

Вопросы к зачету

21 июля

Комбинаторика

1. Diamond-лемма, доказательство. Задача **2.2**.
2. Применение Diamond-леммы. Задачи **2.3, 2.4, 2.5**.
3. Числовые веса. Задачи **7.1, 7.6, 7.8**.
4. Числовые веса. Задачи **7.3, 7.5, 7.9**.
5. Разделяющие множества. Связанные определения. Задачи **14.1, 14.2, 14.5**.
6. Работа с разделяющими множествами. Задачи **14.4, 14.6, 14.7**.
7. Асимптотические соображения в комбинаторике. Задачи **20.2, 20.3, 20.6**.
8. Лемма Минковского, доказательство.
9. Многочлены в комбинаторике. Задачи **22.3, 22.4, 22.6**.
10. Многочлены в комбинаторике. **Полезная лемма**. Задачи **22.5, 31.1**.
11. Многочлены в комбинаторике. Упражнение **22.1**. Задачи **22.2, 22.7**.
12. Теорема Геринга/Менгера. Доказательство.
13. Теорема Геринга/Менгера. Лемма Холла. Задачи **26.2, 26.3**.
14. Теорема Геринга/Менгера. Задачи **26.5, 26.6**.
15. Многочлены в комбинаторике над нестандартным полем. Задачи **31.2, 31.4**.

Алгебра и Теория чисел

16. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона. Интерполяция многочлена большой степени по небольшому количеству точек. Совпадение многочлена со своим интерполяционным многочленом по достаточному количеству точек. Единственность интерполяционного многочлена не очень большой степени.
17. Сложное — сумма простого: интерполяционный многочлен в форме Лагранжа, существование в Китайской Теореме об Остатках, задача **16.3**.
18. Коэффициент при x^n в интерполяционном многочлене Лагранжа. Задача **8.6**.
19. Определение кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, норма. Обратимые элементы. Описание всех решений уравнений Пелля при заданном фундаментальном решении.
20. Решение уравнения $x^2 - 2y^2 = -1$ в целых числах. Задача **11.4**.
21. Уравнение Пелля. Существование нетривиального решения.
22. Преобразование квадратичной формы. Задачи **10.5(d), 11.7**.
23. Системы вычетов. Задачи **18.2, 18.3, 18.7**.
24. Подъем по Виету. Задачи **21.2, 21.6**.
25. Спуск по Виету. Задачи **21.1, 21.3**.
26. Квадратичный закон взаимности. Доказательство.
27. Рождественская теорема Ферма. Задачи **28.1, 28.2, 28.4**.
28. Обобщения рождественской теоремы Ферма. Задачи **28.5, 28.7**.
29. Кольца $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$. Обратимые элементы, деление с остатком, теорема о линейном представлении нод. Основная теорема арифметики.
30. Неоднозначность разложения на простые в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Элемент с простой нормой является простым. Задача **33.2**.
31. Классификация Пифагоровых троек. Задачи **33.4, 33.5**.

Начало математического анализа

- 32. Бесконечные десятичные дроби: отношение порядка, принцип супремума.
- 33. Лемма о вложенных отрезках: вывод из принципа супремума.
- 34. Предел последовательности: определение, единственность, ограниченность, арифметические операции (сложение с доказательством; умножение, переход к обратному и деление — только формулировки).
- 35. Теорема о монотонной ограниченной последовательности (теорема Вейерштрасса).
- 36. Сумма ряда: определение. Задача 6.7 (теорема Римана об условно сходящихся рядах).
- 37. Асимптотическое поведение функций: o -символика, асимптотическая эквивалентность многочлена и его старшего члена, асимптотическое сравнение многочлена и показательной функции. Задачи 12.9 и 12.10b).
- 38. Сходящиеся последовательности из целых чисел. Задача 15.1.
- 39. Аналитическая теория чисел. Задачи 30.1, 30.2, 30.4.

Геометрия

- 40. Двойные отношения, определение для четверки точек на прямой, четверки прямых, корректность определения. Проецирование четверки прямых на прямую. Задача 5.1.
- 41. Гармонические четверки. Задачи 5.3, 5.5.
- 42. Применение двойных отношений. Задачи 5.4a, 5.7, 5.9.
- 43. Двойное отношение четверки точек на окружности и корректность определений. Проецирование через точку на окружности. Гармонические четырёхугольники, равносильность определений. Задачи 13.1, 13.2.
- 44. Другие способы проецирования. Задачи 13.4a, 13.4b, 13.7.
- 45. Двойные отношения на прямых и на окружности. Задачи 13.3b, 13.6.
- 46. Инверсия + симметрия. Задачи 23.1, 23.2, 23.5, 23.6.
- 47. Полувыписанная окружность, основные свойства. Задачи 29.1, 29.2.
- 48. Полувыписанная окружность. Задачи 23.3, 29.3.
- 49. Комплексные числа в геометрии. Задачи 19.1, 19.2, 19.7.
- 50. Комплексные числа в геометрии. Задачи 19.4, 19.8.
- 51. Комплексные числа в геометрии. Выбор системы отсчета. Задачи 19.10, 19.11.
- 52. Комплексные числа в геометрии. Критерии параллельности, перпендикулярности. Уравнение прямой. Задача 27.2.
- 53. Комплексные числа в геометрии. Система отсчета, связанная с описанной окружностью. Уравнение хорды, уравнение касательной, формула проекции на хорду, формула ортоцентра. Задачи 27.1, 27.5.
- 54. Комплексные числа в геометрии. Двойное отношение четверки точек. Критерий равенства углов, меньших 180° , критерий «вписанности». Задачи 32.1, 32.5.
- 55. Комплексные числа в геометрии. Система отсчета с единичной вписанной окружностью. Подобие одинаково/противоположно ориентированных треугольников. Задача 32.6.
- 56. Комплексные числа в геометрии. Система отсчета с одной вершиной треугольника, единичной описанной окружностью и углами поворотов, координаты основных точек. Задача 32.2.
- 57. Комплексные числа в геометрии. Задачи 32.8, 32.9.