

## Серия 4, велосипедисты

4 июля

1. а) Дана прямоугольная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  и прямым углом при вершине  $D$ . Точка  $M$  — середина отрезка  $AB$ . Докажите, что  $MC = MD$ .

б) Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Прямая, проходящая через  $Q$ , вторично пересекает  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Докажите, что середина отрезка  $O_1O_2$  равноудалена от середин отрезков  $QA$  и  $QB$ .

в) Даны две окружности, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что на плоскости найдётся точка со следующим свойством: если провести через точку  $Q$  произвольную прямую, пересекающую окружности вторично в точках  $A$  и  $B$ , то эта точка будет равноудалена от  $A$  и  $B$ .

**Лемма о двух велосипедистах.** По двум окружностям, пересекающимся в точках  $P$  и  $Q$ , одновременно из точки  $P$  по часовой стрелке выехали два велосипедиста  $A$  и  $B$  с одинаковыми угловыми скоростями. Докажите, что существует такая фиксированная точка  $V$  на плоскости, что в любой момент времени выполнено  $AV = BV$ . (Точку  $V$  называют *точкой двух велосипедистов*)

2. а) По какой траектории движется середина отрезка  $AB$ ?

б) В условиях леммы докажите, что  $\angle VPQ = 90^\circ$ .

3. Через точку  $A$ , не лежащую на окружности, проведены две прямые, пересекающие эту окружность, одна — в точках  $P_1, P_2$ , другая — в точках  $Q_1, Q_2$ . Произвольная прямая, проходящая через точку  $A$ , пересекает окружность в точках  $M_1$  и  $M_2$ , а описанные окружности треугольников  $AP_1Q_1$  и  $AP_2Q_2$  — вторично в точках  $N_1$  и  $N_2$  соответственно. Докажите, что  $M_1N_1 = M_2N_2$ .

4. Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Пусть его диагонали пересекаются в точке  $E$ , точки  $M$  и  $N$  — середины диагоналей. Вокруг треугольников  $AEB, BEC, CED, DEA$  описаны окружности, причём первая и третья пересекаются вторично в точке  $L$ , вторая и четвёртая — в точке  $K$ . Докажите, что точки  $M, N, K, L$  лежат на одной окружности.

5. Две окружности  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются в точках  $M$  и  $P$ . Обозначим через  $MA$  хорду окружности  $S_1$ , касающуюся окружности  $S_2$  в точке  $M$ , а через  $MB$  — хорду окружности  $S_2$ , касающуюся окружности  $S_1$  в точке  $M$ . На луче  $MP$  отложен отрезок  $PH = MP$ . Докажите, что четырёхугольник  $MANB$  можно вписать в окружность.

6. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Касательная к окружности  $\omega_1$  в точке  $A$  пересекает  $\omega_2$  в точке  $C$ ; касательная к окружности  $\omega_2$  в точке  $A$  пересекает  $\omega_1$  в точке  $D$ . Биссектриса угла  $CAD$  пересекает  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Внешняя биссектриса угла  $CAD$  пересекает  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $X$  и  $Y$ .

соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку  $XU$  касается описанной окружности треугольника  $BEF$ .

7. Окружности  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  проходят через точку  $P$ . Касательная к  $\omega_1$ , проведённая в точке  $P$ , вторично пересекает  $\omega_2$  и  $\omega_3$  в точках  $P_{1,2}$  и  $P_{1,3}$  соответственно. Точки  $P_{2,1}$ ,  $P_{2,3}$ ,  $P_{3,1}$  и  $P_{3,2}$  определяются аналогично. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам  $P_{1,2}P_{1,3}$ ,  $P_{2,1}P_{2,3}$  и  $P_{3,1}P_{3,2}$  пересекаются в одной точке.