XXV Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 2–27 июля 2009 г.

7 КЛАСС. ГРУППА ПРОФИ.

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Антропов А.В.
Смирнов А.В.
Сухов К.А.

1. От авторов.

Самый большой грех по отношению к ближнему —
говорить ему то, что он поймет с первого раза.
Венедикт Ерофеев. *Из записных книжек*

Брошюра, которую Вы сейчас держите в руках или читаете с экрана, родилась в муках по итогам нашей совместной работы с группой “Профи–7” Летней многопредметной школы Кировской области 2009 года. Как любой неполный конспект, она не отражает всего того, что происходило и творилось на занятиях. В том числе устные хоровые обсуждения и частные разговоры с учениками, которые, разумеется, составляют основную часть всего процесса.

Некоторые “гробовые” задачи были сознательно включены в листки и не были разобраны, чтобы школьники могли потом подумать над ними долгими зимними вечерами.

Особую благодарность хотим выразить всем ученикам группы “Профи–7”: Акбарову Артуру, Александрову Никите, Белову Дмитрию, Галимову Тимуру, Гроховскому Александру, Зятчину Валентину, Князевой Алисе, Колупаеву Владиславу, Корякину Данилу, Латышеву Алексею, Малыгину Виталию, Марьину Егору, Матушкину Александру, Мокину Александру, Рыкову Никите, Софроновой Алине, Шайхеевой Талие.

Оглавление

2. Вступительная олимпиада. 3 июля.

1. В очереди стоят Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Юра стоит раньше Миши, но после Олега и Володи. Олег и Володя не стоят рядом, а Саша не стоит рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. В каком порядке стоят ребята?

2. Может ли число $\underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{a\,\text{раз}} - \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{b\,\text{раз}}$ $(a > b)$ быть простым?

3. Маленький мальчик постоянно узнает новые слова — по 8 слов в день. Однако каждое десятое слово, которое он узнает, является синонимом ровно одного из предыдущих. К какому количеству слов он не будет знать синонимы через 101 день после своего рождения?

4. Угол A треугольника ABC равен 120°. Докажите, что из отрезков с длинами AC, BC и $AB+AC$ можно сложить треугольник с углом 60°.

5. Докажите, что произведение всех ненулевых цифр, встретившихся в записи натуральных чисел от 1 до 2009 включительно — не точный квадрат.

6. На плоскости расположены 1985 точек красного, синего и зеленого цветов так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек разного цвета соединены отрезками, причем оказалось, что изо всех точек выходит одно и то же число отрезков. Докажите, что найдется красная точка, соединенная отрезками и с синей, и с зеленой точками.

7. Тришка отрезал от кафтана квадратный кусок, разрезал его на 9 треугольных заплат и разложил их на 3 кучки по 3. Могут ли в каждой кучке заплаты быть равны друг другу, а из равных кучек не равны?

3. Площади. 4 июля.

Определение. Каждой фигуре M на плоскости ставится в соответствие число S_M, называемое *площадью*, такое, что выполнены следующие свойства:

1) $S_M \geqslant 0$;

2) Площади равных фигур равны;

3) Если фигура M состоит из фигур A и B, не имеющих общих внутренних точек, то $S_M = S_A + S_B$;

4) Площадь прямоугольника $m \times n$ равна mn.

1. a) Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.
b) Докажите, что площадь остроугольного треугольника равна половине произведения произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту.
c) Докажите, что площадь тупоугольника треугольника равна половине произведения произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту.
d) Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению произвольной его стороны на опущенную на эту сторону высоту.

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что $AD \parallel BC$ тогда и только тогда, когда $S_{ABD} = S_{ACD}$.

3. Докажите, что медиана делит треугольник на два треугольника равной площади.

4. *(Пифагор)* В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

5. a) Докажите, что $S \leqslant ab/2$, где S — площадь треугольника, a и b — две его стороны. b) В произвольном четырехугольнике, причем a, b, c и d — стороны по порядку. $S \leqslant \frac{ab+cd}{2}$.

44. Доказательство того, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, с помощью ГМТ.

45. Теорема о вписанном угле и ее следствия.

46. Лемма о трезубце, критерий вписанности четырехугольника.

47. Теорема Фалеса.

48. Степень точки, радикальная ось, радикальный центр и их свойства. Теорема о высотах.

49. Гомотетия: определение, свойства, классификация гомотетий, переводящих данный отрезок в данный.

50. Гомотетичность треугольников с попарно параллельными сторонами.

51. Прямая Эйлера.

52. Окружности и гомотетия. Лемма о симметричных образах ортоцентра.

53. Окружность Эйлера.

54. Формула Пика.

55. Теорема Рамсея: формулировка; теорема Эрдеша – Секереша: доказательство.

56. Теорема Чевы, теорема Менелая, теорема Ван–Обеля.

6. a) Угол A треугольника ABC равен углу A' треугольника $A'B'C'$. Докажите, что

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}.$$

b) В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Докажите формулу:

$$AB : AC = BL : CL.$$

7. В выпуклом четырехугольнике соединили середины противоположных сторон, и получившиеся части раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных частей равна сумме площадей белых.

8. Существует ли такой треугольник, что a) все его стороны больше 1 км, а площадь меньше 1 см^2; b) все его высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 км^2; c) все стороны треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 1 см^2.

Задачи для самостоятельного решения.

9. На медиане AM треугольника ABC выбрана точка M. Докажите, что треугольники AMB и AMC равновелики (т.е. имеют одинаковую площадь).

10. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и D прямые, а стороны AB и BC равны. Длина перпендикуляра, опущенного из точки B на сторону AD, равна 1. Найдите S_{ABCD}.

11. Внутри равностороннего треугольника взята точка. Докажите, что сумма расстояний от этой точки до сторон не зависит от выбора точки.

12. a) Угол A треугольника ABC дополняет угол A' треугольника $A'B'C'$ до 180°. Докажите, что

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$$

b) В треугольнике ABC проведена биссектриса внешнего угла A, которая пересекает продолжение стороны BC в точке L. Докажите формулу:
$$\frac{BA}{AC} = \frac{BL}{LC}.$$

13. Каждую сторону четырехугольника разделили на 4 равные части, соединили соответственные точки на противоположных сторонах, и 16 полученных частей раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных частей равна сумме площадей белых.

14. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки не менее $\frac{1}{2}$.

4. Сравнения по модулю. 4 июля.

1. Найдите последнюю цифру числа a) 23^{23}; b) $77^{77^{77}}$.

2. Найдите две последние цифры числа 199^{200}.

3. Известно, что $a + 2c$ и $b + 3d$ делятся на 7. Докажите, что $ab - 6cd$ делится на 7.

4. Докажите, что a) число дает тот же остаток при делении на 9, что и его сумма цифр; b) число дает тот же остаток при делении на 11, что и его знакопеременная сумма цифр (знакопеременная сумма цифр числа 2009 — это $-2 + 0 - 0 + 9 = 7$).

5. Докажите, что $23^{43} + 43^{23}$ делится на 66.

6. Докажите что $3^{100} - 2^{100}$ делится на $2^{10} + 3^{10}$.

7. Докажите, что $(3^n + 1)^n - 2$ делится на $3^n - 2$.

8. Докажите, что если число $2^n - 1$ вдруг, случайно, оказалось простым, то и число n также чудесным образом простое.

9. В натуральном числе A переставили цифры, получив число B. Известно, что $A - B = \underbrace{11\ldots1}_{N \text{ единиц}}$. Найдите наименьшее возможное значение N.

23. Китайская теорема об остатках, два доказательства.

Комбинаторика.

24. Биномиальные коэффициенты, формула, простейшие свойства.

25. Комбинаторные доказательства тождеств с биномиальные коэффициентами.

26. Бином Ньютона: алгебраическое доказательство.

27. Бином Ньютона: комбинаторное доказательство.

28. Вычисление сумм биномиальных коэффициентов с помощью бинома Ньютона.

29. Количество способов разбить n элементов на k групп.

30. Взвешивания, основные принципы поиска одной фальшивой монеты.

Графы.

31. Компонента связности графа.

32. Теорема о связности либо графа, либо двойственного графа.

33. Деревья. Разные определения дерева их эквивалентность.

34. Существование остовного дерева в связном графе.

35. Двудольные графы, критерий двудольности.

36. Формула Эйлера для планарных графов, ее следствия.

37. Непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$.

38. Планарные графы и покраска в 6 цветов.

Геометрия.

39. Основные ГМТ (биссектриса, серединный перпендикуляр) и операции над ними (объединение, пересечение, разность).

40. Существование вписанной, описанной и вневписанных окружностей треугольника, их единственность.

41. Площадь. Лемма о параллельных прямых. Площадь треугольника, трапеции, параллелограмма.

42. Площадь треугольников с одинаковым углом.

43. Отношение отрезков, на которые биссектриса делит стороны.

41. Программа зачета.

Теория чисел.

1. Свойства делимости, свойства сравнений по модулю.

2. Полная и приведенная системы вычетов.

3. Определение идеала. Линейные комбинации образуют идеал.

4. Основное утверждение про идеалы.

5. Нахождение НОД при помощи алгоритма Евклида.

6. Нахождение линейного представления НОД с помощью алгоритма Евклида.

7. Существование линейного представления через идеалы.

8. Общая формула для решения линейного диофантового уравнения.

9. Основная теорема арифметики. Количество делителей, сумма делителей, функция Эйлера.

10. Доказательство ОТА без леммы о делимости произведения.

11. Доказательство Леммы о делимости произведения на простое число.

12. Связь между НОД и НОК, нахождение их из разложения на простые сомножители.

13. Теорема Ферма: доказательство через систему вычетов.

14. Теорема Ферма: доказательство по индукции.

15. Теорема Ферма: комбинаторное доказательство.

16. Теорема Ферма: доказательство с помощью циклов.

