Lasciate ogni speranza, o voi ch'intrate[1]

Данте Алигьери: Inferno, Canto III, 9

Игры

Первый круг ада

1. **(3)** (Юля, симметрия) На окружности отметили 100 точек. Двое играют в следующую игру: каждый по очереди соединяет точки отрезком, соблюдая следующие правила: нельзя соединять две точки, хотя бы одна из которых уже соединена с чем-то, и нельзя пересекать уже проведённые отрезки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода согласно этим правилам. Кто выигрывает при правильной игре?

2. **(3)** (Юля, симметрия) Двое по очереди ставят королей в клетки доски 9×9 так, чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

3. **(3)** (симметрия, разбиение на пары) Двое по очереди ставят коней на шахматную доску с условием, чтобы кони не били друг друга. (Масти лошадей значения не имеют). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

4. **(3, 3+)** (Юля, симметрия) Петя и Вася выложили в ряд 30 коробок конфет и по очереди съедают содержимое любой коробки или двух, лежащих рядом. Выигрывает тот, что съедает последнюю конфету. Первым ходит Петя. Кто из них может обеспечить себе победу?

5. **(3+)** (Юля, симметрия) Двое по очереди ставят слонов на шахматную доску. Очередным ходом нужно побить хотя бы одну небитую клетку. Фигура бьёт и ту клетку, на которой стоит. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6. **(3+)** (перебор) Петя и Вася играют в такую игру. На столе лежит две кучи по 100 камней в каждой. Петя начинает. Своим ходом он может взять половину камней из любой кучи с четным числом камней (если во всех кучах нечетное число камней, то он пропускает ход). Петя своим ходом может взять один камень из любой кучи. Выигрывает тот, кто оставит в одной из куч ровно 1 камень. Кто выиграет при правильной игре?

[1] Оставь надежду всяк сюда входящий

7. **(3+)** (Юля, шахматы) На столе лежат 2 кучки конфет. В первой — 12 штук, во второй — 15. Двое играют в такую игру: за один ход разрешается либо съесть 2 конфеты из любой, но только одной кучки, либо переложить одну конфету из первой кучки во вторую. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выиграет при правильной игре?

8. **(3+)** (анализ) Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

9. **(3+)** (Юля, количество ходов) На доске написаны числа 255 и 361. Играют двое. За ход разрешается написать положительную разность двух каких-либо уже имеющихся чисел, которая еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?

10. **(3+)** (Юля, симметрия) В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку.

11. **(3+)** (Юля, разбиение на пары) Двое играют на шахматной доске. Первый ставит на любое поле шашку, затем они поочередно (начиная со второго) делают ею ходы на любое соседнее поле по диагонали, не возвращаясь на поля, где шашка уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит?

12. **(4–)** (РС) На столе лежат 2007 кучек по одному ореху в каждой. Двое ходят по очереди. За ход нужно объединить в одну две любые кучки с равным количеством орехов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из них сможет выиграть, как бы не играл противник?

13. **(4–)** (симметрия) Двое мальчиков играют в такую игру: они по очереди ставят ладьи на шахматную доску. Выигрывает тот, при ходе которого все клетки доски оказываются битыми, поставленными фигурами. Кто выигрывает, если оба стараются играть наилучшим образом?

14. **(4–)** (на подумать) Белая ладья преследует чёрного слона на доске 3×1969 клеток (они ходят по очереди по обычным правилам). Как должна играть ладья, чтобы взять слона? Первый ход делают белые.

15. **(4–)** (Юля, симметрия) У ромашки 11 лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

16. **(4–)** (Юля, симметрия) Двое по очереди разламывают шоколадку размером 5×10. За один ход разрешается сделать один прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1.

17. **(4–)** В четырех кучах лежит соответственно 1004, 1005, 2009 и 2010 камней. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе должен взять по камню из трех разных куч. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре — начинающий игру или его соперник?

18. **(4–)** (ИИ) Вася, Петя и еще 2009 человек встали в круг, при этом Вася и Петя находятся не рядом. После этого Вася выбирает любого из двух своих соседей и «пятнает» его (хлопает по плечу). Потом это делает Петя, потом снова Вася и т.д. Тот, кого запятнали, выходит из круга (и круг сужается). Тот из двух игроков, который запятнает другого, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

19. **(4–)** (МА) Дано 6 пустых банок. Двое по очереди делают ходы, состоящие в том, что игрок кладёт по рублю в три произвольно выбранные банки. Победителем считается тот, после хода которого в одной из банок впервые окажется 100 рублей. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнёр?

20. **(4–)** (анализ, техника) Два пирата делят добычу, состоящую из двух мешков монет и алмаза, действуя по следующим правилам. Вначале первый пират забирает себе из любого мешка несколько монет и перекладывает из этого мешка в другой такое же количество монет. Затем также поступает второй пират (выбирая мешок, из которого он берет монеты, по своему усмотрению) и т. д. до тех пор, пока можно брать монеты по этим правилам. Пирату, взявшему монеты последним, достается алмаз. Кому достанется алмаз, если каждый из пиратов старается получить его? Дайте ответ в зависимости от первоначального количества монет в мешках.

