6 КЛАСС

Материалы занятий

28 марта 2017 г.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль

Оглавление

Вступительный тест. 3 июля 3
Анкета 5
Вступительная олимпиада. 4июля 6
Маленькие случаи. 4 июля 7
Введение переменных. 5 июля 8
Точки и прямые. 5 июля 9
Движение. 6 июля 10
Разрезания, покрытия, паркеты. 6 июля 12
Комбинаторика. 7 июля 13
Графы, и не только. 9 июля 15
Комбигеометрия. 9 июля 16
Простые числа и разложение на множители. 10 июля 17
Расстояния в клетчатом городе. 10 июля 18
Делимость на бумаге в клеточку. 11 июля 19
Соответствия. 11 июля 20
Двудольный инвариант. 12 июля 21
Инвариантная зона. 12 июля 22
Клетчатая геометрия 1. 14 июля 23
Мы с вами где-то встречались… 14 июля 24
Клетчатая геометрия 2. 15 июля 25
Комбинаторика 2, 15 июля 26
Модуль числа. 16 июля 28
Периметр и площадь клетчатого многоугольника. 16 июля 29
Признаки делимости. 17 июля 31
Десятичная запись числа. 19 июля 33
Методы рассуждений, 19 июля 34
Взвешивания. 20 июля 36
Взвешивания — разнобой. 20 июля 37
Игры: путь на эшафот. 20 июля 38
Игры: Симметрия. 21 июля 40
Игры: позиции. 21 июля 41
Комбинаторика 3. 21 июля 42
Процессы и операции. 22 июля 43
Графы — 2. 22 июля 44
ДОМИНО. 7 июля 46
Внутренний математический бой, 12.07.17 50
Внешний матбой, 6 vs 7 Профи. 17.07.2017 51
Внешний матбой, 6 vs 7 обычные. 17.07.2017 52

Внутренний матбой, М6. 17.07.2017 53

Вступительный тест. 3 июля

1. Два лмшонка за два часа съели 6 порций мороженого. Сколько порций съедят за четыре часа четыре лмшонка с такими же аппетитами? ___________________________

2. Одну сторону прямоугольника увеличили на 25%. На сколько процентов нужно уменьшить вторую его сторону, чтобы площадь не изменилась? ____________________

3. а) Елена Михайловна заявила, что в каждой комнате будет жить не более четырех шестиклассников. Постройте отрицание к ее утверждению. ____

____

б) Дмитрий Николаевич предполагает, что не более 8 шестиклассников решат не менее пяти задач на вступительной олимпиаде. Постройте отрицание. ____

____

4. Поставьте «$+$», если утверждение верно, и «$-$», если нет (n, m — целые числа):

(а) если n делится на 24, то n делится на 4 и на 6 ________________________________;

(б) если n делится на 4 и на 6, то n делится на 24 ________________________________;

(в) если n делится на 4 и на 7, то n делится на 28 ________________________________;

(г) если m делится на 9, а n делится на 6, то mn делится на 54 ____________________;

(д) если mn делится на 4, то m или n делится на 4 ________________________________;

(е) если mn делится на 7, то m или n делится на 7 ________________________________.

5. На какие из чисел 3, 4, 5, 9, 11 делится число (укажите все):

(а) 1234512345 _______________;

(б) 8642002468 _______________.

6. Число m при делении на 6 дает остаток 5. Какой остаток m дает:

(а) при делении на 3? ________________

(б) при делении на 12? __________________

7. Разделите с остатком (-29) на 7 ____

8. Ирина Александровна утверждает, что числа A и B сравнимы по модулю 11. Что она имеет в виду? ____

____

9. Найдите $(15! - 14!)/13!$ ____

10. Выпишите все трехзначные числа с суммой цифр 4: ______________________________

____

11. **(а)** Шесть мальчиков решили выстроиться в шеренгу. Сколькими способами они могут это сделать? ____

(б) А если Данил хочет стоять сразу после Глеба? _______________________________

12. В алфавите 23 согласных и 10 гласных букв.

(а) Сколько можно составить двухбуквенных слов, состоящих из одной гласной и одной согласной? ____

(б) Сколько можно составить двухбуквенных слов со следующим у в слове обе буквы либо гласные, либо согласные? ____

(в) А сколько двухбуквенных слов со следующим условием: буквы должны быть различные и в слове обе буквы либо гласные, либо согласные? __________________

13. Из 33 мальчиков отряда нужно выбрать 8 человек для размещения на 44-ой даче. Сколькими способами это можно сделать? _______________________________________

14. Нияз Наилевич хотел выдать шести лмшатам разные футболки и не смог. Тогда он решил выдать двенадцати лмшатам одинаковые футболки и опять не смог. Какое наибольшее количество футболок могло быть у Нияза Наилевича?

Ваш ответ	**Ваш комментарий**

15. Вася должен был уменьшить число на 4, результат увеличить втрое, а потом ещё добавить 2. Но он по ошибке увеличил это число на 4, результат уменьшил втрое, а потом отнял 2. Ответ все равно получился правильный. Какой?

Ваш ответ	**Ваш комментарий**

16. Существуют ли такие двузначные числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ что $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$?

Ваш ответ	**Ваш комментарий**

Анкета

1. Дата рождения____

2. Мобильный телефон с собой(номер)____

3. Дата рождения____

4. Мобильный телефон с собой (номер)____

5. Электронная почта____

6. ФИО родителя____

7. Номер родителя____

8. Любимая область математике____

9. Ваши увлечения____

10. Любимый спорт ____

11. То, что хотели бы нам рассказать или считаете нужным_________________________

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

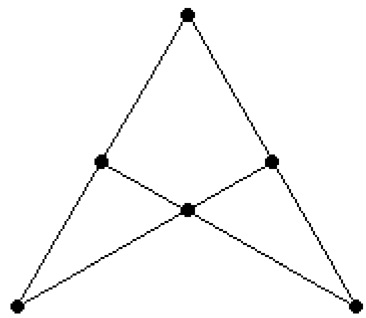
Вступительная олимпиада. 4июля

1. В комнате находится 30 человек. Девятнадцати из них не менее 19 лет, а двадцати из них менее 20 лет. Скольким людям в комнате ровно 19 лет?

2. На острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут) за круглым столом собралась компания из 2017 человек. Каждый заявил, что среди половины остальных, сидящей от него справа, лжецов столько же, сколько рыцарей среди половины остальных, сидящей от него слева. Сколько могло быть рыцарей за столом?

3. Вася написал два числа, не содержащих в записи нулей, и заменил цифры буквами (разные цифры — разными буквами). Оказалось, что число КРОКОДИЛЛЛ делится на 312. Докажите, что число ГОРИЛЛА не делится на 392.

4. Имеется пять монет: лёгкие и тяжёлые. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, каких монет больше: лёгких или тяжёлых (определять количество монет не нужно). Однотипные монеты весят одинаково.



5. Посадил садовник 6 деревьев и вышло у него 4 ряда по три дерева (см. рис.). А возможно ли посадить 8 деревьев так, чтобы получилось 7 рядов по три дерева?

6. Патрик, Петр и Павел - тройняшки. Однажды они гуляли с мамой, и увидели автомат по продаже жевательных резинок, в котором содержатся резинки трех цветов: красного, желтого и зеленого. Любая резинка стоит 10 рублей. Тройняшки захотели, чтобы мама каждому купила по резинке, и чтобы они были одного цвета. Мама опускала монеты в автомат, пока не смогла исполнить желание детей. Затем еще три дня подряд мама исполняла такое же желание своих детей. Какую сумму денег необходимо было иметь маме, чтобы гарантированно исполнять желание детей четыре дня подряд? Невыданные резинки оставались у мамы до следующих покупок.

7. У Лисы пять нор, расположенных в ряд. Каждую ночь Лиса перемещается в соседнюю нору, влево либо вправо. Днем она сидит в этой норе. В полдень Серый Волк может проверить одну нору по своему усмотрению. Сможет ли Серый Волк за шесть дней обнаружить в норе Лису?

Маленькие случаи. 4 июля

Если задача не получается, часто полезно попробовать для маленьких чисел и там угадать ответ.

1. Сколько боев нужно провести по олимпийской системе (проигравший выбывает), чтобы выявить победителя среди 2017 боксеров?

2. В каталоге диска С: лежат две папки, в которых имеются вложенные папки. Каждая папка файловой системы диска либо пуста, либо в ней две вложенных папки. Известно, что непустых папок 15. Сколько пустых папок?

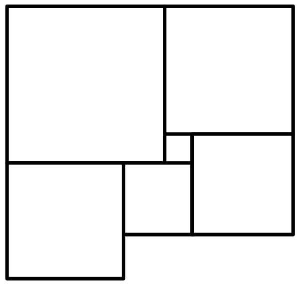
3. Можно ли представить 1 в виде суммы 2017 различных дробей с числителем 1?

4. Петя записал на доске число 1. Каждую секунду он производит следующую операцию: дописывает к текущей записи порядковый номер операции и повторяет старую запись, то есть на 2 секунде записывается 1, 2, 1, на третьей секунде 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1 и т.д. Какое число в записанной через год последовательности окажется на 1984-м месте?

Введение переменных. 5 июля

1. ***Задумайте число, не равное нулю. Прибавьте к нему 3. Результат умножьте на 4 и прибавьте задуманное число, умножьте на 2 и вычтите 24. Результат разделите на задуманное число. У Вас получилось 10. В чем секрет?***

2. Сумма двух чисел равна 13,5795. Если в большем из них перенести запятую на один знак влево, то получим меньшее число. Найдите данные числа.



3. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна 1.

4. В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждой строке кроме первой на 1 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце кроме первого в 4 раза больше, чем в предыдущем. Докажите, что сумма чисел во второй строке делится на 7.

5. Прямоугольник, у которого одна из сторон втрое длиннее другой, разрезали на одинаковые квадратики. Оказалось, что сумма их периметров в 6 раз больше периметра исходного прямоугольника. Сколько могло получиться квадратиков?

6. Управдом Остап Бендер собирал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич из 105-ой квартиры поинтересовался, почему у них во втором подъезде надо собрать денег на 40% больше, чем в первом подъезде, хотя квартир и там, и тут поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что двузначные стоят вдвое, а трехзначные — втрое больше однозначных. Сколько квартир в подъезде?

7. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не $1/2$ очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение — не 0 очков, а -1, ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

8. На доске выписаны 2017 чисел, причем каждое число кроме двух крайних равно сумме двух соседних с ним чисел. Известно, что сумма первых ста чисел в этом ряду равна нулю, а сумма первых двухсот чисел в этом ряду равна трём. Найдите сумму всех чисел в этом ряду.

9. По окружности, чередуясь, стоят 24 черных и 24 белых ненулевых числа. Каждое черное число равно сумме своих соседей, а каждое белое равно произведению своих соседей. Чему равна сумма всех 48 чисел?

Точки и прямые. 5 июля

Аксиома 1. Через две точки проходит ровно одна прямая.

1. На плоскости отмечены 5 точек. Через каждые две точки провели прямую.

(а) Какое наибольшее число различных прямых могло получиться?

(б) А наименьшее?

(в) А наименьшее, большее числа из пункта **(б)**?

2. Следствие. Если две прямые пересекаются, но не совпадают, то они пересекаются ровно в одной точке.

3. На плоскости проведено 5 прямых так, что любые две из них пересекаются.

(а) Какое наибольшее число точек пересечения могло получиться?

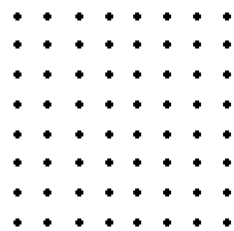
(б) А наименьшее?

(в) А наименьшее, большее числа из пункта **(б)**?

4. У замкнутой ломаной из 5 звеньев никакие два звена не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число точек самопересечения может быть у этой ломаной?

5. Петя нарисовал 3 красных и 3 синих прямых, и отметил те точки пересечения, через которые проходят прямые обоих цветов. Могло ли оказаться, что отмечена ровно половина точек пересечения.

6. На плоскости отмечен набор из 6 точек. Назовем прямую *честной*, если на ней и по обе стороны от неё лежит по 2 отмеченные точки. Приведите пример набора, у которого число честных прямых равно **(а)** 3; **(б)** 1.



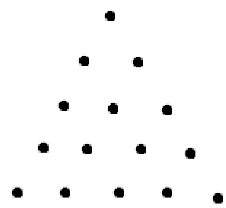
7. Теорема. Если прямая не содержит ни одну из сторон квадрата или треугольника, то она пересекает его границу не более, чем в двух точках.

8. (а) Каким наименьшим числом прямых можно зачеркнуть все точки на рисунке? **(б)** А если нельзя использовать вертикальные и горизонтальные прямые?

Для самостоятельного решения

9. На плоскости отмечен набор из 6 точек. Назовем прямую *честной*, если на ней и по обе стороны от неё лежит по 2 отмеченные точки. Приведите пример набора, у которого число честных прямых равно **(в)** 5; **(г)** 6.

10. На плоскости отмечены 15 точек (см. рис). Каким наименьшим числом прямых можно зачеркнуть все эти точки?



11. На плоскости отметили 7 точек и провели всевозможные отрезки с концами в этих точках. Оказалось, что для каждого отрезка есть ему параллельный, причем для некоторых отрезков параллельный им всего один. Обязательно ли найдутся три точки, лежащие на одной прямой?

Движение. 6 июля

1. Тигра и Винни-Пух пошли в гости к Кристоферу Робину. Сначала Тигра побежал в два раза быстрее Винни-Пуха, но, пробежав половину дороги, неожиданно утомился и оставшийся путь прополз со скоростью в два раза меньшей скорости Винни-Пуха. Кто раньше встретился с Кристофером Робином — Тигра или Винни-Пух?

