

Серия 16, континуальные множества

13 июля

1. Докажите, что множество всех бесконечных десятичных дробей несчётно.
2. а) Докажите, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.
б) Пусть A и B — непересекающиеся множества. Докажите, что если B счётно и A бесконечно, то $A \cup B$ равномощно A .
3. Докажите, что множество точек на отрезке $[0; 1]$ равномощно множеству бесконечных десятичных дробей с нулевой целой частью, а значит, несчётно.

Определение. Множества, равномощные отрезку $[0; 1]$, называются *континуальными*. Говорят также, что такие множества имеют мощность континуума.

4. Докажите континуальность следующих множеств:
а) интервала $(0; 1)$;
б) полуинтервала $[0; 1)$;
в) вещественных чисел.
5. Постройте явно биекцию между $[0; 1]$ и $[0; 1)$.
6. Докажите, что множество всех подмножеств натурального ряда равномощно отрезку $[0; 1]$.
7. В государстве любое подмножество граждан состоит в тайном обществе. В некоторый момент каждый гражданин доносит ровно на одно тайное общество. Докажите, что на некоторое тайное общество не поступило доносов.

Определение. Действительное число называется *конструктивным*, если существует конечный алгоритм, вычисляющий его с любой точностью.

8. Докажите, что множество конструктивных чисел счётно.
9. а) Найдите ошибку в следующем рассуждении. Занумеруем как-нибудь все конструктивные числа и рассмотрим следующий алгоритм вычисления числа x : « i -ый знак после запятой десятичной записи числа x равен 1, если у i -го конструктивного числа он не равен 1, и равен 2 иначе». Получаем противоречие, так как этот алгоритм вычисляет число, отличное от всех конструктивных.
б) Приведите пример неконструктивного числа.

10. Обозначим через 2^X множество всех подмножеств множества X . Докажите, что 2^X не равномощно X .