

# Матбой Профи-9 — Профи-10 — преподаватели

15 июля

1. Сумма положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{3a^2 - a - b^2} + \frac{b^2}{3b^2 - b - c^2} + \frac{c^2}{3c^2 - c - a^2} \geq 3,$$

если известно, что все знаменатели положительные.

2. На плоскости проведены  $n > 10$  прямых общего положения. Докажите, что среди них есть прямая, с каждой стороны от которой не меньше  $\left\lceil \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rceil$  точек пересечения проведенных прямых (точки пересечения, расположенные на этой прямой, не учитываются).

3. Многочлены  $P(x)$  и  $Q(x)$  с вещественными коэффициентами таковы, что  $P(x) - P(y)$  делится на  $Q(x) - Q(y)$  как многочлены от двух переменных. Докажите, что существует многочлен  $H(x)$  с вещественными коэффициентами такой, что  $P(x) = H(Q(x))$ .

4. Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $\angle ACP = \angle BCQ$  и  $\angle CBP = \angle ABQ$ . Точка  $Z$  — проекция точки  $P$  на прямую  $BC$ . Точка  $Q'$  симметрична точке  $Q$  относительно точки  $Z$ . Точки  $K$  и  $L$  выбраны на лучах  $AB$  и  $AC$  соответственно так, что  $Q'K \parallel QC$  и  $Q'L \parallel QB$ . Докажите, что  $\angle KPL = \angle BPC$ .

5. Саша нарисовал граф, вершинами которого являются все возможные последовательности из 0 и 1 длины 2019, а ребро между вершинами проводится, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одном месте. Назовём расстановку ненулевых чисел в вершинах этого графа  $k$ -гармонической, если для любой вершины сумма чисел в соседних с ней вершинах в  $k$  раз больше числа в самой вершине. При каких вещественных  $k$  существует  $k$ -гармоническая расстановка чисел в вершинах этого графа?

6. Дано натуральное число  $n > 10$ . Докажите, что ни для какого  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  число  $(2n)! + k$  не делится на  $n! + 1$ .

7. На окружности  $S$  отмечены точки  $A$  и  $B$ . Касательные к окружности  $S$ , проведенные в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $C$ . Пусть  $M$  — середина отрезка  $AB$ . Окружность  $S_1$ , проходящая через точки  $M$  и  $C$ , вторично пересекает отрезок  $AB$  в точке  $D$  и окружность  $S$  — в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что касательные, проведенные к окружности  $S$  в точках  $K$  и  $L$ , пересекаются на отрезке  $CD$ .

8. Для натурального  $n$ , не делящегося на 3, обозначим через  $C(n)$  наибольшее количество  $k$  целых чисел  $a_1, \dots, a_k$ , которые можно выбрать так, чтобы при любых индексах  $i$  и  $j$  и любом натуральном  $t$  число  $3^t a_i - a_j$  не делилось на  $n$ . Докажите, что число  $C(3d+1) + C(3d+2)$  нечётно при любом натуральном  $d$ .

9. Вдоль окружности расположено  $n$  монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Если две соседние монеты лежат одинаково (обе орлом или обе решкой), разрешается обе перевернуть. Сколько имеется вариантов расположения монет, которые нельзя получить друг из друга, применяя такие операции?

10. Дано натуральное число  $n$ . Алиса и Боб по очереди вписывают в клетки клетчатой доски  $2n \times 2n$  различные положительные числа, начинает Алиса. В каждую клетку можно вписать только одно число. После того как таблица заполнена, в каждой строке и в каждом столбце закрашивают клетку с наибольшим числом (одна клетка может быть закрашена несколько раз). Боб хочет, чтобы после заполнения всей таблицы было закрашено как можно больше клеток, а Алиса — как можно меньше. Сколько будет закрашено клеток в конце игры при правильной игре обоих игроков?