Двадцать третья Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2007 года

7 класс, группа профи

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Леонид Самойлов
Александр Лузгарев
Александр Красильников

От авторов

Самый большой грех по отношению к ближнему —
говорить ему то, что он поймет с первого раза.
Венедикт Ерофеев. *Из записных книжек*

Эта брошюра написана по материалам нашей работы с профи-группой седьмого класса Летней многопредметной школы Кировской области 2007 года. В ней — краткий конспект занятий, содержащий выдававшиеся учащимся задачи. Следует подчеркнуть, что в этой брошюре никак не отражены обсуждения и беседы с учениками, как правило, составлявшие основное содержание занятий. К сожалению, записать этот живой диалог со школьниками не представляется возможным. В некоторые листки мы сознательно включили весьма сложные для семиклассников задачи, надеясь, что в уютной домашней обстановке повзрослевшие школьники еще не раз вернутся к этим задачам и решат несколько наиболее сложных и интересных из них. Такие задачи сознательно не были разобраны на занятиях и консультациях.

Особую благодарность мы хотели бы выразить всем ученикам профи-группы. Общение с ними доставило нам много интересных, приятных и запоминающихся минут.

4 июля

Затруднительные ситуации

1 (Маньяк-паралитик). Тюрьма имеет вид квадрата 4×4, разбитого на камеры-одиночки — единичные квадратики. Все внутренние стенки камер — двери. В камере, находящейся в левом нижнем углу, находится маньяк-паралитик, который при виде живого человека немедленно набрасывается на него, убивает его и убегает, однако немедленно впадает в парализованное состояние, если оказывается в одном помещении с мертвым. Выход из тюрьмы ровно один — из правой верхней камеры. Однажды в распоряжении маньяка оказался ключ, открывающий любую дверь, в том числе и наружную дверь тюрьмы. В результате наутро в 15 камерах были обнаружены трупы заключенных, а маньяк сбежал. Как это ему удалось?

2 (Лампа). В детском оздоровительном центре "Юный уголовник" проходят летний отдых и обучение 43 семиклассника. Однажды на утренней поверке им зачитали следующий приказ: "Через час каждого из вас посадят в одиночную камеру. Затем конвой будет отводить вас по одному в карцер, где находится лампа. Сейчас лампа выключена. Ее нельзя трогать, а можно включать или выключать. В карцер с лампой вас будут конвоировать не по очереди, а в произвольном порядке. Обещаем лишь, что никакая побывка в карцере не будет ни для кого из вас последней. Как только кто-то из семиклассников скажет, что все 43 юных заключенных уже побывали в карцере с лампой, ваш срок закончится: если сказанное будет правдой, то все выйдут на свободу, а в случае ошибки попадут на зону особо строгого режима." О чем должны договориться за час семиклассники, чтобы рано или поздно выйти на свободу?

Для самостоятельного решения

3 (Демократия в отряде). В отряде сорок три семиклассника и десять преподавателей. Наиболее важные решения в жизни отряда принимаются на вечерней линейке большинством голосов на всеобщем голосовании. При голосовании никто не воздерживается, и каждый семиклассник и преподаватель голосует в строгом соответствии со своими убеждениями, не меняя их в течение смены. Никто не голосует за противоречивую систему утверждений, и каждый поддерживает все логические следствия того, за что голосует.

Однажды непонятливый отрок Дементий долго не отбивался. Преподаватели считают, что он нарушил Инструкцию и его следует наказать пятью нарядами. Двадцать три школьника считают, что нарушения Инструкции не было и наказывать Дементия не следует. Оставшиеся двадцать школьников считают, что нарушение Инструкции было, но следует ограничиться нравоучительной беседой с провинившимся.

Как преподавателям поставить поочередно два вопроса на голосование так, чтобы на основании принятых постановлений Дементий получил пять пользительных нарядов?

4 (Лампа наносит ответный удар). Как справиться с задачей 2, если юным уголовникам не известно, в каком состоянии будет находиться лампа в первый день?

5 (Ров). Из ДООЦ "Юный уголовник" сбежал оздоравливающийся. Он прихватил с собой веревочную лестницу длиной 30 метров и неограниченный запас веревки. Перед ним ров длиной 2 километра, шириной 40 метров, глубиной 50 метров. Обойти ров нельзя (по краям — отвесные скалы). Никаких приспособлений для крепления лестницы и веревки у юного уголовника нет. Как ему переправиться на другую сторону?

5 июля

Графы

Упр1. В городе проводилось совещание врачей. От каждой поликлиники на совещание было приглашено по пять врачей. Оказалось, что каждый из приглашенных работал в двух поликлиниках, поэтому на совещании представлял обе поликлиники. Кроме того, для любых двух поликлиник города среди участников совещания найдется единственный врач, который в них работает. Сколько в городе поликлиник и сколько врачей принимало участие в совещании?

Упр2. а) Докажите, что по итогам однокругового турнира всегда найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число игр вничью.

б) Докажите, что в Африке есть две страны, у которых поровну соседей.

в) Докажите, что у каждого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

Опр. *Граф. Вершины и ребра графа. Граф без петель и кратных ребер. Степень вершин. Связный граф. Цикл. Полный граф. Изоморфные(=равные) графы. Висячая вершина.*

В дальнейшем под графом будем понимать граф без петель и кратных ребер.

Упр3. Как связана сумма степеней всех вершин графа с числом его ребер?

Упр4. Можно ли нарисовать на плоскости 9 клякс так, чтобы каждая клякса пересекалась или с тремя, или с пятью другими кляксами?

Упр5 (Лемма о рукопожатиях). В графе число нечетных вершин четно.

Упр6. Существует ли 8-вершинный граф, степени вершин которого равны

а) 8, 6, 6, 5, 3, 2, 1, 1;

б) 7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1;

в) 7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1;

г) 7, 6, 4, 3, 4, 4, 1, 2?

Задачи

1. По узкому каналу плывут два кораблика, а навстречу им другие два кораблика. Ширины канала не хватает для того, чтобы они смогли разойтись, но на канале имеется залив, куда может зайти один корабль. Как им проплыть мимо друг друга?

2. На нарисованной справа доске расположены два белых и два черных коня. Коней разрешается переставлять по правилам шахматной игры. Можно ли поменять местами белых коней с черными?

3. Придумайте 7 слов, каждое из которых имеет ровно две общие буквы ровно с 3 другими словами.

4. В стране 25 городов, каждый город соединен дорогой не менее чем с 12 другими городами. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого. Обобщите эту задачу на случай n городов.

5. Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек? А если девочек 10, а мальчиков 9?

6. Каждый депутат имеет хотя бы одного врага, любая вражда взаимна. Докажите, что депутатов можно разбить на две фракции так, чтобы каждый имел врага в противоположной фракции.

Для самостоятельного решения

7. Каждый из 102 человек имеет не менее 68 знакомых. Докажите, что найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

8. В отряде 40 человек, у каждого не менее 20 друзей. Докажите, что можно усадить четверых человек за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом с двумя друзьями.

9. В ЛМШ $2n+1$ учеников. Известно, что среди любых трех учеников найдутся двое, которые дружат между собой. Докажите, что в ЛМШ есть ученик, у которого не менее n друзей.

5 июля

Сравнения по модулю: задачи

1. Найдите последнюю цифру числа а) 77^{77}; б) $77^{77^{77}}$.

2. Найдите две последние цифры числа 199^{200}.

3. Известно, что $a+2c$ и $b+3d$ делятся на 7. Докажите, что $ab-6cd$ делится на 7.

4. Докажите, что а) число дает тот же остаток при делении на 9, что и его сумма цифр;

б) число дает тот же остаток при делении на 11, что и его знакопеременная сумма цифр (знакопеременная сумма цифр числа 2007 — это $-2+0-0+7=5$).

5. Докажите, что $23^{43}+43^{23}$ делится на 66.

6. Докажите что $3^{100}-2^{100}$ делится на $2^{10}+3^{10}$.

7. Докажите, что $(3^n+1)^n-2$ делится на 3^n-2.

8. Докажите, что уравнение $3x^2+1=5y$ не имеет решений в целых числах.

9. В натуральном числе A переставили цифры, получив число B. Известно, что $A-B=\underbrace{11\ldots1}_{N\text{ единиц}}$. Найдите наименьшее возможное значение N.

10. Несколько семиклассников собрали поровну шишек. Время от времени какие-то семиклассники раздают каждому из остальных поровну из своих шишек. После многократного повторения такой процедуры у Дементия осталось 23 шишки, а у Абдуллы — 6 шишек. Сколько было семиклассников?

11. Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету ни отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что число монет без одной делится на число разбойников в шайке.

Для самостоятельного решения

12. Докажите, что при нечетных m и n число $1^n+2^n+\cdots+(m-1)^n$ делится на m.

13. Докажите, что $2007!!-2008!!$ делится на 2009 ($n!!=n(n-2)(n-4)\ldots$).

14. a и n — натуральные числа. Докажите, что $a^{2n+1}+(a-1)^{n+2}$ делится на a^2-a+1.

6 июля

ГМТ

Определение. *Геометрическое место точек (ГМТ)*, обладающих данным свойством — это фигура, состоящая из тех и только тех точек, которые обладают этим свойством.

Упр1. ГМТ, равноудаленных от данных точек A и B, есть серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Упр2. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, и это центр описанной окружности.

Упр3. ГМТ, равноудаленных от сторон данного угла и лежащих внутри данного угла, есть биссектриса данного угла.

Упр4. Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, и это центр вписанной окружности.

Упр5. У треугольника есть три вневписанных окружности.

Упр6. Найдите ГМТ, равноудаленных от трех данных прямых.

