

Серия 27, уравнение Пелля

20 июля

1. Решим в натуральных числах уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$.

Разложим на множители левую часть равенства

$$x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}).$$

Первое нетривиальное, то есть отличное от $(1; 0)$, решение уравнения даёт пара $(3; 2)$.

а) Пусть $(a; b)$ — некоторое решение уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$. Получите, умножая обе части уравнения на $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1$, ещё одно решение уравнения.

б) Докажите, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений. Укажите линейное рекуррентное соотношение, позволяющее по имеющемуся решению $(x_n; y_n)$ найти другое решение $(x_{n+1}; y_{n+1})$.

в) Установите рекуррентное соотношение, позволяющее по решению $(a; b)$ найти решение $(c; d)$, при этом $c < a, d < b$.

г) Докажите, что все нетривиальные решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ — это пары $(x_n; y_n)$, заданные соотношением $x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n, n \in \mathbb{N}$.

Определение. Уравнение вида $x^2 - dy^2 = 1$, где d не является квадратом натурального числа, называется *уравнением Пелля*. Наименьшее нетривиальное решение уравнения Пелля называется его *фундаментальным решением*.

2. Докажите, что все решения уравнения Пелля выражаются через фундаментальное решение.

Обозначим множество чисел вида $a + b\sqrt{d}$, где a и b — целые числа, через $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Все решения (если они есть) уравнения $x^2 - dy^2 = 1$ принадлежат множеству $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. В задаче 2 доказано, что если $(x_0; y_0)$ — фундаментальное решение уравнения $x^2 - dy^2 = 1$, то все решения соответствуют числам, являющимся степенями числа $x_0 + y_0\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Нахождение фундаментального решения перебором иногда бывает затруднительным (например, фундаментальное решение уравнения $x^2 - 61y^2 = 1$ имеет вид $x_0 = 1766319049, y_0 = 226153980$). Всегда ли нахождение фундаментального решения перебором приведет к успеху? Всегда ли уравнение Пелля $x^2 - dy^2 = 1$ имеет решение? Оказывается, что всегда. Удивительно короткое доказательство теоремы о существовании решения уравнения Пелля опубликовал в 2008 году Н. Вайлдбергер (Австралия). Все ранее известные доказательства были не совсем элементарны.

Положим $g(x, y) = x^2 - dy^2$ и будем преобразовывать эту квадратичную форму. Если на очередном шаге получилась форма $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, то преобразуем её или в $g(x + y, y)$ или в $g(x, x + y)$ так, чтобы у новой формы коэффициент при x^2 был положительным, а при y^2 был отрицательным — как и у начальной формы.

3. а) Прделайте эти преобразования для формы $x^2 - 2y^2$.

б) На каком-то шаге должно стать очевидным, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет решение.

в) Аналогично, прделайте алгоритм для формы $x^2 - 7y^2$.

4. а) Что происходит с дискриминантом формы $D = b^2 - 4ac$ при этих преобразованиях?

б) Докажите, что на каждом шаге преобразование может быть выбрано ровно одним способом.

в) Докажите, что в полученной последовательности форм встретится только конечное число форм. Следовательно, последовательность заиклится.

г) Докажите, что по очередной форме можно восстановить предыдущую. Следовательно, последовательность заиклится без предпериода.

д) Докажите, что у уравнения Пелля существует нетривиальное решение.

5. Напишите рекуррентные и явные формулы для решения уравнения $x^2 - 7y^2 = 1$.

6. Решите в целых числах уравнение $x^2 - y^2 + 2xy - 1 = 0$.