2. Винни-Пух и Пятачок вышли одновременно друг к другу в гости. Каждый из них идёт с постоянной скоростью. Через две с половиной минуты они встретились и, поздоровавшись, пошли дальше. Добравшись до домика друга, и убедившись, что того дома нет, оба повернули обратно. Когда произойдет вторая встреча, если скорость Пятачка больше скорости Винни-Пуха на несколько километров в час?

3. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге в одном направлении, оказываются рядом каждый час. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются каждые полчаса. За какое время проезжает кольцевую дорогу каждый автомобиль?

4. Удав прополз мимо Мартышки за полминуты, а мимо бревна длиной 9 метров (считая с момента, когда голова Удава поравнялась с началом бревна, до момента, когда хвост Удава минует конец бревна) — за минуту. Найдите длину и скорость удава.

5. Иван ехал в поезде Омск-Новосибирск, а Петр — во встречном поезде Новосибирск-Омск. Поезд с Петром пронесся мимо Ивана за 5 секунд, а поезд с Иваном мимо Петра — за 7 секунд. А мимо коровы Мурки, жевавшей траву около путей, оба поезда пронеслись за одинаковое время. За какое?

6. На соревнованиях по плаванию в реке спортсменам пришлось плыть против течения. Лёша проплыл 50 метров между двумя буйками за 2 минуты, а Веня, который плавает в полтора раза медленнее — за 4 минуты. За какое время проплыл дистанцию Коля, который плавает в два раза медленнее Вени?

7. На круговом треке соревновались два велосипедиста. Они стартовали одновременно с одной линии, но в разные стороны. Их седьмая встреча произошла на линии старта. За какое время каждый из них проезжал круг трека, если известно, что первый тратил на круг больше минуты, а второй — на полминуты больше первого?

8. На велотреке одновременно уходят со старта 5 велосипедистов. Скорость первого равна 50 км/ч, второго — 40 км/ч, третьего — 30 км/ч, четвёртого — 20 км/ч, пятого — 10 км/ч. Первый велосипедист считает количество велосипедистов, которых он обогнал. Какого велосипедиста он посчитает двадцать первым?

9. Миша сбежал вниз по движущемуся эскалатору и насчитал 30 ступенек. Затем он пробежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 70 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

10. Хулиган Сережка решил забежать наверх по движущемуся вниз эскалатору станции метро «Парк Победы», считая ступеньки. Через 12 минут, добежав до верху, Сережка был задержана милиционером, который повёз нарушителя обратно. Ровно через минуту Сережке удалось вырваться, и он с той же скоростью побежал вниз, спустившись за две минуты. За какое время спускается стоящий на эскалаторе человек на станции «Парк Победы»?

Разрезания, покрытия, паркеты. 6 июля

1. Докажите, что при любом покрытии шахматной доски 32 домино получится чётное число вертикально расположенных и чётное число горизонтально расположенных домино.

Определение. *Сплошной паркет* — такое покрытие прямоугольника домино, при котором любой отрезок сетки с концами на противоположных сторонах прямоугольника разбивает хотя бы одно домино (то есть прямоугольник не разделяется на два прямоугольника, покрытых домино).

2. Выложите с помощью домино сплошной паркет комнаты 5×6.

3. Можно ли выложить с помощью домино сплошной паркет комнаты 6×6?

4. Выложите с помощью домино сплошной паркет комнат 5×8, 6×8.

5. Можно ли шахматную доску 8×8 выложить с помощью домино, если вырезаны: **(а)** противоположные угловые клетки, **(б)** две разноцветные клетки?

6. Перечислите все виды тетрамино.

7. Можно ли разрезать квадрат 6×6 на полоски 1×4?

8. Можно ли разрезать квадрат 10×10 на полоски 1×4?

9. Можно ли разрезать квадрат 8×8 на квадрат 2×2 и пятнадцать Т-тетрамино?

10. Докажите, что прямоугольник $m\times n$ $(m, n > 1)$ можно разрезать на L-тетрамино тогда и только тогда, когда $mn \,\vdots\, 8$.

Для самостоятельного решения

11. На какие из остальных возможных тетрамино можно разрезать квадрат 10×10?

12. Квадрат 8×8 покрыт 21 **(а)** прямоугольником 3×1, **(б)** трёхклеточным уголком. Где может находиться непокрытая клетка?

13. Найти универсальную покрышку для тетрамино минимальной площади.

14. Перечислить все пентамино и найти для них универсальную покрышку наименьшей площади.

Комбинаторика. 7 июля

Гомоморфный образ группы,
Будь во имя коммунизма
Изоморфен фактор-группе
По ядру гомоморфизма.

1. *Не решая задач*, разбейте их на группы так, чтобы любые две задачи из одной группы кодировалась бы друг другом (и найдите кодировки), а из разных — нет. Найдите ответы для всех задач, решив как можно меньше задач (*сколько* задач придется решить)?

(а) Сколькими способами Михаил Александрович может построить 45 шестиклассников в шеренгу?

(б) Сколько сторон и диагоналей у 45-угольника?

(в) Пароль от Wi-Fi состоит из 45 символов — нулей и единиц. Сколько времени потребуется Гордею, чтобы наверняка определить пароль, если он тратит на проверку каждого варианта по 1 секунде?

(г) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске размером 45×45 сорок пять ладей, не бьющих друг друга?

(д) Сколькими способами победитель «Поля чудес» может выбрать два приза из 45 имеющихся?

(е) Сколькими способами можно выдать двум из 45 шестиклассников серп и молот (по одному инструменту в руки)?

(ж) Сколькими способами можно из 45 участников собрания выбрать председателя и секретаря?

(з) На концерт хотят выбрать ведущими одного ЛМШонка из М10 (где 22 человека) и одного ЛМШонка из М6 (где 45 человек). Сколько потенциальных пар ведущих сейчас есть?

(и) Сколькими способами можно раскрасить клетки прямоугольника 5×9 в чёрный и белый цвета?

(к) Есть 43 серпа и 2 молота. Сколькими способами можно их раздать 45 школьникам (по одному инструменту)?

(л) Есть 45 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их по одной 45 шестиклассникам?

(м) Двое дежурных преподавателей забыли раздать полдник. Сколькими способами они могут разделить 45 различных конфет между собой?

(н) Сколькими способами можно расставить в таблице 5×9 числа от 1 до 45?

(о) Сколькими способами можно отметить в таблице 5×9 две клетки?

(п) У акулы было 45 зубов. Сколько различных улыбок могло у неё остаться после встречи с катером?

(р) Сколькими способами можно представить число 46 как сумму нескольких натуральных чисел?

2. Закодируйте одним из пунктов предыдущего задания следующую задачу «В левом нижнем углу прямоугольника 3×44 сидит математическая черепаха. Она умеет двигаться на одну клетку вправо или вверх. Каким числом способов она может добраться до правого верхнего угла?».

3. Из отряда можно выбрать двух школьников на дежурство 561 способами. Сколько школьников в отряде?

4. Автобусные билеты имеют шестизначные номера, от 000000 до 999999.

(а) Сколько всего номеров?

(б) Сколько номеров, не содержащих цифру 7?

(в) Сколько номеров, содержащих цифру 7?

(г) Сколько номеров, у которых есть хоть одна нечётная цифра?

(д) Сколько номеров, содержащих цифру 7 и не содержащих цифры 0?

(е) Сколько номеров, состоящих из различных цифр?

(ж) Сколько номеров, в которых встречаются одинаковые цифры?

(з) Каких билетов больше: счастливых или с суммой цифр 27?

5. Три кота, Фикус, Крокус и Кактус, нашли мешок с 10 сосисками. Сколькими способами они могут разделить эти сосиски между собой, если:

(а) сосиски различные, кому-то может не достаться ничего;

(б) сосиски различные, каждому должна достаться хотя бы одна сосиска;

(в) сосиски одинаковые, кому-то может не достаться ничего;

(г) сосиски одинаковые, каждому должна достаться хотя бы одна сосиска?

6. Как известно, костяшки обычного домино состоят из двух половинок, на которых нарисованы точки в количестве от 0 до 6. ЛМШонок Саша придумал своё домино, в котором на каждой половинке доминошки могут быть точки в количестве от 0 до 11. Сколько доминошек в Сашином домино?

7. Сколькими способами можно покрасить доску 4×4 в четыре цвета так, чтобы в каждом столбце и каждой строке каждый цвет присутствовал?

8. Покажите, что одна задача кодируется другой:

(а) Каким числом способов можно представить число n в виде суммы слагаемых 1 и 2 (представления, отличающиеся порядком слагаемых, — разные.)

(б) Каким числом способов можно представить число $n+1$ в виде суммы нечётных слагаемых (представления, отличающиеся порядком слагаемых, — разные.)

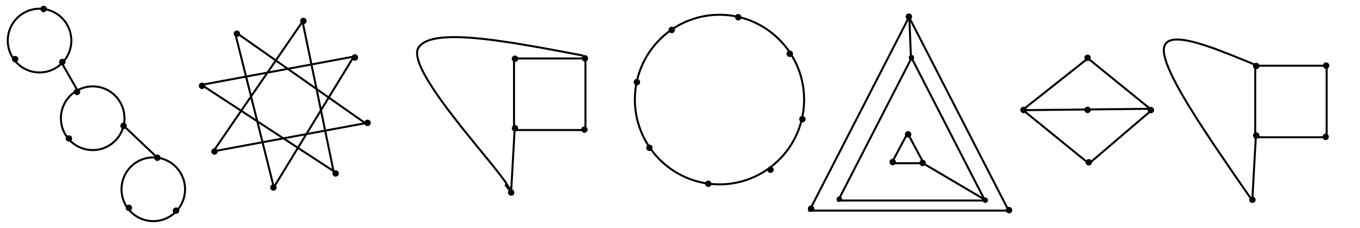
9. Докажите, что $2n$-значных чисел, которые состоят из n единиц и n двоек столько же, сколько n-значных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, в которых поровну цифр 1 и 2.

Графы, и не только. 9 июля

1. В городе Колоколамске живут 10 шпионов по кличкам Нелли, Одри, Долли, Тилли, Чарли, Петя, Штирлиц, Супер, Вилли, Деловой. Нелли шпионит за Супером, Одри — за Чарли, Долли — за Одри, Тилли и Вилли, Тилли — за Петей, Чарли — за Долли, Штирлицем и Деловым, Петя — за Штирлицем, Штирлиц — за Тилли и Деловым, Супер — за Нелли, Вилли — за Чарли, Деловой — за Одри, Долли и Вилли. Какое наибольшее число шпионов сможет выстроиться в очередь так, чтобы перед каждым, кроме первого, стоял тот, за кем он шпионит?

2. Какое наибольшее количество различных цифр можно выписать в ряд так, чтобы, подчеркнув любые две соседних, мы получили двузначное число, делящееся на 7 или 23? Число 07 тоже считается двузначным.

3. Какие из изображённых на рисунках графов равны между собой? (Точки пересечения рёбер, не отмеченные кружочками, вершинами не считаются.)



1 2 3 4 5 6 7

4. На полях $a1$ и $c3$ шахматной доски 3×3 стоят чёрные кони, а на полях $a3$ и $c1$ — белые. Можно ли, двигая этих коней по правилам шахматной игры, переставить их так, чтобы чёрные кони стояли на полях $a1$ и $c1$, а белые — на полях $a3$ и $c3$?

5. **(а)** Докажите, что сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер.

(б) В связном графе на пяти вершинах нет висячих вершин. Нарисуйте все такие графы, имеющие а) 5; б) 6 ребер и докажите, что других нет.

6. Можно ли расставить на футбольном поле четырёх футболистов так, чтобы попарные расстояния между ними равнялись 1, 2, 3, 4, 5 и 6 метров?

7. **(а)** Петя отметил на прямой три точки и обозначил их A, B и C (не обязательно в том порядке, в каком они идут на прямой). Миша может назвать любые две точки, и Петя сообщит, каково расстояние между этими точками. За какое наименьшее число вопросов Миша сможет наверняка узнать, как расположены отмеченные точки (то есть, какие две из них — крайние, и в каком порядке идут между ними две другие)?

(б) Тот же вопрос, если Петя отметил четыре точки: A, B, C и D.

(в)*Тот же вопрос, если Петя отметил пять точек: A, B, C, D и E.

Комбигеометрия. 9 июля

1. Равносторонний треугольник со стороной 2017 разбит на маленькие треугольники со стороной 1 линиями, параллельными сторонам. Чего больше: маленьких треугольников или равносторонних треугольников со стороной 2, размещающихся на линиях сетки разбиения.

2. На клетчатой бумаге 2017×2017 Пятачок рисует всевозможные прямоугольники, стороны которых идут по линиям сетки. Более трудолюбивый Винни-Пух взял линейку и соединяет всевозможные пары узлов сетки отрезками с тем ограничением, что они не лежат на линиях сетки. Чего больше: прямоугольников у Пятачка или отрезков у Винни-Пуха. А кто больше потратит чернил?

3. На доске 20×40 отмечена клетка с координатами (x, y). Найдите число прямоугольников, составленных из клеток доски, содержащих отмеченную клетку.

4. В прямоугольнике 20×40 клеток очертили рамку шириной $k < 10$ клеток, очертив окно. Сколько будет прямоугольников со сторонами, идущими по линиям сетки

(а) содержащих окно;

(б) не содержащих окно;

(в) пересекающих границу окна в двух точках;

(г) пересекающих окно в 4-х точках;

5. На двух параллельных прямых a и b выбраны точки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно и проведены все отрезки вида A_iB_j, причем никакие три отрезка не проходят через одну точку.