21. **(4–)** Петя и Вася играют в такую игру. На крайнем левом поле клетчатой ленты длины 20 лежит кучка из 2011 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из ребят своим ходом может сдвинуть любой камень на одно или два поля вправо. Выигрывает тот, кто первым поставит камень на крайнюю правую клетку. Кто выиграет при правильной игре?

22. **(4)** В кучке лежит 534 камня. За ход из кучки можно взять 2^k $(1, 2, 4, 8, \ldots)$ камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

23. **(4)** (почти близнец, мб чуть сложней, рисунок) Есть длинный ряд луночек. В трёх из них лежит по шарику. Игроки по очереди делают ход: берут один из крайних шариков и перекладывают в свободную луночку между двумя другими. Тот, кто не может сделать ход, считается проигравшим. Кто — начинающий игру или ходящий вторым — победит при правильной игре при показанных на рисунках первоначальных расположениях шариков?

24. **(4)** (симметрия) Петя и Вася играют на доске размером 7×7. Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из них сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

25. **(4)** (Юля) Двое играющих по очереди ставят по фишке на пустые клетки доски 4×4. Нельзя ставить фишки так, чтобы оказался заполнен квадрат 2×2. Кто не сможет ходить — проиграл. Кто может выигрывать независимо от игры противника?

26. **(4)** (РС) На концах клетчатой полоски размером 1×101 клеток стоят две фишки: слева фишка первого игрока, справа — второго. За ход разрешается сдвинуть свою фишку в направлении противоположного края полоски на 1, 2, 3 или 4 клетки. При этом разрешается перепрыгивать через фишку соперника, но запрещается ставить свою фишку на одну клетку с ней. Выигрывает тот, кто первым достигнет противоположного края полоски. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?

27. **(4+)** (Юля, разбиение на пары) По кругу расставлены 256 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Первый отрезок проводится произвольно, а каждый следующий начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить один отрезок нельзя). Кто выиграет при правильной игре?

28. **(4+)** В каждом из 100 сосудов лежит по 99 камней. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе должен взять по одному камню из 98 сосудов. Игрок, после хода которого два сосуда оказались пусты, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партёр?

29. **(5–, 5)** (МА) На табло расположено 10 лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который меняет состояние лампочки. Петя и Вася играют в такую игру: каждый из мальчиков своим ходом может щёлкнуть одним выключателем, изменив состояние одной лампочки. Запрещается повторять ситуацию, которая уже была (включая изначальную). Проигрывает тот, кто не имеет хода. Начинает Петя. Кто из ребят выиграет при правильной игре?

30. **(5)** (гробик, мб **[:||||:]**) В коробке лежит полный набор костей домино. Два игрока по очереди выбирают из коробки по одной кости и выкладывают их на стол, прикладывая к уже выложенной цепочке с любой из двух сторон по правилам домино. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре?

Делимость

Второй круг ада

1. **(3–)** (Юля) Лифт в стоэтажном доме может поднимать на 6 этажей и опускать на 18. Можно ли на нем попасть с любого этажа на любой?

2. **(3)** (Юля) Даны три цифры. Всегда ли можно составить число, делящееся на 3, использовав каждую цифру не более, чем по одному разу?

3. **(3)** (Юля) Доказать, что если $a^2 + b^2$ делится на 11, то и a, и b делятся на 11.

4. **(3)** (ЕА, делимость, на троечку) Число 1999! заменили на его сумму цифр. Полученное число снова заменили на его сумму цифр, и т.д. Что получится в конце?

5. **(3+)** (Юля) Доказать, что если число делится на 99, то сумма его цифр не меньше 18.

6. **(3+)** (ЕА) При записи цифр четырехзначного числа в обратном порядке получается другое четырехзначное число, произведение которого с исходным делится на 1000. Найдите все такие четырехзначные числа.

7. **(3+)** (Юля, дел9) Сколько имеется четырехзначных чисел, которые делятся на 45, а две средних цифры у них 97?

8. **(3+)** (Юля, вроде было что-то похожее) На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Какое наименьшее количество чисел нужно стереть так, чтобы оставшиеся можно было разбить на две группы с равными произведениями чисел в группе?

9. **(3+, 4–)** (Юля) Сколько существует семизначных чисел, которые оканчиваются на 111 и делятся на 111?

10. **(3+, 4–)** (РС, перебор) Восемь детей разделили между собой 32 персика следующим образом. Аня получила 1 персик, Катя — 2, Лиза — 3 и Даша — 4. Коля Иванов взял столько же персиков, сколько и его сестра, Пете Гришину досталось вдвое больше персиков, чем его сестре, Толе Андрееву — втрое больше, чем его сестре, и, наконец, Вася Сергеев получил персиков вчетверо больше, чем его сестра. Назовите фамилии четырех девочек.

11. **(4–)** (Юля) Доказать, что среди любых 18 последовательных трехзначных чисел найдется число, делящееся на свою сумму цифр.

12. **(4–)** (РС) Докажите, что для любого m остатки от деления на m квадратов всех чисел от 1 до $m-1$ будут симметричны. Например, для $m = 5$ это будут числа $1, 4, 4$ и 1.

13. **(4–, 4)** (ЕА, введение переменной) В школе учится 450 школьников, которые сидят за 225 партами. Известно, что ровно половина девочек сидит за одной партой с мальчиками. Докажите, что нельзя так пересадить школьников, чтобы ровно половина мальчиков сидела за одной партой с девочками.