17. Теорема Вильсона: алгебраическое и комбинаторное доказательства.

18. Функция Эйлера.

19. Теорема Эйлера, которая про функцию Эйлера.

20. Мультипликативность функции Эйлера.

21. Описание пифагоровых троек с помощью рациональной параметризации окружности.

22. Метод спуска, пифагоровы тройки.

10. Несколько семиклассниц собрали поровну шишек. Время от времени какие-то семиклассники раздают каждому из остальных поровну из своих шишек. После многократного повторения такой процедуры у Гертруды осталось 23 шишки, а у Нинели — 6 шишек. Сколько было семиклассниц?

Задачи для самостоятельного решения.

11. Докажите, что при нечетных m и n число $1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n$ делится на m.

12. Докажите, что $2007!! - 2008!!$ делится на 2009, где $n!! = n(n-2)(n-4)\ldots$.

13. Пусть a и n — натуральные числа. Докажите, что $a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}$ делится на $a^2 - a + 1$.

14. Докажите, пожалуйста, что для любого натурального n число $2^{2n-1} + 3n + 4$ делится на 9.

5. Разнобой. 4 июля.

1. На плоскости проведены n прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что они разбивают плоскость на $2n$ областей.

2. Можно ли нарисовать на плоскости 239 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тринадцатью другими?

3. На плоскости проведены n прямых общего положения. Докажите, что они разбивают плоскость на $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ частей.

4. Докажите, что никакая прямая не пересекает каждое звено 11–звенной замкнутой ломаной во внутренней точке.

5. В углах доски 3×3 стоят 2 белых и 2 черных шахматных коня, причем кони одного цвета стоят на одной стороне доски. Можно ли сделать несколько ходов этими конями так, они снова оказались в углах, но при этом кони одного цвета — в противоположных?

6. Докажите при любом натуральном n равенства:

a) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

7. Докажите, что если $x + \frac{1}{x}$ – целое, то $x^n + \frac{1}{x^n}$ – тоже целое.

8. Докажите, что число, состоящее из 3^n единиц, делится на 3^n.

9. *(Неравенство Бернулли)* Докажите, что при всех натуральных n и при $x > -1$ выполняется неравенство $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

10. Докажите, что кратчайшая ломаная с вершинами в данных точках не имеет самопересечений.

11. Через клетчатый квадрат 1000×1000 проведено по линиям сетки несколько прямых. Образовавшиеся при этом прямоугольные части раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета. Докажите, что количество черных клеточек четно.

12. Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на "уголки" из трёх клеток.

13. Пусть p_n — n–е простое число. Например, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, и т.д. Докажите, что при $n > 12$ выполнено неравенство $p_n > 3n$.

14. На доске написаны числа от 1 до $2009^{12} + 1$. Разрешается любые два числа заменять на модуль их разности. В конце на доске осталось одно число. Докажите, что оно не равно 0.

15. Утром в луже плавало 19 синих и 95 красных амеб. Иногда они сливались: если сливаются две красные, то получается одна синяя амеба; если сливаются две синие, то получившаяся амеба тут же делится и в итоге образуются четыре красные амебы; наконец, если сливаются красная и синяя амеба, то это приводит к появлению трех красных амеб. Вечером в луже оказалось 100 амеб. Сколько среди них синих?

16. Докажите, что площадь трапеции равна половине произведения суммы ее оснований на высоту опущенную на основание.

3. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 6 тупоугольных треугольников с одинаковыми тупыми углами.

4. Про целые числа a, b, c, d, e и f известно, что

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \frac{f}{a}.$$

Найдите все возможные значения выражения

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{a+b+c+d+e-f}.$$

Вывод

5. Узлы целочисленной решетки покрашены в 25 цветов и каждый цвет встречается хотя бы один раз. Всегда ли найдется прямоугольный треугольник (не обязательно по линиям сетки) все вершины которого покрашены в разные цвета?

6. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла B отметили точку M так, что $AM = AC$ и $\angle BCM = 30°$. Докажите, что $\angle BAM$ в два раза меньше, чем $\angle CAM$.

7. Алфавит некой иноземной мовы состоит из n букв, где $n \geqslant 2$. Последовательность букв называется словом тогда и только тогда, когда между любыми двумя одинаковыми буквами все буквы различны. Найдите количество всех слов в этой мове, имеющих длину $3n$.

6. От клетчатой доски $m \times n$ ($m > 2$, $n > 2$) осталась только рамка ширины 1. За один ход можно выпилить одну или несколько клеток, образующих прямоугольник, лишь бы при этом оставшая часть не распалась на два куска. Кто не может сделать хода — проигрывает. Кто из игроков может выигрывать независимо от игры противника?

7. В Черноморском казино Остап Бендер играет с крупье в фишки. Игра состоит в том, что игроки по очереди (крупье — первым, Остап — вторым) перекладывают фишки с черного поля стола на красное. За один ход можно переложить не меньше одной фишки и не больше, чем уже есть на красном поле. Побеждает тот, кто положил на красное поле последнюю фишку. До начала игры на красном поле лежат 10 фишек, а на черном — некоторое известное Остапу количество (но не ноль). У Остапа в кармане лежат 10 фишек, которые он может до начала игры незаметно подбросить: некоторые — на красное, а некоторые — на черное. Докажите, что он сможет выиграть.

8. На бесконечной доске двое играют в крестики-нолики. Кто поставит пять своих в ряд — по вертикали, горизонтали или диагонали — выигрывает. Докажите, что при правильной игре первый не проигрывает.

40. Заключительная олимпиада.

Довывод

1. У Карлсона есть конфеты трех сортов: с капустой, с сыром и с колбасой. Если он возьмет любые 100 конфет, среди них окажутся конфеты и с сыром, и с колбасой. Какое наибольшее количество конфет у него может быть?

2. Можно ли в записи $1*2*3*4*\ldots*999*1000*1001$ заменить звездочки знаками “+” и “−” так, чтобы значение полученного выражения было равно 2009?

6. Сочетания и перестановки. 5 июля.

0. В магазине “Все для современной молодежи” есть 5 видов значков, 7 видов челок и 10 видов розовых шнурков. Сколькими способами прогрессивная молодая леди может купить себе три самых необходимых предмета.

1. У Васи есть n гаджетов и k девайсов. Сколькими способами он может выбрать a) 3 предмета современного быта;
b) комплект из двух принципиально разных предметов.

2. a) Пусть A_n^k количество способов из n предметов выбрать k с учетом порядка. Найдите формулу для A_n^k через факториалы.
b) Пусть C_n^k это количество способов выбора без учета порядка. Сделайте аналогичное действие.

3. Сколькими способами можно переставить буквы в слове
a) ПРИВЕТ; b) ПРЕВЕД; c) МЕТАМАТЕМАТИКА ?

4. У нефтяной компании есть n цистерн. Сколькими способами можно составить k составов для отправки буржуям a) с учетом порядка, при том, что состав может быть пустым b) каждый состав должен быть не пуст; c) составы без учета порядка и могут быть пустыми. (Составы считаются разными, поэтому обмен двух составов местами порождает новый способ.)

5. Докажите комбинаторно формулы: a) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
b) $n \cdot C_{n-1}^{k-1} = k \cdot C_n^k$.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Докажите комбинаторно, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

7. Сколькими способами из n–элементного множества можно выбрать
a) подмножество; b) непересекающиеся подмножества A и B;
c) подмножества A и B такие, что A содержится в B?

7. Графы–1. 5 июля.

Определение. Будем говорить, что задан граф, если задано множество его вершин и про любую пару различных вершин сказано, связаны они ребром или нет. Граф называется конечным, если число вершин в нем конечно.

Лемма о рукопожатиях. В графе число нечетных вершин четно.

1. Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек? А если девочек 10, а мальчиков 9?

2. Каждый из 102 кроликов имеет не менее 68 знакомых. Докажите, что найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

3. У каждого пациента спецлечебницы №239 ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что их можно разделить на две нейтральные палаты.

4. Каждая из девочек после отбоя не более двух раз поболтала по телефону. Докажите, что их можно разбить на три группы так, чтобы в каждой группе не было болтавших девочек.

Определение. Граф называется связным, если между любыми двумя его вершинами есть путь по ребрам.

5. В стране 25 городов, каждый город соединен дорогой не менее чем с 12 другими городами. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого. Обобщите эту задачу на случай n городов.

6. Каждый из 750 народных любимцев оскорбил ровно одного из коллег за цвет верхней одежды. Докажите, что можно выбрать 250 любимцев, среди которых никто никого не оскорблял.

39. Игры. 20 июля.

Задача 1 (Игра Баше). Имеется 100 камней. За один ход можно брать 2, 3 или 4 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 2 (Интересная игра). Имеется 100 камней. За один ход можно брать 2, 3 или 4 камня, но не столько, сколько взял предыдущий. Кто выигрывает при правильной игре? А если камней n?

1. На доске написано число 2. За ход можно к записанному числу прибавить один из его делителей отличный от самого этого числа. Проигрывает тот, кто получит число большее 1000. Докажите, что у первого игрока есть выигрышная стратегия.

Передача хода: если один из игроков каким–то способом может воспользоваться стратегий другого, то он не проиграет.

2. Имеется клетчатая шоколадка $m \times n$. За ход можно съесть дольку и все другие дольки, которые находятся не выше и не левее ее. Проигрывает тот, кто откусывает последнюю клетку (там яд). Кто выигрывает при правильной игре?

3. Игра в “двойные шахматы” ведется также, как и в обычные, только игроки делают по 2 хода за раз. Докажите, что в этой игре у второго игрока не может быть выигрышной стратегии.

Задачи для самостоятельного решения.

4. 100 карточек в стопке пронумерованы числами от 1 до 100 сверху вниз. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или несколько карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение всех чисел на карточках станет кратно 1000000. Может ли кто-то из игроков всегда выигрывать независимо от игры противника?

