

6. Упражнения и задачи к лекции по анализу

3 июля

1. Последовательности $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ сходятся. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right\}$$

2. Пусть X и Y два ограниченных сверху числовых множества. Будем называть их суммой Z множество состоящее из всевозможных сумм $x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$. Докажите, что $\sup Z = \sup X + \sup Y$. Верно ли, что $\sup X \cdot Y = \sup X \cdot \sup Y$?

3. Последовательность x_n такова, что в ней встречаются все дроби вида $\frac{1}{k}$ ровно по одному разу. Верно ли, что у этой последовательности обязательно есть предел?

4. Чему может быть равен предел частного двух бесконечно малых последовательностей?

5. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел, стремящаяся к нулю. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ сходится.

7. Последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ такова, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ — нет. Докажите, что существует такая перестановка σ натуральных чисел, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ равна 2024.



Just two integers!

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$



The limits of infinite convergent
Cauchy sequences of rational numbers

$$\mathbb{R} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} a(n) \mid a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N. |a(n) - a(N)| < \varepsilon \right\}$$



Just two real numbers!

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$