Двадцать четвертая Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2010 г.

6 класс, группа G

Преподаватели:
А. Л. Глазман, А. Р. Вотяков, С. С. Малых,

Теория чисел. 05.07.2010

1. Натуральное число дает остаток 8 при делении на 63. Какой остаток оно может давать при делении а) на 7; б) на 126; в) на 42?

2. Найдите все простые числа p такие, что а) числа $2p-1$ и $2p+1$ также простые; б) числа p^2+4 и p^2+6 также простые; б) числа p^3+6 и p^3+22 также простые.

3. Александр Львович называет три цифры (возможно, повторяющиеся) и обещает шоколадку тому шестикласснику, который составит из них одно- , двух- или трёхзначное число, делящееся на 3. Всегда ли такой найдется?

4. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

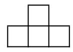
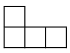
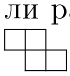
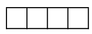
5. а) Докажите, что $\overline{abc}-\overline{cba}$ делится на 99, где a, b, и c — цифры, а $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ — трехзначные числа, составленные из этих цифр в указанном порядке. б) Докажите, что $\overline{ab}+\overline{ba}$ делится на 11.

6. Каждый мальчик-шестиклассник принес по 15 цветочков, и весь цветочный фонд отдали девочкам, причем каждая получила по 41 цветку. Докажите, что отряд М6 можно разбить на несколько (больше одной) равных команд так, чтобы в каждой команде было больше одного человека.

7. Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причем $\overline{abc}-\overline{def}$ делится на 7. Докажите, что само число делится на 7.

8. Саша и Маша загадали по натуральному числу и сказали их Васе. Вася написал на одном листе сумму загаданных чисел, а на другом - их произведение, после чего один из листов спрятал, а другой (на нем оказалось написано число 2002) показал Саше и Маше. Увидев это число, Саша сказал, что не знает, какое число загадала Маша. Услышав это, Маша сказала, что не знает, какое число загадал Саша. Какое число загадала Маша?

Комбинаторика. 05.07.2010

1. Можно ли разрезать квадрат 10×10 на фигурки вида а) ; б) ; в) ; г) ? (Фигурки можно как угодно поворачивать и даже переворачивать). д) На какие из этих фигурок можно разрезать квадрат 16×16? е) Рассмотрим трехмерные аналоги наших фигурок (вместо клеток берем кубики $1 \times 1 \times 1$). На какие из них можно разрезать куб $10 \times 10 \times 10$?

2. Из 77 гномов молоко любят 40, кефир любят 36, а йогурт — 43. При этом пить и молоко, и кефир любят 20 гномов, кефир и йогурт любят 22 гнома, а йогурт и молоко — 21 гном, при этом семеро любимых Белоснежкой гномов любят все три напитка. Сколько капризных гномов отказываются пить по вечерам кисломолочные продукты?

3. В Вишкиле 15 корпусов, между ними электрик протянул провода так, чтобы каждый провод соединял ровно два корпуса. При этом он доложил Игорю Соломоновичу, что из каждого корпуса сейчас торчит по 5 проводов. Докажите, что электрик - не математик.

4. В графстве Липшир живут 20 джентльменов. Усадьба каждого из них соединена дорогами со всеми остальными усадьбами. Сколько всего дорог в графстве?

5. У любых двух членов клуба “Зубастик” — разные наборы зубов. (Именно, наборы, а не количества: двум зубастикам совсем не запрещено иметь, к примеру, по одному, но разному зубу.) Какое наибольшее количество членов может быть в этом клубе? (Для тех, кто не в курсе: у человека может быть максимум 32 зуба.)

6. У химиков в ЛМШ 24 ученика, и каждый день трое из них дежурят. Через некоторое время руководитель химиков заметил, что каждый с каждым дежурил ровно по одному разу. Докажите, что руководитель химиков - не математик.

7. Город называется большим северным, если по отношению к любому другому городу он либо больше, либо севернее. Аналогично определяется маленький южный город. В Тридевятом царстве все города, кроме Задворска, являются и большими северными и малыми южными одновременно. Докажите, что Задворск — тоже большой северный и при этом также малый южный город.

8. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются "непохожими если они различаются не менее, чем по 51 признаку. Докажите, что в справочнике не может находиться больше 50 попарно непохожих растений.

Теория чисел-2. 06.07.2010

1. Докажите, что число 1111103 не является а) квадратом; б) суммой двух квадратов.

2. а) Натуральное число дает остаток 1 при делении на 9 и остаток 1 при делении на 13. Какой остаток оно дает при делении на 117? б) Натуральное число дает остаток 8 при делении на 9 и остаток 12 при делении на 13. Какой остаток оно дает при делении на 117?

3. а) Докажите, что произведение любых двух последовательных натуральных чисел делится на 2. б) Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6. в) Найдите степень вхождения $p \in \mathbb{P}$ в $k!$, где $k \in \mathbb{N}$. г) Докажите, что произведение любых k последовательных натуральных чисел делится на $k!$.

4. $A = (16a+17b)(17a+16b)$ делится на 11. Докажите, что A делится на 121.

5. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = 3z^2$.

6. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят либо на 2, либо на 3 и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет записано на доске ровно через час, не будет равно 54.

7. a, b, n — натуральные числа такие, что $(a + 4b)(b + 4a) = 5^n$. Докажите, что $a = b$.

8. Докажите, что сумма цифр числа 1999^{100} не менее десяти.

Разнобой. 06.07.2010

1. По кругу в некотором порядке стоят 9 знаков: 5 плюсов и 4 минуса. За одну операцию между каждыми двумя соседними знаками одновременно вписывают еще по одному: между одинаковыми — плюс, между разными — минус, после чего исходные 9 знаков стирают. Докажите, что при помощи нескольких таких операций нельзя получить 9 плюсов.

2. Можно ли так отметить на плоскости 10 красных, 10 синих и 10 зеленых точек, все расстояния между которыми попарно различны, чтобы для каждой красной точки ближайшая к ней цветная была синей, для каждой синей — зелёной, а для каждой зелёной — красной?

3. На бесконечном листе клетчатой бумаги отметили 1000 клеток. Докажите, что найдется отмеченная клетка, у которой а) не более двух отмеченных соседей по стороне; б) не более четырех отмеченных соседей по стороне или по углу.

4. В трамвае ехало 60 человек, среди которых были контролеры, кондукторы, граждане, выдававшие себя за контролеров, граждане, выдававшие себя за кондукторов, и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконтролеров и лжекондукторов в 4 раза меньше числа настоящих кондукторов и контролеров. Общее число контролеров (вместе с лжеконтролерами) в 7 раз больше числа кондукторов (в том числе лжекондукторов). Сколько в трамвае простых пассажиров?

