

Серия 8, линейное движение

7 июля

Определение. Предположим, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ определена точка $A(t)$, вектор $\bar{a}(t)$ или прямая $l(t)$. Будем говорить, что объекты $A(t)$, $\bar{a}(t)$ или $l(t)$ *линейно зависят от t* (или *двигаются линейно*), если существует такой вектор \bar{v} , что

$$A(t) = A(0) + t \cdot \bar{v}, \quad \bar{a}(t) = \bar{a}(0) + t \cdot \bar{v}, \quad l(t) = l(0) + t \cdot \bar{v}.$$

Свойства

- 1) Вектор, соединяющий две линейно движущиеся точки, движется линейно.
- 2) Середина отрезка, соединяющего две линейно движущиеся точки, движется линейно.
- 3) Параллельная проекция линейно движущейся точки на неподвижную прямую движется линейно.
- 4) Прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку, движется линейно.
- 5) Точка пересечения линейно движущихся прямых движется линейно.

Задачи

1. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD .
2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. На отрезках BC_1 и AB_1 отмечены точки P и Q такие, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1 .

Определение. Определителем матрицы 3×3 вида $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ называется выражение

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Предложение

- а) Если две линейно движущиеся точки совпадают при двух значениях параметра t , то они совпадают всегда.
- б) Если три линейно зависящих от t прямые пересекаются в одной точке при двух значениях параметра t , то они всегда пересекаются в одной точке.
- в) Если линейно движущиеся векторы перпендикулярны при трёх значениях параметра t , то они всегда перпендикулярны.
- г) Если линейно движущиеся векторы коллинеарны при трёх значениях параметра t , то они всегда коллинеарны.

д) Если существуют три момента времени t , когда три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой, то они всегда лежат на одной прямой.

3. Прямая Гаусса. На плоскости проведены четыре прямые общего положения. Докажите, что середины отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся прямых, лежат на одной прямой.

4. Диагонали выпуклого четырёхугольника перпендикулярны. Докажите, что перпендикуляры из середин двух смежных сторон к противоположным сторонам пересекаются на диагонали.

5. На сторонах BC, CA, AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечены точки P, X, Y соответственно так, что $PX \parallel AB, PY \parallel CA$. Точка T — середина дуги BC окружности (ABC) . Докажите, что $TP \perp XY$.

6. а) Дана фиксированная точка A . Точки B и C треугольника ABC движутся линейно из точки A в одном направлении по прямым, проходящим через A . Докажите, что центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC движутся линейно.

б) Даны фиксированные точки A и B . Точка C линейно движется по прямой AC . Докажите, что центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC движутся линейно.

7. Пусть на сторонах BA и BC треугольника ABC выбраны точки A_0 и C_0 соответственно, а точки M и M_0 — середины отрезков AC и A_0C_0 . Докажите, что если $AA_0 = CC_0$, то прямая MM_0 параллельна биссектрисе угла ABC .

8. Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих внеписанных окружностей в точках A_1 и B_1 . Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и CBV_1 . Докажите, что A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C .