

Серия 24, большее в меньшем

18 июля

Теорема. Пусть вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на рёбрах другого тетраэдра $ABCD$. Тогда сумма длин всех рёбер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем $4/3$ суммы длин всех рёбер тетраэдра $ABCD$.

1. а) Один тетраэдр расположен внутри другого. Может ли периметр внутреннего тетраэдра быть больше периметра внешнего?

б) Один треугольник расположен внутри другого. Может ли периметр внутреннего треугольника быть больше периметра внешнего?

в) Назовем грань тетраэдра *наибольшей*, если её периметр не меньше периметра каждой из остальных граней. Докажите, что периметр тетраэдра не превосходит удвоенного периметра его наибольшей грани.

г) Треугольник расположен внутри выпуклого многоугольника. Докажите, что периметр треугольника не превосходит периметра многоугольника.

д) Докажите, что периметр фигуры-проекции тетраэдра на плоскость меньше $2/3$ суммы длин проекций рёбер тетраэдра на эту плоскость.

е) Докажите Теорему.

Определение. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если для любых $x_1, x_2 \in I$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ выполнено неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Определение. *Надграфиком* функции $y = f(x)$ называется множество точек (x, y) координатной плоскости таких, что $y \geq f(x)$.

2. а) Докажите, что функция выпукла на промежутке тогда и только тогда, когда её надграфик на этом промежутке — выпуклое множество.

б) Докажите, что сумма функций, выпуклых на промежутке, также является выпуклой на этом промежутке функцией.

в) Докажите, что наибольшее значение функции, выпуклой на отрезке, достигается на границе этого отрезка.

г) Пусть $f(X)$ — выпуклая функция точки X . Пусть X пробегает некоторый отрезок. Докажите, что наибольшее значение f достигается на границе этого отрезка.

д) Докажите, что функция расстояния от точки пространства до некоторой фиксированной точки этого пространства является выпуклой на всем пространстве.

е) Пусть A, B, C фиксированные точки пространства. Докажите, что периметр тетраэдра $ABCX$ является выпуклой функцией точки X .

ж) Докажите Теорему.