Вступительный тест

03 июля

Представьтесь, пожалуйста:

1. Верно ли, что:
а) если число делится на 5 и на 3, то оно делится и на 15? Ответ:
б) если число делится на 6 и на 4, то оно делится и на 24? Ответ:

2. Найдите $\frac{15!}{12!\cdot 3!}$. Ответ:

3. У белки Бонифатия есть 5 орехов, 6 шишек и 4 жёлудя. Сколькими способами он может выбрать
а) 1 орех, 1 жёлудь и 1 шишку? Ответ:
б) 2 предмета с разными названиями? Ответ:

4. Найдите остаток от деления «-7» на «3». Ответ:

5. Постройте отрицание к выражениям:
а) «Если идёт дождик, то белка Бонифатий грызёт орехи».
Ответ:
б) «Белка Бонифатий хранит орехи или шишки».
Ответ:
в) «Белка Бонифатий дружит и с хорьками, и с выдрами».
Ответ:

6. Сколькими способами можно расставить 5 родственников белки Бонифатия в ряд?
Ответ:

7. Делится ли любимое число белки Бонифатия – 5493968517269760
а) на 3; Ответ:
б) на 4; Ответ:
в) на 9; Ответ:
г) на 11? Ответ:

8. Найдите сумму а) чисел от 1 до 40. Ответ:
б) нечётных чисел, меньших 40. Ответ:

9. Шахматная фигура белка Бонифатий может ходить только на одну клетку вверх или на одну клетку вправо. Сколькими способами белка Бонифатий может пройти из левого нижнего угла доски 3×4 в правый верхний.
Ответ:

10. Найдите сумму чисел в таблице. Ответ:

7	3	4	1	7	9	3	2	5	0
3	7	6	9	3	1	7	8	5	10
1	2	5	1	7	2	6	3	8	2
9	8	5	9	3	8	4	7	2	8
4	8	8	10	5	2	3	3	6	1
6	2	2	0	5	8	7	7	4	9
4	2	6	1	1	7	2	6	7	3
6	8	4	9	9	3	8	4	3	7
2	5	7	1	2	1	4	7	2	0
8	5	3	9	8	9	6	3	8	10

Вводное занятие. Маленькие случаи

04 июля

1. а) Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 21-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть два кокосовых ореха. Сможет ли обезьяна удовлетворить свое любопытство за 6 бросков?
б) А за 5 бросков?

2. Найдите значение выражения

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{100}\right).$$

3. Можно ли расставить числа от 1 до 100 в ряд так, чтобы разность между любыми двумя соседними числами была не менее 50?

4. Даны 555 гирь с массами от 1г. до 555г. Разложите их на три кучи равного веса.

5. На столе стоят 2^n стаканов с водой. Разрешается взять один из стаканов и перелить из него часть воды в стакан, где воды меньше так, чтобы воды стало поровну. Докажите, что такими операциями можно добиться, чтобы во всех стаканах стало поровну воды.

6. Существуют ли 100 различных дробей с числителем 1, сумма которых равна 1.

Вступительная олимпиада

04 июля

1. Моторчик пропеллера Карлсона работает на смеси томатного, тыквенного и ананасового сока. Процедура «заправки» соком следующая: Карлсон берёт полный стакан томатного сока (200 мл) и делает из него четыре глотка, выливает в стакан полный пакет (150 мл) ананасового сока и делает три глотка и, наконец, выливает в стакан 55 мл тыквенного сока и в 2 глотка допивает смесь. Сколько сока Карлсон выпивал за один глоток, если все его глотки были одинаковыми?

2. Таня стоит на берегу речки. У неё есть два глиняных кувшина: один - на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина.

3. В сенате 2014 сенаторов. Известно, что среди любых 4 сенаторов как минимум двое продажных. Какое наибольшее число честных сенаторов может быть в сенате? (Сенатор называется честным, если он не продажный.)

4. Катер и плот одновременно отплыли из Кирова вниз по Вятке. Катер дошел до Вишкиля за сутки, и сразу же поплыл обратно. Через какое время он встретит плот?

5. В турнире по игре в «крестики-нолики», проведённом по системе «проиграл-выбыл», участвовали 18 школьников. Каждый день играли одну партию, участников которой выбирали жребием из ещё не выбывших школьников. Шестеро школьников утверждают, что участвовали в четырех партиях каждый. Правы ли они?

6. На шахматной доске 8×8 стоит 50 пешек. Разрешается выбрать квадрат 2×2, в котором стоит единственная пешка, и снять ее. Докажите, что не удастся снять все пешки.

7. Играют двое. Первый выписывает в строку слева направо 19-значное число из цифр 1 и 2. После выписывания Первым очередной цифры Второй, если хочет, меняет между собой какие-то две цифры из уже написанного ряда. Всегда ли Второй может добиться того, чтобы итоговое число читалось одинаково слева направо и справа налево?

Разбиение на пары

05 июля

1. Докажите, что из 2009 полосок бумаги шириной 1 и длинами 1, 2,…, 2009 можно составить прямоугольник, длина и ширина которого больше 1.

2. С вечернего чая шла стройная колонна шестиклассников. У каждого в карманах пряники: сколько в правом кармане, столько и в левом. Могло ли у них вместе быть 2009 пряников?

3. На доске 25×25 расставлено 9 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

4. Каких чисел от 0 до 1000 больше: с чётной суммой цифр или с нечётной?

5. Докажите, что трёхзначных номеров суммой цифр 12 и 15 поровну (номера идут 000 до 999).

6. На 17 карточках написали числа от 1 до 17; затем карточки перевернули и на обратной стороне также написали числа от 1 до 17, возможно, в другом порядке. Потом сложили числа на обеих сторонах карточек и суммы перемножили. Докажите, что произведение будет четным.

7. В народной дружине а) 100, б) 101 человек. Каждый вечер трое дружинников выходят на дежурство. Можно ли составить график дежурств так, чтобы любые два дружинника ровно один раз подежурили вместе?

8. Докажите, что ребус АБВ+ГДЕ=1000 не может иметь ровно 555 решений.

9. Докажите, что у числа нечётное число делителей тогда и только тогда, когда оно квадрат.

Отрицание

05 июля

1. Верны ли следующие высказывания:
а) Вишкиль стоит на реке Вятка, и на Луне живут бегемоты.
б) Вишкиль стоит на реке Вятка, а на Луне не живут бегемоты.
в) Вишкиль стоит на реке Вятка, или на Луне живут бегемоты.
г) Вишкиль стоит на реке Вятка, либо на Луне не живут бегемоты.
д) Или Вишкиль стоит на реке Вятка, или на Луне не живут бегемоты

2. Постройте отрицания к высказываниям:
а) В Вятке водятся крокодилы.
б) Арбуз - это овощ или фрукт.
в) В кафе не привезли ни печенья, ни конфет.
г) Сегодня светит солнце, а завтра будет дождь.

3. Учитель сказал: «Кто закончит учебный год без троек, тот поедет в Москву на экскурсию».
а) У Васи было две тройки, которые он не смог исправить. Значит ли это, что он не поедет в Москву?
б) Известно, что Вася съездил в Москву на экскурсию. Верно ли, что он закончил год без троек?
в) Известно, что Вася не съездил в Москву на экскурсию. Верно ли, что он закончил год с тройками?
г) Сформулируйте отрицание к утверждению.

4. Постройте отрицания к следующим высказываниям:
а) Все попугаи понимают то, что говорят.
б) Ни один бегемот не умеет летать.
в) Каждый мальчик умывается по утрам.
г) Любая медаль имеет две стороны.

5. Сформулируйте данные высказывания с помощью слова «Существует», построй их отрицание:
а) Бывают преподаватели, которые спят по ночам.
б) Не все мальчики хорошо решают задачи
в) Иногда днем бывает дождь
г) Некоторые птицы кричат по ночам

6. Постройте отрицание для следующих высказываний:
а) Все яблоки зеленые.
б) Некоторые учащиеся ЛМШ – шахматисты.
в) Есть елки, на которых растут мандарины.
г) Не все преподаватели хорошо плавают.
д) Каждый ЛМШонок умеет решать задачи.

7. В сенате острова рыцарей и лжецов 10 островитян. Один из них сказал «Здесь нет ни одного рыцаря» Второй: «Здесь не более одного рыцаря» Третий: «Здесь не более двух рыцарей» и т.д. до десятого, который сказал: «Здесь не более девяти рыцарей» Сколько же в сенате рыцарей?

8. Даны следующие утверждения:
а) Джо ловкач;
б) Джо не везет;
в) Джо ловкач, но ему не везет;
г) Если Джо ловкач, то ему не везет;
д) Джо ловкач тогда и только тогда, когда ему везет;
е) Либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно.
Какое наибольшее число из данных шести утверждений может быть истинно?

9. Вечером Саше не досталось йогурта - какой-то шестиклассник взял лишний. Дети сделали следующие заявления:
1й: Йогурт взял Вася или Петя.
2й: Это был Петя или Коля.
3й: Толя или Коля.
4й: Йогурт взял Вася или Иван.
5й: Я ничего не знаю.
Вожатый точно знает, что правду сказали ровно трое. Может ли Вожатый определить, правду ли сказал пятый пятиклассник?

10. Писатели A, B, C, D пишут под псевдонимами X, Y, Z, W. Требуется узнать, какой именно псевдоним использует каждый из писателей, если известно следующее:
а) если D – не X, то B есть X;
б) если B – не X и не W, то A есть X;
в) если C – не W, то B есть Z;
г) если D есть Y, то B – не X;
д) если A – не X, то C – не Y.

