

Серия 2, поворотная гомотетия

3 июля

Определение. Поворотная гомотетия — композиция поворота и гомотетии с общим центром. Порядок выполнения преобразований может быть любым, т.е. $R_O^\alpha \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\alpha$.

- Вектор \overrightarrow{AB} переходит в вектор \overrightarrow{CD} , повёрнутый на угол α (при $k > 0$) или $\alpha + 180^\circ$ (при $k < 0$), а его длина умножается на $|k|$.
- Сохраняется форма фигур: прямая переходит в прямую, окружность — в окружность, сохраняются отношения отрезков, углы, параллельность.

Упражнения

1) а) Треугольники YAB и YA_1B_1 с общей вершиной Y одинаково ориентированы и подобны. Докажите, что треугольники YAA_1 и YBB_1 также одинаково ориентированы и подобны.

б) Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке X . Докажите, что четырёхугольники $YABX$ и YA_1B_1X — вписанные.

в) Прямые, содержащие отрезки AB и A_1B_1 , пересекаются в точке X . Описанные окружности треугольников AA_1X и BB_1X с центрами C и D пересекаются в точке Y . Докажите, что треугольники YAB и YA_1B_1 подобны, угол $\angle AYA_1$ равен углу между этими прямыми, а $\angle AYB = \angle A_1YB_1 = \angle CYD$.

Задачи

1. Квадраты $ABCD$ и $AXYZ$ одинаково ориентированы. Докажите, что прямые BX , CY и DZ пересекаются в одной точке.

2. **Точка Микеля.** Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X , прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке Y . Докажите, что четыре описанные окружности треугольников, образованных данными прямыми, проходят через одну точку.

3. Стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Точка M — середина AB , точка N — середина CD . Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BCE , ADE и MNE лежат на одной прямой.

4. На диагонали BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрана такая точка K , что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' — центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X . Докажите, что точки A , X , I , D лежат на одной окружности.

5. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D . Описанная окружность треугольника BCD вторично пересекает окружность, проходящую через точки A и D

и касающуюся прямой CD , в точке K . Точка M — середина BC , точка N — середина AD . Докажите, что точки B , M , N и K лежат на одной окружности.

6. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C касается катетов BC и AC в точках D и E соответственно. Точки G и H на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $BD = CG$ и $AE = CH$. Отрезки DH и EG пересекаются в точке M . Докажите, что отличная от M точка пересечения описанных окружностей треугольников DGM и EHM лежит на вписанной окружности треугольника ABC .