

Серия 3, многочлены. Теорема Безу

4 июля

Определения. *Многочлен* — это выражение вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

коэффициенты которого принадлежат числовому множеству \mathbf{K} . *Степень многочлена* $P(x)$ — число $\deg P(x) = n$. Число a_n — *старший коэффициент*, a_0 — *свободный член*. Многочлены *равны*, если у них совпадают все коэффициенты при одинаковых степенях. Вместо x можно подставить любое число x_0 , т. е. вычислить *значение в точке* x_0 . Если $P(x_0) = 0$, то x_0 называют *корнем* многочлена.

Упражнения

- 1) Найдите степень и старший коэффициент следующих многочленов.
 - а) $(x+1)^{10}(1-2x^2)^3$; б) $(x^2+x+1)^6 - (x+1)^{12}$.
- 2) Найдите свободный член и сумму коэффициентов следующих многочленов:
 - а) $(x^2-x+1)^{2018}$; б) $(3x^2-4x-2)^{15}$.
- 3) Дан многочлен $(1+x^2+x^4)^{30} + (1+x^3+x^6)^{20}$.
 - а) Сколько ненулевых коэффициентов имеет этот многочлен?
 - б) Чему равна сумма всех коэффициентов этого многочлена?
 - в) Чему равна сумма коэффициентов при чётных степенях этого многочлена?

Определение. *Разделить* многочлен $P(x)$ на ненулевой многочлен $Q(x)$ с остатком — это найти такие многочлены $H(x)$ (*неполное частное*) и $R(x)$ (*остаток*), что выполнено равенство $P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$, причём $\deg R(x) < \deg Q(x)$ или $R(x) \equiv 0$.

4) Поделите столбиком:

$$\text{а) } 6x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 10x + 8 \text{ на } 2x^2 - x + 2; \quad \text{б) } x^{105} + x + 1 \text{ на } x^2 - 1.$$

5) Докажите, что для $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$ (или $\mathbf{K} = \mathbb{R}$) при делении многочлена на многочлен с остатком неполное частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$ существуют и определяются однозначно.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$, т. е. $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$, притом $\deg Q(x) = \deg P(x) - 1$.

6) Докажите теорему Безу.

7) а) Многочлен $P(x)$ делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда $P(a) = 0$.

б) Докажите, что число корней многочлена не превосходит его степени.

в) Докажите, что если значения двух многочленов, степень каждого из которых не превосходит n , совпадают в $n + 1$ различных точках, то эти многочлены равны.

г) Если многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$, то корни многочлена $Q(x)$ являются корнями многочлена $P(x)$.

Задачи

1. Пусть $P(x)$ — многочлен, такой, что $P(x) = P(x + 1)$. Докажите, что $P(x)$ — константа.
2. Докажите, что многочлен $(x + 1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x + 1)(2x + 1)$.
3. При каких a и b многочлен $P(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?
4. а) Известно, что многочлен $P(x)$ даёт при делении на $x - 1$ остаток 5, а при делении на $x + 2$ остаток 14. Найдите остаток от деления $P(x)$ на $(x - 1)(x + 2)$.
б) Найдите остаток $R(x)$ от деления многочлена $x^n + x + 2$ на $x^2 - 1$.
5. Докажите, что для любого натурального n , не кратного 3, многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$.
6. Про многочлен $P(x)$ степени 10 с действительными коэффициентами известно, что $P(1) = P(-1), P(2) = P(-2), \dots, P(5) = P(-5)$. Докажите, что $P(x) = P(-x)$ для любого действительного x .
7. Найдите все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$xP(x - 1) = (x - 20)P(x).$$

8. Пусть $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Найдите остаток от деления $P(x^5)$ на $P(x)$.
9. Многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет на интервале $(0; 2)$ три различных действительных корня. Докажите, что $-2 < p + q + r < 0$.
10. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2024$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2024) > \frac{1}{64}$.
11. Многочлены $P(x), Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, при всех действительных x удовлетворяют равенству $P^2(x) + Q^2(x) = R^2(x)$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени — действительные.