишите все решения уравнения  $a^2 + b^2 = c^3$  в натуральных числах.

4. (а) Решите в целых числах уравнение  $x^2 + 4 = y^3$ .

(b) Решите в целых числах уравнение  $y^2 + 2 = x^3$ .

*Указание.* Это уравнение нужно решать уже в  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ .

5. Докажите, что уравнение  $x^n = y^2 + 1$  не имеет решений в натуральных числах при натуральном  $n > 1$ .

6. Решите в целых числах уравнение  $x^2 + 2 = y^n$ .

7. Натуральные числа  $x, y, z$  таковы, что  $xy = z^2 + 1$ . Докажите, что найдутся такие целые  $a, b, c, d$ , что  $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2, z = ac + bd$ .

8. Даны взаимно простые целые  $a$  и  $b$  разной четности. Известно, что  $a^2 + 3b^2$  является кубом целого числа. Докажите, что существуют целые  $s$  и  $t$  такие, что  $a = s^3 - 9st^2, 3t(s^2 - t^2)$ .

## 47. Заключительная олимпиада

21 июля

### Довывод

1. Столбцы таблицы  $n \times n$  пронумеровали числами от 0 до  $n - 1$  слева направо, а строки — числами  $n, n + 1, \dots, 2n - 1$  снизу вверх. Таким образом, каждая клетка задаётся номером строки и столбца, в котором она стоит. (Нижняя левая клетка —  $(n, 0)$ .) В каждую из клеток  $(i, j)$  записали число  $\frac{1}{i-j}$ .

Рассматриваются все возможные пути из левого верхнего угла доски в правый нижний, где каждый ход делается на одну клетку вниз или на одну клетку вправо. Назовем *ценой* пути произведение чисел в клетках этого пути (не включая концы). Чему равна суммарная стоимость всех таких путей?

2. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$  и высота  $CH$ . Точка  $H_1$  симметрична точке  $H$  относительно прямой  $BL$ , а точка  $H_2$  симметрична точке  $H_1$  относительно прямой  $CH$ . Оказалось, что четырехугольник  $CH_1LH_2$  — вписанный. Докажите, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный.

3. Квадрат  $ABCD$  разрезан на прямоугольники так, что ни в какой вершине не сходятся 4 прямоугольника. Все вершины раскрасили в два цвета так, что в любом прямоугольнике противоположные по диагонали вершины разного цвета. Известно, что вершины  $A$  и  $C$  одного цвета. Докажите, что вершины  $B$  и  $D$  тоже одного цвета.

4. Дан квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + ax - 1$  с действительным  $a$ . Саша нашёл 50 действительных решений уравнения  $f(\dots f(x)) = x$  (47 букв  $f$ ). Докажите, что у этого уравнения есть ещё хотя бы 46 действительных решений.

5. Даны целое  $k > 1$  и простое  $p$  такие, что число  $n = kp + 1$  составное. Оказалось, что число  $2^{n-1} - 1$  делится на  $n$ . Докажите, что  $n < 2^k$ .



## Вывод

6. Каждая клетка квадрата  $10 \times 10$  покрашена в один из 60 цветов. Для какого наибольшего натурального  $k$  можно утверждать, что найдутся хотя бы  $k$  клетчатых квадратов  $2 \times 2$ , все 4 клетки каждого из которых покрашены в разные цвета?

7. В неравнобедренный треугольник  $ABC$  вписана окружность с центром в точке  $I$ . Прямые  $BI$  и  $CI$  пересекают его описанную окружность  $\omega$  в точках  $B_1$  и  $C_1$ . Прямая, проходящая через  $I$  параллельно  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $C_2$ , сторону  $AC$  — в точке  $B_2$ , а также окружность  $\omega$  в точках  $X$  и  $Y$ , так что  $C_2$  — между  $Y$  и  $I$ . Докажите, что касательная к  $\omega$ , проведенная в точке  $A$ , а также общие внешние касательные к окружностям  $(B_1B_2X)$  и  $(C_1C_2Y)$  пересекаются в одной точке.

8. Пусть даны целые неотрицательные числа  $a, b, c$ . Треугольник на клетчатой плоскости с вершинами в узлах сетки со стороной 1 назовём  $(a, b, c)$ -треугольником, если на одной его стороне расположено ровно  $a$  узлов (не считая вершин), на другой стороне — ровно  $b$  узлов, а на третьей стороне — ровно  $c$  узлов. Найдите количество троек  $(a, b, c)$  таких, что  $a \leq b \leq c$  и минимальная возможная площадь  $(a, b, c)$ -треугольника равна 9 000 000.

## 48. Вопросы к зачету

21 июля

## Комбинаторика

1. Diamond-лемма, доказательство. Задача 2.2.
2. Применение Diamond-леммы. Задачи 2.3, 2.4, 2.5.
3. Числовые веса. Задачи 7.1, 7.6, 7.8.
4. Числовые веса. Задачи 7.3, 7.5, 7.9.
5. Разделяющие множества. Связанные определения. Задачи 14.1, 14.2, 14.5.
6. Работа с разделяющими множествами. Задачи 14.4, 14.6, 14.7.
7. Асимптотические соображения в комбинаторике. Задачи 20.2, 20.3, 20.6.
8. Лемма Минковского, доказательство.
9. Многочлены в комбинаторике. Задачи 22.3, 22.4, 22.6.
10. Многочлены в комбинаторике. Полезная лемма. Задачи 22.5, 31.1.
11. Многочлены в комбинаторике. Упражнение 22.1. Задачи 22.2, 22.7.
12. Теорема Геринга/Менгера. Доказательство.
13. Теорема Геринга/Менгера. Лемма Холла. Задачи 26.2, 26.3.