Разнобой 1

05 июля

1. Двадцать восемь косточек домино можно разными способами выложить в виде прямоугольника 8×7 клеток. На рис. приведен вариант расположения цифр в прямоугольнике. Можете ли однозначно восстановить расположение косточек?

5	0	1	0	3	1	2	5
4	4	5	2	4	6	2	3
2	5	6	0	1	3	0	2
5	1	2	0	4	0	4	3
5	4	5	1	6	3	2	3
0	1	0	2	1	5	6	6
6	1	3	6	4	6	3	4

2. Есть лист клетчатой бумаги и карандаши шести цветов. Закрасьте наименьшее число клеток так, чтобы для любых двух разных цветов нашлись две закрашенные клетки этих цветов, граничащие по стороне. Объясните, почему меньшим числом клеток обойтись нельзя.

3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. В комнате находится 10 островитян, все разного роста. Каждый находящийся в комнате сказал: «В этой комнате ровно двое лжецов выше меня». Сколько рыцарей находится в комнате?

4. В группе детского сада мальчиков на три человека больше, чем девочек. На прогулке дети стали прыгать через лужу. Когда воспитательница это обнаружила, успешно прыгнувших детей оказалось на восемь больше, чем промочивших ноги. Все ли дети успели прыгнуть?

5. Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

Комбинаторика

06 июля

1. В арсенале настоящего манчкина 6 щитов, 7 посохов, 4 головняка и 3 обувки (и всё обязательно различное). Чтобы пойти в секретную пещеру ему надо надеть на себя как минимум 3 шмотки разного типа. Сколько вариантов снарядиться манчкину в пещеру?

2. В отряде шестиклассников 33 мальчика и 9 девочек. Сколькими способами можно выбрать пару детей: а) для участия в конкурсе «Мисс и мистер ЛМШ»; б) для участия в турнирах по шахматам и настольному теннису; в) для похода в буфет?

3. У белки Бонифатия 8 разных артефактов и 2 нычки. Скольким количеством способов она может рассовать все артефакты по своим нычкам?

4. Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999.
а) Сколько всего номеров?
б) Сколько номеров, не содержащих цифру 6?
в) Сколько номеров, содержащих цифру 7?
г) Сколько номеров, у которых есть хотя бы одна нечётная цифра?

5. Сколькими способами на шахматную доску можно поставить двух королей а) разных цветов; б) одного цвета?

6. Туземцы захватили в плен Паганеля и заставили его быть поваром. Он умеет готовить 10 видов мяса и 5 видов гарнира. Каждый день на обед надо приготовить один гарнир и два вида мяса. Если он повторит меню – его съедят за ужином. Через полгода придет спасительный корабль. Сможет ли Паганель продержаться?

7. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 11 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках ?

8. Сколько существует различных букетов из 11 цветов, составленных из астр, гвоздик и гладиолусов?

9. Три кота Фикус, Крокус и Кактус, нашли мешок с 10 разными сосисками. Сколькими способами они могут разделить эти сосиски между собой? (Кстати, кому-то из них может ничего не достаться).

10. Докажите, что число способов поставить на шахматную доску 14 слонов так, чтобы они не били друг друга — полный квадрат.

11. Найдите сумму всех пятизначных чисел составленных только из цифр 1, 2, 3, 4.

Четность

06 июля

1. Можно ли расположить несколько гирь по 6 и 8 футов и одну 17-футовую, так чтобы весы оказались в равновесии?

2. На листке бумаги написали число 20. Тридцать три шестиклассника передают листок друг другу, и каждый по своему усмотрению вычитает от него или прибавляет к нему 1. Может ли в результате получиться 10?

3. На доске написано 2014 целых чисел. Всегда ли можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся была четной? А если чисел 2013?

4. Разность двух целых чисел a и b умножили на их произведение. Могло ли получиться число 201421?

5. Даны пять чисел. Сумма любых трех из них четна. Докажите, что все числа четны.

6. Вдоль забора растут 8 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 2005 ягод?

7. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли между ними расставить знаки «+» и «–», чтобы значение полученного выражения было равно 0? Тот же вопрос для чисел от 1 до 11. (Знаки должны стоять между каждыми числами).

8. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел? (То есть нужно расставить эти числа в клетках квадрата так, чтобы суммы чисел во всех строках и столбцах были одинаковы).

9. Имеются гири массой 1, 2, . . . , 21г. Можно ли их разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе самая тяжелая гиря уравновешивала все остальные.

10. Можно ли числа 1, 2, 3,..., 20 так расставить в вершинах и серединах ребер куба, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

11. По круги стоят натуральные числа, причем каждое равно либо сумме, либо разности двух своих соседей. Докажите, что количество чисел делится на 3.

Разумно организованный перебор

07 июля

1. В коробке лежат синие, красные и зеленые карандаши. Всего 20 штук. Синих в 6 раз больше, чем зеленых, красных меньше, чем синих. Сколько в коробке красных карандашей?

2. Решите ребусы а) Б + БЕЕЕ = МУУУ; б) КОКА+КОЛА = ВОДА.

3. В стране три города: Правдин, Лгунов и Переменск. Жители Правдина всегда говорят правду, Лгунова – лгут, а жители Переменска строго попеременно лгут и говорят правду. Пожарным позвонили: – У нас в городе пожар! – Где горит? – В Переменске. Пожарные уверены, что пожар есть. Куда им ехать?

4. Найдите все пятизначные числа, у которых каждая цифры больше суммы цифр, стоящих после нее.

5. Как 3 рыцаря, каждый со своим оруженосцем, могут переправиться через реку на двуместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев.

6. Любые две соседние цифры числа образуют число, делящееся на 23. Какое наибольшее количество цифр может иметь это число?

7. Ребра деревянного непрозрачного куба раскрасили в 4 цвета Б, К, О и С так, что на каждой грани встречаются все цвета. Докажите, что можно так поставить куб, чтобы на верхней грани цвета шли по часовой стрелке в порядке Б, О, К, С.

8. Билеты нумеруются от 000000 до 999999. Номер называется везучим, если цифры его номера можно переставить и так расставить знаки «+», «–» и «×» (по одному между каждыми рядом стоящими цифрами) и скобки, что после выполнения арифметических действий получится 0. Сколько существует невезучих талонов?

Доказательство от противного

07 июля

1. Докажите, что среди 43 лмшат и 9 преподавателей М-6 найдутся пятеро, отмечающих свой день рождения в один и тот же месяц.

2. На пяти полках книжного шкафа расставлены 160 книг, на одной из них три книги. Докажите, что найдется полка, на которой не менее 40 книг.

3. Через одну точку проведено четырнадцать прямых. Докажите, что угол между какими-то двумя из них меньше 13°.

4. Пятнадцать шестиклассников собрали в лесу сто шишек. Докажите, что какие-то два из них нашли одинаковое количество шишек.

5. Девять преподавателей М-6 решили поделить между собой 43 лмшат. Преподаватель, которому доставалось менее 11 лмшат, впадал в неизъяснимую грусть. Докажите, что теперь в М-6 не менее шести грустных преподавателей.

6. В каждой клетке доски 8×8 стоит по фишке одного из 32 цветов, на доске находится по 2 фишки каждого цвета. Могло ли так оказаться, что любые две одноцветные фишки стоят в противоположных углах квадрата 4×4?

7. Можно ли пронумеровать ребра куба числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

8. Зал на «Дэнс-шоу» был украшен 50 шариками. Докажите, что среди них найдутся либо 8 одноцветных шариков, либо 8 шариков разных цветов.

9. В однокруговом чемпионате параллели М6 по шахматам участвуют n человек. Докажите, что в любой момент чемпионата найдутся два человека, сыгравшие одинаковое количество игр.

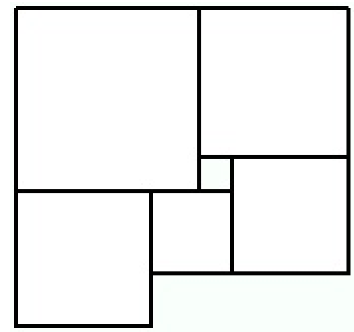
10. Каждый из трех игроков выписывает 100 слов. После чего записи сравнивают. Если слово встретилось хотя бы у двоих, то его вычеркивают из списков. Могло ли случится так, что у первого игрока осталось 61 слово, у второго – 80 слов, а у третьего – 82 слова?

11. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

12. В каждой клетке доски 8×8 нарисована стрелка. Фишка ставиться на произвольную клетку. Каждым ходом фишка сдвигается на соседнюю клетку в направлении стрелки, а сама стрелка поворачивается на 90° по часовой стрелке. Докажите, что фишка рано или поздно свалится с доски.

Разнобой 2

07 июля



1. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна 1.

2. а) И сказал Кащей Ивану Царевичу: «Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я цифры x, y и z. Назовёшь ты мне три натуральных числа a, b и c. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax + by + cz$. Не отгадаешь, какие числа я задумал – голову с плеч долой!» Запечалился Иван Царевич и пошёл думу думать. Может ли он в живых остаться?
б) Теперь Кащей задумывает произвольные натуральные числа x, y, z, но дает Ивану Царевичу две попытки. Сможет ли Иван Царевич остаться в живых?

3. Можно ли расставить числа от 1 до 64 в клетках квадрата 8×8 так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была бы равна 120?

4. Пять натуральных чисел заканчиваются различными цифрами. Известно, что среди всевозможных пар этих чисел можно выбрать ровно три пары, в которых произведение заканчивается на 0. Может ли сумма всех чисел заканчиваться на 5?

