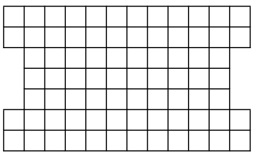
Заключительная олимпиада.

1. Волшебный кусок кожи выполняет желания. После каждого желания его длина уменьшатся в 2 раза, а ширина — на треть. После пяти желаний его площадь была равна 12, а после двух ширина — 9. Найдите, какого размера был волшебный кусок изначально.

2. В классе не более 40 учеников, и рост каждого выражается целым числом сантиметров. Средний рост всех учеников класса, кроме самого высокого, равен 148 3/4 см, а средний рост всех учеников класса, кроме самого низкого, равен 149 4/7 см. Сколько учеников может быть в классе?

3. Есть неточные весы, которые в случае равновесия показывают перевес левой чаши (иначе работают правильно). Кроме того есть несколько монет, среди которых одна фальшивая, и она легче настоящих. Можно ли найти фальшивую с помощью этих неточных весов (количество взвешиваний не ограничено)?

4. Разрежьте следующую фигуру на 1001 равную:



5. В квадрате 13×13 все клетки покрашены в белый цвет. Разрешается перекрасить в другой цвет (белые — в черный, а черные — в белый) все клетки любого прямоугольника 1×5 (как вертикального, так и горизонтального). Можно ли перекрасить в черный цвет все клетки?

---

6. Ксюша и Соня по очереди красят стороны правильного 2011-угольника. Можно использовать любые цвета, но запрещается красить соседние стороны в один и тот же цвет. Проигрывает та, кто последней ввела в игру новый цвет. Кто выигрывает при правильной игре — начинающая Ксюша или ходящая второй Соня?

7. На кольцевой дороге длины 100 метров стоит некоторое количество фонарей, причем каждый из них освещает участок дороги длины 0,999 метра (сам находится посередине этого участка). Оказалось, что вся дорога освещена, но ни один из фонарей нельзя выключить так, чтобы дорога оставалась полностью освещенной. Какое наибольшее число фонарей может стоять на дороге?

8. В стране $2n+1$ город, изначально из каждого города выходило по $2d$ дорог. При этом нет городов, соединенных более чем одной дорогой. Какую-то $d-1$ дорогу закрыли на ремонт, а оставшиеся дороги покрасили в $2d$ цветов. Докажите, что какие-то две одноцветные дороги выходят из одного города.

---

9. На прямой через равные промежутки отмечены 2010 точек. Саша покрасил половину из них в красный цвет, а половину — в синий. После этого Ваня разбил точки на пары красный-синий так, что сумма расстояний между точками одной пары максимальна. Докажите, что полученный Ваней результат не зависит от Сашиной раскраски.

10. Написанное на доске число n можно заменить на одно из чисел $2n-4$, $3n-8$ или $8-n$. Можно ли за несколько таких операций из числа 41 получить число, большее 10 000 000, но меньшее 10 000 020?