5. В клубе "Дружок" у каждого не более пяти врагов. Докажите, что членов клуба можно рассадить в а) шесть комнат так, чтобы никакие два человека из одной комнаты не были врагами; б) три комнаты так, чтобы каждый человек жил вместе не более, чем с одним врагом.

6. В графстве каждый джентльмен принадлежит одной из двух партий: партии любителей мяса или партии любителей рыбы. Каждая дорога в этом графстве соединяет усадьбы джентльменов из разных партий. Известно, тем не менее, что каждый из джентльменов может проехать по дорогам к любому своему соратнику по партии. Докажите, что любой джентльмен может проехать к любому другому джентльмену.

7. При каких m и n клетки таблицы $m \times n$ можно покрасить в 2 цвета так, чтобы у каждой клетки было нечетное число соседей того же цвета (соседними считаются клетки, имеющие общую вершину)?

Графы. 07.07.2010

1. Антон хочет расставить 239 шахматных коней в клетках доски 100×100 так, чтобы каждый из них бил ровно а) трех; б) четырех других. Удастся ли ему это сделать?

2. В классе 20 учеников. На уроке русского языка каждый ученик дал подзатыльник не менее, чем 10 другим. Докажите, что какие-то двое дали подзатыльники друг другу.

3. В стране несколько городов, из каждого выходит ровно 15 дорог. В целях экономии на каждой дороге введено одностороннее движение. Докажите, что есть город, в который можно въехать хотя бы из восьми других городов.

4. В государстве 2007 городов. Из столицы выходит 239 дорог, из города Тьмутараканьска — одна дорога, а из всех остальных городов — по 20 дорог. Докажите, что из из столицы можно проехать в Тьмутараканьск.

5. а) Верно ли, что в компании из пяти человек всегда есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых? б) А в компании из шести человек? в) Докажите, что в компании из 18 человек всегда есть либо четверо попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых.

6. Каждая из 100 девушек послала одному или нескольким из 100 юношей свою фотографию. Всего было послано больше 100 фотографий. Докажите, что какой-то из юношей может выкинуть все полученные им фотографии, но при этом фотография каждой девушки останется у кого-либо из остальных юношей.

Игры. 07.07.2010

1. В крайних клетках полоски 1×103 стоит по фишке. Саша и Паша ходят по очереди: за ход можно сдвинуть *свою* фишку вправо или влево на любое количество клеток от 1 до 4, но нельзя перепрыгивать через фишку противника и ставить две фишки на одну клетку. Проигрывает не имеющий хода. Первым ходит Саша. Кто выигрывает при правильной игре?

2. По кругу расставлены 50 фишек. Дима и Саша по очереди убирают фишки, выбирая каждым своим ходом любые три, пока не останется всего две фишки. Если две оставшиеся фишки вначале не стояли рядом, выигрывает Дима, а в противном случае выигрывает Саша. Дима ходит первым. Кто выиграет при правильной игре?

3. Изначально дано число 12345. За ход из числа можно вычесть любую его ненулевую цифру. Вася и Петя ходят по очереди, Вася начинает. Выигрывает тот, кто получит после своего хода 0. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Коля и Илья по очереди режут (по линиям сетки) прямоугольник а) 3×4; б) 5×7. Коля начинает и делает разрез на 1 строну клетки от края. Далее они по очереди продолжают разрез на 1 клетку за ход.

Выигрывает тот, после чьего хода прямоугольник распадается на две части. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Двоим шахматистам надоело играть в обычные шахматы, и они решили поиграть в другие — когда у каждого по два хода. Может ли второй игрок гарантировать себе победу?

6. Дети отдали преподавателям n бананов. Они теперь лежат на столе в их комнате, а Александр Александрович и Алексей Игоревич по очереди заходят туда и съедают не меньше одного банана. Но при этом совесть не позволяет ни одному из них съесть больше половины имеющихся на момент захода в комнату бананов. Проигрывает тот, кто не может съесть банан, не нарушая этого правила. Первым в комнату зашел Александр Александрович. Кто выигрывает при правильной игре? (Естественно, ответ может зависеть от n.)

Не скучная. 09.07.2010

1. а) У четырех натуральных чисел посчитали всевозможные попарные произведения. Докажите, что какие-то два из этих произведений дают одинаковые остатки при делении на 6. б) У семи натуральных чисел посчитали всевозможные попарные произведения. Докажите, что какие-то два из этих произведений дают одинаковые остатки при делении на 25. в) У восьми натуральных чисел посчитали всевозможные попарные произведения. Докажите, что какие-то два из этих произведений дают одинаковые остатки при делении на 35.

2. Найдите все цифры (не обязательно различные) a, b, c, d, e, f такие, что $3\overline{abc} \cdot \overline{def} = \overline{abcdef}$.

3. Даны две тройки монет, причем в каждой тройке ровно одна монета фальшивая. Настоящая монета весит 10 г, а фальшивая - 9 г. Как за три взвешивания на одночашечных весах со стрелкой определить все фальшивые монеты?

4. В стране 2012 городов. Аня и Таня по очереди соединяют эти города дорогами. При этом нельзя соединять два города несколькими дорогами. Начинает Аня. Проигрывает тот игрок, после хода которого из любого города можно будет добраться до любого другого. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Докажите, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

6. Из колоды в 36 карт вытаскивают случайным образом 4 карты. Подсчитайте количество наборов, в которых а) есть и чёрные карты (трефовой или пиковой масти) и красные карты (бубновой или червовой масти). б) как количество десяток, так и количество черных карт больше половины. в) дама или красная карта (хотя бы одно из двух).

Сравнения. 10.07.2010

Определение. Пусть m — произвольное натуральное число. Целое число a *сравнимо* с целым числом b по модулю m (обозначение: $a \equiv b \pmod m$), если $a - b \,\vdots\, m$.

1. Целые числа a, b, c, d и натуральное число m таковы, что $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$. Докажите, что а) $a + c \equiv b + d \pmod m$; б) $a - c \equiv b - d \pmod m$; в) $ac \equiv bc \pmod m$; г) $ac \equiv bd \pmod m$. д) Пусть n — произвольное натуральное число. Докажите, что $a^n \equiv b^n \pmod m$.

2. Докажите, что $2^{2^{2010}} - 1$ делится а) на 3; б) на 17.

