

16. Сложное — сумма простого

10 июля

Пример. Известно, что скалярное произведение векторов — линейная функция по аргументам. Как из этого получить формулу для скалярного произведения векторов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) ?

Достаточно написать, что первый вектор равен $x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y$, а второй — $x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y$ где \vec{e}_x и \vec{e}_y — базисные векторы, \vec{e}_x — вектор $(1, 0)$, \vec{e}_y — вектор $(0, 1)$. Тогда

$$(x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y, x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y) = x_1x_2(\vec{e}_x, \vec{e}_x) + y_1y_2(\vec{e}_y, \vec{e}_y) + x_1y_2(\vec{e}_x, \vec{e}_y) + x_2y_1(\vec{e}_y, \vec{e}_x) = x_1x_2 + y_1y_2,$$

в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $(\vec{e}_x, \vec{e}_x) = (\vec{e}_y, \vec{e}_y) = 1$, $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = (\vec{e}_y, \vec{e}_x) = 0$.

1 (китайская теорема об остатках, существование). Пусть m_1, m_2, \dots, m_n — попарно взаимно простые натуральные числа.

- а) Докажите, что существует такое число M_1 , что $M_1 \equiv 1 \pmod{m_1}$, $M_1 \equiv 0 \pmod{m_i}$, $i > 1$.
- б) Докажите, что для любых попарно взаимно простых натуральных чисел m_1, m_2, \dots, m_n и для любых целых чисел a_1, a_2, \dots, a_n существует такое число a , что $a \equiv a_i \pmod{m_i}$ для каждого i .

2. В клетчатой таблице 4×4 идет игра «Жизнь» по следующим правилам: клетка живет, если на предыдущем ходу у нее было нечётное число живых соседей и мертва в противном случае. Найдите максимум периода по всем расстановкам.

3. По кругу стоят 128 целых чисел. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 128.

4. По окружности расставлены p^n целых чисел (p — простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2012} , если за ход из каждого числа вычитается его

- а) левый сосед;
- б) ℓ -ый сосед слева, ℓ фиксировано;
- с*) ℓ -ый сосед слева, ℓ может меняться от хода к ходу.

5. На планете каждая страна граничит не более, чем с семью другими. Страны хотят перераспределить свой золотой запас так, чтобы у любых двух граничащих стран количество золота различалось бы не более, чем в 13 раз. Докажите, что это перераспределение можно провести так, чтобы каждая страна лишилась не более, чем половины своего золота.