6 класс, группа 14. Дорожные работы, 5 июля

1. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

2. В связном графе степени четырех вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.

3. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за кризиса был закрыт N-1 рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.

4. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

5. В королевстве 16 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в каждый, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более 5 дорог. а) Докажите, что это возможно. б) Докажите, что если заменить 5 на 4, то желание станет неосуществимым.

6. На ребрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны. Докажите, что, двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой

7. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами с односторонним движением. Для любого множества (не из всех) городов существует дорога, ведущая из города, входящего в это множество в город не из этого множества. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой.

8. В одном государстве 100 городов и каждый соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, что от любого города можно было доехать до любого другого. Если нет необходимости – можно не менять направление ни на одной дороге.

9. В некотором государстве города соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 км, и из любого города в любой другой можно попасть, проехав по дорогам меньше 500 км. Когда одна дорога оказалась закрытой на ремонт, выяснилось, что из каждого города можно проехать по оставшимся дорогам в любой другой. Доказать, что при этом можно проехать меньше 1500 км.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Дорожные работы, 5 июля

1. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

2. В связном графе степени четырех вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две изоморфные компоненты связности.

3. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за кризиса был закрыт N-1 рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.

4. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

5. В королевстве 16 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в каждый, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более 5 дорог. а) Докажите, что это возможно. б) Докажите, что если заменить 5 на 4, то желание станет неосуществимым.

6. На ребрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны. Докажите, что, двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой

7. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами с односторонним движением. Для любого множества (не из всех) городов существует дорога, ведущая из города, входящего в это множество в город не из этого множества. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой.

8. В одном государстве 100 городов и каждый соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, что от любого города можно было доехать до любого другого. Если нет необходимости – можно не менять направление ни на одной дороге.

9. В некотором государстве города соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 км, и из любого города в любой другой можно попасть, проехав по дорогам меньше 500 км. Когда одна дорога оказалась закрытой на ремонт, выяснилось, что из каждого города можно проехать по оставшимся дорогам в любой другой. Доказать, что при этом можно проехать меньше 1500 км.

6 класс, послеобеденный разнобой, 5 июля

1. Вася познакомился с четырьмя девочками. Он знает, что их зовут Аня, Белла, Варя, Галя, но ещё не знает, кого как. Он может спрашивать у одной девочки, как зовут другую девочку. Вася знает, что Аня всегда врёт, и про Беллу всегда врут, а в остальных случаях девочки говорят правду. Сможет ли он выяснить, кто Аня?

2. В какое минимальное число цветов нужно раскрасить клетки доски 8×8 так, чтобы любые две соседние (по стороне или вершине) клетки были разных цветов?

3. На окружности отмечено 98 точек. Некоторые не рядом стоящие точки соединили отрезками так, что получилось 33 отрезка, не пересекающиеся друг с другом ни в одной точке. Докажите, что можно соединить отрезком еще две какие-то из отмеченных точек (не соединенные ранее отрезками) так, что этот отрезок пересечет не менее трех из проведенных уже отрезков.

4. Отбор на Межпланетную олимпиаду проходит в два тура, и перед жюри стоит задание: в каждом туре рассадить участников в аудиториях так, чтобы любые два участника хотя бы во время одного из туров сидели в аудиториях с различным числом участников. Может ли жюри сделать это, если в отборе 9 участников?

5. Винни-Пух и Пятачок играют на бесконечной полоске клетчатой бумаги (шириной в одну клетку). Винни-Пух ставит два крестика, а Пятачок стирает любое число подряд идущих крестиков. Сможет ли Пятачок помешать Винни-Пуху выставить 10 крестиков в ряд?

6. Отец выдал Алексу и Джеймсу 100 задач. Тот, кто решает задачу первым, получает за неё 4 очка, вторым – 1 очко. В результате каждый из них решил по 60 задач (не обязательно одинаковых). Могли ли они набрать в сумме 313 очков?

7. Можно ли расставить на листе клетчатой бумаги крестики и нолики так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд?

8. Можно ли в половину клеток минного поля 12×12 поместить по мине так, чтобы в одном квадрате 2×2 было нечётное количество мин, а в остальных -- чётное?

9. Из *k* спичек Маша складывает треугольники со сторонами, кратными длине спички. (Все спички должны быть использованы, ломать их нельзя). Её цель– чтобы любые две стороны в сложенном ею треугольнике отличались не меньше, чем на 10 спичек. При каком наибольшем *k* Маша не сможет достичь цели?

10. У Вернера есть 40 пылинок. За одно измерение он может определить веса у двух каких-то пылинок. После этого одна из них (но Вернер не увидит, какая именно) обязательно потеряет в весе 1 мг. Помогите Вернеру измерять так, чтобы в какой-то момент он мог точно указать веса всех пылинок перед последним из своих измерений, которые он на тот момент произвёл.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, послеобеденный разнобой, 5 июля

1. Вася познакомился с четырьмя девочками. Он знает, что их зовут Аня, Белла, Варя, Галя, но ещё не знает, кого как. Он может спрашивать у одной девочки, как зовут другую девочку. Вася знает, что Аня всегда врёт, и про Беллу всегда врут, а в остальных случаях девочки говорят правду. Сможет ли он выяснить, кто Аня?

2. В какое минимальное число цветов нужно раскрасить клетки доски 8×8 так, чтобы любые две соседние (по стороне или вершине) клетки были разных цветов?

3. На окружности отмечено 98 точек. Некоторые не рядом стоящие точки соединили отрезками так, что получилось 33 отрезка, не пересекающиеся друг с другом ни в одной точке. Докажите, что можно соединить отрезком еще две какие-то из отмеченных точек (не соединенные ранее отрезками) так, что этот отрезок пересечет не менее трех из проведенных уже отрезков.

4. Отбор на Межпланетную олимпиаду проходит в два тура, и перед жюри стоит задание: в каждом туре рассадить участников в аудиториях так, чтобы любые два участника хотя бы во время одного из туров сидели в аудиториях с различным числом участников. Может ли жюри сделать это, если в отборе 9 участников?

5. Винни-Пух и Пятачок играют на бесконечной полоске клетчатой бумаги (шириной в одну клетку). Винни-Пух ставит два крестика, а Пятачок стирает любое число подряд идущих крестиков. Сможет ли Пятачок помешать Винни-Пуху выставить 10 крестиков в ряд?

6. Отец выдал Алексу и Джеймсу 100 задач. Тот, кто решает задачу первым, получает за неё 4 очка, вторым – 1 очко. В результате каждый из них решил по 60 задач (не обязательно одинаковых). Могли ли они набрать в сумме 313 очков?

7. Можно ли расставить на листе клетчатой бумаги крестики и нолики так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд?

8. Можно ли в половину клеток минного поля 12×12 поместить по мине так, чтобы в одном квадрате 2×2 было нечётное количество мин, а в остальных -- чётное?

9. Из *k* спичек Маша складывает треугольники со сторонами, кратными длине спички. (Все спички должны быть использованы, ломать их нельзя). Её цель– чтобы любые две стороны в сложенном ею треугольнике отличались не меньше, чем на 10 спичек. При каком наибольшем *k* Маша не сможет достичь цели?

10. У Вернера есть 40 пылинок. За одно измерение он может определить веса у двух каких-то пылинок. После этого одна из них (но Вернер не увидит, какая именно) обязательно потеряет в весе 1 мг. Помогите Вернеру измерять так, чтобы в какой-то момент он мог точно указать веса всех пылинок перед последним из своих измерений, которые он на тот момент произвёл.

6 класс, группа 14. Текстовые задачи, 5 июля

1. В школьной олимпиаде по математике участвовало 60 человек, по физике – 50, по информатике – 40. Составили три списка: тех, кто участвовал ровно в одной из олимпиад, ровно в двух, ровно в трех. Во всех списках одно и то же число людей. Сколько человек в каждом списке?

2. Петя написал несколько различных натуральных чисел, используя только две цифры. Сумма всех его чисел равна 100. Какое наибольшее количество чисел мог написать Петя

3. Даны три числа. Если их все увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. Если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. А на сколько увеличится произведение, если все исходные числа увеличить на 3?

4. Сельский гипнотизёр Иван Карпович разводит индюков и кур. Вследствие его экспериментов десятая часть индюков считает, что они – куры, а десятая часть кур считает, что они –индюки. Если рассматривать всех, то пятая часть птиц Ивана Карповича считает себя индюками. А какую часть составляю индюки в его птичнике на самом деле?

5. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не 1/2 очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение – не 0 очков, а -1, ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

6. У Алёны есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Алёна садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алёна говорила по телефону ровно половину времени поездки?

7. Управдом Остап Бендер собирал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич из 105-й квартиры поинтересовался, почему у них во втором подъезде надо собрать денег на 40% больше, чем в первом, хотя квартир там и тут поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что двузначные номера стоят вдвое, а трёхзначные — втрое больше, чем однозначные. Сколько квартир в подъезде?

8. На городскую олимпиаду пришли школьники и учителя (конечно, школьников больше). Каждый школьник взял с собой по пять ручек и совсем не брал тетрадей, а каждый учитель взял лишь по две ручки, но зато также взял по семь тетрадей. Оказалось, что общее количество ручек на столько же превосходит общее количество тетрадей, на сколько процентов школьников больше, чем учителей. Сколько учителей пришло на олимпиаду?

9. Марья заплатила за персики 120 рублей, но, когда посмотрела повнимательнее, обнаружила, что персики мелкие, поэтому она заставила торговца положить ей сверх того еще 2 персика. После этого стоимость одной дюжины персиков уменьшилась на 10 рублей. Сколько персиков купила Марья?

10. Продав последний персик за 23 рубля, торговец вычислил, что он продавал их в среднем за 24,5 рубля. Но покупатель ему этот персик, указав на червоточину, и согласился купить его лишь за 15 рублей 80 копеек. Пересчитав среднюю цену, торговец выяснил, что она стала равной 24 рублям 20 копейкам. Сколько персиков продал торговец?

6 класс, группа 14. Разложение на простые, 6 июля

1. Перемножили несколько натуральных чисел и получили 224, причем самое маленькое число было ровно вдвое меньше самого большого. Сколько чисел перемножили?

2. Вася выбрал несколько различных натуральных чисел так, что произведение двух самых маленьких из них равно 16, а произведение двух самых больших равно 225. Что это за числа?

3. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

4. Назовем число интересным, если в его разложение на простые множители каждый множитель входит в нечетной степени (например, два таких последовательных числа: $23 = 23^1$ и $24 = 2^3 \cdot 3^1$). Какое наибольшее количество интересных чисел может идти подряд?

5. Доказать, что в вершинах многогранника можно расставить натуральные числа так, что в каждых двух вершинах, соединённых ребром, стоят числа не взаимно простые, а в каждых двух вершинах, не соединённых ребром, взаимно простые.

6. Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

7. Можно ли расставить по кругу 99 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

8. На доске выписаны попарно различные натуральные числа, меньшие 2018, причем НОД любых двух чисел на доске больше 1. Какое наибольшее количество чисел может быть выписано?

9. Можно ли вычеркнуть из произведения $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 100!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

10. Пусть $C(n)$ – количество различных простых делителей числа n. (Например, $C(10) = 2$, $C(11) = 1$, $C(12) = 2$.) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Разложение на простые, 6 июля

1. Перемножили несколько натуральных чисел и получили 224, причем самое маленькое число было ровно вдвое меньше самого большого. Сколько чисел перемножили?

2. Вася выбрал несколько различных натуральных чисел так, что произведение двух самых маленьких из них равно 16, а произведение двух самых больших равно 225. Что это за числа?

3. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

4. Назовем число интересным, если в его разложение на простые множители каждый множитель входит в нечетной степени (например, два таких последовательных числа: $23 = 23^1$ и $24 = 2^3 \cdot 3^1$). Какое наибольшее количество интересных чисел может идти подряд?

5. Доказать, что в вершинах многогранника можно расставить натуральные числа так, что в каждых двух вершинах, соединённых ребром, стоят числа не взаимно простые, а в каждых двух вершинах, не соединённых ребром, взаимно простые.

6. Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

7. Можно ли расставить по кругу 99 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

8. На доске выписаны попарно различные натуральные числа, меньшие 2018, причем НОД любых двух чисел на доске больше 1. Какое наибольшее количество чисел может быть выписано?

9. Можно ли вычеркнуть из произведения $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 100!$ один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

10. Пусть $C(n)$ – количество различных простых делителей числа n. (Например, $C(10) = 2$, $C(11) = 1$, $C(12) = 2$.) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?

6 класс, послеобеденный разнобой - 2, 6 июля

11. В квадрате 100×100 расставлены числа так, что в любом квадрате 2×2, раскрашенного в шахматном порядке, сумма чисел на черных клетках равна сумме чисел на белых клетках. Докажите, что сумма двух чисел в концах одной большой диагонали равна сумме двух числе в концах другой большой диагонали.

12. Какое минимальное количество клеток нужно вырезать из шахматной доски 8×8, чтобы на ней нельзя было сделать ход конём?

13. На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге?

14. 40 детей стоят по кругу. Ребёнок называется дылдой, если он выше двух следующих за ним по часовой стрелке, и мелким, если он ниже обоих предшествующих ему по часовой стрелке. (Ребёнок может быть и мелким, и дылдой одновременно.) Известно, что дылд не меньше 30. Докажите, что мелких не меньше 20.

15. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число – разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

16. Гриша записал в клетки шахматной доски числа 1, 2, …, 64 в неизвестном порядке. Он сообщил Леше сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Леша может точно определить, где какое число записано.

17. Два девятизначных числа $\overline{a_1a_2\ldots a_9}$ и $\overline{b_1b_2\ldots b_9}$ таковы, что при замене любой цифры a_i первого числа на соответствующую цифру b_i второго числа получается число, кратное 7. Докажите, что при замене любой цифры второго числа на соответствующую цифру первого числа тоже будет получиться число, кратное 7.

18. Шестизначное число, все цифры в записи которого нечетны, делится на 37. Может ли его сумма цифр быть равна 38?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, послеобеденный разнобой - 2, 6 июля

11. В квадрате 100×100 расставлены числа так, что в любом квадрате 2×2, раскрашенного в шахматном порядке, сумма чисел на черных клетках равна сумме чисел на белых клетках. Докажите, что сумма двух чисел в концах одной большой диагонали равна сумме двух числе в концах другой большой диагонали.

12. Какое минимальное количество клеток нужно вырезать из шахматной доски 8×8, чтобы на ней нельзя было сделать ход конём?

13. На острове Невезения с населением 96 человек правительство решило провести пять реформ. Каждой реформой недовольна ровно половина всех граждан. Гражданин выходит на митинг, если он недоволен более чем половиной всех реформ. Какое максимальное число людей правительство может ожидать на митинге?

14. 40 детей стоят по кругу. Ребёнок называется дылдой, если он выше двух следующих за ним по часовой стрелке, и мелким, если он ниже обоих предшествующих ему по часовой стрелке. (Ребёнок может быть и мелким, и дылдой одновременно.) Известно, что дылд не меньше 30. Докажите, что мелких не меньше 20.

15. На доске написаны числа 25 и 36. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число – разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

16. Гриша записал в клетки шахматной доски числа 1, 2, …, 64 в неизвестном порядке. Он сообщил Леше сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Леша может точно определить, где какое число записано.

17. Два девятизначных числа $\overline{a_1a_2\ldots a_9}$ и $\overline{b_1b_2\ldots b_9}$ таковы, что при замене любой цифры a_i первого числа на соответствующую цифру b_i второго числа получается число, кратное 7. Докажите, что при замене любой цифры второго числа на соответствующую цифру первого числа тоже будет получиться число, кратное 7.

18. Шестизначное число, все цифры в записи которого нечетны, делится на 37. Может ли его сумма цифр быть равна 38?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Теория по графам, 6 июля

11. В любой компании найдутся два человека, у которых в этой компании равное число знакомых.

12. 38 попугаев передрались, измеряя рост удава. Каждый из них сумел выдрать одно перо из чьего-то хвоста, и у каждого попугая было выдрано одно перо. Кроме того, для любых трех попугаев можно указать четвертого, выдравшего перо у одного из них. Доказать, что для наведения порядка удав может проглотить не более 6 попугаев, а остальных рассадить поровну в две клетки так, чтобы ни один попугай не попал в одну группу со своим обидчиком.

