

Серия 15, комплексные числа в геометрии

12 июля

Будем обозначать через z комплексную координату точки Z комплексной плоскости.

Упражнения

1) Пусть z_0 — некоторое фиксированное комплексное число. Какие преобразования комплексной плоскости задают следующие функции:

- а) $w(z) = z + z_0$; б) $w(z) = \bar{z}$; в) $w(z) = z \cdot z_0$, где $|z_0| = 1$;
г) $w(z) = r \cdot z$, где $r \in \mathbb{R}$; д) $wz = z_0 \cdot z$?

2) Дан правильный треугольник ABC и комплексная координата вершины A . Найдите комплексную координату вершины B для положительно ориентированного треугольника ABC , если за начальную точку принята

- а) вершина C ;
б) центр треугольника ABC ;
в) основание высоты AA_1 .

Задачи

Точка O — начало координат, для остальных точек координата соответствует букве.

1. Точка C лежит на отрезке AB и делит его в отношении $p : q$, считая от вершины A . Тогда $c = \frac{q}{p+q}a + \frac{p}{p+q}b$.

2. Найдите комплексную координату точки пересечения медиан треугольника, вершины которого имеют координаты a, b и c .

3. а) Квадрат длины отрезка $AB^2 = (b - a)(\bar{b} - \bar{a})$;
б) $z\bar{z} = 1$ — уравнение единичной окружности с центром в точке O .
в) Напишите общее уравнение окружности.

4. а) $OA \parallel OB \Leftrightarrow \frac{a}{b}$ — действительное число $\Leftrightarrow a\bar{b} = \bar{a}b$;

б) $AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{b-a}{d-c}$ — действительное число $\Leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) = (\bar{a}-\bar{b})(c-d)$;

в) **Критерий коллинеарности трёх точек.** Точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-c}{b-c} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}$.

5. а) $OA \perp OB \Leftrightarrow \frac{a}{b}$ — чисто мнимое число $\Leftrightarrow a\bar{b} + \bar{a}b = 0$;

б) $AB \perp CD \Leftrightarrow \frac{b-a}{d-c}$ — чисто мнимое число $\Leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d) = 0$;

6. Пусть A, B, C, D — точки единичной окружности с центром в O .

- а) $AB \parallel CD \Leftrightarrow ab = cd$;
б) $AB \perp CD \Leftrightarrow ab + cd = 0$.

7. а) $\frac{(a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}}$ — точка, симметричная Z относительно AB .

б) $\frac{(\bar{a} - \bar{b})z + (a-b)\bar{z} + \bar{a}b - a\bar{b}}{2(\bar{a} - \bar{b})}$ — основание перпендикуляра из точки Z на прямую AB .

8. Пусть A, B — точки единичной окружности с центром в 0.

а) $z + ab\bar{z} = a + b$ — уравнение прямой AB ;

б) $\bar{a}z + a\bar{z} = 2$ — уравнение касательной к окружности в точке A ;

в) $\frac{1}{2}(a + b + m - ab\bar{m})$ — основание перпендикуляра из точки M на прямую AB ;

г) $\frac{2ab}{a + b}$ — точка пересечения касательных к окружности в точках A и B .

9. Пусть треугольник ABC вписан в единичную окружность. Докажите, что координата его ортоцентра равна $h = a + b + c$.

10. Точки A, B, C, D лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда

$$\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{a}-\bar{d}} : \frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{d}}.$$

11. Пусть вписанная окружность треугольника ABC является единичной и касается сторон BC, AC, AB в точках P, Q, R . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC имеет координату $\frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)}$.

12. Треугольники ABC и XYZ подобны и одинаково ориентированы (с соответствием сторон) тогда и только тогда, когда

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{z-x}{y-x} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 1 \\ c & z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Дан треугольник ABC . Докажите, что $\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{i}{4}$ — ориентированная площадь треугольника.