

## 9. Разнобой «Профи ли ты? Часть вторая»

5 июля

1. Найдите все натуральные  $n$  и  $k$  такие, что  $n! + n = n^k$ .
2. Паша задумал перестановку  $a_1, a_2, \dots, a_n$  натуральных чисел  $1, 2, \dots, n$  ( $n > 1$ ). Игорь может выбрать пару натуральных чисел  $1 \leq i < j \leq n$ , сообщить ее Паше, а он в ответ назовет Игорю одно из чисел  $ia_j$  или  $ja_i$ . Игорь не знает, какое из этих 2 чисел ему называют. При каких натуральных  $n$  Игорь гарантированно сможет отгадать всю перестановку, задав несколько таких вопросов?
3. Игорь задумал многочлен от двух переменных  $P(x, y)$ . Саша обнаружил, что какое бы целое неотрицательное число  $n$  он не подставил вместо одной из переменных, останется многочлен от второй переменной степени не выше  $n$  (возможно, нулевой). Альбина утверждает, что тогда многочлен  $P(x, x)$  — чётной степени. Права ли Альбина?
4. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB < BC < CA$ . Точки  $H_C$  и  $M_C$  — основание высоты из вершины  $C$  и середина стороны  $AB$  соответственно, а  $H$  — ортоцентр треугольника. Пусть  $I_C$  — центр вписанной окружности треугольника  $HH_CM_C$ , а  $J_C$  — центр внеписанной окружности треугольника  $HH_CM_C$ , касающейся стороны  $HM_C$ . Аналогично определяются точки  $H_B, M_B, I_B$  и  $J_B$ . Докажите, что точки  $I_B, I_C, J_B, J_C$  лежат на одной окружности.
5. Рассмотрим граф, в котором 1024 вершины — это всевозможные строки из нулей и единиц длины 10, а ребро проводится между двумя строками, если они отличаются ровно в одной позиции. В этом графе выбрали 512 рёбер, не имеющих общих концов, и покрасили в красный. Остальные рёбра покрасили в синий. Докажите, что в графе найдется цикл длины не более чем 18, в котором красные и синие рёбра чередуются.