Упр7. Даны две параллельные прямые. Найдите ГМТ, расстояние от которых до первой прямой в два раза больше, чем до второй.

Упр8. Дан отрезок AB. Найдите ГМТ M таких, что а) $AM + MB = AB$; б) $AM - MB = AB$.

Упр9. Отрок Дементий решил забраться на лестницу, приставленную к стене. Едва он успел добраться до середины, лестница съехала на пол. Какова траектория Дементия до удара об пол?

Упр10. Пусть O лежит на отрезке AB. Найдите ГМТ M таких, что $\angle MOB = 2\angle MAB$.

1. Даны две параллельные прямые на расстоянии d друг от друга. Найти множество точек плоскости а) сумма расстояний от которых до этих прямых равна постоянной величине c; б) разность расстояний от которых до этих прямых равна постоянной величине c.

2. Найдите ГМТ середин хорд данной длины в данной окружности,

3. Найдите все точки внутри данной окружности, через которые можно провести хорду данной длины.

4. Загон для козла имеет форму квадрата. Из каких точек плоскости козел увидит меньше половины загона?

5. Дан квадрат. Найдите все точки такие, что сумма расстояний от каждой из них до двух противоположных сторон квадрата равна сумме расстояний до двух других сторон (под расстоянием от точки до стороны квадрата в этой задаче понимается расстояние до прямой, содержащей сторону).

6. Турист прошел километр на север, потом километр на восток, а потом километр на юг, и в результате попал в ту же точку, откуда начинал движение. Найдите все точки на земном шаре, откуда мог стартовать турист.

6 июля

Комбинаторика

1. В классе 14 мальчиков и 3 девочки. Сколькими способами можно назначить на один день дежурства а) одного ученика; б) бригаду из мальчика и девочки;

2. В классе 14 мальчиков и 3 девочки. Сколькими способами можно назначить на два дня дежурства а) мальчика в первый день, а девочку — во второй день; б) мальчика в один день, а девочку — в другой день? в) двух разных мальчиков?

3. В классе 14 мальчиков и 3 девочки. Сколькими способами можно назначить троих мальчиков а) на три дня дежурства (по одному в день); б) на один день дежурства?

Правило суммы. *Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b можно выбрать n способами, то элемент “или a, или b” можно выбрать $m + n$ способами.*

Правило произведения. *Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b можно выбрать n способами, то пару (a, b) из элемента a и элемента b можно выбрать mn способами.*

4. У скольких пятизначных чисел все цифры одной четности?

5. Марьванна проверила десять сочинений. Сколькими способами она может поставить пятибалльные оценки, если ей хочется поставить хотя бы один кол?

6. Из колоды в 36 карт надо вынуть семь карт и выложить их в ряд. Сколькими способами это можно сделать?

Определение. *Числом размещений из n элементов по k* называется количество способов выложить в ряд k разных предметов из данных n. Оно обозначается A_n^k.

7. Докажите, что $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ (всего k сомножителей).

8. В комнате живет шесть человек. Докажите, что они могут поменяться кроватями более, чем 500 способами.

9. Сколькими способами n человек могут выстроиться в колонну?

10. Сколькими способами можно переставить буквы в слове а) ПРИВЕТ; б) ПРЕВЕД; в) МАТЕМАТИТИКА; г) в произвольном слове?

Для самостоятельного решения

11. Сколько всего пятизначных чисел, у которых а) есть единица в записи; б) все цифры разные; в) любые две соседние цифры разные; г) есть две одинаковых цифры?

12. Сколькими способами можно переставить буквы в слове ОГОРОД так, чтобы три буквы О не шли подряд?

13. Сколько способов рассадить 5 мужчин и 5 женщин за круглым столом так, чтобы мужчины и женщины чередовались?

14. На дежурстве в столовой два школьника должны разносить стаканы, трое — разливать компот, пятеро — разносить второе. Сколькими способами десять школьников могут разделиться на дежурстве?

15. На сторонах равностороннего треугольника отметили по пять точек. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

16. Сколькими способами из n-элементного множества можно выбрать а) подмножество; б) непересекающиеся подмножества A и B; в) подмножества A и B такие, что A содержится в B?

17. В классе n мальчиков и n девочек. На уроке английского языка дети должны разбиться на пары. Сколькими способами они могут это сделать, если а) в каждой паре должны быть мальчик и девочка; б) пары могут быть произвольными?

18. На олимпиаде каждый из n школьников решил от 0 до 5 задач, причем общее количество сданных решений кратно трем. Результаты олимпиады подводятся по количеству решенных задач. Сколько возможно результатов?

19. Доступ к сейфу имеют 11 членов комиссии. Каким наименьшим числом замков можно снабдить сейф для того, чтобы при определенном наборе ключей любые шестеро, собравшись вместе, могли его открыть, а любых пяти было бы недостаточно?

6 июля

Зацикливание

1. Докажите, что последовательность остатков от деления на 2007 степеней числа 7 периодическая, причем длина периода не больше 2007.

2. Найдите сотую цифру после запятой числа 28/270.

3. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 10000.

Простой принцип зацикливания. *Если система может находиться в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по предыдущему, то система с некоторого момента зациклится.*

4. Один преподаватель оставил на дверях всех комнат записки следующего содержания: “Я в комнате номер ...” и исчез в неизвестном направлении. (Разные записки могут сообщать разную информацию). Некоторый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.

5. Жители страны Пуп Мира очень гордятся тем, что у них президентская форма правления: каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. ПупМировские социологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен "Актом о демократии", в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью определяется партийностью предыдущих десяти. Докажите, что последовательность партийностей президентов зациклится, и оцените как-нибудь длину периода.

Составной принцип зацикливания. *Если система может находиться в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по фиксированному числу предыдущих, то система с некоторого момента зациклится.*

6. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут зациклится.

7. Петя написал программу на Паскале для своего компьютера, которая должна печатать на принтере цифры десятичной записи числа $\sqrt{2}$. Докажите, что хоть Петя и крутой программер, но его программа рано или поздно напечатает не то, что требуется.

Для самостоятельного решения

8. Следующий член последовательности натуральных чисел равен последней цифре произведения двух предыдущих. Докажите что последовательность а) периодична; б) с периодом длины не больше 26; в) меньше 17.

9. Вот уже миллиард лет погода в Вишкиле в данный день полностью определяется предыдущей декадой. Как известно, существует девять вариантов погоды (как то: магнитная буря, метеоритный дождь, полный дубак и прочее). Во все дни последней недели погода была разная. Докажите, что еще когда-нибудь встретится неделя с точно такой же разнообразной погодой.

✝ **10.** Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями: $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, причем $0 \le x_1 \le 1$. Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая а) в том б) и только в том случае, если x_1 рационально.

7 июля

Алгоритм Евклида и линейное представление НОД

Задача для обсуждения

Колесо длины 19, в обод которого вбит гвоздь, достаточно долго едет по колесу длины 102. На сколько частей поделят большее колесо отметины от гвоздя?

Теория

Наибольшим общим делителем (НОД) *чисел a и b называется наибольшее натуральное число d такое, что a и b делятся на d.* Обозначение: $d = (a, b)$.

Упр1. Докажите, что а) $(a, b) = (a - b, b)$; б) $(ac, bc) = c \cdot (a, b)$.

Теорема о линейном разложении НОД. Для любых целых a и b найдутся x и y такие, что

$$\boxed{ax + by = (a, b)}$$

Упражнения

1. Найдите а) $(99!+100!, 101!)$; б) $(\underbrace{11\ldots1}_{51}, \underbrace{11\ldots1}_{81})$.

2. На какие натуральные числа может быть сократима дробь $\frac{13n+8}{8n+5}$?

3. На прямой сидит блоха, которая может прыгать либо на 15 сантиметров влево, либо на 21 сантиметр вправо. В каких точках прямой она может побывать?

4. Найдите с помощью алгоритма Евклида линейное представление НОД чисел 37 и 11.

Задачи

5. Докажите, что $(a^m-1, a^n-1) = a^{(m,n)}-1$.

6. По бесконечной шахматной доске ходит (m,n)-пегас, который может за один ход сдвинуться на m клеток по горизонтали или вертикали, а затем — на n клеток в перпендикулярном направлении. При каких m и n (m,n)-пегас сможет попасть из любой клетки доски на любую другую?

7. Известно, что $(m,n)=1$. Каково наибольшее возможное значение $(m+2007n, n+2007m)$?

8. Племя Мумбо-Юмбо решило выпустить в обращение денежные купюры достоинством 65 мумбов и 999 мумбов.

а) Докажите, что этими купюрами можно заплатить любую сумму денег (возможно, со сдачей).

б) Докажите, что любую сумму, большую 1000000 мумбов, можно заплатить этими купюрами без сдачи.

9. Докажите, что ни при каком натуральном m число 1978^m-1 не делится на 1000^m-1.

Задачи для бездельников

10. Докажите, что а) $(f_m, f_n)=1$, где $f_k = 2^{2^k}+1$ — числа Ферма; б) число $2^{2^n}-1$ имеет по крайней мере n различных простых делителей. Следовательно, простых чисел бесконечно много.

11. а) Докажите, что если для некоторых натуральных a и b верно, что $\text{НОК}(a, a+5) = \text{НОК}(b, b+5)$, то $a=b$.

б) Может ли при натуральных a, b и c выполняться равенство $\text{НОК}(a,b) = \text{НОК}(a+c, b+c)$?

7 июля

Связность

Обсуждение. Что такое компонента связности графа?

1. Если степени всех вершин связного графа равны 4, то после удаления любого ребра граф останется связным.

Опр. *Мост* — это такое ребро графа, после удаления которого увеличивается число компонент связности.