5. Есть тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, ..., 99. Билет разрешается опустить в ящик, если номер ящика может быть получен из номера билета вычеркиванием одной из цифр. Можно ли разложить все билеты в 50 ящиков?

Комбинаторика 2

09 июля

1. От 17 корпуса до клуба ведут 5 тропинок. Сколькими способами начинающий ЛМШонок может дойти до клуба (разумеется, с разрешения) и вернуться обратно? А если путь «туда и обратно» должен проходить по разным дорогам?

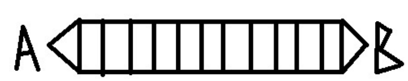
2. На клетке $a1$ стоит фишка. Она может передвигаться либо на 1 клетку вверх, либо на одну клетку вправо. Скольким количеством способов:
а)она может добраться до клетки $h8$?
б)она может добраться до клетки $h8$, пройдя через клетку $d5$?
в)она может добраться до клетки $h8$, не проходя через клетку $e4$?
г) Докажите, не производя вычислений, что количество способов добраться до клетки $h8$ равно сумме способов добраться до клеток в столбце g.
д)Докажите, что количество способов добраться до клетки $h8$ равно сумме квадратов способов добраться до диагональных клеток.

3. Кубик Рубика (размером $3 \times 3 \times 3$) разбит плоскостями, параллельными граням, на 27 кубиков размером $1 \times 1 \times 1$. Из любого кубика можно перейти в соседний с ним кубик, если тот находится выше, либо правее, либо дальше. Найдите количество способов пройти из кубика, расположенного в нижнем левом ближнем углу в дальний правый верхний угловой кубик.

4. В графстве Липшер есть 4 города A, B, C и D. Известно, что между собой соединены несколькими непересекающимися дорогами города A и B, B и C, C и D и других дорог нет. Путешественник заметил, что количество способов добраться из A в C равно 15, а количество способов добраться из B в D – 20. Найдите количество способов добраться из A в D.

5. Заяц прыгает в одном направлении по разделенной на клетки полосе. За один прыжок он может сместиться либо на одну, либо на две клетки. Сколькими способами может заяц добраться с 1-й клетки на 12-ю?

6. Дорога из пункта A в пункт B выглядит как показано на рисунке. Найдите количество способов добраться из A в B, не проходя дважды по одной линии.



7. В левом нижнем углу доски 4×4 стоит король, который умеет ходить только вправо, вверх и по диагонали вправо-вверх. Каким количеством способов он может добраться в противоположный угол, если он должен совершить как минимум один диагональный ход.

Введение переменной

09 июля

1. Доктор Айболит раздал четырём заболевшим персонажам 1234 чудодейственные таблетки. Кощей получил на одну таблетку больше, чем кикимора, Баба Яга на одну больше, чем Кощей, а Змей Горыныч – на одну больше, чем Баба Яга. Сколько таблеток придётся съесть Змею Горынычу?

2. Сумма двух чисел равна 13,5795. Если в большем из них перенести запятую на один знак влево, то получим меньшее число. Найдите данные числа.

3. Ученик должен был разделить число на 2, а к результату прибавить 3, а он, по ошибке, умножил число на 2, а от полученного произведения отнял 3. Ответ все равно получился правильный. Какой?

4. В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждой строке кроме первой на 1 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце кроме первого в 4 раза больше, чем в предыдущем. Докажите, что сумма чисел во второй строке делится на 7.

5. Прямоугольник, у которого одна из сторон втрое длиннее другой, разрезали на одинаковые квадратики. Оказалось, что сумма их периметров в 6 раз больше периметра исходного прямоугольника. Сколько могло получиться квадратиков?

6. Управдом Остап Бендер собирал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич из 105-ой квартиры поинтересовался, почему у них во втором подъезде собирают денег на 40% больше, чем в первом подъезде, хотя квартир и там, и тут поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что двузначные стоят вдвое, а трехзначные – втрое больше однозначных. Сколько квартир в подъезде?

7. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не 1/2 очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение – не 0 очков, а «–1», ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

8. На доске выписаны 2009 чисел, причем каждое число кроме двух крайних равно сумме двух соседних с ним чисел. Известно, что сумма первых ста чисел в этом ряду равна нулю, а сумма первых двухсот чисел в этом ряду равна трём. Найдите сумму всех чисел в этом ряду.

9. По окружности, чередуясь, стоят 24 черных и 24 белых ненулевых числа. Каждое черное число равно сумме своих соседей, а каждое белое число равно произведению своих соседей. Чему равна сумма всех 48 чисел?

Разнобой 3

09 июля

1. Расставьте в вершинах и серединах сторон квадрата числа 1, 2, 3,…, 8 так, чтобы сумма любых трех чисел, стоящих на одной стороне, была одна и та же.

2. В магазине продаётся шоколад в виде букв английского алфавита. Одинаковые буквы стоят одинаково, а разные имеют различные цены. Известно, что слово ONE стоит \$6, слово TWO стоит \$9, а слово $ELEVEN$ стоит \$16. Сколько стоит слово $TWELVE$?

3. Какое наименьшее число королей нужно поставить на доску 10×10 так, чтобы каждая клетка была под боем? (Считается, что король бьет клетку на которой стоит)

4. На острове проживают аборигены, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Как-то встретились три аборигена: Ах, Ох и Ух. Один из них сказал: «Ах и Ох – оба лжецы», другой сказал: «Ах и Ух – оба лжецы» (но кто именно что сказал – неизвестно). Сколько всего лжецов среди этих трёх аборигенов?

5. Суммарный возраст 33 одноклассников составляет 430 лет. Докажите, что из них можно выбрать 20 так, что их суммарный возраст составит более 260 лет.

Логика 2. Рыцари и лжецы

10 июля

1. Встретились несколько аборигенов и каждый сказал: «Вы все – лжецы». Сколько рыцарей может быть среди них?

2. Каждый из 140 сидячих за круглым столом сказал: «Рядом со мной сидят рыцарь и лжец». Какое максимальное число рыцарей может быть среди них?

3. У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зеленый: «Вместе у нас 27 ног», желтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?

4. Некоторое количество аборигенов заявили, что на острове четное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечетное количество лжецов. Может ли количество аборигенов быть нечетным?

5. На острове в выборах вождя участвовали 9 кандидатов, пронумерованных от 1 до 9. Каждый сказал: «Кандидат, чей номер равен последней цифре квадрата моего номера – рыцарь». Впоследствии выяснилось, что не все кандидаты были лжецами, но и рыцарей среди них было не более трёх. Кто из кандидатов рыцарь?

6. Известно, что Шакал всегда лжет, Лев говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Жираф дает честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Мудрый Ёжик в тумане наткнулся на Шакала, Льва, Попугая и Жирафа и решил выяснить, в каком порядке они стоят. Спросив всех по очереди «Ты Шакал?», он понял только лишь, где Жираф. Спросив всех в том же порядке: «Ты Жираф?», он смог ещё понять, где Шакал, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «Да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?

7. Путник хочет узнать у четырех аборигенов, о которых он знает, что трое из них – рыцари, а один – хитрец. Как ему выяснить, кто хитрец, задав не более трёх вопросов?

8. 600 рыцарей и хитрецов собрались за круглым столом. Каждого спросили: «Кто сидит справа?». Прозвучало ровно 55 ответов «Хитрец». Какое наименьшее количество хитрецов может быть на самом деле?

Оценка + пример

10 июля

1. Электронные часы показывают цифры часов и минут (например 13:10). Какая наибольшая сумма цифр может быть на таких часах?

2. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 5, сумма цифр которого равна 100.

3. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить доску 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета?

4. В ШАМ участвуют 4 отряда. Соревнования судят четверо судей следующим способом: каждый судья по-своему распределяет между командами места (с первого по четвёртое), после чего победителем считается команда с наименьшей суммой мест – рейтингом. Какое наибольшее значение может принимать рейтинг победителя в случае, когда победитель единственный?

5. Даны пять утверждений: «x – простое число», «y – простое число», «$x+y$ – простое число», «$x+2y$ – простое число», «$2x+y$ – простое число». Какое наибольшее количество из них могут быть истинными одновременно?

6. Найдите наибольшее простое число такое, что любое число, полученное из него вычёркиванием цифр (но не всех), тоже простое.

7. Клетки доски 11×11 покрашены в белый цвет. Разрешается выбрать любые четыре белые клетки, расположенные в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, и две из этих клеток, расположенных по диагонали, перекрасить в черный цвет. Какое наибольшее число черных клеток удастся получить при помощи таких операций?

8. Какое наибольшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы в любом уголке из трех клеточек было хотя бы одна незакрашенная клетка?

9. Какое наибольшее число а) коней б) пулемётчиков можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга? (шахматная фигура пулемётчик – это ладья, которая бьёт только в одну из четырёх сторон)?

Десятичная запись числа

11 июля

1. Между цифрами двузначного числа вставили ноль, в результате чего оно увеличилось в 9 раз. Найдите все такие числа.

2. Докажите, что разность трёхзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

3. Шифр замка-автомата – семизначное число, три первые цифры которого одинаковые, остальные четыре цифры так же одинаковые. Сумма всех цифр этого числа – число двузначное, первая цифра которого совпадает с первой цифрой шифра, а последняя – с последней. Найдите этот шифр.

4. Записали некоторое трехзначное число, приписали к нему такое же. Разделили получившееся шестизначное число на 11, затем на 13, а потом на 7. Какое число получили?

5. Натуральное число назовём тройным, если оно представимо в виде суммы трёх трёхзначных чисел $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$, где a, b, c – различные ненулевые цифры. Сколько существует тройных чисел?