14. **(4)** (Юля) На доске было написано число вида $777\ldots77$. Руслан Сергеевич стер у этого числа последнюю цифру, полученное число умножил на 3 и к произведению прибавил стертую цифру. С полученным числом он проделал ту же операцию и т.д. Докажите, что через некоторое время у него получится число 7.

15. **(4)** (РС) Рассматриваются всевозможные семизначные числа с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, записанными в произвольном порядке. Докажите, что ни одно из них не делится ни на какое другое.

16. **(4, 4+)** (МА) Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из них можно было составить ровно одно 19-значное число, делящееся на 11.

17. **(4+)** (РС, дел) Дано 100-значное число, все цифры которого кроме одной — пятерки. Докажите, что это число — не квадрат.

18. **(4+)** (МА) Даны десять подряд натуральных чисел. У каждого взяли наибольший собственный делитель и образовали новые десять чисел. Докажите, что найдутся два, оканчивающиеся на одну и ту же цифру.

19. **(4+)** (Юля) В ряд выписаны 20 различных натуральных чисел. Произведение любых двух чисел, стоящих подряд, является квадратом натурального числа. Первое число равно 42. Докажите, что хотя бы одно из чисел больше 16000.

20. **(4+, 5–)** (МА) По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

21. **(5–)** (МА) Пусть a, b, c — три натуральных числа. На доску выписали три произведения ab, ac, bc и у каждого из них стёрли все цифры, кроме двух последних. Могло ли случиться, что в результате получились три последовательных двузначных числа?

22. **(5–)** (РС, дел) Найдите все натуральные n, для которых число вида `11...144...4` (единиц n штук, четвёрок $2n$ штук) — точный квадрат.

23. **(5)** *(не давать Когану)* (Юля) При каких натуральных n число `10101...01` (n единиц, $n-1$ нуль) простое?

Четность, чередование, раскраска

Третий круг ада

1. **(2+, 3–)** (Юля) Диана Фархадовна сложила в стопку несколько треугольников, в углах каждого из которых написаны числа 1, 2 и 3. Может ли сумма чисел в каждом углу стопки оказаться равной 55?

2. **(3–)** (Юля) Имеется 1995 переключателей. Изначально они все выключены. Разрешается выбрать любые два и перевернуть их в противоположное положение (т.е. выключенные включить, а включенные — выключить). Можно ли, проделав несколько раз эту операцию, привести их все во включенное состояние?

3. **(3–)** (Юля) Числа $1, 2, \ldots, 100$ выписаны в ряд в указанном порядке. Разрешается менять местами любые 2 числа, стоящие через одно. Можно ли за несколько таких операций получить ряд $100, 99, \ldots, 2, 1$?

4. **(3–)** (Юля) Можно ли разменять 100 рублей купюрами 1, 3, 5, 25 рублей так, чтобы всего оказалось 45 купюр?

5. **(3+)** (РС, раскр) На шахматной доске стоит несколько королей. Докажите, что их можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы короли одного цвета не били друг друга.

6. **(3+)** (Юля) Шахматная доска разбита на доминошки. Всегда ли можно раскрасить их в три цвета так, чтобы доминошки одинакового цвета не граничили друг с другом по отрезку?

7. **(3+)** (Юля) Кузнечик после каждого своего прыжка поворачивает на 90 градусов в любую из сторон. Может ли он вернуться в исходную точку после 2015 равных прыжков?

8. **(3+)** (РС) Бегуны X, Y и Z участвуют в забеге. Z задержался на старте и выбежал последним, а Y выбежал вторым. Z во время забега менялся местами с другими участниками 6 раз, а X — 5 раз. Известно, что Y финишировал раньше X. В каком порядке они финишировали?

9. **(3+)** (ИИ) Во время перемирия за круглым столом разместились рыцари из двух враждующих кланов. Оказалось, что рыцарей, справа от которых сидит враг, равно числу рыцарей, справа от которых сидит друг. Докажите, что число рыцарей делится на 4.

10. **(3+)** (Юля) Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов (не обязательно подряд идущие) и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2000?

11. **(3+)** (РС) Мышонок ест куб сыра $3 \times 3 \times 3$, съедая за один присест один кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как кубик съеден, мышонок переходит к соседнему с ним по грани кубику. Может ли этот зверь съесть весь сыр без центрального кубика?

12. **(3+)** (РС, раскр) За один ход можно выбрать произвольный квадрат 2×2 на доске 4×4 с шахматной раскраской и изменить цвет каждой клетки этого квадрата на противоположный. Можно ли за несколько ходов сделать так, чтобы все клетки доски оказались одного цвета?

13. **(3+, 4–)** (ЕА, брат-близнец задачи, которая уже была) «Крокодилом» называется фигура, ход которой заключается в прыжке на клетку, в которую можно попасть сдвигом на одну клетку по вертикали или горизонтали, а затем на n клеток в перпендикулярном направлении (при $n = 2$ «крокодил» — это шахматный конь). При каких n «крокодил» может пройти с любой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?

14. **(4–)** (РС) На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний от этих точек до точки B.

15. **(4–)** (РС) Можно ли из 13 кирпичей $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре?