6. **(а)** Чего больше, выпуклых четырехугольников в этих точках или всевозможных точек пересечения отрезков?

(б) Сколько будет точек пересечения отрезков?

5. Винни-Пух и Пятачок нанизывают на две параллельные проволочки для сушки $2n$ белых грибов, которые, благодаря своему чутью, нашел Пятачок. Винни-Пух очень переживает, что грибы кто-нибудь съест и просит Пятачка, для надежности, связать нитками каждый гриб с одной проволочки с каждым грибом с другой проволочки. Как нужно распределить грибы между проволочками, чтобы Пятачок привязал как можно больше ниточек? Сколько ниточек при этом будет привязано?

6. Как распределить грибы между проволочками, чтобы ниточки пересекались в как можно большем количестве точек, если известно, что никакие 3 ниточки не пересекаются в одной точке? Сколько при этом точек пересечения будет?

7. Сладкоед начинает поедать шоколадку размерами $2\times n$, начиная с верхнего левого угла. Ему дозволяется есть по порядку дольки с общей границей. Сколькими способами он может съесть шоколадку целиком.

8. От шахматной доски 8×8 отпилили угловую клетку. Докажите, что количество способов покрыть полученную фигуру уголками из трех клеток нечетно.

9. Найдите количество несамопересекающихся ломаных, идущих по диагоналям выпуклого n-угольника, которые разбивают этот n-угольник на треугольники.

Простые числа и разложение на множители. 10 июля

1. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

2. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

3. Расставьте по кругу 10 чисел так, чтобы любые два, стоящие рядом, имели общий делитель (отличный от 1), а любые два не стоящие рядом были бы взаимно просты.

4. **(а)** Докажите, что число $100!$ не является точным квадратом.
(б) Можно ли в произведении $1!\times 2!\times 3!\times \ldots\times 100!$ вычеркнуть один из факториалов так, чтобы полученное число являлось точным квадратом?

5. В записи двух трехзначных чисел использовано шесть различных цифр. Каким наибольшим количеством нулей может оканчиваться их произведение?

6. Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10%, а после каждого промаха — уменьшается на 10%. После нескольких выстрелов у него оказалось 80 рублей 19 копеек. Сколько было попаданий? Сколько всего было сделано выстрелов?

7. Сколько различных натуральных делителей у числа **(а)** p^a; **(б)** $p_1p_2\ldots p_k$; **(в)** $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}$, где p_i — различные простые числа.

8. **(а)** Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ простые числа. Докажите, что число $p_1p_2\ldots p_k+1$ имеет простой делитель, отличный от $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
(б) Докажите, что простых чисел бесконечно много.

9. **(а)** Докажите, что найдутся 100 подряд идущих составных чисел.
(б) Докажите, что найдутся 100 подряд идущих чисел, среди которых ровно одно простое.

10. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого этого числа. Натуральное число называется удивительным, если самый большой его собственный делитель на 1 больше, чем квадрат самого маленького собственного делителя. Найдите все удивительные числа и докажите, что других нет.

11. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася — сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?

12. У натурального числа N выписали в ряд по возрастанию все собственные делители. Оказалось, что в этом ряду простые и составные числа чередуются (в частности, их не меньше двух). Сколько собственных делителей имеет число N?

13. На каждой грани куба записано натуральное число. Числа, записанные на трех гранях, примыкающих к общей вершине, перемножили и поместили в вершину. Сумма всех чисел в вершинах оказалась равна 1001. Чему может быть равна сумма всех чисел на гранях?

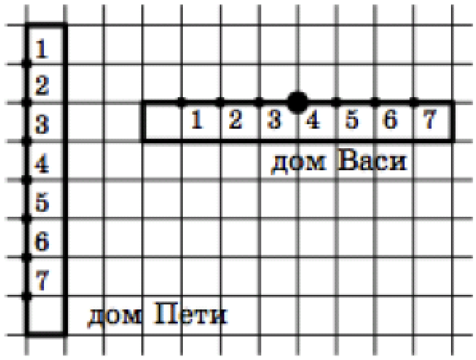
Расстояния в клетчатом городе. 10 июля

Рассмотрим клетчатую плоскость, разбитую на единичные квадраты. Расстоянием между узлами A и B называется длина кратчайшего пути из A в B по линиям сетки. Такое расстояние называется ***расстоянием городских кварталов.***

1. В клетчатом городе выделили район — квадрат 4×4. Какое наименьшее количество детских площадок нужно построить в узлах, чтобы из любого узла района можно было попасть на одну из площадок, проделав путь не более 3?

2. Какое наибольшее количество котов можно разместить в узлах сетки на территории квадрата 4×4, чтобы расстояние между любыми двумя из них было не менее 2 (иначе коты подерутся)?

3. Петя и Вася живут в соседних домах (см. план). Вася живет в четвертом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи, безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живет Петя.



4. Докажите неравенство треугольника для клетчатого города: для любых узлов A, B, C выполнено неравенство: $AB + BC \geq AC$. В каких случаях достигается равенство?

5. Найдите число способов добраться кратчайшим путем из точки $A(0;0)$ в точку $B(5;2)$.

6. Нарисуйте «окружность» и «круг» радиуса 5 в клетчатом городе, то есть множество всех узлов, удаленных от «центра» — точки $A(0;0)$ на расстояние 5, на расстояние не более 5.

7. Нарисуйте множество всех узлов, равноудаленных от двух точек A и B: **(а)** $A(0;0), B(2;0)$; **(б)** $A(0;0), B(3;1)$; **(в)** $A(0;0), B(2;2)$.

8. Нарисуйте «окружность», проходящую через точки $A(0;0), B(5;1), C(1;5)$. Для любых ли узлов A, B, C найдется окружность, проходящая через них и всегда ли она единственна?

9. Для точек нарисуйте множество всех точек B таких, что $AB + BC = AC$; $|AB - BC| = AC$, если а) $A(0;0), C(4;0)$; б) $A(0;0), C(4;4)$; в) $A(0;0), C(4;1)$.

10. Можно ли расставить в узлах клетчатого города 9 полицейских так, чтобы расстояния между любыми двумя из них были равны либо 2, либо 4?

11. **(а)** Докажите, что среди любых десяти полицейских, стоящих в ряд, можно выбрать либо четверых, стоящих по возрастанию роста, либо четверых, стоящих по убыванию роста.

(б) Можно ли в узлах клетчатого города расставить 10 полицейских так, чтобы попарные расстояния между ними принимали два различных значения?

Делимость на бумаге в клеточку. 11 июля

1. Артем утверждает, что может изобразить несколько прямоугольников со сторонами, проходящими по линиям сетки, диагональ которых пересекает сетку в 3-х точках. Нарисуйте все такие прямоугольники.

2. На клетчатой бумаге изображен прямоугольник со сторонами, лежащими на линиях сетки. Оказалось, что его диагональ пересекает 18 линий сетки. Найдите периметр прямоугольника (в узле диагональ пересекает сразу 2 линии).

3. Найдите количество узловых точек сетки, лежащих на диагонали прямоугольника, если прямоугольник имеет размеры:

а) 2×5; б) $p\times3p$, где $p > 3$; в) $n\times m$.

4. Агасфен изобразил на клетчатой бумаге прямоугольник со сторонами, лежащими на линиях сетки. Затем он провел диагональ в прямоугольнике. Оказалось, что диагональ пересекает 14 линий сетки. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что диагональ проходит ровно через 3 узла сетки (в узле диагональ пересекает сразу 2 линии).

5. Сколько клеток пересекает диагональ прямоугольника:
(а) 3×9; б) 2017×2170; в) 1001×4554?

6. Диагональ прямоугольника 200×300 разбивает его на два треугольника. Сколько целых клеток находится в каждом из них?

7. Две диагонали прямоугольника 200×300 разбивают его на четыре треугольника. Сколько целых клеток находится в каждом из них?

8. а) Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки шахматной доски 3×3 (чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки)? б) Та же задача для доски 4×4.

9. В узлах клетчатой плоскости отмечено 5 точек. Докажите, что есть такие две из них, что середина отрезка, ограниченного ими, тоже попадает в узел.

10. На клетчатой бумаге Аристарх проводит прямую. Если на прямой удается найти два различных узла сетки, то он находит расстояние от одного узла до другого по вертикали и по горизонтали и делит первое расстояние на второе. Полученную дробь он называет угловым коэффициентом. Если в знаменателе дроби стоит 0, то угловой коэффициент он обозначает символом ∞. Докажите, что определение, данное Аристархом, корректно, то есть не зависит от выбора пары узловых точек на прямой.

11. Какое наибольшее число клеток может пересечь прямая, проведённая на листе клетчатой бумаги размером $n\times m$ клеток?

Соответствия. 11 июля

1. Как вы думаете, кого в России больше:

(а) женатых мужчин или замужних женщин?

(б) генералов, у которых есть брат лейтенант, или лейтенантов, у которых есть брат генерал?

2. На окружности отмечено 2000 синих точек и одна красная. Чего больше: а) треугольников с вершинами в синих точках или четырехугольников, у которых одна вершина красная? б) многоугольников с вершинами только в синих точках или остальных многоугольников?

3. Хромой король умеет ходить только вверх, вправо и вправо-вверх. Каких путей хромого короля больше: из $a1$ в $h8$ или из $a1$ в $h7$?

4. Докажите, что пятизначных натуральных чисел, в которых цифры не убывают слева направо, меньше, чем пятизначных натуральных чисел, в которых цифры не убывают справа налево.

5. Последовательность из пяти цифр a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 называется «горой», если $a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5$ и «долиной», если $a_1 > a_2 > a_3 < a_4 < a_5$. Чего больше: «гор» или «долин»?

6. Каких графов с восемью вершинами больше: тех, в которых ровно тринадцать ребер рёбер, или тех, в которых ровно пятнадцать рёбер?

7. В одном доме живут 9 мальчиков и 1 девочка. Назовем компанией любую группу из двух или более детей. Каких компаний будет больше — с девочкой или без девочки?

8. Докажите, что натуральное число является полным квадратом тогда и только тогда, когда имеет нечетное число натуральных делителей.

9. Каких пятизначных натуральных чисел больше: чётных с суммой цифр 36 или нечётных с суммой цифр 38?

10. Последовательность $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ из шести натуральных чисел называется «хорошей», если удовлетворяет условиям: $a_1 = 1$, $a_{k+1} \leq a_k + 1$. Каких хороших последовательностей больше: с чётной суммой членов или с нечётной?

11. *Разбиением* натурального числа называется его разложение на *неупорядоченные* натуральные слагаемые. Докажите, что:

(а) количество разбиений числа не более чем на девять слагаемых равно количеству его же разбиений на слагаемые, не превосходящие девяти;

(б) количество разбиений числа ровно на девять слагаемых равно количеству его же разбиений на слагаемые, не превосходящие девяти, среди которых обязательно есть по крайней мере одна девятка.

12. Докажите, что при любом натуральном n уравнения $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ имеют одинаковое количество решений в целых числах.

Двудольный инвариант. 12 июля

1. Вершины правильного шестиугольника занумерованы подряд (например, по часовой стрелке) числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. В каждой вершине изначально написан её номер. Разрешается несколько раз проделать следующую операцию: выбрать пару соседних вершин и прибавить к каждому из записанных в них чисел них некоторое (одно и то же) целое число. Можно ли при помощи таких операций:

(а) сделать все числа равными;

(б) добиться, чтобы в 1, 3 и 5 вершинах стояли бы единицы, а во 2, 4, 6 — двойки;

(в) добиться, чтобы в вершине 1 было бы написано число 6, в вершине 2 — число 5, в вершине 3 — число 4, в вершине 4 — число 3, а в вершине 5 — число 2;

(г) если да, то какое число будет написано в вершине 6 (укажите все возможные значения)?

2. Вершины правильного 1000-угольника занумерованы подряд, начиная с некоторой вершины по часовой стрелке. В начальный момент в каждой вершине написан её номер. Разрешается несколько раз проделать следующую операцию: выбрать пару соседних вершин и прибавить к каждому из чисел одно и то же целое число. Можно ли при помощи таких операций:

(а) добиться того, чтобы во всех вершинах стояли бы равные числа;

(б) сделать так, чтобы в каждой вершине с номером k было бы записано число $1000 - k$ (т.е. числа шли бы «в обратном порядке»);

(в) добиться того, чтобы во всех вершинах с нечётными номерами стояли бы нули, а во всех вершинах с чётными номерами — одинаковые числа;

(г) если в пункте **(в)** ответ положительный, то какие числа будут стоять в чётных вершинах;

(д) добиться того, чтобы во всех вершинах с номером k от 1 до 999 было бы записано число$1000 - k$;

(е) если в пункте **(д)** ответ положительный, то какое число будет написано в вершине с номером 1000?

3. Квадратная таблица 4×4 заполнена числами от 1 до 16 так:

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

Разрешается выбрать две клетки таблицы, с одной из которых на другую может перепрыгнуть шахматный конь, и прибавить к каждому из чисел, записанных в них некоторое (одно и то же) целое число. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы во всех клетках таблицы были бы записаны одинаковые числа?

4. Можно ли расставить в клетках таблицы 10×10 числа $+1$, -1 и 0 так, чтобы все 20 сумм в строках и столбцах были различны?

Инвариантная зона. 12 июля

1. В каждой клетке квадратной таблицы 4×4 стоит плюс или минус. Разрешается поменять на противоположные знаки во всех клетках произвольной строки или столбца таблицы. Можно ли, действуя таким образом, получить таблицу из одних плюсов, если исходное расположение знаков было таким?

