

31. Многочлены в комбинаторике—2

19 июля

1. Докажите, что натуральное число $p > 2$ является простым тогда и только тогда, когда любой p -угольник с равными углами и рациональными длинами сторон является правильным.

2. Погода в мае месяце бывает двух типов: хорошая и не очень. Учёные установили две закономерности:

- 1 мая погода всегда не очень;
- для $2 \leq k \leq 31$ погода k -го мая следующего года не очень тогда и только когда, когда в текущем году погода k и $k - 1$ мая отличалась.

В каком году впервые погода в течение всего мая будет в точности такой же, как в 2007?

3. Последовательность различных натуральных чисел a_1, a_2, \dots такова, что для любого натурального n выполнено $a_n \leq 4.999n$.

(a) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что сумма цифр числа a_n не делится на 5.

(b) Верно ли утверждение пункта (a), если $a_n \leq 5n$ для всех натуральных n ?

4. Изначально в каждой клетке клетчатой плоскости лежит монета решкой вверх. Разрешается выбрать квадрат 2×2 и перевернуть в нём все монеты, кроме верхней правой. Можно ли добиться того, чтобы через конечное число ходов ровно две монеты лежали орлом вверх?

5. На бесконечной клетчатой плоскости выбрали строку и заполнили её нулями, лишь в одну клетку поставив единицу. Строки ниже выбранной последовательно заполняются числами по следующему правилу: каждое число в новой строке — это сумма трёх чисел, стоящих в трёх соседних (по стороне или диагонали) клетках старой строки. Докажите, что в столбце, содержащем единичку исходной строки, нет чисел, дающих остаток 2 при делении на 3.