

21. Спуск и подъем по Виету

13 июля

Упражнение. Докажите, что если для некоторых натуральных чисел a, b, k выполнено равенство $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k$, то k — точный квадрат.

Упражнение. Про натуральные числа a и b известно, что $a^2 + b^2 + 1$ делится на ab . Докажите, что $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 + a + b = 5ab$ не имеет решений в натуральных числах.

2. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c, d , большие 10^{2024} , такие, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + abd + acd + bcd$.

3. Натуральные числа a и b таковы, что число $\frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$ целое. Докажите, что оно равно 5.

4. Какие натуральные значения может принимать выражение $\frac{(a + b + c)^2}{abc}$ при натуральных a, b, c ?

5. Пусть n — натуральное число такое, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = n(xyz + 1)$ имеет решение в натуральных числах. Докажите, что n представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.

6. Дано натуральное число k . Докажите, что существует бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ такая, что для любого n число $a_n^2 + k$ делится на a_{n+1} , а число $a_{n+1}^2 + k$ делится на a_n .

7. Натуральные числа a, b, c таковы, что $|a^2 + b^2 - abc - 2| < c$. Докажите, что число $a^2 + b^2 - abc$ является точным квадратом.

8. Натуральные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2abc$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2}$ является точным квадратом.

9. Решите в натуральных числах уравнение $4a^3 + b + c = 4abc + 2a$.

10. О натуральных числах x и y известно, что x^2 делится на $2xy + y^2 - 1$. Докажите, что $y^2 - 1$ делится на $2x$.