

## 13. Двойные отношения–2

8 июля

**Определение.** Точки  $A, B, C, D$  лежат на окружности  $S$ . Пусть  $X$  — произвольная точка этой окружности. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек  $A, B, C, D$  называется величина  $(A, B, C, D) = (XA, XB, XC, XD)$ .

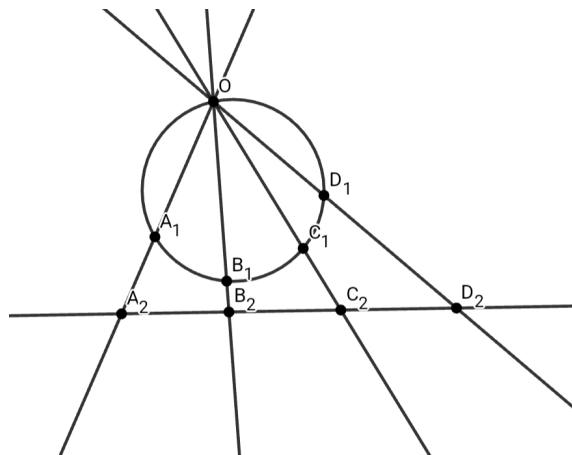
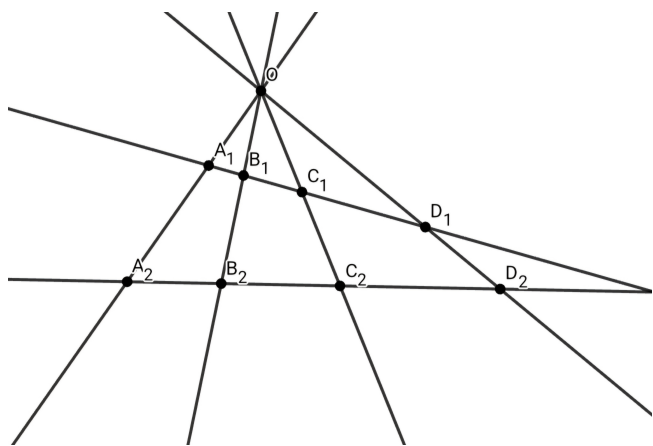
*Замечание.* Определение корректно, то есть не зависит от точки  $X$ .

**Определение.** Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

**Определение.** Вписанный четырехугольник  $ABCD$  называется *гармоническим*, если четверка точек  $(A, C, B, D)$  гармоническая.

*Замечание.* Теперь мы можем проецировать двойное отношение с прямой на окружность через точку, лежащую на этой окружности.

Таким образом, мы научились проецировать четверки точек с окружности на прямую и с прямой на прямую. На картинках ниже  $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$ .



1. Пусть  $ABCD$  — гармонический четырехугольник,  $M$  — точка пересечения его диагоналей,  $P$  — точка пересечения касательной к его описанной окружности в точке  $B$  и прямой  $AC$ . Докажите, что  $(A, C, M, P) = -1$ .

2. Докажите, что вписанный четырехугольник  $ABCD$  является гармоническим тогда и только тогда, когда

- (a) Касательные к его описанной окружности в точках  $B$  и  $D$  пересекаются на прямой  $AC$ , либо параллельны этой прямой;
- (b) Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  пересекаются на диагонали  $BD$ ;
- (c) Равны хотя бы два из углов  $BNC, DNC$  и  $BAD$ , где  $N$  — середина диагонали  $AC$ ;
- (d) Диагональ  $AC$  содержит симедиану треугольника  $ABD$ .

*Замечание.* Вообще гармонический четырехугольник обладает достаточно забавным свойством «симметричности». Например, доказав конкурентность касательных к окружности в точках  $A, C$  и прямой  $BD$ , мы автоматически получаем конкурентность касательных в точках  $B, D$  и прямой  $AC$ .

3. (a) В угол  $BAC$  вписана окружность  $\omega$ , касающаяся сторон угла в точках  $B, C$ . Хорда  $CD$  окружности  $\omega$  параллельна прямой  $AB$ . Прямая  $AD$  второй раз пересекает окружность  $\omega$  в точке  $E$ . Докажите, что прямая  $CE$  делит отрезок  $AB$  пополам.

(b) Из точки  $P$  к окружности  $\omega$  проведены отрезки касательных  $PA$ ,  $PB$ , точка  $C$  диаметрально противоположна точке  $B$ . Докажите, что прямая  $CP$  делит пополам перпендикуляр, опущенный из точки  $A$  на прямую  $BC$ .

4. (a) На окружности  $\omega$  отмечены различные точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Точка  $P$  не лежит на окружности  $\omega$ . Прямые  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ ,  $PD$  второй раз пересекают окружность  $\omega$  в точках  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ . Докажите, что  $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$ .

(b) Докажите, что при инверсии сохраняется двойное отношение четырех точек.

(c) Четыре окружности  $\omega_A$ ,  $\omega_B$ ,  $\omega_C$  и  $\omega_D$  касаются окружности  $\omega$  в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  соответственно и касаются друг друга по циклу. Все касания внешние. Докажите, что  $ABCD$  — гармонический четырёхугольник.

5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  ( $AC > AB$ ) провели биссектрису  $AL$  и медиану  $AM$ , последнюю продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника в точке  $D$ . Точка  $F$  симметрична  $L$  относительно  $M$ . Даны углы треугольника  $ABC$ , найдите угол  $FDA$ .

6. **Теорема о бабочке.** Хорды  $AC$  и  $BD$  окружности проходят через середину хорды  $MN$ . Отрезки  $AD$  и  $BC$  пересекают отрезок  $MN$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что  $XM = YN$ .

7.  $B_1$  и  $B_2$  — основания внутренней и внешней биссектрис треугольника  $ABC$ . Касательные, отличные от прямой  $BC$ , проведенные из  $B_1$  и  $B_2$  к вписанной окружности, касаются её в точках  $K_1$  и  $K_2$ . Докажите, что  $B$ ,  $K_1$  и  $K_2$  лежат на одной прямой.

8. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Перпендикуляр из  $B$  к прямой  $AC$  пересекает окружность, построенную на  $AC$ , как на диаметре, в точках  $X$  и  $Y$  ( $X$  ближе к  $B$ , чем  $Y$ ). Аналогично перпендикуляр из  $C$  к прямой  $AB$  пересекает окружность, построенную на  $AB$  как на диаметре, в точках  $Z$  и  $T$  ( $Z$  ближе к  $C$ , чем  $T$ ). Докажите, что прямые  $XZ$ ,  $YT$  и  $BC$  пересекаются в одной точке либо параллельны.

9. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\omega$ . Касательная в точке  $D$  к окружности  $\omega$  пересекает луч  $AC$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ , отрезок  $BC$  — в точке  $Q$ , отрезок  $BD$  — в точке  $R$ , а окружность  $\omega$  — в точках  $S$  и  $T$ . Оказалось, что  $R$  — середина отрезка  $PQ$ . Докажите, что  $R$  — середина отрезка  $ST$ .