5. На доске написаны числа от 1 до 2007. За ход разрешается вычеркнуть любое число вместе со всеми его делителями. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Журнал “Юный диверсант” выходит нерегулярно — два или три раза в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: №1 — 2001, №2 — 2001, №3 — 2002, ... Докажите, что если редакцию не поймают, то рано или поздно выйдет номер, где два числа на обложке совпадут.

6. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.

7. Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001! + 2$, $1001! + 3, \ldots, 1001! + 1001$). А существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

8. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

Задачи для самостоятельного решения.

9. На доске написано целое положительное число. Число разрешено увеличивать на треть или на одну пятую его значения. Докажите, что, в каком бы порядке ни проделывались эти операции, число на доске рано или поздно перестанет быть целым.

10. В ряду из 100000 натуральных чисел первое число однозначно, а каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в ряду есть число, начинающееся цифрами 2008.

11. Правильный 1001–угольник разбили непересекающимися диагоналями на 999 треугольников. Докажите, что среди этих треугольников по крайней мере три равнобедренных.

7. a) Если степени всех вершин связного графа равны 4, то после удаления любого ребра граф останется связным. b) В графстве Джентельменское из усадьбы каждого джентльмена выходит ровно 10 дорог к другим усадьбам. При этом каждый джентльмен может доехать по дорогам до любого другого. Однажды одну из дорог перекопали, и по ней стало невозможно проехать. Докажите, что любой джентльмен по–прежнему может нанести визит вежливости любому другому коллеге.

Определение. Связный подграф (часть графа), такой, что никакая вершина не из этого подграфа не соединена с ним, называется компонентой связности.

8. В Город ведет 101 дорога, из Деревни — всего три, а из всех остальных городов выходят 10 дорог. Докажите, что из Деревни можно доехать до Города.

Задачи для самостоятельного решения.

9. В некоторой стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что:

a) одним из этих двух видов транспорта можно добраться из любого города в любой другой;

b) для каждого города можно выбрать свой вид транспорта так, чтобы при помощи него можно было бы добраться до любого другого города не более чем с одной пересадкой;

c) одним из этих двух видов транспорта можно добраться из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок

10. В стране несколько городов, некоторые соединены авиарейсами одной из N авиакомпаний так, что из каждого города ведет ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из каждого города можно добраться до любого другого. Однажды был закрыт ровно $N-1$ авиарейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по–прежнему из каждого города можно добраться до любого другого.

11. У Владимира В.Ж. на НаРаботе 1000 коллег. Любые два либо дружат, либо враждуют, либо незнакомы. Коллеги разговаривают только с друзьями. К тому же у каждого коллеги любые два друга враждуют, а любые два врага дружат. Докажите, что для того, чтобы все коллеги узнали о предстоящем референдуме, Владимир должен сообщить о нем не менее, чем 200 коллегам.

8. Разнобой–2. 5 июля.

1. В произвольном четырехугольнике (a, b, c, d — стороны по порядку) докажите неравенство: $S \leqslant \frac{ac+bd}{2}$.
2. Докажите, что для любого четного n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323.
3. Докажите, что среди девяти человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых
4. Докажите, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

9. Инвариант. 6 июля.

1. Вдоль прямой прыгает кузнечик. Сначала на 1см в какую-то сторону, потом на 2см и так далее. Может ли он после 2009 прыжка оказаться в той же точке, где начал?
2. В углу квадрата a) 4×4; b) 3×3 стоит минус, в остальных клетках — плюсы. Разрешается заменять все знаки в любом столбце или в любой строке на противоположные. Можно ли получить таблицу из одних плюсов?
3. На доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается стереть два числа a и b и записать вместо них числа a) $\frac{3a-b}{2}$ и $\frac{3b-a}{2}$; b) $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$; c) $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$; d) ab и $\frac{ab}{a+b-1}$. Можно ли за несколько таких операций получить числа 7, 8, 9?

венство:
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$
5. (Теорема Менелая) Пусть четное количество из точек A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах. Докажите с помощью площадей, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой a) тогда b) и только тогда, когда выполняется равенство
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$
6. (Теорема Ван–Обеля). Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке K. Докажите с помощью площадей, что
$$\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}.$$

38. Дискретная непрерывность. 20 июля.

1. По прямой палке длиной 1 м со скоростью 1 м/мин ползут муравьи. Когда два муравья сталкиваются, они разворачиваются и начинают ползти с той же скоростью в обратном направлении. Докажите, что через 1 мин все муравьи свалятся с палки.
2. В ряд выложено 50 белых и 50 черных шариков. Самый левый и самый правый шарики — белые. Докажите, что можно отсчитать несколько шариков, начиная с левого, так, чтобы среди них оказалось поровну черных и белых.
3. Последовательность целых чисел 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 42, 63, 94, … начинается с двойки, а каждое следующее число получается из предыдущего умножением на 3/2 и округлением по недостатку. Докажите, что в этой последовательности есть целое шестизначное число.
4. На плоскости отмечены 10000 точек. Докажите, что найдется не проходящая через эти точки прямая, по одну сторону которой лежит ровно 2008 отмеченных точек.

7. В графе степени всех вершин равны 3. Известно, что между любыми двумя вершинами найдется путь длины не более 2. Какое наибольшее количество вершин может быть в этом графе?

8. Можно ли расставить в клетках таблицы 10×10 числа $+1$, -1 и 0 так, чтобы все 20 сумм в строках и столбцах были различны?

Задачи для самостоятельного решения.

9. Можно ли в кубе $8 \times 8 \times 8$ закрасить 64 клетки так, чтобы в каждом “бруске” $1 \times 1 \times 8$ была закрашенная клетка, а из любых 8 закрашенных клеток какие-то две обязательно попадали бы в “слой” $1 \times 8 \times 8$ клеток?

37. Геометрический разнобой. 19 июля.

1. Найдите сумму углов при вершинах пятиконечной звезды (т.е. звездчатого самопересекающегося многоугольника).

2. AM — биссектриса треугольника ABC. Через A и M проведена окружность, пересекающая стороны AC и AB в точках K и L. Докажите, что

a) если она касается BC, то KL параллельна BC;

b) если KL параллельна BC, то она касается BC.

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что

$$\frac{AB \cdot BC}{CD \cdot DA} = \frac{BO}{DO}$$

.

В следующих трех задачах точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых BC, CA и AB соответственно.

4. (Теорема Чевы) Пусть нечетное количество из точек A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах, а не на продолжениях. Докажите с помощью площадей, что чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке a) тогда b) и только тогда, когда выполняется ра-

4. В алфавите племени ЫЫ всего две буквы — Ъ и Ы. Смысл слова не меняется от следующих замен: ЫЪЫ $\leftrightarrow$ ЪЪ, ЫЪЪ $\leftrightarrow$ ЪЫ, ЪЪЫ $\leftrightarrow$ ЫЪ, ЪЪЪ $\leftrightarrow$ ЫЫ. Можно ли утверждать, что слова ЫЪЪ и ЪЫЫ являются синонимами?

5. На доске написали число 1. После этого каждую минуту к написанному числу прибавляют сумму его цифр. Докажите, что на доске никогда не появится число 123456.

6. Три кузнечика сидят на плоскости в точках с координатами (0, 0), (0, 1), (1, 0). Каждую минуту один из них перепрыгивает через другого, прыгая в точку, симметричную относительно него. Могут ли они попасть в точки

7. a) По кругу растут 42 дерева, и на каждом из них сидит чиж. Время от времени какие–то 2 чижа перелетают на соседние деревья — один по часовой стрелке, а другой — против. Могут ли все чижи собраться на одном дереве? b) А если 44 дерева?

8. На острове есть 17 серых, 18 бурых и 19 малиновых хамелеонов. Когда встречаются 2 хамелеона разного цвета, они одновременно перекрашиваются в третий. Могут ли они все стать одноцветными?

Задачи для самостоятельного решения.

9. На доске записаны числа от 1 до 100. Разрешается стереть с нее любые два числа и записать вместо них их сумму, а на другой доске записать их произведение. Какова будет сумма чисел, написанных на второй доске, когда на первой доске останется всего одно число?

10. На доске написаны числа от 1 до 20. Можно пару чисел $(x,\ y)$ заменить на $x+y+xy$. Какое число останется после 19 операций?

10. Параллельность и теорема Фалеса. 6 июля.

1. Докажите, что выпуклый 17–угольник нельзя разрезать на 14 треугольников.

2. На плоскости даны семь прямых, никакие две из которых не параллельны. Доказать, что найдутся две из них такие, что угол между ними меньше 26°.

3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки X и Y соответственно, причем $\angle XCB = \angle YAD$. Докажите, что прямые CX и AY параллельны.

4. Докажите, что четырехугольник является параллелограммом а) тогда и только тогда, когда каждая диагональ делит его на две равновеликих части;
b) В трапеции одна из диагоналей делится другой пополам. Доказать, что трапеция — параллелограмм.

5. a) Докажите, что средняя линия треугольника параллельна его основанию.
b) Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

6. a) Точка B_1 лежит на стороне OB угла AOB. Докажите, что

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOB_1}} = \frac{OB}{OB_1}.$$

b) Две параллельные прямые высекают на сторонах угла с вершиной O отрезки A_1A_2 и B_1B_2. Докажите, что треугольники OA_1B_2 и OA_2B_1 равновелики.
Докажите теорему Фалеса c) для случая двух параллельных прямых
Две параллельные прямые высекают на сторонах угла с вершиной O отрезки A_1A_2 и B_1B_2. Докажите, что $\frac{OA_1}{A_1A_2} = \frac{OB_1}{B_1B_2}$.
d) В общем случае
Три параллельные прямые высекают на одной стороне угла отрезки A_1B_1 и B_1C_1, а на другой стороне угла — отрезки A_2B_2 и B_2C_2. Докажите, что если отрезки A_1B_1 и B_1C_1 находятся в данном отношении, то отрезки A_2B_2 и B_2C_2 находятся в том же отношении.

