Переменная.

Увидел бяку – обозначь!

1. «Во время игры в шахматы у меня осталось фигур в три раза меньше, чем у соперника, и в шесть раз меньше, чем свободных клеток на доске, но все равно я выиграл эту партию!» — сказал Винтик Шпунтику. «А у меня, в одной из партий, фигур осталось в пять раз меньше, чем у соперника, и в десять раз меньше, чем свободных клеток на доске, и всё-таки я сумел победить!» — в свою очередь рассказал Шпунтик. Чьему рассказу можно верить?

2. В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждой строке кроме первой на 1 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце кроме первого в 4 раза больше, чем в предыдущем. Докажите, что сумма чисел во второй строке делится на 7.

3. Петя написал несколько различных натуральных чисел, используя только две цифры. Сумма всех его чисел равна 100. Какое наибольшее количество чисел мог написать Петя?

4. Прямоугольник, у которого одна из сторон втрое длиннее другой, разрезали на одинаковые квадратики. Оказалось, что сумма их периметров в 6 раз больше периметра исходного прямоугольника. Сколько могло получиться квадратиков?

5. Найдите сумму: $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{100}}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{100}}}}}}.$$

6. Даны три числа. Если их все увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. Если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. А на сколько увеличится произведение, если все исходные числа увеличить на 3?

7. В буфете продается мороженое (большое и маленькое). Сегодня три больших и одно маленькое стоят вместе столько же, сколько пять больших вчера. А два большие и одно маленькое сегодня стоят вместе столько же, сколько три больших и одно маленькое вчера. Можно ли по этим данным выяснить, что дороже: одно большое и два маленьких сегодня, или пять маленьких вчера?

8. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не $1/2$ очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение – не 0 очков, а -1, ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

Переменная.

Увидел бяку – обозначь!

1. «Во время игры в шахматы у меня осталось фигур в три раза меньше, чем у соперника, и в шесть раз меньше, чем свободных клеток на доске, но все равно я выиграл эту партию!» — сказал Винтик Шпунтику. «А у меня, в одной из партий, фигур осталось в пять раз меньше, чем у соперника, и в десять раз меньше, чем свободных клеток на доске, и всё-таки я сумел победить!» — в свою очередь рассказал Шпунтик. Чьему рассказу можно верить?

2. В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждой строке кроме первой на 1 больше, чем в предыдущей, и сумма чисел в каждом столбце кроме первого в 4 раза больше, чем в предыдущем. Докажите, что сумма чисел во второй строке делится на 7.

3. Петя написал несколько различных натуральных чисел, используя только две цифры. Сумма всех его чисел равна 100. Какое наибольшее количество чисел мог написать Петя?

4. Прямоугольник, у которого одна из сторон втрое длиннее другой, разрезали на одинаковые квадратики. Оказалось, что сумма их периметров в 6 раз больше периметра исходного прямоугольника. Сколько могло получиться квадратиков?

5. Найдите сумму: $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{100}}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{100}}}}}}.$$

6. Даны три числа. Если их все увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. Если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. А на сколько увеличится произведение, если все исходные числа увеличить на 3?

7. В буфете продается мороженое (большое и маленькое). Сегодня три больших и одно маленькое стоят вместе столько же, сколько пять больших вчера. А два большие и одно маленькое сегодня стоят вместе столько же, сколько три больших и одно маленькое вчера. Можно ли по этим данным выяснить, что дороже: одно большое и два маленьких сегодня, или пять маленьких вчера?

8. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не $1/2$ очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение – не 0 очков, а -1, ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

Турниры.

Быстрее, выше, сильнее.

Шахматная система: очки $1 - 1/2 - 0$.
Футбольная система: очки $3 - 1 - 0$.

1. Трое друзей играли в шахматы. Один из них сыграл 25 игр, а другой – 17 игр. Мог ли третий участник сыграть **(a)** 24; **(b)** 35; **(c)** 46 игр?

2. Футбольный клуб «Динамо» во втором матче турнира забил больше голов, чем в первом, а в третьем матче – на 6 голов меньше, чем в двух первых вместе взятых. Известно, что в этих трех матчах «Динамо» забило 6 голов. Могло ли «Динамо» выиграть все три матча?

3. Пять футбольных команд провели однокруговой турнир. Четыре команды набрали соответственно 1, 2, 5 и 7 очков. А сколько очков набрала пятая команда?

4. В однокруговом турнире участвуют 10 шахматистов. Могут ли какие-нибудь три шахматиста набрать хотя бы на четыре очка больше, чем остальные семеро вместе?

5. Турнир по боксу проходил по олимпийской системе, «отдыхающих» не было. При этом 32 человека выиграли боев больше, чем проиграли. Сколько боксеров участвовало в турнире?

6. 20 шахматистов сыграли турнир в один круг. Журналист сообщил в своей заметке, что каждый участник этого турнира выиграл столько же партий, сколько и свёл вничью. Могут ли его слова быть правдой?

7. В шахматном турнире участвовало 20 человек, которые в каждом туре разбивались на пары (пары не повторялись). Организаторы (для экономии средств) решили заканчивать турнир в тот момент, когда не найдется двух участников, набравших одинаковое количество очков. Какое наименьшее количество туров все равно придется провести?

Турниры.

Быстрее, выше, сильнее.

Шахматная система: очки $1 - 1/2 - 0$.
Футбольная система: очки $3 - 1 - 0$.

1. Трое друзей играли в шахматы. Один из них сыграл 25 игр, а другой – 17 игр. Мог ли третий участник сыграть **(a)** 24; **(b)** 35; **(c)** 46 игр?

2. Футбольный клуб «Динамо» во втором матче турнира забил больше голов, чем в первом, а в третьем матче – на 6 голов меньше, чем в двух первых вместе взятых. Известно, что в этих трех матчах «Динамо» забило 6 голов. Могло ли «Динамо» выиграть все три матча?

3. Пять футбольных команд провели однокруговой турнир. Четыре команды набрали соответственно 1, 2, 5 и 7 очков. А сколько очков набрала пятая команда?

4. В однокруговом турнире участвуют 10 шахматистов. Могут ли какие-нибудь три шахматиста набрать хотя бы на четыре очка больше, чем остальные семеро вместе?

5. Турнир по боксу проходил по олимпийской системе, «отдыхающих» не было. При этом 32 человека выиграли боев больше, чем проиграли. Сколько боксеров участвовало в турнире?

6. 20 шахматистов сыграли турнир в один круг. Журналист сообщил в своей заметке, что каждый участник этого турнира выиграл столько же партий, сколько и свёл вничью. Могут ли его слова быть правдой?

7. В шахматном турнире участвовало 20 человек, которые в каждом туре разбивались на пары (пары не повторялись). Организаторы (для экономии средств) решили заканчивать турнир в тот момент, когда не найдется двух участников, набравших одинаковое количество очков. Какое наименьшее количество туров все равно придется провести?

Делимость.

Натуральное число называется простым, если оно имеет ровно 2 делителя. Натуральное число называется составным, если оно имеет больше 2 делителей. Единственное натуральное число, которое не является ни простым, ни составным – 1.

Основная Теорема Арифметики: *любое натуральное число, большее 1, можно разложить на произведение простых множителей, причем это разложение единственно, если не учитывать порядок следования множителей.*

1. Всегда ли верны следующие утверждения? Да, это кусочек из вступительного теста.

- если a делится на 3, то a^2 делится на 9;
- если a делится на 24 и a делится на 15, то а делится на 360;
- если a^2 делится на 3, то a делится на 3;
- если a^2 делится на 8, то a делится на 4;
- если a^2 делится на 8, то a делится на 8.

2. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

3. 109 яблок разложены по пакетам. В некоторых пакетах лежит по x яблок, в других – по три яблока. Найдите все возможные значения x, если всего пакетов – 20.

4. Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число A?

5. Докажите, что число, имеющее нечётное число делителей, является точным квадратом.

6. Натуральные числа a и b таковы, что $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ – составное число.

7. **(a)** Найдите 5 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится на другое, но квадрат каждого из них делится на каждое из оставшихся чисел. **(b)** Существуют ли 11 натуральных чисел таких, что любые 5 имеют общий делитель, больший 1, а любые 6 – нет?

8. Какое наибольшее количество попарно взаимно простых составных чисел можно выбрать из чисел от 1 до 100?

9. У царя Дадона в одиночных камерах сидели 100 пленников. Поворот ручки отпирает каждую камеру, следующий поворот запирает, еще один снова отпирает и т.д. К празднику царь решил освободить часть пленников и накануне послал слугу, который повернул ручку на дверях каждой камеры. Все двери оказались отперты. Но тут пришел второй посыльный и повернул ручку каждой второй камеры. Двери камер 2, 4, 6, ... вновь оказались заперты. Следующий посланец повернул ручки камер 3, 6, 9, 12 и т.д. Еще один – в каждой четвертой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ручку сотой камеры. Наконец наступил праздник, и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу. Сколько пленников освободил Дадон?

Делимость.

Натуральное число называется простым, если оно имеет ровно 2 делителя. Натуральное число называется составным, если оно имеет больше 2 делителей. Единственное натуральное число, которое не является ни простым, ни составным – 1.

Основная Теорема Арифметики: *любое натуральное число, большее 1, можно разложить на произведение простых множителей, причем это разложение единственно, если не учитывать порядок следования множителей.*

1. Всегда ли верны следующие утверждения? Да, это кусочек из вступительного теста.

- если a делится на 3, то a^2 делится на 9;
- если a делится на 24 и a делится на 15, то а делится на 360;
- если a^2 делится на 3, то a делится на 3;
- если a^2 делится на 8, то a делится на 4;
- если a^2 делится на 8, то a делится на 8.

2. Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму.

3. 109 яблок разложены по пакетам. В некоторых пакетах лежит по x яблок, в других – по три яблока. Найдите все возможные значения x, если всего пакетов – 20.

4. Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число A?

5. Докажите, что число, имеющее нечётное число делителей, является точным квадратом.

6. Натуральные числа a и b таковы, что $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ – составное число.

7. **(a)** Найдите 5 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится на другое, но квадрат каждого из них делится на каждое из оставшихся чисел. **(b)** Существуют ли 11 натуральных чисел таких, что любые 5 имеют общий делитель, больший 1, а любые 6 – нет?

8. Какое наибольшее количество попарно взаимно простых составных чисел можно выбрать из чисел от 1 до 100?

9. У царя Дадона в одиночных камерах сидели 100 пленников. Поворот ручки отпирает каждую камеру, следующий поворот запирает, еще один снова отпирает и т.д. К празднику царь решил освободить часть пленников и накануне послал слугу, который повернул ручку на дверях каждой камеры. Все двери оказались отперты. Но тут пришел второй посыльный и повернул ручку каждой второй камеры. Двери камер 2, 4, 6, ... вновь оказались заперты. Следующий посланец повернул ручки камер 3, 6, 9, 12 и т.д. Еще один – в каждой четвертой камере. То же повторяли следующие посланцы вплоть до сотого, повернувшего ручку сотой камеры. Наконец наступил праздник, и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу. Сколько пленников освободил Дадон?

Двумя способами.

1. Дан квадрат 9×9 клеток. Его разбили на трёхклеточные «уголки». Возле каждой из 100 вершин клеток написали, сколько «уголков» содержат эту вершину. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?

2. Можно ли расставить по кругу семь целых неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то трёх расположенных подряд чисел была равна 1, каких-то трёх подряд расположенных – 2, … , каких-то трёх подряд расположенных – 7?

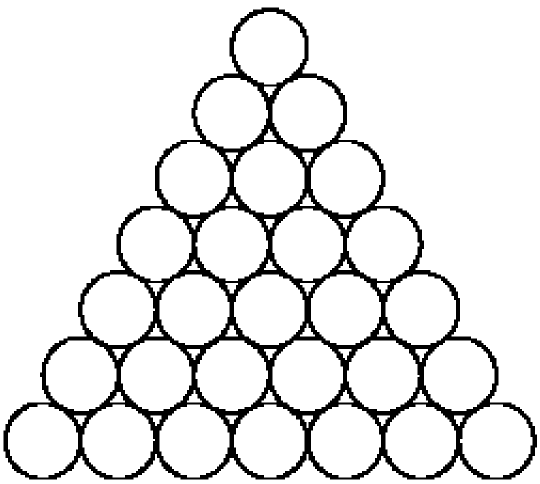
3. Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратиках 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.

4. В банановой республике прошли выборы в парламент, в которых участвовали все жители. Все голосовавшие за партию "Мандарин"любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90 % не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия "Мандарин"на выборах, если ровно 46% жителей любят мандарины?

5. В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трех исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причём за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку – 18 голосов, за Кукушку и Петуха – 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырёх названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону?

6. В таблицу $n \times n$ записаны n^2 чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы таблицы так, что сумма n чисел, расположенных по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, будет неотрицательна.

7. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера (рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.



Двумя способами.

1. Дан квадрат 9×9 клеток. Его разбили на трёхклеточные «уголки». Возле каждой из 100 вершин клеток написали, сколько «уголков» содержат эту вершину. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?

2. Можно ли расставить по кругу семь целых неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то трёх расположенных подряд чисел была равна 1, каких-то трёх подряд расположенных – 2, ... , каких-то трёх подряд расположенных – 7?

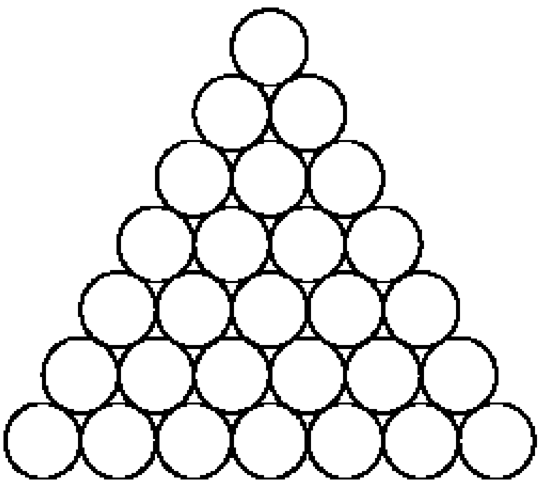
3. Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратиках 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.

4. В банановой республике прошли выборы в парламент, в которых участвовали все жители. Все голосовавшие за партию "Мандарин"любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90 % не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия "Мандарин"на выборах, если ровно 46% жителей любят мандарины?

5. В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трех исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причём за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку – 18 голосов, за Кукушку и Петуха – 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырёх названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону?

6. В таблицу $n \times n$ записаны n^2 чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы таблицы так, что сумма n чисел, расположенных по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, будет неотрицательна.

7. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера (рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.



Соответствия.

1. Что можно разменять большим числом способов: 2 рубля монетами 1, 5, 10 и 50 копеек или 2000 рублей купюрами 10, 50, 100, 500 и 1000 рублей?

2. На окружности отмечено 2000 синих точек и одна красная точка. Чего больше: треугольников с вершинами в синих точках или четырёхугольников, у которых одна вершина красная, а остальные три синие?

3. Хромой король умеет ходить только вверх, вправо и вправо-вверх. Каких путей хромого короля больше: из **a1** в **h8** или из **a1** в **h7**?

4. На двух параллельных прямых отметили точки - на первой 6, на второй 15 и провели все соединяющие их отрезки. Чего получилось больше: четырехугольников с вершинами в этих точках, или точек пересечения проведенных отрезков?

