

4. Интерполяция: теория

4 июля

1 (Ньютон). Докажите индукцией по n , что для попарно различных действительных чисел x_0, x_1, \dots, x_n и любых действительных чисел y_0, y_1, \dots, y_n существуют многочлен f такой, что для каждого $1 \leq i \leq n$ выполнено $f(x_i) = y_i$. *По индукции! Не Лагранж! Ньютон! Индукция!*

Для всероса скорее всего, ничего, кроме существования хоть какого-то многочлена степени не выше n , который проходит через данные $n+1$ точку¹, не потребуется. Чаще всего это часть «пример» в задачах на оценку и пример — т.е. почти бесплатные 1–2 балла.

2. Есть 25 футболистов, у каждого из них есть рейтинг r_1, r_2, \dots, r_{25} , все рейтинги попарно различны. Тренер хочет выбрать из них в команду 11 любимчиков. Для этого он придумывает многочлен P , для каждого спортсмена вычисляет его *спортивный потенциал* $P(r_i)$ и выбирает игроков с максимальным потенциалом. Докажите, что ему хватит многочлена 24-ой степени.²

3. На плоскости отмечены 2020 точек, их абсциссы различны, каждая из точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Скажем, что многочлен $P(x)$ *разделяет* эти точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот; на самом графике могут лежать точки обоих цветов. Докажите, что всегда можно построить разделяющий многочлен не выше 2018-й степени.³

Обратите внимание во фразе «хоть какого-то многочлена степени не выше n , который проходит через данные $n+1$ точку» на часть «хоть какого-то». Построить такой многочлен можно более чем одним способом. Почему-то в олимпиадных кругах иногда считают, что интерполяционный многочлен — это именно интерполяционный многочлен в форме Лагранжа (об это чуть дальше). В некоторых книжках так даже пишут.

0₁. Вспомните, что любые два многочлена степени не выше n , которые проходят через данные $n+1$ точку (с разными абсциссами), равны.

0₂. Осознайте, что многочлен степени n совпадает со своим интерполяционным многочленом по $n+1$ точке (т.е. по точкам вида $(a, P(a))$). Это даёт нам возможность «восстановить» многочлен, если мы знаем только его значения.

4. Докажите, что если многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения, то и все его коэффициенты рациональные.

5. Пусть P — многочлен степени не выше n , для которого $P(x_i) = y_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$, Q — другой многочлен, для которого $Q(x_i) = y_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Как связаны многочлены P и Q ? Заполните пропуски в фразе «многочлен $P(x)$ — при делении многочлена $Q(x)$ на многочлен ».

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона используется редко, что логично: он не такой явный. Его удобство — что для «уточнения» многочлена, т.е. если стало на одну точку больше, не надо пересчитывать всё предыдущее.

6 (Лагранж). Пусть $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ — попарно различные действительные числа.

- a) Приведите пример многочлена $P_0(x)$, степени n , для которого $P_0(x_0) = 1, P_0(x_i) = 0$, где $i > 0$.
- b) Выведите из пункта a) существование интерполяционного многочлена степени не выше n .

У интерполяционного многочлена в форме Лагранжа удобство другое: заранее вычислив многочлены $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ можно для различных наборов значений (т.е. y_0, y_1, \dots, y_n) быстро находить требуемый многочлен.

На другой стороне есть продолжение!

¹количество точек совпадает с количеством коэффициентов; что логично, учитывая какие-то соображения количества степеней свободы/размерностей

²На Туймааде спрашивали наименьшую степень.

³На всеросе спрашивали наименьшую степень

Часто интерполяционные многочлены используют, чтобы «восстановить» сам многочлен (см., например, задачу 4). Тут возникает ещё одно удобство интерполяционного многочлена в форме Лагранжа: он более явный.

7. Многочлен $P(x)$ степени n принимает целые значения в точках $0, 1, 2, \dots, n$. Докажите, что
а) $n! \cdot P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

б) многочлен $P(x)$ принимает целые значения во всех целых точках.

8. Пусть x_i — попарно различные числа, $f(x)$ — многочлен степени меньше n . Докажите, что дробь

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}$$

можно представить в виде

$$\frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \dots + \frac{a_n}{x - x_n},$$

где a_i — некоторые числа.

Не всегда интерполяционный многочлен — панацея. Например, те, кто на финале задачу

2017.9.6. Пусть a, b, c — натуральные числа. Верно ли, что обязательно существует квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами, который в некоторых целых точках принимает значения a^3, b^3, c^3 ?

пытались решить через интерполяционный многочлен Лагранжа, её скорее не решали. Всё таки существуют и другие способы работы с многочленами.

9. Многочлен $P(x)$ степени n таков, что $P(k) = \frac{1}{k+1}$ для всех k от 0 до n . Найдите $P(2n)$. *Направление мысли:* $(k+1)P(k) = 1$ для всех k от 0 до n .

03. Задумайтесь и поймите, что если мы будем всё то же самое проделывать в множестве остатков при делении на p (обозначение: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ или \mathbb{F}_p ⁴), то в целом все рассуждения и про многочлен Ньютона и про многочлен Лагранжа проходят.

10. Пусть p — простое число.

а) Докажите, что любая функция $f: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ задаётся некоторым многочленом степени не выше $p-1$.

б) Сколько существует функций $f: \mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$? Многочленов степени не выше $p-1$? Сделайте какой-то вывод. Докажите тот же вывод исходя из более классических методов для многочленов.

⁴иногда пишут просто \mathbb{Z}_p , но тут может возникнуть путаница, потому что так ещё обозначают целые p -адические числа, что бы это ни значило