7. В последовательности 200796... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предшествующих цифр. Докажите, что в этой последовательности снова встретится четверка 2007.

8. Бесконечная последовательность чисел x_n определяется условиями: $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$, причем $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$. Докажите, что последовательность, начиная с некоторого места, периодическая а) в том b) и только в том случае, если x_1 рационально.

9. Последовательность a_n задается условиями

$$a_{2n} = a_{2n-1} + a_{2n-2}, \text{ а } a_{2n+1} = 10a_{2n} - 9a_{2n-1}$$

. Докажите, что она периодична по любому модулю.

36. Конструкции. 19 июля.

1. Можно ли из полосок 1×1, 2×1, ..., 13×1 сложить прямоугольник со сторонами, больше 1?

2. Можно ли в клетках таблицы $n \times n$ расставить числа от 1 до n^2 так, чтобы число в каждой клетке было либо меньше всех чисел, стоящих в соседней по стороне клетке, либо больше их всех?

3. Можно ли натуральные числа от 1 до 17 выписать в строчку так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом?

4. Может ли так быть, чтобы доходы компании за любые пять подряд идущих месяцев 2009 года превышали расходы, но расходы за весь 2009 год превышали доходы?

5. Есть ли среди натуральных чисел такое, что при умножении суммы его цифр на произведение его цифр получится 2009?

6. Можно ли из произведения $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!$ вычеркнуть один сомножитель так, что произведение оставшихся будет полным квадратом?

35. Периодичность. 18 июля.

0. Докажите, что последовательность остатков от деления на 2007 степеней числа 7 периодическая, причем длина периода не больше 2007.

1. Найдите сотую цифру после запятой числа 28/270.

2. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 10000.

3. Один преподаватель оставил на дверях всех комнат записки следующего содержания: “Я в комнате номер ...” и исчез в неизвестном направлении. (Разные записки могут сообщать разную информацию). Некоторый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.

4. Жители страны Пуп Мира очень гордятся тем, что у них президентская форма правления: каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. ПупМировские социологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен “Актом о демократии”, в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью определяется партийностью предыдущих десяти. Докажите, что последовательность партийностей президентов зациклится, и оцените как-нибудь длину периода.

5. Докажите, что некоторая степень числа 7 оканчивается на цифры 000000000000000001. На что тут можно заменить число 7?

6. Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ найдется число, делящееся на 2009.

Задачи для самостоятельного решения.

Задачи для самостоятельного решения.

7. *(Теорема Вариньона).* Докажите, что a) фигура, образованная путем последовательного соединения середин сторон четырехугольника, является параллелограммом, и
b) если четырехугольник был выпуклым, то площадь этого параллелограмма равна половине площади четырехугольника.

8. В параллелограмме $ABCD$ $\angle CAB + \angle DBC = 90°$. Докажите, что он — ромб или прямоугольник.

9. a) Докажите, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда диагонали делят его на четыре равновеликих части.
b) Докажите, что параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

10. Точка на стороне AB треугольника ABC начала двигаться параллельно AC до BC, потом параллельно AB до AC, потом параллельно BC до AB и т.д. Докажите, что через несколько шагов она вернется на исходное место, и найдите это число шагов в зависимости от положения точки на AB.

11. Разделите данный отрезок на n равных частей с помощью циркуля и линейки.

11. Разнобой–3. 6 июля

1. a) Докажите, что среди всех отрезков в прямоугольнике наибольшую длину имеет диагональ.
b) Как расставить на квадратном ринге 5 боксеров с тем, чтобы наименьшее из расстояний между ними было как можно больше?

2. На продолжении наибольшей стороны AB треугольника ABC отложен отрезок BD, равный стороне BC. Докажите, что угол ACD тупой.

3. На плоскости нарисован угол 19°. Постройте с помощью циркуля и линейки угол в 16°.

4⋆. На плоскости дан правильный 19–угольник. Постройте с помощью циркуля и линейки правильный 57–угольник.

5⋆. Доступ к сейфу имеют 11 членов комиссии. Каким наименьшим числом замков можно снабдить сейф для того, чтобы при определенном наборе ключей любые шестеро, собравшись вместе, могли его открыть, а любых пяти было бы недостаточно?

12. Бином Ньютона и тождества для C_n^k. 8 июля.

1. *(Бином Ньютона)* Докажите, что

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

2. С помощью бинома Ньютона докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

3. Найдите сумму $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$
a) с помощью бинома; b) комбинаторно, построив биекцию между четными и нечетными наборами α) для нечетного n; β) для четного n.

4. a) Чему равна сумма четных биномиальных коэффициентов $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}$? b) А нечетных $\sum\limits_{k=1}^{[(n+1)/2]} C_n^{2k-1}$?

5. Докажите тождество $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n 2^{n-1}$.

6. Докажите, что число $\sqrt{10}\left((1+\sqrt{10})^{10} - (1-\sqrt{10})^{10}\right)$ – целое.

7. a) Докажите, что для простого $p > k > 0$ число C_p^k кратно p.
b) Докажите для целых чисел a и b, что $(a+b)^p \underset{p}{\equiv} a^p + b^p$.
c) *(Малая теорема Ферма)* Для простого p и натурального n выполнено $n^p - n \underset{p}{\equiv} 0$

Задачи для самостоятельного решения.

8. Найдите первые 1000 цифр после запятой в числе: $(\sqrt{5}+2)^{2009}$.

ту, если среди тестируемых монет есть хотя бы одна фальшивая. Как за шесть тестов выявить обе фальшивые монеты?

5. a) Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти хотя бы одну настоящую монету? b) Среди 15 монет – не более 7 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково (а фальшивые, возможно, нет). Можно ли за 14 взвешиваний найти хотя бы одну из настоящих монет? А за меньшее число взвешиваний?

6. Есть две золотые монеты и n серебряных. Известно, что среди золотых есть одна фальшивая, и среди серебряных есть одна фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые – тоже, но фальшивые легче настоящих. Есть чашечные весы без гирь. При каком наибольшем n можно наверняка выявить обе фальшивые монеты a) за два взвешивания? b) за три взвешивания?

Задачи для самостоятельного решения.

7. Среди 5 монет — ровно одна фальшивая: она отличается по весу от остальных, но неизвестно — легче или тяжелее. Требуется выявить ее на чашечных весах без гирь и узнать, легче она или тяжелее настоящей. Какое наименьшее число взвешиваний для этого наверняка хватит?

8. Есть две золотые монеты и n серебряных. Известно, что среди всех монет есть две фальшивых, и среди золотых есть не более одной настоящей. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые — тоже, но фальшивые легче настоящих. Есть чашечные весы без гирь. При каком наибольшем n можно наверняка выявить обе фальшивые монеты a) за два взвешивания? b) за три взвешивания?

клеток. Какова наибольшая возможная сумма 64 выписанных чисел?

8. Антон Сергеевич положил в каждую клетку прямоугольника 3×6 по одной монете. Он утверждает, что суммарный вес всех монет в каждой линии (строчки и столбцы), кроме одной, одинаков. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить, в какой именно линии вес другой?

34. Макроэкономика, логистика, учет и контроль. 18 июля.

1. Среди n одинаковых по виду монет есть ровно 1 фальшивая, которая легче настоящих. a) Как найти фальшивую монету из 3 за одно взвешивание на двухчашечных весах без гирь?
b) Как найти фальшивую монету за два взвешивания если $n = 9$?
c) Сколько потребуется взвешиваний, если $n = 3^k$?
d) Какое наименьшее количество взвешиваний потребуется если $n = 4, 5, 6, 7, 8$?
e) Какое наименьшее количество взвешиваний потребуется для определения одной фальшивой монеты из n?

2. Среди 8 монет, возможно, есть одна легкая ФМ (но ее может и не быть). Как за два взвешивания найти ФМ, если она есть, или доказать, что ее нет?

3. Есть 27 монет, m из которых серебряные, остальные – золотые. Известно, что одна из них фальшивая, а остальные настоящие (настоящая серебряная монета отличается по весу от настоящей золотой). Серебряная ФМ легче настоящей серебряной, а золотая ФМ тяжелее чем настоящая золотая. Как найти ФМ за три взвешивания, если a) $m = 13$; b) m — любое число от 1 до 26?

4. Есть 10 монет, среди них ровно две фальшивые. Детектор R7 за одну операцию исследует три монеты и указывает на одну из них. Известно, что детектор не может указать на настоящую моне-

9. Какие тождества для биномиальных коэффициентов можно вывести, исходя из равенства $(x+y)^{m+n} = (x+y)^m \cdot (x+y)^n$?

10. Найдите все такие n, для которых все биномиальные коэффициенты C_n^k нечетны.

13. ГМТ. 8 июля.

Определение. *Геометрическое место точек (ГМТ)*, обладающих данным свойством — это фигура, состоящая из тех и только тех точек, которые обладают этим свойством.

Упр1. ГМТ, равноудаленных от данных точек A и B, есть серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Упр2. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, и это центр описанной окружности.

Упр3. ГМТ, равноудаленных от сторон данного угла и лежащих внутри данного угла, есть биссектриса данного угла.

Упр4. Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, и это центр вписанной окружности.

1. У треугольника есть три вневписанных окружности.

Упр5. Найдите ГМТ, равноудаленных от трех данных прямых.

Упр6. Даны две параллельные прямые. Найдите ГМТ, расстояние от которых до первой прямой в два раза больше, чем до второй.

Упр7. Дан отрезок AB. Найдите ГМТ M таких, что
a) $AM + MB = AB$; b) $AM - MB = AB$.

2. Пожарный решил забраться на лестницу, приставленную к стене. Едва он успел добраться до середины, лестница съехала на пол. Какова траектория пожарного до удара об пол?

