

24. Уравнение Пелля-2

15 июля

Сегодня мы наконец докажем теорему о существовании нетривиального решения уравнения Пелля.

Удивительно короткое доказательство теоремы о существовании решения уравнения Пелля опубликовал в 2008 году Н. Вайлдбергер (Австралия). Все ранее известные доказательства были не совсем элементарны.

Положим $g(x, y) = x^2 - dy^2$ и будем преобразовывать эту квадратичную форму следующим образом. Если на очередном шаге получилась форма $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, то преобразуем ее или в $g(x + y, y)$, или в $g(x, x + y)$ так, чтобы у новой формы коэффициент при x^2 был > 0 , а при y^2 был < 0 — как и у начальной формы.

1. (a) Прделайте эти преобразования для формы $x^2 - 2y^2$.

(b) На каком-то шаге должно стать очевидным, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет решение.

2. Аналогично, проделайте алгоритм для формы $x^2 - 7y^2$.

3. (a) Что происходит с дискриминантом формы $D = b^2 - 4ac$ при этих преобразованиях?

(b) Докажите, что на каждом шаге преобразование может быть выбрано ровно одним способом.

(c) Докажите, что в полученной последовательности форм встретится только конечное число форм. Следовательно, последовательность заикнется.

(d) Докажите, что по очередной форме можно восстановить предыдущую. Следовательно, последовательность заикнется без предпериода.

(e) Докажите, что у уравнения Пелля существует нетривиальное решение.