16. **(4–)** (РС) Докажите, что доску 8×8 нельзя замостить 15 фигурками 1×4 и одной фигуркой из четырех клеток в форме буквы «Г».

17. **(4–)** (РС) По ребрам куба ползает муравей, нигде не поворачивая обратно. Может ли он в одной из вершин побывать 15 раз, а в остальных — по 10 раз?

18. **(4–, 4)** (Юля) Прямоугольное дно коробки было выложено квадратами 2×2 и прямоугольниками 1×4. Один квадрат потеряли и вместо него нашли прямоугольник. Можно ли теперь выложить дно прямоугольной коробки?

19. **(4–, 4)** (Юля) Какое наибольшее количество черных шашек может съесть за один ход белая шашка на доске 8×8 (в дамку шашка не превращается)?

20. **(4)** (Юля) Квадрат 99×99 разрезан по границам клеток на прямоугольники. Докажите, что найдется часть, чей периметр делится на 4.

21. **(4)** (Юля) Кузнечик после каждого своего прыжка поворачивает на 90 градусов в любую из сторон. Может ли он вернуться в исходную точку после 2014 равных прыжков?

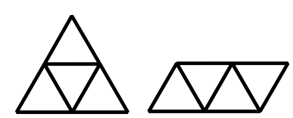
22. **(4)** (РС, четн, раскр) В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. Каждая вершина и каждая точка пересечения диагоналей окрашены в синий цвет. Вася хочет перекрасить эти синие точки в красный цвет. За одну операцию ему разрешается поменять цвет всех окрашенных точек, принадлежащих либо одной из сторон либо одной из диагоналей на противоположный (синие точки становятся красными, а красные — синими). Сможет ли он добиться желаемого, выполнив какое-то количество описанных операций?

23. **(4)** (МА) Прямоугольник двумя перпендикулярными линиями разделён на 4 прямоугольника (в общей сложности всего 9 прямоугольников). Известно, что у каждого из этих 9-ти длина и ширина — целые числа. Какое наибольшее число этих прямоугольников могут иметь нечётную площадь?

24. **(4)** (РС, полублизнец) На доске 8×8 в левом нижнем углу в виде квадрата 3×3 расположены 9 фишек. За один ход можно какой-нибудь одной фишкой перепрыгнуть через какую-нибудь другую (не обязательно соседнюю) фишку на клетку, симметричную первой клетке относительно второй. Можно ли через несколько ходов собрать все фишки в виде квадрата 3×3 в правом верхнем углу доски?

25. **(4+)** (МА) На доске записано произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — натуральные числа. Рассмотрим 99 выражений, каждое из которых получается заменой одного из знаков умножения на знак сложения. Известно, что значения ровно 32 из этих выражений четные. Какое наибольшее количество четных чисел среди $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ могло быть?

26. **(4+)** (РС) Правильный треугольник со стороной 10 разбит прямыми, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Имеется 10 плиток-«треугольников» и 15 плиток-«параллелограммов». Можно ли замостить ими весь исходный треугольник?



27. **(4+, 5–)** (Юля) Фигура «заяц» ходит либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку по диагонали вверх-вправо или вверх-влево. За какое минимальное число ходов она обойдет доску 7×7 и вернется на исходное поле?

28. **(5–)** (РС) Можно ли 2550 прямоугольниками 4×1 покрыть доску 101×101 так, что только центральное поле останется непокрытым?

29. **(5)** (РС) В трех вершинах квадрата находятся 3 кузнечика, играющие в чехарду. При этом если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается на том же расстоянии от него, но по другую сторону и на той же прямой. Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвертую вершину квадрата?

30. **(5)** (РС) Придумайте какое-либо взаимно-однозначное соответствие между разбиениями натурального числа на различные и на нечетные слагаемые.

31. **(5)** (РС) На прямой стоят две фишки, слева — красная, справа — синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю — слева?

32. **(5)** (МА) Можно ли квадрат 101×101 покрыть рамками шириной в одну клетку так, чтобы над каждой клеткой квадрата находились одинаковое число рамок?

33. **(5)** (МА) В клетках прямоугольника 5×9 стоят 33 фишки. Ход состоит в том, что все фишки одновременно сдвигаются так, чтобы каждая фишка оказалась на клетке, соседней с исходной. При этом запрещается ставить две фишки на одну клетку (в том числе и в начальной позиции). Кроме того, если какая-то фишка передвинулась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвигаться по вертикали, и наоборот. Докажите, что по этим правилам невозможно сделать подряд 100 ходов.

34. **(5)** (МА) Может ли ладья обойти все клетки доски 10×10, не проходя по клеткам дважды и чередуя ходы на одну и две клетки.

35. **(5, 5+)** (РС) Шахматная доска разбита на доминошки. Всегда ли можно раскрасить их в четыре цвета так, чтобы всех цветов было поровну и доминошки одинакового цвета не граничили друг с другом по отрезку?

Методы

Четвёртый круг ада

1. **(2+)** (Юля, Дирихле) За круглым столом сидят 100 человек, причем из них 51 — мужчины. Докажите, что хотя бы двое мужчин сидят друг против друга.

