

Серия 1, Комплексные числа

3 июля

Определение. Модулем $|z|$ комплексного числа z называется длина вектора \overrightarrow{OZ} , а аргументом $\arg z$ ненулевого числа z — ориентированный угол между положительным направлением действительной оси и вектором \overrightarrow{OZ} .

1. Изобразите на комплексной плоскости числа: $1, i, 1 + i, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Докажите, что:
 - а) $|z|^2 = z\bar{z}$;
 - б) $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2 ;
 - в) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
 - г) модуль произведения (частного) комплексных чисел равен произведению (частному) модулей.

3. Изобразите на комплексной плоскости следующие множества:

- а) $|z - i| = 1$; б) $1 < |z - 1 + 2i| \leq 3$; в) $\frac{|z-2i|}{|z+1|} = 1$;
- г) $|iz - 1| > |z - 1|$; д) $|\pi - \arg z| \leq \frac{\pi}{4}$; е) $|\arg(z - i)| \leq \frac{\pi}{4}$.

Определение. Запись $|z|(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, где $\varphi = \arg z$, называется тригонометрической формой комплексного числа z .

4. Докажите, что при произведении (делении) комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются (делятся), а аргументы складываются (вычитаются).

5. **Формула Муавра.** Докажите, что если $z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, то для $n \in \mathbb{N}$ верно

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi).$$

6. Вычислите $\frac{(1-i)^7(-\sqrt{3}+i)^{10}}{(1+i)^{15}}$.

Определение. Число w называется корнем n -ой степени $\sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z , если $w^n = z$.

7. а) Вычислите все корни $\sqrt{1}, \sqrt[3]{1}, \sqrt[4]{1}$. Изобразите их на комплексной плоскости.
 б) Выведите формулу для нахождения всех значений корня $\sqrt[n]{1}$. Как эти корни расположены на комплексной плоскости?
 в) Выведите формулу для нахождения всех значений корня $\sqrt[n]{z}$ в тригонометрической форме. Как эти корни расположены на комплексной плоскости?
8. Найдите все значения $\sqrt[4]{1+i}$ и изобразите их на комплексной плоскости.
9. Решите уравнение $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
10. Найдите а) сумму; б) произведение всех корней $\sqrt[n]{1}$.

11. а) Докажите следующие формулы:

$$\cos nx = C_n^0 \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots$$

$$\sin nx = C_n^1 \sin x \cos^{n-1} x - C_n^3 \sin^3 x \cos^{n-3} x + C_n^5 \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots$$

б) Вычислите $C_{2025}^0 - C_{2025}^2 + C_{2025}^4 - \dots - C_{2025}^{2022} + C_{2025}^{2024}$.

12. Докажите следующие равенства:

$$\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0,$$

$$\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1.$$

13. Вычислите $\frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 44^\circ}$.