5. 10-значное число назовем хорошим, если знакопеременная сумма его цифр, взятая с последней цифры, больше нуля. Докажите, что хороших чисел меньше, чем $5 \cdot 10^9$.

6. Пусть A – количество способов заполнить числами от 1 до 8 клетки таблицы 7×8 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце все числа были различны. A B – количество способов сделать то же самое в таблице 8×8. Сравните A и B.

7. По кругу расставлены 10 целых чисел с суммой 1. Сколькими способами можно выбрать 5 подряд идущих чисел с положительной суммой?

Соответствия.

1. Что можно разменять большим числом способов: 2 рубля монетами 1, 5, 10 и 50 копеек или 2000 рублей купюрами 10, 50, 100, 500 и 1000 рублей?

2. На окружности отмечено 2000 синих точек и одна красная точка. Чего больше: треугольников с вершинами в синих точках или четырёхугольников, у которых одна вершина красная, а остальные три синие?

3. Хромой король умеет ходить только вверх, вправо и вправо-вверх. Каких путей хромого короля больше: из **a1** в **h8** или из **a1** в **h7**?

4. На двух параллельных прямых отметили точки - на первой 6, на второй 15 и провели все соединяющие их отрезки. Чего получилось больше: четырехугольников с вершинами в этих точках, или точек пересечения проведенных отрезков?

5. 10-значное число назовем хорошим, если знакопеременная сумма его цифр, взятая с последней цифры, больше нуля. Докажите, что хороших чисел меньше, чем $5 \cdot 10^9$.

6. Пусть A – количество способов заполнить числами от 1 до 8 клетки таблицы 7×8 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце все числа были различны. А B – количество способов сделать то же самое в таблице 8×8. Сравните A и B.

7. По кругу расставлены 10 целых чисел с суммой 1. Сколькими способами можно выбрать 5 подряд идущих чисел с положительной суммой?

О пользе схем.

1. **(a)** В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Вова обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр названий этих городов, делится на 3. Назовите все города, в которые можно добраться из города 1.

(b) Та же задача, но города соединены, если из их номеров можно составить число, кратное 7.

(c) Та же задача, но теперь кратное 8.

2. В отряде 10 девочек и 17 мальчиков. Каждый мальчик знает хотя бы 5 девочек, а каждая девочка знает хотя бы 9 мальчиков. Докажите, что можно выстроить живую цепочку, в которой любые два соседа знакомы, между **(a)** Машей и Ириной; **(b)** Мишей и Андреем; **(c)** Катей и Иваном.

3. Можно ли расставить числа $1, 2, \ldots, 8, 9$ по кругу так, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

4. Рассмотрим города России и Белоруссии и только те дороги, которые соединяют русские города с белорусскими. Известно, что из каждого русского города можно проехать в любой русский, а их каждого белорусского города – в любой белорусский. Докажите, что тогда из любого русского города можно проехать в любой белорусский.

5. В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

6. В приходе графства Липшир 20 усадеб. И в этом приходе любые две дороги имеют общий конец. Докажите, что найдутся 18 усадеб, никакие две из которых не соединены дорогой.

7. В стране 5 республик, в каждой по нескольку городов. Некоторые пары городов связаны двусторонними авиарейсами, причём из каждого города каждой республики можно напрямую попасть хотя бы в один город каждой из остальных республик. Докажите, что в этой стране есть циклический маршрут, проходящий не более одного раза через каждый город, длина которого делится на 5

8. В М6 приехали 54 ребенка. Среди любых трех какие-то двое знают друг друга. Докажите, что кто-то знает хотя бы 26 других лмшат.

О пользе схем.

1. **(a)** В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Вова обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр названий этих городов, делится на 3. Назовите все города, в которые можно добраться из города 1.

(b) Та же задача, но города соединены, если из их номеров можно составить число, кратное 7.

(c) Та же задача, но теперь кратное 8.

2. В отряде 10 девочек и 17 мальчиков. Каждый мальчик знает хотя бы 5 девочек, а каждая девочка знает хотя бы 9 мальчиков. Докажите, что можно выстроить живую цепочку, в которой любые два соседа знакомы, между **(a)** Машей и Ириной; **(b)** Мишей и Андреем; **(c)** Катей и Иваном.

3. Можно ли расставить числа $1, 2, \ldots, 8, 9$ по кругу так, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

4. Рассмотрим города России и Белоруссии и только те дороги, которые соединяют русские города с белорусскими. Известно, что из каждого русского города можно проехать в любой русский, а их каждого белорусского города – в любой белорусский. Докажите, что тогда из любого русского города можно проехать в любой белорусский.

5. В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

6. В приходе графства Липшир 20 усадеб. И в этом приходе любые две дороги имеют общий конец. Докажите, что найдутся 18 усадеб, никакие две из которых не соединены дорогой.

7. В стране 5 республик, в каждой по нескольку городов. Некоторые пары городов связаны двусторонними авиарейсами, причём из каждого города каждой республики можно напрямую попасть хотя бы в один город каждой из остальных республик. Докажите, что в этой стране есть циклический маршрут, проходящий не более одного раза через каждый город, длина которого делится на 5

8. В М6 приехали 54 ребенка. Среди любых трех какие-то двое знают друг друга. Докажите, что кто-то знает хотя бы 26 других лмшат.

Цифромания.

1. Вася со своим другом Петей ехали на кружок на трамвае, и купили у кондуктора два последовательных билетика (номер каждого билетика – шестизначное число). Петя заметил, что сумма цифр его билета делится на 7. Вася посмотрел на свой билетик и закричал, что и у него сумма цифр тоже делится на 7. Могло ли такое случиться?

2. Существует ли трехзначное число, у которого цифры слева направо идут в порядке возрастания, а если его умножить на 3, то у результата цифры идут в порядке убывания?

3. Трехзначное число, не заканчивающееся на 0, перевернули, а затем посчитали разность двух этих чисел. Докажите, что результат делится на 99.

4. В трехзначном числе число единиц и десятков совпадает. Докажите, что если из него вычесть удвоенную сумму цифр, то полученное число нацело разделится на 7.

5. У некоторого числа зачеркнули последнюю цифру и сложили с исходным, получив в сумме 2018. Найдите все такие числа.

6. Шестизначное число кратно 7. Докажите, что если его последнюю цифру переставить в начало, то полученное число тоже кратно 7.

7. Можно ли составить из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать сколько угодно раз) два числа, одно из которых в 2019 раз больше другого?

8. В числе A цифры идут в строго возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9 \cdot A$?

Цифромания.

1. Вася со своим другом Петей ехали на кружок на трамвае, и купили у кондуктора два последовательных билетика (номер каждого билетика – шестизначное число). Петя заметил, что сумма цифр его билета делится на 7. Вася посмотрел на свой билетик и закричал, что и у него сумма цифр тоже делится на 7. Могло ли такое случиться?

2. Существует ли трехзначное число, у которого цифры слева направо идут в порядке возрастания, а если его умножить на 3, то у результата цифры идут в порядке убывания?

3. Трехзначное число, не заканчивающееся на 0, перевернули, а затем посчитали разность двух этих чисел. Докажите, что результат делится на 99.

4. В трехзначном числе число единиц и десятков совпадает. Докажите, что если из него вычесть удвоенную сумму цифр, то полученное число нацело разделится на 7.

5. У некоторого числа зачеркнули последнюю цифру и сложили с исходным, получив в сумме 2018. Найдите все такие числа.

6. Шестизначное число кратно 7. Докажите, что если его последнюю цифру переставить в начало, то полученное число тоже кратно 7.

7. Можно ли составить из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать сколько угодно раз) два числа, одно из которых в 2019 раз больше другого?

8. В числе A цифры идут в строго возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9 \cdot A$?

Противное в геометрии.

1. Из точки на плоскости проведены семь несовпадающих лучей. Докажите, что среди углов, образованных соседними лучами, найдется угол, величина которого больше 51 градуса.

2. Можно ли нарисовать 100 различных 200-угольников, у которых все вершины общие, но при этом ни у каких двух нет ни одной общей стороны?

3. Может ли прямая пересекать **(a)** 42; **(b)** 43 стороны стороны 43-угольника?

4. В квадратном коврике со стороной 1 метр моль проела 101 дырку. Докажите, что какие-то пять из них можно накрыть заплаткой в форме квадрата со стороной 20 см.

5. В плоскости отмечена 101 точка, не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек красным карандашом проводится прямая. Докажите, что на плоскости существует точка, через которую проходит не меньше 11 красных прямых.

6. Квадрат разрезали 10 прямыми, из которых пять параллельны одной стороне квадрата, а пять – другой, на 36 прямоугольников. Оказалось, что ровно пять из них – квадраты. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных между собой.

7. Все узлы клетчатого квадрата 4×4 покрашены в два цвета. Докажите, что найдется прямоугольник с одноцветными вершинами.

Противное в геометрии.

1. Из точки на плоскости проведены семь несовпадающих лучей. Докажите, что среди углов, образованных соседними лучами, найдется угол, величина которого больше 51 градуса.

2. Можно ли нарисовать 100 различных 200-угольников, у которых все вершины общие, но при этом ни у каких двух нет ни одной общей стороны?

3. Может ли прямая пересекать **(a)** 42; **(b)** 43 стороны стороны 43-угольника?

4. В квадратном коврике со стороной 1 метр моль проела 101 дырку. Докажите, что какие-то пять из них можно накрыть заплаткой в форме квадрата со стороной 20 см.

5. В плоскости отмечена 101 точка, не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек красным карандашом проводится прямая. Докажите, что на плоскости существует точка, через которую проходит не меньше 11 красных прямых.

6. Квадрат разрезали 10 прямыми, из которых пять параллельны одной стороне квадрата, а пять – другой, на 36 прямоугольников. Оказалось, что ровно пять из них – квадраты. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных между собой.

7. Все узлы клетчатого квадрата 4×4 покрашены в два цвета. Докажите, что найдется прямоугольник с одноцветными вершинами.

Призраки делимости.

1. К числу 19 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 12. Укажите все варианты.

2. В справочнике «Магия для чайников» написано: Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение. Возможно ли таким образом устроить землетрясение?

3. Можно ли выписать **(a)** девять **(b)** восемь **(c)** семь различных цифр подряд так, чтобы получившееся число делилось на каждую свою цифру?

4. На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым?

5. А — шестизначное число, в записи которого по одному разу встречаются цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Докажите, что А не делится на 11.

6. Может ли степень двойки оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами?

7. Алиса выписала 18 последовательных трёхзначных чисел. Докажите, что Камиля сможет найти среди них хотя бы одно, которое делится на сумму своих цифр.

8. Известно, что натуральное число n в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что n делится на 27.

Призраки делимости.

1. К числу 19 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 12. Укажите все варианты.

2. В справочнике «Магия для чайников» написано: Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение. Возможно ли таким образом устроить землетрясение?

3. Можно ли выписать **(a)** девять **(b)** восемь **(c)** семь различных цифр подряд так, чтобы получившееся число делилось на каждую свою цифру?

4. На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым?

5. А — шестизначное число, в записи которого по одному разу встречаются цифры $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Докажите, что А не делится на 11.

6. Может ли степень двойки оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами?

7. Алиса выписала 18 последовательных трёхзначных чисел. Докажите, что Камиля сможет найти среди них хотя бы одно, которое делится на сумму своих цифр.

8. Известно, что натуральное число n в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что n делится на 27.

Еще про делимость

1. Из утверждений «число a делится на 2», «число a делится на 6», «число a делится на 18» и «число a делится на 36» три верных, а одно неверное. Какое?

2. Когда Илье исполнилось 13 лет, его папе было 39. Поскольку возраст папы делился нацело на возраст Ильи, Илья решил, что такие дни рождения будет считать забавными. Сколько всего забавных дней рождения было и будет у Ильи?

3. Дети, построенные парами, выходят из лесу, где они собирали обработанные от клещей ягоды. В каждой паре идут мальчик и девочка, причем у мальчика ягод либо вдвое больше, либо вдвое меньше, чем у девочки. Могло ли так случиться, что у всех вместе 1001 ягода?

4. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится **(a)** на 30; **(b)** на 120.

5. Иосиф Львович написал на доске двузначное число и спросил Диму по очереди, делится ли оно на 2? на 3? на 4? … на 9? На все восемь вопросов Дима ответил верно, причём ответов «да» и «нет» было поровну. Можете ли вы теперь ответить верно хотя бы на один из вопросов преподавателя, не зная самого числа?

6. Сумма двух натуральных чисел равна 201. Докажите, что произведение этих чисел не может делиться на 201.

7. Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1.

(a) Получите из числа 17 число 29.

(b) Как получить из любого числа, большего 1, любое двугое, большее 1?

8. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из этих чисел делится на 5.

Факториальная добавка для тех, кто решил всё предыдущее

9. Докажите, что существует 100 подряд идущих составных чисел.

10. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Еще про делимость

1. Из утверждений «число а делится на 2», «число а делится на 6», «число а делится на 18» и «число а делится на 36» три верных, а одно неверное. Какое?

2. Когда Илье исполнилось 13 лет, его папе было 39. Поскольку возраст папы делился нацело на возраст Ильи, Илья решил, что такие дни рождения будет считать забавными. Сколько всего забавных дней рождения было и будет у Ильи?

3. Дети, построенные парами, выходят из лесу, где они собирали обработанные от клещей ягоды. В каждой паре идут мальчик и девочка, причем у мальчика ягод либо вдвое больше, либо вдвое меньше, чем у девочки. Могло ли так случиться, что у всех вместе 1001 ягода?

4. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится **(a)** на 30; **(b)** на 120.

5. Иосиф Львович написал на доске двузначное число и спросил Диму по очереди, делится ли оно на 2? на 3? на 4? ... на 9? На все восемь вопросов Дима ответил верно, причём ответов «да» и «нет» было поровну. Можете ли вы теперь ответить верно хотя бы на один из вопросов преподавателя, не зная самого числа?

6. Сумма двух натуральных чисел равна 201. Докажите, что произведение этих чисел не может делиться на 201.

7. Саша пишет на доске последовательность натуральных чисел. Первое число написано заранее. Новые натуральные числа он получает так: вычитает из последнего записанного числа или прибавляет к нему любой его делитель, больший 1.

(a) Получите из числа 17 число 29.

(b) Как получить из любого числа, большего 1, любое двугое, большее 1?

8. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из этих чисел делится на 5.

Факториальная добавка для тех, кто решил всё предыдущее

9. Докажите, что существует 100 подряд идущих составных чисел.

10. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Комбинаторика в несколько действий.

Группируй.

1. Сколькими способами можно поставить на доску двух бьющих друг друга белых королей?

2. Назовем девятизначное число хорошим, если в нем можно переставить одну цифру на другое место и получить девятизначное число, в котором цифры идут строго по возрастанию. Сколько всего хороших чисел?

Дополняй.

3. У скольких четырехзначных чисел в записи есть одна или несколько цифр, кратных 3?

4. На доске нарисована полоска 1×10. **(a)** Сколькими способами клетки полоски можно покрасить в белый и жёлтый цвета так, чтобы оба цвета были использованы? **(b)** Сколькими способами можно клетки полоски покрасить в красный, жёлтый и зелёный цвета так, чтобы все три цвета были использованы?

Пересекай.

5. Сколько чисел от 1 до 1000000 делятся на 646, но не делятся на 255?

