

## 12. Асимптотики и порядки роста

8 июля

Цель этого листочка — поговорить об асимптотическом поведении функции, их порядках роста.

Когда возникает вопрос об описании поведения функции вблизи некоторой точки (или бесконечности), говорят, что интересуются *асимптотикой* или *асимптотическим поведением* функции в окрестности этой точки.

В рамках этого листочка мы в основном рассматриваем стремление к бесконечности, а функции будут определены на множестве натуральных чисел (т.е. по сути — последовательности).

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуют с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

**Определение.** Говорят, что *функция  $f$  бесконечно малая по сравнению с  $g$* , и пишут  $f = o(g)$  (читается «о-малое от  $g$ »), если существует функция  $\alpha$  такая, что  $\alpha(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $f(n) = \alpha(n) \cdot g(n)$ .

**Комментарий.** Запись  $o(f)$  означает какую-то функцию из целого класса функций. Поэтому гораздо корректней было бы писать  $g \in o(f)$ , но так мы потеряем кучу удобств.

**0<sub>1</sub>.** Осознайте, что означает запись  $o(f) + o(f) = o(f)$ , и докажите это утверждение.

**Комментарий.** Запись  $o(f)$  подразумевает наличие стремления чего-то куда-то (у нас  $n \rightarrow \infty$ ).

**0<sub>2</sub>.** Осознайте, что тут написано:  $o(f) = f \cdot o(1)$ .

**Определение.** Говорят, что функции  $f$  и  $g$  *асимптотически эквивалентны*, и пишут  $f \sim g$ , если  $f(n) = g(n) \cdot (1 + o(1))$ .

**1.** Пусть  $P(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_0$ .

а) Докажите, что  $P(n) \sim a_s n^s$ . *Строгое написание «старший член является главным слагаемым».*

б) Докажите, что если  $a_s > 0$ , то найдётся  $N > 1$  такое, что при всех  $n > N$  выполнено  $P(n) > 0$ .

**Комментарий.** Обратите ещё раз внимание, что мы говорим про относительную малость оставшихся слагаемых, а не абсолютную: понятно, что  $P(n) - a_s n^s$  может быть очень большим по модулю. Поэтому никаких «примерно равно» в качестве строгих доказательств!

**Недоопределение.** Если  $f$  и  $g$  — бесконечно большие функции (т.е. обе стремятся к  $+\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ) и  $g = o(f)$ , то говорят, что  $f$  *имеет более высокий порядок роста, чем  $g$* .

**Комментарий.** Я не нашёл общепринятое определение для этого термина. Можно говорить «асимптотически больше», можно говорить «асимптотически сильнее». Лучше никогда не говорить «растёт быстрее».

**0<sub>3</sub>.** Вспомните пример последовательностей  $a_n$  и  $b_n$  таких, что  $a_n$  «растёт быстрее», чем  $b_n$ , но для которых  $a_n < b_n$  для каждого натурального  $n$ .

Если  $g(n) = f(n) \cdot \alpha(n)$ , где  $\alpha(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то по определению предела для всех *достаточно больших*  $n$   $|\alpha(n)| < 1$ , откуда  $|g(n)| < |f(n)|$ .

**2.** Докажите, что любая показательная функция имеет больший порядок роста (при стремлении к бесконечности), чем любой многочлен.

**3.** Упорядочьте в порядке возрастания порядков роста на бесконечности (одну пару можно просто сравнить, а не сравнить их порядки роста):

$$10^n \quad n^{100} \quad \sqrt{n} \quad n^n \quad n! \quad (n/2)^n \quad C_n^{50} \quad C_{2n}^n \quad 2^{n^2}$$

**Определение.** Пусть  $f$  и  $g$  — некоторые функции. Говорят, что  $f = O(g)$  («о-большое от  $g$ ») при  $n \rightarrow \infty$ , если существует константа  $C > 0$ , что при всех достаточно больших  $n$  выполнено  $|f(n)| < C|g(n)|$ .

**Комментарий.** Опять же, почему-то у такой ситуации нет общепринятого названия. Смысл этого обозначения примерно такой: функция  $f$  не асимптотически больше функции  $g$ . Поэтому наверное можно говорить, что  $f$  *асимптотически не больше  $g$* .

Незначимые константы, например  $\sin n$ , всегда можно заменять на  $O(1)$ .

**0<sub>4</sub>.** Поймите, что  $o(1)$  является  $O(1)$ , а обратное, естественно, неверно. (так что запись  $o(1) = O(1)$  можно читать только слева-направо, но нгелзя справа-налево).

**0<sub>5</sub>.** Докажите, что если  $f = o(g)$ , а  $h = O(f)$ , то  $h = o(g)$ . *Этим удобно бывает пользоваться. Вот в следующей сложной задаче, например. Её лучше порешать потом.*

**4\*.** Пусть последовательность  $a_n$  такова, что  $a_n \cdot e^{a_n} = n$ . Докажите, что  $a_n \sim \ln n$ .

**Комментарий.** Следующие задачи скорее «рядом» с темой, чем «на» тему.

**5.** Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что для каждого натурального числа  $n$  существует треугольник со сторонами  $a^n, b^n, c^n$ . Докажите, что все эти треугольники равнобедренные.

**6.** Пусть  $P$  — многочлен с целыми коэффициентами для которого существует последовательность попарно различных натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  такая, что  $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, P(a_3) = a_2, \dots$ . Докажите, что  $\deg P = 1$ .

**7.** Натуральные числа  $a, b, c$  и  $d$  попарно различны. Докажите, что количество решений уравнения

$$x^3 + ax + b = y^3 + cy + d$$

в целых числах конечно.

**8.** Найдите все последовательности натуральных чисел  $x_n$  такие, что выполнены следующие два условия: 1)  $x_n \leq n\sqrt{n}$  при любом  $n$ ; 2) разность  $x_n - x_m$  делится на  $n - m$  при любых различных  $n$  и  $m$ .

**9.** Даны действительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$  и  $b_1, b_2, \dots, b_{2020}$ . Обозначим  $x_n$  число

$$[na_1 + b_1] + [na_2 + b_2] + \dots + [na_{2020} + b_{2020}].$$

Оказалось, что  $x_n$  — арифметическая прогрессия. Докажите, что число  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2020}$  — целое.

**10.** Про возрастающую последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  известно, что  $a_n < 2020n$  для каждого  $n$ .

а) Докажите, что в этой последовательности бесконечно много членов содержат в своей десятичной записи цифру 1.

б\*) Докажите, что в этой последовательности бесконечно много членов содержат в своей десятичной записи 2020 подряд идущих цифр 1.

**11.** Найдите все четвёрки чисел  $a, b, c$  и  $d$  такие, что для бесконечного количества натуральных  $n$  выполняется равенство  $(a + b)(2a + b) \dots (an + b) = cn! + d$ .

**12.** Пусть  $f$  — многочлен с целыми коэффициентами,  $a_n$  — строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что  $a_n \leq f(n)$  для всех натуральных  $n$ . Докажите, что существует бесконечно много простых  $p$ , которые делят хотя бы одно из чисел  $a_n$ .