6. По окружности в произвольном порядке расставлены цифры от 1 до 9 (каждая – ровно один раз). Начиная с любой цифры, по часовой стрелке читаем трёхзначное число. Чему может равняться сумма этих девяти чисел?

7. У шестизначного числа первую цифру перенесли в конец, в результате чего число увеличилось в три раза. Найдите все такие числа.

8. Даны три цифры: a, b и c. Оказалось, что шестизначные числа $\overline{abcabc}$ и $\overline{ababab}$ относятся как 55:54. Чему может быть равно число $\overline{abc}$?

9. Два числа A и B отличаются только перестановкой цифр. Может ли сумма чисел A и B равняться 99...9 (999 девяток)?

10. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 5 и сумма цифр следующего за ним натурального числа тоже делится на 5.

11. Петя и Вася по очереди выписывают цифры шестисотзначного числа (каждый имеет право ставить цифры в любое место). Начинает Петя. Если полученное в итоге число не делится на семь, то выигрывает Петя, иначе выигрывает Вася. Кто выигрывает при правильной игре?

Комбинаторика 3

11 июля

1. Скольким количеством способов можно выстроить в ряд n человек?

2. Сколько слов можно получить переставляя буквы слова а) НАДО; б) БОТАТЬ.

3. Алфавит племени Мумба-Юмба состоит из трех букв А, Б, В, а любое слово содержит не более 5 букв.
а) Словами-«табу», является любая последовательность, состоящая из неповторяющихся букв. Сколько таких слов в языке племени Мумба-Юмба?
б) Афоризмом является любая последовательность, состоящая не более, чем из четырех букв. Сколько афоризмов в языке племени?
в) Архаизмом же является любая последовательность, не содержащая буквы В. Сколько существует архаизмов в языке племени?

4. Каким количеством способов можно выбрать из 50 человек а) пару людей б) две пары людей в) тройку людей?

5. У Нины есть семь кружек – красная, оранжевая, желтая, зеленая, голубая, синяя и фиолетовая.
а)Сколько существует способов расставить кружки в ряд, так, чтобы красная стояла раньше синей?
б) Сколько существует способов расставить кружки в ряд, так, чтобы красная стояла раньше синей и желтая стояла раньше зеленой?

6. В школу на завтрак мама каждый день кладёт Пети какой-нибудь один фрукт. Сейчас у них в холодильнике 5 апельсинов 2 яблока и три банана. Сколько вариантов наборов завтраков у Пети на ближайшие 10 дней?

7. Сколькии количеством способов можно выстроить n человек в хоровод (способы, отличающиеся поворотами считаются одинаковыми)?

8. Какким количеством способов можно разбить 12 человек на пары?

Комбинаторика 3,5

11 июля

1. Дана таблица $m \times n$. Сколько способов заполнить её ± 1 так, чтобы произведение чисел в каждом столбце и строке было равно 1?

2. В жезле $2n$ полосок, каждую из которых можно покрасить в черный или белый цвет. Если одна раскраска получается из другой переворотом жезла, то они считаются одинаковыми. Сколько существует различных жезлов?

3. Существует гадание. Девушка зажимает в руке, скажем, 20 травинок, так чтобы концы травинок торчали сверху и с низу. Лучшая подруга связывает попарно 20 концов травинок сверху и попарно 20 концов травинок снизу. Если после этого оказалось, что все травинки образовали единое кольцо, то девушка непременно выйдет замуж в этом году. Какова вероятность, что девушка выйдет замуж?

Внутренний бой

12 июля

1. На каждой перемене Миша съедает по две конфеты. Сколько конфет он съел за неделю с понедельника по пятницу включительно, если за это время прошло 28 уроков (уроки каждый день идут подряд, без «окон»).

2. Отцу и двум сыновьям вместе 48 лет. Через 5 лет возраст отца будет вдвое больше суммы возрастов сыновей, а Юре будет столько лет, сколько Коле сейчас. Сколько лет отцу, Юре и Коле сейчас?

3. На острове живут два племени: лжецы (всегда лгут) и рыцари (всегда говорят правду). 100 жителей встали в круг, все про всех всё знают. Каждый ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Верно ли, что оба ваших соседа – рыцари?». Ответов «Да» оказалось столько, сколько лжецов. Каково наибольшее число рыцарей может быть в круге?

4. Есть 5 монет, из которых 3 настоящих и две фальшивых. Одна из фальшивых монет весит больше настоящей, а другая – меньше. За три взвешивания на чашечных весах без гирь определите обе фальшивые монеты.

5. Клетки доски 2014×2014 покрашены в 3 цвета, причем есть клетки всех цветов. Оказалось, что любые четыре клетки, вершины которых образуют прямоугольник со сторонами, параллельными линиям сетки, покрашены не более чем в два различных цвета. Докажите, что либо все клетки каждой строки покрашены в один и тот же цвет, либо все клетки каждого столбца покрашены в один и тот же цвет.

6. Квадрат 3×3 заполнен различными натуральными числами, не превышающими n. Любая пара соседних чисел имеет общий делитель, больший 1. Найдите наименьшее возможное значение n.

7. Винни-Пух и Пятачок в гостях у Кролика съели несколько тарелок меда со сгущенкой. Пятачок съел одну тарелку меда, перемешанного со сгущенкой, и оказалось, что он съел $1/8$ всего меда и $1/5$ всей сгущенки. Какое количество тарелок меда со сгущенкой мог съесть Винни-Пух? (Укажите все варианты и докажите, что других нет).

8. Ивану Владимировичу очень нравится, когда дети стоят по росту, а шестиклассники очень этого не любят. Перед зарядкой 36 шестиклассников выстраиваются в шеренгу, после чего Иван Владимирович командует семерым из них сделать шаг вперед. Могут ли школьники встать таким образом, чтобы независимо от того, кого выберет Иван Владимирович, семеро вышедших из строя не оказались стоящими по росту (ни слева направо, ни справа налево)?

Игры

12 июля

1. Двое по очереди выкладывают на шахматную доску 8×8 доминошки 1×2, причём так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2. Двое игроков по очереди выставляют на доску 65×65 по одной шашке. При этом ни в одной линии (горизонтали или вертикали) не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход - проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

3. На концах клетчатой полоски 1×20 стоит по шашке. Играют двое; за ход разрешается сдвинуть одну шашку в направлении другой на одну или на две клетки. Перепрыгивать шашкой через шашку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

4. Петя и Вася на половине шахматной доски (клетчатом прямоугольнике 4×8) играют в такую игру: по очереди на свободные клетки ставят королей так, чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, если Петя ходит первым?

5. Вася и Петя играют на доске 10×10 в такую игру. У Пети есть много квадратиков размером в одну клетку, у Васи есть много уголков из трех клеток. Они ходят по очереди – сначала Петя кладет на доску свой квадратик, затем Вася свой уголок, потом Петя кладет еще квадратик и так далее. (Класть фигуры поверх других нельзя.) Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Может ли Петя победить, как бы ни действовал Вася?

6. Двое играют в игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает одно из чисел ряда $1, 2, 3, \ldots, 27$ до тех пор, пока не останутся два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает первый, если не делится на 5 – второй. Кто выигрывает при правильной игре?

7. В ряд выписаны числа от 1 до 100. Двое по очереди расставляют любой из знаков «+», «-», «$\times$» между этими числами. Первый игрок желает, чтобы значение окончательного выражения было четным, второй – нечетным. Кто выиграет при правильной игре?

8. На доске выписаны целые числа от 1 до 14, каждое по одному разу. Двое играющих по очереди стирают по одному числу до тех пор, пока не останется ровно два числа. Если сумма точный квадрат, то выигрывает второй, иначе - первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Делимость

14 июля

1. Существует ли такое натуральное число, произведение цифр которого равно а) 630, б) 5500?

2. Можно ли получить число 10000 в виде произведения двух натуральных чисел, в записи которых нет нулей?

3. Докажите, что числа а) 1112111, б) 255553, в) 11111111 – составные.

4. Найдите все решения ребуса К×О×Т=У×Ч×Е×Н×Ы×Й.

5. Про натуральные a и b известно, что $43a = 34b$. Докажите, что $a + b$ – составное.

6. Существует ли такое трехзначное число $\overline{abc}$, что $\overline{abc} - \overline{cba}$ – точный квадрат натурального числа?

7. Пусть a, b, c и d – различные цифры. Докажите, что $\overline{abababab}$ не делится на $\overline{ccdd}$.

8. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

9. Какое наибольшее количество попарно взаимно простых составных чисел можно выбрать из чисел от 1 до 100?

10. Найдите пять натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится на другое, но квадрат каждого из них делится на каждое из оставшихся чисел.

Комбинаторика 4

14 июля

1. Закодируйте одну задачу другой:
1) Имеется кучка из 42 камней. Двое по очереди берут из неё 1 или 2 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
2) На краях полоски 1×44 стоят по шашке. Двое по очереди двигают их на встречу друг другу на 1 или 2 клетке. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

2. Не решая задач, разбейте их на группы так, чтобы любые две задачи из одной группы кодировалась бы друг другом (и найдите кодировки), а из разных – нет. Найдите ответы для всех задач, решив как можно меньше задач (сколько задач придется решить)?
а)Сколькими способами Михаил Юрьевич может построить 42 шестиклассника в шеренгу?
б)Сколько сторон и диагоналей у 42 —угольника?
в)Сколькими способами можно расставить на шахматной доске размером 42×42 сорок две ладьи, не бьющих друг друга?
г)Сколькими способами победитель «Поля чудес» может выбрать два приза из 42 имеющихся?
д) Сколькими способами можно выдать 42 шестиклассникам два наряда: на уборку апельсиновых корок и дежурство у телефона?
е) Сколькими способами можно из 42 участников собрания выбрать председателя и секретаря?
ж) Сколькими способами можно отметить в таблице 2×21 две клетки?
з) Сколькими способами можно расставить в таблице 2×21 числа от 1 до 42?
и) Есть 42 разные конфеты. Сколькими способами можно раздать их по одной 42 шестиклассникам?
к) Есть два разных письма и 42 разных конверта. Сколькими способами можно упаковать письма в конверты?

