

Задачи

1. Пусть $P(x)$ — многочлен, такой, что $P(x) = P(x + 1)$. Докажите, что $P(x)$ — константа.
2. Докажите, что многочлен $(x + 1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x + 1)(2x + 1)$.
3. При каких a и b многочлен $P(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?
4. а) Известно, что многочлен $P(x)$ даёт при делении на $x - 1$ остаток 5, а при делении на $x + 2$ остаток 14. Найдите остаток от деления $P(x)$ на $(x - 1)(x + 2)$.
б) Найдите остаток $R(x)$ от деления многочлена $x^n + x + 2$ на $x^2 - 1$.
5. Докажите, что для любого натурального n , не кратного 3, многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$.
6. Про многочлен $P(x)$ степени 10 с действительными коэффициентами известно, что $P(1) = P(-1), P(2) = P(-2), \dots, P(5) = P(-5)$. Докажите, что $P(x) = P(-x)$ для любого действительного x .
7. Найдите все многочлены $P(x)$, удовлетворяющие тождеству

$$xP(x - 1) = (x - 20)P(x).$$

8. Пусть $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Найдите остаток от деления $P(x^5)$ на $P(x)$.
9. Многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет на интервале $(0; 2)$ три различных действительных корня. Докажите, что $-2 < p + q + r < 0$.
10. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2024$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2024) > \frac{1}{64}$.
11. Многочлены $P(x), Q(x)$ и $R(x)$ с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, при всех действительных x удовлетворяют равенству $P^2(x) + Q^2(x) = R^2(x)$. Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени — действительные.

Серия 4, велосипедисты

4 июля

1. а) Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и прямым углом при вершине D . Точка M — середина отрезка AB . Докажите, что $MC = MD$.

б) Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через Q , вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках A и B соответственно. Докажите, что середина отрезка O_1O_2 равноудалена от середин отрезков QA и QB .

в) Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q . Докажите, что на плоскости найдётся точка со следующим свойством: если провести через точку Q произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках A и B , то эта точка будет равноудалена от A и B .

Лемма о двух велосипедистах. По двум окружностям, пересекающимся в точках P и Q , одновременно из точки P по часовой стрелке выехали два велосипедиста A и B с одинаковыми угловыми скоростями. Докажите, что существует такая фиксированная точка V на плоскости, что в любой момент времени выполнено $AV = BV$. (Точку V называют *точкой двух велосипедистов*)

2. а) По какой траектории движется середина отрезка AB ?

б) В условиях леммы докажите, что $\angle VPQ = 90^\circ$.

3. Через точку A , не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна — в точках P_1, P_2 , другая — в точках Q_1, Q_2 . Произвольная прямая, проходящая через точку A , пересекает окружность в точках M_1 и M_2 , а описанные окружности треугольников AP_1Q_1 и AP_2Q_2 — вторично в точках N_1 и N_2 соответственно. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть его диагонали пересекаются в точке E , точки M и N — середины диагоналей. Вокруг треугольников AEB, BEC, CED, DEA описаны окружности, причём первая и третья пересекаются вторично в точке L , вторая и четвёртая — в точке K . Докажите, что точки M, N, K, L лежат на одной окружности.

5. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и P . Обозначим через MA хорду окружности S_1 , касающуюся окружности S_2 в точке M , а через MB — хорду окружности S_2 , касающуюся окружности S_1 в точке M . На луче MP отложен отрезок $PH = MP$. Докажите, что четырёхугольник $MANB$ можно вписать в окружность.

6. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Касательная к окружности ω_1 в точке A пересекает ω_2 в точке C ; касательная к окружности ω_2 в точке A пересекает ω_1 в точке D . Биссектриса угла CAD пересекает ω_1 и ω_2 в точках E и F соответственно. Внешняя биссектриса угла CAD пересекает ω_1 и ω_2 в точках X и Y .