

Серия 6, многочлены с целыми коэффициентами

5 июля

Во всех задачах мы будем рассматривать многочлены с целыми коэффициентами. Множество всех многочленов с целыми коэффициентами обозначается $\mathbb{Z}[x]$.

1. Докажите, что если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ — корень многочлена с целыми коэффициентами $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$), то $a_n : q, a_0 : p$.
2. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что
 - а) $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$ при всех целых a и b ;
 - б) $P(a) \equiv P(a + b) \pmod{b}$.
3. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, причём $P(2)$ делится на 5, а $P(5)$ делится на 2. Докажите, что $P(7)$ делится на 10.
4. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1) = 2025$, $P(2025) = 1$, $P(k) = k$, где k — некоторое целое число. Найдите k .
5. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность $P(2025) - Q(2025)$ кратна 1012.
6. Известно, что числа p и q простые, а уравнение $x^{100} + px^{99} - q = 0$ имеет целый корень. Докажите, что уравнение $x^{101} - px^{100} + q = 0$ тоже имеет целый корень.
7. Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19) = P(94) = 2024$.
8. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .
9. Докажите, что для каждого непостоянного многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ найдётся такое натуральное число n , что $P(n)$ — составное число.
10. В равенстве $x^5 + 2x + 3 = p^k$ числа x и k — натуральные. Может ли число p быть простым?
11. Докажите, что не существует многочлена степени не ниже двух с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом.
12. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?