6. Куб со стороной 100 разбит на 1000000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 100 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число n. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 100 \times 100$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.

Размышляй.

7. Сколькими способами можно выстроить в ряд группу из 10 людей, если Петя и Вася не должны стоять рядом?

8. Сколькими способами можно раскрасить клетки полоски $1 \times 3n$ в три цвета так, чтобы всех цветов было поровну? (Полоска нарисована на доске.)

9. Сколькими способами можно расставить числа от 1 до 20 в таблице 2×10 так, чтобы любые два числа, различающиеся на 1, всегда попадали бы в клетки с общей стороной?

Комбинаторика в несколько действий.

Группируй.

1. Сколькими способами можно поставить на доску двух бьющих друг друга белых королей?

2. Назовем девятизначное число хорошим, если в нем можно переставить одну цифру на другое место и получить девятизначное число, в котором цифры идут строго по возрастанию. Сколько всего хороших чисел?

Дополняй.

3. У скольких четырехзначных чисел в записи есть одна или несколько цифр, кратных 3?

4. На доске нарисована полоска 1×10. **(a)** Сколькими способами клетки полоски можно покрасить в белый и жёлтый цвета так, чтобы оба цвета были использованы? **(b)** Сколькими способами можно клетки полоски покрасить в красный, жёлтый и зелёный цвета так, чтобы все три цвета были использованы?

Пересекай.

5. Сколько чисел от 1 до 1000000 делятся на 646, но не делятся на 255?

6. Куб со стороной 100 разбит на 1000000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 100 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число n. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 100 \times 100$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.

Размышляй.

7. Сколькими способами можно выстроить в ряд группу из 10 людей, если Петя и Вася не должны стоять рядом?

8. Сколькими способами можно раскрасить клетки полоски $1 \times 3n$ в три цвета так, чтобы всех цветов было поровну? (Полоска нарисована на доске.)

9. Сколькими способами можно расставить числа от 1 до 20 в таблице 2×10 так, чтобы любые два числа, различающиеся на 1, всегда попадали бы в клетки с общей стороной?

Полезные игры

1. В нижнем левом углу шахматной доски стоит конь. За ход разрешено его двигать на две клетки вверх и затем на одну по горизонтали, или на две клетки вправо и затем на одну клетку по вертикали. Может ли эта игра никогда не закончится?

2. У ромашки **(a)** 12 лепестков; **(b)** 11 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Как действовать второму игроку, чтобы выиграть независимо от ходов первого игрока?

3. Дан прямоугольный параллелепипед размерами **(a)** $4\times4\times4$; **(b)** $4\times4\times3$; **(c)** $4\times3\times3$, составленный из единичных кубиков. За ход разрешается проткнуть спицей любой ряд, если в нем есть хотя бы один непроткнутый кубик. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

4. Двое играют в такую игру. В начале по кругу стоят числа $1, 2, 3, 4$. Каждым своим ходом первый прибавляет к двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первый выигрывает, если все числа станут равными. Может ли второй ему помешать?

5. В одной куче 18 конфет, а в другой — 23. Двое играют в игру: одним ходом можно съесть одну кучу конфет, а другую разделить на две кучи. Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход, т.е. перед ходом которого имеются две кучи из одной конфеты.

6. Король стоит на поле $a1$ шахматной доски. За ход разрешается сдвинуть его на одну клетку вправо, или на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля на клетку $h8$. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000.

8. Двое по очереди закрашивают клетки таблицы 8×8. Первый закрашивает трехклетчатый уголок, а второй фигурку в виде буквы Т из 4 клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Полезные игры

1. В нижнем левом углу шахматной доски стоит конь. За ход разрешено его двигать на две клетки вверх и затем на одну по горизонтали, или на две клетки вправо и затем на одну клетку по вертикали. Может ли эта игра никогда не закончится?

2. У ромашки **(a)** 12 лепестков; **(b)** 11 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Как действовать второму игроку, чтобы выиграть независимо от ходов первого игрока?

3. Дан прямоугольный параллелепипед размерами **(a)** $4\times4\times4$; **(b)** $4\times4\times3$; **(c)** $4\times3\times3$, составленный из единичных кубиков. За ход разрешается проткнуть спицей любой ряд, если в нем есть хотя бы один непроткнутый кубик. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

4. Двое играют в такую игру. В начале по кругу стоят числа $1, 2, 3, 4$. Каждым своим ходом первый прибавляет к двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первый выигрывает, если все числа станут равными. Может ли второй ему помешать?

5. В одной куче 18 конфет, а в другой — 23. Двое играют в игру: одним ходом можно съесть одну кучу конфет, а другую разделить на две кучи. Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход, т.е. перед ходом которого имеются две кучи из одной конфеты.

6. Король стоит на поле $a1$ шахматной доски. За ход разрешается сдвинуть его на одну клетку вправо, или на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля на клетку $h8$. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000.

8. Двое по очереди закрашивают клетки таблицы 8×8. Первый закрашивает трехклетчатый уголок, а второй фигурку в виде буквы Т из 4 клеток. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Матбой.

1. В ряд лежит $n > 2$ горошин. Двое по очереди забирают по одной горошине до тех пор, пока не останется только две. Первый стремится сделать так, чтобы последние две горошины были как можно ближе, а второй стремится ему помешать. На каком расстоянии в конце игры окажутся горошины?

2. Саша склеил из одинаковых кубиков параллелепипед и окрасил его снаружи. Оказалось, что ровно половина всех граней кубиков окрашена. Сколько кубиков мог использовать Саша?

3. Семеро ребят задумали по трёхзначному числу. Затем каждые двое сыграли в такую игру: они сравнили первые цифры своих чисел, и тот, у кого цифра больше, дал другому столько щелчков, на сколько больше его цифра; потом проделали то же самое со вторыми и третьими цифрами. Могло ли случиться так, что всего они пробили 217 щелчков?

4. Можно ли замостить плоскость равными 100-угольниками?

5. Семь школьников решили за воскресенье обойти семь кинотеатров. Во всех них сеансы начинаются в 9.00, 10.40, 12.20, 14.00, 15.40, 17.20, 19.00 и 20.40 (8 сеансов). На каждый сеанс шестеро шли вместе, а кто-нибудь один (не обязательно один и тот же) шел в другой кинотеатр. К вечеру каждый побывал в каждом кинотеатре. Докажите, что в каждом кинотеатре был сеанс, на котором не был ни один из этих школьников.

6. В Вишкиле живет больше 100 человек. Житель Вишкиля называется общительным, если у него не менее 100 знакомых. Докажите, что есть либо двое общительных, знакомых между собой, либо двое необщительных, не знакомых между собой.

7. Каждый лмшонок ходит хотя бы в один из 30 клубов, но не более чем в два из них. Оказалось, что в каждом клубе занимается ровно 30 человек, а для каждых двух клубов есть лмшонок, который посещает оба эти клуба. Какое наибольшее количество учеников может быть в ЛМШ?

8. У Кролика есть 9 горшков меда весом 1, 2, 3, ..., 9 кг (на каждом горшке написан его вес), причем на дно одного из горшков ему подложили кусочек сыра весом 1 кг. Как Винни-Пуху при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти горшок с сыром?

Матбой.

1. В ряд лежит $n > 2$ горошин. Двое по очереди забирают по одной горошине до тех пор, пока не останется только две. Первый стремится сделать так, чтобы последние две горошины были как можно ближе, а второй стремится ему помешать. На каком расстоянии в конце игры окажутся горошины?

2. Саша склеил из одинаковых кубиков параллелепипед и окрасил его снаружи. Оказалось, что ровно половина всех граней кубиков окрашена. Сколько кубиков мог использовать Саша?

3. Семеро ребят задумали по трёхзначному числу. Затем каждые двое сыграли в такую игру: они сравнили первые цифры своих чисел, и тот, у кого цифра больше, дал другому столько щелчков, на сколько больше его цифра; потом проделали то же самое со вторыми и третьими цифрами. Могло ли случиться так, что всего они пробили 217 щелчков?

4. Можно ли замостить плоскость равными 100-угольниками?

5. Семь школьников решили за воскресенье обойти семь кинотеатров. Во всех них сеансы начинаются в 9.00, 10.40, 12.20, 14.00, 15.40, 17.20, 19.00 и 20.40 (8 сеансов). На каждый сеанс шестеро шли вместе, а кто-нибудь один (не обязательно один и тот же) шел в другой кинотеатр. К вечеру каждый побывал в каждом кинотеатре. Докажите, что в каждом кинотеатре был сеанс, на котором не был ни один из этих школьников.

6. В Вишкиле живет больше 100 человек. Житель Вишкиля называется общительным, если у него не менее 100 знакомых. Докажите, что есть либо двое общительных, знакомых между собой, либо двое необщительных, не знакомых между собой.

7. Каждый лмшонок ходит хотя бы в один из 30 клубов, но не более чем в два из них. Оказалось, что в каждом клубе занимается ровно 30 человек, а для каждых двух клубов есть лмшонок, который посещает оба эти клуба. Какое наибольшее количество учеников может быть в ЛМШ?

8. У Кролика есть 9 горшков меда весом 1, 2, 3, ..., 9 кг (на каждом горшке написан его вес), причем на дно одного из горшков ему подложили кусочек сыра весом 1 кг. Как Винни-Пуху при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти горшок с сыром?

Периметры и площади.

1. Квадрат разрезали пополам и сложили из получившихся прямоугольников букву Т (без наложений). Найдите сторону квадрата, если периметр получившейся фигуры равен 120 см.

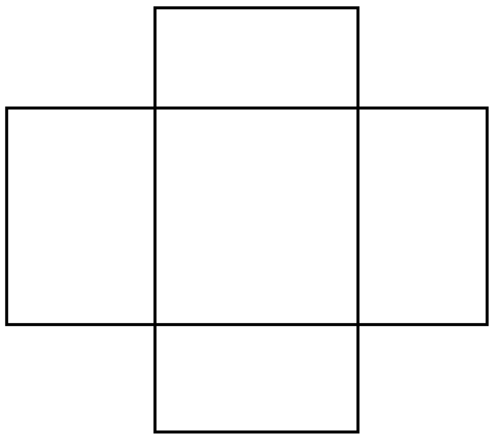
2. Шахматную доску разрезали по границам клеток на 10 прямоугольников. Докажите, что среди них найдётся пара прямоугольников одинакового периметра.

3. Большой прямоугольник разрезали на 4 меньших прямоугольника двумя перпендикулярными разрезами. Периметры трех из них равны 3 см, 4 см и 5 см. Чему может быть равен периметр исходного прямоугольника?

4. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали на 18 прямоугольников. Один из них отложили, а из остальных составили квадрат 10×10. Найдите размеры отложенного прямоугольника.

5. **(a)** На какое наименьшее число прямоугольников одинакового периметра можно по границам клеток разрезать шахматную доску, если известно, что среди них дожна найтись пара неравных прямоугольников. **(b)** А наибольшее?

6. Мальчик нарисовал два пересекающихся прямоугольника в форме креста. Другой мальчик заметил, что получилось пять прямоугольников одинаковой площади. Докажите, что эти пять прямоугольников имеют равные периметры.



7. Клетчатый квадрат 17×17 разрезали на несколько прямоугольников по границам клеток. Докажите, что среди них найдется прямоугольник, периметр которого кратен 4.

8. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали по границам клеток на 18 прямоугольников. Один из них отложили в сторону, а из остальных составили прямоугольник с периметром 234. Найдите размеры отложенного прямоугольника.

Периметры и площади.

1. Квадрат разрезали пополам и сложили из получившихся прямоугольников букву Т (без наложений). Найдите сторону квадрата, если периметр получившейся фигуры равен 120 см.

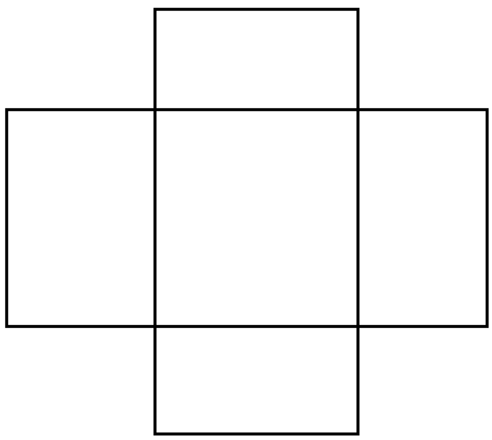
2. Шахматную доску разрезали по границам клеток на 10 прямоугольников. Докажите, что среди них найдётся пара прямоугольников одинакового периметра.

3. Большой прямоугольник разрезали на 4 меньших прямоугольника двумя перпендикулярными разрезами. Периметры трех из них равны 3 см, 4 см и 5 см. Чему может быть равен периметр исходного прямоугольника?

4. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали на 18 прямоугольников. Один из них отложили, а из остальных составили квадрат 10×10. Найдите размеры отложенного прямоугольника.

5. **(a)** На какое наименьшее число прямоугольников одинакового периметра можно по границам клеток разрезать шахматную доску, если известно, что среди них дожна найтись пара неравных прямоугольников. **(b)** А наибольшее?

6. Мальчик нарисовал два пересекающихся прямоугольника в форме креста. Другой мальчик заметил, что получилось пять прямоугольников одинаковой площади. Докажите, что эти пять прямоугольников имеют равные периметры.



7. Клетчатый квадрат 17×17 разрезали на несколько прямоугольников по границам клеток. Докажите, что среди них найдется прямоугольник, периметр которого кратен 4.

8. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали по границам клеток на 18 прямоугольников. Один из них отложили в сторону, а из остальных составили прямоугольник с периметром 234. Найдите размеры отложенного прямоугольника.

Принцип крайнего

1. Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить?

2. (a) По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не меньше одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.

(b) По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

3. Шахматная доска разбита на доминошки. Докажите, что какие-то две доминошки образуют квадрат.

4. В стране есть несколько городов и несколько дорог с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через остальные. При этом, какие бы два города ни взять, хотя бы из одного из них можно проехать в другой, не нарушая правил движения. Докажите, что найдется город, из которого можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.

5. На шахматной доске стоят несколько ладей. Обязательно ли найдется ладья, бьющая не более **(a)** трех **(b)** двух других? (Перепрыгивать через другие фигуры ладья не может.)

6. На ветках деревьев сидят 55 мартышек. Все расстояния между парами мартышек различны. Каждая мартышка кинула банан ближайшей соседке. Докажите, что какая-то мартышка осталась без банана.

7. Пусть сначала банан есть только у какой-то одной мартышки, и она бросает его самой дальней от себя. Та тоже бросает самой дальней и так далее, и так далее... Докажите, что если банан не вернулся сразу же к первой мартышке, он уже никогда к ней не вернется.

Принцип крайнего

1. Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить?

2. **(a)** По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не меньше одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.

(b) По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

3. Шахматная доска разбита на доминошки. Докажите, что какие-то две доминошки образуют квадрат.

4. В стране есть несколько городов и несколько дорог с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через остальные. При этом, какие бы два города ни взять, хотя бы из одного из них можно проехать в другой, не нарушая правил движения. Докажите, что найдется город, из которого можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.

5. На шахматной доске стоят несколько ладей. Обязательно ли найдется ладья, бьющая не более **(a)** трех **(b)** двух других? (Перепрыгивать через другие фигуры ладья не может.)

6. На ветках деревьев сидят 55 мартышек. Все расстояния между парами мартышек различны. Каждая мартышка кинула банан ближайшей соседке. Докажите, что какая-то мартышка осталась без банана.