2. **(3–)** (Юля, Дирихле) 9 преподавателей составили 50 задач для заключительной олимпиады в ЛМШ. Известно, что среди них были преподаватели, составившие по 1, 2 и 3 задачи. Доказать, что среди них были преподаватели, составившие не менее 8 задач.

3. **(3–)** (ЕА, перебор) Сколько различных трёхзначных чисел, делящихся на 6 можно составить из четырёх карточек с цифрами 3, 4, 5 и 6? Запишите эти числа.

4. **(3)** (Юля, Дирихле) В вершинах куба расставлены различные числа. Докажите, что по меньшей мере одно из них меньше среднего арифметического своих трех соседей.

5. **(3)** (Юля, Дирихле) 21 мальчик вместе собрали 200 орехов. Докажите, что какие-то два мальчика собрали одинаковое число орехов.

6. **(3)** (ЕА, введение переменной) У Деда Мороза и Санта-Клауса спросили: «Сколько подарков в ваших мешках?». «В моём мешке половина числа подарков, находящихся в мешке у Дед Мороз да ещё 10», — ответил Санта. «А у меня в мешке столько подарков, сколько у Санты, да ещё 20», — сказал Дед Мороз. Сколько же у них подарков? Кто кому сколько подарков должен отдать, чтобы у них в мешках подарков стало поровну?

7. **(3)** (Юля, подсчёт?) На шахматной доске стоит 7 белых фигур. Доказать, что можно поставить на доску черного коня так, чтобы он не бил ни одну из этих фигур.

8. **(3)** (Юля, Дирихле) За круглым столом сидят 100 человек, причем из них 76 — мужчины. Докажите, что найдутся 4 мужчины, сидящие в вершинах квадрата.

9. **(3)** (Юля, Дирихле) 41 младенец строят из красных и синих кубиков башни высотой 5 кубиков. Доказать, что среди этих башен есть хотя бы две одинаковые.

10. **(3, 3+)** (Юля, Дирихле) Сумма десяти различных чисел равна 155. Докажите, что сумма каких-то четырех не меньше 74.

11. **(3, 3+)** (Юля, О+П) Какое наименьшее количество доминошек можно положить на шахматную доску (каждая доминошка должна закрывать две клетки) так, чтобы на каждой горизонтали и каждой вертикали была закрытая доминошкой клетка?

12. **(3+)** (РС, логика) Четверо детей сказали друг о друге так:
Маша: Задачу решили трое: Саша, Наташа и Гриша.
Саша: Задачу не решили трое: Маша, Наташа и Гриша.
Наташа: Маша и Саша солгали.
Гриша: Маша, Саша и Наташа сказали правду.
Сколько детей на самом деле сказали правду?

13. **(3+)** (Юля, О+П) Какое наибольшее количество различных чисел меньше 100 можно выбрать так, чтобы среди любых двух одно делилось на другое?

14. **(3+)** (РС, логика) На полянке собрались божьи коровки. Если у божьей коровки на спине 6 точек, то она всегда говорит правду, а если 4 точки — то она всегда лжет, а других божьих коровок на полянке не было. Первая божья коровка сказала: «У нас у каждой одинаковое количество точек на спине». Вторая сказала: «У всех вместе на спинах 30 точек». «Нет, у всех вместе 26 точек на спинах», — возразила третья. «Из этих троих ровно одна сказала правду», — заявила каждая из остальных божьих коровок. Сколько всего божьих коровок собралось на полянке?

15. **(3+)** (РС) Цифры $1, 2, \ldots, 9$ разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

16. **(3+)** (МА) Вася купил в киоске лапши «Доширак» и «Роллтон», всего десять пачек. Если бы все десять пачек были «Роллтонами», то он заплатил бы на девять рублей меньше, а если бы все пачки были «Дошираками», то на двадцать один рубль больше. На сколько рублей пачка «Доширака» дороже, чем пачка «Роллтона»?

17. **(3+)** (МА) На олимпийских играх наши спортсмены завоевали 96 медалей, из них 65 золотых и бронзовых, а золотых и серебряных — 61. Сколько золотых, серебряных и бронзовых медалей в отдельности?

18. **(3+, 4–)** (выкинуть?, Юля) На какое наибольшее число нулей может оканчиваться произведение трех трехзначных чисел, для записи которых использовалось 9 различных цифр?

19. **(4–)** (Юля) Некоторые границы внутри клеток шахматной доски обведены так, что она разбилась ими на прямоугольники из двух клеток. Найдите общую длину обведенных линий.

20. **(4–)** (РС, перебор) На шахматную доску поставили три коня и три ладьи так, чтобы каждая фигура била ровно одну другую и была побита ровно одной другой. Докажите, что кони друг друга не бьют.

21. **(4–)** (Юля, Дирихле) Из 20 мальчиков класса у 14 — карие глаза, у 15 — темные волосы, 17 мальчиков весят больше 40 килограммов и 18 мальчиков выше 1 м 60 см. Докажите, что по крайней мере 4 мальчика обладают всеми перечисленными признаками?

22. **(4–)** (ЕА) Назовём «орлом» фигуру, которая бьёт по горизонтали и вертикали на любое расстояние, большее 1. Какое наибольшее количество орлов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга.

23. **(4–)** (РС, логика) В ряд выстроились 2009 аборигенов. Каждый сказал: «Слева от меня рыцарей не больше, чем лжецов справа». На каких местах в ряду стоят рыцари?