3. а) Закодируйте одну задачу другой, б) а потом решите их:
1) Имеется две кучки камней, в одной 42 камня, в другой 30. Двое по очереди берут любое возможное количество камней из одной кучки. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?
2) В правом верхнем углу доски 31×43 стоит ладья. Двое по очереди двигают её только влево или вниз на любое число клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

4. а) Закодируйте одну задачу другой, б) а потом решите их:

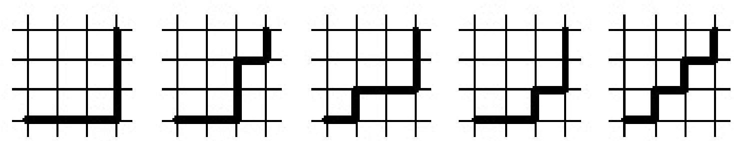
1) В небольшом калифорнийском отеле есть 8 комнат с номерами 1, 2,…8. Приезжающие за скромную плату в 1 доллар могут снять либо две комнаты с соседними номерами на один день, либо одну комнату на два дня. Пляжный сезон длится 8 дней. Какова максимальная выручка калифорнийского отеля за этот сезон, если известно, что в первый день восьмую комнату никто не занимал, и в последний день никто не занимал первую комнату?

2) Можно ли шахматную доску 8×8 без угловых клеток, расположенных на одной диагонали, разрезать на доминошки?

5. Докажите, что $2n$-значных чисел, которые состоят из n единиц и n двоек столько же сколько n-значных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, в которых поровну цифр 1 и 2.

6. Закодируйте одну задачу другой

1) В очереди в кассу кинотеатра стоят $2n$ зрителей, у половины из них 50-рублёвые купюры, у половины 100 рублёвые. Билет стоит 50 р. Изначально касса пуста, и сдачу давать не может. Количество способов составить очередь так, чтобы она смогла целиком пройти через эту кассу.



2) Количество путей из точки левой нижней вершины квадрата $n \times n$ в правую верхнюю, по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо и не поднимающихся выше диагонали.

7. Найдите количество пятизначных чисел, у которых цифры идут а) в порядке убывания б) в порядке возрастания.

Разнобой 4

14 июля

1. Было 12 карточек с надписями «Слева от меня – ровно 1 ложное утверждение», «Слева от меня – ровно 2 ложных утверждения», ..., «Слева от меня – ровно 12 ложных утверждений». Петя разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число утверждений могло оказаться истинными?

2. На какую цифру может оканчиваться квадрат натурального числа?

3. Можно ли разрезать квадрат 10×10 на прямоугольники 4×1?

4. В фирме 111 сотрудников, каждый из которых должен отдежурить в течении года а) 2, б) 7 дней подряд. Докажите, что найдется а) 2, б) 7 дней в году, когда дежурило нечетное число сотрудников.

5. У царя Дадона в одиночных камерах сидели 100 пленников. Поворот ручки отпирает каждую камеру, следующий поворот запирает, еще один снова отпирает и т. д. К празднику царь решил освободить часть пленников и накануне послал слугу, который повернул ручку на дверях каждой камеры. Все двери оказались отперты. Но тут пришел второй посыльный и повернул ручку каждой второй камеры. Двери 2-й, 4-й, 6-й, ... камер вновь оказались заперты. Следующий посланец повернул ручки 3-й, 6-й, 9-й, 12-й и т. д. камер. Еще один – в каждой четвертой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ручку сотой камеры. Наконец наступил праздник, и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу. Сколько пленников освободил Дадон?

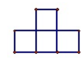
Раскраски

15 июля

1. В каждой клетке квадрата 9×9 стоит конь. По команде каждый конь делает один ход. Докажите, что по крайней мере одна клетка после этого окажется свободной.

2. а) На доске 10×10 для «морского боя» стоит двухпалубный корабль. Какое наименьшее число выстрелов необходимо произвести, чтобы наверняка ранить его?
б) Та же задача для трёхпалубного корабля.

3. Можно ли сложить квадрат 6×6 с помощью 11 прямоугольников 1×3 и одного уголка?

4. Можно ли доску размером 10×10 покрыть фигурами вида ?

5. Докажите, что числа от 40 до 99 нельзя разбить на группы по 4 числа так, чтобы числа каждой группы в одном разряде совпадали, а цифры другого разряда шли бы подряд (например, $\{54, 55, 56, 57\}$; $\{44, 54, 64, 74\}$)

6. Правильный треугольник со стороной 10 разбит прямыми, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Имеется 10 плиток-«треугольников» и 15 плиток-«параллелограммов» (и те и те состоят из четырех треугольничков). Можно ли замостить ими весь исходный треугольник?

7. В каждой клетке квадрата 9×9 сидит жук. По команде каждый жук перелетает на одну из соседних по диагонали клеток. Докажите, что по крайней мере 9 клеток после этого окажутся свободными.

8. На доску 8×8 уложен 21 прямоугольник 1×3. Где может находиться непокрытая ими клетка? (Укажите все варианты)

9. На клетчатой плоскости отмечено 100 клеток. Докажите, что можно отметить среди них 25 клеток так, чтобы они не имели общих точек.

10. На шахматной доске 9×9 расставлены 9 не бьющих друг друга ладей. Каждую из этих ладей передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи бьют друг друга.

Принцип крайнего

15 июля

1. В М6 прошло соревнование по перетягиванию каната, в результате все оказались занесены в список по убыванию силы. Иван Владимирович задумался: верно ли, что любые трое перетянут любых двоих. За сколько перетягиваний он сможет гарантированно это установить?

2. Можно ли в вершинах кубика расставить числа от 1 до 8 так, чтобы разность любых двух соседних по ребру чисел была не больше двух? (Из большего вычитаем меньшее.)

3. Шахматная доска разбита на домино. Докажите, что какая-то пара домино образует квадратик 2×2.

4. Семь шестиклассников решили вместе 100 задач, причем каждый решил разное количество задач. Докажите, что какие-то три школьника решили вместе не менее 50 задач.

5. Можно ли на изначально полностью белой доске а) 8×8 б) 9×9 закрасить некоторые клетки в чёрный цвет так, чтобы каждая клетка (чёрная или белая) имела ровно двух чёрных соседей по стороне?

6. Можно ли натуральные числа от 1 до 11 расставить по кругу так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была равна либо 2, либо 3.

7. Антон и Савелий играют в такую игру. Антон загадывает 5 чисел и сообщает Савелию всевозможные их попарные суммы (10 штук). Савелий по этим числам должен определить, какие числа задумал Антон. Сможет ли он это сделать?

8. Во всех клетках бесконечной клетчатой плоскости расставлены крестики и нолики с выполнением следующего условия: у каждого крестика среди соседей больше крестиков, чем ноликов (соседними считаются все клетки, имеющие с рассматриваемой хотя бы одну общую точку). Докажите, что крестиков бесконечно много.

9. На полях доски 8×8 расставлены числа $1, 2, \ldots, 64$. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, числа в которых отличаются не менее чем на 5.

10. Несколько (конечное число) сторон клеток бесконечной клетчатой бумаги окрашены в красный цвет. Раз в секунду выбираются все узлы, из каждого из которых выходит не менее двух красных отрезков, и все остальные отрезки, выходящие из этих узлов, также красятся в красный цвет. Докажите, что число красных отрезков не может при этом неограниченно возрастать.

Геометрия от Юлии Сергеевны

16 июля

1. В ковре 4×4 моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик 1×1 без дыр.

2. Можно ли расставить на клетчатой доске 16×16 полный комплект для игры в «морской бой» (1 кораблик 1×4, 2 кораблика 1×3, 3 кораблика 1×2 и 4 кораблика 1×1) так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали хотя бы одна клетка была занята.

3. Каким наименьшим количеством правильных треугольников со стороной 0,9999 можно покрыть правильный треугольник со стороной 1?

4. Шахматная доска разрезана на 13 прямоугольников с целым числом клеток. Могут ли они все быть различными?

5. Из квадрата 10×10 вырезали рамку толщиной в 1 клеточку. Рамку разрезали на несколько различных частей, из которых сложили квадрат 6×6. Каково наибольшее количество частей?

6. На отрезке длиной 1 закрашено несколько отрезков так, что расстояние между любыми двумя закрашенными точками отлично от 0,1. Доказать, что сумма длин закрашенных отрезков не превосходит 0,5.

7. В квадрате со стороной 1 расположено 100 фигур, суммарная площадь которых больше 99. Докажите, что в квадрате найдется точка, принадлежащая всем этим фигурам.

8. Доска 6×6 заполнена костяшками домино 1×2. Докажите, что можно провести вертикальный или горизонтальный разрез доски, не пересекающий ни одной из костяшек.

Делимость 2

16 июля

1. 100 натуральных чисел записаны в ряд. Известно, что сумма любых трех подряд оканчивается на 3. Ряд начинается с чисел 7 и 4. Определите последние цифры всех остальных чисел.