3. Даны натуральные числа n и k, причем $n > 1$. а) Докажите, что $n^k - 1 \,\vdots\, n - 1$; б) Докажите, что если k нечетно, то $n^k + 1 \,\vdots\, n + 1$.

4. а) Решите в простых числах уравнение $pq = 7(p + q)$. б) Решите в простых числах уравнение $pqr = 7(p + q + r)$.

5. Найдите все натуральные n такие, что $n^2 + 3n$ — точный квадрат.

6. Докажите, что $23^{43} + 43^{23} \,\vdots\, 66$.

7. В трех магазинах вместе было 1973 учебника. В первые три дня первый магазин продал соответственно 1/47, 1/7 и 1/2 часть своих учебников, второй магазин — 1/41, 1/5 и 1/3 часть своих учебников, а третий магазин — 1/25, 1/20 и 1/10 часть своих учебников. Сколько учебников было в каждом магазине?

Разная. 10.07.2010

1. В стране 1000 городов, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что существует город, выехав из которого можно объехать все города, побывав в каждом ровно один раз (ехать разрешается только по указанным на дорогах направлениям).

2. В каждой клетке шахматной доски стоит 0. Разрешается выбрать любые две соседние (по стороне) клетки и увеличить на 1 стоящие в них числа. а) Можно ли добиться того, чтобы в клетках оказались числа 1, 2, …, 64? б) А могут ли при этом соседние числа находиться в соседних по стороне клетках?

3. У Васи есть 15 различных (однако внешне неразличимых) гирек, веса которых 1 г, 2 г, ..., 15 г. На них сделаны наклейки "1г", "2г",..., "15г" соответственно. Он хочет доказать Пете, что наклейки располагаются правильным образом. Как ему сделать это с помощью трех взвешиваний на рычажных весах?

4. За какое наименьшее число выстрелов можно наверняка попасть в "линкор" 1×3 на доске 10×10 для игры в "морской бой"?

5. Сельский гипнотизер Иван Карпович разводит индюков и кур. Вследствие его экспериментов десятая часть индюков считает, что они куры, а десятая часть кур — что они индюки. Если считать вместе, пятая часть птиц Ивана Карповича считает себя индюками. А какова доля индюков в его хозяйстве на самом деле?

6. На поле брани сошлись армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый Толстый солдат выстрелил в одного из Тонких, затем каждый уцелевший Тонкий солдат выстрелил в одного из Толстых. а) Докажите, что уцелело не менее 1000 солдат. б) Затем каждый уцелевший Толстый опять выстрелил в одного из Тонких. Докажите, что после этого осталось в живых не менее 500 солдат. в) Потом каждый живой Тонкий опять выстрелил в одного из Толстых. Какое наименьшее количество солдат могло остаться в живых после этого?

Способная. 11.07.2010

1. Имеются булочки четырех видов — по 6 булочек каждого вида. Их разделили поровну между шестью детьми. Какое наименьшее количество детей всегда можно выбрать, чтобы у них точно нашлись булочки всех видов?

2. а) Гэндальф выдал четверым хоббитам коробку, в которой находились бутылки кефира трех сортов: темного, светлого и волшебного. При каком наименьшем количестве бутылок в коробке каждый хоббит гарантировано может выбрать себе 2 бутылки одно сорта? б) А если гномов ℓ, сортов кефира k, а каждому надо m бутылок одного сорта?

3. а) Пол в 11 корпусе пришел в ужасающее состояние после дня бюрократизма. Требуется набрать команду уборщиков, состоящую из k человек. Всего учеников n. Чему равно количество способов, которыми можно набрать такую команду? б) Выяснилось, что беспорядок не только в коридоре, но и повсюду вокруг корпуса. Для уборки территории надо набрать еще одну бригаду уборщиков – на этот раз из ℓ человек.

Чему равно количество способов набрать две такие команды? в) После того, как 2 бригады начали убираться, а мусора становилось все больше, было решено выбрать в каждой из бригад по одному начальнику, причем одного из них сделать ответственным за всю уборку. Сколько есть разных способов организовать такую масштабную работу?

4. Перед купанием на берегу Ольга Сергеевна выстраивает в ряд 56 школьников, из которых 16 — девочки. При этом она не хочет, чтобы рядом стояли а) 2, б) 3 девочки. Сколькими способами она может это сделать?

5. У Васи на этот раз есть 6 различных гирек, веса которых 1 г, 2 г, ..., 6 г. На них сделаны наклейки “1г”,“2 г”,..., “6 г” соответственно. Он все еще хочет доказать Пете, что наклейки располагаются правильным образом. Как ему сделать это за два взвешивания?

6. а) Даны 2 сосуда, водопроводный кран и раковина. Как узнать, что больше: треть объема первого сосуда или четверть объема второго сосуда? б) Даны 4 сосуда, водопроводный кран и раковина. Как узнать, что больше: половина объема первого сосуда плюс шестая часть объема второго сосуда или треть объема третьего сосуда плюс пятая часть объема четвертого сосуда?

Индукция. 11.07.2010

1. Докажите, что при $n > 3$ верно неравенство: $n! > 2^n$.

2. На плоскости нарисован многоугольник, у которого наружу растут волосы. Внутри многоугольника проведено несколько диагоналей, на каждой из которых в одну из сторон растут волосы. Диагонали делят многоугольник на несколько частей. Докажите, что есть часть, внутри которой нет волос.

3. Есть три вертикальных палочки. На одну из них одето n колечек разного диаметра по убыванию снизу вверх. Докажите, что можно переложить все колечки на другую палочку в том же порядке, перекладывая за раз одно колечко и не кладя большее на меньшее.

4. а) Докажите, что $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. б) Докажите, что $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5. На сколько частей разбивают плоскость n прямых общего положения? (Никакие две из них не параллельны, никакие три из них не проходят через одну точку.)

6. В стране дураков имеют хождение монеты достоинством $1, 2, 4, \ldots, 2^n$ тугриков. Докажите, что, имея по одной монете каждого достоинства, можно уплатить любую сумму, не превышающую $2^{n+1}-1$ тугриков.

7. Из клечатого квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали а) угловую; б) произвольную клеточку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на уголки из трех клеточек.

8. Клетки доски 2010×2010 покрашены в 4 цвета таким образом, что никакие две одноцветные не имеют общих вершин. Докажите, что противоположные углы доски покрашены в разные цвета.

Древесная. 12.07.2010

Определение. *Деревом* называется связный граф, не содержащий простых циклов.

1. Докажите, что в любом дереве, содержащем хотя бы две вершины, есть вершина степени 1 (такая вершина называется *висячей*).

