

27. Комплексные числа в геометрии–2: теория

17 июля

1. (а) Рассмотрим ненулевые вектора u и v . Пусть z_1 и z_2 — комплексные числа, соответствующие u и v соответственно. Докажите, что u и v коллинеарны тогда и только тогда, когда $z_1/z_2 = \overline{z_1/z_2}$ (другими словами z_1/z_2 — вещественное).

(б) Рассмотрим точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ на комплексной плоскости. Докажите, что $AB \parallel CD$ тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{c-d} = \frac{\overline{a-b}}{\overline{c-d}}$.

(с) Докажите, что точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-c}{b-c} = \frac{\overline{a-c}}{\overline{b-c}}$.

Замечание. Понятно, что точки a , b , c можно менять местами в предыдущем уравнении. При приведении к общему знаменателю, получается уравнение

$$a(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b}) = 0,$$

которым **не** рекомендуется пользоваться в дальнейшем.

2. (а) Рассмотрим ненулевые вектора u и v . Пусть z_1 и z_2 — комплексные числа, соответствующие u и v соответственно. Докажите, что $u \perp v$ тогда и только тогда, когда $z_1/z_2 = -\overline{z_1/z_2}$ (другими словами z_1/z_2 — чисто мнимое).

(б) Рассмотрим точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ на комплексной плоскости. Докажите, что $AB \perp CD$ тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{d-c} = -\frac{\overline{a-b}}{\overline{d-c}}$.

Замечание. Подобные уравнения находят широкое применение при работе с единичной окружностью.

3. Рассмотрим единичную окружность ω с центром в 0 на комплексной плоскости. Понятно, что точка $Z(z)$ лежит на ω тогда и только тогда, когда $z\bar{z} = 1$ или же $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

(а) Рассмотрим хорду $A(a)B(b)$ окружности ω . Докажите, что точка $Z(z)$ лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $z + \bar{z} \cdot ab = a + b$.

(б) Докажите, что точка $Z(z)$ лежит на касательной к ω в точке A тогда и только тогда, когда $z + \bar{z} \cdot a^2 = 2a$.

Замечание. Уравнение касательной к окружности совпадает с уравнением хорды в случае, когда точки A и B совпадают.

(с) Рассмотрим точку $C(c)$. Докажите, что проекция точки C на прямую AB имеет комплексную координату $\frac{a+b+c-\bar{c}ab}{2}$.

(д) На единичной окружности с центром в 0 выбраны точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$. Докажите, что ортоцентр H треугольника ABC имеет комплексную координату $a+b+c$.