7. Пусть сначала банан есть только у какой-то одной мартышки, и она бросает его самой дальней от себя. Та тоже бросает самой дальней и так далее, и так далее... Докажите, что если банан не вернулся сразу же к первой мартышке, он уже никогда к ней не вернется.

Количество делителей.

В этом листке мы рассматриваем только натуральные делители чисел.

Идея 1. Количество делителей числа легко вычислить, если знать его разложение на простые множители.

Идея 2. Делители числа иногда полезно разбивать на пары.

1. Чему равно количество делителей числа: **(a)** 101; **(b)** 12; **(c)** 1001; **(d)** $p_1^4 p_2^2 p_3$; **(e)** $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$?

2. У числа A^2 99 делителей. Сколько может быть делителей у числа A?

3. У натурального числа A ровно 100 различных делителей (включая 1 и A). Найдите их произведение.

4. Каких делителей у числа 900900 больше

(a) однозначных или шестизначных?

(b) больших 1000 или меньших 1000?

5. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 300, имеют ровно 9 различных делителей?

6. Натуральное число делится на 11, но не делится на 121. Докажите, что сумма всех его натуральных делителей делится на 3.

7. У натурального числа ровно 73 различных делителя. Докажите, что оно больше, чем 10^{21}.

8. Найдите все натуральные числа, делящиеся на 30 и имеющие ровно 30 различных делителей.

9. Число a меньше миллиона. Докажите, что у него не более 2 тысяч натуральных делителей.

Количество делителей.

В этом листке мы рассматриваем только натуральные делители чисел.

Идея 1. Количество делителей числа легко вычислить, если знать его разложение на простые множители.

Идея 2. Делители числа иногда полезно разбивать на пары.

1. Чему равно количество делителей числа: **(a)** 101; **(b)** 12; **(c)** 1001; **(d)** $p_1^4 p_2^2 p_3$; **(e)** $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$?

2. У числа A^2 99 делителей. Сколько может быть делителей у числа A?

3. У натурального числа A ровно 100 различных делителей (включая 1 и A). Найдите их произведение.

4. Каких делителей у числа 900900 больше

(a) однозначных или шестизначных?

(b) больших 1000 или меньших 1000?

5. Сколько натуральных чисел, не превосходящих 300, имеют ровно 9 различных делителей?

6. Натуральное число делится на 11, но не делится на 121. Докажите, что сумма всех его натуральных делителей делится на 3.

7. У натурального числа ровно 73 различных делителя. Докажите, что оно больше, чем 10^{21}.

8. Найдите все натуральные числа, делящиеся на 30 и имеющие ровно 30 различных делителей.

9. Число a меньше миллиона. Докажите, что у него не более 2 тысяч натуральных делителей.

Кривое зеркало

1. Обрывок листа бумаги не имеет ни одного ровного края. Как без циркуля и линейки получить на нем прямой угол?

2. Тетрамино — это многоугольник, вырезанный из клетчатой бумаги и состоящий из 4 целых клеток. Сколько существует различных тетрамино?

3. Можно ли так сложить обычный лист бумаги, чтобы одним прямолинейным разрезом сделать в нем квадратную дыру?

4. На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

5. Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам ещё раз. Получившийся квадратик разрезали ножницами (по прямой). Могла ли салфетка распасться **(a)** на 2 части? **(b)** на 3 части? **(c)** на 4 части? **(d)** на 5 частей?

6. На прямоугольном торте лежит круглая шоколадка. Как разрезать торт на две равные части так, чтобы и шоколадка тоже разделилась ровно пополам?

7. Двое играют на доске 19×94 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

8. На столе лежит по одной монете достоинством $2, 5, 10, 25$ и 50 тугриков. У игроков имеется запас монет по $1, 2, 5, 10$ и 25 тугриков. Ходят по очереди. За ход можно разменять одну из монет, лежащих на столе, на монеты меньшего достоинства. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход.

9. Имеются две кучи камней: в одной 5, в другой 7. Двое играющих берут по очереди камни. Разрешается взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Кривое зеркало

1. Обрывок листа бумаги не имеет ни одного ровного края. Как без циркуля и линейки получить на нем прямой угол?

2. Тетрамино — это многоугольник, вырезанный из клетчатой бумаги и состоящий из 4 целых клеток. Сколько существует различных тетрамино?

3. Можно ли так сложить обычный лист бумаги, чтобы одним прямолинейным разрезом сделать в нем квадратную дыру?

4. На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

5. Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам ещё раз. Получившийся квадратик разрезали ножницами (по прямой). Могла ли салфетка распасться **(a)** на 2 части? **(b)** на 3 части? **(c)** на 4 части? **(d)** на 5 частей?

6. На прямоугольном торте лежит круглая шоколадка. Как разрезать торт на две равные части так, чтобы и шоколадка тоже разделилась ровно пополам?

7. Двое играют на доске 19×94 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

8. На столе лежит по одной монете достоинством $2, 5, 10, 25$ и 50 тугриков. У игроков имеется запас монет по $1, 2, 5, 10$ и 25 тугриков. Ходят по очереди. За ход можно разменять одну из монет, лежащих на столе, на монеты меньшего достоинства. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход.

9. Имеются две кучи камней: в одной 5, в другой 7. Двое играющих берут по очереди камни. Разрешается взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Графы наносят ответный удар.

Определение. Назовем графом множество вершин, некоторые пары из которых соединены ребрами.

Замечание. Вершина может быть не соединена ни с какой другой вершиной ребром. Любое ребро начинается и заканчивается вершиной. Две вершины могут соединяться несколькими рёбрами.

1. В государстве 50 городов. Из каждого города выходит 7 дорог. Сколько всего дорог в этом государстве?

Теорема. Число ребер в графе равно половине от суммы степеней вершин.

2. В государстве от каждого города выходит по 3 дороги. Может ли в нём быть 100 дорог?

3. На пару пришло 17 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на паре мальчиков, а каждый мальчик ровно с пятью девочками?

4. На следующую пару тоже пришло 17 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на паре, а каждый мальчик ровно с пятью?

5. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

Лемма о рукопожатиях. В любом графе число нечётных вершин чётно.

6. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от каждого города можно добраться до любого другого.

7. **(a)** Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики – с одним и тем же числом девочек? **(b)** А если девочек 10, а мальчиков 9?

8. В стране несколько мегаполисов (из которых выходит по 43 дороги) и несколько провинциальных городов (из которых выходит по 4 дороги). Докажите, что из любого мегаполиса можно проехать в некоторый другой мегаполис.

9. В лагере проводят интернет. Два инженера за ход могут соединить два компьютера проводом. Как только все компьютеры объединяются в сеть, она перегружается, и инженер, который проложил последний провод, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре, если в лагере 43 компьютера?

Графы наносят ответный удар.

Определение. Назовем графом множество вершин, некоторые пары из которых соединены ребрами.

Замечание. Вершина может быть не соединена ни с какой другой вершиной ребром. Любое ребро начинается и заканчивается вершиной. Две вершины могут соединяться несколькими рёбрами.

1. В государстве 50 городов. Из каждого города выходит 7 дорог. Сколько всего дорог в этом государстве?

Теорема. Число ребер в графе равно половине от суммы степеней вершин.

2. В государстве от каждого города выходит по 3 дороги. Может ли в нём быть 100 дорог?

3. На пару пришло 17 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на паре мальчиков, а каждый мальчик ровно с пятью девочками?

4. На следующую пару тоже пришло 17 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с тремя из присутствующих на паре, а каждый мальчик ровно с пятью?

5. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?

Лемма о рукопожатиях. В любом графе число нечётных вершин чётно.

6. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от каждого города можно добраться до любого другого.

7. **(a)** Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики – с одним и тем же числом девочек? **(b)** А если девочек 10, а мальчиков 9?

8. В стране несколько мегаполисов (из которых выходит по 43 дороги) и несколько провинциальных городов (из которых выходит по 4 дороги). Докажите, что из любого мегаполиса можно проехать в некоторый другой мегаполис.

9. В лагере проводят интернет. Два инженера за ход могут соединить два компьютера проводом. Как только все компьютеры объединяются в сеть, она перегружается, и инженер, который проложил последний провод, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре, если в лагере 43 компьютера?

Деление с остатком

Определение. Целое число a делится на натуральное число b, если существует такое целое число k, что $a = bk$.

Говорят, что a *делится на* b *с остатком* r, если $a = bk + r$, причем $0 \leqslant r < b$.

1. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m.

2. Число а дает остаток 3 при делении на 5 и остаток 2 при делении на 3. Какой остаток оно может давать при делении на **(a)** 15 **(b)** 30?

3. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.

4. Миша задумал натуральное число и нашел его остатки от деления на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

5. Катя и Марина делят одно и то же натуральное число с остатком. Катя делит его на 8, а Марина на 9. Частное, которое получила Катя, и остаток, который получила Марина, в сумме дают 13. Какой остаток получился у Кати?

6. В ряд записаны 10 натуральных чисел. Докажите, что можно выбрать группу из одного или нескольких чисел подряд так, чтобы сумма делилась **(a)** на 3 **(b)** на 4.

7. В ряд записаны 11 натуральных чисел. Докажите, что можно выбрать

(a) две группы из подряд идущих чисел так, чтобы они начинались с первого числа, и чтобы суммы чисел в обеих группах оканчивались на одну и ту же цифру.

(b) группу из одного или нескольких чисел подряд так, чтобы сумма оканчивалась на 0.

Деление с остатком

Определение. Целое число a делится на натуральное число b, если существует такое целое число k, что $a = bk$.

Говорят, что a *делится на* b *с остатком* r, если $a = bk + r$, причем $0 \leqslant r < b$.

1. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m.

2. Число a дает остаток 3 при делении на 5 и остаток 2 при делении на 3. Какой остаток оно может давать при делении на **(a)** 15 **(b)** 30?

3. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.

4. Миша задумал натуральное число и нашел его остатки от деления на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

5. Катя и Марина делят одно и то же натуральное число с остатком. Катя делит его на 8, а Марина на 9. Частное, которое получила Катя, и остаток, который получила Марина, в сумме дают 13. Какой остаток получился у Кати?

6. В ряд записаны 10 натуральных чисел. Докажите, что можно выбрать группу из одного или нескольких чисел подряд так, чтобы сумма делилась **(a)** на 3 **(b)** на 4.

7. В ряд записаны 11 натуральных чисел. Докажите, что можно выбрать

(a) две группы из подряд идущих чисел так, чтобы они начинались с первого числа, и чтобы суммы чисел в обеих группах оканчивались на одну и ту же цифру.

(b) группу из одного или нескольких чисел подряд так, чтобы сумма оканчивалась на 0.

Внутренний матбой

1. Назовём число парным, если оно раскладывается в произведение двух простых чисел, возможно совпадающих. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могут быть парными?

2. Пусть a и b — натуральные числа. Есть четыре утверждения, ровно одно из них неверно:

- $a+1$ делится на b;
- a равно $2b+5$;
- $a+b$ делится на 3;
- $a+7b$ простое;

Найдите все возможные пары (a, b).

3. В квадрате 5×5 закрашено 16 клеток. Докажите, что найдется уголок из трех закрашенных клеток.

4. Вячеслав записал на доске число 2018. Затем Алиса и Лев начинают играть. Они по очереди (начинает Алиса) вычитают из числа одну из его ненулевых цифр. Проигрывает тот, кто получит однозначное число. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Фигура полуферзь бьет только в четырех направлениях из восьми (эти четыре направления для каждой фигуры могут быть свои). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга полуферзей можно расставить на шахматной доске?

6. На чемпионат мира по футболу приехало 1000 журналистов из 32 стран-участниц. Их расселили произвольным образом в двухместных номерах. Оказалось, что нельзя указать два номера, в которых жили бы представители ровно двух стран. Докажите, что из какой-то страны на чемпионат приехало не меньше 70 журналистов.

7. Дядя Фёдор, Матроскин, Шарик, Галчонок и почтальон Печкин устроили турнир по игре «Крестики-нолики». Каждый сыграл с каждым по одной партии. За победу в партии давалось три велосипеда, за ничью — один, а за поражение — ни одного. После турнира у Печкина оказалось столько же велосипедов, сколько у остальных вместе взятых (до турнира велосипедов ни у кого не было). Какое количество партий могло закончиться вничью?

8. Клетки квадратной таблицы 20×20 покрашены в три цвета — белый, серый и черный. Докажите, что найдутся по крайней мере две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.

Внутренний матбой

1. Назовём число парным, если оно раскладывается в произведение двух простых чисел, возможно совпадающих. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могут быть парными?

2. Пусть a и b — натуральные числа. Есть четыре утверждения, ровно одно из них неверно:

- $a+1$ делится на b;
- a равно $2b+5$;
- $a+b$ делится на 3;
- $a+7b$ простое;

Найдите все возможные пары (a, b).

3. В квадрате 5×5 закрашено 16 клеток. Докажите, что найдется уголок из трех закрашенных клеток.

4. Вячеслав записал на доске число 2018. Затем Алиса и Лев начинают играть. Они по очереди (начинает Алиса) вычитают из числа одну из его ненулевых цифр. Проигрывает тот, кто получит однозначное число. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Фигура полуферзь бьет только в четырех направлениях из восьми (эти четыре направления для каждой фигуры могут быть свои). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга полуферзей можно расставить на шахматной доске?

6. На чемпионат мира по футболу приехало 1000 журналистов из 32 стран-участниц. Их расселили произвольным образом в двухместных номерах. Оказалось, что нельзя указать два номера, в которых жили бы представители ровно двух стран. Докажите, что из какой-то страны на чемпионат приехало не меньше 70 журналистов.

7. Дядя Фёдор, Матроскин, Шарик, Галчонок и почтальон Печкин устроили турнир по игре «Крестики-нолики». Каждый сыграл с каждым по одной партии. За победу в партии давалось три велосипеда, за ничью — один, а за поражение — ни одного. После турнира у Печкина оказалось столько же велосипедов, сколько у остальных вместе взятых (до турнира велосипедов ни у кого не было). Какое количество партий могло закончиться вничью?

8. Клетки квадратной таблицы 20×20 покрашены в три цвета — белый, серый и черный. Докажите, что найдутся по крайней мере две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.

Стыковочный матбой

1. Назовём число парным, если оно раскладывается в произведение двух простых чисел, возможно совпадающих. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могут быть парными?

2. Можно ли разрезать по линиям сетки квадрат 7×7 на 13 частей одинакового периметра?

3. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый сидящий за столом заявил, что оба его соседа лжецы. После этих заявлений оказалось, что количество рыцарей определяется единственным образом. Сколько человек могло сидеть за столом?

4. Клетки доски 3×333 раскрашены в шахматном порядке так, что угловые клетки оказались белыми. Вячеслав ставит на черные клетки черных королей, а Артём белых — на белые. При этом нельзя ставить короля так, чтобы его бил король другого цвета. Проигрывает тот, кто не может сходить. Кто победит при правильной игре, если первый ход делает Вячеслав, и игроки ходят по очереди?

5. На линейку пришли математики и биологи. Оказалось, что на расстоянии метра от каждого математика стоит ровно два биолога. Могло ли оказаться, что математиков на линейке вдвое больше, чем биологов?

6. В парке живут 100 птиц. Известно, что среди любых 9 птиц всегда найдутся 4 одного вида. Докажите, что среди любых 11 птиц обязательно найдутся 5 одного вида.