13. Можно ли познакомить между собой *n* человек, чтобы никакие трое не имели одинаковое число знакомых?

14. В государстве *n* городов, причем из каждого города выходит не менее (*n*-1)/2 дорог. Докажите, что из любого города можно доехать до любого другого.

15. а) В некотором государстве любые два аэропорта соединены беспосадочной авиалинией одной из двух авиакомпаний. Докажите, что можно долететь из любого аэропорта в любой другой, пользуясь рейсами только какой-то одной из двух авиакомпаний. б) Докажите, что либо граф, либо его дополнение – связен.

16. а) В графе из любой вершины выходит хотя бы два ребра. Докажите, что в этом графе есть цикл. б) В графе из всех вершин, кроме одной, выходит хотя бы два ребра. Докажите, что в этом графе есть цикл.

17. На доске выписано несколько положительных вещественных чисел. Докажите, что среди них найдется такое, для которого среди выписанных нет ни втрое большего числа, ни вдвое меньшего.

18. Докажите, что в связном графе с *n* вершинами не менее, чем *n*–1 ребро.

19. а) В графе 2*n*+1 вершин. Известно, что после выкидывания любой из них остальные вершины можно разбить на пары вершин, соединенных ребром. Какое наименьшее число ребер может быть в этом графе?

20. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки. Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Теория по графам, 6 июля

11. В любой компании найдутся два человека, у которых в этой компании равное число знакомых.

12. 38 попугаев передрались, измеряя рост удава. Каждый из них сумел выдрать одно перо из чьего-то хвоста, и у каждого попугая было выдрано одно перо. Кроме того, для любых трех попугаев можно указать четвертого, выдравшего перо у одного из них. Доказать, что для наведения порядка удав может проглотить не более 6 попугаев, а остальных рассадить поровну в две клетки так, чтобы ни один попугай не попал в одну группу со своим обидчиком.

13. Можно ли познакомить между собой *n* человек, чтобы никакие трое не имели одинаковое число знакомых?

14. В государстве *n* городов, причем из каждого города выходит не менее (*n*-1)/2 дорог. Докажите, что из любого города можно доехать до любого другого.

15. а) В некотором государстве любые два аэропорта соединены беспосадочной авиалинией одной из двух авиакомпаний. Докажите, что можно долететь из любого аэропорта в любой другой, пользуясь рейсами только какой-то одной из двух авиакомпаний. б) Докажите, что либо граф, либо его дополнение – связен.

16. а) В графе из любой вершины выходит хотя бы два ребра. Докажите, что в этом графе есть цикл. б) В графе из всех вершин, кроме одной, выходит хотя бы два ребра. Докажите, что в этом графе есть цикл.

17. На доске выписано несколько положительных вещественных чисел. Докажите, что среди них найдется такое, для которого среди выписанных нет ни втрое большего числа, ни вдвое меньшего.

18. Докажите, что в связном графе с *n* вершинами не менее, чем *n*–1 ребро.

19. а) В графе 2*n*+1 вершин. Известно, что после выкидывания любой из них остальные вершины можно разбить на пары вершин, соединенных ребром. Какое наименьшее число ребер может быть в этом графе?

20. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки. Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

6 класс, группа 14. Степени вхождения, 7 июля

ТЕОРИЯ а) Докажите, что произведение двух последовательных натуральных чисел не может являться степенью выше первой никакого натурального числа;

б)* а верно ли это утверждение для произведения трех чисел?

в) докажите, что если произведение двух взаимно простых чисел – точный квадрат, то каждое из них – точный квадрат.

в) а верно ли это для кубов?

1. Пусть a, b, c – примитивная пифагорова тройка, то есть это натуральные числа, для которых $a^2+b^2=c^2$ и $(a, b, c) = 1$. Докажите, что $c–b$ всегда либо квадрат, либо удвоенный квадрат. (Подсказка. Докажите, что $a^2–b^2 = (a–b)(a+b)$).

2. Приведите пример натурального числа, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

3. Найдите натуральное число вида $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, зная, что половина его имеет на 30 делителей меньше, треть — на 35 и пятая часть — на 42 делителя меньше, чем само число.

4. а) На сколько нулей оканчивается число 2018!? **б)** Существует ли такое натуральное число n, что n! оканчивается на 100 нулей?

5. а) Докажите, что произведение чисел от $n+1$ до $2n$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}. **б)** Докажите, что n! не делится на 2^n.

6. Произведение 15 последовательных чисел не делится на 2^{12}. Докажите, что среднее число делится на 8.

7. Натуральные взаимно простые в совокупности a, b, c таковы, что $ab = c(a–b)$. Докажите, что $(a–b)$ – точный квадрат.

8. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

9. Пусть A – множество из шести натуральных чисел, больших 1 и взаимно простых в совокупности. Известно, что произведение любых двух чисел из A делится на любое из оставшихся. Докажите, что произведение всех чисел из A – точная пятая степень.

10. Докажите, что произведение n последовательных чисел делится на n!

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Степени вхождения, 7 июля

ТЕОРИЯ а) Докажите, что произведение двух последовательных натуральных чисел не может являться степенью выше первой никакого натурального числа;

б)* а верно ли это утверждение для произведения трех чисел?

в) докажите, что если произведение двух взаимно простых чисел – точный квадрат, то каждое из них – точный квадрат.

в) а верно ли это для кубов?

1. Пусть a, b, c – примитивная пифагорова тройка, то есть это натуральные числа, для которых $a^2+b^2=c^2$ и $(a, b, c) = 1$. Докажите, что $c–b$ всегда либо квадрат, либо удвоенный квадрат. (Подсказка. Докажите, что $a^2–b^2 = (a–b)(a+b)$).

2. Приведите пример натурального числа, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

3. Найдите натуральное число вида $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, зная, что половина его имеет на 30 делителей меньше, треть — на 35 и пятая часть — на 42 делителя меньше, чем само число.

4. а) На сколько нулей оканчивается число 2018!? **б)** Существует ли такое натуральное число n, что n! оканчивается на 100 нулей?

5. а) Докажите, что произведение чисел от $n+1$ до $2n$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}. **б)** Докажите, что n! не делится на 2^n.

6. Произведение 15 последовательных чисел не делится на 2^{12}. Докажите, что среднее число делится на 8.

7. Натуральные взаимно простые в совокупности a, b, c таковы, что $ab = c(a–b)$. Докажите, что $(a–b)$ – точный квадрат.

8. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

9. Пусть A – множество из шести натуральных чисел, больших 1 и взаимно простых в совокупности. Известно, что произведение любых двух чисел из A делится на любое из оставшихся. Докажите, что произведение всех чисел из A – точная пятая степень.

10. Докажите, что произведение n последовательных чисел делится на n!

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

Индивидуальная комбиолимпиада, 7 июля

1. Есть три одинаковых больших сосуда. В одном - 3 л сиропа, в другом - 20 л воды, третий - пустой. Можно выливать из одного сосуда всю жидкость в другой или в раковину. Можно выбрать два сосуда и доливать в один из них из третьего, пока уровни жидкости в выбранных сосудах не сравняются. Как получить 10 л разбавленного 30-процентного сиропа?

б) То же, но воды - *N* л. При каких целых *N* можно получить 10 л разбавленного 30-процентного сиропа?

2. У Малыша и Карлсона был круглый торт. Карлсон провел два прямолинейных разреза, проходящие через центр торта. После этого Малыш сделал еще один прямолинейный разрез того же торта. Докажите, что одна из полученных частей имеет площадь не менее $\frac{1}{6}$ площади торта.

3. Сколько существует разных способов разбить число 2018 на целые положительные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

4. Каждая из 100 девушек послала одному или нескольким из 100 юношей свою фотографию. Всего было послано больше 100 фотографий. Докажите, что какой-то из юношей может выкинуть все полученные им фотографии, но при этом фотография каждой девушки останется у кого-либо из остальных юношей.

5. На Луне *n* городов, некоторые из которых соединены платными дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость турпоездки из города А в город В – как стоимость проезда из А в В по самому дешевому пути. Докажите, что в прайс-листе лунного турагентства не более *n*–1 различных цен.**6.** В ряд стоят 100 детей разного роста. Разрешается выбрать любых 50 детей, стоящих подряд, и переставить их между собой как угодно (остальные остаются на своих местах). Как всего за 6 таких перестановок гарантированно построить всех детей по убыванию роста слева направо?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

Индивидуальная комбиолимпиада, 7 июля

1. Есть три одинаковых больших сосуда. В одном - 3 л сиропа, в другом - 20 л воды, третий - пустой. Можно выливать из одного сосуда всю жидкость в другой или в раковину. Можно выбрать два сосуда и доливать в один из них из третьего, пока уровни жидкости в выбранных сосудах не сравняются. Как получить 10 л разбавленного 30-процентного сиропа?

б) То же, но воды - *N* л. При каких целых *N* можно получить 10 л разбавленного 30-процентного сиропа?

2. У Малыша и Карлсона был круглый торт. Карлсон провел два прямолинейных разреза, проходящие через центр торта. После этого Малыш сделал еще один прямолинейный разрез того же торта. Докажите, что одна из полученных частей имеет площадь не менее $\frac{1}{6}$ площади торта.

3. Сколько существует разных способов разбить число 2018 на целые положительные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

4. Каждая из 100 девушек послала одному или нескольким из 100 юношей свою фотографию. Всего было послано больше 100 фотографий. Докажите, что какой-то из юношей может выкинуть все полученные им фотографии, но при этом фотография каждой девушки останется у кого-либо из остальных юношей.

5. На Луне *n* городов, некоторые из которых соединены платными дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость турпоездки из города А в город В – как стоимость проезда из А в В по самому дешевому пути. Докажите, что в прайс-листе лунного турагентства не более *n*–1 различных цен.**6.** В ряд стоят 100 детей разного роста. Разрешается выбрать любых 50 детей, стоящих подряд, и переставить их между собой как угодно (остальные остаются на своих местах). Как всего за 6 таких перестановок гарантированно построить всех детей по убыванию роста слева направо?

6 класс, группа 14. Клетчатая серия, 9 июля

1. а) В какое наибольшее количество цветов можно покрасить клетки бесконечного клетчатого листа бумаги так, чтобы в любом прямоугольнике 3×4 (переворачивать прямоугольник нельзя) были клетки всех цветов? б) та же задача, но можно поворачивать прямоугольник.

2. Можно ли покрасить некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы в любом квадрате 3×3 было ровно 5 закрашенных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 (вертикальном или горизонтальном) – ровно 4 закрашенные клетки?

3. Петя и Вася играют на доске 8×8 с вырезанным угловым полем. Они ходят по очереди, выставляя королей в свободные клетки по одному за ход. Начинает Петя. После каждого хода игрок прибавляет себе столько очков, сколько королей побил только что выставленный им король. Когда все поля заполнены, выигрывает тот, у кого в сумме больше очков. Кто победит при правильной игре?

4. На квадратном поле размерами 99×99, разграфленном на клетки размерами 1×1, играют двое. Первый игрок ставит крестик на центр поля; вслед за этим второй игрок может поставить нолик на любую из восьми клеток, окружающих крестик первого игрока. После этого первый ставит крестик на любое из полей рядом с уже занятыми и т.д. Первый игрок выигрывает, если ему удастся поставить крестик на любую угловую клетку, а второй выигрывает, если ему удастся помешать первому. Кто победит при правильной игре?

5. В каждой клетке бесконечной клетчатой доски поставлено по числу таким образом, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел положительна. Докажите, что
а) найдётся фигурка из 4 клеток в форме буквы Т, что в ней сумма положительна;
б) найдётся уголок из 3 клеток, что в нём сумма положительна;
в) для любого $n > 0$ найдутся две клетки в одной строке на расстоянии n, что сумма чисел, стоящих в них, положительна;
г) найдётся уголок из 5 клеток, что в нём сумма положительна.
д) найдётся уголок из 5 клеток, смотрящий вверх-вправо, что в нём сумма положительна.

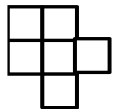
6. В клетках прямоугольной таблицы 8×5 расставлены натуральные числа. За один ход разрешается одновременно удвоить все числа одной строки или же вычесть единицу из всех чисел одного столбца. Доказать, что за несколько ходов можно добиться того, чтобы все числа таблицы стали равными нулю.

7. В некоторых клетках квадрата 11×11 стоят плюсы, причём всего плюсов чётное количество. В каждом квадратике 2×2 тоже чётное число плюсов. Докажите, что чётно и число плюсов в 11 клетках главной диагонали квадрата.

8. Какое наибольшее число фигурок (в форме креста, вырезанного из квадрата 3×3) можно вырезать по линиям сетки из клетчатого квадрата 8×8?

9. Назовем бабочкой фигуру, состоящую из двух клеток, соседних по углу. Какое наименьшее количество бабочек можно разместить на доске 10×10 таким образом, чтобы любая клетка этой доски либо принадлежала одной из бабочек, либо была соседней по стороне с клеткой одной из бабочек?

10. Клетки квадрата 3×3 раскрашены в черный и белый цвета так, что количество черных клеток в любом квадрате 2×2 четно, а в любой фигуре вида, показанного на рисунке справа – нечетно. Докажите, что все угловые клетки покрашены в один цвет.



6 класс, группа 14. Немного о цифрах, 9 июля

1. Существует ли трехзначное число, у которого цифры слева направо идут в порядке возрастания, а если его умножить на 3, то у результата цифры идут в порядке убывания?

2. Шестизначное число кратно 7. Докажите, что если его последнюю цифру переставить в начало, то полученное число тоже кратно 7.

3. На доске было написано число вида 777…77. Витя стер у этого числа последнюю цифру, полученное число умножил на 3 и к произведению прибавил стертую цифру. С полученным числом он проделал ту же операцию и т.д. Докажите, что через некоторое время у него получится число 7.

4. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

5. а) Приведите пример натурального числа, не кратного 11, которое разделится на 11, если любую из его цифр увеличить или уменьшить на 1 (увеличивать или уменьшать – выбираем мы, а какую цифру – выбирает враг).

б) Приведите пример натурального числа, не кратного 11, которое разделится на 11, если любую из его цифр изменить на цифру 1.

6. Найдите наименьшее натуральное число n, такое, что сумма цифр числа n равняется сумме цифр числа $11n$.

7. В любом ли семизначном числе можно поменять 6 цифр так, чтобы результат не был равен 0 и делился на 1234567?

8. Вася написал на доске несколько последовательных натуральных чисел. Петя переставил цифры в каждом из них, и все числа стали простыми. Какое наибольшее количество чисел могло быть написано у Васи?

9. Назовем *обрезком* числа новое число, получаемое стиранием одной или нескольких последовательных начальных цифр данного числа. Найдите наибольшее число, не имеющее в своей записи нулей, которое делится на любой из своих обрезков.

10. На доске записано число 1998. Двое по очереди приписывают к нему по одной цифре: первый – слева и только нечетные цифры, второй – справа и только четные цифры. Выигрывает тот, после хода которого число впервые становится кратным 11. Кто из игроков может при правильной игре обеспечить себе выигрыш?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Немного о цифрах, 9 июля

1. Существует ли трехзначное число, у которого цифры слева направо идут в порядке возрастания, а если его умножить на 3, то у результата цифры идут в порядке убывания?

2. Шестизначное число кратно 7. Докажите, что если его последнюю цифру переставить в начало, то полученное число тоже кратно 7.

3. На доске было написано число вида 777…77. Витя стер у этого числа последнюю цифру, полученное число умножил на 3 и к произведению прибавил стертую цифру. С полученным числом он проделал ту же операцию и т.д. Докажите, что через некоторое время у него получится число 7.

4. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

5. а) Приведите пример натурального числа, не кратного 11, которое разделится на 11, если любую из его цифр увеличить или уменьшить на 1 (увеличивать или уменьшать – выбираем мы, а какую цифру – выбирает враг).

б) Приведите пример натурального числа, не кратного 11, которое разделится на 11, если любую из его цифр изменить на цифру 1.

6. Найдите наименьшее натуральное число n, такое, что сумма цифр числа n равняется сумме цифр числа $11n$.

7. В любом ли семизначном числе можно поменять 6 цифр так, чтобы результат не был равен 0 и делился на 1234567?

