

32. Комплексные числа в геометрии—3: задачи

19 июля

Упражнение. Докажите, что середины сторон треугольника ABC , основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности (окружности девяти точек треугольника).

Решение. Пусть описанная окружность треугольника ABC является единичной с центром в 0. Тогда середины сторон имеют координаты $m = \frac{a+b}{2}$, $n = \frac{b+c}{2}$ и $k = \frac{c+a}{2}$. Докажем, что каждая из оставшихся шести точек лежит на данной окружности. Сначала разберемся с основаниями высот. Достаточно проверить для основания высоты из A на BC , имеющему координату $h_a = \frac{a+b+c-\bar{a}bc}{2}$. Имеем

$$\frac{h_a - m}{n - m} : \frac{h_a - k}{n - k} = \frac{(c - \bar{a}bc)(b - a)}{(b - \bar{a}bc)(c - a)} = \frac{(ac - bc)(b - a)}{(ab - cb)(c - a)} = \frac{c(b - a)^2}{b(c - a)^2}.$$

Это двойное отношение действительно вещественно, так как

$$\frac{\overline{c(b-a)^2}}{\overline{b(c-a)^2}} = \frac{\frac{1}{c}(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})^2}{\frac{1}{b}(\frac{1}{c} - \frac{1}{a})^2} = \frac{(b-a)^2 c^2 a^2 b}{(c-a)^2 b^2 a^2 c} = \frac{c(b-a)^2}{b(c-a)^2}.$$

Теперь проведем проверку для середин отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами. Как мы помним, ортоцентр треугольника, вписанного в единичную окружность, имеет координаты $a+b+c$. Поэтому середина отрезка AN имеет координату $x = \frac{2a+b+c}{2}$. Имеем

$$\frac{x - m}{n - m} : \frac{x - k}{n - k} = \frac{(a+c)(b-a)}{(a+b)(c-a)}, \quad \frac{\overline{(a+c)(b-a)}}{\overline{(a+b)(c-a)}} = \frac{(\frac{1}{a} + \frac{1}{c})(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})}{(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(\frac{1}{c} - \frac{1}{a})} = \frac{(a+c)(b-a)a^2bc}{(a+b)(c-a)a^2bc} = \frac{(a+c)(b-a)}{(a+b)(c-a)}.$$

Упражнение. Докажите, что $IO^2 = R^2 - 2Rr$, где I , O — центры вписанной окружности и описанной окружностей соответственно, а R и r — их радиусы.

Решение. Введем систему отсчета 2. Тогда центр вписанной окружности имеет комплексную координату $ak + al - ak\bar{l}$. Проекция центра вписанной окружности на прямую BC вычисляется по формуле $\frac{ak^2 + al^2 + ak + al - ak\bar{l}^2 - ak^2\bar{l} + ak\bar{l}}{2} = \frac{ak^2 + al^2 + ak + al - ak\bar{l}^2 - ak^2\bar{l}}{2}$. Тогда, поскольку $R = 1$, мы знаем, что $2Rr$ совпадает с длиной вектора

$$(ak^2 + al^2 + ak + al - ak\bar{l}^2 - ak^2\bar{l}) - 2(ak + al - ak\bar{l}) = a(k+l)^2 - (a + ak\bar{l})(k+l) = -a(1-k)(1-l)(k+l).$$

С другой стороны

$$IO^2 - R^2 = (ak + al - ak\bar{l})(\overline{ak + al - ak\bar{l}}) - 1 = \frac{(k+l-k\bar{l})(k+l-1) - kl}{kl} = -\frac{(1-k)(1-l)(k+l)}{kl}.$$

Вспоминая, что $|a| = |k| = |l| = 1$, получаем требуемое.

Упражнение. В четырехугольнике $ABCD$ отмечены точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Оказалось, что прямая MN образует равные углы со сторонами AD и BC . Докажите, что $AD \parallel BC$ или $AD = BC$.

