

19. Комплексные числа в геометрии: теория

12 июля

Во всех дальнейших сериях будем обозначать поле комплексных чисел через \mathbb{C} .

Рассмотрим плоскость с декартовой системой координат. Вектор с координатами (x, y) будет соответствовать комплексному числу $x + iy$.

Замечание. Сложению и вычитанию комплексных чисел соответствует сложение и вычитание соответствующих векторов на координатной плоскости.

Определение. Модулем комплексного числа $z = x + iy$ назовем $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (по аналогии с модулем вектора).

Зададим на плоскости прямоугольную декартову систему координат Oxy . Тогда каждому комплексному числу z , представленному в алгебраической форме $z = x + iy$, можно однозначно поставить в соответствие точку M плоскости с координатами (x, y) (то есть точке $M(x, y)$ на самом деле сопоставлен вектор \overline{OM}). Комплексное число z называют *комплексной координатой* соответствующей точки M и пишут $M(z)$. Понятно, что модуль комплексного числа z равен расстоянию от точки M до начала координат.

Следовательно, множество точек евклидовой плоскости находится во взаимно однозначном соответствии с множеством комплексных чисел. Эту плоскость называют плоскостью комплексных чисел. Начало O системы координат называют при этом начальной или нулевой точкой плоскости комплексных чисел.

Определение. На комплексной плоскости Oxy отмечена точка $M(z)$. Ориентированный угол (против часовой стрелки) между осью Ox и вектором \overline{OM} называется аргументом комплексного числа z и обозначается через $\arg z$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Пусть $\varphi = \arg z$. Тогда

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Замечание. Легко проверить, что $|1/z| = 1/|z|$, $\arg 1/z = -\arg z$.

Упражнение. Выполнены соотношения:

- $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.
- $\arg z_1 / z_2 = \arg z_1 - \arg z_2$.

Определение. Если дано комплексное число $z = x + iy$, то комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется комплексно сопряженным к данному числу.

Упражнение. Выполнены соотношения:

- $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ для $\forall z \in \mathbb{C}$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ для $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ для $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$ для $\forall z_2 \neq 0, z_1 \in \mathbb{C}$.
- $\arg \bar{z} = -\arg z$ для $\forall z \in \mathbb{C}$.