8. Вася написал на доске несколько последовательных натуральных чисел. Петя переставил цифры в каждом из них, и все числа стали простыми. Какое наибольшее количество чисел могло быть написано у Васи?

9. Назовем *обрезком* числа новое число, получаемое стиранием одной или нескольких последовательных начальных цифр данного числа. Найдите наибольшее число, не имеющее в своей записи нулей, которое делится на любой из своих обрезков.

10. На доске записано число 1998. Двое по очереди приписывают к нему по одной цифре: первый – слева и только нечетные цифры, второй – справа и только четные цифры. Выигрывает тот, после хода которого число впервые становится кратным 11. Кто из игроков может при правильной игре обеспечить себе выигрыш?

6 класс, группа 14. Задачи о домино, 10 июля

1. а) Все 28 доминошек выложены в ряд. На одном конце тройка. Что может быть на другом конце?

б) 27 доминошек выложены в ряд так, что оставшуюся кость выложить нельзя. Докажите, что оставшаяся кость — дубль.

в) 26 доминошек выложены в ряд так, что оставшиеся кости выложить нельзя. Докажите, что обе оставшиеся кости — дубли.

2. Из комплекта домино выбросили все кости, содержащие шестерки. Можно ли выложить все оставшиеся кости в ряд?

3. В комплект *домино-2017* входят все кости, которые можно составить из чисел от 0 до 2017. Можно ли выложить все кости такого комплекта в ряд?

4. В комплект *домино-n* входят все кости, которые можно составить из чисел от 0 до n. При каких n ответ на вопрос, можно ли выложить все кости такого комплекта в ряд, будет получаться так же, как в предыдущей задаче?

5. Докажите, что все кости комплекта *домино-2018* можно выложить так, чтобы получилось одно или несколько колец.

6. а) Докажите, что если все кости комплекта *домино-2018* выложены так, что получилось несколько колец, то какие-то два из этих колец можно (предварительно как-то разорвав каждое из них) соединить в одно. **б)** Докажите, что все кости комплекта *домино-2018* можно выложить так, чтобы получилось одно кольцо.

7. При каких n решения задач 5 и 6 можно перенести на случай *домино-n*?

8. Несколько комплектов *домино-n* смешали и выбросили из получившегося набора некоторое количество костей, включая все дубли. При каком условии все оставшиеся кости можно выложить

а) в одно или несколько колец? **б)** ровно в одно кольцо?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Задачи о домино, 10 июля

1. а) Все 28 доминошек выложены в ряд. На одном конце тройка. Что может быть на другом конце?

б) 27 доминошек выложены в ряд так, что оставшуюся кость выложить нельзя. Докажите, что оставшаяся кость — дубль.

в) 26 доминошек выложены в ряд так, что оставшиеся кости выложить нельзя. Докажите, что обе оставшиеся кости — дубли.

2. Из комплекта домино выбросили все кости, содержащие шестерки. Можно ли выложить все оставшиеся кости в ряд?

3. В комплект *домино-2017* входят все кости, которые можно составить из чисел от 0 до 2017. Можно ли выложить все кости такого комплекта в ряд?

4. В комплект *домино-n* входят все кости, которые можно составить из чисел от 0 до n. При каких n ответ на вопрос, можно ли выложить все кости такого комплекта в ряд, будет получаться так же, как в предыдущей задаче?

5. Докажите, что все кости комплекта *домино-2018* можно выложить так, чтобы получилось одно или несколько колец.

6. а) Докажите, что если все кости комплекта *домино-2018* выложены так, что получилось несколько колец, то какие-то два из этих колец можно (предварительно как-то разорвав каждое из них) соединить в одно. **б)** Докажите, что все кости комплекта *домино-2018* можно выложить так, чтобы получилось одно кольцо.

7. При каких n решения задач 5 и 6 можно перенести на случай *домино-n*?

8. Несколько комплектов *домино-n* смешали и выбросили из получившегося набора некоторое количество костей, включая все дубли. При каком условии все оставшиеся кости можно выложить

а) в одно или несколько колец? **б)** ровно в одно кольцо?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. О десятичной записи, 10 июля

1. Докажите, что число 19191919199797979797 – составное.

2. Простым или составным является ли число $\underbrace{888\ldots8}_{2017}97\underbrace{99\ldots9}_{2018}$?

3. Число $\overline{abcdef}$ делится на 37. Докажите, что а) $\overline{abc}+\overline{def}$ делится на 37; б) $\overline{bcdefa}$ делится на 37; в) верно ли ли утверждение, обратное к а)? г) верно ли ли утверждение, обратное к б)?

4. Докажите, что среди чисел, составленных из ста семерок и одной тройки более половины – составные.

5. а) Шесть игральных кубиков нанизали на спицу (протыкая ею центры противоположных граней кубиков) так, что каждый может вращаться независимо от остальных. На гранях каждого кубика написаны все цифры от 1 до 6, причем сумма цифр на противоположных гранях равна 7. Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях кубиков. Докажите, что можно так повернуть кубики, чтобы это число делилось на 7.

б) Та же задача, но два кубика имеют фиксированное положение.

в) Вася говорит, что, повернув *n* кубиков, сможет добиться того, чтобы шестизначное число делилось на 7, вне зависимости от первоначального положения кубиков. Какого минимальное значение n, при котором Вася добьется успеха?

6. Натуральное число "переворачивают", складывают с начальным и из суммы вычеркивают одну цифру (какую – выбираем сами). Существует ли натуральное число, которое не изменяется при этом?

7. Шестизначное число назовем неразложимым, если оно не раскладывается в произведение трехзначного и четырехзначного числа. Какое наибольшее число неразложимых шестизначных чисел может идти подряд?

8. Число называется редким, если его можно представить в виде произведения какого-нибудь натурального числа на сумму цифр этого числа. Докажите, что среди натуральных чисел от единицы до миллиона редких чисел меньше 20%.

9. На доске написаны 6 различных шестизначных чисел. Вася вычел из каждого из этих чисел число, образованное его первыми тремя цифрами (например, 314859–314 = 314545), и полученные 6 новых чисел записал к себе в тетрадь. Какое наименьшее количество попарно различных чисел могло быть записано у Васи в тетради?

10. Назовем натуральное число "куском", если оно получается выписыванием подряд чисел от 1 до какого-нибудь натурального *n* > 1 (например, 123 или 123456789101112). Докажите, что произведение двух кусков – не кусок.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. О десятичной записи, 10 июля

1. Докажите, что число 19191919199797979797 – составное.

2. Простым или составным является ли число $\underbrace{888\ldots8}_{2017}97\underbrace{99\ldots9}_{2018}$?

3. Число $\overline{abcdef}$ делится на 37. Докажите, что а) $\overline{abc}+\overline{def}$ делится на 37; б) $\overline{bcdefa}$ делится на 37; в) верно ли ли утверждение, обратное к а)? г) верно ли ли утверждение, обратное к б)?

4. Докажите, что среди чисел, составленных из ста семерок и одной тройки более половины – составные.

5. а) Шесть игральных кубиков нанизали на спицу (протыкая ею центры противоположных граней кубиков) так, что каждый может вращаться независимо от остальных. На гранях каждого кубика написаны все цифры от 1 до 6, причем сумма цифр на противоположных гранях равна 7. Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях кубиков. Докажите, что можно так повернуть кубики, чтобы это число делилось на 7.

б) Та же задача, но два кубика имеют фиксированное положение.

в) Вася говорит, что, повернув *n* кубиков, сможет добиться того, чтобы шестизначное число делилось на 7, вне зависимости от первоначального положения кубиков. Какого минимальное значение n, при котором Вася добьется успеха?

6. Натуральное число "переворачивают", складывают с начальным и из суммы вычеркивают одну цифру (какую – выбираем сами). Существует ли натуральное число, которое не изменяется при этом?

7. Шестизначное число назовем неразложимым, если оно не раскладывается в произведение трехзначного и четырехзначного числа. Какое наибольшее число неразложимых шестизначных чисел может идти подряд?

8. Число называется редким, если его можно представить в виде произведения какого-нибудь натурального числа на сумму цифр этого числа. Докажите, что среди натуральных чисел от единицы до миллиона редких чисел меньше 20%.

9. На доске написаны 6 различных шестизначных чисел. Вася вычел из каждого из этих чисел число, образованное его первыми тремя цифрами (например, 314859–314 = 314545), и полученные 6 новых чисел записал к себе в тетрадь. Какое наименьшее количество попарно различных чисел могло быть записано у Васи в тетради?

10. Назовем натуральное число "куском", если оно получается выписыванием подряд чисел от 1 до какого-нибудь натурального *n* > 1 (например, 123 или 123456789101112). Докажите, что произведение двух кусков – не кусок.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Суперигры, 11 июля

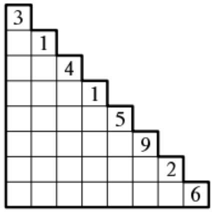
1. Дана белая доска размером клеток 100×100. Двое по очереди красят ее клетки в черный цвет, причем первый всегда закрашивает квадрат 2×2, а второй – три клетки, образующие угол. Уже покрашенную клетку второй раз красить нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит при правильной игре?

2. Двое играют в следующую игру. Есть три кучки камней. В первой из них лежит 7 камней, во второй – 9 камней, в третьей – 11 камней. Ходят по очереди. За один ход разрешается либо взять по одному камню из любых двух кучек, либо взять один камень из любой кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит при правильной игре?

3. Петя, Вася и Толя решили сыграть в следующую игру. В кучке лежат 2018 спичек. Петя и Вася имеют право брать 1 или 2 спички, а Толя – 1, 2 или 3. При этом Петя и Вася объединяют свои усилия против Толи, а Толя имеет право выбрать очередь своего хода – первый, второй или третий. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Может ли Толя выбрать себе такую очередь, что при правильной игре выиграет именно он?

4. На доске написано число 2018. За один ход разрешается уменьшить число на любой из его целых положительных делителей. Если при этом получается нуль, игрок проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

5. В клетке а1 шахматной доски стоит пешка. Двое игроков по очереди двигают её, причём каждый может подвинуть её на одну клетку вверх или на одну клетку вправо. Когда пешка попадает на диагональ, игра кончается, и второй игрок отдаёт первому столько монет, сколько написано в клетке. Сколько монет получит первый игрок при правильной игре обоих игроков?

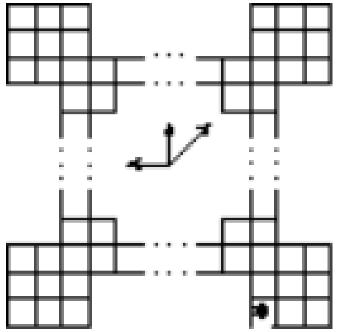


6. В куче лежит 2018 шишек. Двое по очереди убирают не более половины имеющихся шишек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает?

7. Даны карточки с числами от 1 до 9. Двое по очереди берут по одной карточке. Побеждает тот, у кого окажутся три карточки, дающие в сумме 15. Кто победит?

8. Двое играют в крестики-нолики на бесконечном листе клетчатой бумаги. Побеждает тот, кто первым сумеет поставить пять одинаковых значков подряд (по горизонтали или вертикали). Докажите, что второй может играть так, чтобы не проиграть.

9. Двое играют на доске размером 3×100 клеток; кладут по очереди на свободные клетки доминошки 1×2. Первый игрок кладет доминошки, направленные вдоль доски, второй – в поперечном направлении. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит при правильной игре?



10. Из квадратной доски 1000×1000 клеток удалены четыре прямоугольника 2×994 (см. рис.). На клетке, помеченной кружочком, стоит кентавр – фигура, которая за один ход может перемещаться на одну клетку вверх, влево или по диагонали вправо и вверх. Двое игроков ходят кентавром по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто победит при правильной игре?

11. На доске написаны числа 1, 2, …, 2018. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается стереть любое число вместе со всеми его делителями. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6 класс, группа 14. Обходы графов -1, 11 июля

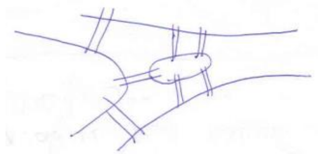
1. Игорь написал на доске числа от 0 до *n* и соединил каждое с каждым из остальных. При каких *n* муравей сможет проползти по всем нарисованным Игорем линиям, пройдя каждую ровно один раз и вернувшись последним ходом в исходную точку?

2. Граф называется *эйлеровым*, если все его рёбра можно обойти, пройдя по каждому ровно один раз. Сформулируйте и докажите критерий эйлеровости графа, если

а) последним ходом надо вернуться в исходную точку;

б) последним ходом не обязательно возвращаться в исходную точку.

3. ***Задача Леонарда Эйлера.*** В 18 веке в городе Кёнигсберге было 7 мостов, расположенных так, как показано на рисунке. Можно ли обойти все эти мосты так, чтобы пройти по каждому ровно один раз?



4. Петя рисует связный граф. Какое наименьшее число раз ему придётся оторвать ручку от бумаги, если он не хочет проводить никакую линию дважды?

5. а) Имеется кусок проволоки длиной 120 см. На какое наименьшее число частей надо его разломать, чтобы из них можно было спаять каркас куба с ребром в 10 см?

б) Какой наибольшей длины кусок проволоки можно вырезать из каркаса с ребром в 10 см?

в) Из куска проволоки требуется, не ломая его, изготовить каркас куба с ребром в 10 см (некоторые рёбра могут быть двойными). Какова наименьшая возможная длина пригодного для этой цели куска?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Обходы графов -1, 11 июля

1. Игорь написал на доске числа от 0 до *n* и соединил каждое с каждым из остальных. При каких *n* муравей сможет проползти по всем нарисованным Игорем линиям, пройдя каждую ровно один раз и вернувшись последним ходом в исходную точку?

2. Граф называется *эйлеровым*, если все его рёбра можно обойти, пройдя по каждому ровно один раз. Сформулируйте и докажите критерий эйлеровости графа, если

а) последним ходом надо вернуться в исходную точку;

б) последним ходом не обязательно возвращаться в исходную точку.

3. ***Задача Леонарда Эйлера.*** В 18 веке в городе Кёнигсберге было 7 мостов, расположенных так, как показано на рисунке. Можно ли обойти все эти мосты так, чтобы пройти по каждому ровно один раз?

4. Петя рисует связный граф. Какое наименьшее число раз ему придётся оторвать ручку от бумаги, если он не хочет проводить никакую линию дважды?

5. а) Имеется кусок проволоки длиной 120 см. На какое наименьшее число частей надо его разломать, чтобы из них можно было спаять каркас куба с ребром в 10 см?

б) Какой наибольшей длины кусок проволоки можно вырезать из каркаса с ребром в 10 см?

в) Из куска проволоки требуется, не ломая его, изготовить каркас куба с ребром в 10 см (некоторые рёбра могут быть двойными). Какова наименьшая возможная длина пригодного для этой цели куска?

6 класс, группа 14. Обходы графов -2, 11 июля

6. В стране Твентии каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Из каждого города выходит по 20 дорог, от любого города можно добраться по дорогам до любого другого. Докажите, что на каждой из дорог можно ввести одностороннее движение так, что от любого города по-прежнему можно будет добраться до любого другого.

7. При каких *n* можно расставить по кругу шарики *n* различных цветов так, чтобы каждые два цвета встречались рядом ровно один раз? Шариков каждого цвета бесконечно много.

8. Число *n* таково, что по кругу нельзя расставить *n* шариков *n* различных цветов так, чтобы каждые два цвета встречались рядом ровно один раз. Какое наименьшее число шариков можно расставить по кругу так, чтобы каждые два цвета встречались рядом *хотя бы* один раз?

9. Турист вышел с вокзала и отправился гулять по городу. Докажите, что если он будет гулять достаточно долго, то сможет вернуться на вокзал, пройдя по каждой из улиц города ровно дважды, если

а) с самого начала задастся такой целью;

б) задастся такой целью в любой момент прогулки, когда он ещё не прошёл ни по какой улице больше двух раз.

10. В стране Двунадесятии каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Движение на каждой дороге одностороннее, причём из каждого города можно выехать ровно по 10 дорогам и въехать в него можно тоже ровно по 10 дорогам. Докажите, что если от города А до города Б можно добраться по дорогам с нарушением правил, то можно добраться и без нарушения правил.

