

# Вступительная олимпиада

2 июля

1. Два действительных числа  $a$  и  $b$  таковы, что выполняется равенство

$$a^2 + 2a = 2b^2 + 13b - 8.$$

Известно, что если изменить  $a$ , то равенство точно перестанет быть верным. Найдите все возможные значения  $b$ .

2. На плоскости отметили точку  $P$ . Паша хочет провести  $n$  прямых, не проходящих через  $P$ , так, чтобы каждый луч, выходящий из  $P$ , пересекал хотя бы 10 проведенных прямых. При каком наименьшем  $n$  Паша может добиться желаемого?

3. На доске написано натуральное число  $m$ . За один ход число  $m$  заменяется на сумму числа  $m$  и квадрата наибольшего собственного делителя  $m$ . Могло ли после 2024 шагов на доске остаться число, являющееся точным квадратом?

4. При каких натуральных  $n$  на доску  $n \times n$  можно выставить нескольких ладей так, чтобы каждая клетка (включая клетки, на которых стоят ладьи) была побита ровно 3 ладьями? Ладья бьет клетку, на которой стоит; ладьи не бьют сквозь друг друга.

5. Точка  $P$  выбрана на описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ . Пусть  $D$ ,  $E$  и  $F$  — точки, симметричные  $P$  относительно средних линий треугольника  $ABC$ , параллельных  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников  $ADP$ ,  $BEF$  и  $CFP$  имеют общую точку, отличную от  $P$ .

6. В  $n$ -элементном множестве выбрали  $m$  различных подмножеств  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Докажите неравенство

$$n^2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^m |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|)^3.$$