2. Докажите, что в дереве с n вершинами содержится ровно $n-1$ ребро.

3. Докажите, что а) из любого связного графа можно выделить дерево, содержащее все его вершины (*остовное дерево*); б) в связном графе с n вершинами содержится как минимум $n-1$ ребро.

4. а) Докажите, что в любом связном графе есть вершина, при удалении которой граф остается связным. б) А верно ли, что в любом связном графе найдутся две такие вершины?

5. Пусть $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ — натуральное число. Докажите следующие утверждения. а) $A \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n \pmod 9$; б) $A \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \pmod{11}$; в) $A \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod 8$; г) $A \equiv \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 a_0} \pmod{2^k}$; д) $A \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4 a_3} + \ldots \pmod{37}$; е) $A \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \ldots \pmod 7$; ж) $A \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \ldots \pmod{13}$.

6. На острове невезения, где живут только лжецы (которые всегда лгут) и правдолюбы (которые всегда говорят правду), прошли выборы президента. Было два кандидата – Ёлкин и Палкин. На вопрос социологов “За кого Вы голосовали?” большинство ответило, что за Ёлкина, а на вопрос “Кто победил на выборах?” большинство ответило, что Палкин. Известно, что правдолюбы, голосовавшие за проигравшего кандидата составляют более четверти населения. Кто стал президентом? (Все жители участвовали и в выборах, и в опросе.)

7. Плоскость разбита на части несколькими а) прямыми; б) окружностями. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета правильным образом (т.е. так, чтобы никакие две области одного цвета не имели общей границы).

Остатки матбоя

1. В лифте есть 10 кнопок, пронумерованных числами от 1 до 10. Хулиган Миша поменял местами некоторые из них таким образом, что человек, нажав кнопку с нужным ему номером, попадает или на свой этаж, или на соседний. Сколькими способами Миша мог поменять кнопки?

2. На олимпиаде было предложено 8 задач. Каждый участник решил ровно три из них, причем никакие двое участников не решили более одной общей задачи. Какое наибольшее число участников могло быть на олимпиаде?

3. На планете 10000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны до-рогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 200 дорог. Докажите, что на планете меньше 100 столиц.

4. На столе лежат картинками вниз 8 игральных карт. Вы можете указать на любую группу карт (в частности, на одну карту, или, например, на все 8) и спросить, сколько карт бубновой масти в этой группе. В качестве ответа Вам сообщат число, отличающееся от истинного значения на 1. Как при помощи 5 вопросов узнать число бубновых карт, лежащих на столе?

5. Существует ли шесть натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на сумму этих же двух чисел?

Узнаем, что вы узнали. 14.07.2010

1. Найдите сумму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$.

2. На шахматной доске 9×9 расставлены 9 не бьющих друг друга ладей. Каждую ладью передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи бьют друг друга.

3. Докажите, что $(2^n - 1)^n - 3$ делится на $2^n - 3$.

4. Докажите, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ а) подсчетом; б) не используя формулу для C_n^k.

5. Двое игроков по очереди выписывают на доску различные делители числа n. При этом нельзя выписывать число, являющееся делителем последнего выписанного. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6. По кругу выписаны 6 цифр. Если их прочесть с некоторого места по часовой стрелке как число, то оно делится на 27. Докажите, что тогда число, прочитанное по часовой стрелке с любого другого места, тоже будет делиться на 27.

7. В клетках квадрата 8×8 расставлены плюсы и минусы. За один ход разрешается поменять все знаки на противоположные в любом “кресте” (т.е. во всех клетках, находящихся в одной строке или одном столбце с данной клеткой, в том числе и в самой этой клетке). Докажите, что из любой расстановки знаков можно получить любую другую.

Графы. 14.07.2010

1. Докажите, что а) любые две вершины дерева соединены ровно одним простым (т. е. несамопересекающимся) путем; б) граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путем, — дерево.

2. В городе 101 площадь: 100 площадей расположены по окружности и еще одна площадь в центре. Каждая площадь на окружности соединена дорогой с двумя соседними площадями на окружности и с центральной площадью. На всех дорогах организовано одностороннее движение таким образом, что с любой площади можно выехать и на любую площадь можно въехать. Докажите, что с любой площади можно проехать на любую другую.

3. Слава по одной перерезает веревочки волейбольной сетки, имеющей вид прямоугольника $m \times n$. Какое наибольшее число веревочек может он разрезать до того, как сетка распадется на куски?

4. Дима нарисовал полный граф с n вершинами. Коля решил расставить на всех его ребрах стрелки так, чтобы не было ни одного цикла. а) Докажите, что ему это удастся. б) Сколькими способами он может это сделать?

5. Назовем человека *малообщительным*, если у него менее 10 знакомых. Назовем человека *чудаком*, если все его знакомые малообщительны.

Докажите, что малообщительных людей больше, чем чудаков.

6. а) Все вершины графа покрашены в черный и белый цвета так, что любое ребро соединяет две вершины разных цветов (такой граф называется *двудольным*). Докажите, что в этом графе нет циклов нечетной длины. б) В графе нет циклов нечетной длины. докажите, что он двудольный (то есть, его вершины можно покрасить в два цвета так, чтобы каждое ребро соединяло две разноцветные вершины).

7. В графе $2n+1$ вершина, а ребра покрашены в красный, синий и зеленый цвета. Известно, что ребра любых двух цветов образуют связный граф на всех вершинах. Какое наименьшее число ребер может быть в этом графе?

Инвариант. 15.07.2010

1. В капище Бога Инварианта по кругу подвешено 12 священных бутылок, одна из которых висит горлышком вниз, а остальные — горлышком вверх. Жрец утверждает, что если вместо нее перевернутой окажется соседняя бутылка, стоит ожидать крупных неприятностей. а) Если добиться такого эффекта, переворачивая по 6 соседних бутылок, то будет землетрясение; б) если это сделать, переворачивая по 4 соседних бутылки, то будет наводнение; в) если по 3 бутылки — то будет конец света; г) а если по 2 бутылки — будет гром и молния. Какие стихийные бедствия жрец может вызвать?

2. В куче лежит 2010 камней. Можно проделывать следующую операцию — выкидывать из одной из имеющихся куч камень, если он не является в ней единственным, и делить после этого одну из куч на две. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы в некоторый момент во всех кучах было по 3 камня?

3. В Марсианском языке всего две буквы: А и Я. Если в слове заменить сочетание АЯ на ЯААА или наоборот, а также если вычеркнуть или вставить пять одинаковых букв подряд, то смысл слова не изменится. Докажите, что в марсианском языке не больше 25 различных по смыслу слов.