2. Про заданные 9 чисел известно, что сумма любых восьми из них дает остаток 1 при делении на 7. Докажите, что все эти числа дают одинаковый остаток при делении на 7. Найдите этот остаток.

3. Докажите, что среди любых 8 целых чисел найдется два числа, разность которых делится на 7.

4. Докажите, что $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком целом n.

5. Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом целого числа?

6. Докажите, что если a, b, c – нечетные числа, то хотя бы одно из чисел $ab - 1$, $bc - 1$, $ca - 1$ делится на 4.

7. Натуральные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xyz делится на а) 3, б) 5, в) 4.

8. Среди чисел от 1 до 2014 выбрали несколько так, чтобы сумма любых двух делилась на 8. Какое наибольшее количество чисел могло быть выбрано?

9. Можно ли расставить числа от 1 до 200 в некотором порядке так, чтобы сумма любых 10-ти подряд делилась на 10?

10. Камни лежат в трех кучах: в одной – 51, в другой – 49, а в третьей – 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из четного числа камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

Тест 2

16 июля

ФИО:

1. Сколько анаграмм есть у слова «АНАГРАММА»? Ответ:

2. Сколько существует пятизначных чисел с различными цифрами, в которых цифра сотен больше цифры десятков? Ответ:

3. Собрание из 40 человек выбирает три или два человека в комиссию. Сколько разных комиссий может быть составлено? Ответ:

4. Сколькими способами переплетчик может переплести 12 разных книг в красный, синий и зелёный переплеты? Ответ:

5. Сколькими способами переплетчик может переплести 12 разных книг в красный, синий и зелёный переплеты, если должна быть хотя бы одна красная книга? Ответ:

6. Сколькими способами шашка (которая может ходить или на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо), стоящая на поле $a1$, может пройти на поле $f7$, не проходя через $c3$? Ответ:

7. Постройте отрицания следующим высказываниям:
а)ЛМШата любят кефир и булочку.
Ответ:
б)ЛМШата любят кефир, но не любят мороженое.
Ответ:
в) Каждый день ЛМШата идут на утреннюю линейку.
Ответ:
г) ЛМШата ходят в душ или в баню.
Ответ:
д) ЛМШата любят играть либо в солдатов, либо в мафию.
Ответ:
е) Если сейчас 22.30, то ЛМШата не спят.
Ответ:

8. Перефразируйте высказывания, используя слова «Существует» или «Любой»:
а) Не все ЛМШата любят мороженое.
Ответ:
б) Нет таких дней, когда идет снег.
Ответ:
в) Встречаются ЛМШата, не знающие правил матбоя.
Ответ:
г) Нет детей, которые не любят спортивные соревнования.
Ответ:

Игры 2

17 июля

1. На концах полоски 1×20 стоят две фишки. За один ход их можно сдвинуть на 1, 2 или 4 клетки. Фишки не могут перепрыгивать друг через друга, проигрывает тот, кто не может сделать ход.

2. Два преподавателя играют в подъём. За ход можно разбудить 1 или 2 детей, либо воспользоваться тайным умением и увеличить количество проснувшихся детей вдвое. Выиграет тот, кто разбудит 41-го ребёнка.

3. В коробке лежат 300 спичек. За ход можно взять из коробка не более половины имеющихся в нем спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

4. Двое играющих ходят по очереди на циферблате с одной стрелкой: каждый своим ходом переводит стрелку на два или три часа вперед. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку на 11 часов. Кто выигрывает при правильной игре, если вначале стрелка показывает полдень?

5. *Устремленный король* может ходить на клетку вверх, вправо или вправо-вверх по диагонали. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто проиграет, если король стоит на клетке b2 шахматной доски?

6. В правом крыле 17-го корпуса живёт 24 ребёнка, а в левом — 17. Два преподавателя играют в отбой. За ход можно отбить одного ребёнка в правом крыле 17-го корпуса и двух в левом, либо двух в правом и одного в левом. Дети *послушные*, поэтому одного ребёнка нельзя отбить два раза. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

7. Двое играют в такую игру: на столе лежат 19 монет по два фунта и столько же монет по одному фунту. За ход разрешается взять монет на сумму не более трех фунтов. Забравший последнюю монету выигрывает.

8. В кучке лежит 25 камней, за один ход можно брать 1, 2 или 3 камня, при этом нельзя брать одинаковое количество камней подряд (то есть если игрок взял два камня, то следующим ходом второй игрок может взять только один или три камня). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

9. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковые, написать двойку, а если разные — единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра — единица, то выиграл первый игрок, если двойка — то второй.

10. На доске записано целое положительное число n. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается либо заменить число на доске на один из его делителей (отличных от единицы и самого числа), либо уменьшить число на единицу (если при этом число остается положительным). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

Матбой М6-Профи7

17 июля

1. В очередном забеге по коридору общежития участвуют 44 весёлых таракана. Тараканы стартовали одновременно от одной стены. Добежав до противоположной стены, таракан сразу поворачивает обратно. Первый таракан бежит не очень быстро, второй — вдвое быстрее, третий — вдвое быстрее второго, и так далее. Могут ли тараканы встретиться все вместе в точке, отличной от точки старта?

2. Прямоугольник $m \times n$ $(m, n > 4)$ выложен уголками из трёх клеток. При этом оказалось, что никакие два уголка не образуют прямоугольника. Найдите все возможные пары значений m и n.

3. Рассматриваются всевозможные десятизначные числа, записываемые при помощи двоек и единиц. Разбейте их на два класса так, чтобы при сложении любых двух чисел каждого класса получалось число, в написании которого содержится не менее двух троек.

4. На Петиной чаше двухчашечных весов лежат гири весом 1г, 3г,..., 2001г, а на Васиной чаше — 2г, 4г,..., 2002 г. Первым ходит Вася — он убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Петиной. Потом Петя убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Васиной. Затем опять ходит Вася, потом Петя, и так далее. Выигрывает тот, кто первым сможет убрать все гири со своей чаши. Кто может обеспечить себе победу и как ему нужно для этого играть?

5. В ряду чисел 1, 251, 376, ... каждое число, кроме первого, равно либо половине предыдущего, если предыдущее четно, и половине предыдущего числа, увеличенного на 501, в противном случае. Верно ли, что в этом ряду встретятся все числа от 1 до 500?

6. В ряд лежат 5 монет. Известно, что две из них фальшивые (одного веса и легче настоящих). Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, сколько настоящих монет лежит между фальшивыми?

7. Про группу из пяти человек известно, что: Алеша на 1 год старше Алексеева, Боря на 2 года старше Борисова, Вася на 3 года старше Васильева, Гриша на 4 года старше Григорьева, а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?

8. «Дельфин» – фигура, которая ходит на одно поле вверх, вправо или по диагонали влево вниз. Может ли «дельфин», начиная из левого нижнего угла, обойти всю шахматную доску, побывав в каждой клетке ровно один раз?

Матбой-немеждусобой

17 июля

1. Сумма двух двузначных чисел равна 68. Если к большему из них при-писать справа меньшее, то полученное четырёхзначное число будет на 2178 больше того четырёхзначного числа, которое получится, если к меньшему приписать справа большее. Найдите эти числа.

2. Матбой начался между 10 и 11 часами, когда часовая и минутная стрелки были направлены в противоположные стороны, а закончился между 16 и 17 часами, когда стрелки совпали. Сколько времени продолжался матбой?

3. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой. На каждой точке написано число. Известно, что сумма чисел на любой прямой, проходящей через 2 и более точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны 0.

4. Имеется хромая ладья, которая может ходить на любое количество клеток, но если она сходила налево, то потом идет вниз, если вниз, то потом направо, если направо, то потом вверх, если вверх, то потом налево. Найти все такие m и n, что хромая ладья может обойти все клетки доски $m \times n$, побывав на каждой клетке ровно один раз(остановившись).

5. На Петиной чаше двухчашечных весов лежат гири весом 1г, 3г,..., 2001г, а на Васиной чаше — 2г, 4г,..., 2002 г. Первым ходит Вася — он убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Петиной. Потом Петя убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Васиной. Затем опять ходит Вася, потом Петя, и так далее. Выигрывает тот, кто первым сможет убрать все гири со своей чаши. Кто может обеспечить себе победу и как ему нужно для этого играть?

6. Четверо преподавателей шли в корпус из буфета. Каждый их них запасся шоколадками — Саша купил на 5 шоколадок больше, чем Леша, а Ира — на 7 больше, чем Егор. У входа в корпус их встретила Валя, и конфисковала все шоколадки у двоих самых запасливых. Сколько всего шоколадок закупили преподаватели в буфете, если Валя конфисковала 15 штук?

7. Делится ли на 5 количество упорядоченных пятерок натуральных чисел $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{1}{67}$?

8. В королевстве Логрия живут рыцари. Любые два из них враждуют (например, сэр Гавейн враждует с сэром Ланселотом), дружат, или вовсе друг к другу безразличны. Друг врага рыцаря — враг этого рыцаря. Докажите, что хотя бы у одного рыцаря врагов больше, чем друзей.

Внутренний Матбой

17 июля

1. Натуральное число назовём складным, если его можно представить в виде суммы как трёх, так и пяти последовательных натуральных чисел. Сколько существует складных четырехзначных чисел?

2. Дано несколько гирь, причем каждая гиря легче суммы остальных. Докажите, что эти гири можно разбить на 2 кучи таким образом, что суммарные веса в этих кучах отличаются не более чем втрое.

3. Раскрасьте все натуральные числа в 2 цвета так, чтобы сумма любых трех одно цветных чисел была покрашена в тот же цвет.