(а)

+	—	—	+
—	+	+	—
—	+	+	—
+	—	—	+

(б)

+	+	+	—
+	+	+	+
—	—	+	+
+	+	+	+

(в)

—	+	+	—
+	+	+	+
+	+	+	+
—	+	+	—

2. В каждой клетке куба $2017\times2017\times2017$ написано некоторое число. Разрешается взять любую башенку $1\times1\times2017$, и прибавить к числам башенки по 1. Можно ли, действуя таким образом, сделать все числа равными, если первоначально в одной из вершин была написана единичка, а в остальных вершинах — нули?

3. В клетках таблицы 5×5 расставлены нули и единицы (по одному числу в каждой клетке). За один ход разрешается в любом квадрате 3×3 заменить все нули на единицы, а все единицы — на нули. Всегда ли можно из исходной таблицы за несколько ходов получить таблицу, заполненную нулями?

4. Решите предыдущую задачу при условии, что таблица 6×6.

5. На поле 6×7 расставлены нули и единицы. Разрешается взять любой прямоугольник 1×5 и инвертировать в нем цифры. При любой ли расстановке нулей и единиц можно получить после нескольких таких действий поле из одних нулей?

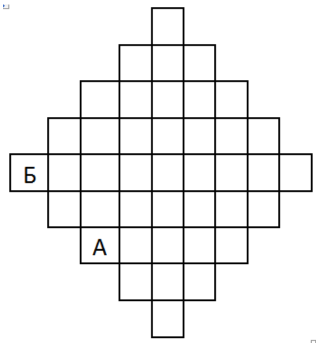
6. На поле 9×9 в углах стоят нолики. Разрешается взять крестик шириной и высотой 3, лежащий полностью на поле и инвертировать в нем цифры. Можно ли получить поле из одних нулей?

7. Клетки поля 2017×2017 заполнены плюсами и минусами. Можно выбрать любую полоску 1×3 и инвертировать знаки в ее полях. Из любого ли стартового заполнения можно получить поле из одних минусов?

Клетчатая геометрия 1. 14 июля

Расстоянием между клетками A и B называется длина кратчайшего пути (количество ходов) по клеткам из A в B.

1. Найдите все клетки внутри нарисованных фигур, наиболее удаленные от каждой из данных клеток.



2. Доказать, что из клетчатого многоугольника, стороны которого проходят по линиям сетки, всегда можно удалить одну клетку так, что оставшийся многоугольник также связен.

3. Докажите, что клетчатый многоугольник площади n, стороны которого проходят по линиям сетки, содержит внутри себя не менее $n-1$ единичных отрезков сетки.

4. Докажите, что периметр клетчатого многоугольника площади n, стороны которого проходят по линиям сетки, не превосходит $2n+2$.

5. Докажите, что сумма внешних углов клетчатого многоугольника равна $360°$.

6. Петя едет на машине по границе клетчатого многоугольника, объезжая его так, что многоугольник все время находится слева от него. Если Петя поворачивает налево, то он считает, что повернул на $90°$, а если направо, то на $-90°$. Через некоторое время оказалось, что Петя вернулся в точку старта, а сумма углов поворота составила $1080°$. Сколько кругов проехал Петя?

7. Докажите, что у клетчатого многоугольника углов, равных $90°$, на 4 больше, чем углов, равных $270°$.

8. Докажите, что сумма внутренних углов клетчатого n-угольника равна $180°(n-2)$.

9. *Изопериметрическое неравенство на клетчатой плоскости*. Для n-угольника с вершинами в узлах, стороны которого проходят по линиям сетки, верно неравенство:$P^2 > 16S$, где S — площадь, P — периметр.

10. На бесконечном листе клетчатой бумаги n клеток окрашено в чёрный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполняться два условия: 1) все чёрные клетки лежат в вырезанных квадратах; 2) в любом вырезанном квадрате K площадь чёрных клеток составит не менее 0,2 и не более 0,8 площади K.

Мы с вами где-то встречались… 14 июля

1. В деревне П живёт фермер Петров со своим котом Петькой, а в деревне В — фермер Васильев с котом Васькой. Однажды Петров с Петькой поехали в пункт В, а Васильев с Васькой одновременно — в пункт П. Когда они встретились, оказалось, что Петька съел в два раза больше пакетиков «Вискас», чем Васька. За всю дорогу между пунктами В и П пакетиков они съели поровну. К новому году фермеры подарили своих котов друг другу. Одиннадцатого января они снова выехали из своих деревень с котами. На этот раз за всю дорогу Васька съел 5 пакетиков «Вискас». Сколько пакетиков за всю дорогу съел Петька?

2. У Кощея есть семечко. Если его полить мёртвой водой, из него начинает расти дерево со скоростью 1 м/час. Если это дерево полить живой водой, оно начинает расти со скоростью 2 м/час. Кощей сделал на стене отметку на высоте между 1 и 2 метрами от земли, дал Ивану-царевичу семечко, фляги с живой и мёртвой водой и сказал: «Посади семечко в 10 утра, и чтобы к 11 утра дерево доросло точно до моей отметки». Есть ли у Ивана возможность справиться с заданием Кощея?

3. Два приятеля вышли одновременно из пунктов А и В навстречу друг другу. Встретившись в пункте С, они повернули назад. По пути в А первый вспомнил, что забыл сообщить второму важную новость, развернулся и нагнал второго на полпути от С до В. Затем оба снова пошли по домам. На каком расстоянии от А будет первый, когда второй вернется в В, если от А до В 10 км, а скорости приятелей постоянны?

4. В 12.00 из пункта А в далекий пункт Б выехал «Москвич» со скоростью 50 км/ч. В 13.00 вслед за ним выехали «Жигули» со скоростью 60 км/ч, А в 14.00 вслед за ними выехала «Волга», которая в 16.00 оказалась точно посередине между «Москвичом» и «Жигулями». Когда «Жигули» были ровно посередине между «Москвичом» и «Волгой»? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

5. Вдоль прямого шоссе расставлены светофоры, на каждом попеременно минуту горит красный свет, минуту — зеленый (не обязательно синхронно). По шоссе со скоростью 60 км/ч едут в одном направлении две машины. На красный свет машина мгновенно останавливается, на зеленый — мгновенно возобновляет движение с той же скоростью. Докажите, что, если в начальный момент расстояние между машинами больше 2 км, то они никогда не встретятся.

6. Андрей, Борис и Василий бегут по кольцевой дорожке с постоянными скоростями в одном направлении. Они стартовали одновременно и из одной точки. Андрей впервые обогнал Василия на третьем круге (то есть пробежав два круга, но ещё не закончив третий), а Бориса — на шестом круге. Докажите, что Борис впервые обогнал Василия раньше, чем пробежал шесть кругов.

7. Дорожки парка идут по периметрам двух квадратных газонов с одной общей стороной-дорожкой. По дорожкам гуляют с постоянными скоростями Холмс и Ватсон; каждый обходит свой газон против часовой стрелки. Скорость Холмса на 20% больше скорости Ватсона. Время от времени джентльмены встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий — через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз?

Клетчатая геометрия 2. 15 июля

1. Докажите, что периметр клетчатого многоугольника площади n, стороны которого проходят по линиям сетки, можно заключить в прямоугольник периметра $2n+2$.

2. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером 102×102 клеток и клетчатый многоугольник неизвестной формы площади 101. Докажите, что из квадрата можно вырезать по крайней мере 4 таких многоугольника.

3. Докажите, что площадь S клетчатого многоугольника можно вычислить по формуле: $S = N + \frac{P}{2} - 1$, где N — количество узлов сетки, находящихся внутри этого многоугольника, а P – количество узлов, находящихся на его границе (т.е. его периметр).

4. Используя задачу 3, докажите снова, что $P \leq 2S + 2$.

5. Многоугольник с вершинами в узлах, стороны которого проходят по линиям сетки, разрезан на несколько многоугольников того же вида. Пусть p — количество полученных многоугольников, q — количество отрезков, являющихся их сторонами, r — количество точек, являющихся их вершинами. Докажите, что $p - q + r = 1$ (*формула Эйлера*).

6. Докажите, что клетчатый многоугольник площади 202 можно разделить на 101 прямоугольник.

7. (*Р. Садыков, А. Шаповалов*; 20-й Турнир Городов). Хромая ладья за 64 хода обошла все клетки шахматной доски и вернулась на исходную клетку. Докажите, что число ходов по вертикали не равно числу ходов по горизонтали.

Комбинаторика 2, 15 июля

1. Пятеро шестиклассников решили выстроиться на утренней линейке в ряд. Каким количеством способов они могут это сделать?

2. Те же самые пять шестиклассников решили бросить вызов. Сколькими способами они могут выбрать бросающего вызов и его «правую» и «левую» руки?

3. За победу в Dance Show троим шестиклассникам выпала честь поднять флаг. Сколькими способами пятеро шестиклассников могут выбрать счастливую троицу?

4. Какие из задач являются одинаковыми? Разбейте их на группы и для каждой группы задач найдите ответ.

(а) Сколькими способами Ирина Александровна может построить 45 шестиклассников в шеренгу?

(б) Сколькими способами победитель «Поля чудес» может выбрать пять призов из 45 имеющихся?

(в) Сколькими способами можно наградить пять из 45 шестиклассников за первые пять мест?

(г) Есть 40 серпов и 5 молотов. Сколькими способами можно их раздать 45 школьникам (по одному инструменту)?

(д) Есть 45 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их по одной 45 шестиклассникам?

(е) Сколькими способами можно расставить в таблице 5×9 пять основных фигур: король, конь, ферзь, ладья, слон?

5. Сколько различных анаграмм можно составить из слова:

(а) «линейка»;

(б) «ололололо»;

(в) «пампарампампам»?

*Количество способов расставить в ряд n не совпадающих предметов называется **числом перестановок** и обозначается*

$$P_n = n!$$

*Количество способов расставить в ряд k предметов из n имеющихся называется **числом размещений из n элементов по k** и обозначается*

$$A_n^k = n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)$$

*Количество способов выбрать k предметов из n имеющихся называется **числом сочетаний из n элементов по k** и обозначается*

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

6. Сколькими способами можно выстроить 10 шестиклассников в колонну, среди которых Маша и Катя, если:

(а) Маша должна стоять впереди Кати;

(б) Маша и Катя должны стоять рядом.

7. В подготовке ШАМа принимают участие 4 девочки и 8 мальчиков. Сколькими способами можно выбрать из них

(а) пять человек;

(б) пять человек, среди которых ровно одна девочка;

(в) пять человек, среди которых должна быть хотя бы одна девочка?

8. Сколько решений имеет ребус $\text{Ц} > \text{Ы} > \text{П} > \text{Л} > \text{Ё} > \text{Н} > \text{О} > \text{К}$, где разными буквами отмечены разные цифры?

9. Каким количеством способов можно сфотографировать 5 девочек и 8 мальчиков стоящими в шеренге так, чтоб никакие 2 девочки не стояли рядом?

10. У костра сидят 45 шестиклассников. Сколькими способами можно

(а) развеселить 22 из них;

(б) огорчить 23 из них?

(в) Сравните ответы для предыдущих пунктов и объясните результат. Запишите полученное свойство с помощью числа сочетаний.

11. У костра снова сидят 44 шестиклассника и веселый Саша. Сколькими способами можно огорчить

(а) 22 из них, включая Сашу;

(б) 22 из них, не включая Сашу;

(в) 22 из них?

(г) Чего больше компаний из первых двух пунктов в сумме или компаний из пункта «в». Запишите полученное свойство с помощью числа сочетаний.

12. Докажите следующие тождество комбинаторно

(а) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

(б) $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

(в) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$

13. Сколько существует треугольников, длины стороны которых являются целыми числами от 4 до 9?

14. Доступ к 10 комнате имеют 11 человек. Каким наименьшим числом замков можно снабдить 10 комнату для того, чтобы при определенном наборе ключей любые шестеро, собравшись вместе, могли его открыть, а любых пяти было бы недостаточно?

15. Каждому из n шестиклассников присвоили свой уникальный номер от 1 до n. Сколькими способами шестиклассники могут выстроиться в ряд так, чтобы никакой шестиклассник не стоял на позиции, равной своему номеру?

Модуль числа. 16 июля

0. Все населенные пункты страны Линейной расположены на прямой. Точка M — столица. К центральной части страны относятся все населенные пункты, расположенные от столицы на расстоянии не более 500 км. Остальная часть страны считается провинцией. Обозначьте на рисунке столицу, отметьте центральную и провинциальную часть страны.

1. Отметьте на числовой прямой все точки x такие, что: **(а)** $|x| = 6$, **(б)** $|x| \leq 6$, **(в)** $|x| = \ 6$.

Абсолютной величиной (или *модулем*) числа *x* называется само *x*, если $x \geq 0$, и число $-x$, если $x < 0$. *Обозначение*: $|x|$. Например, $|-2| = 2$, $|7| = 7$, $|0| = 0$, $|a^2| = a^2$.
Что означает модуль числа с геометрической точки зрения?

2. Как записать расстояние между точками числовой оси с координатами x и y, используя знак модуля?

3. Известно, что $|x| = 5$, $|y| = 3$. Какие значения может принимать $|x + y|$? Тот же вопрос для $|x - y|$ и $|x \cdot y|$?

4. Отметьте на числовой прямой все точки x, удовлетворяющие условию:
(а) $|x - 3| = \mathbf{2}$**;** **(б)** $|x + 3| \geq 2$; **(в)** $|x + 2| + |x - 3| = 5$; **(г)** $|x + 2| - |x - 3| = 5$;
(д) $2|x - 5| = |x - 2|$.