11. Петя рисует произвольный граф, не проводя никакую линию дважды.

а) Как он должен рисовать, чтобы оторвать ручку от бумаги наименьшее возможное число раз?

б)* Как зависит это число от количества компонент связности графа и распределения по ним нечётных вершин?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Обходы графов -2, 11 июля

6. В стране Твентии каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Из каждого города выходит по 20 дорог, от любого города можно добраться по дорогам до любого другого. Докажите, что на каждой из дорог можно ввести одностороннее движение так, что от любого города по-прежнему можно будет добраться до любого другого.

7. При каких *n* можно расставить по кругу шарики *n* различных цветов так, чтобы каждые два цвета встречались рядом ровно один раз? Шариков каждого цвета бесконечно много.

8. Число *n* таково, что по кругу нельзя расставить *n* шариков *n* различных цветов так, чтобы каждые два цвета встречались рядом ровно один раз. Какое наименьшее число шариков можно расставить по кругу так, чтобы каждые два цвета встречались рядом *хотя бы* один раз?

9. Турист вышел с вокзала и отправился гулять по городу. Докажите, что если он будет гулять достаточно долго, то сможет вернуться на вокзал, пройдя по каждой из улиц города ровно дважды, если

а) с самого начала задастся такой целью;

б) задастся такой целью в любой момент прогулки, когда он ещё не прошёл ни по какой улице больше двух раз.

10. В стране Двунадесятии каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Движение на каждой дороге одностороннее, причём из каждого города можно выехать ровно по 10 дорогам и въехать в него можно тоже ровно по 10 дорогам. Докажите, что если от города А до города Б можно добраться по дорогам с нарушением правил, то можно добраться и без нарушения правил.

11. Петя рисует произвольный граф, не проводя никакую линию дважды.

а) Как он должен рисовать, чтобы оторвать ручку от бумаги наименьшее возможное число раз?

б)* Как зависит это число от количества компонент связности графа и распределения по ним нечётных вершин?

6 класс, группа 14. Взвешивания, 12 июля

1. Есть 101 внешне одинаковых коробка, в каждой разное число конфет, от 1 до 101. Господин Учитель знает, в какой коробке сколько конфет, а бедный ученик – нет. За один вопрос ученик может указать три коробки, а Господин Учитель сообщит, в какой из трех коробок конфет больше всего, а в какой – меньше. За какое наименьшее число вопросов бедный ученик сможет

а) найти самую большую коробку;

б) найти самую среднюю коробку ☺.

2. а**)** Петя загадал натуральное число *A* от 1 до 8. Витя называет любое натуральное число *X*, и Петя отвечает, верно ли, что *X* делится на *A*. Может ли Витя угадать *A* после трёх таких вопросов?

Б) Петя загадал натуральное число *A*, принимающее значение от 1 до 8. Витя называет три своих числа X_1, X_2, X_3, а Петя сообщает, какие из них делятся на *A*. Какие числа должен назвать Витя, чтобы после ответа Пети правильно определить задуманное Петей число *A*?

3. 9 монет лежат в ряд, одна фальшивая. Можно указать на какую-нибудь монету, ответом будет один из вариантов: «эта фальшивая», «фальшивая – одна из соседних с этой», «фальшивая слева от этой», «фальшивая справа от этой». Найдите минимальное количество вопросов, за которые можно установить фальшивую.

4. В условиях предыдущей задачи сначала все вопросы записываются на листочках и отдаются роботу, затем робот отвечает на каждый из вопросов. Найдите минимальное число вопросов, с помощью которых можно гарантированно указать фальшивую монету.

5. По кругу лежат 9 одинаковых с виду котлет. Известно, что среди них семь одинаковых, а в две не доложено мясо, и они лежат рядом. При этом лёгкие котлеты не обязательно равны друг другу. Как найти их двумя взвешиваниями на чашечных весах без гирь?

6. В клетчатом квадрате 8×8 закрашено 25 клеток, образующих квадрат 5×5. Разрешается выбрать любую клетку квадрата 8×8 и спросить, закрашена ли она. За какое наименьшее число таких вопросов можно наверняка определить, какие клетки закрашены?

7. Фокус. У фокусника имеется ассистент. Фокусник выходит из зала, а зритель выкладывает в ряд 6 монет произвольным образом. После этого ассистент фокусника закрывает некоторые монеты бумажками так, что не видно, лежат они вверх решками или орлами. В итоге фокусник заходит и угадывает, как выглядит весь ряд. Какое наибольшее число монет может закрыть ассистент? (это количество объявляется зрителям до начала конкурса).

8. Есть четыре гири – 1, 2, 3 и 4 грамма. Одна из них – дефектная (легче или тяжелее того веса, который на ней написан). Можно ли определить эту гирю за 2 взвешивания, и определить, легче она или тяжелее?

9. Из девяти внешне одинаковых монет 7 весят по 2 г, одна – 1 г, и еще одна – 4 г. Как за 3 взвешивания на двухчашечных весах без гирь найти 4-граммовую монету?

10. Есть семь пронумерованных монет, причем одна из них – фальшивая. Известно, что 1 и 2 – не тяжелее настоящей, а 5, 6 и 7 – не легче. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее?

6 класс, группа 14, внутренний междусобой, 12 июля, вариант А

1. В турнире участвовали 78 теннисистов, все разного возраста. Всего было сыграно 310 матчей, причём никакие двое не играли между собой более одного раза. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четвёрке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четвёрке обыграл остальных трёх.

2. Тысяча снайперов затеяла перестрелку. Снайпер может застрелить только снайпера, застрелившего столько же снайперов, сколько он сам. Сколько снайперов останется в живых в результате перестрелки? (Перестрелка заканчивается только в том случае, если ни один снайпер не может убить никакого другого).

3. В каждой клетке доски 1000×1000 стоит по фишке одного из 500000 цветов, по две фишки каждого цвета. Могло ли так оказаться, что любые две одноцветные фишки стоят в противоположных углах квадрата 4×4?

4. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух сумму чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 2, 4, 6, …, 20. Какое число задумал школьник, сказавший число 12?

5. Набор из 10 попарно различных натуральных чисел, меньших 10000, таков, что отношение любых двух из них (большее делят на меньшее) тоже принадлежит этому набору. Во сколько раз наибольшее из чисел больше наименьшего?

6. Дан клетчатый прямоугольник 3×2015. В центре каждой клетки стоит по точке. Можно ли нарисовать 2015 непересекающихся треугольников с вершинами в этих точках?

7. Мама выдала Ванечке двузначное число. Ванечка сложил в столбик это число с ним же, после чего проделал то же самое с полученным результатом, и так 11 раз. Когда мама стала проверять его вычисления, выяснилось, что Ванечка при сложении двойки с двойкой получал всегда вместо четырёх пять (или шесть, если там был ещё перенос). У него получилось число, которое оканчивается ровно на один ноль. Каким могло быть исходное число?

8. В доме есть квартиры с номерами от 1 до n. Старший по дому хочет прибить на дверь каждой квартиры номер, состоящий из отдельных цифр. Он посчитал, сколько для этого нужно купить нулей, единиц, двоек и т.д. Оказалось, что все эти десять количеств различны. Докажите, что в доме больше двух тысяч квартир.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14, внутренний междусобой, 12 июля, вариант А

1. В турнире участвовали 78 теннисистов, все разного возраста. Всего было сыграно 310 матчей, причём никакие двое не играли между собой более одного раза. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четвёрке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четвёрке обыграл остальных трёх.

2. Тысяча снайперов затеяла перестрелку. Снайпер может застрелить только снайпера, застрелившего столько же снайперов, сколько он сам. Сколько снайперов останется в живых в результате перестрелки? (Перестрелка заканчивается только в том случае, если ни один снайпер не может убить никакого другого).

3. В каждой клетке доски 1000×1000 стоит по фишке одного из 500000 цветов, по две фишки каждого цвета. Могло ли так оказаться, что любые две одноцветные фишки стоят в противоположных углах квадрата 4×4?

4. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух сумму чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 2, 4, 6, …, 20. Какое число задумал школьник, сказавший число 12?

5. Набор из 10 попарно различных натуральных чисел, меньших 10000, таков, что отношение любых двух из них (большее делят на меньшее) тоже принадлежит этому набору. Во сколько раз наибольшее из чисел больше наименьшего?

6. Дан клетчатый прямоугольник 3×2015. В центре каждой клетки стоит по точке. Можно ли нарисовать 2015 непересекающихся треугольников с вершинами в этих точках?

7. Мама выдала Ванечке двузначное число. Ванечка сложил в столбик это число с ним же, после чего проделал то же самое с полученным результатом, и так 11 раз. Когда мама стала проверять его вычисления, выяснилось, что Ванечка при сложении двойки с двойкой получал всегда вместо четырёх пять (или шесть, если там был ещё перенос). У него получилось число, которое оканчивается ровно на один ноль. Каким могло быть исходное число?

8. В доме есть квартиры с номерами от 1 до n. Старший по дому хочет прибить на дверь каждой квартиры номер, состоящий из отдельных цифр. Он посчитал, сколько для этого нужно купить нулей, единиц, двоек и т.д. Оказалось, что все эти десять количеств различны. Докажите, что в доме больше двух тысяч квартир.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14, внутренний междусобой, 12 июля, вариант В

1. На симпозиум приехали 300 биологов. По итогам докладов каждый биолог раскритиковал ровно одного другого биолога. Докажите, что из них можно выбрать 100 человек в комиссию так, чтобы члены комиссии не критиковали друг друга.

2. Натуральное число обладает тем свойством, что при вычеркивании любой его цифры получается число, делящееся на 7. Докажите, что оно либо записано одними четверками, либо в его записи нет ни одной четверки.

3. У четырех натуральных чисел посчитали всевозможные попарные произведения. Докажите, что какие-то два из этих произведений дают одинаковые остатки при делении на 6.

4. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух сумму чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 2, 4, 6, …, 20. Какое число задумал школьник, сказавший число 12?

5. Набор из 10 попарно различных натуральных чисел, меньших 10000, таков, что отношение любых двух из них (большее делят на меньшее) тоже принадлежит этому набору. Во сколько раз наибольшее из чисел больше наименьшего?

6. Игральный автомат «Однорукий математик» может сделать из числа n число 2n или наоборот, а игральный автомат «Монти Карло» может сделать из числа n число 3n+1 и наоборот. Верно ли, что эти автоматы могут превратить любое натуральное число в 1 (при этом в процессе могут получаться и нецелые числа)?

7. Мама выдала Ванечке двузначное число. Ванечка сложил в столбик это число с ним же, после чего проделал то же самое с полученным результатом, и так 11 раз. Когда мама стала проверять его вычисления, выяснилось, что Ванечка при сложении двойки с двойкой получал всегда вместо четырёх пять (или шесть, если там был ещё перенос). У него получилось число, которое оканчивается ровно на один ноль. Каким могло быть исходное число?

8. В доме есть квартиры с номерами от 1 до *n*. Старший по дому хочет прибить на дверь каждой квартиры номер, состоящий из отдельных цифр. Он посчитал, сколько для этого нужно купить нулей, единиц, двоек и т.д. Оказалось, что все эти десять количеств различны. Докажите, что в доме больше двух тысяч квартир.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14, внутренний междусобой, 12 июля, вариант В

1. На симпозиум приехали 300 биологов. По итогам докладов каждый биолог раскритиковал ровно одного другого биолога. Докажите, что из них можно выбрать 100 человек в комиссию так, чтобы члены комиссии не критиковали друг друга.

2. Натуральное число обладает тем свойством, что при вычеркивании любой его цифры получается число, делящееся на 7. Докажите, что оно либо записано одними четверками, либо в его записи нет ни одной четверки.

3. У четырех натуральных чисел посчитали всевозможные попарные произведения. Докажите, что какие-то два из этих произведений дают одинаковые остатки при делении на 6.

4. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух сумму чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 2, 4, 6, …, 20. Какое число задумал школьник, сказавший число 12?

5. Набор из 10 попарно различных натуральных чисел, меньших 10000, таков, что отношение любых двух из них (большее делят на меньшее) тоже принадлежит этому набору. Во сколько раз наибольшее из чисел больше наименьшего?

6. Игральный автомат «Однорукий математик» может сделать из числа n число 2n или наоборот, а игральный автомат «Монти Карло» может сделать из числа n число 3n+1 и наоборот. Верно ли, что эти автоматы могут превратить любое натуральное число в 1 (при этом в процессе могут получаться и нецелые числа)?

7. Мама выдала Ванечке двузначное число. Ванечка сложил в столбик это число с ним же, после чего проделал то же самое с полученным результатом, и так 11 раз. Когда мама стала проверять его вычисления, выяснилось, что Ванечка при сложении двойки с двойкой получал всегда вместо четырёх пять (или шесть, если там был ещё перенос). У него получилось число, которое оканчивается ровно на один ноль. Каким могло быть исходное число?

8. В доме есть квартиры с номерами от 1 до *n*. Старший по дому хочет прибить на дверь каждой квартиры номер, состоящий из отдельных цифр. Он посчитал, сколько для этого нужно купить нулей, единиц, двоек и т.д. Оказалось, что все эти десять количеств различны. Докажите, что в доме больше двух тысяч квартир.

6 класс, группа 14, по кругу, 14 июля

1. По прямой бегут два гнома – один со скоростью 6 км/ч, а другой –со скоростью 8 км/ч. Белоснежка пытается всегда находится на равном расстоянии от обоих гномов. С какой скоростью придется бежать ей?

2. Однажды Малыш, вернувшись с прогулки, рассказал, что половину пути он шёл со скоростью 5 км/ч, а половину времени, затраченного на прогулку — со скоростью 6 км/ч. Карлсон ему не верит. Кто прав?

3. Населённые пункты *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* делят кольцевую автодорогу на шесть равных участков. Дима и Оля едут по дороге с постоянными скоростями (не обязательно в одну сторону). Известно, что они встречались в пунктах *C* и *D*. Докажите, что они встретятся и в пункте *A*.

4. а) Сколько раз в полусутки (12 часов, начинаются в 00.00.00, заканчиваются в 12.59.59) совпадают часовая и минутная стрелки? Назовите интервалы, через которые происходят встречи. **б)** Пусть часовая стрелка идет как обычно, а минутную пустили в другую сторону. Сколько раз за полусутки они встретятся? В какие моменты времени? **в)** Сколько раз в сутки какие-то две из трех стрелок составляют угол в 180°?

5. Два автомобиля соревнуются на круговом треке, стартуя с одной линии, но в разные стороны. Их пятьдесят первая встреча произошла на линии старта. Первый проезжал каждый круг на 12 секунд быстрее второго. За сколько секунд каждый из автомобилей проезжал круг трека, если известно, что на круг уходило не менее 3 минут?

6. Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя 2 минуты был ближе к первому фотографу, затем 3 минуты – ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг?

7. Петя и Вася одновременно стартовали и бегут с постоянными скоростями по круглому стадиону. Петя бежит быстрее и через час догоняет Васю. Тогда Вася ускоряется на 2 км/ч и через 2 часа сам догоняет Петю. Тот сразу ускоряется на 1 км в час. Когда Петя теперь догонит Васю?

8. В круговых автогонках участвовали четыре гонщика. Их машины стартовали одновременно из одной точки и двигались с постоянными скоростями. Известно, что после начала гонок для каждых трёх машин нашелся момент, когда они встретились. Докажите, что после начала гонок найдется момент, когда встретятся все четыре машины. (Гонки считаем бесконечно долгими по времени.)

9. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша – три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй.

10. В 50-метровом бассейне тренируются два пловца. Они стартуют одновременно, в одном направлении по соседним дорожкам, и плывут с постоянными различными скоростями. Доплыв до бортика, пловец сразу поворачивает и плывет назад, а проплыв километр — заканчивает тренировку и уходит в раздевалку. Сколько раз за время тренировки пловцы встретились, если известно, что у бортика они не встречались ни разу? (Если один пловец догнал другого, это тоже считается встречей.)

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14, по кругу, 14 июля

1. По прямой бегут два гнома – один со скоростью 6 км/ч, а другой –со скоростью 8 км/ч. Белоснежка пытается всегда находится на равном расстоянии от обоих гномов. С какой скоростью придется бежать ей?

