

Серия 28, теорема Хелли на плоскости

20 июля

Теорема Хелли. Дано конечное семейство выпуклых множеств на плоскости. Известно, что любые три из них пересекаются. Тогда все множества имеют общую точку.

Задачи

- а) Докажите теорему Хелли для 4 выпуклых множеств.
б) Докажите теорему Хелли для n выпуклых множеств ($n \geq 4$).
- На плоскости заданы несколько полуплоскостей, внутренности которых покрывают всю плоскость. Доказать, что из этих полуплоскостей можно выбрать три, внутренности которых тоже покрывают всю плоскость.
- На плоскости даны несколько точек, любые три из которых можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все эти точки можно накрыть таким кругом.
- Теорема Юнга.** Докажите, что любой выпуклый многоугольник диаметра 1 можно покрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
- Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырёхугольников, образованных последовательными вершинами.
- Даны X_1, \dots, X_n — выпуклые многоугольники. Известно, что для любых трёх из них можно параллельно перенести некоторый многоугольник M так, что он одновременно пересечётся с каждым из них. Докажите, что можно так параллельно перенести M , что он пересечётся со всеми многоугольниками X_1, \dots, X_n .