5. Даны ненулевые числа x, y и z. Докажите, что $\left(\frac{x}{|y|} - \frac{|x|}{y}\right)\left(\frac{y}{|z|} - \frac{|y|}{z}\right)\left(\frac{z}{|x|} - \frac{|z|}{x}\right) = 0$.

6. Известно, что $|x + 2| \leq 3$, $|x - 4| \leq 5$. Докажите, что $|x| \leq 1$.

7. Докажите, что при любых *x*, *y* и *z* выполнены неравенства:
(а) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$; **(б)** $|x| - |y| \leq |x + \text{y}| \leq |x| + |y|$.

8. Найти наименьшее значение выражения $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| + |x - 6|$. При каких x оно достигается?

9. На улице через равные промежутки построено 6 домов. Каждый день почтальон идёт на почту, берёт там письма для жителей одного дома и разносит их. Затем он возвращается на почту, берёт письма для жителей другого дома и снова их разносит. И так он обходит все дома. В каком месте нужно построить почту, чтобы почтальону пришлось проходить наименьшее расстояние? Тот же вопрос, если между домами произвольные промежутки.

10. Найдите выражение, содержащее буквы x и y, арифметические операции и знаки модуля, значение которого равно наибольшему из чисел x и y.

11. Найдите такие числа a, b, c, d, e, чтобы уравнение $||||x - a| - b| - c| - d| = e$ имело как можно больше корней относительно x. Сколько корней получится?

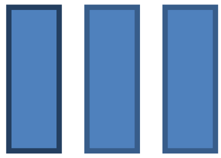
12. Найдите площадь фигуры на координатной плоскости, состоящей из всех точек, удовлетворяющих двум условиям одновременно:
(а) $|x| + |y| \leq 5$ и $|x - 2| \leq 1$; **(б)** $|x - 2| + |y - 3| \leq 4$ и $|x - 5| + |y - 3| \leq 3$.

13. По кругу написано 30 чисел. Между каждыми двумя записали модуль их разности, а исходные числа стерли. Доказать, что полученные 30 чисел можно разделить на две группы с равной суммой.

14. Найдите наибольшее значение выражения $\left|\ldots\left||x_1 - x_2| - x_3\right| - \ldots - x_{1000}\right|$, где $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ — различные натуральные числа от 1 до 1000.

Периметр и площадь клетчатого многоугольника. 16 июля

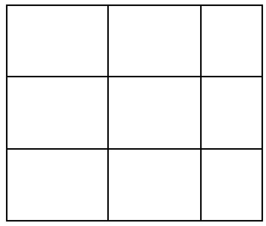
1. На квадратики поля 3×3 выставляют башенки. После того как на башенки посмотрели справа и спереди, то увидели такой рисунок:



(а) Какое максимальное и минимальное число башенок можно было выставить, чтобы получился такой вид?

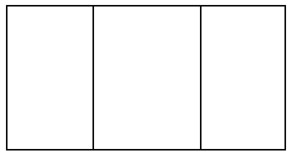
(б) Сколько имеется вариантов для минимальной расстановки?

2. Волшебник Ахалай-Махалай разрезал прямоугольник на 9 *маленьких* прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам прямоугольника. Вы можете спросить, чему равен периметр любого маленького прямоугольника, и он за рубль Вам сообщит его. Какую наименьшую сумму нужно потратить, чтобы узнать периметр большого прямоугольника?



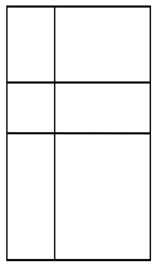
3. Ахалай-Махалай сообщает, что сумма периметров всех *маленьких* прямоугольников в предыдущей задаче равна 15. Найдите периметр большого прямоугольника.

4. Сейчас Ахалай-Махалай вынимает из своей волшебной сумки прямоугольник, разбитый вертикальными прямыми на 3 прямоугольника.



(а) Докажите, что, узнав периметры всех *маленьких* прямоугольников, нельзя определить периметр большого.

(б) Как узнать периметр большого прямоугольника, задав 3 вопроса о периметрах любых *внутренних* прямоугольников, кроме большого?

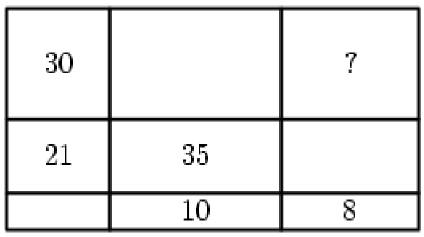


5. Сейчас Ахалай-Махалай вынимает из своей волшебной сумки прямоугольник, разбитый двумя вертикальными и тремя горизонтальными прямыми на 6 прямоугольников.

(а) Докажите, что, узнав периметры всех *маленьких* прямоугольников, нельзя определить периметр большого.

(б) Какого наименьшего числа вопросов о внутренних прямоугольниках, за исключением большого, будет достаточно?

6. Ахалай-Махалай распиливает прямоугольник на 6 прямоугольников поменьше, как это показано на рисунке. Его друг Сим-Сялябим пытается найти площадь исходного прямоугольника, спрашивая Ахалая-Махалая о площадях маленьких прямоугольников.



(а) Хватит ли вопросов о двух прямоугольниках?

(б) Хватит ли вопросов о трех прямоугольниках?

(в) Хватит ли вопросов о четырех прямоугольниках?

7. Прямоугольник разделён двумя вертикальными и двумя горизонтальными отрезками на девять прямоугольных частей. Площади некоторых из получившихся частей указаны на рисунке. Найдите площадь верхней правой части.

8. **(а)** Докажите, что если прямоугольник $m\times n$ разрезан на прямоугольники 1×5, то m или n делится на 5.

(б) Докажите, что если прямоугольник $m\times n$ разрезан на прямоугольники 1×6, то m или n делится на 6.

(в) Докажите, что если прямоугольник $m \times n$ разрезан на прямоугольники $1 \times k$, то m или n делится на k.

9. Квадрат со стороной 100 разрезан по линиям сетки на 100 прямоугольников одинакового периметра P. Найдите максимальное возможное значение P.

Признаки делимости. 17 июля

Число делится на 2, если последняя цифра делится на 2.

Число делится на 3, если сумма цифр этого числа делится на 3.

Число делится на 4, если число, составленное из последних двух цифр этого числа, делится на 4.

Число делится на 5, если оно оканчивается либо на 5, либо на 0. Число делится на 6, если оно делится и на 2, и на 3.

Число делится на 9, если сумма цифр этого числа делится на 9.

Число делится на 10, если оно оканчивается на 0.

Число делится на 11, если разность сумм цифр, взятых через одну, делится на 11.

Число делится на 2^n, если число, составленное из последних n цифр этого числа, делится на 2^n.

Число делится на 5^n,если число, составленное из последних n цифр этого числа, делится на 5^n. Число делится на произведение двух чисел, не имеющих общих делителей, тогда и только тогда, когда оно делится на каждое из них. Задачи на разбор.

1. Делится ли число $10^{2014}\ + 1$ на 9?

2. Известно, что $16! = 20922 * 89888000$. Найдите $*$.

3. Незнайка хвастал своими выдающимися способностями умножать числа «в уме». Чтобы его проверить, Знайка предложил ему написать какое-нибудь число, перемножить его цифры и сказать результат. «1210» — немедленно выпалил Незнайка. «Ты неправ!» — сказал, подумав, Знайка. Как он обнаружил ошибку, не зная исходного числа?

Задачи для самостоятельного решения.

4. Делится ли на что-либо число $\underbrace{10\ldots01}_{2018\text{ нулей}}$?

5. К числу 19 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 12. Укажите все варианты.

6. Известно, что $20! = 24329020 * 8176640000$. Найдите $*$.

7. Докажите, что степень двойки не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

8. Найдите наименьшее ненулевое число, запись которого состоит лишь из нулей и единиц, делящееся без остатка на 225.

9. Приведите пример семизначного числа, все цифры которого различны и которое делится на все эти цифры. Существует ли такое восьмизначное число?

10. Сколько существует чисел $\overline{abcdef}$, в записи которого участвуют различный цифры от одного до шести, так что $\overline{ab} \vdots 2$, $\overline{abc} \vdots 3$, $\overline{abcd} \vdots 4$, $\overline{abcde} \vdots 5$, $\overline{abcdef} \vdots 6$.

11. Взяли число 834^{2017} и вычислили сумму его цифр, у полученного числа снова вычислили сумму его цифр и т.д. до тех пор, пока не получилось однозначное число. Найдите это однозначное число. 9. Даны девять натуральных чисел, причём запись первого состоит только из единиц, второго — только из двоек, ..., девятого — только из девяток. Может ли произведение каких-то двух из этих чисел делиться на произведение остальных?

12. Известно, что некоторое натуральное число в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что оно делится на 27.

13. Дано число, в десятичной записи которого есть две цифры, отличающиеся на единицу. Известно, что данное число и любое число, полученное перестановкой цифр из данного делятся на некоторое число N. Чему может быть равно N?

14. Делится ли на 3 (на 9) число 1234...500? (В записи этого числа подряд выписаны числа от 1 до 500.)

Десятичная запись числа. 19 июля

1. Внимательный Вася, шагая на занятие, заметил, что если к двузначному номеру одной из дач прибавить сумму его цифр, то получится номер, записанный теми же цифрами, но в обратном порядке. На какой номер дачи обратил внимание Вася?

2. Некоторые числа представимы в виде $\overline{abc} + \overline{ab} + a$, а некоторые нет. Сколько трехзначных чисел представимы в этом виде?

3. К трехзначному числу приписали рядом такое же число. Полученное шестизначное число сначала разделили на 7, потом результат разделили на 11, а потом разделили на 13. Что получили в ответе?

4. По окружности в произвольном порядке расставлены цифры от 1 до 9 (каждая – ровно один раз). Начиная с любой цифры, по часовой стрелке прочитываем трёхзначное число. Чему может равняться сумма этих девяти чисел?

5. Если у числа x посчитать сумму цифр и с полученным числом повторить это еще два раза, то получиться еще три числа. Найти самое маленькое x, для которого все четыре числа различны, а последнее из них равно 2.

6. **(а)** Из пятизначного числа вычли такое же, но записанное в обратном порядке. Докажите, что получившееся число делится на 11.

(б) Докажите, что число $\overline{a\underbrace{0\ldots0}_{2n+1}} + a$ делится на 11, а также число $\overline{a\underbrace{0\ldots0}_{2n}} - a$ делится на 11

(в) *Докажите признак делимости на 11:* число делится на 11, если его знакопеременная сумма цифр делится на 11.

7. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 5, и сумма цифр следующего за ним натурального числа также делится на 5.

8. **(а)** И сказал Кащей Ивану-царевичу: «Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я цифры x, y и z. Назовёшь ты мне три натуральных числа a, b и c. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax + by + cz$. Не отгадаешь, какие числа я задумал — голову с плеч долой!» Запечалился Иван -царевич и пошёл думу думать. Может ли он в живых остаться?

(б) Теперь Кащей задумывает произвольные натуральные числа x, y, z, но дает Ивану-царевичу две попытки. Сможет ли Иван-царевич остаться в живых?

9. К натуральному числу X справа приписали три цифры. Получившееся число оказалось равным сумме всех натуральных чисел от 1 до X. Найдите X.

10. Вася задумал двузначное число и сообщил Пете произведение цифр в записи этого числа, а Саше – сумму цифр этого числа. Между мальчиками состоялся такой диалог:

Петя: «Я угадаю это число задуманное число с трёх попыток, но двух мне может не хватить».

Саша: «Если так, то мне для этого хватит четырёх попыток, но трёх может не хватить». Какое число было сообщено Саше?

11. Докажите, что существует число, сумма цифр квадрата которого более, чем в 1000 раз превышает сумму цифр самого числа.

Методы рассуждений, 19 июля

Принцип крайнего

1. В стране есть несколько городов и несколько дорог с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через остальные. При этом, какие бы два города ни взять, хотя бы из одного из них можно проехать в другой, не нарушая правил движения. Докажите, что найдется город, из которого можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.

2. Школьники ходили в два туристических похода. В первом походе мальчиков было меньше 2/5 общего числа участников этого похода, во втором – тоже меньше 2/5. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше 4/7 общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников участвовал по крайней мере в одном походе.

3. * Есть n юношей и несколько девушек. Известно, что каких бы k юношей ни выбрать, число знакомых им в сумме девушек не меньше k. Тогда все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых.

Альтернативы

4. К празднику зал украсили 50 воздушными шариками. Докажите, что среди них найдутся либо 8 одноцветных, либо 8 шариков различных цветов.

5. В стране конечное число городов. Между любыми двумя городами есть либо железнодорожная линия, либо авиалиния. Докажите, что из любого города в любой можно попасть (возможно, с пересадками), пользуясь только одним видом транспорта.

6. Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

7. Разбиение на пары и группы

8. Из натуральных чисел от 1 до 100 выбрано 50 различных. Оказалось, что сумма никаких двух из них не равна 100. Верно ли, что среди выбранных чисел всегда найдётся квадрат какого-нибудь целого числа?

9. Пусть n — натуральное число.

(а) Найдите сумму натуральных чисел от 1 до $2n$.

(б) Найдите сумму натуральных чисел от 1 до n.

(в) Найдите сумму всех чётных чисел от 2 до $2n$.

(г) Найдите сумму всех нечётных чисел от 1 до $2n - 1$.