4. Перед Гарри Поттером в ряд лежат 100 красных шариков. Одним взмахом палочки он может уничтожить левый шар, но при этом справа от каждого красного шара появится белый шар. Сможет ли Гарри уничтожить все шары?

5. В ящике лежат 45 маркеров, из которых 15 черных, 15 красных, 10 синих и 5 зеленых. Какое наименьшее число маркеров нужно извлечь из коробки, чтобы среди них заведомо нашлось 10 одноцветных?

6. По дороге до пункта А ходит автобус со скоростью 60 км/ч, скорость пешехода 5 км/ч. Вдоль дороги на расстоянии 26 км от пункта А и ближе расположены дома. Можно ли построить одну автобусную остановку таким образом, чтобы каждый житель, живущий у дороги, мог добраться от своего дома до пункта А, проведя в пути не больше 2 часов? (Временем ожидания автобуса и стоянки автобуса на остановке можно пренебречь.)

7. Придумайте два различных шестизначных числа с таким свойством: если вычесть из каждого из них число, образованного первыми тремя его цифрами, получаются одинаковые разности.

8. 666 лжецов и рыцарей сидят за круглым столом (среди сидящих есть как рыцари, так и лжецы). На вопрос: «Сколько лжецов рядом с тобой?» все сказали: «Один». Сколько лжецов может сидеть за столом?

Делимость 3. Равноостаточность

19 июля

1. а) Число при делении на 2 и на 5 даёт такой же остаток, как и его последняя цифра.
б) Число при делении на 4 и на 25 даёт такой же остаток, как и число, образованное его двумя последними цифрами.
в) Выведите аналогичные признаки при делении на 8 и на 125.

2. Последняя цифра квадрата натурального числа равна 6. Докажите, что предпоследняя цифра квадрата – нечётна.

3. Может ли степень числа 2 оканчиваться на четыре одинаковые цифры?

4. Докажите, что число при делении на 3 и на 9 даёт такой же остаток, как и его сумма цифр.

5. На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?

6. В натуральном числе A переставили цифры так, что получилось число $B < A$. Найдите наименьшее возможное значение $A - B$.

7. Какой остаток даёт число $10\ldots0$ (n нулей) при делении на 11 при а) чётном; б) нечётном n?

8. Докажите, что число при делении на 11 даёт такой же остаток, как и его знакопеременная сумма цифр (последняя цифра берется со знаком «+»).

9. Докажите, что число $\overline{a_1a_2\ldots a_na_n\ldots a_2a_1}$ – составное.

10. Докажите, что нельзя переставить цифры в числе 123456 так, чтобы полученное число делилось на 11.

Делимость 3,5. Равноостаточность

19 июля

1. В клетки таблицы 100×100 записаны ненулевые цифры. Оказалось, что все 100 стозначных чисел, записанных по горизонтали, делятся на 11. Могло ли так оказаться, что ровно 99 стозначных чисел, записанных по вертикали, также делятся на 11?

2. Пусть каждое из натуральных чисел n; $n + 1$; $n + 2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя.

3. На доске написаны числа от 1 до 100. Каждую минуту два числа стираются, а на доску записывается число равное сумме цифр стертых чисел. Может ли в конце остаться цифра?

Чередование

19 июля

1. Блоха умеет прыгать по прямой
а) либо на 1 влево, либо на 1 вправо.
б) либо на 1 влево, либо на 1 вправо, либо на 1 вверх, либо на 1 вниз.
Она начала своё путешествие из точки А и в некоторый момент вернулась в неё. Докажите, что она совершила чётное число прыжков.

2. Имеется замкнутая ломаная из 2015 звеньев. Может ли некоторая прямая пересечь каждое звено этой ломаной ровно один раз.

3. На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу.

4. Замок имеет форму правильного треугольника, разбитого на 25 одинаковых залов, каждый из которых также имеет форму правильного треугольника. В стене между любыми двумя залами есть дверь. Путник хочет обойти как можно больше залов, не заходя ни в один зал дважды. Какое наибольшее количество залов ему удастся обойти?

5. Хромой король умееет ходить на одну клетку во всех направлениях, кроме направления «верх» и направления «низ». Может ли он обойти все клетки доски 9×9, побывав на каждой ровно один раз (король сам выбирает с какой клетки начинать)?

6. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что число пар соседей разного пола четно.

7. Король обошёл шахматную доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернулся на исходное поле. Докажите, что он совершил чётное число ходов по диагонали.

8. Двое играют в такую игру. В начале по кругу стоят числа 1, 2, 3, 4. Каждым своим ходом первый прибавляет к двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первый выигрывает, если все числа станут равными. Может ли второй ему помешать?

9. Можно ли обойти шахматным конем доску $4 \times N$, посетив все клетки ровно один раз, и вернуться обратно?

10. Дана доска 15×15. Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200.

Разнобой 5

19 июля

1. В каждой клетке шахматной доски стоит по натуральному числу так, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце – четна. Докажите, что сумма чисел в черных клетках тоже четна.

2. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка – с двумя мальчиками. При этом в классе 31 пионер и стоит 19 парт. Сколько учеников в классе?

3. На острове живут 100 рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Как-то раз все они собрались и каждый сказал сколько среди его друзей рыцарей. Оказалось, что все назвали разное число. Сколько рыцарей на острове?

4. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

5. В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то одна из них завершила вничью всего не больше трёх игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

Постепенное конструирование

20 июля

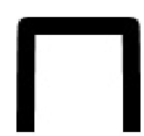
1. На бесконечной в обе стороны клетчатой ленте сидит кузнечик, который умеет прыгать на 7 клеток вправо и на 4 клетки влево.
а) Как кузнечику перепрыгнуть на одно деление левее?
б) Как кузнечику перепрыгнуть на одно деление правее?
в) Докажите, что он сможет добраться до любой клетки.

2. В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, \ldots, 2000$. Разрешается менять местами любые два числа, отличающиеся на 1 (например, 7 и 8), где бы они не стояли. Докажите, что можно поставить все числа в порядке возрастания

3. Давным-давно в стране СССР имелись в обращении 3-копеечные и 5-копечные монеты. Докажите, что можно было набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

4. Разрежьте квадрат на:
а) 4 меньших квадрата (не обязательно одинаковых);
б) на 7 квадратов;
в) на 6 квадратов;
г) на 8 квадратов;
д) На любое число квадратов, большее пяти

5. В мастерской изготавливают квадратные решётки, состоящие из квадратных ячеек со стороной 1. Для этого используют заготовки, состоящие из трёх стержней длиной 1, сваренных под прямым углом в виде буквы П (см. рисунок). При изготовлении решётки запрещается накладывать стержни друг на друга; можно лишь сваривать их между собой в точках касания. Изготовьте квадратную решётку размером а) 2×2; б) 3×3; в) 5×5; г) 9×9.



6. а) Придумайте 3 различных натуральных числа таких, чтобы каждое было делителем суммы всех остальных;
б) 4 числа;
в) 10 чисел.

7. Если на доске записано число A, к нему можно прибавить любой его собственный делитель (отличный от 1 и самого A) и заменить число на получившуюся сумму. Докажите, что из $A = 4$ можно получить любое составное число.

8. При каких натуральных n числа от 1 до n можно разбить на несколько групп, в каждой из которых одно число, умноженное на 2, равно сумме остальных?

9. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку доски 8×8, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. В начале маляр стоит на угловой клетке доски, где все клетки белые. Покажите, как маляру перекрасить только одну произвольную клетку. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

10. Есть 10 одинаковых бочек, одна из которых пуста, а 9 остальных заполнены винами девяти различных сортов (каждая бочка своим вином). Разрешается переливать любое количество вина из одной бочки в другую. Можно или нельзя сделать так, чтобы во всех десяти бочках было по $9/10$ равномерной смеси каждого из девяти вин?

Комбинаторика 5

20 июля

Обозначим через C_n^k количество способов выбрать из n различнах предметов k.

1. Найдите C_n^1, C_n^2.

В следующих задачах ответ можно выражать через C_n^k. Например, «$5 \cdot C_{10}^7 + C_9^7$ способов выбрать клетки доски».

2. На первенство лагеря от отряда выставляется команда, состоящая из 7 человек, в которой должно быть 3 или 4 девочки. Всего в отряде 9 девочек и 31 мальчик. Скольким количеством способов можно выставить команду.

3. Докажите, что $C_{10}^4 = C_{10}^6$.

4. Доктор Ватсон должен отдежурить в больнице 6 дней в месяц. Сколько для него возможно различных вариантов расписания дежурств на июнь (в котором, как известно, 30 дней)?

5. Как известно, для участия в лотерее «Спортлото» нужно указать шесть номеров из имеющихся на карточке 45 номеров.
а) Сколькими способами можно заполнить карточку «Спортлото»?
b) После тиража организаторы лотереи решили подсчитать, каково число возможных вариантов заполнения карточки, при которых могло быть угадано ровно три номера. Помогите им в этом подсчете.

6. Найдите количество способов добраться фишкой из клетки `a1` до клетке `f8`.

7. Сколькими способами можно разбить 15 человек на три команды по 5 человек в каждой?

8. Дана полоска 1×101, в первой клетке которой стоит ладья. Каким количеством способов она может за 7 прыжков достичь последней клетке, если а) прыгать можно вперёд и назад, б)прыгать можно только вперёд.

9. Сколько существует 10-ых чисел, все цифры которых различны и цифры 3, 6, 7 идут в них в порядке возрастания.

10. Докажите следующие формулы а) $C_n^k = \dfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$, б) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

11. Найдите формулу для C_n^k.

