

6 класс. Группа ГАЛ
Программа зачета (теоретические вопросы)

I. Теория чисел

1. Делимость, деление с остатком — определения.
2. Сравнение по модулю — определение, начальные свойства (сложение, вычитание).
3. Перемножение сравнений, возведение в степень.
4. Признаки делимости на 3, 9, 11 (с доказательством).
5. Признаки делимости на 7, 13, 37 (с доказательством).
6. Признаки делимости на $2^k, 5^k$ (с доказательством).
7. Каноническое разложение на простые множители — определение.
8. НОД и НОК — определение, их каноническое разложение.
9. Факт о произведении НОДа и НОКа (с доказательством).
10. Доказательство бесконечности множества простых чисел.
11. Степень вхождения простого числа p в $n!$.
12. Делимость произведения k подряд идущих натуральных чисел на $k!$ (с доказательством).

II. Индукция

1. Метод математической индукции — основные составляющие, принцип.
2. $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. $1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
5. Количество частей, на которые разбивают плоскость n прямыми.
6. Двоичная система счисления (с доказательством единственности двоичной записи).
7. Факториальная система счисления (с доказательством единственности).
8. Правильная раскраска плоскости, разбитой на части n прямыми.

III. Комбинаторика

1. Связный граф — определение.
2. Компонента связности — определение, несвязный граф — доказательство структуры.
3. Степень вершины, поиск количества ребер в графе через степени вершин, лемма о рукопожатиях.
4. Полный граф — определение, количество ребер в нем.
5. Критерий существования эйлера пути.
6. Критерий существования эйлера цикла.
7. Правильная раскраска в d цветов вершин графа, в котором все степени меньше d .
8. Дерево — определение, доказательство существования висячей вершины.
9. Количество ребер в дереве на n вершинах.
10. Остовное дерево — определение, доказательство существования в связном графе.
11. Доказательство того, что в связном графе на n вершинах не менее $n - 1$ ребра.
12. Существование в связном графе вершины, при удалении которой граф остается связным.
13. Количество турнирных графов на n вершинах без циклов.

14. Существование в турнирном графе гамильтонова пути (то есть пути, который проходит по всем вершинам по одному разу).

15. Двудольный граф — определение.

16. Критерий двудольности графа.

IV. C_n^k

1. C_n^k — комбинаторный смысл, формула.

2. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ — комбинаторное и формульное доказательства.

3. $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ — комбинаторное и формульное доказательства.

4. Бином Ньютона — индукционное и комбинаторное доказательства.

V. Взвешивания

1. Поиск одной легкой фальшивой монеты среди n одинаковых на вид — алгоритм.

2. Поиск одной легкой фальшивой монеты среди n одинаковых на вид — оценка на количество взвешиваний.