4. В каждой клетке квадратной таблицы 25×25 записана $+1$ или -1. Пусть $a_1,\ldots,a_{25}$ — произведения чисел по строкам, а $b_1,\ldots,b_{25}$ — произведения чисел по столбцам таблицы. Существует ли такая расстановка ±1, что $a_1+a_2+\ldots+a_{25}+b_1+b_2+\ldots+b_{25}=0$?

5. На складе есть $n > 1$ разных мешков и сторож. Каждый мешок лежит либо на полу, либо внутри одного из других мешков. Время от времени сторож выбирает один из лежащих на полу мешков, вынимает из него и кладет на пол все лежащие в нем мешки и, одновременно, кладет в него все мешки, которые раньше лежали на полу (содержимое остальных мешков при этом не меняется). Сколько различных расположений мешков может получить сторож? (Два расположения считаются одинаковыми, если любой мешок имеет в них одинаковое содержимое.)

Числа и не только. 15.07.2010

1. а) У натурального числа n нет делителей, больших 1 и не превосходящих $\sqrt{n}$. Докажите, что n — простое число. б) У натурального числа n нет собственных делителей, не превосходящих $\sqrt[3]{n}$. Докажите, что все собственные (т. е. отличные от 1 и самого числа) делители n — простые числа.

2. У чисел a и $2a$ одинаковые суммы цифр. Докажите, что a делится на 9.

3. Шестиклассники в количестве 55 штук встали вокруг Ольги Сергеевны (в один ряд). Каждому из них присвоен номер от 1 до 55 — по часовой стрелке. Ольга Сергеевна ходит по часовой стрелке дает по конфете каждому семнадцатому, начиная с первого. Человек с каким номером получит конфету последним?

4. Докажите, что $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ а) подсчетом; б) не используя формулу для C_n^k.

5. В группе людей некоторые знакомы. Если выбрать нескольких из них так, что каждый из оставшихся знаком хотя бы с одним из выбранных, то окажется, что выбрано не менее 10 человек. Докажите, что из этой группы можно выбрать 10 попарно незнакомых людей.

6. Есть 20 монет, среди которых есть настоящие и фальшивые, которые легче настоящих. Как за 11 взвешиваний определить количество фальшивых монет (определять какие именно монеты фальшивые не обязательно)?

Инвариант и клетки. 16.07.2010

1. На шее идола Бога Инварианта висит ожерелье состоящее из красных и синих бусинок. Жрец может вставить между любыми двумя бусинками красную бусинку, поменяв при этом цвета этих двух бусинок.

Также жрец может убрать из ожерелья любую красную бусинку, поменяв при этом цвета ее соседей (но нельзя оставлять менее двух бусинок). Изначально ожерелье состояло из двух красных бусинок. Сможет ли жрец при помощи таких операций получить ожерелье из а) одной синей и одной красной бусинки; б) восьми красных бусинок; в) одной красной и шести синих бусинок.

2. На доске написаны числа 10, 11, 12. а) За ход можно заменить пару чисел a, b на пару $2a-b$, $2b-a$. Можно ли такими операциями получить на доске числа 14, 15, 16?

За ход можно заменить пару чисел a, b на пару $2a+b$, $2b+a$. Можно ли такими операциями получить на доске числа б) 1000, 1002, 1004; в) 1001, 1002, 1003; г) 1001, 1003, 1005?

3. Клетчатый квадрат 20×20 разделен ломаной длины 40, проходящей по линиям сетки из левого нижнего в правый верхний угол. Клетки под ломаной закрашены. К закрашенной области последовательно присоединяются по две соседние (по стороне) новые клетки, если при этом длина границы, идущей из левого нижнего в правый верхний угол, не изменяется. Процесс заканчивается, когда такая операция станет невозможна. Докажите, что можно установить, как будет проходить граница в конце, зная только, как она проходит в начале.

4. Есть клетчатая доска размером 100×100. Петя и Вася по очереди красят ее клетки: Петя в красный цвет, а Вася в синий цвет. а) Запрещается красить две клетки, имеющие общую сторону в разные цвета. б) Запрещается красить в разные цвета две клетки, имеющие хотя бы одну общую точку. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Дно прямоугольной коробки выложено прямоугольниками 1×4 и квадратами 2×2. Потом один квадрат 2×2 заменили на прямоугольник 1×4. Можно ли теперь выложить этими фигурками дно той же коробки?

6. Фигура заяц ходит либо на одну клетку вверх либо по диагонали вправо-вниз или влево-вниз. За какое минимальное количество ходов эта фигура может обойти все клетки доски 7×7.

Текстовые задачи. 16.07.2010

1. Баба Яга и Кащей собрали некоторое количество мухоморов. Количество крапинок на мухоморах у Бабы Яги в 13 раз больше, чем у Кащея.

Баба Яга подарила Кащею мухомор с наименьшим количеством крапинок, после чего на ее мухоморах оказалось в 8 раз больше крапинок, чем у Кащея. Докажите, что у Бабы Яги было не более 23 мухоморов.

2. Спускаясь в метро, Петя и Вася бежали по движущемуся вниз эскалатору. Вася, пока бежал, насчитал 60 ступенек. Петя бежал вдвое быстрее Васи и насчитал 90 ступенек. Сколько ступенек насчитал бы каждый из них, сбегая по неподвижному эскалатору?

3. В 50-метровом бассейне тренируются два пловца. Они стартуют одновременно, в одном направлении по соседним дорожкам, и плывут с постоянными, но различными скоростями. Доплыв до бортика, пловец сразу поворачивает и плывет назад, а проплыв километр — заканчивает тренировку и уходит в раздевалку. Сколько раз за время тренировки пловцы встретились, если известно, что у бортика они не встречались ни разу? (Если один пловец догнал другого, это тоже считается встречей.)

4. а) Докажите, что эйлеров цикл, то есть цикл, проходящий ровно один раз по каждому ребру, существует в графе тогда и только тогда, когда все вершины графа имеют четную степень. б) Докажите, что эйлеров путь, то есть путь, проходящий ровно один раз по каждому ребру, существует в графе тогда и только тогда, когда все вершины графа, кроме, быть может, двух, имеют четную степень.

5. Докажите неравенство $3^n > n^2$ при $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 3$.

6. а) Докажите, что число $9^{999} + 1$ оканчивается ровно одним нулем. б) Сколькими нулями оканчивается число $99^{99} + 1$?