7. Дядя Фёдор, Матроскин, Шарик, Галчонок и почтальон Печкин устроили турнир по игре «Крестики-нолики». Каждый сыграл с каждым по одной партии. За победу в партии давалось три велосипеда, за ничью — один, а за поражение — ни одного. После турнира у Печкина оказалось столько же велосипедов, сколько у остальных вместе взятых (до турнира велосипедов ни у кого не было). Какое количество партий могло закончиться вничью?

8. Найдите минимальное число слагаемых в левой части суммы ТРЮК + ТРЮК + … + ТРЮК = ЁЁЁЁЁЁ.

Стыковочный матбой

1. Назовём число парным, если оно раскладывается в произведение двух простых чисел, возможно совпадающих. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могут быть парными?

2. Можно ли разрезать по линиям сетки квадрат 7×7 на 13 частей одинакового периметра?

3. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый сидящий за столом заявил, что оба его соседа лжецы. После этих заявлений оказалось, что количество рыцарей определяется единственным образом. Сколько человек могло сидеть за столом?

4. Клетки доски 3×333 раскрашены в шахматном порядке так, что угловые клетки оказались белыми. Вячеслав ставит на черные клетки черных королей, а Артём белых — на белые. При этом нельзя ставить короля так, чтобы его бил король другого цвета. Проигрывает тот, кто не может сходить. Кто победит при правильной игре, если первый ход делает Вячеслав, и игроки ходят по очереди?

5. На линейку пришли математики и биологи. Оказалось, что на расстоянии метра от каждого математика стоит ровно два биолога. Могло ли оказаться, что математиков на линейке вдвое больше, чем биологов?

6. В парке живут 100 птиц. Известно, что среди любых 9 птиц всегда найдутся 4 одного вида. Докажите, что среди любых 11 птиц обязательно найдутся 5 одного вида.

7. Дядя Фёдор, Матроскин, Шарик, Галчонок и почтальон Печкин устроили турнир по игре «Крестики-нолики». Каждый сыграл с каждым по одной партии. За победу в партии давалось три велосипеда, за ничью — один, а за поражение — ни одного. После турнира у Печкина оказалось столько же велосипедов, сколько у остальных вместе взятых (до турнира велосипедов ни у кого не было). Какое количество партий могло закончиться вничью?

8. Найдите минимальное число слагаемых в левой части суммы ТРЮК + ТРЮК + … + ТРЮК = ЁЁЁЁЁЁ.

Постепенное конструирование.

1. На столе стоят восемь стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них уровень воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.

2. Хромой король не умеет ходить в соседние по горизонтали клетки. Можно ли им обойти шахматную доску, побывав в каждой клетке по одному разу?

3. Разрежьте квадрат на **(a)** 6 квадратов; **(b)** 7 квадратов; **(c)** 1000 квадратов (не обязательно различных).

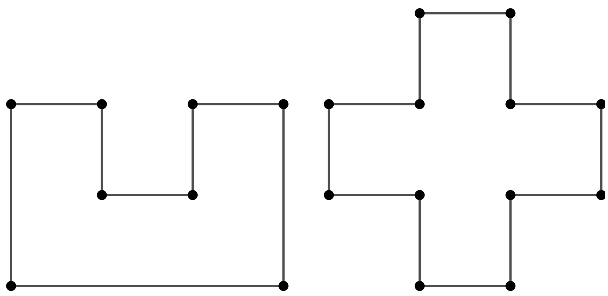
4. Пусть имеются монеты достоинством только в 3 и 5 копеек. Докажите, что можно набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

5. Придумайте, как разложить **(a)** 7 монет в 3 кошелька; **(b)** 15 монет в 4 кошелька; **(c)** 1000 монет в 10 кошельков так, чтобы любое количество монет, вплоть до максимального, можно было выдать, не открывая кошельки.

6. Представьте единицу в виде суммы **(a)** 3; **(b)** 5; **(c)** 99 различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

7. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

8. При каких натуральных n доску $15 \times n$ можно замостить фигурками из пяти клеток на рисунке?



Постепенное конструирование.

1. На столе стоят восемь стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них уровень воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.

2. Хромой король не умеет ходить в соседние по горизонтали клетки. Можно ли им обойти шахматную доску, побывав в каждой клетке по одному разу?

3. Разрежьте квадрат на **(a)** 6 квадратов; **(b)** 7 квадратов; **(c)** 1000 квадратов (не обязательно различных).

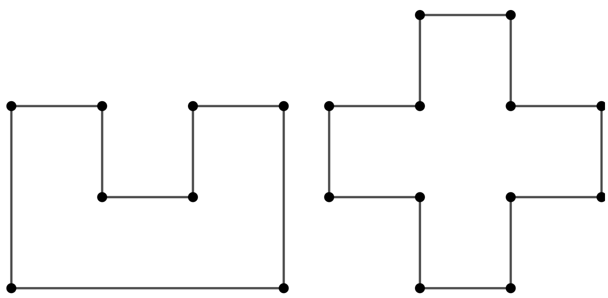
4. Пусть имеются монеты достоинством только в 3 и 5 копеек. Докажите, что можно набрать любую сумму более 7 копеек только такими монетами.

5. Придумайте, как разложить **(a)** 7 монет в 3 кошелька; **(b)** 15 монет в 4 кошелька; **(c)** 1000 монет в 10 кошельков так, чтобы любое количество монет, вплоть до максимального, можно было выдать, не открывая кошельки.

6. Представьте единицу в виде суммы **(a)** 3; **(b)** 5; **(c)** 99 различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

7. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

8. При каких натуральных n доску $15 \times n$ можно замостить фигурками из пяти клеток на рисунке?



Взвешивания и неравенства.

1. В левой чашке лежит 17 шоколадок, на правой — 13 таких же шоколадок и гирька в 100 г. Сколько весит одна шоколадка?

2. На одной чашке весов лежат 2 одинаковых конфеты и 4 одинаковых котлеты, а на другой — 6 одинаковых пряников. Что тяжелее — конфета и две котлеты или 3 пряника?

3. Что лучше: 5 бутылок сока на 11 человек или 6 бутылок сока на 13 человек?

4. Груша и яблоко вместе весят 100 г, яблоко и апельсин — 120 г, груша и апельсин — 140 г. Сколько весят вместе яблоко, груша и апельсин? Сколько весит каждый фрукт по отдельности?

5. Мальчик Пат и собачонка весят два пустых бочонка
Собачонка без мальчишки весит две больших коврижки,
А с коврижкой поросенок весит в точности бочонок.
Сколько весит мальчик Пат? Сосчитай-ка поросят.

6. На складе лежат в большом количестве ширлы, мырлы и дырлы. Ширла состоит из пяти шашек, мырла – из трех машек, дырла – из двух дашек. Все шашки одинаковы, машки – тоже, одинаковы и все дашки. У Васи есть чашечные весы без гирь, и он хочет за одно взвешивание узнать, что тяжелее: две шашки или машка с дашкой. К сожалению, все изделия, имеющиеся на складе – неразборные. Помогите Васе!

7. Имеется 19 гирек весом 1, 2, 3, ..., 19 г, из которых девять железных, девять бронзовых и одна золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес бронзовых. Найдите вес золотой гирьки.

8. Есть 30 камней различных весов и специальные весы. На эти весы можно класть только по 15 камней на каждую чашку, тогда весы информируют, на какой чашке груз больше. Как с помощью этих весов найти пару камней, про которые будет точно известно, какой из них тяжелее?

9. На доске были написаны 5 чисел. Сложив их попарно, получили следующие 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие числа были написаны?

Взвешивания и неравенства.

1. В левой чашке лежит 17 шоколадок, на правой — 13 таких же шоколадок и гирька в 100 г. Сколько весит одна шоколадка?

2. На одной чашке весов лежат 2 одинаковых конфеты и 4 одинаковых котлеты, а на другой — 6 одинаковых пряников. Что тяжелее — конфета и две котлеты или 3 пряника?

3. Что лучше: 5 бутылок сока на 11 человек или 6 бутылок сока на 13 человек?

4. Груша и яблоко вместе весят 100 г, яблоко и апельсин — 120 г, груша и апельсин — 140 г. Сколько весят вместе яблоко, груша и апельсин? Сколько весит каждый фрукт по отдельности?

5. Мальчик Пат и собачонка весят два пустых бочонка
Собачонка без мальчишки весит две больших коврижки,
А с коврижкой поросенок весит в точности бочонок.
Сколько весит мальчик Пат? Сосчитай-ка поросят.

6. На складе лежат в большом количестве ширлы, мырлы и дырлы. Ширла состоит из пяти шашек, мырла – из трех машек, дырла – из двух дашек. Все шашки одинаковы, машки – тоже, одинаковы и все дашки. У Васи есть чашечные весы без гирь, и он хочет за одно взвешивание узнать, что тяжелее: две шашки или машка с дашкой. К сожалению, все изделия, имеющиеся на складе – неразборные. Помогите Васе!

7. Имеется 19 гирек весом 1, 2, 3, ..., 19 г, из которых девять железных, девять бронзовых и одна золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес бронзовых. Найдите вес золотой гирьки.

8. Есть 30 камней различных весов и специальные весы. На эти весы можно класть только по 15 камней на каждую чашку, тогда весы информируют, на какой чашке груз больше. Как с помощью этих весов найти пару камней, про которые будет точно известно, какой из них тяжелее?

9. На доске были написаны 5 чисел. Сложив их попарно, получили следующие 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие числа были написаны?

Ровные остатки

Две мысли, которые можно перечитывать, если задача не решается.

Мысль №1. Вычисляя остаток от деления некоторого арифметического выражения на некоторое число a, можно заменять числа на их остатки при делении на a. Например, найдем остаток от деления числа $16 \times 17 \times 19$ на 3. Он будет таким же, как у $1 \times 2 \times 1 = 2$, а этот остаток вы, безусловно, найти сможете...

Комментарий к мысли №1. Обратите внимание, что в выражении 10^{123} число 123 заменять нельзя! А 10 — можно.

Мысль №2. А можно заменять и не на остатки! Если какое-то другое число удобнее и остаток у него правильный, смело меняйте на него. Пример: ищем остаток, который получается при делении числа 20^{14} на 7. Можно было бы заменить 20 на 6, но это дает мало пользы. Зато если заменить 20 на -1, получится $(-1)^{14} = 1$. Победа!

Просто считаем.

1. Найдите остаток при делении:
(a) 2^{100} на 3
(b) $(118 + 17^{17})^{21} \times 7^{49}$ на 8
(c) $1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + 999 \times 1000$ на 10
(d) $1^2 + 2^2 + ... + 99^2$ на 5

2. Докажите, что число $1000 \times 1001 \times 1002 \times 1003 - 24$ делится **(a)** на 999; **(b)** на 1004.

3. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

Считаем квадраты.

4. Докажите, что квадрат нечётного числа дает остаток 1 при делении на 8.

5. Сумма трёх натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых также делится на 9.

6. Докажите, что при делении на любое число, большее двух, есть такой остаток, который точный квадрат не дает.

7. Существуют ли четыре последовательных натуральных числа, каждое из которых можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

Считаем, что мы все поняли!

8. Докажите, что при делении как на 3, так и на 9 любое число дает тот же остаток, что и сумма его цифр.

9. Докажите, что при делении на 11 любое число дает тот же остаток, что и знакопеременная сумма его цифр.

Ровные остатки

Две мысли, которые можно перечитывать, если задача не решается.

Мысль №1. Вычисляя остаток от деления некоторого арифметического выражения на некоторое число а, можно заменять числа на их остатки при делении на а. Например, найдем остаток от деления числа $16 \times 17 \times 19$ на 3. Он будет таким же, как у $1 \times 2 \times 1 = 2$, а этот остаток вы, безусловно, найти сможете...

Комментарий к мысли №1. Обратите внимание, что в выражении 10^{123} число 123 заменять нельзя! А 10 — можно.

Мысль №2. А можно заменять и не на остатки! Если какое-то другое число удобнее и остаток у него правильный, смело меняйте на него. Пример: ищем остаток, который получается при делении числа 20^{14} на 7. Можно было бы заменить 20 на 6, но это дает мало пользы. Зато если заменить 20 на -1, получится $(-1)^{14} = 1$. Победа!

Просто считаем.

1. Найдите остаток при делении:
(a) 2^{100} на 3
(b) $(118 + 17^{17})^{21} \times 7^{49}$ на 8
(c) $1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + 999 \times 1000$ на 10
(d) $1^2 + 2^2 + ... + 99^2$ на 5

2. Докажите, что число $1000 \times 1001 \times 1002 \times 1003 - 24$ делится **(a)** на 999; **(b)** на 1004.

3. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

Считаем квадраты.

4. Докажите, что квадрат нечётного числа дает остаток 1 при делении на 8.

5. Сумма трёх натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых также делится на 9.

6. Докажите, что при делении на любое число, большее двух, есть такой остаток, который точный квадрат не дает.

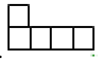
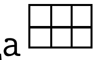
7. Существуют ли четыре последовательных натуральных числа, каждое из которых можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

Считаем, что мы все поняли!

8. Докажите, что при делении как на 3, так и на 9 любое число дает тот же остаток, что и сумма его цифр.

9. Докажите, что при делении на 11 любое число дает тот же остаток, что и знакопеременная сумма его цифр.

Оценка+пример

1. У Льва и Саши было два одинаковых прямоугольника. Лев разрезал свой прямоугольник на фигурки вида , а Саша – на фигурки вида . Какую наименьшую длину могла иметь большая сторона исходного прямоугольника? Длина стороны маленького квадратика равна 1.

2. На 22 карточках написали натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целое значение?

3. Том Сойер взялся покрасить очень длинный забор, соблюдая условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок потребуется Тому для этой работы?

4. Имеется пять звеньев цепи по три кольца в каждом. Какое наименьшее число колец нужно расковать и сковать, чтобы соединить эти звенья в одну цепь?

5. Круглая мишень разбита на 20 секторов. Даша нумерует сектора по кругу в каком-либо порядке числами $1, 2, \ldots, 20$. Затем Павел Витальевич находит наименьшую разность между числами на соседних секторах и отдает Даше столько конфет, какова эта разность. Какое наибольшее количество конфет сможет обеспечить себе Даша?

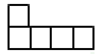
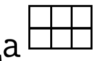
6. У Миши было 12 карточек с надписями «Слева от меня — ровно 1 ложное утверждение», «Слева от меня — ровно 2 ложных утверждения», ..., «Слева от меня — ровно 12 ложных утверждений». Миша разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число утверждений могло оказаться истинными?

7. Бильярдный стол имеет вид прямоугольника 2×1, в углах и на серединах больших сторон которого расположены лузы. Какое наименьшее число шаров надо расположить внутри прямоугольника, чтобы каждая луза находилась на одной линии с некоторыми двумя шарами?

8. В ресторанчик надо доставить несколько бочек кислого молока общей массой 10 т. Каждая бочка весит не более 1 т. Какого наименьшего количества трехтонок для этого заведомо хватит?

9. Пятачок разливает килограмм мёда по семи стоящим в ряд очень большим горшочкам. Винни-Пух после этого забирает себе два стоящих рядом горшочка, в которых суммарно налито наибольшее количество мёда. Какое наибольшее количество мёда гарантированно сможет забрать себе Винни-Пух?

