

Серия 18, принцип крайнего в графах

14 июля

Если вы хотите рассмотреть какой-то элемент в графе, рассмотрите крайний. Например, можно рассматривать наибольший путь, максимальное паросочетание, наименьший цикл, вершину наибольшей/наименьшей степени и так далее.

Упражнение. В графе G степень каждой вершины хотя бы t ($t \geq 2$). Докажите, что в G существует простой путь длины хотя бы t и простой цикл длины хотя бы $t + 1$.

Задачи

1. Все простые циклы графа имеют длину, кратную натуральному числу $n \geq 3$. Докажите, что в графе есть вершина степени не более 2.

2. Архипелаг состоит из 1000 островов, некоторые пары которых соединены мостами, причём от любого острова можно добраться по мостам до любого другого. Оказалось, что для любых четырёх островов A, B, C, D таких, что есть мост между A и B , между B и C , между C и D , также есть мост между A и C или между B и D . Докажите, что есть остров, соединённый мостами со всеми остальными.

3. В группе из 1002 человек, говорящих на разных языках, любые трое могут общаться (возможно, один переводит двум другим). Доказать, что их можно разбить на пары, в каждой из которых имеется общий язык.

4. Андрюша нарисовал карту из нескольких городов и дорог между ними (дорог получилось не менее двух, каждая дорога соединяет различные города). На каждом городе он написал, сколько дорог из него выходит. Могло ли получиться так, что на этой карте нет двух дорог с совпадающими наборами чисел на концах?

5. В графе n вершин, $5n$ рёбер и нет циклов длины менее пяти. Докажите, что в этом графе есть 5 не пересекающихся по вершинам циклов.

6. Каждый из 100 человек послал кому-то другому из этих 100 человек письмо. Известно, что если выбрать из них любых 40 человек, то в этой компании найдутся и отправитель, и получатель одного письма. При каком наименьшем k заведомо можно выбрать k писем так, чтобы каждый из 100 человек оказался либо отправителем, либо получателем хотя бы одного из этих писем?

7. В изоляторе собралось несколько детей. Оказалось, что любые два дитя, имеющих одинаковое число друзей в изоляторе, не имеют общих друзей. Докажите, что найдётся скучающий бедолага, у которого не более одного друга.

8. В стране 300 городов, некоторые из них соединены дорогами. Оказалось, что для любой четвёрки городов от любого города этой четвёрки можно добраться до любого другого города этой четвёрки, не проезжая через оставшиеся 296 городов.

Докажите, что можно выбрать 100 городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой.

9. Рёбра полного графа с n вершинами покрашены в несколько цветов таким образом, что каждый цвет встречается не более $n - 2$ раз. Докажите, что есть три вершины, все рёбра между которыми покрашены в различные цвета.

10. Денис и Максим играют в игру на графе с 2023 вершинами. Первым ходом Денис устанавливает фишку. Далее игроки по очереди передвигают фишку по рёбрам графа, начиная с Максима. Нельзя заходить в вершину, в которой уже была фишка. Проигрывает тот, кто не имеет хода. Кто выигрывает при правильной игре?