24. **(4–)** (МА) В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Ровно треть команд хотя бы раз сыграли вничью, а ровно 75 % остальных команд не обошлись без поражений. Сколько результативных матчей было сыграно в турнире?

25. **(4–, 4)** (МА) Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых можно за одно взвешивание определить общий вес любых трёх арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?

26. **(4–, 4)** (РС, логика) На острове живут рыцари и лжецы. Посетивший остров Вася встретил двух жителей А и Б, и захотел узнать, кто они. Он спросил у А: «Вы оба рыцари?» А ответил. Вася понял, что он не может определить, кто такие А и Б, и задал еще один вопрос: «Вы одного типа?» А опять ответил, и Вася догадался, к какому типу относятся А и Б. К какому же?

27. **(4)** (Юля, пример) В ряд написано 10 натуральных чисел. При этом по краям стоят две единицы, а в остальных местах — различные натуральные числа, отличные от единицы. Известно, что произведение двух любых чисел, стоящих через одно число, делится на число. записанное между ними. Найдите наибольшее возможное значение количества простых чисел среди выписанных.

28. **(4)** (ИИ, От противного) На шахматной доске размера $(2n-1)\times(2n-1)$ стоят $2n-1$ ладей, причем никакие две не бьют друг друга. Доказать, что в любом квадрате $n \times n$ стоит хотя бы одна ладья.

29. **(4)** (РС, оп) На столе 9 пустых корзин. Каждую минуту Вася выбирает любые 5 из них и кладёт в них по яблоку. Через некоторое время во всех корзинах оказалось различное число яблок. Какое наименьшее число яблок может быть во всех корзинах в сумме в этот момент?

30. **(4)** (РС, логика) В некотором государстве живут граждане трёх типов: а) дурак считает всех дураками, а себя умным; б) скромный умный про всех знает правильно, а себя считает дураком; в) уверенный умный про всех знает правильно, а себя считает умным. В думе 200 депутатов. Премьер-министр провёл анонимный опрос думцев: сколько умных в этом зале сейчас находится? По данным анкет он не смог узнать количество умных. Но тут из поездки вернулся единственный депутат, не участвовавший в опросе. Он заполнил анкету про всю думу, включая себя, и прочитав её, премьер-министр всё понял. Сколько умных могло быть в думе (включая путешественника)?

31. **(4)** (РС, оп) Какое наибольшее число слонов можно добавить к 6 ладьям, чтобы все эти фигуры можно было расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

32. **(4)** (РС, ОП) На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу — белые, вверху — чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые — вверху?

33. **(4)** (СГ) Каждый год, начиная с 2000, в классе выбирали старостой Вову или Диму. Через 2010 лет впервые оказалось, что Вова и Дима побывали старостами одинаковое количество раз. Занимать должность старосты три года подряд запрещено уставом школы. Докажите, что в 4004 и 4005 годах старостами избирались разные мальчики.

34. **(4)** (РС, перебор) Трое ребят играли в слова, каждый составил по 10 слов. Если слово есть у всех, оно вычеркивается, если ровно у двоих — оба получают по одному баллу, за остальные свои слова каждый получает по три балла. В итоге все трое набрали разное количество баллов, при этом один из них набрал 19 баллов, что стало самым низким результатом. Сколько баллов набрали остальные?

35. **(4)** (РС, ОП) В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и -1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной. Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?

36. **(4)** (РС, ОП) В каждую клетку прямоугольника 10×19 записано одно из чисел 0 или 1, после чего подсчитали суммы чисел в каждом столбце и в каждой строке. Какое наибольшее количество различных чисел могло получиться?

37. **(4)** (РС, ОП) Сумма нескольких натуральных чисел, в записи каждого из которых участвуют только цифры 3 и 0, равна `55...5` (число состоит из 1992 пятёрок). Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой сумме?

38. **(4)** (РС, ОП) Имеется линейка длины 9 см без делений. Какое наименьшее число промежуточных делений нужно нанести на линейку, чтобы можно было отложить отрезки длины 1см, 2см, 3см, ..., 9см, прикладывая линейку лишь один раз (в каждом случае)?

39. **(4, 4+)** (ИИ, Геометрия) Клетчатая плоскость окрашена в 2 цвета. Доказать, что найдётся прямоугольник, все вершины которого окрашены в один цвет.

40. **(4+)** (СГ, логика) За круглым столом сидят 180 человек, каждый из которых — рыцарь или лжец. Каждый из них произнес фразу: «Среди 17 человек, сидящих следом за мной по часовой стрелке, не менее 9 лжецов». Сколько рыцарей может сидеть за этим столом?

41. **(4+)** (РС, ОП) Сколько раз можно расставить числа от 1 до 9 в клетки квадрата 3×3, чтобы каждые два числа оказывались в соседних по сторонам клетках не более одного раза?

42. **(4+)** (РС, оп) В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 4×4 так, чтобы в каждой квадрате 2×2 нашлась пара клеток одного цвета?

43. **(4+)** (МА) Назовем бабочкой фигуру, состоящую из двух клеток, соседних по углу. Какое наименьшее количество бабочек можно разместить на доске 7×7 таким образом, чтобы любая клетка этой доски либо принадлежала одной из бабочек, либо была соседней по стороне с клеткой одной из бабочек?