Упр8. Пусть O лежит на отрезке AB. Найдите ГМТ M таких, что $\angle MOB = 2\angle MAB$.

3. Найдите ГМТ середин хорд данной длины в данной окружности.

4. a) Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ M таких, что $S_{AMB} = S_{AMC}$. b) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

5. Загон для козла имеет форму квадрата. Из каких точек плоскости козел увидит меньше половины загона?

6. Дан квадрат. Найдите все точки такие, что сумма расстояний от каждой из них до двух противоположных сторон квадрата равна сумме расстояний до двух других сторон (под расстоянием от точки до стороны квадрата в этой задаче понимается расстояние до прямой, содержащей сторону).

7. Даны точки A и B. Найдите ГМТ M таких, для которых треугольник AMB a) прямоугольный; b) остроугольный; c) тупоугольный.

8. Дан треугольник ABC. Внутри него взяли точку M и соединили ее с вершинами. Получилось три треугольника. Найдите ГМТ M, для которых сумма площадей двух из этих треугольников будет равна площади третьего.

Задачи для самостоятельного решения.

Четвертый признак равенства треугольников. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Тогда либо $\angle BCA = \angle B'C'A'$ (и треугольники ABC и $A'B'C'$ равны), либо $\angle BCA + \angle B'C'A' = 180°$.

9*. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Найдите ГМТ M, из которых отрезки AB и AC видны под равными углами.

7. В ряду чисел 1, 251, 376, ... каждое число, кроме первого, равно либо половине предыдущего, если предыдущее четно, и половине предыдущего числа, увеличенного на 501, в противном случае. Верно ли, что в этом ряду встретятся все числа от 1 до 500?

8. Казначей Матвей положил в каждую клетку прямоугольника 3×6 по одной монете. Он утверждает, что суммарный вес всех монет в каждой линии (строчки и столбцы), кроме одной, одинаков. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить, в какой именно линии вес другой?

33. Матбой Профи7–Профи8. 16 июля.

1. На стороне BC треугольника ABC отмечены такие точки M и N, что $CM = MN = NB$. К стороне BC в точке N построен перпендикуляр, пересекающий сторону AB в точке K. Оказалось, что площадь треугольника AMK в 4,5 раза меньше площади исходного треугольника. Докажите, что исходный треугольник равнобедренный.

2. Пусть S — сумма четырех натуральных чисел a, b, c, d. Докажите, что если $ab - cd$ делится на S, то S — составное.

3. Докажите, что из 3^n натуральных делителей числа 3^n можно выбрать несколько (быть может, один) не обязательно различных делителей с суммой равной 3^n.

4. Может ли куб оканчиваться на 2009 единиц?

5. Астроном пронаблюдал 50 звезд и вычислил сумму S попарных расстояний между ними. Облако заслонило 25 звезд. Доказать, что сумма попарных расстояний между оставшимися звездами меньше $S/2$.

6. В треугольнике ABC углы B и C равны по 40°; BD — биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.

7. На свободные поля шахматной доски по одной выставляются ладьи. Каждый раз записывается число побитых ладьей пустых

7. А теперь найдите все целочисленные решения уравнения $x^4+2y^4+4z^4+8t^4=s^4$.

8. Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$ имеет в целых числах только нулевое решение.

9. Найдите все целочисленные решения уравнения $5x^3+11y^3+13z^3=0$.

32. Матбой Профи6–Профи 7. 16 июля.

1. Несколько кроликов построились в ряд. Оказалось, что каждый кролик, кроме двух крайних, имеет поровну друзей слева и справа от него. Докажите, что у двух крайних кроликов поровну друзей.

2. Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Докажите, что его можно разбить прямыми, параллельными сторонам, и на 392 равных квадрата.

3. Докажите, что из 3^8 натуральных делителей числа 3^8 можно выбрать несколько (быть может, один) не обязательно различных делителей с суммой, равной 3^8.

4. Какое наибольшее количество фигурок $1\times2\times2$ можно вырезать из куба $3\times3\times3$?

5. На окружности даны $n>10$ точек. Кенни посчитал количество способов провести три отрезка с концами в данных точках, не имеющих общих точек (в том числе и концов). Докажите, что это количество делится на 5.

6. Вася и Петя играют в игру. На пяти клавиатурах есть 100, 101, 102, 103 и 104 клавиши соответственно. За ход можно выломать по одной клавише из двух разных клавиатур. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (начинает Петя)?

14. Малая теорема Ферма, системы вычетов. 8 июля.

1. *(Теорема Ферма)* Пусть целое число a не делится на простое число p. Докажите, что тогда a) числа a, $2a$, $3a$, $\ldots$, $(p-1)a$ дают попарно различные остатки по модулю p; b) числа $(p-1)!$ и $a^{p-1}(p-1)!$ сравнимы по модулю p; c) $a^{p-1}\underset{p}{\equiv}1$.

2. *(Теорема Вильсона)* Натуральное число $p>1$ является простым тогда и только тогда, когда $(p-1)!+1 \,\vdots\, p$.

3. Докажите, что $300^{3000}-1$ делится на 1001.

4. Докажите, что если $p>5$ — простое, то число $\underbrace{11\ldots1}_{p-1}$ делится на p.

5. Натуральное число n не делится на 17. Докажите, что либо n^8+1, либо n^8-1 делится на 17.

Задачи для самостоятельного решения.

6. (Число Кармайкла) Докажите, что $a^{561}-a$ делится на 561 для любого целого a.

7. Докажите, что число $30^{239}+239^{30}$ — составное.

8. Докажите, что уравнение $x^2+5=y^3$ не имеет решений в целых числах.

15. Вписанные углы. 9 июля.

1. Докажите, что угол, вписанный в окружность равен 1/2 дуги, на которую он опирается, в случае, когда центр окружности лежит: на стороне угла; внутри угла; вне угла. (Дуга окружности измеряется величиной опирающегося на нее центрального угла.)

2. Докажите, что a) у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма двух противоположных углов равна 180°;
b) четырехугольник, сумма двух противоположных углов которого равна 180° можно вписать в окружность.

c) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ACB = \angle ADB$ тогда и только тогда, когда он вписанный.

3. На сторонах треугольника ABC взяли по точке и соединили их с точкой P внутри треугольника. Докажите, что если два из трех получившихся четырехугольников — вписанные, то третий — тоже вписанный.

4. Из точки P на биссектрисе угла с вершиной O опущены перпендикуляры PA и PB на его стороны.
Докажите, что $\angle POA = \angle ABP$.

5. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника параллельны, а три его главные диагонали равны. Докажите, что этот шестиугольник — вписанный.

6. На гипотенузе прямоугольного треугольника ABC внешним образом построен квадрат $ABDE$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что луч CO — биссектриса угла C.

7. a) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется ортоцентром.
Ортоцентр треугольника отразили относительно b) середины одной из сторон; c) самой стороны. А не кажется ли Вам, что полученная точка лежит на описанной окружности треугольника? А не могли бы Вы это доказать?

8. a) Докажите, что в треугольнике ABC биссектриса угла A и срединный перпендикуляр к стороне BC пересекаются на описанной окружности.
b) (Лемма о трезубце) Прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC, вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M. Докажите, что треугольники BOM и COM равнобедренные.

Задачи для самостоятельного решения.

9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Его диагонали пересекаются в точке K. При этом дуга AB равна $25°$, а дуга CD равна $45°$. Найдите, пожалуйста, градусную меру $\angle AKB$?

рое количество пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k–ой и $(k+1)$–ой, приходят к выводу, что они мешают друг другу и переселяются соответственно в $(k-1)$–ю и $(k+2)$–ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

30. Рациональные параметризации. 15 июля.

На занятии введено понятие декартовой системы координат. Показано, как изображать кривые на плоскости. Даны примеры разных параметризаций. В качестве примера использования выведен общий вид пифагоровых троек.

31. Метод спуска. 16 июля.

1. Есть 13 гирь с целыми весами. Любые 12 из них можно разбить на 2 кучки равного веса по 6 гирь в каждой. Докажите, что все гири имеют одинаковый вес.

Вопрос. А если в предыдущей задаче веса всех гирь рациональны?

2. Пусть p—простое число. Докажите, что уравнение $x^3 + py^3 + p^2z^3 = 0$ не имеет нетривиальных решений в целых числах.

3. Докажите, что не сушествует натуральных чисел x, y, k таких, что $x^3 + y^3 = 7 \cdot 8^k$.

4. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = 7(z^2 + t^2)$ не имеет ненулевых решений в целых числах.

5. Докажите, что если для натуральных x, y, z выполнено $x^2 + y^2 = z^2$, то существуют натуральные u, v, такие, что либо $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, либо наоборот, $z = u^2 + v^2$.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2 + y^2 = 3z^2$.

расположатся по порядку 1, 2, …, 100. b) Какое наибольшее число ходов могут продолжаться перестановки?

4. a) На доске написано трехзначное число. Из него вычли сумму его цифр, затем из полученного числа вычли сумму его цифр, и так далее. Докажите, что через 100 таких операций получится число 0. b) Докажите то же самое, если число было 7-значным, а операций — 1 000 000.

5. По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, а с оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности будут равны.

6. Фирма “id Software” плодит монстров. Каждый день монстры мутируют. Если сегодня монстр имеет m ручек и n ножек, то назавтра он будет иметь $2m - n$ ручек и $2n - m$ ножек. Монстр погибает, когда число ручек или ножек становится отрицательным. При каком начальном количестве ручек и ножек монстр сможет жить вечно?

7. Доска $m \times n$ раскрашена в два цвета. Разрешено перекрашивать клетки любого прямоугольника 3×1 в преобладающий (в этом прямоугольнике) цвет. Докажите, что такими операциями можно исходный прямоугольник перекрасить в один цвет.