Упр. а) Докажите, что если ребро — мост, то после его удаления концы ребра будут в разных компонентах связности.

б) Может ли мост входить в цикл?

2. У каждого депутата ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что депутатов можно разделить на две нейтральные палаты.

3. Каждая из девочек до завтрака не более двух раз поболтала по телефону. Докажите, что их можно разбить на три группы так, чтобы в каждой группе не было болтавших девочек.

4. В некоторой стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что:

а) одним из этих двух видов транспорта можно добраться из любого города в любой другой;

б) для каждого города можно выбрать свой вид транспорта так, чтобы при помощи него можно было бы добраться до любого другого города не более чем с одной пересадкой;

в) одним из этих двух видов транспорта можно добраться из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок

5. В Столенград ведут 101 дорога, из Задворска — всего три, а из всех остальных городов выходят 10 дорог. Докажите, что из Задворска можно доехать до Столенграда.

6. В стране несколько городов, некоторые соединены авиарейсами одной из N авиакомпаний так, что из каждого города ведет ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из каждого города можно добраться до любого другого. Однажды был закрыт ровно $N-1$ авиарейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из каждого города можно добраться до любого другого.

Для самостоятельного решения

7. В войске герцога Икторна 1000 гоблинов. Любые два либо дружат, либо враждуют, либо незнакомы. Гоблины разговаривают только с друзьями. К тому же у каждого гоблина любые два друга враждуют, а любые два врага дружат. Докажите, что для того, чтобы все войско узнало о предстоящем наступлении, герцог должен сообщить о нем не менее, чем 200 гоблинам.

Задачи для бездельников

8. Если степени всех вершин связного графа равны 3, то после удаления некоторой вершины граф может стать несвязным...

9. В стране, состоящей из двух республик, A и B, из городов республики A провели несколько дорог с односторонним движением в города республики B так, что из каждого города республики A выходит хотя бы одна дорога, а в каждый город республики B входит хотя бы одна дорога. В республиках по 100 городов. Докажите, что можно провести не более, чем 100 новых дорог с односторонним движением так, чтобы из любого города можно было проехать в любой другой, не нарушая правил. Разрешается соединять два города несколькими дорогами.

9 июля

Деревья

Опр1. *Циклом* называется замкнутый путь по ребрам графа без повторяющихся ребер.

Опр2. *Деревом* называется связный граф без циклов.

Опр3. *Висячая вершина* графа — это вершина степени 1.

Упр1. В дереве каждые две вершины соединены ровно одним путем. Верно и обратное: если в графе каждые две вершины соединены ровно одном путем, то это дерево.

Лемма о висячей вершине. В дереве, число вершин которого больше 1, найдется висячая вершина (и даже две!).

Теорема (свойства деревьев). а) В дереве с n вершинами $n-1$ ребро. б) Любое ребро дерева является мостом.

Зад1. Дан связный граф с n вершинами. Докажите, что а) в нем не менее чем $n-1$ ребро;
б) если ребер $n-1$, то это — дерево.

Зад2. Все границы клеток шахматной доски выложили спичками (длина спички равны размеру клетки). Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы с любого поля на любое другое можно было пройти, не перепрыгивая через спички?

Зад3. В некой стране можно добраться из любого города в любой. Докажите, что можно закрыть несколько (≥ 0) дорог так, чтобы любые два города оказались соединены единственным путем.

Опр4. *Остовом (остовным деревом, скелетом)* графа называется подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом.

Упр2. а) В каждом связном графе есть остовное дерево.

б) Существует ли граф, у которого есть два остовных дерева без общих ребер?

Зад4. а) Докажите, что в произвольной связной сети метро можно закрыть одну станцию вместе со всеми выходящими из нее линиями, чтобы сеть осталась связной. б) Можно закрыть десять станций, если, конечно, изначально их больше десяти.

Зад5. В стаде 50 бычков попарно различного веса. На мясокомбинате имеются двухчашечные весы. За какое наименьшее число взвешиваний можно выявить самого упитанного бычка?

Для самостоятельного решения

1. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.

2. Докажите, что следующие пять определений дерева равносильны:

1) граф связен и не содержит циклов;
2) любые две вершины соединены единственным путем;
3) граф связен и любое ребро — мост;
4) граф связен, в нем n вершин и $n-1$ ребро;
5) граф не содержит циклов, имеет n вершин и $n-1$ ребро.

3. а) В графе с n вершинами и k компонентами связности не менее $n-k$ ребер.

б) Как устроен граф, в котором ровно $n-k$ ребер?

4. В стране 100 городов, из каждого можно добраться до каждого. Докажите, что можно побывать во всех городах, совершив а) не более 198 поездок; б) не более 196 поездок; в) число 196 иногда уменьшить нельзя.

Задача для бездельников

5. На ребрах дерева произвольным образом расставили стрелки. В случае, когда в некоторую вершину все стрелки входят, разрешается заменить направления всех этих стрелок на противоположные. Докажите, что с помощью таких операций можно получить любую заданную расстановку стрелок.

9 июля

Вписанные углы

Теорема о вписанном угле. Величина вписанного угла равна половине дуги, на которую он опирается.

Упр1. Докажите теорему о вписанном угле для случая, когда а) центр окружности лежит на стороне угла; б) центр окружности лежит внутри угла; в) центр окружности лежит вне угла.

Следствия. а) Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

б) Вписанные углы, опирающиеся на равные дуги, равны.

в) Вписанные углы, опирающиеся на равные хорды, равны или дополняют друг друга до $180°$.

Упр2. Докажите, что угол, опирающийся на диаметр, прямой.

Упр3. Докажите, что биссектриса вписанного угла делит соответствующую дугу пополам.

Упр4. Если трапеция вписана в окружность, то углы при ее основании равны.

Теорема. Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.

Задача (Уши Чебурашки). Найдите ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Упр5. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведенной к этой стороне (с полным исследованием!).

Задачи

1. На гипотенузе прямоугольного треугольника ABC внешним образом построен квадрат $ABDE$. O — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что луч CO — биссектриса угла C.

2. Докажите, что в треугольнике ABC биссектриса угла A и срединный перпендикуляр к стороне BC пересекаются на описанной окружности.

3. Докажите, что в треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой (все из одной вершины).

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Продолжения хорд AC и BD первой окружности пересекают вторую окружность в точках E и F. Докажите, что прямые CD и EF параллельны.

5. На одной из сторон острого угла расположен отрезок AB. Через точки A и B проведена окружность, касающаяся другой стороны угла в точке M. Рассматриваются всевозможные углы AXB, где точка X так же расположена на другой стороне угла. Докажите, что среди всех этих углов угол AMB — наибольший.

6. К стене вертикально приставлена лестница. На лестнице построен прямоугольный треугольник так, что лестница является его гипотенузой. Лестница начинает скользить. В вершине прямого угла снова сидит отрок Дементий. По какой траектории он будет двигаться?

7. (Лемма о трезубце) Прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M. Докажите, что треугольники BOM и COM равнобедренные.

10 июля

Основная теорема арифметики

> Простые числа не нужно складывать. Простые числа нужно умножать.
>
> Лев Ландау

Лемма. Если p — простое число и $ab \,\vdots\, p$, то либо $a \,\vdots\, p$, либо $b \,\vdots\, p$.

Основная теорема арифметики. Любое натуральное число можно представить в виде произведения простых сомножителей единственным образом (с точностью до порядка сомножителей).

Задача. а) Докажите существование представления в теореме.

б) Докажите, что лемма эквивалентна основной теореме арифметики.

в) Докажите лемму, воспользовавшись линейным представлением НОД.

1. Пусть $x = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$, $y = p_1^{l_1} \ldots p_s^{l_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые числа, $k_1, \ldots, k_s, l_1, \ldots, l_s$ — неотрицательные целые числа. а) Докажите, что $\text{НОД}(x, y) = p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}$, где $m_i = \min(k_i, l_i)$ для всех $i = 1, \ldots, s$; б) Придумайте и докажите аналогичную формулу для $\text{НОК}(x, y)$. в) Докажите, что $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$.

2. Решите уравнение в натуральных числах: НОК(x,y) − НОД$(x,y) = \frac{xy}{3}$.

3. а) Докажите, что если произведение двух чисел является степенью простого числа, то каждое из них — степень этого простого числа.

б) Докажите, что если произведение двух взаимно простых чисел является k-ой степенью некоторого натурального числа, то каждое из них — k-ая степень.

4. Докажите, что если число одновременно является квадратом и кубом, то оно является шестой степенью.

5. Решите уравнение в натуральных числах: $2^x + 1 = y^2$.

6. Докажите, что в вершинах любого многогранника можно расставить натуральные числа так, чтобы числа в вершинах, связанных ребром, имели общий делитель больше 1, а в вершинах, не связанных ребром — не имели.

7. Четное число u обладает следующим свойством: если оно делится на простое число p, то $u-1$ делится на $p-1$. Докажите, что u — степень двойки.

Для самостоятельного решения

8. Известно, что $(z+1)x^2 + x = zy^2 + y$. Докажите, что $y - x$ — квадрат целого числа.

9. Найдите все натуральные x и y, для которых $x^y = y^x$.

10. Докажите, что если целые числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ca = 0$, то abc — произведение квадрата на куб.

10 июля

Площадь

Утверждение. Каждой фигуре M на плоскости можно сопоставить число S_M, называемое *площадью*, такое, что выполнены следующие свойства:

1) $S_M \geq 0$;

2) Площади равных фигур равны;

3) Если фигура M состоит из фигур A и B, не имеющих общих внутренних точек, то $S_M = S_A + S_B$;

4) Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.