2. Однажды Малыш, вернувшись с прогулки, рассказал, что половину пути он шёл со скоростью 5 км/ч, а половину времени, затраченного на прогулку — со скоростью 6 км/ч. Карлсон ему не верит. Кто прав?

3. Населённые пункты *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* делят кольцевую автодорогу на шесть равных участков. Дима и Оля едут по дороге с постоянными скоростями (не обязательно в одну сторону). Известно, что они встречались в пунктах *C* и *D*. Докажите, что они встретятся и в пункте *A*.

4. а) Сколько раз в полусутки (12 часов, начинаются в 00.00.00, заканчиваются в 12.59.59) совпадают часовая и минутная стрелки? Назовите интервалы, через которые происходят встречи. **б)** Пусть часовая стрелка идет как обычно, а минутную пустили в другую сторону. Сколько раз за полусутки они встретятся? В какие моменты времени? **в)** Сколько раз в сутки какие-то две из трех стрелок составляют угол в 180°?

5. Два автомобиля соревнуются на круговом треке, стартуя с одной линии, но в разные стороны. Их пятьдесят первая встреча произошла на линии старта. Первый проезжал каждый круг на 12 секунд быстрее второго. За сколько секунд каждый из автомобилей проезжал круг трека, если известно, что на круг уходило не менее 3 минут?

6. Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя 2 минуты был ближе к первому фотографу, затем 3 минуты – ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг?

7. Петя и Вася одновременно стартовали и бегут с постоянными скоростями по круглому стадиону. Петя бежит быстрее и через час догоняет Васю. Тогда Вася ускоряется на 2 км/ч и через 2 часа сам догоняет Петю. Тот сразу ускоряется на 1 км в час. Когда Петя теперь догонит Васю?

8. В круговых автогонках участвовали четыре гонщика. Их машины стартовали одновременно из одной точки и двигались с постоянными скоростями. Известно, что после начала гонок для каждых трёх машин нашелся момент, когда они встретились. Докажите, что после начала гонок найдется момент, когда встретятся все четыре машины. (Гонки считаем бесконечно долгими по времени.)

9. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша – три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй.

10. В 50-метровом бассейне тренируются два пловца. Они стартуют одновременно, в одном направлении по соседним дорожкам, и плывут с постоянными различными скоростями. Доплыв до бортика, пловец сразу поворачивает и плывет назад, а проплыв километр — заканчивает тренировку и уходит в раздевалку. Сколько раз за время тренировки пловцы встретились, если известно, что у бортика они не встречались ни разу? (Если один пловец догнал другого, это тоже считается встречей.)

6 класс, группа 14.
Количество информации, 14 июля

11. Плоскость разбита тремя семействами параллельных прямых на равные треугольники (РТ). Петя нарисовал треугольник, состоящий из 1024 РТ, и отметил один из входящих в него РТ невидимыми чернилами. Вася может указать любой треугольник со сторонами, идущими по сторонам РТ, и Петя скажет ему, лежит ли отмеченный треугольник в указанном. За какое наименьшее число таких вопросов Вася наверняка сможет найти отмеченный треугольник?

12. Было 9 гирь массами 1 г, 2 г, …, 9 г, причём гиря большей массы имеет больший размер. Одна из гирь потерялась. Как за два взвешивания на чашечных весах выяснить, какая именно гиря потеряна?

13. Имеются 2 американских доллара и 7 канадских. Среди всех – ровно ОДИН фальшивый (американские фальшивки легче настоящих, а канадские – тяжелее). За какое наименьшее количество взвешиваний удастся найти фальшивку?

14. Имеются несколько американских долларов и несколько канадских, в сумме 81 доллар. Среди всех – ровно ОДИН фальшивый (американские фальшивки легче настоящих, а канадские – тяжелее). За какое наименьшее количество взвешиваний удастся найти фальшивку?

15. Имеются 4 американских доллара и 7 канадских. Среди тех и других – по одному фальшивому (американские фальшивки легче настоящих, а канадские – тяжелее). Докажите, что обе фальшивые монеты не удастся найти за 3 взвешивания на рычажных (двухчашечных) весах.

В задачах 16-20 из данных одинаковых на вид монет ровно одна фальшивая, но неизвестно, легче она или тяжелее настоящей. Надо найти фальшивую, в том числе определить, легче она или тяжелее.

16. Дано 4 монеты. Можно ли найти фальшивую за два взвешивания?

17. Дано 12 монет. Найдите фальшивую за четыре взвешивания.

18. Дано 12 монет. Найдите фальшивую за три взвешивания.

19. Дано 14 монет. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти фальшивую?

20. Дано 13 монет. а) За какое наименьшее число взвешиваний можно найти фальшивую? б) тот же вопрос, если есть еще одна дополнительная настоящая монета.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14.
Количество информации, 14 июля

11. Плоскость разбита тремя семействами параллельных прямых на равные треугольники (РТ). Петя нарисовал треугольник, состоящий из 1024 РТ, и отметил один из входящих в него РТ невидимыми чернилами. Вася может указать любой треугольник со сторонами, идущими по сторонам РТ, и Петя скажет ему, лежит ли отмеченный треугольник в указанном. За какое наименьшее число таких вопросов Вася наверняка сможет найти отмеченный треугольник?

12. Было 9 гирь массами 1 г, 2 г, …, 9 г, причём гиря большей массы имеет больший размер. Одна из гирь потерялась. Как за два взвешивания на чашечных весах выяснить, какая именно гиря потеряна?

13. Имеются 2 американских доллара и 7 канадских. Среди всех – ровно ОДИН фальшивый (американские фальшивки легче настоящих, а канадские – тяжелее). За какое наименьшее количество взвешиваний удастся найти фальшивку?

14. Имеются несколько американских долларов и несколько канадских, в сумме 81 доллар. Среди всех – ровно ОДИН фальшивый (американские фальшивки легче настоящих, а канадские – тяжелее). За какое наименьшее количество взвешиваний удастся найти фальшивку?

15. Имеются 4 американских доллара и 7 канадских. Среди тех и других – по одному фальшивому (американские фальшивки легче настоящих, а канадские – тяжелее). Докажите, что обе фальшивые монеты не удастся найти за 3 взвешивания на рычажных (двухчашечных) весах.

В задачах 16-20 из данных одинаковых на вид монет ровно одна фальшивая, но неизвестно, легче она или тяжелее настоящей. Надо найти фальшивую, в том числе определить, легче она или тяжелее.

16. Дано 4 монеты. Можно ли найти фальшивую за два взвешивания?

17. Дано 12 монет. Найдите фальшивую за четыре взвешивания.

18. Дано 12 монет. Найдите фальшивую за три взвешивания.

19. Дано 14 монет. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти фальшивую?

20. Дано 13 монет. а) За какое наименьшее число взвешиваний можно найти фальшивую? б) тот же вопрос, если есть еще одна дополнительная настоящая монета.

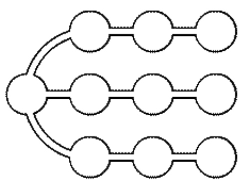
6 класс, группа 14. Алгоритмы вслепую, 15 июля

1. Аня и Боря играют в игру. Аня загадывает 1 или 2. Своим ходом Боря называет любое число. Если оно совпадает с числом Ани, то Боря победил. Если же нет, то Аня прибавляет к своему числу 10, возводит в сотую степень и умножает на 1729. Как Боре победить?
а) А если Аня загадывает 1, 2 или 3?
б) А если Аня загадывает натуральное число от 1 до 10?

2. Мышка вырыла три норки в ряд. Днем Кот ловит мышку, засовывая лапу ровно в одну норку. Если там Мышка, то Кот её поймает, иначе он ждет до следующего дня. Ночью Мышка перебегает в соседнюю норку влево либо вправо по своему усмотрению (никогда не остается в той же норке).
а) Сможет ли Кот её поймать? Если да – то за какое минимальное число дней?
б) аналогичная задача для 4 норок;
в) аналогичная задача для 5 норок.

3. В одном из расположенных в ряд 100 окопов спрятался вражеский робот. В каком, неизвестно. Ваша задача уничтожить робота. У вас есть пушка, которую можно навести на любой окоп и произвести выстрел. Если робот находился в этом окопе, задача выполнена. Если же робот был в другом окопе, то он, пока дым от выстрела не рассеялся, незаметно от нас обязательно перебегает в один из соседних окопов. Можно ли выполнить боевую задачу?

4. Система укреплений состоит из блиндажей. Некоторые из блиндажей соединены траншеями, причём из каждого блиндажа можно перебежать в какой-нибудь другой. В одном из блиндажей спрятался пехотинец. Пушка может одним выстрелом накрыть любой блиндаж. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец обязательно перебегает по одной из траншей в соседний блиндаж (даже если по соседнему блиндажу только что стреляла пушка, пехотинец может туда перебежать). Назовём систему *надёжной*, если у пушки нет гарантированной стратегии поражения пехотинца (то есть такой последовательности выстрелов, благодаря которой пушка поразит пехотинца независимо от его начального местонахождения и последующих передвижений).



а) Докажите, что система укреплений, изображённая на рисунке, надёжна. б) Найдите все надёжные системы укреплений, которые перестают быть надёжными после разрушения любой из траншей.

5. Ёжик стоит в левой нижней клетке поля 8×8. А в какой-то другой клетке пасётся Лошадка. На поле стоит туман, ничего не видно, но ёжику надо найти Лошадку. Лошадка каждую минуту переходит на соседнюю по стороне клетку и говорит, куда она перешла (влево, вправо, вверх или вниз). Ёжик тоже может сделать шаг в одну из соседних по стороне или диагонали клеток, как только услышит Лошадку. Ёжик найдёт Лошадку, если окажется с ней на одной клетке. Что же делать ёжику?

6. Путник подошёл в реке, которая представляет из себя бесконечную в обе стороны полосу. Где-то ровно в одном месте через реку есть мост. Как путнику гарантированно найти его за конечное, пусть и очень долгое время?

7. На бесконечном шоссе находятся полицейская машина (ездит со скоростью до 100 км/ч) и вор на угнанном мотоцикле (ездит со скоростью до 80 км/ч). Полицейские не знают, в каком месте шоссе находится вор. Как им действовать, чтобы наверняка догнать вора?

8. Есть поезд, в котором вагоны расположены по кругу. В каждом вагоне свет горит или не горит. Все вагоны одинаковы и неразличимы. Человек ходит по вагонам и может включать или выключать свет. Как он может узнать количество вагонов?

9. 100 включённых и 100 выключенных фонариков случайным образом разложены по двум коробкам. У каждого фонарика есть кнопка, нажатие которой выключает горящий фонарик и зажигает выключенный. Ваши глаза завязаны, и вы не можете видеть, горит ли фонарик. Но вы можете перекладывать фонарики из коробки в коробку и нажимать на них кнопки. Придумайте способ добиться того, чтобы горящих фонариков в коробках было поровну.

10. ***Введение в корпоративные стратегии.***

В тюрьме сидят 10 заключенных, каждый — в одиночной камере. Общаться между собой они не могут. В один прекрасный день начальник тюрьмы объявил им, что предоставляет всем шанс выйти на свободу на следующих условиях:

«*В подвале тюрьмы есть комната с переключателем, имеющим два состояния: ON и OFF («вкл.» и «выкл.»). Каждую ночь я буду приводить в эту комнату ровно одного заключенного (выбирая его абсолютно случайно) и через некоторое время уводить. Находясь в комнате, каждый из вас может либо изменить положение переключателя, либо ничего с ним не делать. Персонал тюрьмы трогать этот переключатель не будет. В какой-то момент один из вас (любой) должен понять, что в комнате побывали все заключенные, и сообщить об этом. Если он окажется прав — всех отпустят, если ошибется — все вы навсегда останетесь в тюрьме. Я обещаю, что в комнате побывают все заключенные, причем каждого будут приводить туда неограниченное число раз*».

После этого заключенным разрешили собраться и обсудить стратегию действий, а потом развели обратно по камерам.

Могут ли заключенные гарантированно выйти на свободу, и если да, то **как** им этого добиться?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Верификация, 15 июля

1. У эксперта имеет 8 одинаковых монет, среди которых НЕТ фальшивых. Судья знает, что фальшивая монета весить меньше настоящей и знает, что среди монет эксперта есть настоящие. Как эксперту за три взвешивания на чашечных весах убедить судью, что все монеты одинаковые? б)* Оказывается, эксперт справится, даже если у него будет 10 монет. Попробуйте справиться и вы.

2. Имеются 6 различных (однако внешне неразличимых) гирек, веса которых 1 г, 2 г, …, 6 г. На них сделаны наклейки «1 г», «2 г», …, «6 г». Как с помощью двух взвешиваний убедиться, что все наклейки – правильные?

3. Имеются 15 различных (однако внешне неразличимых) гирек, веса которых 1 г, 2 г, …, 15 г. На них сделаны наклейки «1 г», «2 г», …, «15 г». Как с помощью трех взвешиваний на рычажных весах убедиться, что все наклейки – правильные?

<u>Оценки посложнее</u>

4. Василий загадал натуральное число от 1 до 100. Ему можно задавать вопросы про это число, на которые можно ответить «да» или «нет». На первый вопрос он точно ответит правильно; но потом в какой-то момент у него может испортиться настроение, и он начнёт врать. Обратно настроение не улучшится. Докажите, что за 11 вопросов можно узнать загаданное число.

5. В условиях задачи 4 определите минимальное количество вопросов, которые потребуются?

6. аналогичная задача, только числа от 1 до 1000, а кроме того, требуется определить момент, когда Василий начал лгать.

7. Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них A, B и C и спросить, верно ли, что $m(A)<m(B)<m(C)$. (Через $m(x)$ обозначена масса гири x, при этом даётся ответ "Да" или "Нет".) За какое минимальное количество вопросов можно гарантированно узнать, в каком порядке идут веса гирь?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Верификация, 15 июля

1. У эксперта имеет 8 одинаковых монет, среди которых НЕТ фальшивых. Судья знает, что фальшивая монета весить меньше настоящей и знает, что среди монет эксперта есть настоящие. Как эксперту за три взвешивания на чашечных весах убедить судью, что все монеты одинаковые? б)* Оказывается, эксперт справится, даже если у него будет 10 монет. Попробуйте справиться и вы.

2. Имеются 6 различных (однако внешне неразличимых) гирек, веса которых 1 г, 2 г, …, 6 г. На них сделаны наклейки «1 г», «2 г», …, «6 г». Как с помощью двух взвешиваний убедиться, что все наклейки – правильные?

3. Имеются 15 различных (однако внешне неразличимых) гирек, веса которых 1 г, 2 г, …, 15 г. На них сделаны наклейки «1 г», «2 г», …, «15 г». Как с помощью трех взвешиваний на рычажных весах убедиться, что все наклейки – правильные?

<u>Оценки посложнее</u>

4. Василий загадал натуральное число от 1 до 100. Ему можно задавать вопросы про это число, на которые можно ответить «да» или «нет». На первый вопрос он точно ответит правильно; но потом в какой-то момент у него может испортиться настроение, и он начнёт врать. Обратно настроение не улучшится. Докажите, что за 11 вопросов можно узнать загаданное число.

5. В условиях задачи 4 определите минимальное количество вопросов, которые потребуются?

6. аналогичная задача, только числа от 1 до 1000, а кроме того, требуется определить момент, когда Василий начал лгать.

7. Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них A, B и C и спросить, верно ли, что $m(A)<m(B)<m(C)$. (Через $m(x)$ обозначена масса гири x, при этом даётся ответ "Да" или "Нет".) За какое минимальное количество вопросов можно гарантированно узнать, в каком порядке идут веса гирь?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Переносы, 15 июля

1. В пятизначном числе *n* цифры идут в строго возрастающем порядке. Число *m* образовано теми же цифрами, идущими в обратном порядке. Найдите сумму цифр числа $m-n$.

2. В числе *A* цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9\cdot A$?

3 .Можно ли подобрать такие два натуральных числа *X* и *Y*, что *Y* получается из *X* перестановкой цифр, и $X+Y = \underbrace{999\ldots9}_{1111\text{ девяток}}$?

Определение. Число называется *палиндромом*, если оно одинаково читается как слева, так и справа (например, число 2002 — палиндром, а 2011 — нет).

4. Может ли разность 2018-значного и 2016-значного палиндромов быть 2017-значным палиндромом?