Короткая 17.07.2010

1. В королевстве Ачухония живут рыцари, принцессы и драконы. Драконы могут есть принцесс, рыцари — убивать драконов, а принцессы — изводить рыцарей. Книга о вкусной и здоровой пище запрещает драконам есть принцесс, изведших нечетное количество рыцарей. Кодекс рыцарской чести не позволяет убивать дракона, съевшего нечетное число принцесс. А тайный женский сговор рекомендует изводить рыцаря, только если количество убитых им драконов четно. Когда-то в Ачухонии жило 100 драконов, 99 принцесс и 101 рыцарь, а сейчас — только одно живое существо. Какое?

2. Натуральные числа x и y таковы, что $x^2 = y^3$. Докажите, что число xy является пятой степенью некоторого натурального числа.

3. (**Бином Ньютона**) Докажите, что для любых a и b и натурального n верно следующее равенство:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

4. Шахматная фигура *пулеметчик* бьет в каком-то одном направлении (направо, налево, вверх или вниз) на любое число клеток. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга пулеметчиков можно расставить на доске 20×20?

Матбой 6-1 — профи-7-1 . 17.07.2010

1. В клетках прямоугольника 5×9 стоят 33 фишки. Ход состоит в том, что все фишки одновременно сдвигаются так, чтобы каждая фишка оказалась на клетке, соседней с исходной. При этом запрещается ставить две фишки на одну клетку (в том числе и в начальной позиции). Кроме того, если какая-то фишка передвинулась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвигаться по вертикали, и наоборот. Докажите, что по этим правилам невозможно сделать подряд 100 ходов.

2. Делится ли на 5 количество упорядоченных пятерок натуральных чисел $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{1}{67}$?

3. По кругу стоят числа от 1 до 30. Вася каждую минуту меняет местами два соседних числа. Через некоторое время все числа оказались на диаметрально противоположных местах. Докажите, что в какой-то момент Вася поменял местами два числа, дающих в сумме 31.

4. Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел, не превосходящих n. Докажите, что $\pi(2n) - \pi(n) \geq \pi(n! + 2n) - \pi(n! + n)$.

5. В однокруговом футбольном турнире участвуют n команд (любые две команды сыграли ровно один матч между собой). При каких n турнир мог закончиться так, что у каждой команды количество ничьих равно количеству поражений?

6. При каком наименьшем k полоску клетчатой бумаги шириной 2 и длиной k клеточек можно без остатка разрезать на 7 клетчатых прямоугольников, среди которых нет одинаковых?

7. По дороге шла толпа людей. Более трети из них повернули направо, более 30% — налево, а все остальные, которых оказалось более 4/11, — развернулись и пошли обратно. Докажите, что в толпе было не менее 173 человек.

8. В акционерном обществе “Елки-палки” 1994 акционера. Любые 1000 из них вместе обладают не менее, чем 50% акций общества. Какую наибольшую долю акций может иметь один акционер?

Матбой 6-2 — профи-7-2 . 17.07.2010

1. В клетках прямоугольника 5×9 стоят 33 фишки. Ход состоит в том, что все фишки одновременно сдвигаются так, чтобы каждая фишка оказалась на клетке, соседней с исходной. При этом запрещается ставить две фишки на одну клетку (в том числе и в начальной позиции). Кроме того, если какая-то фишка передвинулась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвигаться по вертикали, и наоборот. Докажите, что по этим правилам невозможно сделать подряд 100 ходов.

2. Делится ли на 5 количество упорядоченных пятерок натуральных чисел $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{1}{67}$?

3. Найдите все натуральные числа $100 < m < 200$, для которых существует натуральное n такое, что mn — квадрат целого числа, а $m - n$ — простое число.

4. Каждый из 38 попугаев завязал на удаве по одному узлу. Если сложить удава вдвое или втрое, то каждый узел попадет ровно на один другой. Докажите, что если удава сложить вшестеро, то какой-то узел попадет на сгиб.

5. В однокруговом футбольном турнире участвуют n команд (любые две команды сыграли ровно один матч между собой). При каких n турнир мог закончиться так, что у каждой команды количество ничьих равно количеству поражений?

6. При каком наименьшем k полоску клетчатой бумаги шириной 2 и длиной k клеточек можно без остатка разрезать на 7 клетчатых прямоугольников, среди которых нет одинаковых?

7. По дороге шла толпа людей. Более трети из них повернули направо, более 30% — налево, а все остальные, которых оказалось более 4/11, — развернулись и пошли обратно. Докажите, что в толпе было не менее 173 человек.

8. Суммарный возраст 33 одноклассников составляет 430 лет. Доказать, что из них можно выбрать 20 так, что их суммарный возраст составит более 260 лет.

Матбой 6 — 7 . 17.07.2010

1. В клетках прямоугольника 5×9 стоят 33 фишки. Ход состоит в том, что все фишки одновременно сдвигаются так, чтобы каждая фишка оказалась на клетке, соседней с исходной. При этом запрещается ставить две фишки на одну клетку (в том числе и в начальной позиции). Кроме того, если какая-то фишка передвинулась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвигаться по вертикали, и наоборот. Докажите, что по этим правилам невозможно сделать подряд 100 ходов.

2. При каком наименьшем k полоску клетчатой бумаги шириной 2 и длиной k клеточек можно без остатка разрезать на 7 клетчатых прямоугольников, среди которых нет одинаковых?

3. Бассейн наполняется четырьмя трубами. Если одновременно включить первую, вторую и третью, он наполнится за 10 часов, если вторую, третью и четвёртую - за 8 часов, если вторую и третью - за 15 часов. За какое время наполнится бассейн, если одновременно включить все четыре трубы?

4. Встретились как-то правдивый человек, который всегда говорит правду, лжец, который всегда лжёт, и политик, который говорит то, что ему выгодно в данный момент. Каждому из них задали вопрос, кто он. Первый сказал, что он правдивый человек, второй - что он лжец, а третий - что он не политик. Кто есть кто на самом деле?

5. На микрокалькуляторе ТыкДык-2000 есть кнопки “$+1$”, “-16”, “-9” и “$+8$”, причём калькулятор взрывается, как только в него попадает число, делящееся на 8. Докажите, что из числа 1 нельзя получить ровно за 2000 операций число 2001, не взорвав калькулятор.

6. В королевстве Логрия живут рыцари. Любые два из них враждуют (например, сэр Гавейн враждует с сэром Ланселотом), дружат, или вовсе друг к другу безразличны. Друг врага рыцаря — враг этого рыцаря. Докажите, что хотя бы у одного рыцаря врагов больше, чем друзей.

