

Серия 10, инверсия – 1

8 июля

Определения. На плоскости дана окружность S с центром O радиуса R . *Инверсией относительно окружности S* называется преобразование плоскости, которое любую точку M , не совпадающую с O , переводит в точку M_1 , лежащую на луче OM , такую, что $OM \cdot OM_1 = R^2$. Для точки O это преобразование не определено. Точка O называется *центром инверсии*, S — *окружностью инверсии*, R — *радиусом инверсии*.

Определение. Углом между двумя кривыми, пересекающимися в точке A , называется угол между касательными к ним, проведёнными в точке A . Окружности, угол между которыми прямой, называются *ортогональными*.

Теория

Т1. Построение. Дана окружность S с центром O и точка M вне окружности.

а) MT — касательная из точки M к окружности S . Из точки T опускаем перпендикуляр на OM . Получаем точку M_1 .

б) Пусть AB — диаметр, перпендикулярный OM , P — точка пересечения AM и окружности S . Прямые BP и OM пересекаются в точке M_1 .

Тогда точки M и M_1 инверсны. Как строить инверсную точку, если M находится внутри окружности S ?

Т2. Основная лемма. Пусть A, A' и B, B' — пары различных точек, инверсных относительно окружности с центром O . Тогда $\angle OAB = \angle OB'A'$.

Т3. Памятка. При инверсии

ЧТО	ВО ЧТО
Прямая через O	В себя
Прямая не через O	Окружность через O
Окружность через O	Прямая не через O
Окружность не через O	Окружность не через O

Т4. Ортогональность. Окружность, проходящая через две взаимно инверсные точки, при инверсии преобразуется в себя.

Т5. Инвариант. Окружность, ортогональная окружности инверсии, инвариантна.

Т6. Обратно — инвариант. Если окружность при инверсии переходит сама в себя и не совпадает с окружностью инверсии, то она ей ортогональна.

Упражнения

1) Нарисуйте образ окружности и двух касательных к ней, проведенных из одной точки, при инверсии

а) относительно точки пересечений касательных;

- б) относительно точки касания;
- в) относительно центра окружности.

2) Нарисуйте образ треугольника и его высот при инверсии относительно ортоцентра.

Задачи

1. Окружность S_1 касается окружности S_2 в точке K , а её хорды AB — в точке C . Точка L — середина дуги AB , не содержащей точку K . Докажите, что $LA^2 = LC \cdot LK$.

2. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите ГМТ касания этих окружностей.

3. В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей. Рассмотрим множество прямых, проходящих через их точки пересечения. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку (Решите двумя способами — инверсией относительно угла сегмента и относительно искомой точки).

4. В треугольник ABC вписана окружность ω с радиусом r . Пусть ω_A — окружность, проходящая через точки B и C и ортогональная ω . Аналогично определим окружности ω_B и ω_C . Окружности ω_B и ω_C пересекаются вторично в точке A' . Аналогично определим точки B' и C' . Описанная окружность треугольника $A'B'C'$ имеет радиус R . Докажите, что $r = 2R$.

5. а) **Задача Архимеда.** Пусть точка C лежит на отрезке AB . По одну сторону от прямой AB построены полуокружности на диаметрах AB , BC , AC (арбелос). Перпендикуляр MC к отрезку AB делит арбелос на две части. Докажите, что радиусы окружностей, вписанных в эти части арбелоса, равны между собой.

б) **Задача Паппа.** Пусть окружности α , β , γ с диаметрами AB , BC , AC образуют арбелос; δ_0 — окружность, вписанная в арбелос; окружность δ_1 касается окружностей α , β и δ_0 , окружность δ_2 касается окружностей α , β и δ_1 , и так далее. Обозначим R_n — радиус окружности δ_n , d_n — расстояние от центра окружности δ_n до прямой AB . Докажите, что $d_n = 2(n+1)R_n$.