5. Верно ли, что если числа x и $3x$ — палиндромы, то и число $2x$ — тоже палиндром?

6. а) Аня взяла семнадцатизначное число без нулей в десятичной записи и записала его наоборот. Может ли сумма первоначального и переписанного числа записываться только с помощью нечетных цифр? б) тот же вопрос, если число 15-значное.

7. Натуральные числа *M* и *K* отличаются перестановкой цифр. Доказать, что **а**) сумма цифр $2M$ равна сумме цифр $2K$; **б)** сумма цифр $M/2$ равна сумме цифр $K/2$ (если *M* и *K* чётны); **в)** сумма цифр $5M$ равна сумме цифр $5K$.

8. На доске написано натуральное число. Каждую минуту Вася смотрит на часы и прибавляет к числу, написанному на доске, число минут на часах. Докажите, что рано или поздно число на доске станет составным.

9. Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в ней одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема – вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 100 раз.

10. Даны *n*-значное натуральное число *a* и натуральное число *k*. Оказалось, что у числа *a* цифры строго убывают справа налево, а у числа *ka* – строго возрастают. Докажите, что $k \geq n$

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14. Переносы, 15 июля

1. В пятизначном числе *n* цифры идут в строго возрастающем порядке. Число *m* образовано теми же цифрами, идущими в обратном порядке. Найдите сумму цифр числа $m-n$.

2. В числе *A* цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9\cdot A$?

3 .Можно ли подобрать такие два натуральных числа *X* и *Y*, что *Y* получается из *X* перестановкой цифр, и $X+Y = \underbrace{999\ldots9}_{1111\text{ девяток}}$?

Определение. Число называется *палиндромом*, если оно одинаково читается как слева, так и справа (например, число 2002 — палиндром, а 2011 — нет).

4. Может ли разность 2018-значного и 2016-значного палиндромов быть 2017-значным палиндромом?

5. Верно ли, что если числа x и $3x$ — палиндромы, то и число $2x$ — тоже палиндром?

6. а) Аня взяла семнадцатизначное число без нулей в десятичной записи и записала его наоборот. Может ли сумма первоначального и переписанного числа записываться только с помощью нечетных цифр? б) тот же вопрос, если число 15-значное.

7. Натуральные числа *M* и *K* отличаются перестановкой цифр. Доказать, что **а**) сумма цифр $2M$ равна сумме цифр $2K$; **б)** сумма цифр $M/2$ равна сумме цифр $K/2$ (если *M* и *K* чётны); **в)** сумма цифр $5M$ равна сумме цифр $5K$.

8. На доске написано натуральное число. Каждую минуту Вася смотрит на часы и прибавляет к числу, написанному на доске, число минут на часах. Докажите, что рано или поздно число на доске станет составным.

9. Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в ней одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема – вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 100 раз.

10. Даны *n*-значное натуральное число *a* и натуральное число *k*. Оказалось, что у числа *a* цифры строго убывают справа налево, а у числа *ka* – строго возрастают. Докажите, что $k \geq n$.

6 – 14, как догадаться, 16 июля

История про взрослых логиков

Три математика зашли в пивбар. Бармен спросил их, все ли будут пиво.
Первый: Не знаю.
Второй: Не знаю.
Третий: все.
Почему третий с такой уверенностью заказал пива всем?

Задача про пару загаданных чисел.

Профессор загадал два последовательных натуральных числа в диапазоне от 1 до 10, сообщив одно число одному студенту, а другое – другому. Между этими студентами состоялся следующий диалог:
А: Я не знаю твоего числа
Б: Я тоже не знаю твоего числа
А: Теперь я знаю
Какие это были числа? Найдите все варианты

Задача про детей – вариант 1.

Встретились как-то два знакомых математика А и В, которые давно не виделись.
А: «У меня трое сыновей».
В: «Сколько им лет?»
А: «Произведение их возрастов равно 36”
В: «Этой информации недостаточно»
А: «Сумма их возрастов равна номеру твоего дома»
В: «Этой информации мне тоже недостаточно»
А: «Мой старший сын рыжий»

На этот раз В назвал возраст всех детей. Сколько лет каждому из них?

Задача про детей – вариант 2.

Два математика, не достигшие пенсионного возраста, встретились после долгого перерыва. Приведем фрагмент их диалога:
- Ну, а дети у тебя есть?
- Три сына.
- А сколько им лет?
- Если перемножить, будет как раз твой возраст.
- (После размышления.) Мне этих данных недостаточно.
- Если сложить их возраст, получится сегодняшнее число.
- (Вновь после размышления.). Все еще не понимаю.
- Кстати, средний сын любит танцевать.
- Понял.
А Вы можете определить возраст каждого из сыновей?

Задача про делители

Саша и Маша загадали по натуральному числу и сказали их Васе. Вася написал на одном листе сумму загаданных чисел, а на другом — их произведение, после чего один из листов спрятал, а другой (на нем оказалось написано число 2002) показал Саше и Маше. Увидев это число, Саша сказал, что не знает, какое число загадала Маша. Услышав это, Маша сказала, что не знает, какое число загадал Саша. Какое число загадала Маша?

Задача про сумму, лбы и мудрецов.

Каждому из трех логиков написали на лбу натуральное число, причем одно из этих чисел являлось суммой двух других, и сообщили им об этом. Логик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый логик сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй логик, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных?

Вариант задачи про мудрецов

Та же задача, но сначала первый, второй, третий, снова первый и второй признались, что не знают своего числа, и только тогда третий угадал, что у него число 60.
Какие числа у других логиков и как третий угадал своё число?

Задача про день рождения.

Альберт и Бернард только что познакомились с Шерил. Они хотят знать, когда у неё день рождения. Шерил предложила им десять возможных дат: 15 мая, 16 мая, 19 мая, 17 июня, 18 июня, 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа и 17 августа. Затем Шерил сказала Альберту месяц своего рождения, а Бернарду - день. После этого состоялся диалог:
Альберт: Я не знаю, когда у Шерил день рождения, но я знаю, что Бернард тоже не знает.
Бернард: Поначалу я не знал, когда у Шерил день рождения, но знаю теперь.
Альберт: Теперь я тоже знаю, когда у Шерил день рождения.
Когда у Шерил день рождения?

6 – 14, турнирные таблицы, 16 июля

Для справки. Начисление очков

	Победа	Ничья	Проигрыш
Хоккей	2	1	0
Футбол	3	1	0
Волейбол	1	Не бы-	0
Шахматы	1	0,5	0

1. В турнире по хоккею в один круг на пять команд А, Б, В, Г и Д заняли пять мест в том же порядке. Команда А не сделала ни одной ничьей. Б не проиграла ни одной встречи, Г не выиграла ни одной встречи. Все команды набрали разное число очков. Восстановите турнирную таблицу.

2. Шесть команд в розыгрыше кубка по хоккею в один круг набрали разное число очков. Только одна встреча закончилась вничью. Каждая команда, кроме первой, выиграла хотя бы у одной из команд, занявших более высокие места. Восстановите таблицу

3. 14 команд сыграли в однокруговой турнир. Докажите, что из них можно выбрать команду, у которой количество ничьих отличается от количества поражений.

4. Семь шахматистов сыграли в турнире в один круг. Победитель набрал вдвое больше очков, чем набрали вместе шахматисты, занявшие три последние места. Занявший 4 место набрал 3 очка. Как он сыграл с занявшими 5 и 3 место?

5. а) В однокруговом турнире по хоккею участвуют 6 команд. Может ли случиться, что какие-то три команды наберут в сумме на 4 очка больше, чем все остальные?
б) В однокруговом волейбольном турнире участвуют 6 команд. Может ли случиться, что какие-то три команды наберут в сумме на 2 очка больше, чем все остальные?

6. Восемь футбольных команд провели турнир в один круг (каждая сыграла с каждой по одному разу). Какое наименьшее число очков гарантирует команде место в четверке лидеров?

7. В первенстве школы в один круг участвовали шесть команд. Может ли оказаться так, что набравшая наибольшее число очков команда одержала меньше побед, чем любая другая, если а) турнир по хоккею; б) турнир по футболу?

9. В турнире каждый шахматист половину всех очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек участвовало в турнире?

10. В волейбольном турнире участвовали 12 команд, и каждая сыграла с каждой по одному матчу. По окончании турнира оказалось, что ни одна из команд не набрала 7 очков. Докажите, что найдутся такие три команды А, В и С, что А выиграла у В, В выиграла у С, а С выиграла у А.

6-14, матбой 6-7 профи, вариант А, 17 июля

1. На плоскости отмечено 6 красных, 6 синих и 6 зеленых точек, причем никакие три из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что сумма площадей треугольников с вершинами одного цвета составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников с отмеченными вершинами.

2. Про натуральное число *n* известно, что доля точных квадратов среди всех натуральных делителей *n* составляет $\frac{3}{40}$. Сколько простых делителей у *n*?

3. Есть 12 монет, среди которых есть одиннадцать одинакового веса и одна фальшивая, легче остальных. Также имеются чашечные весы без гирь. Про них известно, что они либо обычные (то есть на них всегда перевешивает тяжёлая кучка), либо волшебные (на таких всегда перевешивает лёгкая кучка, равенство показывается правильно), но неизвестно, волшебные они всё-таки, или обычные. Можно ли за три взвешивания на таких весах найти фальшивую монету?

4. У Сени есть 5 альбомов с фотографиями. Как-то, рассматривая фотографии, он заметил, что суммарное число фотографий в любых двух альбомах принимает только три значения: 75, 88 и 101. Сколько фотографий в каждом альбоме?

5. В начальный момент времени в одной из клеток бесконечной клетчатой доски сидит микроб первого поколения. Далее в каждую *n*-ю секунду каждый микроб *n*-го поколения рождает двух микробов *n*+1 поколения, которые перебираются в соседние по стороне клетки. Сам микроб остается жить. Размножение заканчивается, если два микроба оказываются в одной клетке. Какое наибольшее число секунд могло продолжатся размножение?

6. Вася отметил на доске 100×100 несколько клеток и разрешил королю ходить только по отмеченным клеткам. Затем Вася выбрал две отмеченные клетки и сообщил Пете минимальное число ходов короля от одной до другой. Какое наибольшее число мог услышать Петя?

7. В некотором государстве города связаны между собой дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой, но только одним путем. Для каждого города правительственная комиссия измерила все пути, ведущие из него в другие города, и длину самого протяженного из них назвала показателем провинциальности этого города. Города с наименьшим показателем провинциальности были объявлены центральными. Таких городов оказалось три. Докажите, что комиссия ошиблась

8. По кругу записаны 99 цифр. Известно, что если прочесть их по часовой стрелке, начиная с некоторого места, получается 99-значное число, которое делится на 81. Докажите, что тогда если прочесть их по часовой стрелке, начиная с любого другого места, также получится число, которое делится на 81.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6-14, матбой 6-7 профи, вариант А, 17 июля

1. На плоскости отмечено 6 красных, 6 синих и 6 зеленых точек, причем никакие три из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что сумма площадей треугольников с вершинами одного цвета составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников с отмеченными вершинами.

2. Про натуральное число *n* известно, что доля точных квадратов среди всех натуральных делителей *n* составляет $\frac{3}{40}$. Сколько простых делителей у *n*?

3. Есть 12 монет, среди которых есть одиннадцать одинакового веса и одна фальшивая, легче остальных. Также имеются чашечные весы без гирь. Про них известно, что они либо обычные (то есть на них всегда перевешивает тяжёлая кучка), либо волшебные (на таких всегда перевешивает лёгкая кучка, равенство показывается правильно), но неизвестно, волшебные они всё-таки, или обычные. Можно ли за три взвешивания на таких весах найти фальшивую монету?

4. У Сени есть 5 альбомов с фотографиями. Как-то, рассматривая фотографии, он заметил, что суммарное число фотографий в любых двух альбомах принимает только три значения: 75, 88 и 101. Сколько фотографий в каждом альбоме?

5. В начальный момент времени в одной из клеток бесконечной клетчатой доски сидит микроб первого поколения. Далее в каждую *n*-ю секунду каждый микроб *n*-го поколения рождает двух микробов *n*+1 поколения, которые перебираются в соседние по стороне клетки. Сам микроб остается жить. Размножение заканчивается, если два микроба оказываются в одной клетке. Какое наибольшее число секунд могло продолжатся размножение?

6. Вася отметил на доске 100×100 несколько клеток и разрешил королю ходить только по отмеченным клеткам. Затем Вася выбрал две отмеченные клетки и сообщил Пете минимальное число ходов короля от одной до другой. Какое наибольшее число мог услышать Петя?

7. В некотором государстве города связаны между собой дорогами так, что из любого города можно попасть в любой другой, но только одним путем. Для каждого города правительственная комиссия измерила все пути, ведущие из него в другие города, и длину самого протяженного из них назвала показателем провинциальности этого города. Города с наименьшим показателем провинциальности были объявлены центральными. Таких городов оказалось три. Докажите, что комиссия ошиблась

8. По кругу записаны 99 цифр. Известно, что если прочесть их по часовой стрелке, начиная с некоторого места, получается 99-значное число, которое делится на 81. Докажите, что тогда если прочесть их по часовой стрелке, начиная с любого другого места, также получится число, которое делится на 81.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6-14, матбой 6-7 профи, вариант Б, 17 июля

1. Винни-Пух сел на диету и каждый день ест на две банки варенья меньше и на одну банку меда больше, чем в предыдущий день. Всего за время диеты он съел 484 банки варенья и 275 банок меда. Сколько дней длилась диета?

2. В начальный момент времени в одной из клеток бесконечной клетчатой доски сидит микроб первого поколения. Далее в каждую n-ю секунду каждый микроб n--го поколения рождает двух микробов n+1 поколения, которые перебираются в соседние по стороне клетки. Сам микроб остается жив. Размножение заканчивается, если два микроба оказываются в одной клетке. Какое наибольшее число секунд могло продолжатся размножение?

3. Есть 12 монет, среди которых есть одиннадцать одинакового веса и одна фальшивая, легче остальных. Также имеются чашечные весы без гирь. Про них известно, что они либо обычные (то есть на них всегда перевешивает тяжёлая кучка), либо волшебные (на таких всегда перевешивает лёгкая кучка, равенство показывается правильно), но неизвестно, волшебные они всё-таки, или обычные. Можно ли за три взвешивания на таких весах найти фальшивую монету?

4 Вася отметил на доске 100×100 несколько клеток и разрешил королю ходить только по отмеченным клеткам. Затем Вася выбрал две отмеченные клетки и сообщил Пете минимальное число ходов короля от одной до другой. Какое наибольшее число мог услышать Петя?

5. На доске написано составное число. Вася увеличил его на наибольший простой делитель, а полученную сумму – на её наименьший простой делитель. Петя, напротив, увеличил его на наименьший простой делитель, а полученную сумму – на наибольший простой делитель. Могли ли Васин и Петин итоги оказаться равными?

6. По кругу записаны 99 цифр. Известно, что если прочесть их по часовой стрелке, начиная с некоторого места, получается 99-значное число, которое делится на 81. Докажите, что тогда если прочесть их по часовой стрелке, начиная с любого другого места, также получится число, которое делится на 81.

7. Стройконтора взялась строить дорогу длиной 10 км. План строительства таков: за первый день строим 1 км дороги, а затем, если к началу очередного дня построено К км, то за этот день строится $\frac{1}{K}$км. Докажите, что не пройдёт и года, как дорога будет готова.

8. Какое наибольшее число параллелепипедов 2×2×1 можно вырезать из куба 3×3×3?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6-14, матбой 6-7 профи, вариант Б, 17 июля

1. Винни-Пух сел на диету и каждый день ест на две банки варенья меньше и на одну банку меда больше, чем в предыдущий день. Всего за время диеты он съел 484 банки варенья и 275 банок меда. Сколько дней длилась диета?

2. В начальный момент времени в одной из клеток бесконечной клетчатой доски сидит микроб первого поколения. Далее в каждую n-ю секунду каждый микроб n--го поколения рождает двух микробов n+1 поколения, которые перебираются в соседние по стороне клетки. Размножение заканчивается, если два микроба оказываются в одной клетке. Какое наибольшее число секунд могло продолжатся размножение?