1. Докажите, что а) площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b равна $\dfrac{ab}{2}$, б) площадь треугольника со стороной a и опущенной на нее высотой h_a равна $\dfrac{ah_a}{2}$, в) площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h равна $\dfrac{(a+b)h}{2}$, г) площадь ромба равна половине произведения длин его диагоналей.

2. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $AD \parallel BC$ тогда и только тогда, когда $S_{ABO} = S_{CDO}$.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Докажите очень важную формулу: $AB : AC = BL : CL$.

4. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и D прямые, а стороны AB и BC равны. Длина перпендикуляра, опущенного из точки B на сторону AD, равна 1. Найдите S_{ABCD}.

5. $ABCD$ — квадрат. На стороне CD взята точка M, а на стороне AD — точка N. Отрезки BM и CN пересекаются в точке E, CN и AM — в точке F, BN и AM — в точке G. Докажите, что $S_{AEFG} = S_{CEM} + S_{MDNF} + S_{AGN}$.

6. В произвольном четырехугольнике (a, b, c, d — стороны по порядку) $S \leq \dfrac{ab+cd}{2}$.

7. Существует ли такой треугольник, что а) все его стороны больше 1 км, а площадь меньше 1 см^2; б) все его высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 км^2; в) все стороны треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 1 см^2.

8. а) В выпуклом четырехугольнике соединили середины противоположных сторон, и получившиеся части раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных частей равна сумме площадей белых. б) Каждую сторону четырехугольника разделили на 4 равные части, соединили соответственные точки на противоположных сторонах, и 16 полученных частей раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных частей равна сумме площадей белых.

Для самостоятельного решения

9. Внутри равностороннего треугольника взята точка. Докажите, что сумма расстояний от этой точки до сторон не зависит от выбора точки.

10. На сторонах AB и BC треугольника ABC внешним образом построены параллелограммы; P — точка пересечения продолжений их сторон, параллельных AB и BC. На стороне AC построен параллелограмм, вторая сторона которого равна и параллельна BP. Докажите, что его площадь равна сумме площадей первых двух параллелограммов.

11. Квадрат разрезан прямыми, параллельными его сторонам, на прямоугольники, которые раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. При этом оказалось, что общая площадь черных прямоугольников равна площади белых прямоугольников. Докажите, что прямоугольники можно переместить так, что все черные прямоугольники составят один прямоугольник.

12. В условиях задачи 6 докажите, что $S \leq \dfrac{ac+bd}{2}$.

11 июля

Игры

Зад1. Двое играющих наперегонки едят яблоки. Вначале первый выбирает яблоко, затем второй — любое из оставшихся яблок, и они одновременно начинают есть. Они едят с одинаковой скоростью, и тот, кто доел, берет следующее яблоко. Кто из них сможет съесть больше и на сколько при любых действиях второго, если вначале есть 3 яблока весами 160 г, 140 г и 90 г?

Зад2 (Игра Баше). Имеется 100 камней. За один ход можно брать 2, 3 или 4 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Зад3 (Интересная игра). Имеется 100 камней. За один ход можно брать 2, 3 или 4 камня, но не столько, сколько взял предыдущий. Кто выигрывает при правильной игре? А если камней n?

Обсуждение. Что такое позиция? Что такое граф игры? Что такое позиция в шахматах (учесть взятие на проходе, рокировку)? Обсуждаем существование стратегии для игры на графе.

1. На доске написано число 2. За ход можно к записанному числу прибавить один из его делителей отличный от самого этого числа. Проигрывает тот, кто получит число большее 1000. Докажите, что у первого игрока есть выигрышная стратегия.

Передача хода: если один из игроков каким-то способом может воспользоваться стратегий другого, то он не проиграет.

2. Имеется клетчатая шоколадка $m \times n$. За ход можно съесть дольку и все другие дольки, которые находятся не выше и не левее ее. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю клетку (там яд). Кто выигрывает при правильной игре?

3. Игра в "двойные шахматы" ведется также, как и в обычные, только игроки делают по 2 хода за раз. Докажите, что в этой игре у второго игрока не может быть выигрышной стратегии.

---

4. 100 карточек в стопке пронумерованы числами от 1 до 100 сверху вниз. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или несколько карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение всех чисел на карточках станет кратно 1000000. Может ли кто-то из игроков всегда выигрывать независимо от игры противника?

5. На доске написаны числа от 1 до 2007. За ход разрешается вычеркнуть любое число вместе со всеми его делителями. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6. От клетчатой доски $m \times n$ ($m > 2$, $n > 2$) осталась только рамка ширинs 1. За один ход можно выпилить одну или несколько клеток, образующих прямоугольник, лишь бы при этом оставшая часть не распалась на два куска. Кто не может сделать хода — проигрывает. Кто из игроков может выигрывать независимо от игры противника?

7. В Черноморском казино Остап Бендер играет с крупье в фишки. Игра состоит в том, что игроки по очереди (крупье — первым, Остап — вторым) перекладывают фишки с черного поля стола на красное. За один ход можно переложить не меньше одной фишки и не больше, чем уже есть на красном поле. Побеждает тот, кто положил на красное поле последнюю фишку. До начала игры на красном поле лежат 10 фишек, а на черном — некоторое известное Остапу количество (но не ноль). У Остапа в кармане лежат 10 фишек, которые он может до начала игры незаметно подбросить: некоторые — на красное, а некоторые — на черное. Докажите, что он сможет выиграть.

8. На бесконечной доске двое играют в крестики-нолики. Кто поставит пять своих в ряд — по вертикали, горизонтали или диагонали — выигрывает. Докажите, что при правильной игре первый не проигрывает.

11 июля

Комбинаторика-2

Широкая распространенность на математических олимпиадах задач по комбинаторике вызывает недовольство участников, да и просто хороших людей.

Федор Петров

*Количество способов выбрать из n элементов k-элементное подмножество называется **числом сочетаний из n по k** и обозначается C_n^k или $\binom{n}{k}$.*

Упр1. Докажите, что

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Упр2. В отряде 10 преподавателей и 43 школьника. Для соревнования по настольному теннису необходимо составить команду из четырех школьников и четырех преподавателей. Сколько для этого есть способов?

Упр3. Лестница в доме Дементия имеет 20 ступенек. Дементий взбирается по лестнице прыжками, делая ровно 7 прыжков. Сколькими способами отрок может преодолеть лестницу?

Пример. На прямой отмечено 10 точек, на параллельной прямой – 15 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках? а) Придумайте решение с ответом $C_{10}^2 C_{15}^1 + C_{15}^2 C_{10}^1$; б) придумайте решение с ответом $C_{25}^3 - C_{10}^3 - C_{15}^3$. Отсюда получаем комбинаторное доказательство тождества $C_{10}^2 C_{15}^1 + C_{15}^2 C_{10}^1 = C_{25}^3 - C_{10}^3 - C_{15}^3$.

Упр4. Комбинаторно докажите тождества:
а) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
б) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Определение. Выписана бесконечная в обе стороны последовательность, единственный ненулевой элемент которой равен 1. Под каждыми двумя соседними числами пишется их сумма, и получается следующая последовательность; потом с ней проделывают ту же операцию, и так далее. Ненулевые числа образуют *треугольник Паскаля*, его ряды называются *строчками* и последовательно нумеруются, начиная с 0. Докажите, что в n-ой строчке треугольника Паскаля стоят числа $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$.

1. В вершине треугольника Паскаля сидит жук, который умеет ползти только вниз-влево и вниз-вправо. Сколькими способами он может доползти до числа C_n^k?

2. Вычислите сумму
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n.$$

3. Докажите тождества:
а) $n \cdot C_{n-1}^{k-1} = k \cdot C_n^k$ (Указание: В команде нужен капитан)
б) (**тождество Вандермонда**) $\sum\limits_{i=0}^{k} C_m^i \cdot C_n^{k-i} = C_{m+n}^k$ (Указание: люди бывают мужчинами и женщинами)

Для самостоятельного решения

4. Сколькими способами из 20 цветов можно составить четыре букета по а) 10, 5, 3, 2; б) 7, 7, 3, 3; в) 5, 5, 5, 5 цветов в букете?

5. В выпуклом n-угольнике провели все диагонали (а сколько их?), и никакие три не пересеклись в одной внутренней точке. Сколько получилось точек пересечения диагоналей?

6. Докажите, что $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \cdots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$. (Указание: не забывайте про жука из первой задачи.)

7. Докажите тождество $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n2^{n-1}$.

12 июля

Бином Ньютона и малая теорема Ферма

$$\boxed{(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k}$$

Упр1. Найдите коэффициент при x^4 в выражении $(\frac{x}{3} - \frac{3}{x})^{12}$ после раскрытия скобок.

Упр2. Докажите, что число $\sqrt{10}\big((1+\sqrt{10})^{10} - (1-\sqrt{10})^{10}\big)$ – целое.

Упр3. Докажите с помощью бинома Ньютона известное вам тождество:
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Упр4. а) Докажите, что для простого p и $0 < k < p$ выполнено $C_p^k \,\vdots\, p$.

б) $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ (возводим в степень p по модулю p как двоечники!).

в) **(Малая теорема Ферма)** Для простого p и натурального n выполнено $n^p - n \,\vdots\, p$ (то же самое, $n^p \equiv n \pmod{p}$).

Упр5 (Малая теорема Ферма). Для простого p и натурального a, не кратного p,

$$\boxed{a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{если } (a,p)=1}$$

Для самостоятельного решения

Упр6. Докажите, что число $11^{100} - 1$ делится на 1000.

Упр7. Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ а) с помощью бинома Ньютона; б) комбинаторно.

Задачи для бездельников

1. Какие тождества для биномиальных коэффициентов можно вывести, исходя из равенства $(x+y)^{m+n} = (x+y)^m \cdot (x+y)^n$?

2. Найдите все такие n, для которых все биномиальные коэффициенты C_n^k нечетны.

12 июля

Матбой-междусобой

1. В государстве четное число дорог и из любого города можно по дорогам проехать в любой другой. Докажите, что все дороги можно продать олигархам так, чтобы каждому достались ровно по две дороги, выходящие из одного города.

2. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым ровно одну партию. Оказалось, что все, кроме Дементия, набрали одинаковое количество очков. Докажите, что Дементий либо у всех выиграл, либо всем проиграл.

3. Дан прямоугольник $ABCD$. Расстояния от точки M до вершин A, B, C равны 3, 5, 4 соответственно. Найдите площадь прямоугольника.

4. Докажите, что каждый выпуклый n-угольник можно разрезать ровно на n трапеций.

5. На столе лежат 19 карточек, на каждой из которых написано натуральное число. Двое играют в следующую игру: своим ходом игрок берет себе одну из карточек со стола. Выигрывает тот, кто первый сможет выбрать из своих карточек несколько, сумма чисел на которых делится на 10. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Натуральные числа покрашены в синий и красный цвета так, что чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что сумма некоторых 1000 синих чисел равна сумме некоторых 1000 красных чисел.

7. Некоторые преподаватели — рыцари, то есть всегда говорят правду, а некоторые — хитрецы, то есть они иногда врут. Известно, что рыцарей больше, чем хитрецов. Школьнику разрешено спрашивать у любого преподавателя про другого преподавателя, кто он. Как школьнику узнать про каждого преподавателя, кто есть кто?

8. Равнобедренный прямоугольный треугольник AMN ($AM = MN$) расположен в квадрате $ABCD$ так, что точка M лежит внутри квадрата, а точка N — на стороне CD. Докажите, что точка M лежит на диагонали BD.

9. Существует следующее гадание. Девушка зажимает в руках, скажем, 20 травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу. Лучшая подруга связывает попарно 20 концов травинок сверху и попарно 20 концов травинок снизу. Если при этом все травинки окажутся связанными в одно кольцо, то девушка должна в этом году непременно выйти замуж. Какова вероятность того, что девушка выйдет замуж?

10. Трехзначное число является произведением числа, образованного его двумя последними цифрами, и числа, образованного его последней цифрой. Найдите все такие трехзначные числа.

14 июля

Линейные диофантовы уравнения

Теория

Теорема. Пусть a и b – взаимно простые числа. Тогда уравнение $ax+by=c$ имеет бесконечно много целочисленных решений, причем все они имеют вид $\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at \end{cases}$, где t – произвольное целое число, а (x_0, y_0) – одно из решений уравнения $ax+by=c$.

Для того, чтобы решить в целых числах линейное уравнение $ax+by=c \ \ (a, b \neq 0)$, необходимо действовать в соответствии со следующим **алгоритмом**:

1. Находим $d = \text{НОД}(a, b)$.
2. Проверяем, делится ли c на d. Если нет, то уравнение не имеет решений; если да, то делим обе части на d, переходя к равносильному уравнению $a'x+b'y=c'$ со взаимно простыми $a' = \dfrac{a}{d}$, и $b' = \dfrac{b}{d}$ и правой частью $c' = \dfrac{c}{d}$.
3. Находим частное решение (x_0, y_0) уравнения $a'x+b'y=c'$ (если получается — подбором, если нет — с помощью алгоритма Евклида).
4. Записываем общее решение уравнения $a'x+b'y=c'$ в виде $\begin{cases} x = x_0 + b't, \\ y = y_0 - a't \end{cases}$, $t \in \mathbb{Z}$.

Упражнения

1. Решите в целых числах уравнение: $7x - 5y = 6$.

2. Решите в целых числах уравнение: $234x + 432y = 180$.

Задачи

3. Трудолюбивый Дементий задумал натуральное число, умножил его на 51, затем поделил с остатком на 544 и получил в остатке 13. Могло ли такое произойти?

4. Найдите две обыкновенные дроби — одну со знаменателем 8, другую со знаменателем 13, чтобы они не были равны, но разность между большей и меньшей из них была как можно меньше.

5. a и b — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что уравнение $ax+by=ab$ не имеет решений в натуральных числах.

6. В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ провели диагональ. Сколько клеток она пересекла а) если $(m, n) = 1$; б) в общем случае?

7. 175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев. Докажите, что на трех шалтаев и одного болтая рубля не хватит. (Они стоят целое число копеек).

Задачи для бездельников

8. Найдите все целочисленные решения уравнений: а) $2x + 3y + 5z = 11$; б) $12x + 15y + 20z = 4$.

9. Сформулируйте алгоритм решения в целых числах уравнений вида $ax + by + cz = d$.

14 июля

Шары и перегородки

Утв1. Уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ имеет C_{n-1}^{k-1} решений в натуральных числах.

Утв2. Уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ имеет C_{n+k-1}^{k-1} решений в неотрицательных целых числах.

---

1. Сколько существует различных букетов из 12 цветов, составленных из астр, гвоздик и гладиолусов?

2. Преподаватели ставят оценки от 1 до 5 шестнадцати школьникам (каждый должен получить одну оценку).

а) Затем на стене вывешивается список с указанием всех фамилий и соответствующих оценок. Сколькими способами можно это сделать?

б) На стене вывешивается листок с информацией, сколько было поставлено единиц, сколько — двоек и так далее. Сколько существует вариантов таких листков?

3. Имеются бусы из n различных бусинок. Сколькими способами их можно разрезать на k частей, если а) в каждой части должна быть хотя бы одна бусинка; б) не обязательно?

4. Сколько имеется решений у уравнения $x + y + z = 100$ в натуральных числах от 1 до 60?

Для самостоятельного решения

5. Сколькими способами преподаватели профи-группы могут раздать шестнадцати школьникам пять яблок, десять апельсинов и семь нарядов (некоторые школьники могут получить сразу несколько яблок, апельсинов и нарядов, а кто-то — ничего)?

6. Сколькими способами можно выложить в ряд m черных и n белых шаров так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

15 июля

ГМТ-2

1. а) Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ M таких, что $S_{AMB} = S_{AMC}$. б) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

2. Даны точки A и B. Найдите ГМТ M таких, для которых треугольник AMB а) прямоугольный; б) остроугольный; в) тупоугольный.

3. Даны точки A и B. Найдите ГМТ M таких, что а) $\angle BAM$ — наименьший угол треугольника ABM; б) $\angle AMB$ — средний по величине угол треугольник ABM;

4. Найдите геометрическое место четвертых вершин квадратов таких, что оставшиеся три вершины лежат на двух данных перпендикулярных прямых.

5. Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ M таких, что а) прямая CM пересекает отрезок AB; б) луч CM пересекает отрезок AB; в) отрезок CM пересекает отрезок AB.

6. Даны горизонтальная прямая l и точки A и B по одну сторону от нее. Найдите ГМТ M таких, что прямая AM пересекает прямую l левее, чем прямая BM.

7. Дан треугольник ABC. Внутри него взяли точку M и соединили ее со сторонами. Получилось три треугольника. Найдите ГМТ M, для которых сумма площадей двух из этих треугольников будет равна площади третьего.

8. На плоскости даны четыре точки. Найдите множество центров прямоугольников, образуемых четырьмя прямыми, проходящими соответственно через данные точки.

9. Внутри квадрата расположены несколько равных попарно не пересекающихся кругов. Можно ли разрезать этот квадрат на выпуклые многоугольники так, чтобы в каждом из них находился ровно один круг?

---

10. Постройте треугольник ABC по сторонам AB, BC и $\angle BAC$.

Четвертый признак равенства треугольников. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Тогда либо $\angle BCA = \angle B'C'A'$ (и треугольники ABC и $A'B'C'$ равны), либо $\angle BCA + \angle B'C'A' = 180^\circ$.

11. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Найдите ГМТ M, из которых отрезки AB и AC видны под равными углами.

Для самостоятельного решения

12. На биссектрисе BD треугольника ABC взята точка P такая, что $2\angle PCB = 3\angle PCA$. Прямая PC пересекает сторону AB в точке E. Оказалось, что $PC = CD = DE$. Найдите углы треугольника ABC.

15 июля

Зацикливание–2

Вспомном задачу из прошлого листочка: Один преподаватель оставил на дверях всех комнат записки следующего содержания: “Я в комнате номер …” и исчез в неизвестном направлении. (Разные записки могут сообщать разную информацию). Некоторый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.

1. Докажите, что если в вышеприведенной задаче все записки указывают на разные комнаты, то школьник рано или поздно вернется в ту комнату, с которой начал.

2. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в первоначальное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

Принцип зацикливания. *Если система может находиться в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по фиксированному числу предыдущих, то система с некоторого момента зациклится.*

Принцип зацикливания без предпериода. *Если вдобавок каждое предыдущее состояние однозначно восстанавливается по фиксированному числу последующих, то система зацикливается без предпериода.*

3. В последовательности $200796\ldots$ каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предшествующих цифр. Докажите, что в этой последовательности снова встретится четверка 2007.

4. Докажите, что два соседних числа Фибоначчи не могут делиться на 2007.

Для самостоятельного решения

5. Докажите, что некоторая степень числа 7 оканчивается на 0000000000000001. На что тут можно заменить число 7?

6. Докажите, что в ряду Фибоначчи найдется число, делящееся на 2007.

Задача для бездельников

7. Можно ли придумать последовательность поворотов граней кубика Рубика, повторяя которую можно получить все возможные расположения кубиков?

16 июля

Теорема Ферма

Определение. Пусть m — натуральное число, a — фиксированный остаток по модулю m. Будем изображать все остатки по модулю m вершинами графа, и из каждой вершины, соответствующей остатку x, проводить ориентированное ребро в точку, соответствующую остатку xa. Полученный граф называется **графом умножения на a по модулю m**.

1. Найдите остаток, обратный к остатку 12 по модулю 101.

2. Докажите, что любой ненулевой остаток от деления на простое число имеет обратный.

3. Докажите, что а) граф умножения на ненулевой остаток по простому модулю распадается на циклы; б) все такие циклы, кроме одного, имеют одинаковую длину.

4 (Теорема Ферма, акт второй). Пусть p — простое, a — целое число. Тогда $a^p - a \,\vdots\, p$.

5 (Теорема Ферма, акт третий). Пусть целое число a не делится на простое число p. Докажите, что тогда а) числа $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$ дают попарно различные остатки по модулю p; б) числа $(p-1)!$ и $a^{p-1}(p-1)!$ сравнимы по модулю p; в) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

6 (Теорема Вильсона). Натуральное число $p > 1$ является простым тогда и только тогда, когда $(p-1)! + 1 \,\vdots\, p$.

7. Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.

8. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

9. Докажите, что если $p > 5$ — простое, то число $\underbrace{11\ldots1}_{p-1}$ делится на p.

10. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

11. Натуральное число n не делится на 17. Докажите, что либо n^8+1, либо n^8-1 делится на 17.

12. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ — составное.

13 (Число Кармайкла). Докажите, что $a^{561} - a$ делится на 561 для любого целого a.

14. Докажите, что уравнение $x^2 + 5 = y^3$ не имеет решений в целых числах.

16 июля

Теорема Бойяи–Гервина

Определение. Два многоугольника называются **равносоставленными**, если один из них можно перекроить в другой (то есть разрезать на части, переложив которые, можно получить другой).

Лемма. Всякий многоугольник можно разрезать на треугольники.

Теорема 1 (Бойяи–Гервина). Всякие два равновеликих многоугольника равносоставлены.

1. Если многоугольники P и Q равносоставлены и многоугольники Q и R равносоставлены, то многоугольники P и R тоже равносоставлены

2. Всякий треугольник можно перекроить в параллелограмм.

3. Всякий параллелограмм с основанием a можно перекроить в прямоугольник с основанием a.

4. Пусть $a > 0$. Всякий прямоугольник можно перекроить в прямоугольник, у которого длина одной из сторон больше a.

5. Пусть $a > 0$. Всякий прямоугольник, у которого длина одной из сторон больше a, можно перекроить в параллелограмм, у которого длины одной из сторон равна a.

6. Всякий прямоугольник можно перекроить в прямоугольник со стороной 1.

7. Всякий треугольник можно перекроить в прямоугольник со стороной 1.

8. Всякий многоугольник можно перекроить в прямоугольник со стороной 1.

9. Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Определение. Фигуры называются **равнодополняемыми**, если их можно получить, отрезая от равных фигур одну или несколько равных частей.

1. Докажите, что равнодополняемые фигуры равновелики.

2. Докажите, что параллелограмм равнодополняем некоторому прямоугольнику.

3. Докажите, что равновеликие многоугольники равнодополняемы.

4. Придумайте какой-нибудь способ перекроить прямоугольник 3×1 в квадрат.

5. Перекроите прямоугольник 3×4 в квадрат, разрезав его всего на 3 части.

6. Перекроите прямоугольник 3×1 в квадрат, разрезав его не более, чем на 6 частей.

Для самостоятельного решения

7. Перекроите квадрат в правильный шестиугольник, разрезав его не более, чем на а) 8 частей; б)* 5 частей.

8. Перекроите квадрат в 3 равных квадрата, разрезав его не более, чем на а) 10 частей; б) 7 частей.

9. Перекроите квадрат в правильный треугольник, разрезав его не более, чем на а) 10 частей; б)* 5 частей.

10. Пусть $a^2 + b^2 = c^2$. Перекроите квадрат со стороной c в два квадрата со сторонами a и b, разрезав его не более, чем на 5 частей (число частей не должно зависеть от a и b).

17 июля

Паркеты

Задача. Данным четырехугольником произвольной формы настлать паркет, т.е. заполнить всю плоскость без пропусков и перекрытий.

Некоторые факты. Докажите, что а) при центральной симметрии отрезок переходит в равный ему отрезок, прямая — в параллельную ей прямую; б) то же самое при параллельном переносе.

Упр1. Из бумаги изготовили два одинаковых выпуклых четырехугольника. Один разрезали по одной диагонали, второй — по другой. Докажите, что из четырех полученных треугольников можно составить параллелограмм.

Упр2. В выпуклом четырехугольнике проведены средние линии, т.е. отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Докажите, что из получившихся четырех частей можно составить параллелограмм.

Упр3. Проведены две прямые, делящие две противоположные стороны выпуклого четырехугольника на три равные части, причем внутри четырехугольника эти прямые не пересекаются. Докажите, что между этими прямыми заключена третья часть площади четырехугольника.

Задачи

1. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике одна из средних линий делит его площадь пополам, то этот четырехугольник — трапеция.

2. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике сумма длин средних линий равна его полупериметру, то этот четырехугольник — параллелограмм.

3. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике сумма расстояний от точки пересечения средних линий до вершин равна сумме длин его диагоналей, то этот четырехугольник — параллелограмм.

4. Докажите, что с помощью центрально симметричных шестиугольников можно застелить паркетом плоскость так, что любые два шестиугольника получаются друг из друга параллельным переносом. Получите из этого паркета паркет для четырехугольников.

5. Дан равносторонний треугольник и две точки внутри него. Можно ли пустить бильярдный шар из одной точки так, чтобы он попал в другую, ровно n раз ударившись об стенки? (угол падения равен углу отражения).

17 июля

Математический бой профи-7–сборная-8

1. Натуральные числа a и b такие, что число $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что $(a,b)\le\sqrt{a+b}$.

2. Внутри треугольника ABC взята точка K такая, что $\angle ABK=\angle ACK$. Пусть E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки K на стороны AB и AC, M — середина стороны BC. Докажите, что $ME=MF$.

3. При каких натуральных n существует выпуклый шестиугольник, который можно разрезать на n равносторонних треугольников (не обязательно одинаковых)?

4. Про вещественные числа a, b и c известно, что сумма дробей $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ и $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ равна единице. Докажите, что из трех данных дробей две равны 1, а одна равна -1.

5. На кольцевой дороге ровно 1001 светофор. Каждую минуту они меняют свои сигналы по следующему правилу: если в предыдущий момент у светофоров, соседних с данным, горят сигналы разных цветов, то на нем загорается сигнал третьего цвета, а если эти сигналы были одного цвета, то на нем загорается сигнал того же цвета. В некоторый момент времени у всех светофоров горели только красные или зеленые сигналы. Может ли получиться, что через некоторое время все сигналы будут желтыми?

6. На клетчатой доске 2007×2007 двое играют в следующую игру. Ход состоит в закрашивании 8 еще не закрашенных клеток, образующих связное множество. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре? (Связным называется такое множество клеток, что из любой его клетки можно перейти по клеткам этого множества в любую другую, переходя каждый раз в соседнюю по стороне.)

7. При каких натуральных n числа от 1 до n можно разбить на две непустые группы так, что сумма чисел в одной группе равна произведению чисел в другой?

8. Если на доске записано число A, к нему можно прибавить любой его делитель, отличный от 1 и самого A. Доказать, что из $A=4$ можно получить любое составное число.

17 июля

Математический бой

1. Пруд разбит на $2n$ частей ($n \geq 5$) как показано на рисунке. Две части будем называть соседними, если они имеют общую сторону или дугу. Таким образом, для каждой части есть ровно три соседних. В пруду сидит $4n+1$ лягушек. Если три или больше лягушек сидят в одной части пруда, то три из них перепрыгивают в три соседние части. Докажите, что через некоторое время лягушки будут равномерно распределены по пруду. Это означает, что для каждой части либо есть сидящие в ней лягушки, либо есть лягушки во всех соседних с ней частях.

2. На планете 10000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 200 дорог. Докажите, что на планете меньше 100 столиц.

3. Степень каждой вершины связного графа не превосходит d. Покажите, что его вершины можно покрасить в d^2+d+1 цвет так, что любые две вершины, соединенные ребром, окажутся покрашены в разные цвета.

4. Натуральные числа a и b такие, что число $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что $(a,b) \leq \sqrt{a+b}$.

5. Внутри треугольника ABC взята точка K такая, что $\angle ABK = \angle ACK$. E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки K на стороны AB и AC, M — середина стороны BC. Докажите, что $ME = MF$.

6. Про вещественные числа a, b и c известно, что сумма дробей $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ и $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ равна единице. Докажите, что из трех данных дробей две равны 1, а одна равна -1.

7. На кольцевой дороге ровно 2007 светофоров. Каждую минуту они меняют свои сигналы по следующему правилу: если в предыдущий момент у светофоров, соседних с данным, горят сигналы разных цветов, то на нем загорается сигнал третьего цвета, а если эти сигналы были одного цвета, то на нем загорается сигнал того же цвета. В некоторый момент времени у всех светофоров горели только красные или зеленые сигналы. Может ли получиться, что через некоторое время все сигналы будут желтыми?

8. Треугольник ABC — равносторонний. Найдите геометрическое место точек M таких, что $MA = MB + MC$.

9. Найдите все натуральные m, при которых $p^4 = 2^{3m} + 2^{2m} + 1$, если p — простое число.

10. В ряд стоят 14 гномов, у каждого не менее 5 орехов. Каждую минуту один из гномов может передать орех гному, стоящему справа, если у того больше орехов. Через некоторое время все орехи собрались у одного гнома. Какое наименьшее число орехов могло быть у гномов?

11. На клетчатой доске 2007×2007 двое играют в следующую игру. Ход состоит в закрашивании 8 еще не закрашенных клеток, образующих связное множество. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре? (Связным называется такое множество клеток, что из любой его клетки можно перейти по клеткам этого множества в любую другую, переходя каждый раз в соседнюю по стороне.)

19 июля

Двудольные графы

Зад0. На спартакиаде проводились соревнования по пяти видам спорта. Каждый из 30 семиклассников принял участие в соревнованиях либо по одному, либо по трем видам спорта, а в каждом из видов число принимавших участие было 15 или 25. Докажите, что такого быть не могло.

Опр. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета.

Упр1. а) В двудольном графе суммы степеней вершин каждого цвета равны между (за мелким исключением!).

б) Если в двудольном графе степени всех вершин одинаковы, то вершин каждого цвета поровну (за мелким исключением!).

Зад1. Окружность не проходит через вершины (невыпуклого) 2007-угольника и не касается его сторон. Может ли она пересечь все стороны ровно по одному разу?

Зад2. На шахматной доске стоит несколько коней. Каждый конь на белом поле бьет 3 коня, а каждый конь на черном поле бьет 4 коня. Докажите, что общее число коней кратно семи.

Упр2. В двудольном графе нет циклов нечетной длины.

Упр3. Когда дерево является двудольным графом?

Теорема (критерий двудольности графа). Граф — двудольный $\iff$ в нем нет циклов нечетной длины.

Упр4. а) Какое наибольшее число ребер может быть в двудольном графе с n белыми и m черными вершинами? б) Какое наибольшее число ребер может быть в двудольном графе: с $2n$ вершинами; с $2n+1$ вершиной?

Задачи

1. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены звездочкой. Известно, что для любой отмеченной клетки число звездочек в ее столбце равно числу звездочек в ее строке. Докажите, что число столбцов, в которых есть хотя бы одна звездочка, равно числу строк, в которых есть хотя бы одна звездочка.

2. У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

3. Каждая пара депутатов парламента либо дружит, либо враждует. При этом неукоснительно соблюдаются правила: ‘Друг моего друга — мой друг’, ‘Враг моего врага — мой друг’, ‘Друг моего врага — мой враг’. Известно, что в парламенте 50 депутатов, и каждый послал приветственные открытки всем своим друзьям и гневные послания — своим врагам. Какое наименьшее число открыток и какое наибольшее число посланий могло быть отправлено?

4. В связном двудольном графе степени всех вершин равны $k > 1$. Докажите, что при удалении любого ребра граф по-прежнему останется связным. Ранее мы видели, что для произвольного графа это может быть неверным.

5. Несколько равносторонних треугольников на плоскости не перекрываются. Докажите, что можно раскрасить их в два цвета так, чтобы треугольники с общим отрезком границы были разного цвета.

✝ **6.** В строку выписано 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитана ее сумма (группы из одного числа тоже учитывались). Какое наибольшее количество сумм могло оказаться нечетными?

Счастливые билеты

Определение. Билет с шестизначным номером от 000000 до 999999 называется *счастливым*, если сумма его первых трех цифр равна сумме последних трех цифр.

Упр1. Не считая КСБ докажите, что:

а) КСБ не более 100000;

б) КСБ четно;

в) сумма номеров всех счастливых билетов делится на несчастливое число 13, а также на счастливое число 7.

Обозначение. a_k – количество трехзначных номеров с суммой цифр k.

Упр2. Докажите, что а) КСБ с суммой цифр $2k$ равно a_k^2;

б) КСБ равно $a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{27}^2$;

в) $a_k = a_{27-k}$;

г) КСБ равно $2(a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{13}^2)$.

Определение. Рассмотрим все тройки неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x + y + z = k$. Назовем *нарушением* ситуацию, когда x, y или z больше 9. Назовем тройку *хорошей*, если в ней нет нарушений и *плохой* в противном случае.

Упр3. а) Найдите $a_0, \ldots, a_9$.

б) Найдите количество плохих троек для $k = 10$ и $k = 11$.

в) Докажите, что при $10 \le k \le 19$ количество плохих троек равно $3a_{k-10}$.

г) Найдите $a_{10}, \ldots, a_{13}$.

Задача 1. Найдите КСБ и выясните, какова 'примерно' вероятность получить счастливый билет.

Упр4. Докажите, что КСБ равно количеству шестизначных номеров с суммой цифр 27.

Определение. Аналогично определяем термин *нарушение* для решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 27$.

Упр5. Докажите, что а) КСБ$< C_{32}^5$;

б) количество плохих шестерок с нарушением на фиксированном месте равно C_{22}^5;

в) КСБ$> C_{32}^5 - 6C_{22}^5$;

г) количество плохих шестерок с двумя нарушениями в данных местах равно C_{12}^5.

Задача 2. Найдите КСБ и выясните, какова 'примерно' вероятность получить счастливый билет.

Для самостоятельного решения

1. Билет называется *суперсчастливым*, если он счастливый и сумма цифр на четных местах равна сумме цифр на нечетных местах. Чему равно количество суперсчастливых билетов?

2. Найдите количество восьмизначных счастливых билетов.

20 июля

Формула Эйлера для планарных графов

Обсуждение. Что такое планарный граф? Что такое грань? Эмпирический вывод формулы Эйлера.

Формула Эйлера. На плоскости изображен связный граф (с петлями и кратными ребрами!) с B вершинами и P ребрами, разбивающий плоскость на Γ областей(граней). Тогда $B - P + \Gamma = 2$.

Следствие. Число граней Γ не зависит от способа рисования графа на плоскости.

Далее рассматриваем графы без петель и кратных ребер, но, возможно, несвязные.

Замечание. В произвольном графе ребра можно считать по вершинам (и тогда удвоенное число ребер равно сумме степеней вершин). А в планарном графе появляется *дополнительная возможность* ребра считать по граням (и тогда удвоенное число ребер равно сумме сторон граней, за некоторыми исключениями).

Зад1. В квадрате отметили 10 точек (или n точек), а затем соединили их и вершины квадрата непересекающимися отрезками так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Упр1. $2P \geq 3\Gamma$ (при некоторых естественных условиях!).

Упр2. $P \leq 3B - 6$, в том числе и для несвязного графа (Неформальный смысл: в планарном графе мало ребер).

Зад2. Докажите, что граф K_5 не планарен. Получается ли так доказать непланарность $K_{3,3}$?

Упр3. Если в графе нет треугольных граней, то неравенство из упр2 можно усилить. Сделайте это. (Неформальный смысл: в таком планарном графе совсем мало ребер).

Зад3. Докажите, что граф $K_{3,3}$ (три домика и три колодца) не планарен.

Задачи

1. Каждое ребро полного графа на 11 вершинах раскрасили в синий или красный цвет. Могут ли и синий, и красный графы оказаться планарными?

2. Пятиугольник разрезан на несколько многоугольников так, что все стороны пятиугольника остались неразрезанными. Докажите, что если число многоугольников не меньше пяти, то в одном из них найдется угол, который больше или равен $72°$.

3. В выпуклом многограннике все грани – пятиугольники или шестиугольники. В каждой вершине сходятся 3 ребра. Сколько всего пятиугольных граней?

4. У каждого многогранника найдутся три грани с одинаковым числом сторон. Докажите это и сравните с упр2. из листочка Графы.

5. На плоскости нарисовано n точек. Двое по очереди соединяют их линиями так, чтобы линии не пересекались. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

20 июля

Теорема Фалеса

1. Точки A, C_1 и C_2 лежат на одной прямой. Докажите, что $\dfrac{S(ABC_1)}{S(ABC_2)} = \dfrac{AC_1}{AC_2}$.

2. В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ углы A_1 и A_2 равны или дополняют друг друга до $180°$. Докажите, что $\dfrac{S(A_1B_1C_2)}{S(A_2B_2C_2)} = \dfrac{A_1B_1 \cdot A_1C_1}{A_2B_2 \cdot A_2C_2}$.

3. Две параллельные прямые высекают на сторонах угла с вершиной O отрезки A_1A_2 и B_1B_2. Докажите, что а) треугольники OA_1B_2 и OA_2B_1 равновелики; б) $\dfrac{OA_1}{OB_1} = \dfrac{OA_2}{OB_2}$.

Теорема Фалеса. Три параллельные прямые пересекают стороны угла в точках A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что $\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

4. Две прямые высекают на сторонах угла с вершиной O отрезки A_1A_2 и B_1B_2. При этом $\dfrac{OA_1}{OA_2} = \dfrac{OB_1}{OB_2} = k$. а) Докажите, что прямые параллельны; б) найдите отношение $\dfrac{S(OA_1B_1)}{S(OA_2B_2)}$.

5. В треугольнике ABC провели медиану AM, а затем — биссектрисы MK и ML полученных треугольников AMB и AMC соответственно. Докажите, что отрезки KL и BC параллельны.

6. Даны отрезки длин a, b и c. Циркулем и линейкой постройте отрезок длины $\dfrac{ab}{c}$ (*построение четвертого пропорционального отрезка*).

7. Точка A лежит на одной из двух параллельных прямых, а точка B — на другой. Найдите геометрическое место середин отрезков AB.

8. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки A_1, B_1, C_1 и D_1 так, что точка A_1 является серединой отрезка AB_1, точка B_1 является серединой отрезка BC_1, точка C_1 является серединой отрезка CD_1, и точка D_1 является серединой отрезка DA_1. Найдите отношение площадей $\dfrac{S(A_1B_1C_1D_1)}{S(ABCD)}$.

9. Даны угол ABC и точка M внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M.

10. а) Найдите геометрическое место четвертых вершин квадратов, у которых три вершины лежат на сторонах данного угла.

б) Впишите квадрат в данный треугольник так, чтобы две вершины квадрата попали на данную сторону.

11. На стороне AB треугольника ABC сидит жук Кирюша. Он начинает ползти параллельно стороне BC до стороны AC, затем параллельно стороне AB до стороны BC, затем параллельно стороне AC до стороны AB, и так далее. Докажите, что через несколько шагов Кирюша вернется в исходную точку, и найдите, сколько шагов ему на это потребуется (ответ может зависеть от исходного положения жука на AB).

12. На отрезке AB взята точка C. Прямая, проходящая через точку C, пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L, а также окружность с диаметром AB — в точках M и N. Докажите, что $KM = LN$.

21 июля

Раскраски карт

Обсуждение. Что такое карта на плоскости (сфере) и как ей сопоставить граф. Правильные раскраски карт и графов.

1. а) Докажите, что в любом планарном графе есть вершина степени ≤ 5.

б) Докажите, что на любой карте найдется страна, у которой не более пяти соседей.

2. Докажите, что любую карту можно правильно раскрасить в шесть цветов.

3. Докажите, что нельзя нарисовать карту из пяти стран так, чтобы каждая страна граничила с каждой.

4. Докажите, что любую карту можно правильно раскрасить в пять цветов.

Для самостоятельного решения

5. Карта такова, что из любых двух граничных стран хотя бы одна является треугольником. Докажите, что эту карту можно правильно раскрасить в 4 цвета.

6. Верно ли, что любую карту из квадратов можно правильно раскрасить в три цвета?

7. (Критерий раскраски в два цвета) На плоскости без самопересечений изображен связный граф, степени всех вершин которого четны. Докажите, что его грани можно правильно раскрасить в два цвета. Наоборот, если грани связного графа можно правильно раскрасить в два цвета, то в каждой вершине сходится четное число ребер, быть может за исключением вершин внешней грани.

Задача для бездельников

8. Будем рассматривать карты не на сфере, а на торе. Известно, что на торе любую карту можно раскрасить в семь цветов, и число семь уменьшить нельзя. То есть на торе ‘проблема семи красок’ решена.

а) Где доказательство для сферы о раскраске в 5 (или 6) цветов не проходит для тора?

б) Приведите пример карты на торе, котрую нельзя правильно раскрасить в шесть цветов.

21 июля

Задачи на движение

1. При каких значениях параметра a уравнение $|x-1|-|x-3|=a$ имеет бесконечно много решений?

2. Графики линейных функций $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$, $y=k_3x+b_3$, $y=k_4x+b_4$ ограничивают на координатной плоскости параллелограмм, внутри которого лежит начало координат. Известно, что ни один из графиков не параллелен оси абсцисс. Докажите, что $k_1k_2k_3k_4>0$ и $b_1b_2b_3b_4>0$.

3. Электрички из города А в город Б отправляются в начале каждого часа (в 6.00, 7.00 и т.д., до 23.00), из Б в А — в середине каждого часа (в 6.30, 7.30 и т.д., до 23.30). Путь из А в Б, как и из Б в А, каждая электричка проходит за 3 часа. Сколько электричек, идущих из Б в А, встретит по пути в Б электричка, вышедшая из А в 12.00?

4. Идя навстречу трамваям, пешеход встречал их каждые 5 минут, идя в одну с ними сторону — каждые 7. Как часто он будет их встречать, стоя на месте? (Трамваи движутся с постоянной скоростью и с одинаковыми интервалами. Скорость пешехода также постоянна.)

5. Два пешехода вышли навстречу друг другу одновременно из пунктов A и B. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и дойдя до конца дороги, поворачивает обратно. Первый раз они встретились через час после начала движения. Когда они встретятся во второй раз?

6. Спускаясь в метро, Петя и Вася бежали по движущемуся эскалатору. Вася, пока бежал, насчитал 60 ступенек. Петя бежал вдвое быстрее Васи и насчитал 90 ступенек. Сколько ступенек насчитал бы каждый из них, сбегая по неподвижному эскалатору?

7. По узкому каналу с постоянной скоростью плывет баржа. Капитан ходит по ней (тоже с постоянной скоростью) от носа к корме и обратно. Известно, что проекция капитана на берег канала побывает в каждой точке берега ровно три раза. Найдите отношение скоростей баржи и капитана.

8. В пятидесятиметровом бассейне тренируются два пловца. Они стартуют одновременно с одного бортика и плывут по соседним дорожкам с постоянными, но различными скоростями. Доплыв до бортика, пловец немедленно поворачивает и плывет назад, а проплыв километр — заканчивает тренировку и уходит в раздевалку. Известно, что за время тренировки пловцы встречались 13 раз (если один пловец догнал другого — это тоже встреча; момент старта встречей не считается). Во сколько раз „быстрый“ пловец плывет быстрее „медленного“? Найдите все возможности.

22 июля

Пифагоровы тройки и рациональные параметризации

На занятии обсуждались параметризации кривых и решались задачи, их использующие. В частности, были описаны все пифагоровы тройки.

24 июля

Заключительная олимпиада

Довывод

1. Вася купил в киоске лапши „Доширак“ и „Роллтон“, всего десять пачек. Если бы все десять пачек были „Роллтонами“, то он заплатил бы на девять рублей меньше, а если бы все пачки были „Дошираками“, то на двадцать один рубль больше. На сколько рублей пачка „Доширака“ дороже, чем пачка „Роллтона“?

2. На полке стоят 100 книг по белой и черной магии, причем никакие две книги по белой магии не стоят через 13 книг (т.е. между ними не стоит ровно 13 книг). Какое наибольшее количество книг по белой магии могло стоять на полке?

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $BM = MN = NC$. Оказалось, что биссектрисы углов BMN и MNC пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Докажите, что $\angle A = 60°$.

4. Есть таблица 8×8 и карточки с числами от 1 до 64. Двое игроков по очереди кладут по одной карточке на свободные клетки таблицы. Когда все карточки разложены, игроки отмечают в каждом столбце наименьшее число и находят сумму всех отмеченных чисел. Если эта сумма четна — выигрывает первый игрок, а если нечетна — второй. Докажите, что второй сможет выиграть независимо от игры соперника.

5. В ряд стоят 2007 гирь, при этом массы любых соседних гирь отличаются на 1 грамм. Докажите, что можно убрать одну из гирь и разложить оставшиеся гири на две чаши весов так, что весы будут в равновесии.

Вывод

6. Точка E — середина стороны AD квадрата $ABCD$, DF — высота треугольника DEC. Докажите, что длина отрезка BF равна стороне квадрата.

7. Натуральные числа m и n таковы, что m^2+n^2+m делится на mn. Докажите, что m является квадратом натурального числа.

8. В некотором государстве некоторые города соединены дорогами. Длина каждой дороги меньше 500 километров. Из любого города можно проехать в любой другой город, проделав путь меньше 500 км (по одной или нескольким дорогам). Одну из дорог закрыли на ремонт, но по-прежнему из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что это можно сделать, проехав меньше 1500 км.

Программа зачета

Теория чисел. Простейшие свойства сравнений по модулю. Алгоритм Евкида. Нахождение НОД при помощи алгоритма Евклида. Теорема о линейном разложении НОД. Общая формула для решения линейного диофантового уравнения. Основная теорема арифметики. Ее эквивалентность утверждению о делимости произведения на простое число. Доказательство ОТА (с помощью алгоритма Евклида). Связь между НОД и НОК. Теорема Ферма, второе (граф умножений) и третье (перестановка остатков) доказательства. Теорема Вильсона. Описание пифагоровых троек с помощью рациональной параметризации окружности.

Комбинаторика. Биномиальные коэффициенты и их свойства. Треугольник Паскаля. Комбинаторные доказательства тождеств с биномиальными коэффициентами. Формула шаров и перегородок на прямой и на окружности (по две штуки). Бином Ньютона. Первое (биномиальное) доказательство теоремы Ферма. Вычисление сумм биномиальных коэффициентов с помощью бинома Ньютона. Счастливые билеты, подсчет их количества двумя способами. Четвертое (комбинаторное) доказательство теоремы Ферма

Графы. Компонента связности графа, мост. Теорема о связности либо графа, либо двойственного графа. Деревья. Эквивалентность пяти определений дерева. Существование остовного дерева в связном графе. Двудольные графы, критерий двудольности. Максимальное количество ребер в двудольном графе с k вершинами. Формула Эйлера для планарных графов, ее следствия. Непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$. Раскраска карт на плоскости в пять цветов.

Геометрия. Основные ГМТ (биссектриса, серединный перпендикуляр) и операции над ними (объединение, пересечение, разность). Существование вписанной, описанной и вневписанных окружностей треугольника, их единственность. Площадь. Площадь треугольника, трапеции, параллелограмма. Отношение отрезков, на которые биссектриса делит стороны. Доказательство того, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, с помощью ГМТ. Четвертый признак равенства треугольников. Описание ГМТ, из которых боковые стороны равнобедренного треугольника видны под равными углами. Теорема о вписанном угле и ее следствия. Уши Чебурашки. Лемма о трезубце, критерий вписанности четырехугольника. Лемма о триангуляции многоугольника. Равносоставленность и равнодополняемость. Теорема Бойяи-Гервина. Равнодополняемость равновеликих многоугольников. Теорема Фалеса, построение четвертого пропорционального отрезка. Замощение плоскости произвольным четырехугольником. Применение к решению задач. График линейной функции.