

Матбой Профи-9 — Полупрофи-9

15 июля

1. Пусть n – натуральное число,

$$(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n}.$$

Докажите, что $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + \dots - a_{2n-1}^2 + a_{2n}^2 = a_n$.

2. Пусть a_1, a_2, \dots – бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для всех натуральных чисел m и n число $a_m a_n - 1$ делится на a_{m+n} . Докажите, что все члены последовательности, начиная с некоторого, равны 1.

3. На острове Антромортем живут 800 человек, каждый из которых – рыцарь или лжец. Массы жителей равны 2, 4, 8, ..., 2^{800} в некотором неизвестном никому порядке. Колонизатор прибыл на остров с двухчашечными весами без гирь, которые показывают верный знак, если на весах рыцарей не меньше, чем лжецов, и противоположный, если лжецов на весах больше, чем рыцарей. Может ли он за 10 взвешиваний гарантированно определить самого тяжёлого жителя? (Во время взвешивания обе чаши весов не должны быть пусты.)

4. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CH . В треугольники ACH и BCH вписали окружности; O_1 и O_2 – их центры; P_1 и P_2 – их точки касания с AC и BC . Докажите, что прямые O_1P_1 и O_2P_2 пересекаются на AB .

5. Волшебной стране 100 городов. Некоторые из них соединены беспосадочными двухсторонними авиалиниями. Назовем город A *достойным внимания*, если при любой нумерации городов Волшебной страны числами 1, 2, ..., 100 найдётся город с номером m , до которого из A можно добраться ровно за m перелётов. Например, в маршруте $A - B - A - B - A - B$ ровно 5 перелётов. Оказалось, что в Волшебной стране есть ровно k городов, достойных внимания. Докажите, что города Волшебной страны можно разбить на $k + 2$ провинции так, чтобы авиалинии соединяли только города из разных провинций.

6. Для положительных чисел a , b и c , произведение которых равно 1, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3 + 2b^2 + 2b + 4} + \frac{1}{b^3 + 2c^2 + 2c + 4} + \frac{1}{c^3 + 2a^2 + 2a + 4} \leq \frac{1}{3}.$$

7. Пусть Γ – описанная окружность треугольника ABC . Окружность Ω касается стороны AB и касается окружности Γ в точке, лежащей с точкой C по одну сторону от AB . Биссектриса угла BCA пересекает Ω в двух различных точках P и Q . Докажите, что $\angle ABP = \angle QBC$.

8. Саша хочет расставить в каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости по натуральному числу так, чтобы все числа были различны и для каждой клетки хотя бы в k соседних с ней по стороне или по углу клетках стояли числа, кратные числу в этой клетке. При каком наибольшем k такое возможно?

9. Вася выбрал натуральное m и хочет написать на волшебной доске натуральное число, которое доска будет преобразовывать по такому правилу: если в какой-то момент на доске оказалось число $x < 2^m$, через минуту оно заменится на число $x^2 + 2^m$, а если число $x \geq 2^m$, то через минуту оно уменьшится ровно вдвое. При каких m Вася может написать на доске такое число, что оно всегда будет оставаться целым?

10. На плоскости отмечено конечное множество точек. *Диском* назовём круг, построенный на отрезке, соединяющем две отмеченных точки, как на диаметре (круг содержит свою границу). Каким наименьшим числом дисков гарантированно удастся покрыть все отмеченные точки?