10. Скупой рыцарь хранит золотые монеты в 77 сундуках. Однажды, пересчитывая их, он заметил, что если открыть любые два сундука, то можно разложить лежащие в них монеты поровну по этим двум сундукам. Потом он заметил, что если открыть любые 3, или любые 4, . . ., или любые 76 сундуков, то тоже можно так переложить лежащие в них монеты, что во всех открытых сундуках станет поровну монет. Тут ему почудился стук в дверь, и старый скряга не успел проверить, можно ли разложить все монеты поровну по всем 77 сундукам. Можно ли, не заглядывая в сундуки, дать точный ответ на этот вопрос?

11. Александр скучно на занятиях, и он решил выписать все слова длины 1000000 (очень скучно). Александр живёт в России и пользуется только кириллицей. Ему стало интересно, для скольких из этих слов любая подстрока длины k является палиндромом. Помогите Александру найти ответ на этот интереснейший вопрос.

Любой и существует

12. В ящике лежат 20 мандаринов. Известно, что любые 11 из них весят в сумме больше одного килограмма, а любые 10 весят в сумме меньше одного килограмма. Докажите, что найдется мандарин, весящий от 90 до 100 г.

13. Пусть a и b — натуральные числа, $a + b$ нечетно. Докажите, что если все натуральные числа раскрасить в два цвета, то найдутся два числа одного цвета с разностью a или b.

14. 2017 долларов разложили по кошелькам, а кошельки разложили по карманам. Известно, что всего кошельков больше, чем долларов в любом кармане. Верно ли, что карманов больше, чем долларов в каком-нибудь кошельке? (Класть кошельки один в другой не разрешается.)

Взвешивания. 20 июля

1. **(а)** Одна из 9 монет - фальшивая, весит легче настоящей. Определить эту монету за 2 взвешивания.

(б) То же самое для 27 монет и трех взвешиваний. А если монет 25?

(в) Одна из 3^k монет — фальшивая, причем известно, что она легче настоящей. Определите эту монету за k взвешиваний.

(г) Одна из 3^k монет — фальшивая, причем известно, что она легче настоящей. Возможно ли определить монету менее, чем за k взвешиваний?

2. У нас по-прежнему имеется ровно одна фальшивая монета. Однако все монеты покрашены в два цвета: красный и зеленый. Известно, что если фальшивая монета красная, то она легче настоящей, а если зеленая, то тяжелее. За какое наименьшее число взвешиваний можно определить фальшивую монеты из девяти монет?

3. Из 4 монет одна фальшивая — но неизвестно, легче она или тяжелее настоящей. Кроме того, имеется одна заведомо настоящая монета. Можно ли за два взвешивания определить фальшивую монету и выяснить, легче она или тяжелее?

4. Из 12 монет одна фальшивая — но неизвестно, легче она или тяжелее настоящей. За три взвешивания определите фальшивую монету и выясните, легче она или тяжелее настоящей.

Взвешивания — разнобой. 20 июля

1. На столе в ряд лежат 4 монеты, причем среди них есть как фальшивые, так и настоящие. Все фальшивые и настоящие весят одинаково, фальшивая легче настоящей. При этом любая настоящая монета лежит левее любой фальшивой. Как за одно взвешивание определить тип каждой монеты на столе?

2. Есть одна золотая, две серебряных и пять бронзовых медалей. Разные медали весят по-разному. Одна из них — фальшивая (легче настоящей). Как за два взвешивания определить фальшивую медаль?

3. Кладоискатели нашли клад и записку: «Среди этих 20 мешков с золотыми монетами есть один мешок с фальшивыми монетами». Известно, что фальшивая монета ровно в два раза тяжелее настоящей. Как определить «фальшивый мешок» с помощью весов, которые ломаются, если приходят в равновесие?

4. Среди 201 монеты 50 фальшивых. Каждая фальшивая отличается от настоящих по весу на один грамм (в большую или меньшую сторону). Каждая монета весит целое число грамм. Как за одно взвешивание на весах, показывающих разность масс одной и другой чашки, узнать, является ли выбранная монета фальшивой?

5. Имеется 6 мешков с монетами. Один из них целиком заполнен фальшивыми монетами, которые на один грамм легче настоящих. Как за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, найти фальшивый мешок?

6. Имеется 54 монеты, все они разные по весу. Как за 79 взвешиваний найти самую легкую и самую тяжелую монеты?

7. Имеется n монет, из которых одна фальшивая (легче или тяжелее), и кроме того, имеется хотя бы одна помеченная (заведомо настоящая монета). Известно, за 4 взвешивания можно определить фальшивую монету и выяснить, легче она или тяжелее. При каком максимальном числе монет это можно сделать?

8. Имеется 9 монет, среди которых одна фальшивая, легче настоящих. Мы располагаем двумя чашечными весами, причём одни из них являются «грубыми», которые не позволяют отличить фальшивую монету от настоящей. Их точности недостаточно, чтобы уловить разницу в весе фальшивой и настоящей монеты. Зато другие весы точные. Какие весы «грубые», мы не знаем. Как в этой ситуации за три взвешивания найти фальшивую монету?

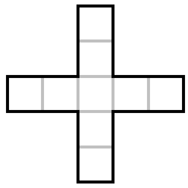
9. Имеется 11 монет, среди которых, возможно, есть одна фальшивая, неизвестно, легче или тяжелее. Как определить 8 настоящих монет за два взвешивания?

Игры: путь на эшафот. 20 июля

Как играть, чтобы не проиграть? Сделать так, чтобы проиграл другой игрок.

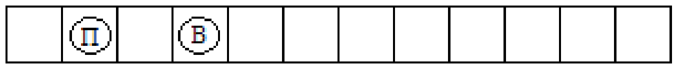
В каждой игре играют Петя и Вася. Они ходят по очереди, начинает Петя. Надо определить, кто из них может выиграть, как бы ни играл противник, или доказать, что каждый может обеспечить себе ничью.

Идея 1. Надо показать, как должен играть победитель. Укажите его ходы *для всех возможных ответов* соперника (а не только для «лучших» ответов).



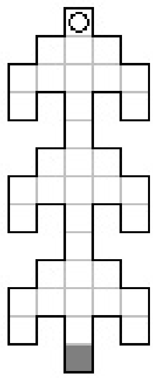
1. На 9-клеточном поле (см. рис.) двое играют в крестики-нолики. Выигрывает тот, кто первым поставит 3 своих знака подряд.

2. Вначале на полоске 1×12 стоят Петина и Васина фишки (см. рис). За один ход можно сдвинуть свою фишку на 1 или 2 клетки в любую сторону, при этом нельзя перепрыгивать чужую фишку или вставать на занятое ею поле. Проигрывает тот, кто не сможет ходить.



Идея 2. Можно выиграть так: наметить «эшафот» (позицию, где соперник проигрывает), отметить дорожку из позиций, ведущую к эшафоту, и каждым ходом возвращать соперника на эту дорожку, подталкивая его поближе к эшафоту. Тогда можно рассматривать за проигрывающего только ходы с дорожки.

3. Вначале на верхней клетке поля-«ёлочки» (см. рис.) стоит фишка. Её за ход сдвигают на одну клетку или вправо, или влево, или вниз, или вправо-вниз по диагонали, или влево-вниз по диагонали. Если игра закончится с фишкой на самой нижней тёмной клетке, выиграет Вася, на другой клетке — Петя, при повторении позиции — ничья.



4. Вначале в правом верхнем углу шахматной доски стоит ладья. Её за ход сдвигают влево или вниз на любое число клеток. Проигрывает тот, кто не сможет ходить.

5. Вначале на доске написано число 1000000. Петя за ход должен разделить его нацело на нечетное число от 2 до 100, Вася — на четное от 2 до 10. После деления число заменяется на частное. Проигрывает тот, кто не сможет ходить.

Идея 3. «Путь на эшафот» может быть не дорожкой, а состоять из отдельных позиций-«тюрем». Победитель каждым ходом загоняет соперника в очередную тюрьму. Тот пытается сбежать на волю, но победитель должен суметь опять загнать его в тюрьму. Последняя тюрьма становится эшафотом. Тюрьмы обычно выделены каким-нибудь свойством: чётностью, делимостью или цветом в раскраске. Тогда можно рассматривать за проигрывающего только ходы из тюрем.

6. Вначале в самой левой клетке полоски 1×13 стоит фишка. Её за ход сдвигают на одну или две клетки вправо. Проигрывает тот, кто не сможет ходить.

7. Вначале на доске написано число 2017. Каждым ходом его надо уменьшить на любую из его ненулевых цифр. Проиграет тот, кто получит однозначное число.

8. Людоедом называется фантастическая шахматная фигура, которая может ходить как шахматный король — на соседнюю клетку по вертикали или горизонтали, но не может ходить по диагонали. Два людоеда стоят на противоположных угловых полях шахматной доски и начинают ходить по очереди. Людоеду, вставшему на клетку, где уже стоит другой людоед, разрешается им пообедать. Кто кого съест при правильной игре и как ему надо для этого играть?
9. Вначале есть две кучки, в одной 99, в другой — 100 банкнот в один евро. За ход можно одну из кучек целиком истратить на покупку акций, а вторую разложить на две меньшие кучки. Проигрывает тот, кто не сможет ходить.
10. Вначале на доске написано число 15^{15}. За ход игрок должен разделить его нацело на число от 2 до 26. После деления число заменяется на частное. Проигрывает тот, кто не сможет ходить.
11. Вначале в правом верхнем углу клетчатой доски 9×9 стоит король. Его за ход сдвигают на одну клетку влево, вниз или по диагонали влево-вниз. Проигрывает тот, кто не сможет ходить.

Игры: Симметрия. 21 июля

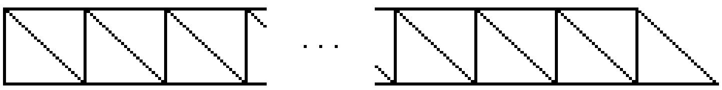
Идея 4. «Путь на эшафот» может состоять из позиций с каким-то видом симметрии. Тот, кто пытается избежать «казни» (проигрыша), симметрию нарушает, а его соперник симметрию восстанавливает, пока не сможет победить в один ход.

1. Уголком размера $n \times m$ где $m, n \geq 2$, называется фигура, получаемая из прямоугольника размера $n \times m$ клеток удалением прямоугольника размера $(n-1) \times (m-1)$ клеток. Два игрока по очереди делают ходы, заключающиеся в закрашивании в уголке произвольного ненулевого количества клеток, образующих прямоугольник или квадрат. Пропускать ход или красить одну клетку дважды нельзя. Проигрывает тот, после чьего хода все клетки уголка окажутся окрашенными. Кто из игроков победит при правильной игре?

2. На столе стоят 100 стаканов в ряд дном вниз. За ход нужно найти стакан, у которого оба соседа стоят дном вниз, и перевернуть обоих соседей. Кто не может сделать ход — проиграл.

3. За ход игрок должен выставить на свободные поля клетчатой доски 2×50 двух королей, которые бьют друг друга. Кто не может сделать ход — проиграл.

4. В каждом квадрате клетчатой полоски 1×33 провели по диагонали и справа пририсовали ещё один треугольник (см. рис.). За ход игрок красит неокрашенную сторону или диагональ в красный или синий цвет по своему усмотрению. Нельзя покрасить все три стороны треугольника в один цвет. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.



5. Дана клетчатая доска 10×10. За ход разрешается покрыть любые две соседние клетки доминошкой (прямоугольником размером 1×2) так, чтобы доминошки не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

6. Придя в школу, Коля и Алиса обнаружили на доске надпись: "ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА". Они договорились сыграть в следующую игру: за один ход в этой надписи разрешается стереть произвольное количество одинаковых букв, а выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Первым ходил Коля и стёр последнюю букву "А". Как надо играть Алисе, чтобы обеспечить себе выигрыш?

Игры: позиции. 21 июля

Выигрышные и проигрышные позиции расставляются по следующим правилам.

- *Позиция, из которой нельзя сделать ход, обозначим P.*
- *Позицию обозначим **N** (next — следующий, выигрывает тот, кто ходит следующим), если **из нее ЕСТЬ ХОТЯ БЫ ОДИН ход в P**.*
- *Позицию обозначим **P** (previous — предыдущий, выигрывает тот, кто ходил предыдущим), если **ВСЕ ходы из нее ведут в N.***

Выигрышная стратегия: ходить в P — позиции.

1. Вначале в самой левой клетке полоски **(а)** 1×8; **(б)** 1×12 стоит фишка. Двое играют в следующую игру: сдвигают фишку на одну или две клетки вправо. Тот, кто не может ходить, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Двое играющих ходят по очереди на циферблате с одной стрелкой: каждый своим ходом переводит стрелку на два или три часа вперед. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку на 11 часов. Кто выигрывает при правильной игре, если вначале стрелка показывает полдень?

3. Игра начинается с числа 4. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое, меньшее его, натуральное число. Выигрывает тот, кто получит 2017.

4. Пять ямок расположены в ряд. В каждой лежит по шарику. За один ход разрешается переложить все шарики из какой-нибудь ямки в соседнюю справа ямку. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход (когда все шарики лежат в самой правой ямке). Кто победит, если игроки не делают ошибок?

5. Вначале в самой левой клетке полоски а) 1×8; б) 1×12 стоит фишка. Трое играют в следующую игру: сдвигают фишку на одну или две клетки вправо. Тот, кто не может ходить, проигрывает. Может ли первый игрок не проиграть?

Комбинаторика 3. 21 июля

1. Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену цирка 5 львов и 4 тигра; при этом он не хочет, чтобы два тигра шли рядом. Сколькими способами он может расположить зверей:

(а) если он не различает зверей одного вида;

(б) если всё-таки умеет различать?

2. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 белых шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

3. Сколькими способами можно разбить на пары 20 шестиклассников?

