

29. Полувписанная окружность

18 июля

Определение. Пусть треугольник ABC вписан в окружность Ω . Окружность S_A называется *полувписанной*, если она касается сторон AB и AC и окружности Ω внутренним образом.

Во всех следующих задачах будем использовать следующие обозначения, если в условиях не оговорено иное.

Треугольник ABC вписан в окружность Ω . Окружность S_A касается сторон AB и AC в точках K и L соответственно и «меньшей» дуги BC в точке T_A . Пусть B_1, C_1 — середины «меньших» дуг AC и AB окружности Ω , W — середина «большой» дуги BC , E — середина «меньшей» дуги BC , I — центр вписанной окружности треугольника ABC . D и Q — точки касания вписанной и невписанной окружности, касающейся стороны BC , со стороной BC соответственно.

1. Докажите следующие утверждения:

- (a) Прямые $T_A K$ и $T_A L$ проходят через точки C_1 и B_1 соответственно.
- (b) Прямая $B_1 C_1$ — серединный перпендикуляр к отрезку AI .
- (c) $B_1 C_1$ делит пополам отрезки AK и AL .
- (d) Прямая $T_A A$ содержит симедиану треугольника $B_1 C_1 T_A$. (Следовательно, четырёхугольник $B_1 A C_1 T_A$ — гармонический.)
- (e) Прямая $T_A W$ содержит медиану треугольника $B_1 C_1 T_A$.
- (f) Точка I лежит на прямой $T_A W$.
- (g) Прямая KL — касательная к окружностям, описанным около BIC и $T_A I E$.
- (h) Прямые CC_1 и BB_1 являются касательными к окружностям $T_A B K I$ и $T_A C L I$ соответственно.
- (i) Аналогично определим точки T_B и T_C . Докажите, что прямые AT_A , BT_B и CT_C пересекаются в одной точке, являющейся центром гомотетии, переводящей вписанную окружность в описанную.
- (j) Прямые KL , BC и $T_A E$ пересекаются в одной точке. Далее эту точку будем обозначать через R_A .
- (k) Аналогично определим точки R_B и R_C . Докажите, что точки R_A , R_B и R_C лежат на одной прямой.
- (l) T_A — центр поворотной гомотетии, переводящий треугольник $B K I$ в треугольник $I L C$.
- (m) $\angle B T_A D = \angle ABC$, $\angle B T_A A = \angle C T_A D$. (Следовательно, AB касается описанной окружности треугольника $B T_A D$.)

Подсказка. Возможно, стоит рассмотреть точку A' на окружности Ω такую, что $A'A \parallel BC$.

- (n) Окружность $T_A D E$ пересекает сторону BC в точке на прямой AI .

2. Прямая, проходящая через вершину A , пересекает сторону BC и окружность Ω в точках X и Y соответственно. Тогда точки X , Y , T_A и D лежат на одной окружности.

3. Касательные, проведённые к описанной окружности остроугольного треугольника ABC в точках A и C , пересекаются в точке Z . AA_1 , CC_1 — высоты. Прямая $A_1 C_1$ пересекает прямые ZA , ZC в точках X и Y соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются.

4. S — вторая точка пересечения окружности $I W E$ с прямой, проходящей через I и параллельной BC . Докажите, что прямые AQ и ES пересекаются на окружности Ω .

5. Пусть перпендикуляр, восстановленный в точке B к прямой AB , пересекается с описанной окружностью треугольника ABC в точке U , и с биссектрисой угла BAC в точке Z . Докажите, что длина касательной, проведённой из точки U к полувписанной окружности, равна длине отрезка UZ .

- 6. Пусть точка F — пересечение прямых AT_A и KL . Докажите, что $\angle B F K = \angle C F L$.

7. Точка X лежит на «меньшей» дуге BC , I_1 и I_2 — инцентры треугольников BAX и CAX соответственно. Докажите, что $X I_1 I_2 T_A$ — вписанный.

8. Касательные из точки X к вписанной окружности треугольника ABC пересекают BC в точках U_1 и U_2 . Докажите, что $X U_1 U_2 T_A$ — вписанный.