7. Суммарный возраст 33 одноклассников составляет 430 лет. Доказать, что из них можно выбрать 20 так, что их суммарный возраст составит более 260 лет.

8. Делится ли на 5 количество упорядоченных пятерок натуральных чисел $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{1}{67}$?

Числа 19.07.2010

1. Через $[m,n]$ и (m,n) обозначаются НОК и НОД чисел m и n соответственно. Докажите, что для любых двух натуральных чисел m и n выполнено равенство $[m,n](m,n) = mn$.

2. Решите уравнение $[m,n] - (m,n) = \frac{mn}{3}$ в натуральных числах.

3. Пусть a — натуральное число. Простое число p делит $5a-1$ и $a-10$. Докажите, что p делит $a-3$.

4. Натуральные числа m и n таковы, что m^3 делится на $m+n$. Докажите, что n^3 также делится на $m+n$.

5. Натуральные числа n и m взаимно просты. Докажите, что существует натуральное k, для которого $n^k - 1 \,\vdots\, m$.

6. Назовем пару натуральных чисел квадратной, если и их сумма, и их произведение являются квадратами натуральных чисел. Докажите, что число 3 не входит ни в одну квадратную пару.

7. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 7^y = 19^z$.

8. а) Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде частного от деления точного куба на точный квадрат. б) Докажите, что любое натуральное можно представить в виде частного от деления точного квадрата на точный куб.

Не числа 19.07.2010

1. За круглым столом сидят 6 мальчиков, изначально у каждого из них по 11 булочек. Каждую минуту один из мальчиков передает одну из имеющихся у него булочек своему соседу по часовой стрелке. Через 51 минуту у первого, третьего и пятого мальчика оказалось по 22 булочки, а у остальных — ни одной. Докажите, что каждый мальчик хотя бы раз передал одну из булочек.

2. Хоккейный матч сборной “Звезды России” против “Сибири” (Новосибирск) закончился со счетом 17 : 6 в пользу “звезд”. Докажите, что в матче был момент, когда “Сибирь” уже забила столько шайб, сколько звездам еще оставалось забить до конца матча.

3. По кругу стоят числа от 1 до 30. Вася каждую минуту меняет местами два соседних числа. Через некоторое время все числа оказались на диаметрально противоположных местах. Докажите, что в какой-то момент Вася поменял местами два числа, дающих в сумме 31.

4. На контрольной работе по перекрашиванию юный хамелеон перекрашивался из красного цвета в желтый, из желтого — в зеленый, из зеленого — в синий, из синего — в фиолетовый, а из фиолетового — опять в красный. Хамелеон перекрасился 2010 раз и стал из фиолетового синим. Известно, что он допустил одну ошибку, из-за которой покраснел, когда не должен был этого делать. Какого цвета он был перед этим покраснением?

5. На доске написаны числа 5, 6, 7. За ход можно заменить пару чисел a, b на пару $\frac{a^2}{b}$, $\frac{b^2}{a}$. Можно ли такими операциями получить набор 10, 11, 12?

6. В чемпионате по пинг-понгу в один круг (каждый с каждым сыграл ровно один раз) участвовало 30 человек, причем никто не одержал ровно 7 побед. Докажите, что есть три игрока A, B и C таких, что A выиграл у B, B выиграл у C, а C выиграл у A.

Принцип Дирихле 20.07.2010

1. На доске 8×8 стоит 51 ладья. Докажите, что каждая бьет хотя бы одну из оставшихся.

2. Каждое из 8 различных натуральных чисел не превосходит 15. Докажите, что среди их попарных разностей есть 3 одинаковых.

3. Докажите, что из n натуральных чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n.

4. Фигура магараджа бьет и как конь и как ферзь. Какое наибольшее количество магарадж можно поставить на доске а) 6×6; б) 7×7; в) 8×8.

5. По кругу стоят 2007 целых неотрицательных чисел, сумма которых равна 7025. Докажите, что среди них есть четыре идущих подряд числа, сумма которых больше 14.

6. В акционерном обществе “Елки-палки” 1994 акционера. Любые 1000 из них вместе обладают не менее, чем 50% акций общества. Какую наибольшую долю акций может иметь один акционер?

Комбинаторика 20.07.2010

1. У каждого из марсиан по 3 руки. Несколько марсиан взялись за руки так, что свободных рук не осталось. а) Могло ли марсиан быть 2011? б) Пусть у каждого из них есть несколько антенн, и руки друг другу пожимают марсиане, у одного из которых антенн в 3 раза больше, чем у другого. Может ли у всех вместе быть ровно 2011 антенн?

2. Докажите, что любой связный граф можно нарисовать одним росчерком пера, проведя каждое ребро дважды.

3. а) Можно ли из куска проволоки длиной 12 дм, не ломая его на куски, согнуть каркас куба с ребром 1 дм? б) На какое наименьшее количество кусков нужно его разломать, чтобы это стало возможно?

4. В клубе встретились 20 джентльменов. Некоторые были в шляпах, а некоторые — нет. Время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал ее на одного из тех, у кого в этот момент шляпы не было. В конце 10 джентльменов подсчитали, что каждый из них отдавал шляпу больше раз, чем получал. Сколько джентльменов пришли в шляпах?

5. В алфавите языка племени МУМБО-ЮМБО всего две буквы А и Б. Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа таких операций: вычёркивания трёх подряд идущих букв А, вставки трех букв А в любое место, замены любого набора стоящих рядом букв АБА на набор стоящих рядом букв БААБ или обратной замены. Верно ли, что слово АББ... Б и слово ББ... БА (в каждом из этих слов буква Б встречается 2000 раз) означают одно и то же?

6. В ряд стоят 30 сапог: 15 левых и 15 правых. Докажите, что среди некоторых десяти подряд стоящих сапог левых и правых поровну.

7. Дано а) 9; б) 10 монет, одна из которых фальшивая, и двухчашечные весы без гирь. Все настоящие монеты весят одинаково, а фальшивая монета легче настоящей. За какое наименьшее число взвешиваний можно заведомо определить фальшивую монету?

Информационная 21.07.2010

1. Равносторонний треугольник со стороной 8 разбит на 64 равносторонних треугольника. Один из маленьких треугольников покрашен невидимой краской, которую видит Максим в специальных очках. Никита за один вопрос может узнать есть ли закрашенный треугольник в некотором равностороннем треугольнике (который может вылезать за границы исходного). За какое наименьшее количество вопросов Никита может узнать, какой именно треугольник закрашенный.