44. **(4+)** (МА) Квадратная страна 2000×2000 км разбита на прямоугольные области 100×200 км. Области объявили независимость, и каждая пара областей, имеющих общий участок границы, построила на двоих одну таможню. Какое наибольшее число таможен могло быть построено?

45. **(4+)** (РС, оп) Три квадратных плитки шоколада размерами 3×3, 4×4 и 5×5 нужно разделить поровну на пятерых. Какое наименьшее количество разломов для этого потребуется. (За один раз разрешается разделить один из кусков по имеющейся прямолинейной бороздке).

46. **(4+)** (РС, оп) На заседании международного жюри конкурса «Кенгуру» за круглым столом сидят 12 человек. При этом на любых шести последовательных местах сидят представители не более чем трёх разных стан. Представители какого наибольшего количества стран могут сидеть за столом?

47. **(4+)** (ИИ, оценка+пример) Какое наименьшее число клеток достаточно закрасить в квадрате 5×5, чтобы обязательно нашелся уголок из трёх закрашенных клеток?

48. **(4+, 5–)** В кошельке лежит 50 монет на сумму 98 копеек. Всегда ли эти монеты можно разложить по двум кошелькам так, чтобы в каждом оказалось по 49 копеек?

49. **(4+, 5–)** (ЕА, ПрКр) На некоторых клетках шахматной доски 100×100 стоят ладьи. Докажите, что их можно раскрасить в три цвета так, чтобы ладьи одинакового цвета друг друга не били.

50. **(4+, 5–)** (Юля, подсчёт?) На шахматной доске стоит 11 белых фигур. Доказать, что можно поставить на доску черного коня так, чтобы он не бил ни одну из этих фигур.

51. **(4+, 5–)** (МА) В каждой клетке доски размером 16×30 клеток сидит по жуку. Назовем соседями двух жуков, которые сидят в клетках, имеющих общую сторону. Могут ли эти жуки перелететь на доску размером 15×32 так, чтобы в каждой ее клетке оказалось по одному жуку, а жуки, бывшие соседями на доске 16×30, оказались соседями и на новой?

52. **(5–)** (РС, ОП) На каждом из полей верхней и нижней горизонтали доски 9×9 стоит по фишке: внизу — белые, вверху — чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые — вверху?

53. **(5–, 5)** (РС) Имеется 100 камней разного веса (одинаковых нет), к каждому прикреплена этикетка с указанием его веса. Хулиган Вася хочет переклеить этикетки так, чтобы общий вес любого набора с числом камней от 1 до 99 отличался от суммы весов, указанных на этикетках этого набора. Всегда ли он сможет это сделать?

54. **(5)** (ИИ, логика) На собрании присутствовало 100 рыцарей и хитрецов, причем рыцарей было больше, чем хитрецов. Может ли путешественник узнать о каждом человеке хитрец он или рыцарь за 197 вопросов, задавая только вопросы вида «Кем является такой-то человек?» (вопросы «Кем являешься ты?» так же допустимы)?

55. **(5)** (РС, оп) Шестизначное число назовем неразложимым, если оно не раскладывается в произведение трехзначного и четырехзначного числа. Какое наибольшее число неразложимых шестизначных чисел может идти подряд?

56. **(5)** (РС, оп) На шахматной доске расставлены во всех клетках 32 белых и 32 чёрных пешки. Пешка может бить пешки противоположного цвета, делая ход по диагонали на одну клетку и становясь на место взятой пешки (белые пешки могут бить только вправо-вверх и влево-вверх, а чёрные — только влево-вниз и вправо-вниз). Другим образом пешки ходить не могут. Какое наименьшее количество пешек может остаться на доске?

57. **(5)** (ИИ) На шахматной доске стоят 8 ладей так, что они не бьют друг друга. Докажите, что число ладей стоящих на черных полях, чётно.

Комбинаторика

Пятый круг ада

1. **(2+, 3–)** (Юля) Сколько существует четырехзначных чисел с суммой цифр 34?

2. **(3)** (Юля) Сколько существует нечетных пятизначных чисел с различными цифрами?

3. **(3)** (Юля) 41 шестиклассник сдает зачет. Каждый ученик решал 1 легкую и 1 сложную задачу. Докажите, что по крайней мере 2 ученика решали одинаковый набор задач, если известно, что преподаватели подготовили 8 простых и 5 сложных задач.

4. **(3)** (ИИ) Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковые цифры?

5. **(3, 3+)** (Юля) Каких трехзначных чисел больше: тех, в которых ни одна цифра не повторяется дважды или всех остальных?

6. **(3+)** (Юля) Сколькими способами можно расселить 9 ЛМШат по трем комнатам: двухместной, трехместной и четырехместной?

7. **(3+)** (Юля) Сколькими способами можно поставить на доску двух белых слонов так, чтобы они не били друг друга?

8. **(3+)** (ЕА) Сколькими способами белая шашка, стоящая на поле `a1`, может пройти в дамки? Возможные встречи с другими шашками не учитывайте.

9. **(4)** (РС) В выпуклом 2009-угольнике проведены все диагонали. Прямая пересекает 2009-угольник, но не проходит через его вершины. Докажите, что прямая пересекает четное число диагоналей.