3. Есть 12 монет, среди которых есть одиннадцать одинакового веса и одна фальшивая, легче остальных. Также имеются чашечные весы без гирь. Про них известно, что они либо обычные (то есть на них всегда перевешивает тяжёлая кучка), либо волшебные (на таких всегда перевешивает лёгкая кучка, равенство показывается правильно), но неизвестно, волшебные они всё-таки, или обычные. Можно ли за три взвешивания на таких весах найти фальшивую монету?

4 Вася отметил на доске 100×100 несколько клеток и разрешил королю ходить только по отмеченным клеткам. Затем Вася выбрал две отмеченные клетки и сообщил Пете минимальное число ходов короля от одной до другой. Какое наибольшее число мог услышать Петя?

5. На доске написано составное число. Вася увеличил его на наибольший простой делитель, а полученную сумму – на её наименьший простой делитель. Петя, напротив, увеличил его на наименьший простой делитель, а полученную сумму – на наибольший простой делитель. Могли ли Васин и Петин итоги оказаться равными?

6. По кругу записаны 99 цифр. Известно, что если прочесть их по часовой стрелке, начиная с некоторого места, получается 99-значное число, которое делится на 81. Докажите, что тогда если прочесть их по часовой стрелке, начиная с любого другого места, также получится число, которое делится на 81.

7. Стройконтора взялась строить дорогу длиной 10 км. План строительства таков: за первый день строим 1 км дороги, а затем, если к началу очередного дня построено К км, то за этот день строится $\frac{1}{K}$км. Докажите, что не пройдёт и года, как дорога будет готова.

8. Какое наибольшее число параллелепипедов 2×2×1 можно вырезать из куба 3×3×3?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14, соответствие, 17 июля

1. В группе 15 школьников. В матбою участвует команда из 6 человек, а в турнире по футболу – команда из 11 человек. Каких способов больше – выбрать команду для матбоя или выбрать команду для футбола? На сколько?

2. В одном доме живут 9 мальчиков и одна девочка. Назовем "компанией" любую группу, состоящую из двух или более детей из этого дома. Каких компаний больше: с девочкой или без девочки? На сколько?

3. Назовем трехзначное число “горкой”, если в нем цифра в разряде десятков больше любой из двух оставшихся, и “ямкой”, если в нем цифра в разряде десятков меньше любой из двух оставшихся. Каких чисел больше – “горок” или “ямок”, и на сколько?

4. Решая числовой ребус ДВА + ТРИ = ПЯТЬ, Вася получил 177 возможных ответов. а) Докажите, что Вася нашел не все решения ребуса. б) Подумав, Вася нашел еще одно решение. Верно ли, что теперь Вася нашел все решения ребуса?

5. В некотором царстве любое множество подданных образует тайное общество, и каждый подданный доносит ровно на одно тайное общество. Назовем подданного порядочным, если он не доносит на общество, в котором сам состоит. Докажите, что на общество всех порядочных подданных никто не доносит.

6. Назовём шестизначный билет (от 000000 до 999999) счастливым по-московски, если сумма первых его трёх цифр равна сумме трёх последних. Назовём билет счастливым по-петербуржски, если сумма его цифр, стоящих на чётных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах. а) Каких счастливых билетов больше? б) Назовем билет счастливым по-ижевски, если сумма цифр на нем равна 27. Сравните количество счастливых билетов по-ижевски с количеством счастливых билетов по-московски и по-петербуржски.

7. У Вовы есть булка, которую можно сломать в n местах. Докажите, что количество способов поломать эту булку на четное число кусков равно количеству способов поломать ее на нечетное число кусков.

8. Назовём хромой ладьёй фигуру, которая может ходить только в соседние по стороне клетки. Рассмотрим все пути такой фигуры по шахматной доске, обходя все клетки по одному разу. Докажите, что в клетке $a1$ (угловой) путей начинается больше, чем тех, которые начинаются в $b2$ (соседней с $a1$ по диагонали).

9. Пусть $ABCDEF$ – ячейка шестиугольной решетки. Лягушка прыгает из узла в соседний за один прыжок. Докажите, что количество способов через сто прыжков попасть из вершины A в вершину A не меньше, чем количество способов попасть из т. A в т. C.

10. По окружности стоят 20 целых чисел с суммой 1. Чему равно число цепочек подряд стоящих чисел с положительной суммой?

11*. Полукороль стоит в нижнем левом углу доски $n\times n$. Он может делать ходы на одну клетку в трёх направлениях: вправо, вверх и по диагонали вправо-вверх. Обозначим за A_n количество маршрутов полукороля в правый верхний угол, а за B_n – количество маршрутов в правый верхний угол, не заходящих в верхнюю строку и в левый столбец (кроме начала и конца пути). Докажите, что $B_n = 2A_{n-1}$.

6 класс, группа 14, НОК И НОД, 19 июля

Вводная задача

0. Три планеты звездной система ГАММА имеют периоды обращения 4, 5 и 7 лет соответственно. Как часто в это системе происходит парад планет?

00. Три планеты звездной система ГАММА-1 имеют периоды обращения 4, 6 и 8 лет соответственно. Как часто в это системе происходит парад планет?

000. А в системе БЕТА-плюс периоды обращения двух планет равны 4 и 8 лет. Как часто происходит парад планет в это системе?

Теория о НОДе (обозначение (a, b))

а) Докажите, что для любых двух натуральных чисел a и b наибольший общий делитель (a, b) существует и единственен.

б) когда $(a, b) = a$?

в) докажите, что (a, b) делится на любой общий делитель a и b.

г) Докажите, что $(ca, cb) = c\,(a, b)$.

д) Докажите, что числа $\frac{a}{(a,b)}$ и $\frac{b}{(a,b)}$ взаимно просты.

е) Найдите условие, при котором $(ca, b) = (a, b)$.

Теория о НОДе (обозначение [a, b]

а) Докажите, что для любых двух натуральных чисел a и b наименьшее общее кратное $[a, b]$ существует и единственно.

б) когда $[a, b] = a$?

в) докажите, что любое кратное a и b делится на $[a, b]$

г) Докажите, что $[ca, cb] = c\,[a, b]$.

д) Докажите, что числа $\frac{[a,b]}{a}$ и $\frac{[a,b]}{b}$ взаимно просты.

е) Найдите условие, при котором $(ca, b) = (a, b)$.

Найдите какие-нибудь пять натуральных чисел, разность любых двух из которых равна их НОДу.

Основная формула $ab = (a, b)\cdot[a, b]$

ЗАДАЧИ

1. Придумайте пять таких чисел, что если взять несколько их (только не все сразу), то это множество не будет взаимно просто в совокупности, а все вместе – взаимно просты.

2. а) Может ли наименьшее общее кратное двух чисел равняться их сумме?
б) Может ли наименьшее общее кратное трех чисел равняться их сумме?

3. Докажите, что если $[a, a + 5] = [b, b + 5]$, то $a = b$.

4. Можно ли вместо звёздочек вставить в выражение НОК(*,*,*) – НОК(*,*,*) = 1009 в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

5. Найдите, чему равно

а) $[a,(a,b)]$; б) $(a,[a,b])$; в) $[a, b, c](ab, ac, bc)$;

6. В четырехзначном числе, в записи которого нет 0 и 9, первую и последнюю цифру увеличили на 1, а две средние – уменьшили на 1. Известно, что НОД двух чисел (первоначального и получившегося) – двузначное число, большее 85. Найдите, чему равен НОД

7. Натуральные числа m и n таковы, что $(m, n)+ [m, n] = m+n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

8. Найдите все пары натуральных чисел (a, b), для которых выполняется равенство НОК(a, b) – НОД$(a, b) = ab/5$.

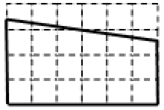
9. Пусть натуральное число n таково, что $(n, n+1) < (n, n+2) < \ldots < (n, n+35)$. Докажите, что $(n, n+35) < (n, n+36)$.

10. В прямоугольнике с целыми сторонами m и n на клетчатой бумаге проведена диагональ. Через какое число узлов она проходит? На сколько частей эта диагональ делится линиями сетки?

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

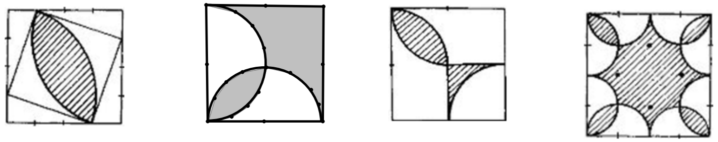
6 класс, группа 14, пифагорные перекраивания, 20 июля

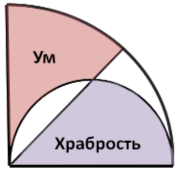
Необходимые знания. Площадь круга $S = \pi r^2$ (r – радиус круга).



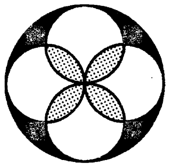
0. Площадь фигуры, нарисованной на клетчатой бумаге (рисунок внизу) равна 40,5 см^2. Чему равна сторона клеточки?

1. Найдите площади заштрихованных фигур, считая сторону квадрата равной 2.

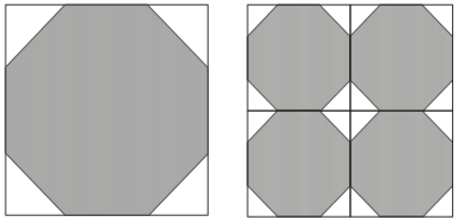




2. Художник нарисовал для короля Артура герб в форме четверти круга и раскрасил его в 3 цвета, которые изображают ум, храбрость и доброту. Помогите художнику убедить короля, что ума на гербе столько же, сколько и храбрости.

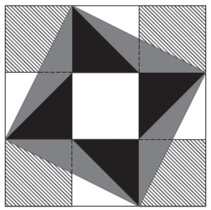


3. Орнамент составлен из трех цветов. Найдите соотношение между площадями каждого цвета.

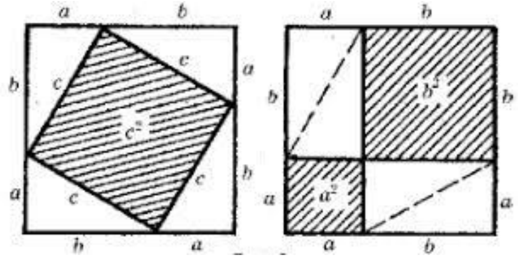


4. Сторона большого квадрата равна 1. Сторона каждого квадратика делится на 3 равные части. Какая часть площади закрашена на каждом из рисунков?

5. Сторона большого квадрата равна 30, каждая разбита на три равные части, после чего построен указанный рисунок. На нем есть черные, белые, серые и заштрихованные области. Найдите площадь серых частей.

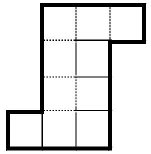


Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике $c^2 = a^2+b^2$, где с – гипотенуза, *a* и *b* – катеты.



Теория. Докажите теорему Пифагора, взглянув на рисунок.

6. Разрежьте квадрат 3×3 на 5 частей, которые можно сложить в два квадрата – площади 5 и площади 4. Резать не обязательно по линиям сетки.



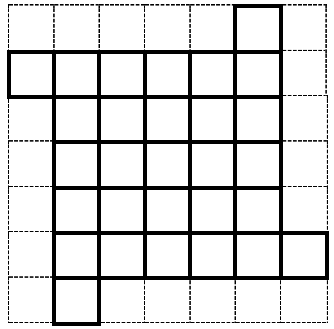
7. Разрежьте фигуру на рисунке на три части, после чего сложите из этих частей квадрат.

8. Имеются два квадрата — 3×3 и 1×1. Разрезать эти квадраты на части, из которых можно было бы сложить один квадрат.

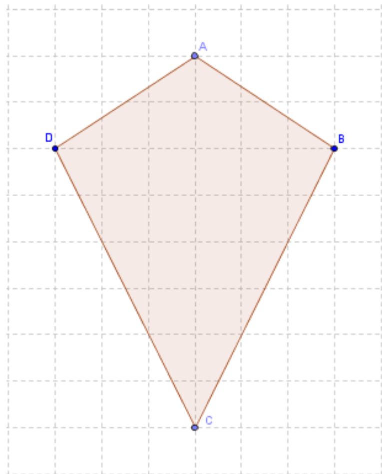
ТЕОРИЯ.

а) Докажите, что любые два квадрата можно перекроить в один.

б) Докажите, что любой треугольник можно перекроить в прямоугольник, сделав не более трех частей.



9. Перекроите фигуру, указанную на рисунке, в квадрат.



10. Разрежьте дельтоид на 6 равных треугольников

11. В стене имеется маленькая дырка (точка). У хозяина есть флажок следующей формы (см. рисунок). Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь, так чтобы флажок закрывал дырку.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14, о средних, 20 июля

1. а) Два человека отправились на рынок продавать яблоки. У них было по 30 яблок. Один собирался продавать 2 яблока за 1 р., а другой — 3 яблока за 1 р. Перед началом торговли одного из них вызвали домой, и он попросил другого продавца продать его яблоки. Тот стал продавать 5 яблок за 2 р. Если бы они торговали порознь, то выручили бы 10 р. и 15 р., а, продавая 5 яблок за 2 р., получили 24 р. Куда исчез рубль? б) По какой цене надо продавать смесь яблок?

2. а) В магазине есть на равную сумму конфеты стоимостью 2 р. за килограмм и стоимостью 3 р. за килограмм. По какой цене надо продавать смесь этих конфет? **б)** Тот же вопрос, если тех и других конфет одинаковое по весу количество.

3. Водитель должен был проехать расстояние с определенной постоянной скоростью. Но он спешил и увеличил скорость в два раза, за счет чего приехал на час раньше, чем планировал. Во сколько раз он должен был увеличить скорость, чтобы приехать на 2 часа раньше?

4. Когда Чебурашка идет по трамвайной линии против хода движения трамвая, то трамвай его сбивает каждые 5 минут (впрочем, с Чебурашкой ничего плохого не происходит). Когда же Чебурашка перешел на трамвайную линию по ходу движения, то трамвай стал его сбивать каждые 7 минут. Как часто трамвай будет переезжать Чебурашку, если тот будет спать на трамвайной линии?

5. Два совершенно одинаковых катера, имеющих одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум различным рекам одинаковое расстояние (по течению) и возвращаются обратно (против течения). В какой реке на эту поездку потребуется больше времени: в реке с быстрым течением или в реке с медленным течением?

6. У продавца имеются чашечные весы с неравными плечами и гири. Сначала он взвешивает товар на одной чашке, затем – на другой, и берет средний вес. Не обманывает ли он?

7. Коля и Вася за январь получили по 20 оценок, причём Коля получил пятерок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, троек столько же, сколько Вася двоек, и двоек столько же, сколько Вася - пятёрок. При этом средний балл за январь у них одинаковый. Сколько двоек за январь получил Коля?

8. Один путник шел первые полпути со скоростью 4 км/ч, а вторые полпути со скоростью 6 км/ч. Другой путник шел первую половину времени со скоростью со скоростью 4км/ч, а вторую половину времени со скоростью 6 км/ч. С какой постоянной скоростью должен был бы идти каждый из них, чтобы затратить на свое путешествие то же самое время?

9. Группа психологов разработала тест, пройдя который, каждый человек получает оценку – число Q – показатель его умственных способностей (чем больше Q, тем больше способности). За рейтинг страны принимается среднее арифметическое значений Q всех жителей этой страны.

а) Группа граждан страны А эмигрировала в страну Б. Покажите, что при этом у обеих стран мог вырасти рейтинг.

б) После этого группа граждан страны Б (в числе которых могут быть и бывшие эмигранты из А) эмигрировала в страну А. Возможно ли, что рейтинги обеих стран опять выросли?

в) Группа граждан страны А эмигрировала в страну Б, а группа граждан Б – в страну В. В результате этого рейтинги каждой страны оказались выше первоначальных. После этого направление миграционных потоков изменилось на противоположное - часть жителей В переехала в Б, а часть жителей Б – в А. Оказалось, что в результате рейтинги всех трех стран опять выросли (по сравнению с теми, которые были после первого переезда, но до начала второго). (Так, во всяком случае, утверждают информационные агентства этих стран.) Может ли такое быть?

(Предполагается, что за рассматриваемое время Q граждан не изменилось, никто не умер и не родился.)