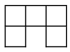
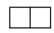
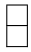
2. У Вани есть 5 гирек с весами 1г, 2г, 3г, 4г, 5г. За один вопрос Ваня может выбрать три гирьки и узнать, верно ли, что вес первой меньше веса второй, а вес второй меньше веса третьей (ответ “да”, только если выполнены оба утверждения, в противном случае — "нет"). Ваня хочет упорядочить гири по возрастанию. За какое наименьшее количество вопросов он сможет это сделать?

3. В компанию из n человек пришел журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек, который знает всех, но которого не знает никто. Журналист может задавать вопросы вида "знаете ли Вы такого-то" любому человеку. При этом, одному человеку можно задавать несколько вопросов, и все ответы правдивы. а) Можно ли за $n-1$ вопрос узнать, кто этот человек? б) За какое наименьшее число вопросов это можно узнать?

4. Двое по очереди отмечают по одной вершине правильного 108-угольника, причем дважды отмечать одну вершину нельзя. Проигрывает тот, после хода которого впервые окажутся отмеченными все вершины какого-либо правильного многоугольника. Кто выиграет при правильной игре?

5. а) Найдите количество 4-значных чисел, состоящих из цифр 0, 3, 6, 9 (все по одному разу), делящихся на 11.

б) Найдите количество 10-значных чисел, все цифры которых различны, и которые делятся на 11111.

6. Можно ли в квадрате 10×10 клеток так расставить натуральные числа, чтобы при любом расположении фигурки вида  сумма чисел в ее пяти клетках была равна 105, а в каждой фигуре вида  или  сумма чисел была равна 40?

7. Несколько шахматистов запланировали сыграть турнир в один круг. К сожалению, двое из них заболели, успев сыграть по пять партий и все последующие партии с их участием пришлось отменить. Всего было сыграно 38 партий. Успели ли заболевшие шахматисты сыграть друг с другом?

Заключительный разнобойчик. 22.07.2010

1. Из связного графа, степени всех вершин которого равны 10, удалили ребро. Докажите, что граф остался связным.

2. Клетки полоски $1 \times n$ последовательно пронумерованы натуральными числами от 1 до n. Двое игроков делают ходы по очереди. За один ход разрешается зачеркнуть любую клетку полоски либо две соседние клетки, меньший из номеров которых четен. Нельзя зачеркивать клетку дважды. Проигрывает тот игрок, который не сможет сделать очередной ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию? а) При $n = 2010$; б) при произвольном n?

3. Около бензоколонки с неограниченным запасом бензина стоят 2 грузовика, каждый из которых на полной заправке может проехать 100 км. Машины могут заправляться неограниченное число раз. Разрешается также переливать бензин из одного бензобака в другой. Докажите, что одна из машин может с помощью другой доехать до города, расположенного а) в 150 км от бензоколонки; б) в 172 км от бензоколонки. в) Если есть 3 таких же грузовика, то один из них может с помощью остальных доехать до города в 235 км от бензоколонки.

4. Каждый сотрудник компании "Кака-кола", имеющий четное число знакомых среди сотрудников, послал им по письму, а каждый из остальных сотрудников компании послал по письму всем незнакомым. Тедди получил 99 писем. Докажите, что он получит еще хотя бы одно письмо.

5. Решите в простых числах уравнение $p^2 + q = 5q^2 + p$.

6. При делении некоторого числа на 13 и 15 с остатком получились одинаковые неполные частные. Найдите наибольшее такое число.

7. В клетках таблицы 11×11 расставлены все натуральные числа от 1 до 121. Дима посчитал произведение чисел в каждой строке, а Саша — произведение чисел в каждом столбце. Могли ли они получить одинаковые наборы из 11 чисел?

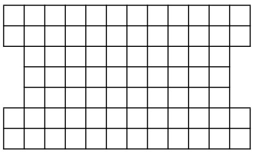
Заключительная олимпиада.

1. Волшебный кусок кожи выполняет желания. После каждого желания его длина уменьшатся в 2 раза, а ширина — на треть. После пяти желаний его площадь была равна 12, а после двух ширина — 9. Найдите, какого размера был волшебный кусок изначально.

2. В классе не более 40 учеников, и рост каждого выражается целым числом сантиметров. Средний рост всех учеников класса, кроме самого высокого, равен 148 3/4 см, а средний рост всех учеников класса, кроме самого низкого, равен 149 4/7 см. Сколько учеников может быть в классе?

3. Есть неточные весы, которые в случае равновесия показывают перевес левой чаши (иначе работают правильно). Кроме того есть несколько монет, среди которых одна фальшивая, и она легче настоящих. Можно ли найти фальшивую с помощью этих неточных весов (количество взвешиваний не ограничено)?

4. Разрежьте следующую фигуру на 1001 равную:



5. В квадрате 13×13 все клетки покрашены в белый цвет. Разрешается перекрасить в другой цвет (белые — в черный, а черные — в белый) все клетки любого прямоугольника 1×5 (как вертикального, так и горизонтального). Можно ли перекрасить в черный цвет все клетки?

---

6. Ксюша и Соня по очереди красят стороны правильного 2011-угольника. Можно использовать любые цвета, но запрещается красить соседние стороны в один и тот же цвет. Проигрывает та, кто последней ввела в игру новый цвет. Кто выигрывает при правильной игре — начинающая Ксюша или ходящая второй Соня?

7. На кольцевой дороге длины 100 метров стоит некоторое количество фонарей, причем каждый из них освещает участок дороги длины 0,999 метра (сам находится посередине этого участка). Оказалось, что вся дорога освещена, но ни один из фонарей нельзя выключить так, чтобы дорога оставалась полностью освещенной. Какое наибольшее число фонарей может стоять на дороге?

8. В стране $2n+1$ город, изначально из каждого города выходило по $2d$ дорог. При этом нет городов, соединенных более чем одной дорогой. Какую-то $d-1$ дорогу закрыли на ремонт, а оставшиеся дороги покрасили в $2d$ цветов. Докажите, что какие-то две одноцветные дороги выходят из одного города.

---

9. На прямой через равные промежутки отмечены 2010 точек. Саша покрасил половину из них в красный цвет, а половину — в синий. После этого Ваня разбил точки на пары красный-синий так, что сумма расстояний между точками одной пары максимальна. Докажите, что полученный Ваней результат не зависит от Сашиной раскраски.

10. Написанное на доске число n можно заменить на одно из чисел $2n-4$, $3n-8$ или $8-n$. Можно ли за несколько таких операций из числа 41 получить число, большее 10 000 000, но меньшее 10 000 020?