4. Имеется множество C, состоящее из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы:

(а) множества A и B не пересекались;

(б) множество A содержалось бы в множестве B?

5. Сколькими способами можно разделить на команды по 6 человек для игры в волейбол группу: **(а)** из 12; **(б)** из 24 спортсменов?

6. Сколько существует трехзначных чисел, у которых первая цифра больше двух других, а вторая меньше третьей?

7. Абитуриент должен сдать четыре экзамена. Он полагает, что для поступления будет достаточно набрать 17 очков. Сколькими способами он сможет сдать экзамены, набрав не менее 17 очков и не получив ни одной двойки при пятибальной системе оценок?

8. Сколькими способами 4 чёрных, 4 красных и 4 белых шара можно разложить в 6 разных ящиков?

9. Нияз Наилевич пять раз подряд написал на доске число 2017 (Делать было нечего, мел зазря расходовал). Сколькими способами Гордей может вычеркнуть часть цифр, чтобы на доске осталось число 2017?

10. Докажите, что произведение любых последовательных 800 натуральных чисел делится на 800!

11. В квадратной таблице из $9{\times}9$ клеток отмечены 9 клеток, лежащие на пересечении второй, пятой и восьмой строк со вторым, пятым и восьмым столбцами. Сколькими путями можно из левой нижней клетки попасть в правую верхнюю, двигаясь только по неотмеченным клеткам вверх или вправо?

12. В математический совет ЛМШ избирают 11 членов, которые могут быть из М6, М7, М8, М9 и М10, причем из одних представителей М10 совет составить нельзя. Сколько различных советов, отличающихся представительством отрядов, можно избрать?

13. Сколько существует способов выбрать 4 доминошки из полного набора, чтобы их можно было правильным образом расставить по кругу?

Процессы и операции. 22 июля

1. Докажите, что соседние числа Фибоначчи взаимно просты. (Числа Фибоначчи определяются условиями: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$)

2. В государстве n городов, каждые два из которых соединены дорогой. Правительство хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из любого города, в него больше нельзя было вернуться. Докажите, что это можно сделать.

3. В компании из k человек ($k > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k-4$ разговора все они могут узнать все новости.

4. 2017 человек не знакомы между собой. Доказать, что их можно перезнакомить так, что ни у каких трёх людей не будет одинакового числа знакомых.

****

5. В прямоугольнике $3\times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трех цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что, переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.

6. Длина взрослого червяка 1 метр. Если червяк взрослый, его можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает метра, он становится взрослым и прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить 10 взрослых червяков быстрее чем за час?

7. В вершинах единичного квадрата сидят три кузнечика. Они могут передвигаться так: кузнечик перепрыгивает через любого из двух остальных, перелетая его на расстояние, на которое он до него прыгал. Могут ли через какое-то время кузнечики оказаться в вершинах квадрата со стороной 2?

8. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, причем каждый оказался не на своем месте. Билетер может поменять местами любых двух соседей, сидящих не на своих местах, и так много раз (но не может пересаживать зрителя, уже попавшего на свое место). Верно ли, что при любой начальной рассадке билетер может действовать так, чтобы все расселись по своим местам?

Графы — 2. 22 июля

Опр. Количество ребер, выходящих из данной вершины графа, называется степенью этой вершины.

Опр. Граф называется связным, если между любыми двумя его вершинами есть путь по ребрам.

Опр. Компонентой связности графа называется такая его связная часть, к которой нельзя добавить вершину так, чтобы она оставалась связной. Ясно, что если граф связен, то у него существует единственная компонента связности — он сам.

Лемма (о рукопожатиях). Сумма всех степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер.

Задачи на разбор.

1. Докажите, что число вершин нечётной степени в графе — чётно.
2. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?
3. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1,5 или 9 соседних баронств?
4. Дан связный граф, степени вершин которого не меньше 100. Может ли так случиться, что после удаления одного ребра он станет несвязным?

Задачи для самостоятельного решения.

1. В некотором государстве 2017 городов, из каждого из которых выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?
2. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?
3. В некотором государстве из каждого города выходит по 16 дорог. Может ли в нем быть 2016 дорог?
4. В Тридевятом царстве только один вид транспорта — ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в город Дальний.
5. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
6. В классе есть 5 задир и молчуны. Молчуны никого не обижают. Каждый задира обижает не менее половины учеников класса. Докажите, что кого-либо из молчунов обижают более половины задир, если в классе всего 22 ученика.
7. Некоторые жители деревни дружат друг с другом. Назовём человека необщительным, если у него меньше четырёх друзей. Назовём человека чудаком, если все его друзья необщительные. Докажите, что необщительных не меньше, чем чудаков.

8. Какое наименьшее число соединений требуется для организации проводной сети связи из 10 узлов, чтобы при выходе из строя любых двух узлов связи сохранялась возможность передачи информации между любыми двумя оставшимися (хотя бы по цепочке через другие узлы)?

9. Двадцать городов соединены 172 авиалиниями. Доказать, что, используя эти авиалинии, можно из любого города перелететь в любой другой (быть может, делая пересадки).

10. В некоторой стране столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединен авиалиниями ровно с десятью городами (если А соединён с В, то В соединён с А). Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.

11. На турнир приехало 66 участников. Известно, что среди любых шести из них найдутся четыре попарно знакомых. Докажите, что среди участников есть по крайней мере 2015 пар знакомых.

ДОМИНО. 7 июля

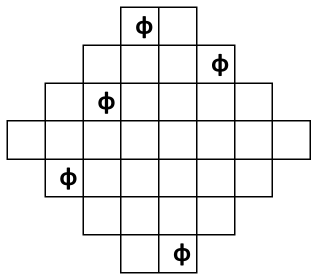
0–0. Сколько различных решений имеет уравнение Р×Е×Б×У×С = З×А×Д×А×Ч×А? (Разные буквы – разные числа, одинаковые буквы – одинаковые числа). **(Бесконечно много, достаточно очень внимательно прочитать условие).**

0–1. Требуется сложить из спичек треугольник, одна из сторон которого вдвое больше другой. Какое наименьшее количество спичек можно для этого использовать? Спички нельзя ломать и накладывать друг на друга. **(5 спичек. Одна из сторон не меньше 2, а две других – не менее 1, значит, периметр не менее 4, но ровно 4=2+1+1 он быть не может – противоречие с неравенством треугольника 2=1+1. Тогда периметр не менее 5=2+2+1, а такой треугольник существует.)**

0–2. В углу шахматной доски стоит ладья. Её передвигают по горизонтали или по вертикали так, что все поля, через которые ладья прошла за ход, из доски выбрасываются и ходить по ним или через них нельзя. Какое наименьшее количество ходов можно сделать так, чтобы больше ходов сделать было нельзя? Приведите ответ и пример маршрута. **(4, например, a1-a2-h2-h1-b1)**

0–3. На 15 карточках по одному написаны все целые числа от 1 до 15. Одну карточку потеряли и оказалось, что сумма чисел на остальных карточках – простое число. Какая карточка могла быть потеряна? **(7, 11, 13. Сумма всех данных чисел равна 8·15=120, значит, потерянное число должно после вычитания из 120 давать простое число, не меньшее 105. А простыми числами в интервале от 105 до 119 являются 107, 109, 113, значит, потеряли 13, 11 или 7.)**

0–4. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ферзей можно поставить на чёрные клетки шахматной доски? Приведите ответ и пример расстановки. **(5. Ферзей на чёрных клетках можно фактически заменить на ферзей на доске из 32 клеток в форме, когда строки-столбцы превратились в диагонали, а диагонали превратились в строки-столбцы, – см. рис. На этой доске получается 7 строк, значит, ферзей – не более 7. Разобрав случаи, когда ферзей ровно 7 или 6, начиная их расставлять с точностью до симметрии с крайних строк, получим, что эти варианты невозможны, значит, ферзей – не более 5. Пример – на рисунке.)**



0–5. Сколько существует натуральных двухзначных чисел, являющихся средним арифметическим некоторого натурального однозначного и некоторого натурального трёхзначного числа? **(49)**

0–6. Найдите следующее за 864 натуральное число, оканчивающееся на 864 и кратное 864. **(108864. Если от нужного нам числа отнять 864, то получим, число, кратное 864 и оканчивающееся на три нуля. Тогда если отбросить три нуля, оставшееся число должно быть кратно 864:8=108, 1000 делится на 8. Наименьшее такое число равно 108, значит, наше число равно 108864.)**

1–1. Составьте из восьми различных цифр такое восьмизначное число, что при вычеркивании из него любых двух цифр получается составное число? **(проверять ответ)**

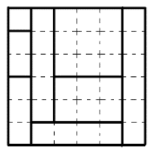
1–2. Отец дал своему сыну 300 руб, а другой отец дал своему сыну 200 руб. На сколько мог увеличиться суммарный капитал сыновей? Рассмотрите все случаи. (500, 300, 200)

1–3. Сколько существует 4-значных чисел, которые делятся на 7, а две средние цифры у них – 37? **(13)**

1–4. В кучке 27 спичек. За один ход можно брать 1, 2 или 3 спички. Выигрывает тот, кто взял последнюю спичку. Какое минимальное количество спичек могло быть у победителя по окончании игры при правильной игре? **(9 спичек. При правильной игре выигрывает первый игрок, взяв сначала 3 спички, а затем добавляя к ходу второго спички до 4 штук за 1 парный ход. При любой другой стратегии второй перехватит инициативу. Т.о. в этой игре первый сделает ровно 1+24:4=7 ходов и возьмёт минимум 3 (первый ход)+6(в 6 остальных ходах)=9 спичек.)**

1–5. Сколько вершин может быть у многоугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, стороны которого идут по линиям сети, периметр которого равен 12? *(сторона клетки равна 1)* **(4, 6, 8, 10, 12. Заметим, что стороны клетчатого многоугольника чередуются по направлению (горизонтальные-вертикальные), поэтому количество сторон (вершин) является чётным числом, не меньшим 4 и не большим 12 (каждая сторона не меньше 1). Причём каждый случай количества вершин реализуется.)**

1–6. Третье тысячелетие начинается 01.01.2001 и заканчивается 31.12.3000. Сколько в нём есть дат, которые записываются ровно двумя различными цифрами? **(87 дат. Это даты из 0 и 2 ($3\cdot1\cdot(2^3-1)$=21 дата), или из 1 и 2 ($2^2\cdot2\cdot2^3$=64 даты), или из 0 и 3 (2 даты).)**

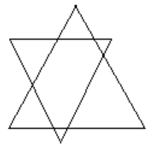


2–2. На какое наибольшее количество прямоугольников можно по линиям сетки разрезать квадрат 6×6 так, чтобы среди них не было одинаковых прямоугольников? Приведите ответ и пример разрезания. **(8 прямоугольников. Если бы было не менее 9 различных прямоугольников, то их суммарная площадь была бы не менее 1+2+3+4+4+5+6+6+8=39, т.к. минимальные по площади 9 прямоугольников, умещающихся в квадрате 6×6, - 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 2×2, 1×5, 1×6, 2×3, 2×4. На рисунке пример разрезания на 8 различных прямоугольников.)**

2–3. Вдоль прямой дороги расположены 4 села в следующем порядке А, Б, В, Г.. Расстояние между сёлами 10 километров.. В селе А живёт 10 школьников, в Б – 20, в В – 30, в Г – 40. Где должна быть построена школа, что бы суммарное расстояние проходимое школьниками было наименьше. **(в селе В)**

2–4. В прямоугольнике 2х4 отмечены все узлы клеток. Сколько есть прямоугольных треугольников с узлами в клетках? **(158)**

2–5. Сумма девяти натуральных чисел равна 1001. Найдите максимальное возможное значение их (всех девяти!) наибольшего общего делителя. **(91, например, для набора из восьми чисел 91 и одного числа 273. НОД данной девятки чисел должен быть делителем их суммы, не превосходящим её девятой части, но 1001=7·11·13, значит, НОД≤7·13=91.)**

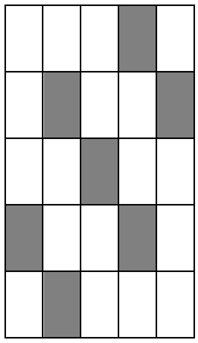


2–6. Два правильных треугольника с периметрами 9 и 12 наложили друг на друга так, что получились выпуклый шестиугольник и шесть правильных (не обязательно равных) треугольников. Какой периметр может быть у шестиугольника? **(7. Заметим, что суммарный периметр (21) разбился на 6 троек равных отрезков, по одному из которых в сумме дают нужный шестиугольник, который будет иметь периметр, равный 21:3=7.)**

3–3. Площадь пересечения круга и треугольника составляет 70% площади их объединения, при этом площадь треугольника вне круга составляет 20% площади их объединения. Сколько процентов площади круга находится вне треугольника? **(12,5%. Пусть площадь объединения круга и треугольника равна 1, тогда площадь их пересечения равна 0,7; площадь треугольника вне круга равна 0,2; площадь круга вне треугольника равна 1-0,7-0,2=0,1, а вся площадь круга равна 0,1+0,7=0,8. Отсюда следует, что процентное отношение площади круга, лежащей вне треугольника, ко всей площади круга равно 0,1:0,8·100=12,5(%).)**

3–4. В ряд стоят 10 гирек, при этом массы любых двух соседних гирек различаются на 1г. Известно, что среди них есть гирька массой 1г. Какая суммарная масса может быть у всего набора гирек? **(Любое нечётное число граммов от 15 до 55. Соседние гирьки имеют разную по чётности массу, значит, в наборе 5 гирек с чётной и 5 гирек с нечётной массой, а суммарная масса будет нечётной. При этом она может принимать любое нечётное значение от (1+2)·5=15 до 1+2+3+…+10=55. Пример для каждого промежуточного значения можно получить, преобразуя постепенно набор (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2) в набор (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).)**

3–5. *N* различных натуральных чисел, не превосходящих 2017, выписаны по кругу так, что сумма любых двух из них, стоящих через одно, делится на 3. Найдите наибольшее возможное значение *N*. (1344. Числа могут образовывать одну (при нечётном *N*) или две цепочки (при чётном *N*), идущих через одно число. Возможны два варианта цепочек - либо цепочка чисел кратных 3, либо чередующиеся числа с остатками 1 и 2 при делении на 3, но тогда их в этой цепочке чётное количество. Учитывая, что у нас 672 чисел с остатками 0 и 2, 673 чисел с остатком 1, то наибольший по количеству чисел круг будет при цепочке в 672 чисел с остатком 0 и расположенной между этими числами цепочкой из 672 чередующихся чисел с остатками 1 и 2.)



