

Вступительная олимпиада

2 июля

1. Два действительных числа a и b таковы, что выполняется равенство

$$a^2 + 2a = 2b^2 + 13b - 8.$$

Известно, что если изменить a , то равенство точно перестанет быть верным. Найдите все возможные значения b .

2. На плоскости отметили точку P . Паша хочет провести n прямых, не проходящих через P , так, чтобы каждый луч, выходящий из P , пересекал хотя бы 10 проведенных прямых. При каком наименьшем n Паша может добиться желаемого?

3. На доске написано натуральное число m . За один ход число m заменяется на сумму числа m и квадрата наибольшего собственного делителя m . Могло ли после 2024 шагов на доске остаться число, являющееся точным квадратом?

4. При каких натуральных n на доску $n \times n$ можно выставить несколько ладей так, чтобы каждая клетка (включая клетки, на которых стоят ладьи) была побита ровно 3 ладьями? Ладья бьет клетку, на которой стоит; ладьи не бьют сквозь друг друга.

5. Точка P выбрана на описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Пусть D , E и F — точки, симметричные P относительно средних линий треугольника ABC , параллельных BC , CA и AB соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ADP , BEP и CFP имеют общую точку, отличную от P .

6. В n -элементном множестве выбрали m различных подмножеств A_1, A_2, \dots, A_m . Докажите неравенство

$$n^2 \cdot \sum_{i,j,k=1}^m |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|)^3.$$