Оценка+пример

1. У Льва и Саши было два одинаковых прямоугольника. Лев разрезал свой прямоугольник на фигурки вида , а Саша – на фигурки вида . Какую наименьшую длину могла иметь большая сторона исходного прямоугольника? Длина стороны маленького квадратика равна 1.

2. На 22 карточках написали натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целое значение?

3. Том Сойер взялся покрасить очень длинный забор, соблюдая условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок потребуется Тому для этой работы?

4. Имеется пять звеньев цепи по три кольца в каждом. Какое наименьшее число колец нужно расковать и сковать, чтобы соединить эти звенья в одну цепь?

5. Круглая мишень разбита на 20 секторов. Даша нумерует сектора по кругу в каком-либо порядке числами $1, 2, \ldots, 20$. Затем Павел Витальевич находит наибольшую разность между числами на соседних секторах и отдает Даше столько конфет, какова эта разность. Какое наибольшее количество конфет сможет обеспечить себе Даша?

6. У Миши было 12 карточек с надписями «Слева от меня — ровно 1 ложное утверждение», «Слева от меня — ровно 2 ложных утверждения», $\ldots$, «Слева от меня — ровно 12 ложных утверждений». Миша разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число утверждений могло оказаться истинными?

7. Бильярдный стол имеет вид прямоугольника 2×1, в углах и на серединах больших сторон которого расположены лузы. Какое наименьшее число шаров надо расположить внутри прямоугольника, чтобы каждая луза находилась на одной линии с некоторыми двумя шарами?

8. В ресторанчик надо доставить несколько бочек кислого молока общей массой 10 т. Каждая бочка весит не более 1 т. Какого наименьшего количества трехтонок для этого заведомо хватит?

9. Пятачок разливает килограмм мёда по семи стоящим в ряд очень большим горшочкам. Винни-Пух после этого забирает себе два стоящих рядом горшочка, в которых суммарно налито наибольшее количество мёда. Какое наибольшее количество мёда гарантированно сможет забрать себе Винни-Пух?

Числовые конструкции.

Инструментарий:

⋆ **Теорема Евклида.** Простых чисел бесконечно много.

1. Придумайте три натуральных числа так, чтобы ни одно из них не делилось на другое, но произведение любых двух делилось на третье.

2. Представьте 100 как сумму 5 различных натуральных чисел так, чтобы каждое делилась на все меньшие.

3. Можно ли расставить по кругу **(a)** 10; **(b)** 11 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

4. Существуют ли 10 различных натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится на другое, но квадрат делился на произведение остальных?

5. **(a)** Приведите пример натурального числа, половина которого – квадрат, треть – куб, а пятая часть – пятая степень. **(b)** Найдите наименьшее натуральное число, половина которого – квадрат, а треть – куб.

6. Найдутся ли 2018 подряд идущих натуральных чисел, среди которых ровно одно простое число?

7. Расставьте в вершинах куба различные натуральные числа так, что числа в соседних вершинах будут иметь общий делитель, а другие пары чисел будут взаимнопросты.

8. Существуют ли 100 различных натуральных чисел, таких что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?

9. В ЛМШ приехали школьники, некоторые из которых знают друг друга. Всегда ли можно сообщить школьникам по одному натуральному числу так, что у любых двух знакомых школьников числа будут иметь общий делитель, а у любых двух незнакомых – нет?

Числовые конструкции.

Инструментарий:

⋆ **Теорема Евклида.** Простых чисел бесконечно много.

1. Придумайте три натуральных числа так, чтобы ни одно из них не делилось на другое, но произведение любых двух делилось на третье.

2. Представьте 100 как сумму 5 различных натуральных чисел так, чтобы каждое делилась на все меньшие.

3. Можно ли расставить по кругу **(a)** 10; **(b)** 11 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

4. Существуют ли 10 различных натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится на другое, но квадрат делился на произведение остальных?

5. **(a)** Приведите пример натурального числа, половина которого – квадрат, треть – куб, а пятая часть – пятая степень. **(b)** Найдите наименьшее натуральное число, половина которого – квадрат, а треть – куб.

6. Найдутся ли 2018 подряд идущих натуральных чисел, среди которых ровно одно простое число?

7. Расставьте в вершинах куба различные натуральные числа так, что числа в соседних вершинах будут иметь общий делитель, а другие пары чисел будут взаимнопросты.

8. Существуют ли 100 различных натуральных чисел, таких что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?

9. В ЛМШ приехали школьники, некоторые из которых знают друг друга. Всегда ли можно сообщить школьникам по одному натуральному числу так, что у любых двух знакомых школьников числа будут иметь общий делитель, а у любых двух незнакомых – нет?

Паритет игры.

1. На столе лежат 10 карточек с числами 1, 2, 3, ..., 10. Петя и Вася по очереди берут по карточке, пока не разберут все. Начинает Петя. Какую наибольшую сумму может гарантировать себе Петя, как бы ни играл Вася?

2. Имеется цепочка из 7 сосисок. Два кота ходят по очереди, перекусывая одну из перемычек между сосисками; если при этом получаются одиночные сосиски, они съедаются (сделавшим ход). Результат игры: кто из котов съел больше и на сколько. Определите его.

3. Дима раскладывает 49 алмазов в клетки квадрата 3×3, после чего Элина забирает алмазы с трех клеток, образующих уголок. Какое наибольшее количество алмазов она может себе гарантировать при любых раскладках Димы?

4. Теперь Элина рассыпает килограмм песка в клетки таблицы 3×7. Затем Дима выбирает две соседние только по вершине клетки. Какое наибольшее количество песка он сможет в них увидеть независимо от действий Элины?

5. Макс и Мин красят забор из 20 досок. Каждый по очереди красит одну из досок (любую по своему выбору) в синий или зелёный цвет (по своему выбору). Начинает Макс. Когда весь забор покрашен (каждый игрок покрасил 10 досок), подсчитывают число изменений цвета – границ, где синий цвет сменяется зелёным или наоборот. Макс хочет сделать это число большим, а Мин хочет сделать его маленьким. Что получится при оптимальной игре сторон?

6. Двое делят кусок торта. Сначала первый его режет на две части, затем второй режет одну из оставшихся. После чего игроки в том же порядке начинают забирать полученные куски. Какую долю каждый из игроков сможет гарантировать себе?

7. Разбойники Хапок и Глазок делят кучу из 100 монет. Хапок захватывает из кучи пригоршню монет, а Глазок, глядя на пригоршню, решает, кому из двоих она достается. Так продолжается, пока кто-то из них не получит девять пригоршней, после чего другой забирает все оставшиеся монеты (дележ может закончиться и тем, что монеты будут разделены прежде, чем кто-то получит девять пригоршней). Хапок может захватить в пригоршню сколько угодно монет. Какое наибольшее число монет он может гарантировать себе независимо от действий Глазка?

Паритет игры.

1. На столе лежат 10 карточек с числами 1, 2, 3, ..., 10. Петя и Вася по очереди берут по карточке, пока не разберут все. Начинает Петя. Какую наибольшую сумму может гарантировать себе Петя, как бы ни играл Вася?

2. Имеется цепочка из 7 сосисок. Два кота ходят по очереди, перекусывая одну из перемычек между сосисками; если при этом получаются одиночные сосиски, они съедаются (сделавшим ход). Результат игры: кто из котов съел больше и на сколько. Определите его.

3. Дима раскладывает 49 алмазов в клетки квадрата 3×3, после чего Элина забирает алмазы с трех клеток, образующих уголок. Какое наибольшее количество алмазов она может себе гарантировать при любых раскладках Димы?

4. Теперь Элина рассыпает килограмм песка в клетки таблицы 3×7. Затем Дима выбирает две соседние только по вершине клетки. Какое наибольшее количество песка он сможет в них увидеть независимо от действий Элины?

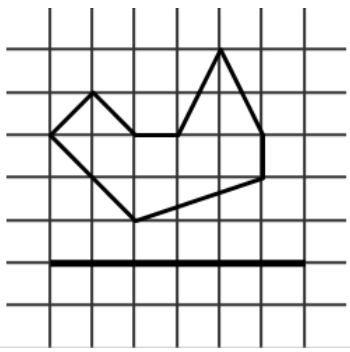
5. Макс и Мин красят забор из 20 досок. Каждый по очереди красит одну из досок (любую по своему выбору) в синий или зелёный цвет (по своему выбору). Начинает Макс. Когда весь забор покрашен (каждый игрок покрасил 10 досок), подсчитывают число изменений цвета – границ, где синий цвет сменяется зелёным или наоборот. Макс хочет сделать это число большим, а Мин хочет сделать его маленьким. Что получится при оптимальной игре сторон?

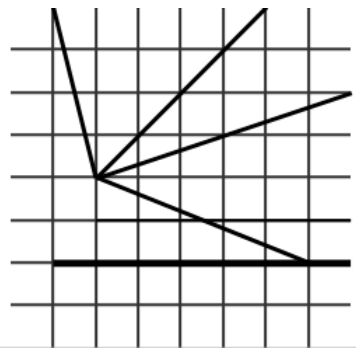
6. Двое делят кусок торта. Сначала первый его режет на две части, затем второй режет одну из оставшихся. После чего игроки в том же порядке начинают забирать полученные куски. Какую долю каждый из игроков сможет гарантировать себе?

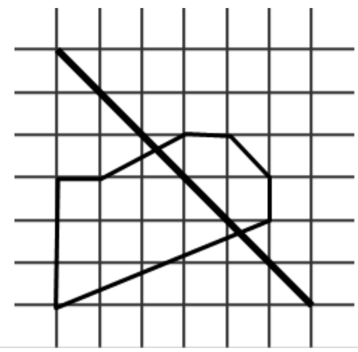
7. Разбойники Хапок и Глазок делят кучу из 100 монет. Хапок захватывает из кучи пригоршню монет, а Глазок, глядя на пригоршню, решает, кому из двоих она достается. Так продолжается, пока кто-то из них не получит девять пригоршней, после чего другой забирает все оставшиеся монеты (дележ может закончиться и тем, что монеты будут разделены прежде, чем кто-то получит девять пригоршней). Хапок может захватить в пригоршню сколько угодно монет. Какое наибольшее число монет он может гарантировать себе независимо от действий Глазка?

Про бильярд, коня и муху

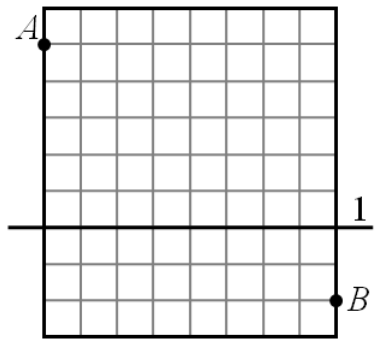
Нарисуйте отражение фигур относительно прямой:

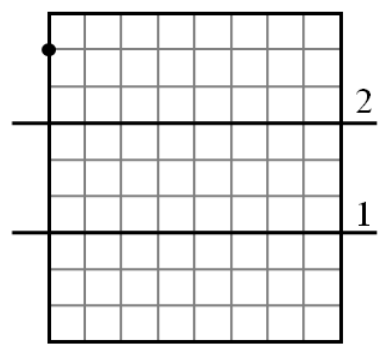


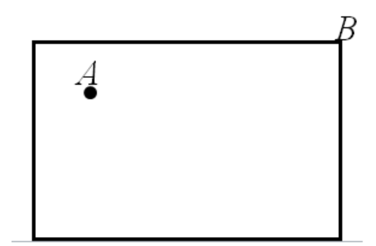




Бильярд







При ударе шара о стенку угол падения шара равен углу отражения.

1. (a) Матвей и Петр играли в бильярд. Когда на столе оставалось два шара, Петр ударил по шару А в направлении шара В. Сразу после удара Матвей поставил поперек стола преграду 1. Нарисуйте путь, который пройдет шар А до столкновения с бортиком стола.

(b) После столкновения шара с бортиком шар сразу остановился. Петру не понравилась выходка Матвея и он хочет ударить по шару А так, чтобы, отразившись от преграды 1, шар вернулся в исходное положение. В каком направлении Петру следует ударить по шару?

(c) В момент столкновения шара с преградой 1 Матвей поставил преграду 2. Нарисуйте путь, который пройдет шар А до столкновения с бортиком стола.

2. На прямоугольном бильярдном столе находится один шар. Как направить шар А так, чтобы он попал в лузу В и при этом

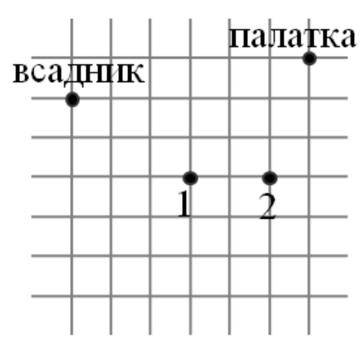
(a) отразился от нижнего борта стола?

(b) отразился сначала от верхнего, а затем от нижнего борта стола?

(c) ударился о левый, а затем о нижний борт стола?

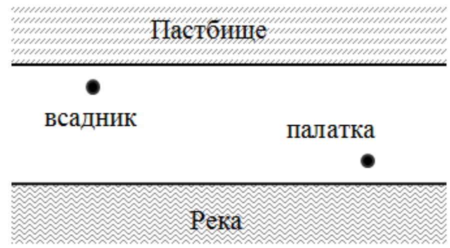
Кратчайшие пути

3. Прежде, чем попасть к своей палатке, всадник захотел напоить коня из колодца. Какой из двух колодцев следует выбрать, чтобы путь до палатки был короче. Разберите оба случая.



4. **(a)** Нарисуйте кратчайший путь до палатки, если всадник захотел напоить коня из реки.

(b) Нарисуйте кратчайший путь до палатки, если всадник захотел сначала напоить, а потом накормить коня.



(c) Изменится ли длина кратчайшего пути, если всадник сначала накормит, а потом напоит коня?

5. На внешней стенке открытого аквариума находится улитка. Найдите кратчайший путь, по которому она может проползти ко второй улитке, сидящей на той же стенке аквариума, но с другой стороны.

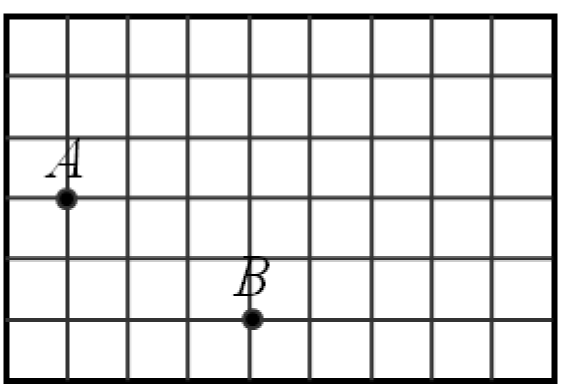
6. Две деревни расположены по разные стороны от реки с параллельными прямолинейными берегами. В каком месте на реке нужно построить мост (перпендикулярно береговой линии), чтобы путь из одной деревни в другую был кратчайшим?

