

19. Комплексные числа в геометрии: задачи

12 июля

Используя определенную выше терминологию, попробуем решить несколько простых (пока что) задач.

Упражнение. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда комплексные координаты a, b, c, d его вершин удовлетворяют условию $a + c = b + d$.

Решение. Расположим наш четырёхугольник на комплексной плоскости. Пусть $A(a), B(b), C(c), D(d)$. Тогда середина M отрезка AC имеет координату $\frac{a+c}{2}$ так как $\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OC}}{2}$. Аналогично середина отрезка BD имеет координату $\frac{b+d}{2}$. То есть равенство $a+c = b+d$ равносильно совпадению середин отрезков AC и BD , то есть равносильно тому, что $ABCD$ — параллелограмм.

Упражнение. На комплексной плоскости даны точки $A(a), B(b)$ и $C(c)$, причем $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$ для некоторого вещественного $\lambda \neq -1$. Тогда $c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$.

Решение. Как мы знаем, вектору \overline{AC} соответствует комплексное число $c - a$, а вектору \overline{CB} — комплексное число $b - c$. Тогда имеем $c - a = \lambda(b - c)$, откуда $c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$.

Упражнение. Дан положительно ориентированный квадрат $ABCD$ с комплексными координатами вершин $A(a), B(b)$. Найдите комплексные координаты вершин C и D .

Решение. Как мы понимаем, вектор \overline{BA} получается из вектора \overline{BC} поворотом против часовой стрелки на $\pi/2$. Тогда имеем $a - b = (c - b) \cdot (\cos \pi/2 + i \sin \pi/2) = (c - b) \cdot i$, откуда $c = \frac{a - b + bi}{i} = b + bi - ai$.

Теперь найдем координату точки D . Можно записать, что вектор \overline{AD} получается из вектора \overline{AB} поворотом на $\pi/2$ против часовой стрелки. Откуда $d - a = (b - a) \cdot i$, то есть $d = bi - ai + a$.

Упражнение. Докажите, что сумма квадратов длин диагоналей четырехугольника равна удвоенной сумме квадратов его средних линий.

Решение. Обозначим четырехугольник через $ABCD$ и снова расположим его на комплексной плоскости. Обозначим через a, b, c, d , координаты вершин A, B, C, D соответственно. Тогда требуется доказать тождество

$$2 \left(\frac{a + b - c - d}{2} \right) \overline{\left(\frac{a + b - c - d}{2} \right)} + 2 \left(\frac{a + d - b - c}{2} \right) \overline{\left(\frac{a + d - b - c}{2} \right)} = \\ = (a - c) \overline{(a - c)} + (b - d) \overline{(b - d)}.$$

После раскрытия скобок получаем верное равенство.

Для самостоятельного решения

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Пусть M — середина стороны AB , N — середина стороны CD . В четырехугольниках $AMND$ и $MBCN$ отметили середины диагоналей. Докажите, что 4 полученных точки являются вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой.

2. Точки M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL . Докажите, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

3. Докажите, что комплексная координата точки пересечения медиан $M(m)$ треугольника ABC с координатами вершин $A(a), B(b), C(c)$ выражается по формуле $m = \frac{a + b + c}{3}$.

4. (а) Дан положительно ориентированный правильный треугольник ABC с комплексными координатами вершин $A(a), B(b)$. Найдите комплексную координату вершины C .

(б) **Невероятно полезное соображение.** Дан положительно ориентированный треугольник ABC с комплексными координатами вершин a, b, c соответственно и углом $\angle ACB = \varphi$. Докажите, что координата центра описанной окружности треугольника ABC вычисляется по формуле $x = \frac{a\zeta - b}{\zeta - 1}$, где $\zeta = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$.

5. (а) Докажите, что сумма квадратов длин медиан треугольника равна $3/4$ суммы квадратов его сторон.

(б) **Основное тождество параллелограмма.** Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

(с) Дан произвольный четырехугольник $ABCD$. Пусть M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно. Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

6. На плоскости нарисованы два квадрата — $ABCD$ и $KLMN$ (их вершины перечислены против часовой стрелки). Докажите, что середины отрезков AK , BL , CM , DN также являются вершинами квадрата.

7. Из медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC составлен треугольник KMN , а из медиан KK_1 , MM_1 и NN_1 треугольника KMN — треугольник PQR . Докажите, что третий треугольник подобен первому и найдите коэффициент подобия.

8. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники ADB , BEC и CFA , то есть

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = k, \quad \angle ADB = \angle BEC = \angle CFA = \alpha.$$

Докажите, что:

(а) середины отрезков AC , DC , BC и EF — вершины параллелограмма;

(б) у этого параллелограмма два угла равны α , а отношение сторон равно k .

9. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC вовне построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 с гипотенузами AB , BC и AC соответственно. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают.

10. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до вершин треугольника минимальна, если M — точка пересечения медиан треугольника.

11. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

12. Точка M лежит на прямой, содержащей гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC . Докажите, что $MA^2 \cdot BC^2 + MB^2 \cdot AC^2 = MC^2 \cdot AB^2$.

13. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC' , BCD' , CDE' , DEF' , EFA' и FAB' . Оказалось, что треугольник $B'D'F'$ — равносторонний. Докажите, что треугольник $A'C'E'$ также равносторонний.