3–6. Какое наименьшее количество клеток квадрата 5×5 можно закрасить так, чтобы в любом четырёхклеточном прямоугольнике была хотя бы одна закрашенная клетка? Приведите ответ и пример. **(7 клеток)**

4–4. Какое наименьшее количество вершин может быть у выпуклого многоугольника, если известно, что число его диагоналей не равно 0 и делится на 350? **(28)**

4–5. В $n \geq 2$ кучках попарно разное количество монет. За один ход в любые две кучки можно добавить по одной монете. При каких n можно гарантированно уравнять количества монет во всех кучках? **(при нечётных $n \geq 3$. При чётном n в кучках в сумме могло быть изначально нечётное количество монет, в результате данных операций суммарное количество монет, увеличиваясь за ход на 2, всегда будет оставаться нечётным, значит, не будет делиться на n, т.е. все кучки невозможно сделать равными. В случае нечётного количества кучек разобьём все кучки, кроме самой большой, на пары. Затем по очереди меньшую кучку каждой пары и самую большую кучку набора увеличиваем до равенства меньшей кучки пары со своей напарницей. Получим пары равных кучек и одну самую большую кучку. Теперь в каждой паре равных кучек доводим количество монет до максимальной кучки.)**

4–6. В вершинах выпуклого 1242-угольника расставляют произвольным образом по одному все натуральные числа от 1 до 1242. Затем на каждой стороне записывают сумму чисел в её концах. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться написанными на сторонах? Приведите ответ и пример расстановки чисел. **(3. По разные стороны от 1 стоят два числа $a<b$, а рядом с числом b будет стоять ещё некоторое число $c \geq 2$, тогда $1+a<1+b<c+b$, значит, на сторонах написано не менее трёх различных чисел. Например, это могут быть числа 2008, 2009 и 2010, если в вершинах числа поставить следующим образом: 1, 2007, 3, 2005, 5, 2003, …, 1003, 1005, 1004, 1006, 1002, 1008, …, 4, 2006, 2, 2008.)**

5–5. На плоскости даны 20 отрезков, каждые два из которых пересекаются. Ровно 6 из них пересекаются в точке A, ровно 5 – в точке B, ровно 4 – в точке C, а остальные отрезки пересекаются только по два. Сколько всего точек пересечения у этих отрезков? **(162 = 190 – 15 + 1 – 10 + 1 – 6 + 1)**

5–6. Дан кубик со стороной 4, состоящий из маленьких кубиков со стороной 1. Какое наименьшее количество маленьких кубиков потребуется вытащить, чтобы площадь поверхности увеличилась в 1,5 раза. (12)

6–6. Из цифр 0, 1, 2 … 9 составлен набор целых чисел (каждая цифра использована один раз) так, что все числа имеют общий делитель, больший 1. Какое наибольшее количество чисел может быть в наборе? Привести ответ и пример такого набора чисел. (7 чисел, делящихся на 3: {0, 3, 6, 9, 12, 45, 78}. Если бы чисел было не менее 8, то по принципу Дирихле среди них оказалось бы не менее 6 однозначных, значит, были бы и соседние числа, но тогда НОД=1.)

Внутренний математический бой, 12.07.17

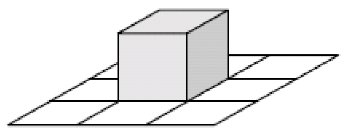
1. Даны 25 различных положительных чисел. Из них составляются всевозможные суммы с любым числом слагаемых (от 1 до 25). Докажите, что среди них есть хотя бы 300 различных.

2. На клетках шахматной доски расставлены числа, причём числа в соседних по стороне клетках отличаются на 1. Числа 2 и 14 написаны по 2 раза. Сколько раз на доске может быть написано число 8?

3. Малыш и Карлсон играют в такую игру: они берут шоколадку 13×13 и по очереди выкусывают из нее «по клеточкам» кусочки (не обязательно с краю): Карлсон — 2×2, Малыш — 1×1. Если не осталось ни одного кусочка 2×2, то весь оставшийся шоколад доедает Малыш. Выигрывает тот, кто съест больше шоколада. Начинает игру Малыш. Кто выиграет при правильной игре?

4. Докажите, что среди любых 40 последовательных натуральных чисел найдется такое, сумма цифр которого кратна 11.

5. Дан кубик с ребром 1. Одну из его клеток склеили с центральной клеткой квадрата 3×3 (см. рисунок). Можно ли завернуть кубик в этот лист бумаги, если разрешается (только по линиям сетки) делать надрезы и сгибать лист?



6. Есть 32 камня попарно различных весов. Как на чашечных весах без гирь за 35 взвешиваний определить самый тяжелый камень и второй по тяжести камень?

7. Илья и Артём играют в следующую игру. На столе имеется 100 синих конфет в красной коробке и 100 красных конфет в синей коробке. За ход игрок может выполнить одно из трех действий:

- **(а)** Взять две красных конфеты из синей коробки и переложить их в красную коробку.
- **(б)** Взять две синих конфеты из красной коробки и переложить их в синюю коробку.
- **(в)** Взять две разноцветные конфеты из одной коробки и съесть их.

Игроки ходят по очереди. Артём начинает игру. Выигрывает тот, кто заберет последнюю красную конфету из синей коробки или последнюю синюю конфету из красной коробки. Кто выиграет при правильной игре?

8. На турнир приехал 101 человек. Известно, что среди любых 100 из них есть человек, знакомый со всеми остальными. Докажите, что можно найти человека, который знаком со всеми остальными.

Внешний матбой, 6 vs 7 Профи. 17.07.2017

1. 14 школьников пришли на дискотеку. Среди них была Настя. В какой-то момент она решила пойти порешать задачи и попрощалась с 10 своими друзьями. После этого она вспомнила, что попрощалась не со всеми, поэтому решила вернуться, и снова попрощалась с 10 друзьями. Так продолжалось несколько раз, пока Настя не попрощалась с каждым из друзей хотя бы по одному разу. На следующий день Настя поняла, что попрощалась с каждым из 13 друзей разное количество раз. Какое наименьшее число раз Настя могла возвращаться на дискотеку?

2. Несколько хамелеонов двух цветов — красного и синего — стоят по кругу. Каждую минуту все хамелеоны, оба соседа которых того же цвета, что и сам хамелеон, меняют свой цвет. Известно, что перекрашивания продолжались ровно 2014 минут, после чего прекратились. Какое минимальное количество хамелеонов могло стоять в круге?

3. Турнир по волейболу назовём *транзитивным*, если в нём выполняется следующее условие: если команда A выиграла у B, а B выиграла у C, то A выиграла у C. Для какого наибольшего k в любом закончившемся однокруговом турнире с 8 командами можно выбрать k команд, образующих между собой транзитивный турнир?

4. Артур разделил некоторое натуральное число на 333 и обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Тимур разделил то же самое число на 777 и тоже обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Найдите исходное число.

5. Есть шоколадка 3333×3333 долек. Малыш и Карлсон играют в такую игру: ход состоит в том, что один из имеющихся прямоугольных кусков шоколада разламывают по границам долек на две прямоугольные части, одну из которых можно после этого сразу же съесть (а можно и не есть). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первым ходит Карлсон. Кто выиграет при правильной игре?

6. Записали 5-значное число без нулей в записи и все числа, получающиеся перестановками его цифр. У каждого из них нашли остаток при делении на 11. Докажите, что есть остаток, который не встречается среди полученных ни разу.

7. Квадрат 9×9 разрезан на квадраты 2×2 и «уголки» из трех клеток. Какое наибольшее количество квадратов 2×2 могло при этом получиться?

8. *Лазерная* ладья бьет все клетки своей вертикали и горизонтали, даже через другие фигуры. Какое наибольшее количество лазерных ладей, каждая из которых бьет ровно 4 другие, может стоять на доске 99×99?

Внешний матбой, 6 vs 7 обычные. 17.07.2017

1. На столе стоит 9 пустых корзин. Каждую минуту выбирают любые 6 из них и кладут в них по яблоку. Через некоторое время во всех корзинах оказалось различное число яблок. Какое наименьшее число яблок может быть во всех корзинах в сумме в этот момент?

2. Автомат «X» (где x – заранее неизвестное натуральное число, не превосходящее 8) работает по следующему принципу. Ему вводят число n, и если из пары (n, x) одно из них делится на другое, то автомат зажигает зеленую лампочку, а иначе – красную. Существует ли такие три числа, которые можно ввести в автомат и по ответам однозначно определить x?

3. Внучка выкопала на огороде 45 репок, веса которых – все натуральные числа от 1 до 45. Могла ли внучка дать по 15 репок деду и бабке так, чтобы выполнилось следующее условие: какие бы две своих репки ни положили на одну чашку весов дед и бабка – по одной каждый, внучка сможет положить на другую чашку весов одну или две свои репки так, чтобы весы уравновесились?

4. Из восьмизначного числа вычеркнули две средние цифры и исходное число разделили на полученное. В частном оказалось натуральное число. Каким оно может быть?

5. Сколько существует решений ребуса $\frac{\text{Т}\cdot\text{Е}\cdot\text{О}\cdot\text{Р}\cdot\text{Е}\cdot\text{М}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{Р}\cdot\text{Х}\cdot\text{И}\cdot\text{М}\cdot\text{Е}\cdot\text{Д}\cdot\text{А}} = \frac{1}{2}$? Одинаковые буквы — одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.

6. Петя играет с компьютером в игру. Компьютер бросает на поле 9×9 шарик одного из k цветов. После этого Петя перемещает этот шарик на одно из свободных полей. Если пять или более шариков одного цвета оказываются выстроенными подряд в один ряд по горизонтали или вертикали, то они уничтожаются. При каких k компьютер может выиграть у Пети?

7. Квадрат 25×25 разбит на единичные квадратики. Разрешается обвести по линиям сетки красным границу квадрата любого размера, не выходящего за границы большого квадрата. Какое наименьшее количество квадратов нужно обвести, чтобы все стороны всех единичных квадратиков оказались красными?

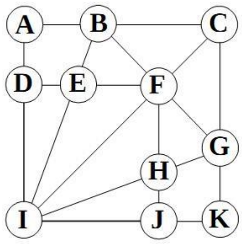
8. На доске написано 2017 чисел. Известно, что сумма любых 1009 из этих чисел больше, чем сумма 1008 оставшихся. Верно ли, что все числа положительны?

Внутренний матбой, М6. 17.07.2017

1. Поезд вышел со станции A, проследовал мимо станции B, затем C и прибыл на станцию D. Часть пути от A до C он прошел за 2 часа, а от B до D — за 3 часа. Расстояние от A до B — 100 км, от B до C — 60 км, от C до D — 180 км. Какое наименьшее время поезд мог потратить на весь путь, если известно, что он нигде не превышал скорость в 100км/час?

2. На шахматную доску по одной выставляются ладьи так, чтобы каждая выставленная побила чётное число пустых полей (на момент выставления). Какое наибольшее число ладей можно выставить?

3. Буквы $A, B, \dots, K$ на рисунке обозначают числа $1, 2, \dots, 11$ (разные буквы — разные числа) так, что суммы чисел во всех десяти отмеченных рядах из трех клеток одинаковы. Какие значения может принимать буква I?



4. На куб $3{\times}3{\times}3$ наклеили шесть полосок $1{\times}12$ различных цветов (по границам маленьких кубиков). Определите цвет кубика и полоски, наклеенной первой, если кубик выглядит так, как показано на рисунке.

5. Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1, но меньше этого числа. Шестиклассник Семёнов придумал натуральное число, у которого есть собственные делители, делящиеся на 3, и есть собственные делители, делящиеся на 2. Какие значения может принимать разность между самым большим собственным делителем этого числа, делящимся на 3, и самым большим собственным делителем этого числа, делящимся на 2?

6. На доске $8{\times}8$ в каждую клетку написали натуральное число. Известно, что в любых двух T-образных тетрамино суммы чисел разные. Докажите, что одно из чисел на доске не меньше 43.

7. На столе лежит палочка длиной 10см. Петя ломает её на две части и кладёт обе получившиеся палочки на стол. С одной из лежащих на столе палочек Вася проделывает ту же операцию, потом то же делает Петя и т.д., по очереди. Петя хочет, чтобы после 18 разломов все получившиеся палочки были короче 1см. Вася хочет помешать Пете. Кто из них имеет возможность добиться своей цели независимо от действий соперника?

8. Парламент страны рыцарей и лжецов состоит из 2017 депутатов. Путешественник решил узнать, кем является каждый депутат—рыцарем или лжецом. Каждые десять минут он может позвать в зал заседаний любых депутатов и задать им вопрос: «Сколько среди вас лжецов?». Через какое минимальное количество минут путешественник сможет узнать, кто есть кто?