10*. У каждого ребенка из М6 есть свои тараканы в голове, не у всех поровну. Два таракана являются *товарищами*, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет ребенок из М6, или среднее количество товарищей у таракана?

6 класс, группа 14, больше-меньше, 21 июля

0. Три коржика тяжелее пяти пирожков. Могут ли пять коржиков быть легче семи пирожков? Могут ли семь коржиков быть легче тринадцати пирожков?

1. Маленькая Соня на каждой третьей странице книжки нарисовала заколяку. Заколяка обиделась, и на каждой пятой странице книжки нарисовала маленькую Соню. Вечером папа обнаружил в книжке 10 заколяк и 7 портретов маленькой Сони. Сколько страниц в книжке? Укажите все возможные варианты.

2. Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Этой коробки Наташе хватило на 41 чашку чая, а Инне – на 58. Сколько пакетиков было в коробке?

3. Толя и Дима покупали арбузы. Когда продавец взвесил их на весах со стрелкой, оказалось, что один арбуз весит 7 кг, а другой – 11 кг. Друзья положили на весы оба арбуза, и весы показали 15 кг. Весы ошибаются не более, чем на 1 кг. Сколько весят арбузы?

4. В автобусе есть одноместные и двухместные сидения. Кондуктор заметил, что когда в автобусе сидело 13 человек, то 9 сидений были свободными, а когда сидело 10 человек, то свободными были 6 сидений. Сколько сидений в автобусе?

5. Баба-Яга и Кащей собрали некоторое количество мухоморов. Количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги в 13 раз больше, чем на мухоморах Кащея, но после того, как Баба-Яга отдала Кащею свой мухомор с наименьшим числом крапинок, на ее мухоморах стало крапинок только в 8 раз больше, чем у Кащея. Докажите, что в начале у Бабы-Яги было не более 23 мухоморов.

6. Съев на пустой желудок трёх поросят и семерых козлят, Серый Волк всё ещё страдал от голода. Зато в другой раз он съел на пустой желудок 7 поросят и козлёнка и страдал уже от обжорства. От чего пострадает Волк, если съест на пустой желудок 11 козлят?

7. В конкурсе "Кенгуру" предлагаются 10 трехбалльных задач, 10 четырехбалльных и 10 пятибалльных. **а)** Саша верно решил 60% всех задач. Докажите, что он набрал более 50%, но менее 70% максимально возможных баллов.

б) Костя набрал 60% максимального. Докажите, что он решил более 50% и менее 70% задач.

8. Три игрока Андрей, Боря и Витя играли в пинг-понг на вылет (то есть после каждой партии проигравший уступает место третьему). Андрей сыграл 10 партий, а Боря сыграл 21 партию. Сколько партий сыграл Витя?

9. Ольга Сергеевна (НОС) и Александр Михайлович (ПАМ) делят $2n+1$ ребенка на две группы, причем каждый хочет захапать себе побольше. Алгоритм дележки таков: сначала список детей делит НОС на две части, правда, с условием, что в каждой части не менее двух школьников. Потом ПАМ делит каждую часть снова на две. Ну и в итоге

а) НОС берет себе в группу самый длинный и самый короткий списки;

б) ПАМ берет себе в группу самый длинный и самый короткий списки;

в) НОС сама решает, брать ей либо самый длинный и самый короткий, или брать два средних списка, но разрешает при этом ПАМ взять из своей группы самого сильного ребенка. Определите, пожалуйста, какой способ самый выгодный для НОС.

10. В классе дали контрольную. По крайней мере две трети ее задач оказались трудными: каждую такую задачу не решили по крайней мере две трети школьников. Однако, по крайней мере две трети школьников класса написали контрольную хорошо: каждый такой школьник решил по крайней мере две трети задач контрольной. Могло ли такое быть?

б) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в ее условии две трети на три четверти?

в) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в ее условии две трети на семь десятых?

6 класс, группа 14, счастливые часов не наблюдают, 20 июля

0. Когда угол между часовой и минутной стрелками часов больше: **а**) в 13:45 или в 22:15; **б**) в 13:43 или в 22:17; **в)** через t минут после полудня или за t минут до полуночи?

1. Найдите угол между часовой и минутной стрелками **а)** в 9часов 15 минут; **б)** в 14 часов 12 минут?

2. а) Сколько раз с 12:00 до 23:59 совпадают минутная и часовая стрелки часов? **б)** сколько раз они противоположны? **в)** Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки правильно идущих часов образуют угол в 30°?

3. Укажите хотя бы один момент времени, отличный от 6:00 и 18:00, когда часовая и минутная стрелки правильно идущих часов направлены в противоположные стороны.

4. Вася измерил транспортиром и записал в тетрадку углы между часовой и минутной стрелками сначала в 8:20, а потом в 9:25. После этого Петя забрал свой транспортир. Помогите Васе найти углы между стрелками в 10:30 и 11:35.

5. Когда Петя начал решать эту задачу, он заметил, что часовая и минутная стрелки его часов образуют прямой угол. Пока он решал ее, угол все время был тупым, а в тот момент, когда Петя закончил решение, угол снова стал прямым. Сколько времени Петя решал эту задачу?

6. Петя проснулся в восьмом часу утра и заметил, что часовая стрелка его будильника делит пополам угол между минутной стрелкой и стрелкой звонка, показывающей на цифру 8. Через какое время должен прозвенеть будильник?

7. Ученик начал решать задачу между 9 и 10 часами и закончил между12 и 13 часами. Сколько времени он решал задачу, если за это время часовая и минутная стрелки часов поменялись местами?

8. Перед вами часы. Сколько существует положений стрелок, по которым нельзя определить время, если не знать, какая стрелка часовая, а какая минутная? (Считается, что положение каждой из стрелок можно определить точно, но следить за тем, как стрелки двигаются, нельзя.)

9. В мире антиподов минутная стрелка часов идет с нормальной скоростью, но в противоположную сторону. Сколько раз за сутки стрелки антиподных часов **а)** совпадают; **б)** противоположны? **в**) Сколько раз в сутки антиподные часы невозможно отличить от нормальных (если не знать, который час на самом деле)?

10. По точному хронометру было установлено, что часовая и минутная стрелки равномерно идущих (но с неправильной скоростью!) часов совпадают через каждые 66 минут. На сколько минут в час спешат или отстают эти

6 – 14, движение по прямой, 22 июля

1. Поезд двигался в одном направлении а) 5 часов; б) 5 часов 30 минут; в) 5 часов и сколько-то минут. Известно, что за любой отрезок времени длительностью в один час поезд проходил ровно 100 км. Верно ли, что поезд двигался равномерно? Верно ли, что средняя скорость поезда была равна 100 км/ч?

2. Андре, проживающий в городе *А*, выехал из него, доехал до города *Б*, провел там ровно час, после чего выехал обратно в *А*. Его друг Блез, живущий в городе *Б*, выехал из города *Б* в тот же момент, когда и Андре из *А*, доехал до города *А*, провел там час и вернулся в *Б*. Оба путешественника двигались с постоянной скоростью (скорость Андре и Блеза могла быть разной). Их первая встреча произошла в 70 км от города *А*, а вторая — в 40 км от города *Б*, причем оба уже возвращались домой. Найдите расстояние между *А* и *Б*.

3. Из пункта А одновременно в одном направлении выезжают «Опель» со скоростью 80 км/ч и «Форд» со скоростью 100 км/ч. Через некоторое время вслед за ними с некоторой постоянной скоростью выехал «Альфа Ромео», который через час после своего выезда обогнал «Опель», а еще через полчаса — «Форд». Найдите скорость «Альфа Ромео».

4. Мальчик Коля любит плавать. На реке Вятке он, плывя по течению, проплывает от пляжа до лодочной станции за 18 минут, а обратно – против течения – ровно за 1 час. Когда он приехал на реку Иж, течение в которой немного медленнее, оказалось, что точно такое же расстояние он, плывя по течению, проплывает за 20 минут. Сколько ему времени потребуется, чтобы вернуться обратно?

5. Инженер ежедневно приезжает поездом на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 часов утра и пошёл навстречу машине. Встретив машину, он сел в неё и приехал на завод на 20 минут раньше, чем обычно. Сколько времени инженер шёл пешком? Скорости автомобиля и инженера постоянны.

6. По шоссе со скоростью 60 км/ч едет колонна машин длиной 300 метров. Проезжая мимо поста ДПС, каждая машина сбрасывает скорость до 40 км/ч. Какова будет длина колонны, когда все машины проедут пост ДПС?

7. Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают её перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

8. Из своих домиков одновременно навстречу друг другу выехали Кролик на автомобиле и Тигра на велосипеде. После столкновения они продолжили свой путь. Кролик, доехав до Тигриной норы, тотчас повернул назад и догнал Тигру через 2 часа после момента столкновения. Сколько времени после столкновения ехал Тигра до домика Кролика, если к моменту второй встречи он проехал 2/5 всего пути?

9. У реки живет племя Мумбо-Юмбо. Однажды со срочным известием в соседнее племя одновременно отправились молодой воин Мумбо и мудрый шаман Юмбо. Мумбо побежал со скоростью 11 км/ч к ближайшему хранилищу плотов, и затем поплыл на плоту в соседнее племя. А Юмбо, не торопясь, со скоростью 6 км/ч, пошел к другому хранилищу плотов и поплыл в соседнее племя оттуда. В итоге Юмбо приплыл раньше, чем Мумбо.

Река прямолинейна, плоты плывут со скоростью течения. Эта скорость всюду одинакова и выражается целым числом км/ч, не меньшим 6. Каково наибольшее возможное её значение?

10*. По пустыне равномерно движется караван верблюдов длиной в 1 км. Всадник проехал от конца каравана к началу и вернулся к концу каравана. За это время караван прошел 1 км. Какой путь проехал всадник, если скорость его была постоянной?

6 класс, группа 14, два способа, 22 июля

1. Можно ли расставить числа в таблице 5×5 так, чтобы сумма всех чисел в таблице была положительна, а в любом квадрате 2×2 – отрицательна?

2. Есть 10 чисел. Известно, что сумма любых а) пяти из них; б) девяти из них; в) восьми из них отрицательна. Обязательно ли сумма всех тоже будет отрицательна?

3. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 записали в вершинах куба, а на его ребрах написали двузначные числа, которые получаются с помощью цифр на концах ребер. Найдите сумму чисел на ребрах.

4. а) У всех трехзначных чисел нашли сумму цифр, после чего все полученные значения сложили. Сколько вышло в итоге?

б) У всех трехзначных чисел нашли произведение цифр, после чего все полученные значения сложили. Сколько вышло в итоге?

5. Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый мужчина подарил каждой женщине розы. Каждая женщина обижается, если её муж подарил какой-то из остальных женщин не меньше роз, чем ей. Оказалось, что для каждой женщины есть мужчина, который ей подарил столько же роз, сколько ее муж. Докажите, что хотя бы одна женщина обиделась.

6. Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

7. У Алеши есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алеша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Сережа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос - и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Сережа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алешей равно количеству различных чисел среди записанных Сережей.

8. В клетках таблицы 8×8 записаны числа от 1 до 64 (первая горизонталь нумеруется слева направо числами от 1 до 8, вторая от 9 до 16 и т. д.). Перед некоторыми числами поставлены плюсы, перед остальными - минусы, так что в каждой горизонтали и в каждой вертикали по 4 плюса и по 4 минуса. Докажите, что сумма всех чисел равна 0 с учетом знаков равна нулю.

9. Максим выписал в ряд натуральные числа от 1 до 10 в случайном порядке. Затем, он к каждому числу прибавил номер его места в ряду. Докажите, что после этого найдутся два числа, которые заканчиваются на одну и ту же цифру.

10. У Ани и Вани было по 30 пирожков. Они начали продавать их по 30 рублей. Если у одного из них покупают пирожок, другой немедленно снижает цену на свои пирожки на один рубль (пирожки продаются только по одному, и такого, чтобы они продавали по пирожку одновременно, не бывает). Сколько денег выручат в сумме Чип и Дейл, когда продадут все свои пирожки?

6 класс, группа 14, фантастические шахматы, 22 июля

1. Клетки доски 2×11 покрашены в черный и белый цвета так, что каждая белая клетка граничит по стороне хотя бы с одной черной клеткой. Какое наименьшее число черных клеток может быть на доске?

2. Какое наибольшее количество **а)** ферзей; **б)** коней; **в)** королей; **г)** слонов можно разместить на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

3. а) На поле для «морского боя» размера 12×12 стоит корабль 1×4. Какое минимальное количество выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка в него попасть? **б)** а если поле имеет обычный размер 10×10?

4. Саша поставил на доску 8×8 несколько слонов и 6 ладей так, чтобы ни одна фигура не била другую. Какое наибольшее количество фигур мог поставить Саша?

5. «Больная» ладья» – это фигура, которая бьет как ладья, но только на 1 или 2 клетки. Какое максимальное количество больных ладей можно расставить на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

6. Какое наибольшее число белых и чёрных слонов можно расставьте на шахматной доске так, чтобы слоны одинакового цвета не били друг друга? (Слоны не бьют друг через друга)

7. Магараджа – это фигура, которая бьет как ферзь и как конь одновременно. Какое максимальное количество магараджей, не бьющих друг друга, можно расставить а) на доске 6×6? б) на доске 7×7? в) на доске 8×8?

8. Фигура «слонь» каждый чётный ход делает как слон, а каждый нечётный – как конь. Сначала слонь стоит в углу доски. За какое наименьшее число ходов он может побывать во всех угловых клетках доски 8х8?

9. Какое наибольшее количество непересекающихся доминошек (прямоугольников из двух клеток) можно разместить в квадрате 99×99 таким образом, что в любом квадрате 2×2 можно поместить еще одну доминошку, не пересекающуюся с уже размещёнными?

10. Назовем центром трехклеточного уголка точку, принадлежащую всем трем его клеткам. Шахматную доску 99×99 полностью и без наложений покрыли не выходящими за её пределы трехклеточными уголками, после чего каждый уголок повернули вокруг своего центра на 90° (в любом направлении). Докажите, что при этом какая-то клетка доски оказалась не покрытой ни одним уголком.

XXXIV Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2018 года. 6 класс

6 класс, группа 14, фантастические шахматы, 22 июля

1. Клетки доски 2×11 покрашены в черный и белый цвета так, что каждая белая клетка граничит по стороне хотя бы с одной черной клеткой. Какое наименьшее число черных клеток может быть на доске?

2. Какое наибольшее количество **а)** ферзей; **б)** коней; **в)** королей; **г)** слонов можно разместить на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

3. а) На поле для «морского боя» размера 12×12 стоит корабль 1×4. Какое минимальное количество выстрелов нужно сделать, чтобы наверняка в него попасть? **б)** а если поле имеет обычный размер 10×10?

4. Саша поставил на доску 8×8 несколько слонов и 6 ладей так, чтобы ни одна фигура не била другую. Какое наибольшее количество фигур мог поставить Саша?

5. «Больная» ладья» – это фигура, которая бьет как ладья, но только на 1 или 2 клетки. Какое максимальное количество больных ладей можно расставить на доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

6. Какое наибольшее число белых и чёрных слонов можно расставьте на шахматной доске так, чтобы слоны одинакового цвета не били друг друга? (Слоны не бьют друг через друга)

7. Магараджа – это фигура, которая бьет как ферзь и как конь одновременно. Какое максимальное количество магараджей, не бьющих друг друга, можно расставить а) на доске 6×6? б) на доске 7×7? в) на доске 8×8?

8. Фигура «слонь» каждый чётный ход делает как слон, а каждый нечётный – как конь. Сначала слонь стоит в углу доски. За какое наименьшее число ходов он может побывать во всех угловых клетках доски 8х8?

9. Какое наибольшее количество непересекающихся доминошек (прямоугольников из двух клеток) можно разместить в квадрате 99×99 таким образом, что в любом квадрате 2×2 можно поместить еще одну доминошку, не пересекающуюся с уже размещёнными?

10. Назовем центром трехклеточного уголка точку, принадлежащую всем трем его клеткам. Шахматную доску 99×99 полностью и без наложений покрыли не выходящими за её пределы трехклеточными уголками, после чего каждый уголок повернули вокруг своего центра на 90° (в любом направлении). Докажите, что при этом какая-то клетка доски оказалась не покрытой ни одним уголком.