10. **(4)** (МА) Назовем раскраску доски 8×8 в три цвета хорошей, если в любом уголке из пяти клеток присутствуют клетки всех трёх цветов при этом три из них одинаковые. Уголок из пяти клеток — это фигура, получающаяся из квадрата 3×3 вырезанием квадрата 2×2. Докажите, что количество хороших раскрасок не меньше, чем 3^8.

11. **(4, 4+)** (СГ) Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 2×2011 в два цвета так, чтобы никакие три клетки одного цвета не образовывали уголок из трех клеток?

12. **(4+, 5–)** (МА) Назовем раскраску доски 8×8 в три цвета хорошей, если в любом уголке из пяти клеток присутствуют клетки всех трех цветов. Уголок из пяти клеток — это фигура, получающаяся из квадрата 3×3 вырезанием квадрата 2×2. Докажите, что количество хороших раскрасок не меньше, чем 6^8.

13. **(5)** (РС) В выпуклом 2014-угольнике проведены все диагонали. Оказалось, что никакие две диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько всего точек пересечения получилось?

14. **(5)** (МА) В государстве восемь городов, соединённых дорогами каждый с каждым. Дорогу между городами A и B закрыли на ремонт. Сколько различных путей, проходящих по всем городам, но только по одному разу, осталось между городами C и D?

15. **(5, 5+)** (МА) Дано целое число $n > 0$. Имеются чашечные весы и n гирь, веса которых равны $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Все n гирь выкладываются одна за другой на чаши весов, то есть на каждом из n шагов выбирается гиря, которая еще не выложена на весы, и добавляется либо на левую, либо на правую чашу весов; при этом гири выкладываются так, чтобы ни в какой момент правая чаша не была тяжелее левой. Найдите количество способов выполнить такую последовательность шагов.

Остальное

Последний круг ада

Юля и что-то странное

1. Нарисуем шестиугольник. Получится шесть отрезков, у которых вместе 6 различных концов. А сколько еще различных концов может быть у шести различных отрезков?

2. В клетках таблицы 5×5 поставлены числа так, что в каждом квадратике 3×3 сумма отрицательна. Может ли сумма всех чисел в таблице быть положительной?

3. На медосмотр пришли мальчики весом 39 кг и девочки весом 40 кг, всего не более 40 человек. Накануне девочки грозились принести на медосмотр своих хомячков (каждый хомяк весит 1 кг). На медосмотре выяснилось, что мальчики весят в сумме столько же, сколько девочки вместе с хомячками. Докажите, что девочки принесли как минимум 20 хомячков.

ЕА и что-то ещё

4. (скорее на закол, чем на зачёт) В деревне П живёт фермер Петров со своим котом Петькой, а в деревне В — фермер Васильев с котом Васькой. Однажды Петров с Петькой поехали в пункт В, а Васильев с Васькой одновременно — в пункт П. Когда они встретились, оказалось, что Петька съел в два раза больше пакетиков «Вискас», чем Васька. За всю дорогу между пунктами В и П пакетиков они съели поровну. К новому году фермеры подарили своих котов друг другу. Одиннадцатого января они снова выехали из своих деревень с котами. На этот раз за всю дорогу Васька съел 5 пакетиков «Вискас». Сколько пакетиков за всю дорогу съел Петька?

5. (раскраска) Красящий хамелеон — сказочная шахматная фигура, которая с любого поля ходит на соседнее по вертикали или горизонтали поле. При этом, попадая на некоторое поле, хамелеон либо красит это поле в свой цвет, либо перекрашивает себя в цвет этого поля. На шахматную доску, все поля которой синие, поставили зеленого хамелеона. Всякую ли раскраску доски в синий и зеленый цвета можно получить с его помощью?

Юля, доброта и сок

6. На доске написано число 458. За один ход можно либо удвоить имеющееся число, либо стереть последнюю цифру. Можно ли за несколько ходов получить число 14?.

7. Найти двузначное число, сумма цифр которого не меняется при умножении на любое однозначное число.

8. У Яны есть калькулятор, который при нажатии красной кнопки вычисляет сумму цифр введенного числа. Доказать, что, нажав кнопку 3 раза, из любого числа от 1 до 1010 Яна получит число, меньшее 10.

9. В магазин привезли 34 ящика с яблоками трех сортов. Какое наименьшее число ящиков нужно взять, чтобы среди них наверняка нашлось три ящика яблок одного сорта?

10. Найдите наибольшее пятизначное число, которое делится на 11.

11. В одном месяце три среды пришлось на четные числа. Какого числа в этом месяце будет второе воскресенье?

12. За круглым столом сидело 15 человек. Они хотят пересесть так, чтобы те, кто раньше сидел рядом, теперь сидели бы через два человека (т.е. между ними сидели бы двое). Возможно ли это?

13. **(2+)** (Юля) Дано 25 чисел. Сумма любых четырех из них положительна. Докажите, что сумма их всех тоже положительна.

14. **(2+)** (Юля) Отряд шестиклассников выстроен прямоугольником. В каждой шеренге отмечается самый высокий, и из этих шестиклассников выбирается самый низкий. В каждом ряду отмечается самый низкий, и из них выбирается самый высокий. Какой из этих двух шестиклассников выше?