

# 11. Уравнение Пелля: задачи

7 июля

1. Будем называть натуральное число *достойным внимания*, если оно делится на квадраты всех своих простых делителей. Докажите, что есть бесконечно много таких натуральных чисел  $a$ , что оба числа  $a$  и  $a + 1$  достойны внимания.

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$  таких, что число  $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$

(a) является целым;

(b) является квадратом целого числа.

3. Опишите все натуральные  $k < m$  такие, что

$$1 + 2 + \dots + k = (k + 1) + (k + 2) + \dots + m.$$

4. Определим последовательность  $a_n = n(n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}])$  для всех натуральных  $n$ . Докажите, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует бесконечное количество натуральных  $k$  таких, что  $a_k \leq \frac{1 + \varepsilon}{2\sqrt{2}}$ .

5. Докажите, что для любого натурального  $k$  число  $\frac{(2 + \sqrt{3})^{2k-1} + (2 - \sqrt{3})^{2k-1}}{2} - 1$  является точным квадратом.

6. Найдите все натуральные  $m$  и  $r$  такие, что  $121^r - 2m^2 = 1$ .

7. Решите в целых числах уравнение  $3x^2 - 2y^2 = 1$ .

8. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел  $n$  таких, что число  $n^3 - 2$  представляется в виде суммы двух квадратов целых чисел.

9. Докажите, что уравнение  $x^5 + y^3 + z^2 - 3xyz = 0$  имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

10. Найдите все натуральные числа  $n$  такие, что  $2n^2 + 1$  является степенью тройки.