

27. Комплексные числа в геометрии—2: задачи

17 июля

Упражнение. Дан треугольник ABC . Пусть O — центр его описанной окружности, а H — точка пересечения высот. Обозначим через D точку, симметричную точке O относительно прямой AC . Докажите, что $OD = BH$.

Решение. Не нарушая общности, пусть описанная окружность треугольника ABC является единичной с центром в нуле. Тогда точка пересечения высот треугольника ABC имеет комплексную координату $a + b + c$. Заметим, что середина отрезка AC является также серединой отрезка OD , откуда $d + 0 = a + c$, то есть $d = a + c$. Тогда вектору \overrightarrow{OD} соответствует комплексное число $a + c$, а вектору \overrightarrow{BH} — комплексное число $h - b = a + c$, то есть $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BH}$, откуда $OD = BH$.

Упражнение. Докажите, что если средние линии четырехугольника равны, то его диагонали перпендикулярны, и обратно.

Решение. Расположим четырехугольник на комплексной плоскости. Пусть $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ — комплексные координаты его вершин. Пусть K , L , M , N — середины сторон AB , BC , CD , DA соответственно. Тогда $KM^2 = \frac{1}{4}(a+b-c-d)(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}-\bar{d})$. Аналогично $LN^2 = \frac{1}{4}(b+c-a-d)(\bar{b}+\bar{c}-\bar{a}-\bar{d})$. То есть условие равенства средних линий равносильно равенству

$$(a + b - c - d)(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c} - \bar{d}) = (b + c - a - d)(\bar{b} + \bar{c} - \bar{a} - \bar{d});$$

$$2(a\bar{b} + b\bar{a} + c\bar{d} + d\bar{c}) = 2(a\bar{d} + d\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b}), \quad a\bar{b} + b\bar{a} + c\bar{d} + d\bar{c} = a\bar{d} + d\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b}.$$

С другой стороны перпендикулярность диагоналей равносильна равенству

$$(a - c)(\bar{b} - \bar{d}) + (\bar{a} - \bar{c})(b - d) = 0.$$

После несложного раскрытия скобок получаем

$$a\bar{b} + b\bar{a} + c\bar{d} + d\bar{c} - b\bar{c} - c\bar{b} - a\bar{d} - d\bar{a} = 0, \quad a\bar{b} + b\bar{a} + c\bar{d} + d\bar{c} = a\bar{d} + d\bar{a} + b\bar{c} + c\bar{b}.$$

То есть мы получили то же самое условие.

Упражнение. Касательные в концах A и B диаметра окружности пересекаются с третьей касательной в точках X и Y соответственно. Докажите, что произведение $AX \cdot BY$ не зависит от положения третьей касательной.

Решение. Не нарушая общности, пусть окружность из условия является единичной с центром в 0. Точки $A(a)$ и $B(b)$ лежат на этой окружности, причем $b = -a$, а третья касательная проходит через точку $C(c)$ данной окружности. Запишем систему уравнений для точки x :

$$x + \bar{x}a^2 = 2a, \quad x + \bar{x}c^2 = 2c,$$

откуда $x = \frac{2ac^2 - 2ca^2}{c^2 - a^2} = \frac{2ac}{a + c}$. Аналогично $y = \frac{2bc}{b + c}$. Теперь заметим, что

$$(x - a)(y - b) = \frac{a(c - a)}{c + a} \cdot \frac{b(c - b)}{c + b} = \frac{a(c - a)}{c + a} \cdot \frac{-a(c + a)}{c - a} = -a^2,$$

то есть $|AX \cdot BY| = |-a^2| = 1$.

Для самостоятельного решения

1. Прямая Эйлера. Дан треугольник ABC . Пусть O — центр описанной окружности, M — точка пересечения медиан, H — точка пересечения высот. Докажите, что точки O, M, H лежат на одной прямой, причем $\overline{MH} = 2\overline{OM}$.

2. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух его противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон.

3. Дан треугольник ABC . Обозначим через O центр его описанной окружности, через R — ее радиус, через H — точку пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что

$$OH^2 = 9R^2 - AB^2 - BC^2 - CA^2.$$

4. Дан треугольник ABC . Пусть O — центр его описанной окружности, а H — точка пересечения высот. Обозначим через D точку, симметричную точке O относительно прямой AC . Докажите, что $OD = BH$.

5. (а) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Обозначим через H_D ортоцентр треугольника ABC . Аналогично определим точки H_A, H_B, H_C . Докажите, что прямые AH_A, BH_B, CH_C, DH_D пересекаются в одной точке.

(б) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в O . Обозначим через H_D ортоцентр треугольника ABC . Пусть N_D — середина отрезка OH_D . Аналогично определим точки $H_A, H_B, H_C, N_A, N_B, N_C$. Докажите, что прямые AN_A, BN_B, CN_C, DN_D пересекаются в одной точке.

6. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC , AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из A на прямую CO . Докажите, что прямая HP проходит через середину отрезка AB .

7. Известно, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общую описанную окружность. Оказалось, что $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из вершин одного треугольника на прямые, содержащие соответственные стороны другого, пересекаются в одной точке, лежащей на данной окружности.

8. Касательная в точке C к окружности пересекает в точке M прямую, содержащую диаметр AB этой окружности. Перпендикуляр к AB в точке M пересекает прямые AC и BC в точках D и E . Докажите, что точка M — середина отрезка DE .

9. Пусть точки A, B, C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B . Из точки P , лежащей на прямой b , опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BC соответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.

10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AC . Точки K и M — проекции вершин A и C соответственно на прямую BD . Через точку K проведена прямая, параллельная BC и пересекающая AC в точке P . Докажите, что угол KPM — прямой.

11. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC из вершин A, B, C соответственно. обозначим через A_B, A_C проекции точки A_1 на прямые AB и AC соответственно. Аналогично определим точки B_A, B_C, C_A, C_B . Докажите, что $A_BA_C = B_AB_C = C_AC_B$.

12. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C_0 и B_0 — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P , а прямые CH и OB_0 — в точке Q . Оказалось, что четырёхугольник $OPHQ$ — ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

13. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром в точке O . Прямая ℓ , параллельная прямой AO , пересекает отрезки AB, BC и луч CA в точках D, E и F соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника AFD , середина отрезка AE и точка O лежат на одной прямой.