

Серия 19, комплексные числа в геометрии – 2

14 июля

Упражнения.

1) На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что центры построенных квадратов образуют квадрат.

2) Даны окружность с центром O и точка M . Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до концов хорды, параллельной OM , не зависит от выбора хорды.

Задачи

1. Точки M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL . Докажите, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность.

а) Докажите, что ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC лежат на одной окружности.

б) Докажите, что радиус этой окружности равен радиусу описанной окружности $ABCD$.

3. Докажите, что в любом треугольнике ABC выполняется соотношение

$$OH^2 = 9R^2 - (AB^2 + BC^2 + CA^2),$$

где O — центр описанной окружности, R — её радиус, H — ортоцентр треугольника.

4. **Теорема Ньютона.** Докажите, что в описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.

5. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AC и BC ($AC > BC$) взяты точки M и N так, что $AM = BC$ и $CM = NB$. Докажите, что угол между отрезками AN и BM равен 45° .

6. Пусть A, B, C, D — четыре точки на окружности с центром O . Точки A_C, A_D — проекции точки A на BC и BD соответственно; точки B_C, B_D — проекции точки B на AC и AD соответственно. Точки H_A и H_B — ортоцентры треугольников ACD и BCD соответственно. Докажите, что если $A_C A_D \perp OH_B$, то $B_C B_D \perp OH_A$.

7. Пусть P — точка внутри треугольника ABC . Прямая γ проходит через точку P . Пусть A', B', C' — точки пересечения прямых, симметричных PA, PB, PC относительно γ , с прямыми BC, AC, AB соответственно. Докажите, что A', B', C' лежат на одной прямой.