12. Диана Фархадовна считает, что 10-значные числа, в которых ровно пять восьмёрок скучные (*и не спрашивайте её почему!*). Сколько существует нескучных десятичных чисел.

Комбинаторика 5,5

20 июля

1. Дана таблица $m \times n$. Сколько способов заполнить её ± 1 так, чтобы произведение чисел в каждом столбце и строке было равно 1?

2. В жезле $2n$ полосок, каждую из которых можно покрасить в черный или белый цвет. Если одна раскраска получается из другой переворотом жезла, то они считаются одинаковыми. Сколько существует различных жезлов?

3. Существует гадание. Девушка зажимает в руке, скажем, 20 травинок, так чтобы концы травинок торчали сверху и с низу. Лучшая подруга связывает попарно 20 концов травинок сверху и попарно 20 концов травинок снизу. Если после этого оказалось, что все травинки образовали единое кольцо, то девушка непременно выйдет замуж в этом году. Какова вероятность, что девушка выйдет замуж?

4. Докажите следующие тождества а) $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n = 2^n$, б) $C_n^0+C_n^2+C_n^4\ldots = 2^{n-1}$.

5. Докажите следующие тождества

$$C_{2n}^n = C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+C_n^2C_n^{n-2}+\ldots+C_n^{n-1}C_n^1+C_n^nC_n^0 = (C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2$$

6. Сколько 6-ых чисел с чётной суммой цифр?

Делимость 4

21 июля

1. Докажите, что $n^2 + 2$ не делится на 5.

2. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть полным квадратом?

3. Докажите, что каждое из чисел последовательности 44, 444, 4444, ... не является степенью двойки.

4. Найдите наименьшее число, запись которого состоит лишь из нулей и единиц, делящееся без остатка на 225.

5. Докажите, что если числа N и $5N$ имеют одинаковую сумму цифр, то N делится на 9.

6. Докажите, что все числа 10017, 100117, 1001117,... делятся на 53.

7. В числе A переставили цифры так, что получилось число $B = 3A$. Докажите, что A делится на 9.

8. Натуральное число называется удивительным, если самый большой его собственный делитель на 1 больше, чем квадрат самого маленького собственного делителя. Найдите все удивительные числа и докажите, что других нет.

Раскраски 2

21 июля

1. Фигура «верблюд» ходит по шахматной доске ходом типа (1, 3). Можно ли пройти ходом «верблюда» с произвольного поля на соседнее?

2. Дана доска 12×12. В левом нижнем углу стоят 9 шашек, образуя квадрат 3×3. За один ход можно выбрать какие-то две шашки и переставить одну из них симметрично относительно другой (не выходя при этом за пределы доски). Можно ли за несколько ходов переместить эти шашки так, чтоб они образовали квадрат 3×3 в правом нижнем углу?

3. Можно ли в квадрате 9×9 отметить несколько клеток так, чтобы у каждой клетки был ровно один отмеченный сосед?

4. Кузнечик прыгает по шахматной доске 100×100 в любую сторону. Первый раз он прыгает на 1 клетку, второй – на 2 клетки, третий – на 3 клетки и т.д.
а) Может ли он через 49 прыжков оказаться в той же клетке, откуда начинал?
б) Может ли он таким способом допрыгать за 50 прыжков из верхнего левого угла в правый нижний?

5. Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, ..., восьмеркой и девяткой было нечетное число цифр?

6. а) Можно ли клетчатую доску 1002×1002 раскрасить в несколько цветов так, чтобы для любого использованного цвета было ровно 2 клетки этого цвета, причем они были в одном столбце или в одной строке и между ними была ровно 1 клетка другого цвета?
б) Тот же вопрос для доски 1001×1001 с вырезанной центральной клеткой.

7. Может ли ладья обойти все клетки доски 7×7, чередуя горизонтальные и вертикальные ходы, не побывав ни в одной клетке дважды?

8. Концы N хорд разделили окружность на $2N$ дуг единичной длины. Известно, что каждая из хорд делит окружность на две дуги четной длины. Докажите, что число N четно.

Игры 3

22 июля

1. Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие; проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

2. Есть две кучки с 21 и 20 шестиклассниками. За ход преподаватель может отправить спать одну кучку, а другую разделить на две (не обязательно равные). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

3. На столе лежит по одной монете достоинствами $1, 2, 3, 5, 10, 20$ и 50 копеек, а в кассе имеется неограниченный запас монет всех видов. За один ход разрешается взять любую монету со стола, разменять её на более мелкие и их положить на стол. Играют двое и проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

4. Дан прямоугольник 2×2000 (2 строки, 2000 столбцов). Два игрока ходят по очереди. Первый своим ходом вычеркивает две соседние по вертикали клетки, а второй вычеркивает две соседние по горизонтали клетки. Вычеркивать ранее вычеркнутые клетки нельзя. Игрок, не имеющий хода, проигрывает.

5. Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает 9 чисел (по своему выбору) из последовательности $1, 2, \ldots, 100, 101$. После одиннадцати таких вычеркиваний останутся 2 числа. Первому игроку присуждается столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Доказать, что первый игрок всегда сможет набрать по крайней мере 55 очков, как бы ни играл второй.

6. На доске стоит король, два игрока по очереди его передвигают, при этом нельзя посещать одну клетку дважды. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

7. В ряд стоят 40 шестиклассника, а два преподавателя их по очереди считают. Первый преподаватель за свой ход может посчитать четырёх подряд идущих шестиклассника, а второй — трёх (одного шестиклассника нельзя посчитать дважды). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

8. Двое играют на доске 13×144 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

Счастливые билеты

22 июля

Определение. Билет с шестизначным номером от 000000 до 999999 называется счастливым, если сумма его первых трех цифр равна сумме последних трех цифр. Наша цель – найти количество счастливых билетов (КСБ).

1. Докажите, что КСБ не более 100000.

Обозначение. a_k – количество трехзначных номеров с суммой цифр k, b_k – количество шестизначных номеров с суммой цифр k.

2. Докажите, что КСБ с суммой цифр $2k$ равно a_k^2.

3. Найдите а) a_4; б) a_9.

4. Докажите, что КСБ равно $a_0^2 + a_1^2 + ... + a_{27}^2$.

5. Докажите, что $a_k = a_{27-k}$.

6. Докажите, что КСБ равно $2(a_0^2 + a_1^2 + ... + a_{13}^2)$.

Определение. Рассмотрим все тройки неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x + y + z = k$. Назовем нарушением, если x, y или z больше 9. Назовем тройку хорошей, если в ней нет нарушений и плохой в противном случае. Аналогично определяются плохие и хорошие шестерки.

7. Найдите количество плохих троек при $k = 10$ и $k = 11$.

8. Докажите, что при $10 \leqslant k \leqslant 19$ количество плохих троек равно $3a_{k-10}$.

9. Найдите все a_k при $k = 0, 1, 2, \ldots, 12, 13$ и вычислите КСБ.

10. Докажите, что КСБ равно количеству шестизначных номеров с суммой цифр 27.

11. Докажите, что КСБ меньше C_{32}^5.

12. Докажите, что при $10 \leqslant k$ количество плохих шестерок не более C_{k-5}^5.

13. Докажите, что КСБ больше $C_{32}^5 - 6C_{22}^5$.

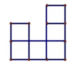
14. Докажите, что при данном k количество плохих шестерок с двумя нарушениями в данных местах равно C_{k-15}^5.

15. Докажите, что КСБ$=C_{32}^5 - 6C_{22}^5 + C_6^2 C_{12}^5$.

16. Найдите количество а) четырехзначных; б) восьмизначных счастливых билетов.

Заключительная олимпиада

24 июля

1. Сложите из следующих фигур квадрат: 

2. В календаре планеты Драконов все месяцы содержат одинаковое число дней. Через 100 дней после 20-го дня будет 15-ый день месяца, а через 75 дней после предпоследнего дня месяца будет 4-ый день месяца. Сколько дней в драконьем месяце?

3. Имеются 4 гири с маркировками 1 г, 2 г, 3 г, 4 г. Одна из них дефектная: более легкая или более тяжелая, чем указано. За какое наименьшее число взвешиваний можно узнать, какая из гирь дефектная, и при этом определить, легче она или тяжелее, чем на этой гире указано?

4. В квалификационном турнире чемпионата Китая по настольному теннису участвовало 75 теннисистов. Каждый сыграл с каждым ровно один раз. Ничьих в теннисе не бывает. По итогам турнира нашлось по крайней мере 25 теннисистов, каждый из которых имеет не более n поражений. Найдите наименьшее возможное значение n.

5. Фрекен Бок поставила по кругу 50 вазочек с конфетами так, что количество конфет в любых двух соседних вазочках отличается ровно на 1. Если Карлсон находит две вазочки, в которых поровну конфет, он съедает все конфеты в обеих вазочках. Докажите, что Карлсон сможет опустошить не меньше 32 вазочек.

Вывод

6. В олимпиаде, состоящей из 6 задач, участвуют 200 школьников. Известно, что каждую задачу решили хотя бы 120 школьников. Докажите, что можно выбрать двух школьников таким образом, чтобы каждую задачу решил кто-либо из этой пары.

7. Доска 8×8 покрыта доминошками (прямоугольками из двух клеток). Сколько доминошек целиком лежат на диагоналях `a1-h8` и `b1-h7`?

8. Двое по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом первый игрок выписывает на доску число 1. Затем если на доске уже написано число a, то очередным ходом на доску можно выписать либо число $2a$, либо число $a+1$. При этом запрещается выписывать числа, которые уже написаны на доске. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000. Кто выигрывает при правильной игре?