8. Каждую минуту к числу прибавляется его наибольший простой делитель. Докажите, что в последовательности встретится число, кратное любому наперед заданному.

9. На плоскости дано 100 красных и 100 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с разноцветными концами.

10. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некото-

10. У выпуклого семиугольника, вписанного в окружность, 3 угла равны 120°. Будьте любезны доказать, что какие–то две стороны тоже равны.

11. По разные стороны от прямой l даны точки A и B. Найдите на l точку O такую, что l — биссектриса угла AOB.

12. Описанную окружность отразили относительно трех сторон треугольника. Докажите, что три полученные окружности пересекаются в одной точке.

13. В окружность с диаметром AB вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что длины проекций отрезков AC и BD на прямую CD равны.

16. Теорема Эйлера и разное. 9 июля.

Определение. $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Выражение $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера.*

1. Докажите, что если $n > 2$, то $\varphi(n) \,\vdots\, 2$.

2. *(Теорема Эйлера)* Пусть n — натуральное число, a — целое число, взаимно простое с n. Докажите, что $a^{\varphi(n)} \underset{n}{\equiv} 1$. (*Указание.* Воспользуйтесь свойствами приведенной системы вычетов.)

3. Число n нечетно. Докажите, что $2^{n!} - 1$ делится на n.

4. Пусть p –простое число. Докажите, что $(2p-1)! - p$ делится на p^2.

5. Докажите, что простых чисел вида $4k + 3$ бесконечно много.

Определение. Множество $I \subset \mathbb{Z}$ состоящее из целых чисел будем называть *Идеалом* если выполняются два условия:

1) если a и b принадлежат I то $a + b \in I$.

2) если $a \in I$ и $c \in \mathbb{Z}$, то $ac \in I$

6. Докажите, что для любого идеала I найдется такое число m, что I состоит в точности из целых чисел делящихся на m. (*указание:* возьмите наименьший по модулю элемент I).

7. Докажите, что множество линейных комбинаций чисел a и b (а именно $ax + by$) является идеалом.

Задачи для самостоятельного решения.

8. Докажите свойство мультипликативности функции Эйлера. Если m и n взаимно просты, то $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$. *Указание:* нарисуйте все остатки по модулю mn виде таблицы $m \times n$ и посмотрите где находятся взаимно простые с m и n числа.

9. Докажите, что если для чисел m и n выполняется свойство мульпликативности, то они взаимно просты.

10. Докажите, что если у числа n есть два различных нечетных простых делителя, то для числа a взаимно простого с n верно, что $a^{\varphi(n)/2} \underset{n}{\equiv} 1$.

17. Графы–2. 9 июля.

Определение. *Деревом* называется связный граф, не содержащий циклов.

1. a) Докажите, что в дереве есть вершина степени 1.
b) Докажите, что в дереве с n вершинами содержится ровно $n-1$ ребро.

2. Докажите, что a) из любого связного графа можно выделить дерево, содержащее все его вершины (*остовное дерево*);
b) в связном графе с n вершинами содержится как минимум $n-1$ ребро.

3. Докажите, что в любом связном графе есть вершина, при удалении которой граф остается связным.

4. Маньяк Петр по одной перерезает веревочки волейбольной сетки, имеющей вид прямоугольника $m \times n$. Какое наибольшее число веревочек может он разрезать до того, как сетка распадется на куски?

5. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в два цвета правильным образом тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных циклов.

Определение 2. Рассмотрим множества, все s–элементные подмножества которых помечены 0 или 1. Обозначим $R(s; m, n)$ наименьшее число такое, что в любом множестве с таким числом элементов есть либо m-элементное подмножество, все s–элементные подмножества которого помечены 1, либо n–элементное подмножество, все s–элементные подмножества которого помечены 0.

6. Докажите, что $R(1; m, n) = m + n - 1$.

Теорема Рамсея. Число $R(s; m, n)$ существует при любом s и при любых $m \geqslant s$ и $n \geqslant s$. Его можно оценить с помощью неравенства

$$R(s; m, n) \leqslant R(s-1; R(s; m-1, n), R(s; m, n-1)) + 1.$$

29. Полуинвариант. 15 июля.

0. На доске написаны несколько натуральных чисел. Каждую минуту выбирают какие-то два из них (x и y) и заменяют их на числа $x - 2$ и $y + 1$. Докажите, что рано или поздно на доске появится отрицательное число.

1. a) На шахматной доске 100×100 королю разрешено ходить вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Какое наибольшее число ходов он может сделать? b) Королю разрешили еще ходить вправо–вниз по диагонали. Докажите, что он может сделать лишь конечное число ходов.

2. В клетках таблицы 99×99 расставлены числа (не обязательно целые). Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из рядов будет неотрицательной.

3. В строке в беспорядке записаны числа 1, 2, …, 100. Петя находит пару рядом стоящих чисел, где правое меньше левого, и меняет их местами. a) Докажите, что рано или поздно числа

9. Сформулируйте алгоритм решения в целых числах уравнений вида $ax + by + cz = d$.

10. Натуральные числа a, b, c таковы, что $ab + bc = ca$. Докажите, что

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(b, c) = \text{НОК}(c, a).$$

11. Последовательность x_1, x_2, $\ldots$ задана правилами: $x_1 = 2$, x_{n+1} — наибольший простой делитель числа $x_1 x_2 \ldots x_n + 1$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что $x_n \neq 5$ ни при каком натуральном n.

28. Теория Рамсея. 14 июля.

0. *(Эрдеш-Секереш).* Докажите, что существует такое натуральное N, что из любых N точек на плоскости общего положения можно выбрать 100 точек, лежащих в вершинах выпуклого стоугольника.

Определение 1. Пусть $R(m, n)$ ($m, n \geqslant 2$ — натуральные числа) есть наименьшее натуральное число такое, что полный граф на $R(m, n)$ вершинах, ребра которого покрашены в черный и белый цвета, содержит либо полный белый подграф на n вершинах, либо полный черный подграф на m вершинах.

1. Найдите $R(2, n)$.

2. Докажите, что $R(m, n) \leqslant R(m, n-1) + R(n, m-1)$ для m, $n \geqslant 3$.

3. a) Докажите, что в любой группе из 6 человек найдутся либо три попарно знакомых человека, либо три попарно незнакомых человека.

b) Докажите, что в любой группе из 9 человек найдутся либо трое попарно незнакомых, либо четверо попарно знакомых.

4. Докажите, что $R(m, n) \leqslant C_{m+n-2}^{m-1}$ (тем самым, $R(m, n) < +\infty$ для всех натуральных m, n).

5. Докажите, что a) $R(n, n) \leqslant 4^n$; b)* $(\sqrt{2})^n \leqslant R(n, n)$.

6. В государстве некоторые пары городов соединены беспосадочными (двусторонними) авиарейсами. Раз в день происходит реорганизация: соединяются рейсами те и только те пары городов, для которых накануне существовал маршрут ровно с одной пересадкой. Через 6 дней выяснилось, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что если реорганизация будет продолжаться, то и через год можно будет из любого города долететь до любого другого.

Задачи для самостоятельного решения.

7. В однокруговом турнире по волейболу участвовало n команд. Докажите, что их можно занумеровать числами от 1 до n так, что первая команда выиграла у второй, вторая у третьей, $\ldots$, $(n-1)$–я команда у n–й.

8. Во дворе стоят несколько столбов, некоторые пары соединены проводами. Всего протянуто mn проводов, и эти провода раскрашены в n цветов, причем ни от какого столба не отходят провода одинакового цвета. Докажите, что можно перекрасить эти провода так, чтобы проводов всех цветов было поровну и по–прежнему ни от какого столба не отходили два провода одного цвета.

9. Степени всех вершин графа не превосходят d. Докажите, что a) его вершины можно правильным образом раскрасить в $d + 1$ цвет; b) его вершины можно раскрасить в $d^2 + 1$ цветов так, чтобы одноцветные вершины не имели общих соседей.

18. Планарные графы, теорема Эйлера. 10 июля.

Формула Эйлера. На плоскости изображен связный граф (с петлями и кратными ребрами!) с V вершинами и E ребрами, разбивающий плоскость на F областей(граней). Тогда $V - E + F = 2$.

0. В квадрате отметили 10 точек (или n точек), а затем соединили их и вершины квадрата непересекающимися отрезками так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

0. Докажите, что $6V - 12 \geqslant 2E \geqslant 3F$, если нет кратных ребер, петель и граф связен.

1. Докажите, что граф K_5 не планарен. Получается ли так доказать непланарность $K_{3,3}$?

2. Докажите, что граф $K_{3,3}$ (три домика и три колодца) не планарен.

3. Каждое ребро полного графа на 11 вершинах раскрасили в синий или красный цвет. Могут ли и синий, и красный графы оказаться планарными?

4. Пятиугольник разрезан на несколько многоугольников так, что все стороны пятиугольника остались неразрезанными. Докажите, что если число многоугольников не меньше пяти, то в одном из них найдется угол, который больше или равен 72°.

5. В выпуклом многограннике все грани — пятиугольники или шестиугольники. В каждой вершине сходятся 3 ребра. Сколько всего пятиугольных граней?

6. На плоскости нарисовано n точек. Двое по очереди соединяют их линиями так, чтобы линии не пересекались. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

Задачи для самостоятельного решения.

7. a) Докажите, что в планарном графе найдется грань, в которой не больше 5 ребер. b) в любой карте найдется либо вершина степени не более, чем 3, либо страна, ограниченная тремя ребрами.

следующим *алгоритмом*:

1. Находим $d = \text{НОД}(a, b)$.

2. Проверяем, делится ли c на d. Если нет, то уравнение не имеет решений; если да, то делим обе части на d, переходя к равносильному уравнению $a'x + b'y = c'$ со взаимно простыми $a' = \frac{a}{d}$, и $b' = \frac{b}{d}$ и правой частью $c' = \frac{c}{d}$.