14. Теорема Геринга/Менгера. Задачи **26.5, 26.6**.
15. Многочлены в комбинаторике над нестандартным полем. Задачи **31.2, 31.4**.

## Алгебра и Теория чисел

16. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона. Интерполяция многочлена большой степени по небольшому количеству точек. Совпадение многочлена со своим интерполяционным многочленом по достаточному количеству точек. Единственность интерполяционного многочлена не очень большой степени.
17. Сложное — сумма простого: интерполяционный многочлен в форме Лагранжа, существование в Китайской Теореме об Остатках, задача **16.3**.
18. Коэффициент при  $x^n$  в интерполяционном многочлене Лагранжа. Задача **8.6**.
19. Определение кольца  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ , норма. Обратимые элементы. Описание всех решений уравнений Пелля при заданном фундаментальном решении.
20. Решение уравнения  $x^2 - 2y^2 = -1$  в целых числах. Задача **11.4**.
21. Уравнение Пелля. Существование нетривиального решения.
22. Преобразование квадратичной формы. Задачи **10.5(d), 11.7**.
23. Системы вычетов. Задачи **18.2, 18.3, 18.7**.
24. Подъем по Виету. Задачи **21.2, 21.6**.
25. Спуск по Виету. Задачи **21.1, 21.3**.
26. Квадратичный закон взаимности. Доказательство.
27. Рождественская теорема Ферма. Задачи **28.1, 28.2, 28.4**.
28. Обобщения рождественской теоремы Ферма. Задачи **28.5, 28.7**.
29. Кольца  $\mathbb{Z}[i]$ ,  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ,  $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ . Обратимые элементы, деление с остатком, теорема о линейном представлении мод. Основная теорема арифметики.
30. Неоднозначность разложения на простые в кольце  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ . Элемент с простой нормой является простым. Задача **33.2**.
31. Классификация Пифагоровых троек. Задачи **33.4, 33.5**.

## Начало математического анализа

32. Бесконечные десятичные дроби: отношение порядка, принцип супремума.
33. Лемма о вложенных отрезках: вывод из принципа супремума.

**34.** Предел последовательности: определение, единственность, ограниченность, арифметические операции (сложение с доказательством; умножение, переход к обратному и деление — только формулировки).

**35.** Теорема о монотонной ограниченной последовательности (теорема Вейерштрасса).

**36.** Сумма ряда: определение. Задача **6.7** (теорема Римана об условно сходящихся рядах).

**37.** Асимптотическое поведение функций:  $o$ -символика, асимптотическая эквивалентность многочлена и его старшего члена, асимптотическое сравнение многочлена и показательной функции. Задачи **12.9** и **12.10b**).

**38.** Сходящиеся последовательности из целых чисел. Задача **15.1**.

**39.** Аналитическая теория чисел. Задачи **30.1, 30.2, 30.4**.

## Геометрия

**40.** Двойные отношения, определение для четверки точек на прямой, четверки прямых, корректность определения. Проецирование четверки прямых на прямую. Задача **5.1**.

**41.** Гармонические четверки. Задачи **5.3, 5.5**.

**42.** Применение двойных отношений. Задачи **5.4a, 5.7, 5.9**.

**43.** Двойное отношение четверки точек на окружности и корректность определений. Проецирование через точку на окружности. Гармонические четырёхугольники, равносильность определений. Задачи **13.1, 13.2**.

**44.** Другие способы проецирования. Задачи **13.4a, 13.4b, 13.7**.

**45.** Двойные отношения на прямых и на окружности. Задачи **13.3b, 13.6**.

**46.** Инверсия + симметрия. Задачи **23.1, 23.2, 23.5, 23.6**.

**47.** Полувписанная окружность, основные свойства. Задачи **29.1, 29.2**.

**48.** Полувписанная окружность. Задачи **23.3, 29.3**.

**49.** Комплексные числа в геометрии. Задачи **19.1, 19.2, 19.7**.

**50.** Комплексные числа в геометрии. Задачи **19.4, 19.8**.

**51.** Комплексные числа в геометрии. Выбор системы отсчета. Задачи **19.10, 19.11**.

**52.** Комплексные числа в геометрии. Критерии параллельности, перпендикулярности. Уравнение прямой. Задача **27.2**.

**53.** Комплексные числа в геометрии. Система отсчета, связанная с описанной окружностью. Уравнение хорды, уравнение касательной, формула проекции на хорду, формула ортоцентра. Задачи **27.1, 27.5**.

**54.** Комплексные числа в геометрии. Двойное отношение четверки точек. Критерий равенства углов, меньших  $180^\circ$ , критерий «вписанности». Задачи **32.1, 32.5.**

**55.** Комплексные числа в геометрии. Система отсчета с единичной вписанной окружностью. Подобие одинаково/противоположно ориентированных треугольников. Задача **32.6.**

**56.** Комплексные числа в геометрии. Система отсчета с одной вершиной треугольника, единичной описанной окружностью и углами поворотов, координаты основных точек. Задача **32.2.**

**57.** Комплексные числа в геометрии. Задачи **32.8, 32.9.**