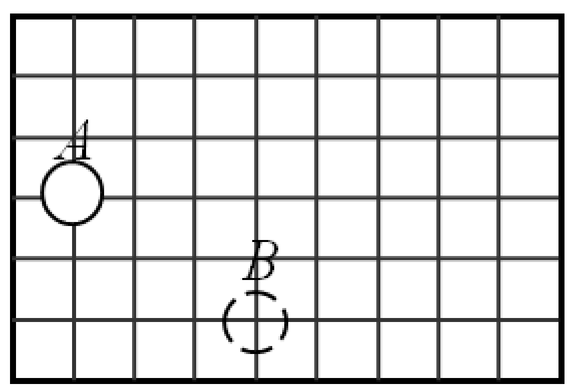
7. Полуостров представляет собой острый угол, внутри которого находится дом лесника. Как леснику, выйдя из дома, добраться до одного берега полуострова, затем до другого и вернуться домой, пройдя при этом по самому короткому пути?

8. Найти кратчайший путь, по которому должна ползти пчела из точки A в точку B внутри равностороннего треугольника, чтобы сначала насладиться медом на одной стороне треугольника, потом сахаром на другой стороне, и, наконец, вареньем — на третьей.

9. **(a)** Укажите, где будет находиться бильярдный шар через 5 секунд, если за одну секунду он переместился из положения A в B и известно, что за эту секунду шар не касался бортов. Скорость шара постоянна.

(b) А если вместо бильярдного шара взяли большой мяч радиуса полклеточки.





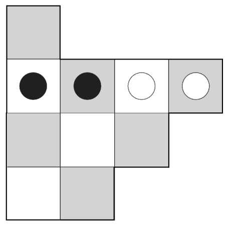
Граф за задачей.

1. На прямоугольной доске нарисованы несколько неперекрывающихся равносторонних треугольников. У каждого есть сторона, параллельная нижнему краю доски. Докажите, что треугольники можно покрасить в два цвета так, чтобы треугольники одинакового цвета не соприкасались по отрезку.

2. В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Какое наибольшее количество дежурств можно гарантированно организовать так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды?

3. **(a)** На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в симметричную относительно средней линии позицию ровно за 101 ход? **(b)** На шахматной доске стоят пять одинаковых фишек. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в центрально симметричную позицию ровно за 101 ход?

4. На куске шахматной доски (см. рисунок) расположены два белых и два черных коня. Ходы происходят по шахматным правилам. Могут ли через несколько ходов белые и чёрные кони поменяться местами?



5. Саша начертил квадрат размером 6×6 клеток и поочередно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число, равное количеству закрашенных клеток, соседних по стороне с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма.

6. В куче лежат 25 камней. Её делят на части, затем одну из частей опять делят надвое и т.д. до тех пор, пока не получат 25 отдельно лежащих камней. При каждом делении одной из куч на две части на доску записывается произведение количеств камней в этих частях. Найдите сумму всех чисел на доске после всех операций.

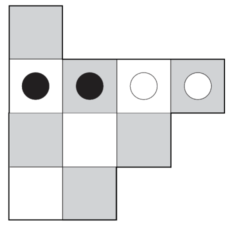
Граф за задачей.

1. На прямоугольной доске нарисованы несколько неперекрывающихся равносторонних треугольников. У каждого есть сторона, параллельная нижнему краю доски. Докажите, что треугольники можно покрасить в два цвета так, чтобы треугольники одинакового цвета не соприкасались по отрезку.

2. В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Какое наибольшее количество дежурств можно гарантированно организовать так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды?

3. (a) На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в симметричную относительно средней линии позицию ровно за 101 ход? **(b)** На шахматной доске стоят пять одинаковых фишек. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в центрально симметричную позицию ровно за 101 ход?

4. На куске шахматной доски (см. рисунок) расположены два белых и два черных коня. Ходы происходят по шахматным правилам. Могут ли через несколько ходов белые и чёрные кони поменяться местами?



5. Саша начертил квадрат размером 6×6 клеток и поочередно закрашивает в нём по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число, равное количеству закрашенных клеток, соседних по стороне с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма.

6. В куче лежат 25 камней. Её делят на части, затем одну из частей опять делят надвое и т.д. до тех пор, пока не получат 25 отдельно лежащих камней. При каждом делении одной из куч на две части на доску записывается произведение количеств камней в этих частях. Найдите сумму всех чисел на доске после всех операций.

Количество информации.

1. Маша загадала натуральное число от 1 до 8. Наташа хочет отгадать его, задавая Маше вопросы, на которые та будет давать ответы «да» или «нет».

(a) Удастся ли ей узнать число за 3 вопроса?

(b) А если число от 1 до 9?

(c) Сколько вопросов понадобится Наташе, если Маша загадала число от 1 до 32? До 33?

2. Среди **(a)** 3; **(b)** 10; **(c)** 100 монет есть ровно одна фальшивая (легче остальных). За какое наименьшее число на чашечных весах без гирь ее можно наверняка выявить?

3. Есть 17 карт. Зритель загадывает одну из них. Фокусник раскладывает все карты на 4 стопки и узнает у зрителя, в какой стопке оказалась задуманная карта.

(a) Докажите, что он всегда может определить задуманную карту за 3 вопроса, а двух вопросов может и не хватить.

(b) При каком наибольшем количестве карт можно наверняка определить задуманную карту за 3 вопроса?

4. На шахматной доске одна из клеток закрашена невидимыми чернилами. Разрешается выделить любой прямоугольник и спросить, есть ли в нем выделенная клетка. За какое минимальное число вопросов можно найти выделенную клетку?

5. Имеется 6 с виду одинаковых шаров, из которых два радиоактивные. Дозиметром можно проверить на радиоактивность любую группу шаров. За какое наименьшее число проверок можно выявить оба радиоактивных шара?

6. Каким наименьшим числом гирь можно набрать все веса:

(a) 1г, 2г, 3г, ..., 31г? (гири можно класть только на одну чашку весов);

(b) 1г, 2г, ...,13г ? (Гири можно класть на обе чашки весов)

7. Среди 5 монет – ровно одна фальшивая: она отличается по весу от остальных, но неизвестно – легче или тяжелее. Требуется выявить ее на чашечных весах без гирь и узнать, легче она или тяжелее настоящей. Какое наименьшее число взвешиваний для этого наверняка хватит?

Количество информации.

1. Маша загадала натуральное число от 1 до 8. Наташа хочет отгадать его, задавая Маше вопросы, на которые та будет давать ответы «да» или «нет».

(a) Удастся ли ей узнать число за 3 вопроса?

(b) А если число от 1 до 9?

(c) Сколько вопросов понадобится Наташе, если Маша загадала число от 1 до 32? До 33?

2. Среди **(a)** 3; **(b)** 10; **(c)** 100 монет есть ровно одна фальшивая (легче остальных). За какое наименьшее число на чашечных весах без гирь ее можно наверняка выявить?

3. Есть 17 карт. Зритель загадывает одну из них. Фокусник раскладывает все карты на 4 стопки и узнает у зрителя, в какой стопке оказалась задуманная карта.

(a) Докажите, что он всегда может определить задуманную карту за 3 вопроса, а двух вопросов может и не хватить.

(b) При каком наибольшем количестве карт можно наверняка определить задуманную карту за 3 вопроса?

4. На шахматной доске одна из клеток закрашена невидимыми чернилами. Разрешается выделить любой прямоугольник и спросить, есть ли в нем выделенная клетка. За какое минимальное число вопросов можно найти выделенную клетку?

5. Имеется 6 с виду одинаковых шаров, из которых два радиоактивные. Дозиметром можно проверить на радиоактивность любую группу шаров. За какое наименьшее число проверок можно выявить оба радиоактивных шара?

6. Каким наименьшим числом гирь можно набрать все веса:

(a) 1г, 2г, 3г, ..., 31г? (гири можно класть только на одну чашку весов);

(b) 1г, 2г, ...,13г ? (Гири можно класть на обе чашки весов)

7. Среди 5 монет – ровно одна фальшивая: она отличается по весу от остальных, но неизвестно – легче или тяжелее. Требуется выявить ее на чашечных весах без гирь и узнать, легче она или тяжелее настоящей. Какое наименьшее число взвешиваний для этого наверняка хватит?

Задачи на вшивость

1. Петя написал несколько различных натуральных чисел, используя только две цифры. Сумма всех его чисел равна 100. Какое наибольшее количество чисел мог написать Петя?

2. Найдите сумму: $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{100}}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{100}}}}}}.$$

3. Пять футбольных команд провели однокруговой турнир. Четыре команды набрали соответственно 1, 2, 5 и 7 очков. А сколько очков набрала пятая команда?

4. В однокруговом турнире участвуют 10 шахматистов. Могут ли какие-нибудь три шахматиста набрать хотя бы на четыре очка больше, чем остальные семеро?

5. Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число A?

6. Основная Теорема Арифметики

7. Докажите, что число, имеющее нечётное число делителей, является точным квадратом.

8. Является ли сумма $1 + 4 + 7 + \ldots + 1000$ простым числом?

9. **(a)** По кругу расставили 100 чисел с положительной суммой. Докажите, что найдутся два числа, стоящие через одно, с положительной суммой. **(b)** Тот же вопрос про 101 число.

10. Все костяшки домино выложили в ряд правильным образом. Найдите сумму чисел на нечетных костяшках.

11. Дан квадрат 9×9 клеток. Его разбили на трёхклеточные «уголки». Возле каждой из 100 вершин клеток написали, сколько «уголков» содержат эту вершину. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?

12. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера. Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.

13. Хромой король умеет ходить только вверх, вправо и вправо-вверх. Каких путей хромого короля больше: из **a1** в **h8** или из **a1** в **h7**?

14. По кругу расставлены 10 целых чисел с суммой 1. Сколькими способами можно выбрать 5 подряд идущих чисел с положительной суммой?

15. В приходе графства Липшир 20 усадеб. И в этом приходе любые две дороги имеют общий конец. Докажите, что найдутся 18 усадеб, никакие две из которых не соединены дорогой.

16. В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

17. Шестизначное число кратно 7. Докажите, что если его последнюю цифру переставить в начало, то полученное число тоже кратно 7.

18. В числе A цифры идут в строго возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9 * A$?

19. В плоскости отмечена 101 точка, не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек красным карандашом проводится прямая. Докажите, что на плоскости существует точка, через которую проходит не меньше 11 красных прямых.

20. Все узлы клетчатого квадрата 4×4 покрашены в два цвета. Докажите, что найдется прямоугольник с одноцветными вершинами.

21. Известно, что натуральное число n в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что n делится на 27.

22. Может ли степень двойки оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами?

23. Докажите, что существует 100 подряд идущих составных чисел.

24. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

25. Сколькими способами можно выстроить в ряд группу из 10 людей, если Петя и Вася не должны стоять рядом?

26. Сколькими способами можно раскрасить клетки полоски $1 \times 3n$ в три цвета так, чтобы всех цветов было поровну? (Полоска нарисована на доске.)

27. У ромашки **(a)** 12 лепестков; **(b)** 11 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Как действовать второму игроку, чтобы выиграть независимо от ходов первого игрока?

28. Король стоит на поле $a1$ шахматной доски. За ход разрешается сдвинуть его на одну клетку вправо, или на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля на клетку $h8$. Кто выигрывает при правильной игре?

29. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали на 18 прямоугольников. Один из них отложили, а из остальных составили квадрат 10×10. Найдите размеры отложенного прямоугольника.

30. Клетчатый квадрат 17×17 разрезали на несколько прямоугольников по границам клеток. Докажите, что среди них найдется прямоугольник, периметр которого кратен 4.

31. В стране есть несколько городов и несколько дорог с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через остальные. При этом, какие бы два города ни взять, хотя бы из одного из них можно проехать в другой, не нарушая правил движения. Докажите, что найдется город, из которого можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.

32. На ветках деревьев сидят 55 мартышек. Все расстояния между парами мартышек различны. Каждая мартышка кинула банан ближайшей соседке. Докажите, что какая-то мартышка осталась без банана.

33. Чему равно количество делителей числа $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$?

34. Число a меньше миллиона. Докажите, что у него не более 2 тысяч натуральных делителей.

35. Двое играют на доске 19×94 клеток. Каждый по очереди отмечает квадрат по линиям сетки (любого возможного размера) и закрашивает его. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

36. Теорема. Число ребер в графе равно половине от суммы степеней вершин.Лемма о рукопожатиях. В любом графе число нечётных вершин чётно.

37. В стране несколько мегаполисов (из которых выходит по 43 дороги) и несколько провинциальных городов (из которых выходит по 4 дороги). Докажите, что из любого мегаполиса можно проехать в некоторый другой мегаполис.

38. Миша задумал натуральное число и нашел его остатки от деления на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

39. Катя и Марина делят одно и то же натуральное число с остатком. Катя делит его на 8, а Марина на 9. Частное, которое получила Катя, и остаток, который получила Марина, в сумме дают 13. Какой остаток получился у Кати?

40. Представьте единицу в виде суммы **(a)** 3; **(b)** 5; **(c)** 99 различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

41. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

42. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

43. Докажите, что при делении на любое число, большее двух, есть такой остаток, который точный квадрат не дает.

44. Том Сойер взялся покрасить очень длинный забор, соблюдая условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок потребуется Тому для этой работы?

45. Бильярдный стол имеет вид прямоугольника 2×1, в углах и на серединах больших сторон которого расположены лузы. Какое наименьшее число шаров надо расположить внутри прямоугольника, чтобы каждая луза находилась на одной линии с некоторыми двумя шарами?

46. Можно ли расставить по кругу **(a)** 10; **(b)** 11 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

47. Найдутся ли 2018 подряд идущих натуральных чисел, среди которых ровно одно простое число?

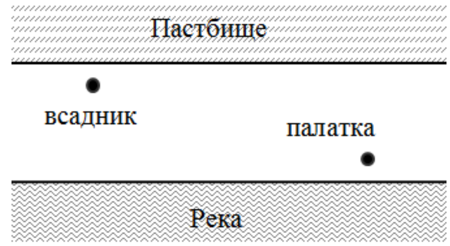
48. Существует ли шестизначное число из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6$, которое кратно 11? Докажите признак делимости на 11.

49. На прямоугольном бильярдном столе находится один шар. Как направить шар A так, чтобы он попал в лузу B и при этом

(a) отразился от нижнего борта стола?

(b) отразился сначала от верхнего, а затем от нижнего борта стола?

(c) ударился о левый, а затем о нижний борт стола?



50. Нарисуйте кратчайший путь до палатки, если всадник захотел сначала напоить, а потом накормить коня.

51. Макс и Мин красят забор из 20 досок. Каждый по очереди красит одну из досок (любую по своему выбору) в синий или зелёный цвет (по своему выбору). Начинает Макс. Когда весь забор покрашен (каждый игрок 20 покрасил 10 досок), подсчитывают число изменений цвета – границ, где синий цвет сменяется зелёным или наоборот. Макс хочет сделать это число большим, а Мин хочет сделать его маленьким. Что получится при оптимальной игре сторон?

52. Есть 17 карт. Зритель загадывает одну из них. Фокусник раскладывает все карты на 4 стопки и узнает у зрителя, в какой стопке оказалась задуманная карта.

(a) Докажите, что он всегда может определить задуманную карту за 3 вопроса, а двух вопросов может и не хватить.

(b) При каком наибольшем количестве карт можно наверняка определить задуманную карту за 3 вопроса?

53. Имеется 6 с виду одинаковых шаров, из которых два радиоактивные. Дозиметром можно проверить на радиоактивность любую группу шаров. За какое наименьшее число проверок можно выявить оба радиоактивных шара?

54. Среди 5 монет – ровно одна фальшивая: она отличается по весу от остальных, но неизвестно – легче или тяжелее. Требуется выявить ее на чашечных весах без гирь и узнать, легче она или тяжелее настоящей. Какое наименьшее число взвешиваний для этого наверняка хватит?

