

Серия 14, мощность множеств и бесконечные конструкции 12 июля

Для конечных множеств мы можем корректно определить понятие размера или мощности. Мощность — это просто количество элементов в этом множестве. Однако для бесконечных множеств это определение оказывается неприменимым.

Определение. Множество называется *бесконечным*, если оно содержит конечные подмножества сколь угодно большой мощности.

Примеры. Следующие множества бесконечны: множество натуральных чисел; множество рациональных чисел; множество точек на отрезке $[0; 1]$.

Определение. Бесконечное множество называется *счётным*, если существует биекция этого множества с натуральным рядом.

Определение. Два множества, между которыми существует биекция, называются *равномощными*, говорят также, что эти множества имеют одинаковую мощность. Таким образом, счётные множества — это множества, равномощные натуральному ряду.

Понятно, что множества, равномощные счётному, счётны.

Задачи.

- Докажите счётность следующих множеств:
 - множество целых чисел;
 - множество целых точек на координатной плоскости;
 - множество клеток бесконечной шахматной доски;
 - бесконечное подмножество натурального ряда;
 - множество рациональных чисел.
- Являются ли счётными множества многочленов:
 - линейных с целыми коэффициентами;
 - линейных с рациональными коэффициентами;
 - n -ой степени с рациональными коэффициентами;
 - всех многочленов с рациональными коэффициентами?
- Докажите, что бесконечное множество непересекающихся интервалов на прямой счётно.
- Докажите, что объединение а) конечного; б) счётного множества счётных множеств счётно.
- Докажите счётность следующих множеств:
 - множество всех текстов (конечных), написанных на русском языке;
 - множество конечных последовательностей натуральных чисел;
 - бесконечное множество непересекающихся восьмерок на плоскости?

6. В последовательности чисел сумма первых n членов больше n для любого натурального n . Докажите, что эта последовательность содержит бесконечно много положительных чисел.

7. *Диагональный метод Кантора.* Дана последовательность бесконечных десятичных дробей. Постройте ещё одну такую дробь, отличную от всех дробей последовательности.

8. а) Дана последовательность бесконечных в обе стороны двоичных дробей. Докажите, что есть ещё одна такая дробь, отличная от всех данных.

б) Дана последовательность бесконечных в обе стороны двоичных цепочек (без запятой). Цепочки, отличающиеся друг из друга сдвигом, считаются равными. Докажите, что есть ещё одна цепочка, не равная ни одной данной.