

20. Асимптотика в комбинаторике

13 июля

Упражнение. Бесконечную клетчатую плоскость разбили на равные параллелограммы с целочисленными вершинами, не содержащие целочисленных точек внутри и на границе. Докажите, что площадь параллелограмма равна 1.

1. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали прямоугольник (со сторонами, параллельными линиям клеток).

2. У Пети есть бесконечно много одинаковых треугольных салфеток. Докажите, что для достаточно больших R Петя сможет покрыть этими салфетками более 99% площади круглого стола радиуса R (салфетки не перекрываются, не вылезают за край стола, их можно переворачивать).

3. Из бесконечной клетчатой доски выкинули несколько клеток. Расстояние между центрами каждой двух выкинутых клеток не меньше 1000. Всегда ли оставшуюся часть можно разбить на доминошки?

4. Дано натуральное $n \geq 2021$. Числа $1, 2, \dots, n^2$ вписаны в клетки таблицы $n \times n$ так, что в каждой клетке написано одно число. Докажите, что можно отметить n клеток, никакие две из которых не находятся в одной строке или в одном столбце, так, чтобы никакие четыре числа, стоящие в отмеченных клетках, не образовывали арифметическую прогрессию.

5. Двое игроков отмечают точки плоскости. Сначала первый отмечает точку красным цветом, затем второй отмечает 100 точек синим, затем первый снова одну точку красным, второй 100 точек синим и так далее. (Перекрашивать уже отмеченные точки нельзя.) Докажите, что первый может построить правильный треугольник с красными вершинами.

6. Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница и т.д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить клетки нельзя. Учительника побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Смогут ли ученики помешать учительнице победить?

7. (а) Ограниченная фигура на плоскости имеет площадь $S > 1$. Докажите, что её можно сдвинуть на целочисленный вектор так, чтобы исходная фигура и её образ пересекались.

(б) **Лемма Минковского.** В центре координатной плоскости расположена выпуклая центрально-симметричная относительно центра координат фигура площади больше 4. Докажите, что в ней найдется еще одна целочисленная точка.

8. Дано неотрицательное число C . В каждой клетке квадрата $n \times n$ сидит жук. Для каждой пары жуков посчитали расстояние между ними. После этого каждый жук переполз в одну из соседних по стороне клеток, причем в каждой клетке снова сидит ровно 1 жук. Для каждой пары жуков снова посчитали расстояние между ними. Оказалось, что для каждого натурального n количество не изменившихся расстояний не меньше Cn^4 . Чему может быть равно C ?

9. На окружности отмечены $n > 10^{100}$ точек. Двое по очереди проводят отрезки с концами в отмеченных точках, первый своим ходом проводит один красный отрезок, второй — 100 синих. Один и тот же отрезок запрещено проводить дважды. Первый игрок хочет, чтобы после нескольких ходов граф, образованный n отмеченными точками и красными отрезками, был связным. Сможет ли второй ему помешать?