Решение. Как обычно расположим четырехугольник на комплексной плоскости. Пусть $x = a - d$, $y = b - c$. Тогда $m - n = \frac{x+y}{2}$. Поскольку прямая MN образует равные углы с AD и BC , мы получаем, что при их одинаковой ориентации $AD \parallel BC$. Иначе $\frac{x+y}{2x} : \frac{2y}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{4xy} = \frac{(\bar{x} + \bar{y})^2}{4\bar{x}\bar{y}}$. Приведя к общему знаменателю и раскрыв скобки, имеем $x^2\bar{x}\bar{y} + y^2\bar{x}\bar{y} = \bar{x}^2xy + \bar{y}^2xy$. Переносим все в одну сторону и раскладываем на множители, имеем $(x\bar{x} - y\bar{y})(x\bar{y} - y\bar{x}) = 0$. Если первая скобка равна 0, то $AD = BC$, иначе $x/y = \bar{x}/\bar{y}$, откуда $AD \parallel BC$.

Для самостоятельного решения

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность.
 - (a) Докажите, что ортоцентры треугольников BCD , CDA , DAB , ABC лежат на одной окружности;
 - (b) Докажите, что эта окружность равна описанной окружности треугольника ABC .
2. В треугольнике ABC ($AB < BC$) I — центр вписанной окружности M — середина AC , N — середина дуги ABC описанной окружности треугольника. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.
3. Докажите, что $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC , R — ее радиус, I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC , r_a — радиус этой окружности.
4. На окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, выбрана точка K . Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в такой точке M , что $AM/MD = 2$. Пусть O — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на описанной окружности треугольника COD .
5. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A . Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC . Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке K . Докажите, что точки K , H , C и D лежат на одной окружности.
6. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC , O центр описанной окружности треугольника BIC . Докажите, что $\angle BDO = \angle CEO$.
Подсказка. Не умаляя общности, треугольник ABC положительно ориентирован. Введите систему отсчета 1. Пусть $\angle ABC = \beta$. Тогда комплексное число d/e отвечает за поворот на угол $180^\circ - \beta$ против часовой стрелки. Чтобы найти координату O , достаточно вспомнить задачу 4(b) из серии 19.
7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH . На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Описанная окружность треугольника PMQ пересекает прямую BC вторично в точке X . Докажите, что $BH = CX$.
8. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямые BC , CD в точках P и Q . Докажите, что центр описанной окружности треугольника CPQ лежит на описанной окружности треугольника BCD .
9. На плоскости фиксирован остроугольный треугольник ABC с наибольшей стороной BC . Пусть PQ — произвольный диаметр его описанной окружности, причём точка P лежит на меньшей дуге AB , а точка Q — на меньшей дуге AC . Точки X , Y и Z — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямую AB , из точки Q на прямую AC и из точки A на прямую PQ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на фиксированной окружности (не зависящей от выбора точек P и Q).
10. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что MN проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC . Обозначим через Q и P середины отрезков CM и BN соответственно. Докажите, что $\angle POQ = \angle BAC$.
11. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I . Прямая, проходящая через точку B параллельно AC пересекает лучи AA_1 и CC_1 в точках A_2 и C_2 соответственно. Точка O_a — центр описанной окружности треугольника AC_1C_2 , точка O_c — центр описанной окружности треугольника CA_1A_2 . Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$.
12. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC , T — центр описанной окружности треугольника AOC , M — середина AC . На сторонах AB и BC выбраны точки D и E соответственно так, что $\angle BDM = \angle BEM = \angle B$. Докажите, что $BT \perp DE$.
13. Дан треугольник ABC . Пусть A' — середина стороны BC , B_c — проекция вершины B на биссектрису угла ACB , C_b — проекция вершины C на биссектрису угла ABC . Обозначим через A_0 центр описанной окружности треугольника $A'B_cC_b$. Аналогично определены точки B_0 , C_0 . Докажите, что ортоцентр треугольника $A_0B_0C_0$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC .