Двадцать третья Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 3–28 июля 2007 года.

17 июля

Математический бой профи-7–сборная-8

1. Натуральные числа a и b такие, что число $\dfrac{a+1}{b}+\dfrac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что $(a,b) \le \sqrt{a+b}$.

2. Внутри треугольника ABC взята точка K такая, что $\angle ABK = \angle ACK$. Пусть E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки K на стороны AB и AC, M — середина стороны BC. Докажите, что $ME = MF$.

3. При каких натуральных n существует выпуклый шестиугольник, который можно разрезать на n равносторонних треугольников (не обязательно одинаковых)?

4. Про вещественные числа a, b и c известно, что сумма дробей $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ и $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ равна единице. Докажите, что из трех данных дробей две равны 1, а одна равна -1.

5. На кольцевой дороге ровно 1001 светофор. Каждую минуту они меняют свои сигналы по следующему правилу: если в предыдущий момент у светофоров, соседних с данным, горят сигналы разных цветов, то на нем загорается сигнал третьего цвета, а если эти сигналы были одного цвета, то на нем загорается сигнал того же цвета. В некоторый момент времени у всех светофоров горели только красные или зеленые сигналы. Может ли получиться, что через некоторое время все сигналы будут желтыми?

6. На клетчатой доске 2007×2007 двое играют в следующую игру. Ход состоит в закрашивании 8 еще не закрашенных клеток, образующих связное множество. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре? (Связным называется такое множество клеток, что из любой его клетки можно перейти по клеткам этого множества в любую другую, переходя каждый раз в соседнюю по стороне.)

7. При каких натуральных n числа от 1 до n можно разбить на две непустые группы так, что сумма чисел в одной группе равна произведению чисел в другой?

8. Если на доске записано число A, к нему можно прибавить любой его делитель, отличный от 1 и самого A. Доказать, что из $A=4$ можно получить любое составное число.