

## 23. Инверсия + симметрия

14 июля

1. Углы  $AOB$  и  $COD$  совмещаются поворотом так, что луч  $OA$  совмещается с лучом  $OC$ , а луч  $OB$  — с лучом  $OD$ . В эти углы вписаны окружности, пересекающиеся в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что углы  $AOE$  и  $DOF$  равны.

2. В трапеции  $ABCD$  с основанием  $AD$  и  $BC$  лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $K$ . Точки  $P$  и  $Q$  — центры описанных окружностей треугольников  $ABD$  и  $BCD$ . Докажите, что  $\angle PKA = \angle QKD$ .

3. **Лемма Варьера.** Окружность  $\omega$  касается сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  и его описанной окружности в точках  $X, Y, P$  (такая окружность называется *полувписанной*), а внеписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его стороны  $AC$  в точке  $Q$ .

(a) Докажите, что  $\angle ABP = \angle CBQ$ ;

(b) Докажите, что центр вписанной в  $ABC$  окружности лежит на прямой  $XY$ ;

(c) Докажите, что четырёхугольники  $AXIP$  и  $CYIP$  являются вписанными.

4. (a) Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < AC$ . Пусть  $D$  — точка пересечения биссектрисы угла  $BAC$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$ ,  $Z$  — точка пересечения серединного перпендикуляра к  $AC$  с внешней биссектрисой угла  $BAC$ . Докажите, что середина отрезка  $AB$  лежит на описанной окружности треугольника  $ADZ$ .

(b) В окружность  $\Omega$  вписан остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB > AC$ . Пусть  $P$  и  $Q$  — середины меньшей и большей дуг  $AC$  окружности  $\Omega$  соответственно. Пусть  $M$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $Q$  на отрезок  $AB$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $BMC$ , делит пополам отрезок  $BP$ .

5. Пусть  $\omega$  — описанная окружность треугольника  $ABC$ . Окружность с центром в точке  $O$  касается отрезка  $BC$  в точке  $P$  и дуги  $BC$  окружности  $\omega$ , не содержащей точку  $A$ , в точке  $Q$ . Докажите, что если  $\angle BAO = \angle CAO$ , то  $\angle BAP = \angle CAQ$ .

6. Гипотенуза  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  касается вписанной и соответствующей внеписанной окружностей в точках  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Окружность, проходящая через середины сторон, касается этих же окружностей в точках  $S_1, S_2$  соответственно. Докажите, что  $\angle S_1CT_1 = \angle S_2CT_2$ .

7. Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно. Прямые, проходящие через  $A$  перпендикулярно  $AC$  и  $AB$ , пересекают  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Прямая  $XM$  пересекает  $AB$  в точке  $P$ , а прямая  $YN$  пересекает  $AC$  в точке  $Q$ . Докажите, что точки  $O, P, Q$  лежат на одной прямой.