3. Находим частное решение (x_0, y_0) уравнения $a'x + b'y = c'$ (если получается — подбором, если нет — с помощью алгоритма Евклида).

4. Записываем общее решение уравнения $a'x + b'y = c'$ в виде $\begin{cases} x = x_0 + b't, \\ y = y_0 - a't \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$.

Задачи.

1. Решите в целых числах уравнение: $7x - 5y = 6$.

2. Решите в целых числах уравнение: $234x + 432y = 180$.

3. Антоша задумал натуральное число, умножил его на 51, затем поделил с остатком на 544 и получил в остатке 13. Могло ли такое произойти?

4. Найдите две обыкновенные дроби — одну со знаменателем 8, другую со знаменателем 13, чтобы они не были равны, но разность между большей и меньшей из них была как можно меньше.

5. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что уравнение $ax + by = ab$ не имеет решений в натуральных числах.

6. В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ провели диагональ. Сколько клеток она пересекла a) если $(m, n) = 1$; b) в общем случае?

7. 175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев. Докажите, что на трех шалтаев и одного болтая рубля не хватит. (Они стоят целое число копеек).

Задачи для самостоятельного решения.

8. Найдите все целочисленные решения уравнений: a) $2x + 3y + 5z = 11$; b) $12x + 15y + 20z = 4$.

5. С помошью линейного представления наибольшего общего делителя докажите Лемму. *Лемма:* если $ab \,\vdots\, p$, где p–простое число, то либо $a \,\vdots\, p$, либо $b \,\vdots\, p$.

6. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$.

7. Докажите, что

$$\frac{\text{НОД}(a, b)\text{НОД}(b, c)\text{НОД}(c, a)}{\text{НОД}(a, b, c)^2} = \frac{\text{НОК}(a, b)\text{НОК}(b, c)\text{НОК}(c, a)}{\text{НОК}(a, b, c)^2}.$$

8. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. a) Сколько натуральных делителей у числа n? b) Чему равна сумма делителей числа n? c) Чему равно $\varphi(p^k)$? d) Воспользуйтесь свойством мультипликативности функции Эйлера и найдите чему равно $\varphi(n)$.

9. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, а $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$? Причем возможно некоторые из чисел α_i или β_i равны 0. Как узнать, чему равны $\text{НОД}(a, b)$ и $\text{НОК}(a, b)$?

Задачи для самостоятельного решения.

10. Чему равно произведение делителей числа n?

11. Из чисел от 1 до $2n - 1$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что одно из выбранных чисел равно сумме двух других.

12. Число $(1 + \sqrt{2})^{2008}$ записали в виде $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b. Докажите, что $\left|a^2 - 2b^2\right| = 1$.

27. Линейные уравнения. 13 июля.

Теория

Теорема. Пусть a и b – взаимно простые числа. Тогда уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечно много целочисленных решений, причем все они имеют вид $\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at \end{cases}$, где t — произвольное целое число, а (x_0, y_0) — одно из решений уравнения $ax + by = c$.

Для того, чтобы решить в целых числах линейное уравнение $ax + by = c$ $(a, b \neq 0)$, необходимо действовать в соответствии со

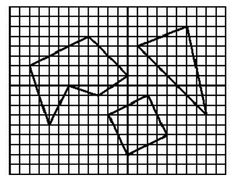
c) Докажите, что планарный граф можно покрасить правильным образом в 5 цветов.

8. Дана карта, степени всех вершин которой четны. Докажите, что ее страны можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две страны, имеющие общее ребро, были покрашены в разные цвета.

9. В некотором государстве из каждого города выходит ровно три дороги, причем дороги друг с другом не пересекаются. Путешественник выходит из столицы по одной из дорог и далее по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он вернется в столицу.

19. Формула Пика. 10 июля.

0. Найдите площади многоугольников, изображенных на рисунке.



Формула Пика. Рассмотрим многоугольник с вершинами в узлах клетчатого листа (сторона клетки равна 1). Пусть на границе многоугольника находится G узлов клетчатой сетки, а внутри V узлов. Тогда площадь этого многоугольника равняется $V + \frac{G}{2} - 1$.

1. a) Докажите формулу Пика для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки.

b) Докажите формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки.

c) Докажите формулу Пика для многоугольника, составленного из двух многоугольников, для которых формула Пика уже доказана.

d) Пусть многоугольник, для которого формула Пика уже проверена, составлен из двух многоугольников. Докажите, что если формула Пика выполняется для одного из них, то она выполня-

ется и для другого.
е) Докажите формулу Пика для произвольного треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги, отрезав для этого от прямоугольника несколько прямоугольных треугольников.

Утверждение. Любой многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники.

Комментарий. Осознайте, что мы доказали формулу Пика для произвольного многоугольника с вершинами в узлах сетки.

2. Убедитесь в справедливости формулы Пика для многоугольников, изображенных на рисунке 1.

3. Шахматный король обошел все клетки доски 8×8 и вернулся на исходную клетку. Оказалось, что его путь не имеет самопересечений. Фигуру какой площади он ограничивает?

4. Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 одинаковых многоугольников с вершинами в узлах сетки?

5. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два узла клетчатой бумаги, и не лежащий на этой прямой узел, такой, что расстояние между ними меньше $\frac{1}{2009}$.

6. a) Докажите, что для любого многоугольника с вершинами в узлах сетки отношение его площади к квадрату любой стороны рационально. b) Найдется ли правильный треугольник с вершинами в узлах сетки?

7. На клетчатом листе бумаги отметили пять узлов. Докажите, что на одном из соединяющих их отрезков найдется узел решетки, отличный от концов отрезка.

8. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в узлах сетки не меньше $1/2$.

Задачи для самостоятельного решения.

9. На клетчатой плоскости изображен неравнобедренный треугольник ABC с вершинами в узлах клетчатой сетки (сторона клеточки равна 1). Докажите, что $|AB - AC| > \frac{1}{P_{ABC}}$.

2. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике сумма длин средних линий равна его полупериметру, то этот четырехугольник — параллелограмм.

3. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике сумма расстояний от точки пересечения средних линий до вершин равна сумме длин его диагоналей, то этот четырехугольник — параллелограмм.

4. Докажите, что с помощью центрально симметричных шестиугольников можно застелить паркетом плоскость так, что любые два шестиугольника получаются друг из друга параллельным переносом. Получите из этого паркета паркет для четырехугольников.

5. Дан равносторонний треугольник и две точки внутри него. Можно ли пустить бильярдный шар из одной точки так, чтобы он попал в другую, ровно n раз ударившись об стенки? (Угол падения равен углу отражения).

26. Комбинаторные доказательства и ТЧ–Разнобой. 14 июля.

1. *(МТФ)* Есть неограниченное количество бусинок a различных цветов. Сколько различных круглых бус из p бусинок можно составить из них?

2. *(Вильсон)* Сколько различных замкнутых ломаных можно провести через вершины p–угольника, если считать что ломаные получаемые поворотом друг из друга одинаковы?

3. Докажите, что в вершинах любого многогранника можно расставить натуральные числа так, чтобы числа в вершинах, связанных ребром, имели общий делитель больше 1, а не связанные ребром — не имели.

4. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \underset{pq}{\equiv} p + q$.

противоречивости, а именно $a_i \underset{d_{ij}}{\equiv} a_j$, где $d_{ij} = (m_i,\ m_j)$, то существует такое N, удовлетворяющее той самой системе сравнений.

11. a) Докажите, что для любых простого p и натуральных k и l найдется такое n, что $C_n^k \ \vdots\ p^l$, но $C_n^k \ \not\vdots\ p^{l+1}$, то есть делится в точности на p^l; b) для любого m найдется n такое, что $C_n^k \ \vdots\ m$, а $\frac{C_n^k}{m}$ взаимно просто с m.

25. Паркеты. 13 июля.

Задача. Данным четырехугольником произвольной формы настлать паркет, т.е. заполнить всю плоскость без пропусков и перекрытий.

Некоторые факты. Докажите, что a) при центральной симметрии отрезок переходит в равный ему отрезок, прямая — в параллельную ей прямую; b) то же самое при параллельном переносе.

Упражнение 1. Из бумаги изготовили два одинаковых выпуклых четырехугольника. Один разрезали по одной диагонали, второй — по другой. Докажите, что из четырех полученных треугольников можно составить параллелограмм.

Упражнение 2. В выпуклом четырехугольнике проведены средние линии, т.е. отрезки, соединяющие середины противоположных сторон. Докажите, что из получившихся четырех частей можно составить параллелограмм.

Упражнение 3. Проведены две прямые, делящие две противоположные стороны выпуклого четырехугольника на три равные части, причем внутри четырехугольника эти прямые не пересекаются. Докажите, что между этими прямыми заключена третья часть площади четырехугольника.

Задачи

1. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике одна из средних линий делит его площадь пополам, то этот четырехугольник — трапеция.

10. Вершины треугольника расположены в узлах клетчатой бумаги, причем на его сторонах других узлов нет, а внутри есть ровно один узел O. Докажите, что O — точка пересечения медиан треугольника.

20. Алгоритм Евклида, НОД. 10 июля.

Определение: *Наибольшим общим делителем (НОД)* чисел a и b называется наибольшее натуральное число d такое, что a и b делятся на d. Обозначение: $d = (a,\ b)$.

0. Докажите, что a) $(a,\ b) = (a - b,\ b)$; b) $(ac,\ bc) = c \cdot (a,\ b)$.

0. Теорема о линейном разложении НОД. Для любых целых a и b найдутся x и y такие, что $ax + by = (a,\ b)$

0. Найдите a) $(99! + 100!, 101!)$; b) $(\underbrace{11\ldots1}_{51}, \underbrace{11\ldots1}_{81})$.

0. На какие натуральные числа может быть сократима дробь $\frac{13n+8}{8n+5}$?