Билет №1

1. Петя написал несколько различных натуральных чисел, используя только две цифры. Сумма всех его чисел равна 100. Какое наибольшее количество чисел мог написать Петя?

2. Найдите сумму: $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{100}}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{100}}}}}}.$$

3. 100 монет есть ровно одна фальшивая (легче остальных). За какое наименьшее число на чашечных весах без гирь ее можно наверняка выявить?

4. Есть 17 карт. Зритель загадывает одну из них. Фокусник раскладывает все карты на 4 стопки и узнает у зрителя, в какой стопке оказалась задуманная карта. **(a)** Докажите, что он всегда может определить задуманную карту за 3 вопроса, а двух вопросов может и не хватить. **(b)** При каком наибольшем количестве карт можно наверняка определить задуманную карту за 3 вопроса?

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Билет №2

1. Простые числа. Формулировка основной теоремы арифметики.

2. Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число A?

3. Сколькими способами можно выстроить в ряд группу из 10 людей, если Петя и Вася не должны стоять рядом?

4. Сколькими способами можно раскрасить клетки полоски $1 \times 3n$ в три цвета так, чтобы всех цветов было поровну? (Полоска нарисована на доске.)

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Билет №3

1. Является ли сумма $1 + 4 + 7 + \ldots + 1000$ простым числом?

2. **(a)** По кругу расставили 100 чисел с положительной суммой. Докажите, что найдутся два числа, стоящие через одно, с положительной суммой.

3. Докажите признак делимости на 11.

4. Существует ли шестизначное число из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6$, которое кратно 11?

Билет №4

1. Дан квадрат 9×9 клеток. Его разбили на трёхклеточные «уголки». Возле каждой из 100 вершин клеток написали, сколько «уголков» содержат эту вершину. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?

2. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера. Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.

3. Макс и Мин красят забор из 20 досок. Каждый по очереди красит одну из досок (любую по своему выбору) в синий или зелёный цвет (по своему выбору). Начинает Макс. Когда весь забор покрашен (каждый игрок 20 покрасил 10 досок), подсчитывают число изменений цвета – границ, где синий цвет сменяется зелёным или наоборот. Макс хочет сделать это число большим, а Мин хочет сделать его маленьким. Что получится при оптимальной игре сторон?

Билет №5

1. Хромой король умеет ходить только вверх, вправо и вправо-вверх. Каких путей хромого короля больше: из **a1** в **h8** или из **a1** в **h7**?

2. По кругу расставлены 10 целых чисел с суммой 1. Сколькими способами можно выбрать 5 подряд идущих чисел с положительной суммой?

3. Докажите, что существует 100 подряд идущих составных чисел.

4. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Билет №6

1. Графы. Определение. Степень вершины.

2. В приходе графства Липшир 20 усадеб. И в этом приходе любые две дороги имеют общий конец. Докажите, что найдутся 18 усадеб, никакие две из которых не соединены дорогой.

3. 100 монет есть ровно одна фальшивая (легче остальных). За какое наименьшее число на чашечных весах без гирь ее можно наверняка выявить?

4. Есть 17 карт. Зритель загадывает одну из них. Фокусник раскладывает все карты на 4 стопки и узнает у зрителя, в какой стопке оказалась задуманная карта. **(a)** Докажите, что он всегда может определить задуманную карту за 3 вопроса, а двух вопросов может и не хватить. **(b)** При каком наибольшем количестве карт можно наверняка определить задуманную карту за 3 вопроса?

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Билет №7

1. Шестизначное число кратно 7. Докажите, что если его последнюю цифру переставить в начало, то полученное число тоже кратно 7.

2. У ромашки **(a)** 12 лепестков; **(b)** 11 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Как действовать второму игроку, чтобы выиграть независимо от ходов первого игрока?

3. Король стоит на поле $a1$ шахматной доски. За ход разрешается сдвинуть его на одну клетку вправо, или на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля на клетку $h8$. Кто выигрывает при правильной игре?

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Билет №8

1. В плоскости отмечена 101 точка, не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек красным карандашом проводится прямая. Докажите, что на плоскости существует точка, через которую проходит не меньше 11 красных прямых.

2. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

3. Докажите, что при делении на любое число, большее двух, есть такой остаток, который точный квадрат не дает.

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Билет №9

1. Признаки делимости на 3 и на 9.

2. Известно, что натуральное число n в 3 раза больше суммы своих цифр. Докажите, что n делится на 27.

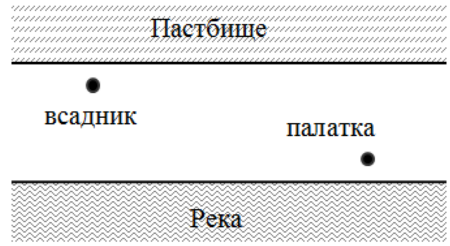
3. Число ребер в графе.Лемма о рукопожатиях.

4. В стране несколько мегаполисов (из которых выходит по 43 дороги) и несколько провинциальных городов (из которых выходит по 4 дороги). Докажите, что из любого мегаполиса можно проехать в некоторый другой мегаполис.

Билет №10

1. Признаки делимости на 4 и на 8.

2. Может ли степень двойки оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами?



3. На прямоугольном бильярдном столе находится один шар. Как направить шар так, чтобы он попал в лузу и при этом отразился от 2 бортов.

4. Нарисуйте кратчайший путь до палатки, если всадник захотел сначала напоить, а потом накормить коня.

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Билет №11

1. Макс и Мин красят забор из 20 досок. Каждый по очереди красит одну из досок (любую по своему выбору) в синий или зелёный цвет (по своему выбору). Начинает Макс. Когда весь забор покрашен (каждый игрок 20 покрасил 10 досок), подсчитывают число изменений цвета – границ, где синий цвет сменяется зелёным или наоборот. Макс хочет сделать это число большим, а Мин хочет сделать его маленьким. Что получится при оптимальной игре сторон?

2. У ромашки **(a)** 12 лепестков; **(b)** 11 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Как действовать второму игроку, чтобы выиграть независимо от ходов первого игрока?

3. Король стоит на поле $a1$ шахматной доски. За ход разрешается сдвинуть его на одну клетку вправо, или на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит короля на клетку $h8$. Кто выигрывает при правильной игре?

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Билет №12

1. Докажите, что существует 100 подряд идущих составных чисел.

2. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

3. 100 монет есть ровно одна фальшивая (легче остальных). За какое наименьшее число на чашечных весах без гирь ее можно наверняка выявить?

4. Есть 17 карт. Зритель загадывает одну из них. Фокусник раскладывает все карты на 4 стопки и узнает у зрителя, в какой стопке оказалась задуманная карта. **(a)** Докажите, что он всегда может определить задуманную карту за 3 вопроса, а двух вопросов может и не хватить. **(b)** При каком наибольшем количестве карт можно наверняка определить задуманную карту за 3 вопроса?

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Билет №13

1. Сколькими способами можно выстроить в ряд группу из 10 людей, если Петя и Вася не должны стоять рядом?

2. Сколькими способами можно раскрасить клетки полоски $1 \times 3n$ в три цвета так, чтобы всех цветов было поровну? (Полоска нарисована на доске.)

3. Докажите признак делимости на 11.

4. Существует ли шестизначное число из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6$, которое кратно 11?

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Билет №14

1. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали на 18 прямоугольников. Один из них отложили, а из остальных составили квадрат 10×10. Найдите размеры отложенного прямоугольника.

2. Клетчатый квадрат 17×17 разрезали на несколько прямоугольников по границам клеток. Докажите, что среди них найдется прямоугольник, периметр которого кратен 4.

3. Чему равно количество делителей числа $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$?

4. Число a меньше миллиона. Докажите, что у него не более 2 тысяч натуральных делителей.

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Билет №15

1. В стране есть несколько городов и несколько дорог с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через остальные. При этом, какие бы два города ни взять, хотя бы из одного из них можно проехать в другой, не нарушая правил движения. Докажите, что найдется город, из которого можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.

2. На ветках деревьев сидят 55 мартышек. Все расстояния между парами мартышек различны. Каждая мартышка кинула банан ближайшей соседке. Докажите, что какая-то мартышка осталась без банана.

3. Чему равно количество делителей числа $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$?

4. Докажите, что если у числа нечетное число делителей, оно является полным квадартом.

Билет №16

1. Деление с остатком.

2. Хромой король умеет ходить только вверх, вправо и вправо-вверх. Каких путей хромого короля больше: из **a1** в **h8** или из **a1** в **h7**?

3. По кругу расставлены 10 целых чисел с суммой 1. Сколькими способами можно выбрать 5 подряд идущих чисел с положительной суммой?

4. Миша задумал натуральное число и нашел его остатки от деления на $3, 6$ и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

Билет №17

1. Петя написал несколько различных натуральных чисел, используя только две цифры. Сумма всех его чисел равна 100. Какое наибольшее количество чисел мог написать Петя?

2. Найдите сумму: $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{100}}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{100}}}}}}.$$

3. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали на 18 прямоугольников. Один из них отложили, а из остальных составили квадрат 10×10. Найдите размеры отложенного прямоугольника.

4. Клетчатый квадрат 17×17 разрезали на несколько прямоугольников по границам клеток. Докажите, что среди них найдется прямоугольник, периметр которого кратен 4.

Задачи на 3. Группа А

1. Найдите все решения ребуса К×О×Т=У×Ч×Е×Н×Ы×Й.

2. Каких чисел среди шестизначных больше: тех, где каждая цифра больше предыдущей, или тех, где каждая цифра меньше предыдущей?

3. Можно ли так нарисовать 5 горизонтальных и 4 вертикальных отрезка, чтобы каждый горизонтальный отрезок пересекался ровно с тремя вертикальными отрезками, а каждый горизонтальный с тремя вертикальными?

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Задачи на 3. Группа Б

1. Доказать, что произведение шести последовательных натуральных чисел не может быть равно 776965920.

2. Докажите, что в любом графе есть по крайней мере две вершины одинаковой степени.

3. На доске написаны числа от 1 до 9. Двое по очереди их стирают, пока не останется два числа. Если сумма оставшихся чисел делится на три, то выигрывает первый, иначе - второй. Кто выигрывает при правильной стратегии?

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Задачи на 3. Группа В

1. Имеется много одинаковых квадратов. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3 и 4. Квадраты сложили в стопку и написали сумму чисел, попавших в каждый из четырёх углов стопки. Может ли оказаться так, что в каждом углу стопки сумма равна 2004?

2. В мешке лежит 64 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы без гирь, отмерить 23 кг гвоздей?

3. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код – число, состоящее из семи цифр: двоек и троек. Сейф откроется, если двоек больше, чем троек, а код делится и на 3, и на 4. Найдите код для открытия сейфа.

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Задачи на 3. Группа Г

1. Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Докажите, что это число делится на 7 тогда и только тогда, когда две его последние цифры равны.

2. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество четных делителей этого числа равно числу нечетных делителей этого числа.

3. На числовой прямой в точке 0 сидит кузнечик. Он умеет прыгать на 5 вправо и на 7 влево. Докажите, что он может допрыгать до любого, как положительного, так и отрицательного целого числа.

Задачи на 3. Группа А

1. Из 13 математиков и 40 экономистов надо составить комиссию из восьми человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в неё должен входить хотя бы один математик

2. Каких чисел среди шестизначных больше: тех, где каждая цифра больше предыдущей, или тех, где каждая цифра меньше предыдущей?

3. Можно ли так нарисовать 5 горизонтальных и 4 вертикальных отрезка, чтобы каждый горизонтальный отрезок пересекался ровно с тремя вертикальными отрезками, а каждый вертикальный с тремя горизонтальными?

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Задачи на 3. Группа Б

1. Доказать, что произведение шести последовательных натуральных чисел не может быть равно 776965920.

2. Докажите, что в любом графе есть по крайней мере две вершины одинаковой степени.

3. На числовой прямой в точке 0 сидит кузнечик. Он умеет прыгать на 5 вправо и на 7 влево. Докажите, что он может допрыгать до любого, как положительного, так и отрицательного целого числа.

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Задачи на 3. Группа В

1. Имеется много одинаковых квадратов. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа $1, 2, 3$ и 4. Квадраты сложили в стопку и написали сумму чисел, попавших в каждый из четырёх углов стопки. Может ли оказаться так, что в каждом углу стопки сумма равна 2018?

2. Известно, что $35! = 1033314796638614492 * 66665133752320000000$. Найдите цифру, заменённую звездочкой.

3. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество четных делителей этого числа равно числу нечетных делителей этого числа.

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Задачи на 4. Группа А

1. У царя Гороха I было три сына. Каждый из его потомков либо умер во младенчестве, либо правил государством и также имел трех сыновей. Известно, что последним правителем был Горох XXXIII. Сколько потомков царя Гороха умерло во младенчестве?

2. На доске написаны числа от 1 до 1000000. За ход можно заменить 2 числа на общую сумму их цифр. Может ли в конце оказаться цифра?

3. Можно ли из каких-нибудь 7 равных прямоугольников с периметром 20 составить один прямоугольник с периметром 100?

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Задачи на 4. Группа Б

1. Можно ли все клетки таблицы 9×2018 заполнить натуральными числами так, чтобы суммы чисел в каждом столбце и суммы чисел в каждой строке были бы простыми числами?

2. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки доски 9×9. Начинающий ставит крестики, его соперник - нолики. В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов — это очки, набранные первым игроком. Количество строчек и столбцов, где ноликов больше — очки второго. Тот из игроков, кто наберет больше очков, побеждает.

3. На клетчатой доске 100×100 закрасили n доминошек. Оказалось, что в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одна закрашенная клетка.При каком наименьшем n это возможно?

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Задачи на 4. Группа В

1. В однокруговом шахматном турнире участвовали 8 человек, и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

2. Каких чисел, меньших 10000, больше, с суммой цифр 15 или с суммой цифр 21?

3. Число $(N-1)!+1$ делится на N. Докажите, что N — простое число.

Задачи на 5. Группа А

1. На концерт пришли 125 человек, причем каждый был знаком ровно с 10 другими. В перерыве некоторые слушатели ушли. Оказалось, что все оставшиеся по-прежнему имеют в зале одинаковое количество знакомых. Докажите, что среди ушедших были знакомые друг с другом.

2. Дан белый клетчатый прямоугольник размером 1997×1999. Двое по очереди закрашивают в нём в чёрный цвет связные фигуры из 8 клеток каждая (не обязательно одинаковые). Проигрывает тот, кто не может закрасить очередную фигуру. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнёр?

3. На окружности даны $n > 10$ точек. Слава посчитал количество способов провести три отрезка с концами в данных точках, не имеющих общих точек (в том числе и концов). Докажите, что это количество делится на 5.

Кировская ЛМШ • 2018 год • «М6» • 27 июля

Задачи на 5. Группа Б

1. Фигура четверть-ферзь бьёт только в двух направлениях из восьми (эти два направления для каждой фигуры могут быть свои). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга четверть-ферзей можно расставить на шахматной доске?

2. Дано натуральное число $n > 1$. Для каждого делителя d числа $n+1$, Иосиф разделил число n на d с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь – остаток. Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают.

3. По кругу летают несколько шариков со скоростью 1 круг/с. При столкновении они меняют направление и сохраняют скорость. За 10 секунд произошло 430 соударений. А сколько было шариков?