1. Докажите, что $(a^m - 1,\ a^n - 1) = a^{(m,\,n)} - 1$.

2. По бесконечной шахматной доске ходит (m, n)–мамонт, который может за один ход сдвинуться на m клеток по горизонтали или вертикали, а затем — на n клеток в перпендикулярном направлении. При каких m и n (m, n)–мамонт сможет попасть из любой клетки доски на любую другую?

3. Известно, что $(m,\ n) = 1$. Каково наибольшее возможное значение $(m + 2009n,\ n + 2009m)$?

4. Племя Упс–ГУ решило выпустить в обращение денежные купюры достоинством 65 упсов и 999 упсов.

a) Докажите, что этими купюрами можно заплатить любую сумму денег (возможно, со сдачей).

b) Докажите, что любую сумму, большую 1000000 упсов, можно заплатить этими купюрами без сдачи.

5. Докажите, что ни при каком натуральном m число $1978^m - 1$ не делится на $1000^m - 1$.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Докажите, что a) $(f_m,\ f_n) = 1$, где $f_k = 2^{2^k} + 1$ — числа Ферма; b) число $2^{2^n} - 1$ имеет по крайней мере n различных простых делителей. Следовательно, простых чисел бесконечно много.

7. Из угла стола $m \times n$ выпускают шар по биссектрисе угла. Ударяясь в стенку, шар отражается так, что угол падения равен углу отражения. Докажите, что рано или поздно шар прилетит в угол. Как найти количество ударов о борта, которые произойдут до этого момента?

8. a) Докажите, что если для некоторых натуральных a и b верно, что НОК$(a, a+5) =$ НОК$(b, b+5)$, то $a = b$.
b) Может ли при различных натуральных a, b и c выполняться равенство НОК$(a, b) =$ НОК$(a+c, b+c)$?

21. Радикальное. 11 июля.

Упр 1. Точка X лежит внутри окружности. Секущая, проведенная из точки X, пересекает окружность в точках A и B. Докажите, что $XA \cdot XB$ не зависит от выбора секущей.
Упр 2. Точка X лежит вне окружности. Докажите то же утверждение, что и в упражнении 1.

1. Пусть расстояние от точки X до центра O окружности радиуса r равно d. Докажите, что степень точки X относительно этой окружности равна
a) $d^2 - r^2$, если X лежит вне окружности;
b) $r^2 - d^2$, если X лежит внутри окружности.

2. На прямой l отмечены две точки — A и B. Кроме того, дано некоторое фиксированное число c.
a) Докажите, что на прямой AB существует ровно одна такая точка X, что $AX^2 - BX^2 = c$.

b) Найдите все числа, дающие при делении на 10 остаток 8, а при делении на 11 остаток 10.
c) Найдите все числа, дающие при делении на 8 остаток 2, а при делении на 13 остаток 11.

6. Найдите все числа, которое при делении на 3 дает остаток 1, при делении на 4 — остаток 2 и при делении на 11 — остаток 3.

7. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

8. a) Вася загадал число от 0 до 60 и сказал, что при делении на 5 оно даёт остаток 3, при делении на 4 даёт 2 и делится на 3. Петя уверен, что точно знает загаданное число. Прав ли он? b) А если задумано число от 1 до 180?

9. (Китайская теорема об остатках) Пусть у нас есть набор попарно взаимно простых модулей $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$ и произвольные числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Докажите, что существует число N такое, что $N \underset{a_i}{\equiv} a_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ a) для $n = 2$; b) докажите методом математической индукции это утверждение для произвольного n. c) Пусть существуют такие числа N_1 и N_2, удовлетворяющие системе сравнений. Докажите, что $N_1 - N_2 \,\vdots\, m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$. d) Докажите КТО следующим образом: рассмотрим все числа от 1 до $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$ и объясним, что они в каком-то смысле “разные”.

Задачи для самостоятельного решения.

10. Пусть мы хотим избавится от условия взаимной простоты в КТО. Понятно, что если у двух чисел m_i и m_j есть общий делитель d_{ij} такой, что a_i и a_j не сравнимы по этому модулю d, то такого числа N не существует. a) Докажите эту очевидность. b) Докажите, что если в системе сравнений нет такой внутренней

4. Общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются в точке K, а общие внутренние в точке L. Докажите, что прямая KL проходит через центры окружностей.

5. Окружности ω_1 и ω_2 касаются сторон угла с вершиной O в точках A, B и C, D (A и B на одной стороне угла). Прямая, проходящая через точку O, пересекает окружность ω_1 последовательно в точках X_1 и Y_1, а окружность ω_2 последовательно в точках X_2 и Y_2. Докажите, что $AX_1||BX_2$.

6. Окружность ω касается окружности Ω в точке P, а хорды AB окружности Ω в точке Q. Докажите, что прямая PQ делит дугу AB окружности Ω, не пересекающуюся с окружностью ω, пополам.

24. Китайская теорема об остатках и разное. 13 июля.

1. Найдите остаток от деления натурального числа на 30, если известно, что остаток от деления его на 15 равен 7, а остаток от деления на 6 равен 4.

2. a) Сколько различных пар остатков может получиться при делении на 25 и на 4? b) Найдите все пары остатков, которые дают числа от 1 до 20 при делении на 4 и на 5.

3. Числа a и b взаимно просты. a) Оказалось, что при делении на a чисел m и n остатки совпали, и совпали остатки от деления чисел m и n на b. Докажите, что $m-n$ кратно ab. b) Докажите, что при делении чисел от 1 до ab на a и на b получаются все возможные пары остатков.

4. *Теорема.* Для взаимно простых чисел и b и любой пары неотрицательных остатков $m < a$ и $n < b$ среди чисел от 1 до ab найдется ровно одно число c такое, что при делении на a дает в остатке m, а при делении на b дает в остатке n.

5. a) Решите в целых числах уравнение $10x + 8 = 11y + 10$.

b) Докажите, что геометрическое место точек Y на плоскости, для которых $AY^2 - BY^2 = c$ — это прямая, перпендикулярная прямой l.

3. Даны две неконцентрические окружности (т.е. с разными центрами). Найдите ГМТ на плоскости, степени которых относительно этих окружностей одинаковы.

Определение: Это ГМТ называется *радикальной осью* двух окружностей.

4. Даны три окружности, центры которых не совпадают и не лежат на одной прямой. (т.е. с разными центрами). Найдите ГМТ на плоскости, стпени которых относительно этих окружностей одинаковы.

Определение: Это ГМТ называется *радикальным центром* трех окружностей.

5. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, пусть O — центр описанной окружности. Докажите, что прямые A_1B_1 и CO перпендикулярны.

6. Докажите, понятно каким способом, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

7. Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая AB делит отрезок общей касательной к окружностям пополам.

8. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки X, Y, Z, T и U, V соответственно. Оказалось, что четырехугольники $XYZT$, $ZTVU$ и $XYVU$ вписанные. Докажите, что шестигольник $XYZTUV$ тоже вписанный.

22. Матбой–междусобой. 11 июля.

1. Пусть p_n — n–е простое число, а $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n. Докажите, что каждое натуральное число представляется ровно в одном из видов $n+p_n-1$ или $n+\pi(n)$.

2. В школе учатся 300 детей по сто человек 1995–го, 1996–го и 1997–годов рождения. Причем мальчиков и девочек по 150. Докажите, что можно составить из них не менее 50 пар мальчик–девочка так, чтобы в каждой паре ученики были одного возраста.

3. Какую наименьшую сумму цифр может иметь число вида $3n^2 + n + 1$ при натуральном n?

4. Прямоугольник площади 19 пересекают 20 попарно параллельных прямых, расстояние между соседними из которых равно 1. Докажите, что сумма длин отрезков, высекаемых многоугольником на прямых, не больше 20.

5. На плоскости лежат 100 точек. Всегда ли можно разбить эти точки на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, попарно пересекались?

6. В ряд посажены 2009 деревьев, среди которых есть дубы. К каждому дереву прибита табличка, на которой указано количество дубов среди следующих деревьев: дерева, на котором висит табличка, и его соседей. Можно ли по числам на табличках определить, какие из деревьев — дубы?

7. Найдите количество всех натуральных $n > 1$, для которых $a^{13} - a$ делится на n при каждом целом a.

8. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y соответственно. Пусть Z — точка пересечения AY и CX. Оказалось, что $AY = YC$ и $AB = CZ$. Докажите, что точки B, Y, Z, X лежат на одной окружности.

23. Гомотетия. 13 июля.

0. Внутри угла дана точка M. Постройте окружность, вписанную в этот угол, и проходящую через точку M.

Определение. Гомотетия с положительным коэффициентом k и центром O — это преобразование плоскости с отмеченной точкой O, которое переводит каждую точку X в точку X', лежащую на луче OX, такую, что $OX' = k \cdot OX$.

Упражнение 1. Определите гомотетию с отрицательным коэффициентом.

Свойство 0. Гомотетия переводит прямую в параллельную ей.

Свойство 1. Гомотетия с коэффициентом k изменяет расстояние в k раз, а площадь в k^2 раз.

Свойство 2. Прямая, соединяющая точку и ее образ при гомотетии, проходит через центр этой гомотетии.

1. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а диагонали в точке O. Докажите, что прямая PO делит основания трапеции пополам.

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB||A_1B_1$, $BC||B_1C_1$ и $CA||C_1A_1$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

3. a) Докажите, понятно каким способом, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.
b) Найдите центр гомотетии, переводящей треугольник в его серединный треугольник.
c) (*Прямая Эйлера*) Докажите, что точка пересечения медиан треугольника лежит на одной прямой с ортоцентром и центром описанной окружности (причем между ними). В каком отношении она делит отрезок между ними?

Свойство 3. Гомотетия переводит окружность в окружность, а касательную к окружности в касательную к окружности.